2階楕円型方程式系の正値全域解について

寺本 智光（尾道大学 経済情報学部）

この講演では次の2階半線形楕円型方程式系の球対称な正値全域解の存在と非存在について考察する.

$$\Delta u_i = P_i(|x|)u_{i+1}^{\alpha_i}, \quad x \in \boldsymbol{R}^N, \quad i = 1, 2, \cdots, m, \tag{1}$$

ここで $N \geq 3,\ m \geq 2,\ \alpha_i > 0,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ は定数で $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m > 1$ を満たすとする. $P_i(r) \geq 0,\ r = |x|$ は $[0, \infty)$ で連続とする.

Definition $(u_1, u_2, \cdots, u_m)$ が (1) の全域解であるとは $u_i \in C^2(\boldsymbol{R}^N),\ i = 1, 2, \cdots, m,$ であり $\boldsymbol{R}^N$ で (1) を満たすときをいう.

講演者は, これまで (1) のタイプの方程式系の正値全域解の存在・非存在について研究してきた. (1) のタイプの方程式系のおいては $P_i \leq 0$ の場合の研究が大部分であり, 本講演のように $P_i \geq 0$ の場合の研究は少ない (全域解の非存在については講演者が知る限りでは [1,4-7] のみ). 本講演では, これまでの成果 (単独の方程式の場合も含めて) と共に最近得られた結果について紹介する.

記号 $\lambda_i \in \boldsymbol{R},\ i = 1, 2, \cdots, m,$ に対して $\Lambda_i(k)$ を次のように定義する:

$$\begin{aligned}\Lambda_i(k) &= \lambda_i - k + (\lambda_{i+1} - k)\alpha_i + (\lambda_{i+2} - k)\alpha_i\alpha_{i+1} + \cdots \\ &\qquad + (\lambda_{i+m-2} - k)\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+m-3} + (\lambda_{i+m-1} - k)\alpha_i\alpha_{i+1}\cdots\alpha_{i+m-2}, \\ A &= \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_m.\end{aligned}$$

Remark. $\lambda_{i+m} = \lambda_i,\ \alpha_{i+m} = \alpha_i$ と解釈する.

(1) の正値全域解の存在について次の結果がある.

Theorem 1[2] $P_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ が次を満たすとする.

$$\int^{\infty} sP_i(s)ds < \infty, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{2}$$

このとき (1) の有界な正値全域解が存在する.

Theorem 2[5] $P_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ が

$$P_i(r) \leq C_i r^{-\lambda_i}, \quad r \geq r_0 > 0, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

を満たすとする, ここで $C_i > 0, i = 1, 2, \cdots, m,$ は定数, $\lambda_i,\ i = 1, 2, \cdots, m,$ は

$$\Lambda_i(2) > 0 \quad \text{for all} \quad i \in \{1, 2, \cdots, m\}$$

を満たすとする. このとき (1) の正値全域解が存在する.

A.V.Lair と A.W.Shaker[3] は, 条件 (2) の下で非有界な解が存在することを示した (ただし, $m = 2, \alpha_1 > 1, \alpha_2 > 1$ の場合).

(1) の正値全域解の増大度の評価について次の結果がある:

Theorem 3[5]. $P_i,\ i=1,2,\cdots,m,$ が

$$P_i(r) \ge r^{-\lambda_i}, \quad r \ge r_0 > 0, \quad i=1,2,\cdots,m, \tag{3}$$

を満たすとする, ここで λ_i は定数. このとき $(u_1,u_2,\cdots,u_m)$ を (1) の正値全域解とすると u_i は

$$u_i(r) \le C_i r^{\frac{\Lambda_i(2)}{A-1}} \quad \text{at} \ \ \infty, \quad i=1,2,\cdots,m,$$

を満たす, ここで $C_i>0$ は定数.

(1) の正値全域解の非存在については次の結果がある:

Theorem 4[5] $P_i,\ i=1,2,\cdots,m,$ が (3) を満たすとする, ただし $\lambda_i, i=1,2,\cdots,m,$ は

$$\Lambda_i(2) \le 0 \quad \text{for} \ \ \text{some} \ \ i \in \{1,2,\cdots,m\}$$

を満たすとする. このとき (1) の正値全域解は存在しない.

Theorem 1 の積分条件 (2) を満たさないとき, すなわち次の場合, 正値全域解の存在・非存在がどうなるかに興味がある.

(i) すべて発散　　(ii) 収束と発散が混在

結果的には (i),(ii) のどちらの場合も正値全域解が存在する場合と存在しない場合がある (ただし (i) の場合は, ほとんど非存在だと思われる). 今回 (ii) の場合について次の結果が得られた.

Theorem 5. 次を満たす $\lambda_i, i=1,2,\cdots,m,$ が存在するとする.

$$\int^{\infty} s^{\lambda_i} P_i(s)ds < \infty,$$
$$\Lambda_i(1) \ge 0, \quad i=1,2,\cdots,m.$$

このとき (1) の正値全域解が存在する.

Remark. Theorem 5 で $\lambda_i=1,\ i=1,2,\cdots,m,$ のときは積分条件 (2) になる.

参考文献

[1] K. Deng, Nonexistence of entire $\cdots$, Funkcial. Ekvac., 39(1996), 541-551.

[2] N. Kawano, On bounded entire $\cdots$, Hiroshima. Math. J. 14(1984), 125-158.

[3] A. V. Lair and A. W. Shaker, Existence of entire ..., J. Diff. Eq, 164(2000), 380-394.

[4] T. Teramoto, Existence and nonexistence $\cdots$, Funkcial. Ekvac., 42(1999), 241-260.

[5] T. Teramoto, On nonnegative entire $\cdots$, Electron. J. Diff. Eqns., No.94(2003), 1-22.

[6] T. Teramoto and H.Usami, A Liouville type $\cdots$, Pacific J. Math., 204(2002), 247-255.

[7] S. Yarur, Nonexistence of positive $\cdots$, Electron. J. Diff. Eqns., No.08(1996), 1-22.