Higher order Painlevé equations of type $D_l^{(1)}$

笹野祐輔 (東大・数理)

1. はじめに

$D_l^{(1)}$ 型の affine Weyl 群対称性をもつ微分方程式系について報告する．これらは, 適当な正準変換の下で正則性を保つ多項式 Hamilton 系として特徴づけられ, 結合型 Painlevé V または結合型 Painlevé VI として記述できる.

2. $D_n^{(1)}$ の対称性をもつ系

$W(D_n^{(1)})$ 型 affine Weyl 群対称性をもつ Painlevé 方程式の拡張を示す. 結果は n の偶奇によって場合が分かれるが, $n = 2k+1$ と $n = 2k+2$ の場合共に, 正準変数 q_i, p_i $(i = 1, \ldots, k)$ によって記述される.

$n = 2k+1$ **の場合**: 不変因子の正準変数による表示を次で与える:

$$
\begin{aligned}
&f_0 = p_1 + t, \quad f_1 = p_1, \\
&f_{2i} = q_i - q_{i+1}, \quad f_{2i+1} = p_{i+1}, \quad (1 \leq i \leq k-1) \\
&f_{n-1} = q_k - 1, \quad f_n = q_k.
\end{aligned} \tag{1}
$$

[?] に従い, 次の変換 s_i $(i = 0, \ldots, n)$ を考える

$$
s_i(\alpha_j) = \alpha_j - a_{ji}\alpha_i, \quad s_i(g) = g + \frac{\alpha_i}{f_i}\{g, f_i\}, \quad (g = q_k, p_k), \tag{2}
$$

ここで $\{\ ,\ \}$ は Poisson bracket であり $\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$ を満たす．この作用は affine Weyl 群 $W(D_n^{(1)})$ の表現をなす.

$W(D_n^{(1)})$ 不変な方程式の構成が目標であるが, 対称性は一旦忘れて, 次のような双有理正準変換 r_i $(i = 0, \ldots, n)$ を考える:

$$
\begin{aligned}
&r_0(q_1) = \frac{1}{q_1}, \quad r_0(p_1) = -t - q_1(q_1(p_1 + t) + \alpha_0), \\
&r_1(q_1) = \frac{1}{q_1}, \quad r_1(p_1) = -q_1(q_1 p_1 + \alpha_1), \\
&r_{2i}(p_i) = \frac{1}{p_i}, \quad r_{2i}(q_i) = q_{i+1} - p_i(p_i(q_i - q_{i+1}) - \alpha_{2i}), \\
&r_{2i}(p_{i+1}) = p_{i+1} + p_i - \frac{1}{p_i}, \quad (i = 1, \ldots, k-1) \\
&r_{2i+1}(q_{i+1}) = \frac{1}{q_{i+1}}, \\
&r_{2i+1}(p_{i+1}) = -q_{i+1}(q_{i+1}p_{i+1} + \alpha_{2i+1}), \quad (i = 1, \ldots, k-1) \\
&r_{n-1}(p_k) = \frac{1}{p_k}, \quad r_{n-1}(q_k) = 1 - p_k(p_k(q_k - 1) - \alpha_{n-1}), \\
&r_n(p_k) = \frac{1}{p_k}, \quad r_n(q_k) = -p_k(p_k q_k - \alpha_n).
\end{aligned} \tag{3}
$$

Theorem 2.1. *座標系 r_i $(i = 0, \ldots, n)$ へ変換した後も正則であるような, 4 次の多項式 Hamiltonian 系が唯一存在する．その系は affine Weyl 群 $W(D_n^{(1)})$ の対称性を*

もち, また次のように結合型 $P_{\rm V}$ 方程式として表される:

$$
(4)\quad \begin{aligned} tH &= \sum_{i=1}^{k} H_{\rm V}(q_i,p_i;\alpha_n+\sum_{j=1}^{k-1}\alpha_{2j},\alpha_{2i-1},\alpha_{n-1}+\alpha_n+2\sum_{j=1}^{k-1}(\alpha_{2j}+\alpha_{2j+1}))\\ &+2\sum_{1\le i<j\le k} p_i q_j(p_j(q_j-1)+\alpha_{2j-1}). \end{aligned}
$$

ここに

$$
(5)\quad H_{\rm V}(q,p;a,b,c)=q(q-1)p(p+t)+ap+btq-cpq.
$$

$n=2k+2$ **の場合**: 不変因子の正準変数による表示を次で与える:

$$
(6)\quad \begin{aligned} &f_0=q_1-t,\quad f_1=q_1-\infty,\\ &f_{2i}=p_i,\quad f_{2i+1}=q_i-q_{i+1},\quad (1\le i\le k-1)\\ &f_{n-1}=q_k-1,\quad f_n=q_k. \end{aligned}
$$

affine Weyl 群の作用 $s_i\in W(D_n^{(1)})$ の定義は (2) と同様である.

ここでも基本となるのは, 以下の双有理正準変換 r_i $(i=0,\dots,n)$ である:

$$
(7)\quad \begin{aligned} &r_0(p_1)=\frac{1}{p_1},\quad r_0(q_1)=t-p_1(p_1(q_1-t)-\alpha_0),\\ &r_1(q_1)=\frac{1}{q_1},\quad r_1(p_1)=-q_1(q_1p_0+\alpha_1+\alpha_2),\\ &r_{2i}(q_i)=\frac{1}{q_i},\quad r_{2i}(p_i)=-q_i(q_ip_i+\alpha_{2i}),\quad (i=1,\dots,k)\\ &r_{2i+1}(p_i)=\frac{1}{p_i},\quad r_{2i+1}(q_i)=q_{i+1}-p_i(p_i(q_i-q_{i+1})-\alpha_{2i+1}),\\ &r_{2i+1}(p_{i+1})=p_{i+1}+p_i-\frac{1}{p_i},\quad (i=1,\dots,k-1)\\ &r_{n-1}(p_k)=\frac{1}{p_n},\quad r_{n-1}(q_k)=1-p_k(p_k(q_k-1)-\alpha_{n-1}),\\ &r_n(p_k)=\frac{1}{p_n},\quad r_n(q_k)=-p_k(p_kq_k-\alpha_n). \end{aligned}
$$

Theorem 2.2. *座標系 r_i $(i=0,\dots,n)$ へ変換した後も正則であるような, 5 次の多項式 Hamiltonian 系が唯一存在する. その系は affine Weyl 群 $W(D_n^{(1)})$ の対称性をもち, また次のように結合型 $P_{\rm VI}$ 方程式として表される:*

$$
(8)\quad \begin{aligned} t(t-1)H &= \sum_{i=1}^{k} H_{\rm VI}(q_i,p_i;a_i,b_i,c_i,d_i)\\ &+2\sum_{1\le i<j\le k} p_i(q_i-t)q_j\Big[p_j(q_j-1)+\alpha_{2j}\Big], \end{aligned}
$$

ここに

$$
(9)\quad \begin{aligned} &H_{\rm VI}(q,p;a,b,c,d)=q(q-1)(q-t)p2\\ &-\Big\{(a-1)q(q-1)+bq(q-t)+c(q-1)(q-t)\Big\}p+dq, \end{aligned}
$$

および

$$
(10)\quad \begin{aligned} &a_i=\alpha_0+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{2j+1},\quad \{\begin{matrix} b_i\\ c_i\end{matrix}\}=\{\begin{matrix}\alpha_{n-1}\\ \alpha_n\end{matrix}\}+\sum_{j=i}^{k-1}\alpha_{2j+1},\\ &d_i=\alpha_{2i}\Big(\alpha_1+\alpha_{2i}+2\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{2j}+\sum_{j=1}^{i-1}\alpha_{2j+1}\Big), \end{aligned}
$$