調和写像分散流の初期値問題の適切性について

名古屋大学大学院・多元数理科学研究科　加藤 淳

1　調和写像分散流の導出

$\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$ から 2 次元球面 S^2 への調和写像分散流は以下のように導出される．まず, $\phi : S^2 \setminus \{(0,0,1)\} \to \mathbf{C}$ を立体射影とするとき, $w \in \mathbf{C}$ に対し

$$\phi^{-1}(w) = \Big(\frac{2\,\mathrm{Re}\,w}{1+|w|^2},\ \frac{2\,\mathrm{Im}\,w}{1+|w|^2},\ \frac{1-|w|^2}{1+|w|^2} \Big) \in S^2$$

であることに注意して, 2 次元球面 S^2 を計量 $g\,dw\,d\overline{w}$ の入った複素平面 $(\mathbf{C},\, g\,dw\,d\overline{w})$ と同一視する．但し, $g(w) = 4/(1+|w|^2)^2$. 特に, $|w|_g = \sqrt{g(w)}\,|w|$, $w \in \mathbf{C}$ と書く．

写像 $z : \mathbf{R}^n \to (\mathbf{C},\, g\,dw\,d\overline{w})$ のエネルギーは

$$E[z] = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} |\nabla z(x)|_g^2\,dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbf{R}^n} \frac{|\nabla z(x)|^2}{(1+|z(x)|^2)^2}\,dx \tag{1.1}$$

により定義される．式 (1.1) で定められたエネルギー汎関数 $E[z]$ の Euler-Lagrange 方程式は $\mathbf{R}^n$ から $(\mathbf{C},\, g\,dw\,d\overline{w})$ への調和写像の方程式と呼ばれ, この場合は

$$\sum_{j=1}^{n} \nabla_j \partial_j z = 0 \tag{1.2}$$

で与えられる．但し,

$$\nabla_j = \partial_j - \frac{2}{1+|z|^2}\,\overline{z}\,\partial_j z. \tag{1.3}$$

そこで, 調和写像の方程式 (1.2) を次のように時間発展させた方程式

$$\partial_t z = i \sum_{j=1}^{n} \nabla_j \partial_j z \tag{1.4}$$

を満たす写像 $z : \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n \to (\mathbf{C},\, g\,dw\,d\overline{w})$ を調和写像分散流 (Schrödinger map, Schrödinger flow) と呼ぶ．調和写像分散流 z は (1.1) で定めたエネルギーを保存する．即ち, z が (1.4) の解ならば

$$E[z(t)] = E[z(0)], \quad t \geq 0. \tag{1.5}$$

注意 1.1. 方程式 (1.4) は強磁性体のスピンを記述する Heisenberg の σ モデルと同じものであることが知られている ([8]).

注意 1.2. 調和写像分散流はより一般に, S^2 を Kähler 多様体として定式化できる．その場合, 方程式に現れる i は, Kähler 多様体に付随する概複素構造 J ($J^2 = -I$ をみたす) となる．

2 調和写像分散流の初期値問題の適切性

以下, $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ から S^2 への 調和写像分散流の初期値問題

$$(\mathrm{S})\quad \begin{cases} \partial_t z = i\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\nabla_j\partial_j z, \quad z:\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n\to\mathbf{C}, \\ z|_{t=0}=z_0, \end{cases}$$

の適切性を考察する．但し, $\nabla_j=\partial_j-\frac{2}{1+|z|^2}\,\overline{z}\,\partial_j z$. 特に, 時間大域的な適切性を示すには, エネルギー保存 (1.5) の観点から, H^1 で解くことが望ましい．実際, Chang-Shatah-Uhlenbeck [2] により, $n=1$ の場合は $z_0\in H^1$ に対し一意な時間大域解が存在すること, $n=2$ の場合は小さな $z_0\in H^1$ に対し球対称性の仮定の下で一意な時間大域解が存在することが示されている．一方, 方程式 (1.4) のスケール変換に関する不変性を利用した次元解析により, 空間 3 次元以上の場合, 初期値問題 (S) を H^1 の枠組みで取り扱う事は期待出来ないことがわかる．

そこで, $n=2$ の場合を球対称性を仮定せず扱うため, 初期値 $z_0\in H^s$ $(s\geq 1)$ とし, (S) の時間局所適切性を, 出来るだけ小さい s に対して考察する．この問題は, 方程式 (1.4) が非線型項に微分を含む型の非線型 Schrödinger 方程式であることに注意し, その枠組みで扱うと, $s>5$ のとき (S) は時間局所適切であることがわかる ([3]). 一方, Nahmod-Stefanov-Uhlenbeck [7] は方程式の幾何学的性質を巧く利用することで, $s>2$ のとき (S) が時間局所適切であることを示した．彼らの結果を改善するものとして, 次の結果が得られている．

定理 2.1. ([6]) $s>7/4$ に対し $z_0\in H^s(\mathbf{R}^2)$ とする．このとき $T=T(\|z\|_{H^s})>0$ と十分小さい $\varepsilon>0$ が存在して, (S) の一意解 $u\in C([0,T];\,H^s)$ で,

$$J^{s-1/2-\varepsilon}u\in L^2(0,T;\,L^\infty) \tag{2.1}$$

を満たすものが存在する．但し, $J^s=(I-\Delta)^{s/2}$.

注意 2.2. 解の存在のみに関しては, $s>3/2$ の場合に示す事が出来る ([5]).

注意 2.3. 最近, 初期値が小さい場合は Ionescu-Kenig [4] により $s>3/2$ の場合に, Bejenaru [1] により $s>1$ の場合に時間局所適切性が示された．

参考文献

[1] I. Bejenaru, arXiv:math.AP/0604255.
[2] N.-H. Chang, J. Shatah, K. Uhlenbeck, Comm. Pure Appl. Math. **53** (2000), 590–602.
[3] H. Chihara, Math. Ann. **315** (1999), 529–567.
[4] A. D. Ionescu, C. E. Kenig, arXiv:math.AP/0605210.
[5] J. Kato, Math. Res. Lett. **12** (2005), 171–186.
[6] J. Kato, H. Koch, Comm. PDE (to appear)
[7] A. Nahmod, A. Stefanov, K. Uhlenbeck, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), 114–151.
[8] P.-L. Sulem, C. Sulem, C. Bardos, Comm. Math. Phys. **107** (1986), 431–454.