ある Delay Feedback 制御による周期解の安定化問題

宮崎倫子（静岡大），　内藤敏機（電通大），申 正善（電通大 (非)）

1　Delay Feedback 方程式とその性質

自励微分方程式系 $x'(t) = f(x(t))$ の周期解 $x = \phi(t), \phi(t+\omega) = \phi(t), \omega > 0,$ が不安定である場合，Delay Feedback で制御した方程式 $x'(t) = f(x(t)) + K(x(t-\omega) - x(t))$ の周期解として，$x = \phi(t)$ が安定化できるという発想 [1] があり，ここではその数学的基礎を考え, 数値計算による実例を与える．

$A(t) = Df(\phi(t))$ とおき，制御前方程式の $x = \phi(t)$ の周りの変分方程式

$$x'(t) = A(t)x(t), \tag{1}$$

の解作用素を $T(t,s)$ とする．制御した方程式の $x = \phi(t)$ の周りの変分方程式は

$$y'(t) = A(t)y(t) + K(y(t-\omega) - y(t)) \tag{2}$$

であり，相空間 $C([-\omega, 0], \mathbb{C}^n)$ で定義されるその解作用素を $U(t,s), (t \geq s)$ とすると，周期作用素 $U(\omega, 0)$ は固有値 1 をもつ．$U(\omega, 0)$ の他の固有値の絶対値がすべて 1 より小さいとき，Feedback gain K により安定化が成功したと考える．

特性乗数の集合 $\sigma(T(\omega,0)), \sigma(U(\omega,0))$ の関係を見る．容易に $\nu \in \sigma(U(\omega,0)) \iff y(t+\omega) = \nu y(t)$ を満たす (2) の非自明解 $y(t)$ が存在する．

方程式 (2) に付随して遅れのない方程式

$$y'(t) = A(t)y(t) + (\nu^{-1} - 1)Ky(t) \tag{3}$$

をとると，次の条件が成り立つことがが容易に分かる：$y(t) \neq 0$ は,

$y(t+\omega) = \nu y(t)$ を満たす (2) の解である $\iff y(\omega) = \nu y(0)$ を満たす (3) の解である．

$A(t)$ と K の可換条件 $A(t)K = KA(t)$　$(\forall t)$ を仮定すると，(3) の解作用素 $V(t,s)$ は $V(t,s) = T(t,s)e^{(t-s)(\nu^{-1}-1)K}$ のように与えられる．このとき $y(\omega) = \nu y(0)$ を満たす (3) の非自明解が存在する条件は $0 \in \sigma(\nu E - T(\omega,0)e^{\omega(\nu^{-1}-1)K})$ であり，$\Delta(\nu) = \nu e^{\omega(1-\nu^{-1})K} - T(\omega,0)$ とおくと，$0 \in \sigma(\Delta(\nu))$ と書き換えられる．$A(t)$ と K の可換条件があるとき，$\Delta(\nu)$ は可換行列の差であり，そのスペクトルは二つの行列のスペクトルの差で表される．またスペクトル写像定理により，$g_\kappa(\nu) = \nu e^{\omega(1-\nu^{-1})\kappa}$ とおくと，$\sigma(\nu e^{\omega(1-\nu^{-1})K}) = \{g_\kappa(\nu) : \kappa \in \sigma(K)\}$．以上の考察を精密化して次の結果を得る．正方行列 H の固有値 λ に対応する固有空間を $W_H(\lambda)$ と表し，一般固有空間を $G_H(\lambda)$ と表す.

定理 1. $\nu \in P_\sigma(U(\omega,0)) \iff \exists \mu \in \sigma(T(\omega,0)), \exists \kappa \in \sigma(K), s.t. g_\kappa(\nu) = \mu, W_K(\kappa) \cap W_{T(\omega,0)}(\mu) \neq \{0\}$

定理 2. $\mu \in \sigma(T(\omega,0)) \Longrightarrow \exists \nu \in P_\sigma(U(\omega,0)), \exists \kappa \in \sigma(K), s.t. g_\kappa(\nu) = \mu, W_K(\kappa) \cap W_{T(\omega,0)}(\mu) \neq \{0\}$

方程式 (1) の特性乗数を次のように分類する．

$$\sigma_U = \{\mu \in \sigma(T(\omega,0)) \mid |\mu| > 1\}; \qquad \sigma_N = \{\mu \in \sigma(T(\omega,0)) \mid |\mu| = 1\}.$$

定理 3. 次の命題が成り立つ：

1) $\mu > 1$ を満たす $\mu \in \sigma_U$ および $\kappa \in \sigma(K) \cap \mathbb{R}$ が存在し，$W_K(\kappa) \cap W_{T(0)}(\mu) \neq \{0\}$ が成り立つならば，$\nu > 1$ を満たす $\nu \in P_\sigma(U(,\omega,0))$ が存在する．

2) $\sigma_N \subset \{1, -1\}$ かつ $\sigma_U \subset (-e^2, -1)$ とする．このとき，任意の $\kappa \in \sigma(K)$ に対して,

$$\frac{1}{2\omega} \max_{\mu \in \sigma_U} \log|\mu| < \kappa \leq \frac{1}{\omega} \tag{4}$$

が成り立つならば，任意の $\nu \in P_\sigma(U(\omega,0))$ に対して $|\nu| < 1$ または $\nu = 1$ が成り立つ．

方程式 (1) において 1 が特性乗数で, $\dim G_{T(\omega,0)}(1) = \dim W_{T(\omega,0)}(1) = 1$ であるとき方程式 (1) は**非退化**であるという．方程式 (2) に対しても同様に非退化性を定義する．

定理 4. 正方行列 K が $W_{T(\omega,0)}(1) \cap W_K(-1/\omega) = \{0\}$ を満たすと仮定する．このとき方程式 (1) が非退化ならば, 方程式 (2) も非退化である．

「微分方程式の総合的研究」京都大学理学部 6 号館
2008 年 12 月 20 日 (土)〜21 日 (日)

2　レスラー方程式への応用

レスラー方程式に Delay Feedback 制御を施した次の方程式を考える．

$$\begin{cases} x'(t) = -y(t) - z(t) + k(x(t-\omega) - x(t)) \\ y'(t) = x(t) + 0.2y(t) + k(y(t-\omega) - y(t))) \\ z'(t) = 0.2 + z(t)(x(t) - 5.7) + k(z(t-\omega) - z(t)) \end{cases} \tag{5}$$

ここで，k は実定数とし $k = 0$ のときが制御前のレスラー方程式である．制御前のレスラー方程式の周期 ω の不安定周期解を $(x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ とする．これは，(5) の解でもある．この解のまわりでの制御前のレスラー方程式および制御後のレスラー方程式 (5) の変分方程式は，それぞれ方程式 (1) および方程式 (2) で与えられる．ただし，

$$A(t) := \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0.2 & 0 \\ z^*(t) & 0 & x^*(t) - 5.7 \end{pmatrix}, \qquad K = kE.$$

このとき，前節の仮定 $A(t)K = KA(t), t \in \mathbb{R}$ はみたされている．

制御前のレスラー方程式の変分方程式 (1) が非退化であると仮定する．このとき，変分方程式 (1) の 1 を除く特性乗数が 2 個存在し，これを μ_1, μ_2 ($|\mu_1| \leq |\mu_2|$) とおくと，Delay Feedback の成否に関する次の結果が得られる．

定理 5.　方程式 (5) の周期解 $(x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ について，次の命題が成り立つ：

1) $\mu_2 > 1$ であれば，任意の k に対して不安定である．

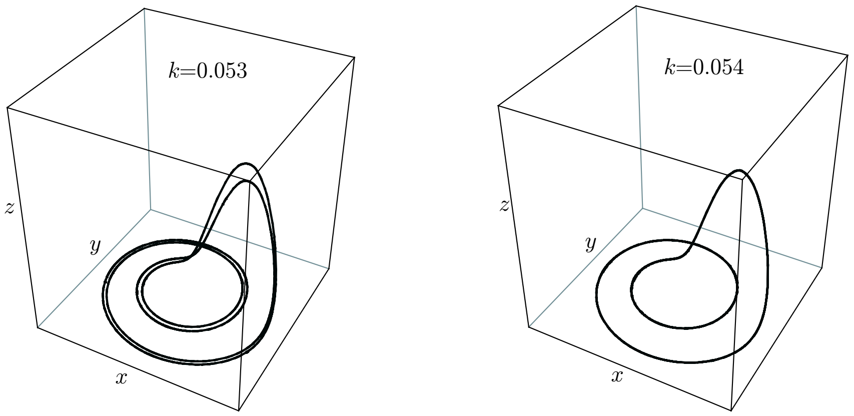
2) $-e^2 < \mu_2 < -1$ であれば，$\log|\mu_2|/(2\omega) < k \leq 1/\omega$ のとき，安定である．

注意 6. 本稿では方程式 (5) の周期解 $(x^*(t), y^*(t), z^*(t))$ の安定性を以下のように定義している：変分方程式の特性乗数の絶対値が 1 より大きなものが含まれるとき不安定；変分方程式が非退化でかつ 1 を除く特性乗数の絶対値が全て 1 より小さいとき安定という．

最後に，Pyragas[1] がレスラー方程式に対して方程式 (5) とは異なる Feedback gain K により提示した，Ddeay Fddeback 制御の成功例（$\omega = 5.8, 11.75$）について検証する．

(I) $\omega = 5.8$ の例．不安定周期軌道の周期の近似値として $\omega = 5.88109$ を採用する．数値的に作った変分方程式 1 の特性乗数を求めると，$-2.40399,\ 0.999986, -8.40037 \times 10^{-7}$ となる．よって，$\mu_2 = -2.40399$ であり定理の条件を満たしている．そして，安定化できる k の範囲は $0.074572 < k \leq 0.170037$ と求まる．

(II) $\omega = 11.75$ の例．不安定周期軌道の周期の近似値として $\omega = 11.7584$ を採用する．数値的に作った変分方程式 1 の特性乗数を求めると，$-3.51137,\ 0.998547, -1.28262 \times 10^{-7}$ となる．よって，$\mu_2 = -3.51137$ であり定理の条件をみたしている．そして，安定化できる k の範囲は $0.053409 < k \leq 0.0850457$ と求まる．



$\omega = 11.7584$ としたときの方程式 (5) のアトラクター．

参考文献

[1] Pyragas, K., Continuous control of chaos by self-controlling feedback, *Physics Letters A*, (1992), 170, 421–428.

[2] 宮崎倫子, Delayed feedback 制御による周期解の安定化問題に関する解析について, 研究集会『偏微分方程式と現象：PDEs and Phenomena in Miyazaki 2005』報告集，(2005), 60–75.