Phenomenon of critical dimension to Brezis-Nirenberg type super linear 2nd order ODEs

岐阜大学工学部　浅川　秀一

要旨　べき形の非線形項を含む楕円型偏微分方程式は，天体物理学の Lane-Emden 方程式をはじめとして，非線形熱方程式の定常状態，非線形 Schrö dinger 方程式の定在波や微分幾何学等の様々な問題に現れ，その解，とくに正値解の存在・非存在や一意性などの広範な研究がなされている．一般に，存在よりも非存在と一意性の問題のほうが難しいと言われている．それは，存在は方程式の係数関数の局所的な情報だけからでも得られることが多いが，非存在や一意性についてはそのようなことは望めないからである．しかしながら，正値解の存在についても係数関数の大域的な情報なしには得られないという状況が起こることがあり，そのような特異な現象はしばしば臨界次元現象と呼ばれる．臨界次元という呼び名は，Brezis-Nirenberg [2] により，次の結果等が報告されたことに由来する：$N \geq 3$ を空間の次元とし，ソボレフの臨界指数 $p = (N+2)/(N-2)$ のとき，R^N の単位球 Ω 上での半線形楕円型偏微分方程式

$$\Delta u(x) + \mu u(x) + u(x)^p = 0, \quad u(x) > 0, \quad x \in \Omega, \quad u(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega \tag{EP}$$

に対して，次の (a), (b) が成り立つ；

(a) $N \geq 4$ のとき，(EP) が解 $u \in H_0^1(\Omega)$ をもつ $\iff 0 < \mu < \mu_1$；

(b) $N = 3$ のとき，(EP) が解 $u \in H_0^1(\Omega)$ をもつ $\iff \mu^* := \pi^2/4 < \mu < \mu_1 := \pi^2$.

ここで，μ_1 は線形の固有値問題 $\Delta u + \mu u = 0$ の第一固有値である．$N = 3$ の場合は特別であり，$0 < \mu \leq \mu^*$ のときには正値解 $u \in H_0^1(\Omega)$ が存在しないことから，$N = 3$ は方程式 (EP) の臨界次元と呼ばれている．その後の Escobedo-Kavian [4], Jannelli [5] 等の研究により，同様な現象がソボレフの臨界指数をもつ種々の半線形楕円型偏微分方程式に対しても現れ，そのような現象は，単に空間次元だけによって起こるのではなくて，方程式の係数関数や指数にも依存して起こることは知られるところである．

本講演では，次の $(0,1)$ 区間上の半線形 Stü rm-Liouville 型方程式の H_0^1-正値解に対する臨界次元現象について考察する．

$$v''(t) + \lambda q(t)v(t) + m(t)v(t) + \eta t^{-(p+3)/2} v(t)^p = 0, \quad 0 < t < 1, \quad v(0) = v(1) = 0. \tag{BN}$$

ただし，指数 $p > 1$ であり，$\eta > 0$, $q(\cdot)$, $m(\cdot) \in C(0,1)$ とする．常微分方程式 (BN) は，球対称領域上の半線形楕円型偏微分方程式の球対称解 $u(r) := u(|x|)$ が満たす常微分方程式を，変数変換により規格化したときに現れる典型的な方程式の一つである．例えば，方程式 (EP) の場合には，$m(\cdot) \equiv 0$ であり，

$$v''(t) + \lambda q(t)v(t) + \eta t^{-(p+3)/2} v(t)^p = 0, \quad 0 < t < 1, \quad v(0) = v(1) = 0 \tag{BN0}$$

となる．ただし，$q(t) := t^\alpha$, $\alpha = 2/(N-2) - 2$, $\eta := (N-2)^{-(p+3)/2}$ である．このとき，次のことが成り立つ．

(A) $q(\cdot) \notin L^1(0,1/2)$ のとき，(BN0) が H_0^1-正値解 $v(\cdot)$ をもつ $\iff$ $\lambda \in (0,\lambda_1)$;

(B) $q(\cdot) \in L^1(0,1/2)$ のとき, (BN0) が H_0^1-正値解 $v(\cdot)$ をもつ $\iff$ $\lambda \in (\lambda_*,\lambda_1)$.

ただし，λ_1 と λ_* は，それぞれ，線形固有値問題

$$v''(t) + \lambda q(t)v(t) = 0, \qquad 0 < t < 1,$$

の境界条件 $v(0) = v(1) = 0$ と $v'(0) = v(1) = 0$ の下での第一固有値である．$\alpha = 2/(N-2)-2$ であるから， $N \geq 4$ のときは (A) であり，$2 < N < 4$ のときは (B) である．同じことが，もっと一般の $q(\cdot)$ に対しても言える．

定理. 係数関数 $q(\cdot)$ は，$q(\cdot) \not\equiv 0$ なる $C(0,1)$-関数であって，$(\cdot)^2 q(\cdot)$ が $(0,1)$ 区間上で単調非減少であり，

$$q[0] := \lim_{t\to 0} t^2 q(t) = 0, \qquad q[1] := \lim_{t\to 1}(1-t)^2 q(t) = 0$$

とする．このとき，(A) と (B) が成り立つ．

(B) の $q(\cdot) \in L^1(0,1/2)$ のときが，臨界次元現象が起こっている場合であり，皮肉にもこの特異現象は $q(\cdot)$ の $t=0$ での特異性が小さいために起こるのである．臨界次元現象の生起条件としては，Jannelli [5] に原理として述べられている線形部分の楕円型作用素の基本解の局所 L^2-可積分性が知られているが，(B) の可積分条件はそれと同等のものである．

Escobedo-Kavian [4] 等に述べられている熱方程式の前向き自己相似解の楕円形方程式の場合には，$m(\cdot) \not\equiv 0$ である方程式 (BN) に対応しているため，上記の定理には適用できない．しかし，必ずしも $m(\cdot) \equiv 0$ でない一般の方程式 (BN) に対しても，定理と同様な結果が得られていて，前向き自己相似解の方程式にも適用できる．それについても講演では紹介したいと考えています.

References

[1] H. Asakawa; Phenomenon of critical dimension to Brezis-Nirenberg type super linear 2nd order ODEs, preprint.

[2] H. Brezis and L. Nirenberg; Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents, *Comm. Pure Appl. Math.* **36** (1983), 437–477.

[3] C. V. Coffman, J. S. W. Wong; Oscillation and nonoscillation of solutions of generalized Emden-Fowler equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **167** (1972), 399–434.

[4] M. Escobedo and 0. Kavian; Variational problems related to self-similar solutions of the heat equation, *Nonlinear Anal. TMA* **11** (1987), 1103–1133.

[5] E. Jannelli; The role played by space dimension in elliptic critical problem, *J. Differential Equations* **156** (1999), 407–426.

[6] Y. Kabeya, E. Yanagida and S. Yotsutani; Canonical forms and structure theorems for radial solutions to semi-linear elliptic problems, *Communication on Pure and Applied Analysis* **1** (2002), 85-102.

[7] M. K. Kwong, Y. Li; Uniqueness of radial solutions of semilinear elliptic equations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **333** (1992), 339–363.

[8] E. Yanagida and S. Yotsutani; Classification of structure of positive radial solutions to $\Delta + K(|x|)u^p = 0$ in R^n, *Arch. Rational Mech.* Vol. 124 (1993), 239–259.