Asymptotic behavior of solutions of semilinear parabolic equations involving critical Sobolev exponent

東北大学大学院理学研究科数学専攻 石渡通徳 (ishiwata@math.tohoku.ac.jp)

本講演では臨界ソボレフ指数をもつ以下の半線型放物型方程式に対する無限時間爆発解の挙動の詳細と, 初期値空間の構造を議論する:

$$
\text{(P)} \quad \begin{cases} \partial_t u = \Delta u + u|u|^{p-2} & \text{in} \quad \Omega \times (0, T_m), \\ u > 0 & \text{in} \quad \Omega \times (0, T_m), \\ u = u_0 & \text{in} \quad \Omega \times \{0\}, \end{cases}
$$

ただし空間次元を $N \geq 3$ として Ω は $\mathbb{R}^N$ または N 次元球, $2^* = 2N/(N-2)$ をソボレフの臨界指数として断りのない限り $p = 2^*$, T_m は古典解の最大存在時刻, 断りのない限り初期値 u_0 は十分滑らかで正値球対称かつ, 動径方向に非増加な関数とする. Ω が球の場合には斉次ディリクレ条件を課す.

(P) の解の挙動は劣臨界 ($p < 2^*$) の場合と臨界 ($p = 2^*$) の場合で異なっている. 劣臨界ケースについては従来の研究により, 解の挙動はよくわかっているが, 臨界ケースについては謎が多い. 以下これまでに知られている事実をいくつかまとめる.

$\Omega = \mathbb{R}^N$ とする. 劣臨界の場合には [1, 2, 3] などにより, 以下のことがわかっている.

Proposition 1 [1, 2, 3] $a \in L^1 \cap L^\infty$ かつ正値 (で必ずしも球対称ではない) とする. このときある $\overline{\lambda} > 0$ が存在して, $u_0 = \lambda a$ を初期値とする (P) の解は

$\lambda < \overline{\lambda}$ ならば時間大域的に存在し, $t \to \infty$ とともにガウス核に漸近する.

$\lambda = \overline{\lambda}$ ならば時間大域的に存在し, $t \to \infty$ とともに前進自己相似解に漸近する.

$\lambda > \overline{\lambda}$ ならば有限時間で爆発する. ∎

したがって時間大域的に存在しガウス核に漸近する初期値と, 有限時間爆発を起こす初期値のセパレータは前進自己相似解に漸近する初期値である. また, 解の L^q ノルムの挙動も知られている.

一方 Galaktionov-Vazquez [4] により, 臨界ケースでは時間大域的に存在して無限時間爆発を起こす解が存在することが知られているが, Proposition 1 にあるような初期値空間の分類は知られておらず, また時間大域的でガウス核に漸近しない解 (このような解は存在する) の詳しい挙動はよくわかっていない.

次に Ω が有界領域であるときを考える. 劣臨界ケースについては Cazenave-Lions [5] により, Proposition 1 の「前進自己相似解」を「定常解」に置き換えた主張が成り立つことが示されており, この意味で解の漸近挙動は詳しくわかっている. しかし, 臨界ケースでは, [6] などの数少ない論文を除き, 一般の領域に対する結果はほとんど存在しない. 領域と解の球対称性を仮定しても, 部分的な結果しか知られていない. 例えば

Proposition 2 [7, 4] Ω を球, $p = 2^*$, $a \in L^\infty$ を正値球対称な関数とする. このときある $\overline{\lambda}_1$, $\overline{\lambda}_2 > 0$ が存在して, $u_0 = \lambda a$ を初期値とする (P) の解は

$\lambda < \overline{\lambda}_1$ ならば時間大域的に存在し, $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_\infty = 0$ を満たす.

$\lambda = \overline{\lambda}_1$ ならば時間大域的に存在し, ある時刻列 $t_n \to \infty$ に沿って

$$
|\nabla u(t_n)|^2 \rightharpoonup S^{N/2} \delta_0 \text{ in } \mathcal{M}(\Omega)
$$

が成り立つ．ここで $S = \inf_{u \in H_0^1 \setminus \{0\}} \|\nabla u\|_2^2 / \|u\|_p^2$ かつ $\mathcal{M}(\Omega)$ は Ω 上の正値ラドン測度のなす Banach 空間である．

$\lambda > \overline{\lambda}_2$ ならば有限時間で爆発する． ∎

この命題からは $\overline{\lambda}_1 = \overline{\lambda}_2$ なのかどうか, セパレータの挙動は時間部分列に本質的に依存するのか否かが全く不明である．さらにセパレータに相当する解の L^q ノルムの挙動についてはGalaktionov-King [8] による L^∞ ノルムについての結果以外に知られているのものが今のところない．

本講演では, 臨界ケースについて述べた以上の疑問について解決を与える．主結果は以下のとおりである．

Theorem 1 Ω を $\mathbb{R}^N$ または球, a を滑らかで正値球対称かつ, 動径方向に非増加な関数とする．$\Omega = \mathbb{R}^N$ の場合には a の台のコンパクト性も仮定する．このときある $\overline{\lambda} > 0$ が存在して, $u_0 = \lambda a$ に対する (P) の解は

$\lambda < \overline{\lambda}$ ならば時間大域的に存在し, $\lim_{t\to\infty} \|u(t)\|_\infty = 0$ を満たす．

$\lambda = \overline{\lambda}$ ならば時間大域的に存在し, $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) \in (0, \infty]$ となる $\lambda(t)$ と, (P) の $\mathbb{R}^N$ での正値定常解 U を用いて ($\mathbb{R}^N$ への零拡張の意味で)

$$u(x,t) = \lambda(t)^{(N-2)/2} U(\lambda(t)x) + o(1) \text{ in } D_0^{1,2}(\mathbb{R}^N) \text{ as } t \to \infty$$

となる．Ω が球なら $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$ である．

$\lambda > \overline{\lambda}$ ならば有限時間で爆発する． ∎

Corollary 1 $\lambda = \overline{\lambda}$ に対応する無限時間爆発解 *(i.e.,* $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) = \infty$ *を満たす解)* について,

$$\|u(t)\|_q \to \begin{cases} \infty & \text{if} \quad q > 2^*, \\ S^{N/2} & \text{if} \quad q = 2^*, \\ 0 & \text{if} \quad q < 2^*, \end{cases} \qquad |\nabla u(t)|^2 \rightharpoonup S^{N/2}\delta_0 \text{ in } \mathcal{M}(\Omega)$$

as $t \to \infty$ が成り立つ． ∎

Corollary 1 については, $\Omega = \mathbb{R}^N$ であるときに存在しえる, $\lim_{t\to\infty} \lambda(t) < \infty$ を満たす解についても類似の事実が成り立つ．これらの証明には, (P) のもつスケール不変性と, 空間球対称な放物型方程式の解に対する交点数非増加の定理を用いる．なお講演では, 以上の最新結果に至るまでに講演者の得た別のタイプのこれまでの結果についてもいくつか紹介する予定である．

参考文献

[1] T. Kawanago, Ann. Inst. Henri Poincaré **13**, (1996) 1-15.
[2] O. Kavian, Ann. Inst. Henri Poincaré **4**, (1987) 423-452.
[3] Y. Giga, R. Kohn, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) 297-319.
[4] V. Galaktionov, J. L. Vazquez, Comm. Pure Appl. Math. **38** (1985) 297-319.
[5] T. Cazenave, P. L. Lions, Comm. Partial Differential Equations **9** (1984), 955-978.
[6] R. Ikehata, T. Suzuki, Diff. Int. Eq. **13** (2000) 869-901.
[7] Z. Tan, Science in China Ser. A **44** (2001) 40-47.
[8] V. Galaktionov, J. King, J. of Diff. Eq. **189** (2003) 199-233.