微分方程式の解の漸近挙動と Karamata 関数

谷川　智幸　（上越教育大学自然）

Karamata 関数の理論は 1930 年のセルビアの数学者 J. Karamata によって Tauberian theorems への応用を目的として創始された ([1]). その理論は, 彼自身並びに彼の同僚や教え子達の研究により発展し, 1960 年代までに今日のような形に整備された. Karamata 関数とは, 大まかに言えば, 無限遠の近傍で定義された正値関数を, ある基準に従って, $t \to \infty$ のときの漸近挙動によって分類して得られる様々な関数クラスの総称である. その基準としては, 例えば,

$$\frac{f(\lambda t)}{f(t)} \to g(\lambda) \quad (t \to \infty) \quad (\forall \lambda > 0)$$

のタイプの極限関係（あるいはそれから派生する関係）が採用される. 基準の取り方によって, 緩変動関数, 正則変動関数, 正則有界関数, 急変動関数などと命名される Karamata 関数の族が生まれる. このような Karamata 関数の理論と 1970 年の L. de Haan の学位論文に由来する de Haan の関数の理論が, 今日 “regular variation” と呼ばれている理論の 2 本柱を形成している. この regular variation は, 古典的な 1 変数実関数論の一部分に過ぎないように見えるが, その存在理由は, Tauberian theorems, Abelian theorems のみならず 解析的整数論, 複素解析学, 確率論 などの諸分野に広く応用されるという事実によって十分に確立されている ([2]).

以下では考察を Karamata の理論に限り, de Haan の理論には触れない.

Karamata 関数と微分方程式との関わりの系統的研究は比較的新しく, M. Tomić – V. Marić の論文 [3] (1976 年) に始まるとされている. この方向の研究では当然, 与えられた微分方程式が Karamata 関数解をもつか否かの判定が主なテーマになる. 言い換えれば, 微分方程式の非振動解（正値解）の漸近挙動の解析に regular variation の理論を有効に適用することが可能か否かが主要な問題になる. Tomić – Marić は Thomas – Fermi 型の微分方程式

$$x'' = f(t)\varphi(x) \tag{A}$$

に対して $f(t)$ と $\varphi(x)$ に適当な Karamata 性の条件を要求して, (A) の正値減少解の $t \to \infty$ における漸近挙動を決定した. 彼等はやがて考察の対象を線形微分方程式

$$x'' + q(t)x = 0 \tag{B}$$

に移し ([4]), 今度は関数 $q(t)$ に Karamata 性を要求せずに, (B) が適当な Karamata 関数クラスに属する解の基本系が存在するための必要十分条件を導くことに成功した.

Karamata 関数の微分方程式 (A), (B) への応用に関するセルビア学派の研究成果を纏めた本 ([5]) が 2000 年に出版された. 著者の Marić は, regular variation が微分方程式の非振動解の漸近解析に適した枠組みであることを説得的に解説している.

この本の出版の直後, J. Jaroš – T. Kusano, は先ず, 方程式 (B) に対する Karamata 関数解の存在証明においては, Marić 等の逐次近似法ではなく不動点定理（縮小写像原理）の適用が効果的であることに注意し ([6]), さらに (B) より一般な線形微分方程式

$$(p(t)x')' + q(t)x = 0 \tag{C}$$

の非振動性を Karamata の流儀で解析する際には, 従来の Karamata 関数では十分でなく, "一般化された Karamata 関数" を導入する必要があるという事実を指摘し, 一般化の指針を示した. この 2 つの論文によって, regular variation の枠組みの中で論じられる微分方程式のクラスは飛躍的に拡大された. 線形微分方程式 (B) に対する結果の一部が半分線形微分方程式

$$\text{(D)} \qquad (|x'|^{\alpha}\operatorname{sgn} x')' + q(t)|x|^{\alpha}\operatorname{sgn} x = 0$$

に拡張されたこと ([7]), さらに (B), (D) の Karamata 関数解の精密な表現式を用いることによって, それらの関数方程式版

$$x''(t) + q(t)x(g(t)) = 0,$$
$$(|x'(t)|^{\alpha}\operatorname{sgn} x'(t))' + q(t)|x(g(t))|^{\alpha}\operatorname{sgn} x(g(t)) = 0$$

に対しても同種の Karamata 関数解を構成することが可能になったこと ([8], [9]) などはその好例である.

本講演では, regular variation による微分方程式研究の小史を上述の流れに従って解説する.

参考文献

[1] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière des fonctions, Math. (Cluj), **4**, (1930), pp. 38 – 53.

[2] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, Regular Variation, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 27, Cambridge University Press, 1987.

[3] V. Marić and M. Tomić, Asymptotic properties of solutions of the equation $y'' = f(x)\varphi(y)$, Math. Z., **149**, (1976), pp. 261 – 266.

[4] V. Marić and M. Tomić, Slowly varying solutions of second order linear differential equations, Publ. Inst. Math. (Beograd), **58** (72), (1995), pp. 129 – 136.

[5] V. Marić, Regular Variation and Differential Equations, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1726, Springer, Berlin. 2000.

[6] J. Jaroš and T. Kusano, Remarks on the existence of regularly varying solutions for second order linear differential equations, Publ. Inst. Math. (Beograd), **72** (96), (2002), pp. 113 – 118.

[7] J. Jaroš, T. Kusano and T. Tanigawa, Nonoscillation theory for second order half-linear differential equations in the framework of regular variation, Result. Math. **43**, (2003), pp. 129 – 149.

[8] T. Kusano and V. Marić, On a class of functional differential equations having slowly varying solutions, Publ. Inst. Math. (Beograd) (to appear).

[9] T. Tanigawa, Half-linear functional differential equations having slowly varying solutions. (in preparation)