Hénon-Heiles 系におけるカオスの存在

矢ヶ崎一幸 (岐阜大学工学部)

次のハミルトニアンを有する（一般化された）Hénon-Heiles 系（以下 H-H 系と略）を考える．

$$H(x,y) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2) + cx_1y_1^2 + \frac{1}{3}dx_1^3 \tag{1}$$

Hénon と Heiles [1] は $c = 1$，$d = -1$ の場合に対して数値計算を行い，現在カオスと呼ばれる現象が起こることを示した．伊藤 [2,3] は，Ziglin [4] の方法を用いて，$c/d \neq 0, 1/6, 1/2, 1$ のとき H-H 系が複素解析的な意味で非可積分であることを証明した．$c/d = 0, 1/6, 1$ の例外的な場合 H-H 系は可積分であり，また，高次変分方程式に対する微分ガロア理論を用いて，$c/d = 1/2$ のとき複素解析的な意味で非可積分であることも最近示されている [5]．しかしながら，系の非可積分性はカオスの存在に対しては直接的な関係はない．

一方，H-H 系において，$c/d < 1/2$ のとき点 $(x_1, x_2, y_1, y_2) = (-1/d, 0, 0, 0)$ ，また，$c/d > 1/2$ のとき点 $(-1/2c, 0, \pm\sqrt{2-(d/c)}/2c, 0)$ は，ホモクリニック軌道を有するサドル・センターとなる．Lyapunov の中心定理 [6] により，サドル・センターのまわりには周期軌道の族が存在し，それらの安定多様体と不安定多様体は横断的に交差して，そのダイナミクスには馬蹄写像が埋め込まれ，その結果カオス軌道が存在する可能性がある．本講演では，メルニコフの方法 [7] と呼ばれる大域的な摂動法を拡張して得られる，次の結果 [8–10] について概説する．

定理 1. $c/d \neq 0, 1/6, 1$ のとき，H-H 系のダイナミクスには馬蹄写像が埋め込まれる．

この結果は，$c/d \neq 1/2, 3/4$ に対しては異なった方法により 15 年程前に得られていたが [11]，$c/d = 1/2, 3/4$ の場合に対してはごく最近になって示されたものである [9,10]．この結果により，H-H 系でカオスが起こるパラメータの値が完全に決定されたわけである．

定理 1 は，$c/d \neq 1/2, 3/4$，$c/d = 3/4$ と $c/d = 1/2$ の 3 つの場合に分けて証明される．

参考文献

[1] M. Hénon and C. Heiles, The applicability of the third integral of motion: Some numerical experiments, *Astron. J.* **69** (1964), 73–79.

[2] H. Ito, Non-integrability of Hénon-Heiles system and a theorem of Ziglin, *Kodai Math. J.* **8** (1985), 120–138.

[3] H. Ito, A criterion for non-integrability of Hamiltonian systems with nonhomogeneous potentials, *J. Appl. Math. Phys. (ZAMP)* **38** (1987), 459–476.

[4] S. L. Ziglin, Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I, *Functional Anal. Appl.* **16** (1982), 181–189 .

[5] J. J. Morales-Ruiz, J. P. Ramis and C. Simó, Integrability of Hamiltonian systems and differential Galois groups of higher variational equations, *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.*, **40** (2007), 845–884.

[6] K. Meyer and G. Hall, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer, 1992.

[7] J. Guckenheimer and P. Holmes, *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*, Springer, 1983.

[8] K. Yagasaki, Horseshoes in two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, *Arch. Rational Mech. Anal.* **154** (2000), 275–296.

[9] K. Yagasaki, Higher-order Melnikov method and chaos for two-degree-of-freedom Hamiltonian systems with saddle-centers, submitted for publication.

[10] K. Yagasaki, Existence of horseshoes in the degenerate Hénon-Heiles system, in preparation.

[11] C. Grotta-Ragazzo, Nonintegrability of some Hamiltonian systems, scattering and analytic continuation, *Commun. Math. Phys.* **166** (1994), 255–277.