ドリンフェルト・ソコロフ階層と結合型パンルヴェVI方程式[1]

鈴木 貴雄（神戸大学）

1 Introduction

岡本和夫氏の一連の研究によって, パンルヴェ方程式は以下のようなアフィンワイル群の対称性を持つことが明らかにされた [O].

P_{II}	P_{III}	P_{IV}	P_{V}	P_{VI}
$A_1^{(1)}$	$2A_1^{(1)}$	$A_2^{(1)}$	$A_3^{(1)}$	$D_4^{(1)}$

野海正俊・山田泰彦の両氏は, P_{II}, P_{IV}, P_{V} に対するアフィンワイル群の作用を手がかりに, $A_l^{(1)}$ 型のアフィンワイル群対称性を持つ高階パンルヴェ系（野海・山田系）を導入した [NY]. また笹野祐輔氏は, P_{VI} に対するアフィンワイル群の作用を手がかりに, $D_{2l}^{(1)}$ 型のアフィンワイル群対称性を持つ結合型パンルヴェVI 系を導入した [S].

ドリンフェルト・ソコロフ階層（以下 DS 階層と記す）は, KdV（または mKdV）階層の任意のアフィンリー代数への一般化である. この DS 階層の枠組みから, 上記のパンルヴェ型微分方程式とアフィンリー代数との関係が次のように明らかにされている [AS, FS, KK]:

ルート系	実現	パンルヴェ方程式
$A_1^{(1)}$	principal homogeneous	P_{II} P_{IV}
$A_2^{(1)}$	principal ”$3=2+1$” homogeneous	P_{IV} P_{V} P_{VI}
$A_l^{(1)}(l\geq 3)$	principal	野海・山田系
$D_4^{(1)}$	”$s=(1,1,0,1,1)$”	P_{VI}

本研究では, 笹野氏による結合型パンルヴェVI 系を $D_{2l}^{(1)}$ 型 DS 階層の相似簡約から導くことで, そのアフィンリー代数との関係を明らかにした. また, $E_6^{(1)}$ 型のアフィンワイル群対称性を持つ結合型パンルヴェVI 系を, DS 階層の相似簡約を考察することで導入した.

2 Main Result

DS 階層はアフィンリー代数のハイゼンベルグ部分代数によって特徴付けられる. そして, $D_{2l}^{(1)}$ 型の結合型パンルヴェVI 系を得るために, 我々は $\mathfrak{g}(D_{2l}^{(1)})$ の $s=(1,1,0,1,0,\ldots,1,0,1,1)$ 型グラデーションに付随するハイゼンベルグ部分代数を選んだ. このグラデーションは次の次数付けに対応している:

$$\begin{aligned}
&\deg\mathfrak{h}=\deg e_i=\deg f_i \quad (i=2,4,\ldots,2l-2),\\
&\deg e_j=-\deg f_j=1 \qquad (j=0,1,3,5,\ldots,2l-1,2l).
\end{aligned}$$

Theorem 1. *$D_{2l}^{(1)}$ 型アフィンワイル群対称性を持つ結合型パンルヴェVI系は, $D_{2l}^{(1)}$ 型ドリンフェルト・ソコロフ階層の相似簡約から導かれる.*

[1]藤健太氏（神戸大）との共同研究による

$H_{\mathrm{VI}} = H_{\mathrm{VI}}^{\alpha_0,\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4}(q,p)$ を次のように定義される P_{VI} のハミルトニアンとする [IKSY]:

$$\begin{aligned}t(t-1)H_{\mathrm{VI}} = q(q-1)(q-t)p^2 - \{(\alpha_1-1)q(q-1)\\ + \alpha_3(q-1)(q-t) + \alpha_4 q(q-t)\}p + \alpha_2(\alpha_0+\alpha_2)q.\end{aligned}$$

これによって, 結合型ハミルトニアン

$$\begin{aligned}H = H_{\mathrm{VI}}^{\alpha_3,\alpha_0+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6,\alpha_1,\alpha_3}(p_1,q_1) + H_{\mathrm{VI}}^{\alpha_3,\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_6,\alpha_5,\alpha_3}(p_2,q_2)\\ + H_{\mathrm{VI}}^{\alpha_3,\alpha_0,\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5,\alpha_3}(p_3,q_3) + H_c,\end{aligned} \tag{1}$$

を持つ次のハミルトン系を考える:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i=1,2,3). \tag{2}$$

ただし結合項として

$$\begin{aligned}t(t-1)H_c = -(q_1p_1+\alpha_2)(q_2p_2+\alpha_4)\{(q_1-1)(q_2-1)-(t-1)\}\\ - (q_2p_2+\alpha_4)\{(q_3-t)p_3+\alpha_6\}(q_2-1+q_3-1)\\ - \{(q_3-t)p_3+\alpha_6\}(q_1p_1+\alpha_2)(q_3-1+q_1-1),\end{aligned}$$

を取り, また次の関係式が常に満たされているとする:

$$\alpha_0+\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3+2\alpha_4+\alpha_5+2\alpha_6 = 1.$$

Theorem 2. 結合型ハミルトニアン (1) を持つハミルトン系 (2) は $E_6^{(1)}$ 型アフィンワイル群の対称性を持つ.

対称性を与える変換（ベックルント変換）については, ここでは省略する.

ハミルトン系 (2) を得るために, 我々は $E_6^{(1)}$ 型 DS 階層のうち, $s=(1,1,0,1,0,1,0)$ 型グラデーションに付随するものを定式化し, その相似簡約を考えた. このようなグラデーションは次の次数付けに対応している:

$$\begin{aligned}&\deg \mathfrak{h} = \deg e_i = \deg f_i = 0 \quad (i=2,4,6),\\ &\deg e_j = -\deg f_j = 1 \qquad (j=0,1,3,5).\end{aligned}$$

参考文献

[AS] M. J. Ablowitz and H. Segur, Exact linearization of a Painlevé transcendent, Phys. Rev. Lett. **38** (1977), 1103-1106.

[FS] Kenta Fuji and Takao Suzuki, The sixth Painlevé equation arising from $D_4^{(1)}$ hierarchy, J. Phys. A: Math. Gen., **39** (2006) 12073-12082.

[IKSY] K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura and M. Yoshida, From Gauss to Painlevé — A Modern Theory of Special Functions, Aspects of Mathematics **E16** (Vieweg, 1991).

[KK] S. Kakei and T. Kikuchi, Affine Lie group approach to a derivative nonlinear Schrödinger equation and its similarity reduction, Int. Math. Res. Not. **78** (2004), 4181-4209.

[NY] M. Noumi and Y. Yamada, Higher order Painlevé equations of type $A_l^{(1)}$, Funkcial. Ekvac. **41** (1998), 483-503.

[O] K. Okamoto, Studies on the Painlevé equations, I, Ann. Math. Pura Appl. **146** (1987), 337–381, II, Jap. J. Math. **13** (1987), 47–76, III, Math. Ann. **275** (1986), 221–256, IV, Funkcial. Ekvac. **30** (1987), 305–332.

[S] Y. Sasano, Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$, RIMS Koukyuroku **1473** (2006) 143-163.