有界な領域におけるハミルトン・ヤコビ方程式の初期値・境界値問題の解の長時間挙動

(Large time behavior of solutions of initial-boundary value problems for Hamilton-Jacobi equations in bounded domains)

早稲田大学 基幹理工学研究科　三竹　大寿

本講演では, 非定常 Hamilton-Jacobi (HJ) 方程式の初期値・境界値問題

$$
\begin{cases}
u_t(x,t) + H(x, Du(x,t)) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \quad (1) \\
\text{境界条件}, & \quad (2) \\
u(x,0) = f(x) & \text{in } \Omega \quad (3)
\end{cases}
$$

について考える． 境界条件として, **(i) 状態拘束境界条件**, **(ii)Dirichlet 境界条件**を扱う． ここで, $H : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は与えられた連続関数, $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ は未知関数とし, $u_t := \partial u/\partial t$, $Du = (\partial u/\partial x_1, \cdots, \partial u/\partial x_n)$ とする.

目的：それぞれの初期値・境界値問題の解に対して, その長時間挙動 (時間を無限にした時の解の漸近的振舞い) を明らかにする.

非定常 HJ 方程式の初期値問題の長時間挙動に対する研究は Kružkov, Lions, Barles らの研究に始まる. 主に $u_t + H(Du) = 0$ の形の HJ 方程式, または, 対応する定常 HJ 方程式の解が一意的である場合に研究された. (1) の形をした HJ 方程式については, Namah-Roquejoffre に始まる. ここ十年間で Fathi, Roquejoffre, Barles-Souganidis, Davini-Siconolfi (前者), Fujita-Ishii-Loretti, Barles-Roquejoffre, Ishii, Ichihara-Ishii (後者) といった研究がある. 前者は n 次元トーラス $\mathbb{T}^n$ 上での初期値問題, 後者は n 次元ユークリッド全空間 $\mathbb{R}^n$ 上での初期値問題の解の長時間挙動について明らかにしている. 結果は次のようである.

適当な仮定の下で, $\mathbb{T}^n$ (または $\mathbb{R}^n$) 上での (1), (3) の解は, ある定数 $c \in \mathbb{R}$, ある定常問題の解 $v \in C(\mathbb{T}^n)$ (または $C(\mathbb{R}^n)$), i.e. $H(x, Dv(x)) = c$, に対して,

$$u(x,t) - (v(x) + ct) \to 0 \text{ uniformly on } \mathbb{T}^n (\text{locally uniformly on } \mathbb{R}^n) \text{ as } t \to \infty$$

が成り立つ.

どちらの場合も対応する定常問題の解が一般的には一意的でないことを注意する. 証明の手法としては, 弱 KAM 理論を援用した手法と, PDE 理論での手法がある. 上記の研究では, 周期境界値問題を除くと, 境界値問題はこれまであまり扱われてこなかった.

以下, 本講演の内容について述べる. 次を仮定する.

(A1) (**狭義凸性**) $H(x,\cdot)$ は各 $x \in \overline{\Omega}$ に対して狭義凸関数.

(A2) (**強圧性**) $H(x,p) \to \infty$ uniformly for $x \in \overline{\Omega}$ as $|p| \to \infty$.

(A3) (**境界の正則性**) Ω は有界な領域 Ω で C^0 境界を持つ.

(i) 状態拘束境界条件

$$
\text{(C)} \qquad
\begin{cases}
u_t(x,t) + H(x, Du(x,t)) \le 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), \quad (4) \\
u_t(x,t) + H(x, Du(x,t)) \ge 0 & \text{on } \overline{\Omega} \times (0,\infty), \quad (5) \\
u(x,0) = f(x) & \text{in } \Omega, \quad (6)
\end{cases}
$$

を考る．仮定 (A1)–(A3) の下で, (C) は一意解 $u \in \mathrm{UC}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ を持ち, 次で与えられる．

$$u(x,t) = \inf\{\int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\ ds + f(\gamma(0)) \mid \gamma \in \mathrm{AC}([0,t], \overline{\Omega}), \gamma(t) = x\}.$$

注意 1. 問題 (C) の解は, (1), (3) の最大解 (最大の粘性解) に等しい．

(ii) Dirichlet 境界条件

$$(\mathrm{CD}) \qquad \begin{cases} u_t(x,t) + H(x, Du(x,t)) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,\infty), & (7) \\ u(x,t) = g(x,t) & \text{on } \partial\Omega \times (0,\infty), & (8) \\ u(x,0) = f(x) & \text{in } \Omega, & (9) \end{cases}$$

を考える．仮定 (A1)–(A3), $g \in \mathrm{UC}(\partial\Omega \times [0,\infty))$, $f(x) \le g(x,0)$ on $\partial\Omega \times [0,\infty)$ の下で, (CD) は一意解 $u \in \mathrm{UC}(\overline{\Omega} \times [0,\infty))$ を持ち, 次で与えられる．

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \ \inf\{\int_0^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\ ds + f(\gamma(0)) \mid \gamma \in \mathrm{AC}([0,t], \overline{\Omega}), \gamma(t) = x\} \\ &\quad \wedge \inf\{\int_\tau^t L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\ ds + g(\gamma(\tau), \tau) \mid \gamma \in \mathrm{AC}([0,t], \overline{\Omega}), \gamma(t) = x, \tau \in (0,t], \gamma(\tau) \in \partial\Omega\}. \end{aligned}$$

ここで, 粘性解の意味で Dirichlet 境界条件を満たしている解が考えられていることに注意する．関数 $g(x,t)$ は $g_1(x,t) + g_2(x,t)$ で与えられ,

(A4) $g_1(x,t) \to 0$ uniformly on $\partial\Omega$ as $t \to \infty$,

(A5) 任意の $(x,t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}$ に対して, $g_2(x,t) = g_2(x,t+1)$

を仮定する．

講演では上の問題 (i), (ii) の解 u の長時間挙動に対する結果について紹介する．また, 時間が許せば, $g(x,\cdot)$ が $t \to \infty$ とした時に発散するような場合の結果についても紹介できればと思う．

最後に, 結果を述べる時に必要となる定数, 関数, 集合を用意しておく．

$$c_H := \inf\{a \in \mathbb{R} \mid H(x, Du(x)) \le a \text{ in } \Omega\text{は解をもつ}\},$$

$$d_{c_H}(x,y) = \sup\{v(x) - v(y) \mid v \in C(\overline{\Omega}), H(x, Dv) \le c_H \text{ in } \Omega\},$$

$$\mathcal{A}_{\overline{\Omega}} := \{y \in \overline{\Omega} \mid d_{c_H}(\cdot, y) \text{ は定常状態拘束問題の解}\}, \quad \underline{g}(x) := \inf_{s \ge 0}\{g_1(x,s) + g_2(x,s)\},$$

$$v_f(x) := \min\{d_{c_H}(x,z) + f(z) \mid z \in \overline{\Omega}\}, \quad v_{\underline{g}}(x) := \min\{d(x,y) + \underline{g}(y) \mid y \in \partial\Omega\}.$$

参考文献：

[BS] G. Barles and P. E. Souganidis, SIAM J. Math. Anal. **31** (2000), no. 4, 925–939.

[DS] A. Davini and A. Siconolfi, SIAM J. Math. Anal. **38** (2006), no. 2, 478–502.

[F] A. Fathi, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **327** (1998), no. 3, 267–270.

[II1] N. Ichihara and H. Ishii, Comm. in Partial Differential Equations **33** (2008), No.5, pp.784-807.

[II2] N. Ichihara and H. Ishii, to appear in Methods Appl. Anal.

[II3] N. Ichihara and H. Ishii, to appear in Arch. Rat. Mech. Anal.

[I] H. Ishii, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire, **25** (2008), no 2, 231–266.

[M1] H. Mitake, Appl. Math. Optim. **58** (2008), no. 3, 393-410.

[M2] H. Mitake, Large time behavior of solutions of Hamilton-Jacobi equations with periodic boundary data, submitted.

[NR] G. Namah and J.-M. Roquejoffre, Comm. Partial Differential Equations **24** (1999), no. 5-6, 883–893.

[R] J.-M. Roquejoffre, J. Math. Pures Appl. (9) **80** (2001), no. 1, 85–104.