Coupling of Two Partial Differential Equations and its Application

田原秀敏 (上智大理工)

$\boxed{1}$ Coupling equation とは何か？

常微分方程式論では, 解析的変換を使って「方程式をより簡単な形に変換する」手法は良く用いられる. この解析的変換論を偏微分方程式に拡張して論じると, 変換の方程式（これを本稿では coupling equation と呼んでいる）として, 無限変数の偏微分方程式が現れる。例えば, 最も基本的は２つの正規型の偏微分方程式

$$\text{(A)}\ \frac{\partial u}{\partial t} = F\Big(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \qquad \text{と} \qquad \text{(B)}\ \frac{\partial w}{\partial t} = G\Big(t,x,w,\frac{\partial w}{\partial x}\Big)$$

を考え, 方程式 (A) を方程式 (B) に変換することを考えてみる。実際の応用上では, （A) がもともとの方程式であり, (B) が簡単な形の方程式である。簡単のために, $(t,x) \in \mathbb{C}^2$ とし, $F(t,x,u_0,u_1)$ と $G(t,x,w_0,w_1)$ は 原点 $(0,0,0,0) \in \mathbb{C}^4$ の近傍での正則関数とする。

(1) ここでは, (A) を (B) に変換するのに,

$$(*) \qquad w = \phi(t,x,u,\partial u/\partial x, \partial^2 u/\partial x^2, \ldots)$$

という変換を使いたい。$\phi(t,x,u_0,u_1,u_2,\ldots)$ は無限変数 $(t,x,u_0,u_1,u_2,\ldots)$ の正則関数, $u = u(t,x)$ は (t,x) の関数とする。このとき, もしも $(*)$ が well-defined ならば, $(*)$ で定義される w も (t,x) の関数である。よって, $(*)$ は「$u(t,x) \longmapsto w(t,x)$」という変換を定義する。

(2) 本稿では「(A) が (B) に変換される」とは「もしも $u(t,x)$ が (A) の解ならば, $(*)$ で定義される $w(t,x)$ は (B) の解である」こととする。このとき, 次が成り立つ。

<u>命題</u>. $(*)$ によって, (A) が (B) に変換されるためには, $\phi(t,x,u_0,u_1,\ldots)$ は次の方程式を満たさなければならない。

$$(\Phi) \qquad \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{m\ge 0}(D^m F)(t,x,u_0,\ldots,u_{m+1})\frac{\partial \phi}{\partial u_m} = G(t,x,\phi,D\phi)$$

（これを, (A) と (B) の coupling equation と呼ぶ)。ただし, D は $D = \partial/\partial x + \sum_{i\ge 0} u_{i+1}\partial/\partial u_i$ という無限変数のベクトル場を表す。

(証明) $u(t,x)$ を (A) の解とし, $u_m = (\partial/\partial x)^m u$ $(m = 0,1,2,\ldots)$, $w = \phi(t,x,u_0,u_1,\ldots)$ と置く。$\partial u_m/\partial t = (\partial/\partial x)^m(\partial u/\partial t) = (\partial/\partial x)^m F(t,x,u_0,u_1) = (D^m F)(t,x,u_0,\ldots,u_{m+1})$ より

- $\displaystyle \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{m\ge 0}\frac{\partial \phi}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_{m\ge 0}\frac{\partial \phi}{\partial u_m} \times (D^m F)(t,x,u_0,\ldots,u_{m+1})$
- $\displaystyle G\Big(t,x,w,\frac{\partial w}{\partial x}\Big) = G(t,x,\phi,D\phi)$

が得られる。故に, $w(t,x)$ が (B) の解になるためには, $\phi(t,x,u_0,u_1,\ldots)$ は方程式 (Φ) を満たさなければならない。 □

(3) このように考えれば,「(A) が (B) に変換されるか？」という問題は,「coupling equation (Φ) が良い解を持っているか？」という問題に帰着される。このような立場で,「偏微分方程式の変換論を論じたい」というのが, 講演者が最近すすめている研究である。今までに,「標準形を求める」のに成功しているのは, 次の 2 つの場合である。

1. 正規型の偏微分方程式の場合
2. Briot-Bouquet 型の非線型偏微分方程式の場合

講演では, 2. の内の非共鳴的な場合について, その概要を紹介したい。

$\boxed{2}$ Briot-Bouquet 型の非線型偏微分方程式で非共鳴的な場合

$(t,x) \in \mathbb{C}^2$ とし, 複素領域での原点 $(0,0) \in \mathbb{C}^2$ の近傍で $u = u(t,x)$ を未知関数とする次の非線型偏微分方程式を考える。

$$\text{(E)} \qquad t\frac{\partial u}{\partial t} = F\Big(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big)$$

ここで, 関数 $F(t,x,u,v)$ は 原点 $(t,x,u,v) = (0,0,0,0) \in \mathbb{C}^4$ の近傍で正則で, $F(0,x,0,0) \equiv 0$ 及び $(\partial F/\partial v)(0,x,0,0) \equiv 0$ を満たすものとする。これは, Gérard-Tahara [1] で, Briot-Bouquet type と呼ばれている方程式である。$\lambda(x) = (\partial F/\partial u)(0,x,0,0)$ とおく。

次の条件 c1), c2) をみたす関数 $u(t,x)$ の全体を $\mathscr{S}_0$ [resp. $\mathscr{S}_+$] とかく。c1) ある $r>0$, $\theta>0$, $R>0$ が存在して, $u(t,x)$ は $\{(t,x) \in \mathcal{R}(\mathbb{C}_t \setminus \{0\}) \times \mathbb{C} \,;\, 0<|t|<r, |\arg t|<\theta, |x| \le R\}$ 上で定義された正則関数で, c2) $\{x\,;\,|x| \le R\}$ 上で一様に $|u(t,x)| = o(1)$ $(t \longrightarrow 0)$ [resp. c2) ある $a>0$ が存在して, $\{x\,;\,|x| \le R\}$ 上で一様に $|u(t,x)| = O(|t|^a)$ $(t \longrightarrow 0)$] 。

定理 1. ある $\sigma > 0$ が存在して

$$(*) \qquad |m + \lambda(0)(n-1)| \ge \sigma(m+n), \quad \forall (m,n) \in \mathbb{N}^2 \setminus \{(0,0),(0,1)\}$$

が成り立つとする。このとき, 次の 2 つの方程式は同値である。

$$\text{(i)} \qquad t\frac{\partial u}{\partial t} = F\Big(t,x,u,\frac{\partial u}{\partial x}\Big) \quad \text{in } \mathscr{S}_0 \quad [\text{resp. in } \mathscr{S}_+]$$

$$\text{(ii)} \qquad t\frac{\partial w}{\partial t} = \lambda(x)w \quad \text{in } \mathscr{S}_0 \quad [\text{resp. in } \mathscr{S}_+]$$

方程式 (i) の解の全体を $Sol(\mathscr{S}_0)$ [resp. $Sol(\mathscr{S}_+)$] とおく。$\psi(t,x,w_0,w_1,\ldots)$ を coupling equation ((ii) $\Longrightarrow$ (i)) の解とし, $w(t,x)$ に対し, $\Psi[w] = \psi(t,x,w,\partial w/\partial x,\ldots)$ と略記する。

定理 2（応用）. $(*)$ を仮定する。次が成り立つ。

$$Sol(\mathscr{S}_0) = Sol(\mathscr{S}_+) = \begin{cases} \{\Psi\big[h(x)t^{\lambda(x)}\big]\,;\, h(x) \in \mathbb{C}\{x\}\}, & \mathrm{Re}\lambda(0) > 0 \text{ のとき} \\ \{\Psi[0]\}, & \mathrm{Re}\lambda(0) \le 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

注意. $Sol(\mathscr{S}_+)$ に対する結果は, 既に Gérard-Tahara [1] に書かれているが, $Sol(\mathscr{S}_0)$ に関する結果は初めてである。「Coupling of two PDEs」を考えることの御利益のひとつである。

文献. [1] R.Gérard-H.Tahara, Singular nonlinear partial differential equations, Vieweg (1996). [2] H.Tahara, Coupling of two partial differential equations and its application, Publ. RIMS, 43 (2007), 535-583. [3] H.Tahara, Coupling of two partial differential equations and its application, II - the case of Briot-Bouquet type PDEs -, to appear in Publ. RIMS.