EXISTENCE OF MULTIPLE SIGN-CHANGING SOLUTIONS FOR SEMILINEAR ELLIPTIC EQUATIONS VIA THE LUSTERNIK-SCHNIRELMANN CATEGORY

塩路直樹 (横浜国立大学大学院環境情報研究院)

Ω は, $\partial\Omega$ が滑らかな $\mathbb{R}^N (N \geq 3)$ の有界領域とし, $d > 0$ が十分小さい場合の

$$-d^2 \Delta u + u = f(u) \text{ in } \Omega, \qquad \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{1}$$

の符号変化解の多重存在について考える. (1) あるいは

$$-d^2 \Delta u + u = f(u) \text{ in } \Omega, \qquad u = 0 \text{ on } \partial\Omega \tag{2}$$

について, Lusternik-Schnirelmann categroy を用いて正値解の個数を評価することは Benci-Cerami [3] によって始められ, [1, 4, 5, 7] などの結果がある. 最近, Bartsch-Weth [2] が, f については [4] で扱われている仮定の下で, (2) について符号変化解の個数の評価を与えている. ここでは, f の微分可能性や Ambrosetti-Rabinowitz の優線形条件を仮定しないなど非線形項 f の条件を一般化した上で, (1) の符号変化解の個数の評価についての結果 [6] を紹介する.

定理 1. 次を仮定する.

(i) $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $f(0) = 0$, $f'(0) = 0$,
(ii) $f(t)/|t|^{2^*-1} \to 0$ as $|t| \to \infty$,
(iii) $t \mapsto f(t)/t$ は, $(0, \infty)$ 上で狭義単調増加で, $(-\infty, 0)$ 上狭義単調減少,
(iv) $f(t)/t \to \infty$ as $|t| \to \infty$.

$0 < d \ll 1$ のとき, (1) は少なくとも $\mathrm{cat}(C(\partial\Omega) \times [0,1]^2, C(\partial\Omega) \times \partial[0,1]^2) + 1$ 個の符号変化解を持つ. ただし, $C(\partial\Omega) = \{(x, y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega : x \neq y\}$ である.

註 1. $\mathrm{cat}(C(\partial\Omega) \times [0,1]^2, C(\partial\Omega) \times \partial[0,1]^2) + 1 \geq \mathrm{cupl}(C(\partial\Omega)) + 2 \geq 2\mathrm{cupl}(\partial\Omega) + 1 \geq 3$

結果の理解や証明の概略を述べる際に必要となる定義や性質の一部を述べておく.

定義 1. X を位相空間とし, $A \subset X$ とする. 次の条件

- $A \subset \bigcup_{i=1}^n A_i$,
- $\forall i = 1, \ldots, n$, $\exists h_i \in C([0,1] \times A_i, X)$ s.t. $h_i(0, x) = x$, $h_i(1, x) = h_i(1, y)$ $\forall x, y \in A_i$

を満たす X の開集合族 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ のうちで, 開集合の数が最小となるときの $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ により $\mathrm{cat}_X(A) = n$ と定める. もしこのような条件を満たす X の有限開集合族 $\{A_1, \ldots, A_n\}$ が存在しない場合は $\mathrm{cat}_X(A) = \infty$ と置く. 特に $A = X$ の場合は, $\mathrm{cat}\, X = \mathrm{cat}_X(X)$ と定める.

定義 2 (連続写像に対する category)**.** $g : (A, B) \to (A', B')$ とする. 次の条件

- $B \subset A_0$,
- $\exists h_0 \in C(([0,1] \times A_0, [0,1] \times B), (A', B'))$ s.t. $h_0(0, x) = g(x)$, $h_0(1, x) \in B'$ $\forall x \in A_0$,
- $\forall i = 1, \ldots, n$, $\exists h_i \in C([0,1] \times A_i, A')$ s.t. $h_i(0, x) = g(x)$, $h_i(1, x) = h_i(1, y)$ $\forall x, y \in A_i$

を満たす A の開被覆 $\{A_0, \ldots, A_n\}$ のうちで, 開集合の数が最小となるときの $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ により $\mathrm{cat}(g) = n$ と定める. もしこのような条件を満たす A の有限開被覆 $\{A_0, \ldots, A_n\}$ が存在しない場合は $\mathrm{cat}(g) = \infty$ と置く. また, $\mathrm{cat}(A, B) = \mathrm{cat}(\mathrm{Id}_{(A,B)})$ と置く.

註 2. $A \subset A'$ のとき, $i : (A, \emptyset) \hookrightarrow (A', \emptyset)$ として $\mathrm{cat}_{A'}(A) = \mathrm{cat}(i)$ が成り立つ.

定義 3 (連続写像に対する excisive category)**.** $g : (A, B) \to (A', B')$ とする. 次の条件

- $B \subset A_0$,

- $\exists h_0 \in C([0,1]\times A_0, A')$ s.t.

$$\begin{cases} h_0(0,x) = g(x),\ h_0(1,x) \in B' \ \forall x \in A_0, \\ h_0(t,x) \in B' \text{ with } (t,x) \in [0,1]\times A_0 \Rightarrow h_0(s,x) = h_0(t,x) \ \forall s \in [0,1] \text{ with } s \geq t, \end{cases}$$

- $\forall i = 1,\dots,n,\ g(A_i) \cap B' = \emptyset$,
- $\forall i = 1,\dots,n,\ \exists h_i \in C([0,1]\times A_i, A' \setminus B')$ s.t. $h_i(0,x) = g(x), h_i(1,x) = h_i(1,y) \ \forall x,y \in A_i$

を満たす A の開被覆 $\{A_0,\dots,A_n\}$ のうちで, 開集合の数が最小となるときの $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ により $\mathrm{ecat}(g) = n$ と定める．もしこのような条件を満たす A の有限開被覆 $\{A_0,\dots,A_n\}$ が存在しない場合は $\mathrm{ecat}(g) = \infty$ と置く．また, $\mathrm{ecat}(A,B) = \mathrm{ecat}(\mathrm{Id}_{(A,B)})$ と置く．

補題 1. $g : (A,B) \to (A',B')$, $g' : (A',B') \to (A'',B'')$ とすると, 次が成り立つ.

(i) $\mathrm{cat}(g'\circ g) \leq \min\{\mathrm{cat}(g), \mathrm{cat}(g')\}$. 特に, $\mathrm{cat}(g) \leq \min\{\mathrm{cat}(A,B), \mathrm{cat}(A',B')\}$.
(ii) $\mathrm{ecat}(g'\circ g) \leq \mathrm{ecat}(g')$. 特に, $\mathrm{ecat}(g) \leq \mathrm{ecat}(A',B')$.
(iii) $\mathrm{ecat}(g) \geq \mathrm{cat}(g)$.

補題 2. $g, g' : (A,B) \to (A',B')$ が homotopic ならば $\mathrm{cat}(g) = \mathrm{cat}(g')$ が成り立つ.

補題 3. B は A の閉集合とし, B', C' は $C' \cup B' = A'$ を満たす A' の閉集合とする．$\widetilde{g} : (A,B) \to (C', C'\cap B')$ とし, $g : (A,B) \to (A',B')$ は $\widetilde{g}(x) = g(x)\ \forall x \in A$ を満たすとする．このとき, $\mathrm{ecat}(\widetilde{g}) = \mathrm{ecat}(g)$ が成り立つ.

定義 4. X を距離空間とし, φ: $[0,\infty)\times X \to X$ を連続な semiflow とする．$Y \subset X$ に対し,

$$\mathrm{Inv}(Y) = \{u \in Y :\ \varphi(t,u) \in Y \text{ for } t > 0\}$$

と置く．すべての $(t,u) \in (0,\infty)\times Y$ に対して $\varphi(t,u) \in \mathrm{Int}\, Y$ が成り立つとき, Y は strictly positively invariant であるという.

補題 4 (Bartsch-Weth [2]). X を距離空間とし, $\varphi : [0,\infty)\times X \to X$ を連続な semiflow とする．X の閉部分集合 Y が strictly positively invariant であるとする．このとき, $\mathrm{cat}_{X\setminus Y}(\mathrm{Inv}(X\setminus Y)) \geq \mathrm{ecat}(X,Y)$ が成り立つ.

実数 a に対し, $a^+ = \max\{a,0\}$, $a^- = \min\{a,0\}$ と定める.($a = a^+ + a^-$ が成り立つ.) $F_\pm(t) = \int_0^t f^\pm(s)\,ds$ とし, $\mathbb{R}^N$ の開集合 G に対して,

$$\Phi_{G,\pm}(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2_{H^1(G)} - \int_G F_\pm(u)\,dx, \quad \mathcal{N}_{G,\pm} = \{u \in H^1(G) : (\nabla\Phi_{G,\pm}(u), u)_{H^1(G)} = 0\}$$

と定め, $c_{G,\pm} = \inf\{\Phi_{G,\pm}(u) : u \in \mathcal{N}_{G,\pm}\}$ と置く．また, 次のように $\mathcal{K}^\pm$ を定める.

$$\mathcal{K}^+ = \{u \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^N,+} : \Phi_{\mathbb{R}^N,+}(u) = c_{\mathbb{R}^N,+},\ u(0) = \max_{x\in\mathbb{R}^N} u(x)\},$$

$$\mathcal{K}^- = \{u \in \mathcal{N}_{\mathbb{R}^N,-} : \Phi_{\mathbb{R}^N,-}(u) = c_{\mathbb{R}^N,-},\ u(0) = \min_{x\in\mathbb{R}^N} u(x)\}.$$

命題 1. $u \in \mathcal{K}^\pm$ は $-\Delta u + u = f^\pm(u)$ in $\mathbb{R}^N$ の解である．$\mathcal{K}^\pm$ は球対称関数を含み, $H^1(\mathbb{R}^N)$ においてコンパクトである.

参考文献

[1] N. Ackermann, *Multiple single-peaked solutions of a class of semilinear Neumann problems via the category of the domain boundary*, Calc. Var. Partial Differential Equations **7** (1998), no. 3, 263–292.

[2] T. Bartsch and T. Weth, *The effect of the domain's configuration space on the number of nodal solutions of singularly perturbed elliptic equations*, Topol. Methods Nonlinear Anal. **26** (2005), no. 1, 109–133.

[3] V. Benci and G. Cerami, *The effect of the domain topology on the number of positive solutions of nonlinear elliptic problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **114** (1991), no. 1, 79–93.

[4] ———, *Multiple positive solutions of some elliptic problems via the Morse theory and the domain topology*, Calc. Var. Partial Differential Equations **2** (1994), no. 1, 29–48.

[5] G. Mancini and R. Musina, *The role of the boundary in some semilinear Neumann problems*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **88** (1992), 127–138.

[6] N. Shioji, *Multiple sign-changing solutions for a semilinear Neumann problem and the topology of the configuration space of the domain boundary*, to appear in Calc. Var. Partial Differential Equations.

[7] Z. Q. Wang, *On the existence of multiple, single-peaked solutions for a semilinear Neumann problem*, Arch. Rational Mech. Anal. **120** (1992), no. 4, 375–399.