Well-posedness for the Zakharov system and Schrödinger equations with a potential

津川 光太郎　(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)

空間 1 次元 Zakharov 方程式の初期値問題について考える.

$$(i\partial_t + \partial_x^2)u = nu, \qquad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}, \tag{1}$$

$$(\partial_t^2 - \partial_x^2)n = \partial_x^2 |u|^2, \quad (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}, \tag{2}$$

$$u(0,x) = u_0 \in H^k, \quad (n(0,x), \partial_t n(0,x)) = (n_0, n_1) \in H^l \times H^{l-1}. \tag{3}$$

ただし, $u(t,x)$ は複素数値関数, $n(t,x)$ は実数値関数とする. 本研究の目的は, どのような k,l に対して時間局所適切性が成立するかを調べることである. ただしここでの適切性の定義は, 解の一意存在および初期値に対する連続依存性に加えて, 解が初期値と同じ関数空間に属すること $(u \in C([0,T] : H^k), n \in C([0,T] : H^l) \cap C^1([0,T] : H^{l-1}))$ も含むものとする.

Ginibre-Tsutsumi-Velo[2] は Bourgain によって導入された Fourier 制限ノルム法を用いて, $2k - 1/2 \geq l \geq -1/2$ かつ $1/2 > l - k \geq -1$ のときに (1)–(3) が時間局所適切であることを示した. 一方 Hölmer[3] は, $l > -1/2$ かつ $l > 2k - 1/2$ かつ $k < 1$ のとき非適切であること, および $l < -1/2$ のとき解写像が C^2 級にならないことを示した. これらの結果により, 小さな k,l に対しては $l = -1/2$ と $l = 2k - 1/2$ が (ある意味において) 適切・非適切の境界となることが分かる. (注 解写像が C^2 級とならないことと非適切であることにはギャップがあるが, これにはこだわらないこととする.) 通常, 単独の方程式に対する研究においては, 出来るだけ広い関数空間において (つまり k,l が小さい場合に対して) 適切性を示すことが目標となる. これは k,l が小さくなればなるほど非線形項における滑らかさの損失が強くなり評価が難しくなるからである. しかし Zakharov 方程式のような連立系の場合には, k,l が大きい場合についても以下のような興味深い問題がある. 一方の滑らかさが他方の滑らかさに比べて極端に低い場合には, 滑らかな方の方程式の解は, 非線形項による相互作用によって他方の影響を受けて初期値と同じ滑らかさを保てなくなる. 滑らかさの差 $|k - l|$ が大きいときにそのような意味での非適切性を示せるだろうか？また, 適切性が成立するためには, どれくらいの滑らかさの差が許されるのか？この問題に対して以下の結果を得た.

定理 1. $1 \geq l - k \geq -2$ かつ $2k - 1/2 \geq l \geq -1/2$ のとき (1)–(3) は時間局所適切である.

定理 2. k,l は定理 1 の仮定を満たさないとする. このとき, 解写像は C^2 級とならない. さらに $l > -1/2$ または $k > 3/2$ と仮定すると (1)–(3) は非適切である.

これにより全ての $(k,l) \in \mathbb{R}^2$ に対して (ある意味において) 適切・非適切の場合分けが出来た. 定理 2 は Bejenaru-Tao[1] による議論を応用することによって得られるが詳細は省略する. 以下, 定理 1 の証明の概略を述べる.

証明がもっとも難しいのは (k,l) が領域の端点 $(0,-1/2), (3/2, 5/2), (3/2, -1/2)$ の場合である. これらの点における証明で用いられる評価式を補間することにより残りの点における証明は得られる. フーリエ制限ノルム法を用いる場合, Schrödinger 方程式 (1) および波動方程式 (2) に対応する Fourier 制限ノルムは以下のように定義

される.

$$\|u\|_{X_S^{k,b_1}} := \|\langle\xi\rangle^k\langle\tau-\xi^2\rangle^{b_1}\mathcal{F}_{t,x}u\|_{L^2_{\tau,\xi}}, \quad \|n\|_{X_{W\pm}^{l,b_2}} := \|\langle\xi\rangle^l\langle\tau\pm\xi\rangle^{b_2}\mathcal{F}_{t,x}n\|_{L^2_{\tau,\xi}}$$

そして, 以下の双線形評価式を適当な $0 \le b_1, b_2 \le 1$ に対して示すことが出来れば時間局所適切性が得られる. (実は $b_j < 1/2$ で適用する場合には補助ノルムも利用する必要があるが, これに関する説明は省略する.)

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\tau,\xi}\langle\tau-\xi^2\rangle^{-1}\mathcal{F}_{t,x}(nu)\|_{X_S^{k,b_1}} \le C\|n\|_{X_{W\pm}^{l,b_2}}\|u\|_{X_S^{k,b_1}}, \tag{4}$$

$$\|\mathcal{F}^{-1}_{\tau,\xi}\langle\tau\pm\xi\rangle^{-1}\mathcal{F}_{t,x}(u\bar{v})\|_{X_{W\pm}^{l+1,b_2}} \le C\|u\|_{X_S^{k,b_1}}\|v\|_{X_S^{k,b_1}}, \tag{5}$$

Ginibre-Tsutsumi-Velo[2] は以下の不等式を利用して空間変数 x に関する微分の損失を回復することにより $(k,l)=(0,-1/2)$ に対して (4)–(5) を示した.

$$\max\{\langle\tau-\xi^2\rangle, \langle\tau_1-\xi_1^2\rangle, \langle\tau-\tau_1\pm\xi-\xi_1\rangle\} \gtrsim \langle\xi\rangle^2, \text{ when } |\xi|>2|\xi_1| \text{ or } |\xi_1|>2|\xi|$$

$(k,l)=(3/2,5/2)$ の場合は, u がフーリエ空間の高周波帯に v が低周波帯にサポートを持つとき (5) において空間変数 x に関する 2 階の微分の損失が現れる. しかし $b_1=1$, $b_2=0$ 取れば上記の不等式を利用してこの損失を回復することが出来る.

一方 $(k,l)=(3/2,-1/2)$ の場合は, n がフーリエ空間の高周波帯に u が低周波帯にサポートを持つとき (4) において空間変数 x に関する 2 階の微分の損失が現れ, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ をどのように選んでもこの損失を回復することが出来ず, (4) は成立しないことがわかる. この難点を回避するために以下のの工夫を用いて (4)–(5) の代わりとなる評価式を示し, 時間局所適切性を得た.

- $(k,l)=(3/2,-1/2)$ のとき, シュレディンガー方程式の解は波動方程式の解より滑らかであり, (2) の非線形項は十分な滑らかさを持っていると予想される. この性質を利用するため, (2) の解を線形斉次方程式の解と初期値が 0 である非線形方程式の解に分割する.
- $X_S^{3/2,b_1}$ の代わりに, 以下のように重み関数を修正したノルムを用いる.

$$\|u\|_{S^{3/2}} := \|\langle\xi\rangle^{3/2}\min\{\langle\tau+\xi\rangle, \langle\tau-\xi\rangle, \langle\tau-\xi^2\rangle\}\mathcal{F}_{t,x}u\|_{L^2_{\tau,\xi}}.$$

最後に, 空間一次元の線形シュレディンガー方程式の初期値問題について考える.

$$(i\partial_t+\partial_x^2+A(x))u(t,x)=0, \qquad u(0,x)=u_0\in H^k. \tag{6}$$

ただし, $A(x)\in H^l$ は与えられた関数とする.

系 3. (k,l) が定理 1 の仮定を満たすとき (6) は適切である.

$l-k=-2$ のとき, 解 u の可微分性は A に比べて 2 階上がっている. $A(x)u$ を摂動項として考えて, 単純に線形の平滑化効果を利用しただけではこのような結果は得られないと思われる. 証明は定理 1 の証明と同様にして得られる.

References

[1] I. Bejenaru, and T, Tao, *Sharp well-posedness and ill-posedness results for a quadratic non-linear Schrodinger equation*, J. Funct. Anal. **233** (2006), no. 1, 228–259.

[2] J. Ginibre, Y. Tsutsumi and G. Velo, *On the Cauchy problem for the Zakharov system*, J. Funct. Anal. **151** (1997), no. 2, 384–436.

[3] J. Holmer, *Local ill-posedness of the 1D Zakharov system*, Electron. J. Differential Equations (2007), No. 24, 22 pp.