マイクロポーラ磁気流体方程式系の外部問題について

山口 範和 (早稲田大学理工学術院)

$\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ を滑らかな境界をもつ有界集合とし, Ω を $\mathcal{O}$ に対する外部領域とする. すなわち $\Omega \equiv \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\mathcal{O}}$ とする.

本講演では外部領域 Ω における以下の**マイクロポーラ磁気流体方程式系**の初期値・境界値問題を考える:

$$
\begin{cases}
\partial \boldsymbol{u}/\partial t - (\nu+\chi)\Delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u} + \nabla\pi = \chi \operatorname{rot}\boldsymbol{w} + \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{B}, & x\in\Omega, t>0,\\
\partial \boldsymbol{w}/\partial t - \gamma\Delta\boldsymbol{w} - \alpha\nabla\operatorname{div}\boldsymbol{w} + 2\chi\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{w} = \chi\operatorname{rot}\boldsymbol{u}, & x\in\Omega, t>0,\\
\partial \boldsymbol{B}/\partial t + \dfrac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \operatorname{rot}(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B}) = 0, & x\in\Omega, t>0,\\
\boldsymbol{u}=0, \quad \boldsymbol{w}=0, \quad \operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n}=0, \quad \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{B}=0, & x\in\partial\Omega, t>0,\\
\boldsymbol{u}(\cdot,0)=\boldsymbol{u}_0, \quad \boldsymbol{w}(\cdot,0)=\boldsymbol{w}_0, \quad \boldsymbol{B}(\cdot,0)=\boldsymbol{B}_0, & x\in\Omega.
\end{cases}
\tag{MMPF}
$$

ここで $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ は流速, π は圧力, $\boldsymbol{w} = (w_1, w_2, w_3)$ は流体中の微小粒子の角速度, $\boldsymbol{B} = (B_1, B_2, B_3)$ は磁束密度を表わす未知関数. $\boldsymbol{n}$ は $\partial\Omega$ 上の単位外法線. $\nu, \chi, \gamma, \alpha$ は各種の粘性係数であり, 熱力学第 2 法則を満たす要請から $\min\{\nu, \chi, \gamma, \gamma+\alpha\} > 0$ を満たすものとする. また σ, μ はそれぞれ電気伝導度と透磁率を表わし, これらは共に正とする. (MMPF) の物理的背景については [3] が詳しい.

本講演では, 小さい初期値を与えた場合の (MMPF) に対する時間大域的な解の存在とその時刻無限大での漸近挙動について考察したい. そこで, 線形化問題を考えると, $(\boldsymbol{u}, \pi, \boldsymbol{w})$ に対する流体の方程式系と磁束密度 $\boldsymbol{B}$ に対する方程式系は互いに独立であることがわかる. したがって, Kato [2] の Navier-Stokes 方程式系に対する初期値問題の場合と類似のアプローチで (MMPF) を解析するには, それぞれの線形化問題が特徴付ける半群の性質を独立に調べればよい. 特にそれぞれの半群に対して外部領域における Stokes 半群と同様の L^p-L^q 評価が得られれば縮小写像の原理 (加藤の逐次近似法) により少なくとも小さな初期データに対しては強解の存在を示す事が出来る.

外部領域において半群の L^p-L^q 評価を示す方法は Iwashita [1] の Stokes 半群に対する方法に倣って行うが, $(\boldsymbol{u}, \pi, \boldsymbol{w})$ に対する線形化問題では右辺の線形のカップリングを加味する点で全空間における熱核の評価を直接利用する事が出来ない, $\boldsymbol{B}$ に対する線形化問題では境界条件の特殊性から領域に対する幾何学的条件を課す必要が生じる, といった (MMPF) 固有の問題が生じる.

$1 < p < \infty$ のとき, $\boldsymbol{L}^p(\Omega) = L^p_\sigma(\Omega) \oplus \{\nabla\pi \,|\, \pi \in \hat{W}^{1,p}(\Omega)\}$ なる Helmholtz 分解はよく知られている. ここで

$$\boldsymbol{L}^p_\sigma(\Omega) = \{\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}^p(\Omega) \,|\, \operatorname{div}\boldsymbol{u} = 0 \text{ in } \Omega,\ \boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}.$$

$P = P_{p,\Omega}$ を Helmholtz 分解と対応する $\boldsymbol{L}^p(\Omega)$ から $L^p_\sigma(\Omega)$ への連続的射影とする. 表記を簡単にする為に $\boldsymbol{X}^p(\Omega) \equiv L^p_\sigma(\Omega) \times \boldsymbol{L}^p(\Omega)$, $\boldsymbol{V} \equiv {}^t(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$ とし, (MMPF) に対して発展方程式としての定式化を行おう. 定式化の方法は Navier-Stokes 方程式系に対する方法と同様に行えばよい. 射影作用素 P を用いて線形作用素 $\mathcal{A}$, $\mathcal{M}$ を以下のように定める.

$$
\begin{aligned}
D(\mathcal{A}) &= [L^p_\sigma(\Omega) \cap \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \cap \boldsymbol{W}^{1,p}_0(\Omega)] \times [\boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \cap \boldsymbol{W}^{1,p}_0(\Omega)],\\
\mathcal{A}\boldsymbol{V} &= \begin{bmatrix} -P(\nu+\chi)\Delta & -\chi\operatorname{rot} \\ -\chi\operatorname{rot} & -\gamma\Delta - \alpha\nabla\operatorname{div} + 2\chi \end{bmatrix} \boldsymbol{V} \quad \text{for } \boldsymbol{V} \in D(\mathcal{A}),\\
D(\mathcal{M}) &= L^p_\sigma(\Omega) \cap \{\boldsymbol{B} \in \boldsymbol{W}^{2,p}(\Omega) \,|\, \operatorname{rot}\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{n} = 0 \text{ on } \partial\Omega\},\\
\mathcal{M}\boldsymbol{B} &= \frac{1}{\sigma\mu}\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} \quad \text{for } \boldsymbol{B} \in D(\mathcal{M})
\end{aligned}
$$

作用素 $\mathcal{A}$ と $\mathcal{M}$ を用いれば (MMPF) は次の $\boldsymbol{X}^p(\Omega) \times L^p_\sigma(\Omega)$ 上の抽象的 Cauchy 問題へと書き直す事が出来る.

定理 1 (半群の生成)**.** $1 < p < \infty$ とする. このとき

(i) $-\mathcal{M}$ は解析的半群 $(e^{-t\mathcal{M}})_{t\ge 0}$ を $L^p_\sigma(\Omega)$ 上で生成する.
(ii) $-\mathcal{A}$ は解析的半群 $(e^{-t\mathcal{A}})_{t\ge 0}$ を $\boldsymbol{X}^p(\Omega)$ 上で生成する.

定理 1 と Duhamel の原理より (MMPF) から次の積分方程式系を得る.

$$\begin{cases} \boldsymbol{V}(t) = e^{-t\mathcal{A}}\boldsymbol{V}_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)\mathcal{A}}\mathcal{N}(\boldsymbol{V})(\tau)\,d\tau, \\ \boldsymbol{B}(t) = e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{B}_0 + \displaystyle\int_0^t e^{-(t-\tau)\mathcal{M}}(\boldsymbol{u}(\tau)\cdot\nabla\boldsymbol{B}(\tau) - \boldsymbol{B}(\tau)\cdot\nabla\boldsymbol{u}(\tau))\,d\tau \end{cases} \tag{INT}$$

ここで

$$\mathcal{N}(\boldsymbol{V})(t) = \begin{bmatrix} -P[\boldsymbol{u}(t)\cdot\boldsymbol{u}(t) - \dfrac{1}{\mu}\operatorname{rot}\boldsymbol{B}(t)\times\boldsymbol{B}(t)] \\ -\boldsymbol{u}(t)\cdot\nabla\boldsymbol{w}(t) \end{bmatrix}.$$

半群 $e^{-t\mathcal{M}}$, $e^{-t\mathcal{A}}$ は次の L^p-L^q 評価を満たす.

定理 2 (L^p-L^q 評価)**.** (i) 任意の $\boldsymbol{V}\in\boldsymbol{X}^p(\Omega), t>0$ に対して次が成立する.

$$\|\nabla^j e^{-t\mathcal{A}}\boldsymbol{V}\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{j}{2}}\|\boldsymbol{V}\|_{L^p(\Omega)}, \quad \begin{cases} j=0, & 1\le p\le q\le\infty, p\ne\infty, q\ne 1, \\ j=1, & 1<p\le q\le 3, \end{cases}$$

(ii) $\mathcal{O}$ を**単連結**とする. このとき任意の $\boldsymbol{B}\in L^p_\sigma(\Omega), t>0$ に対して次が成立する.

$$\|\nabla^j e^{-t\mathcal{M}}\boldsymbol{B}\|_{L^q(\Omega)} \le Ct^{-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)-\frac{j}{2}}\|\boldsymbol{B}\|_{L^p(\Omega)}, \quad \begin{cases} j=0, & 1\le p\le q\le\infty, p\ne\infty, q\ne 1, \\ j=1, & 1<p\le q\le 3, \end{cases}$$

定理 2 と縮小写像の原理より (INT) を解くことで, 次を得る.

定理 3 (小さな大域解の存在と漸近挙動)**.** $\mathcal{O}$ を単連結, $(\boldsymbol{u}_0, \boldsymbol{w}_0, \boldsymbol{B}_0)\in\boldsymbol{X}^3(\Omega)\times L^3_\sigma(\Omega)$ とする. このとき, 次を満たす $\epsilon>0$ が存在する: $\|(\boldsymbol{u}_0,\boldsymbol{w}_0,\boldsymbol{B}_0)\|_{L^3(\Omega)}<\epsilon$ ならば (MMPF) は以下の性質を持つ強解 $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w},\boldsymbol{B})(t)\in BC([0,\infty);\boldsymbol{X}^3(\Omega)\times L^3_\sigma(\Omega))$ を一意にもつ:

$$\lim_{t\to 0}\|(\boldsymbol{V}(t)-\boldsymbol{V}_0, \boldsymbol{B}(t)-\boldsymbol{B}_0)\|_{L^3(\Omega)} = 0,$$

$$\|(\boldsymbol{V},\boldsymbol{B})(t)\|_{L^q(\Omega)} = o\left(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}\right), \quad 3<q\le\infty, \quad \|\nabla(\boldsymbol{V},\boldsymbol{B})(t)\|_{L^3(\Omega)} = o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right), \quad t\to 0+;$$

$$\|(\boldsymbol{V},\boldsymbol{B})(t)\|_{L^q(\Omega)} = o\left(t^{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2q}}\right), \quad 3\le q\le\infty, \quad \|\nabla(\boldsymbol{V},\boldsymbol{B})(t)\|_{L^3(\Omega)} = o\left(t^{-\frac{1}{2}}\right), \quad t\to\infty.$$

References

[1] H. Iwashita. L_q-L_r estimates for solutions of the nonstationary Stokes equations in an exterior domain and the Navier-Stokes initial value problems in L_q spaces. *Math. Ann.*, 285(2):265–288, 1989.
[2] T. Kato. Strong L^p-solutions of the Navier-Stokes equation in $\mathbb{R}^m$, with applications to weak solutions. *Math. Z.*, 187(4):471–480, 1984.
[3] G. Łukaszewicz. *Micropolar fluids*. Modeling and Simulation in Science, Engineering and Technology. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999. Theory and applications.
[4] Y. Shibata and N. Yamaguchi. Local energy decay for a parabolic system related to Maxwell's equaitons in exterior domain. preprint.
[5] N. Yamaguchi. Existence of global strong solution to the micropolar fluid system in a bounded domain. *Math. Methods Appl. Sci.*, 28(13):1507–1526, 2005.
[6] N. Yamaguchi. Global L^3 solution and its decay for the micropolar fluid system in exterior domains. preprint.
[7] N. Yamaguchi. On an existence theorem of global strong solution to the magnetohydrodynamic system in three dimensional exterior domian. *Differential Integral Equations*, 19(8):919–944, 2006.

東京都新宿区大久保 3-4-1
E-mail address: `norikazu@gm.math.waseda.ac.jp`