Inverse scattering problem for nonlinear dispersive equations

佐々木 浩宣 （千葉大学大学院理学研究科）

概 要

多体問題で導出される非線型分散型方程式を考える. 非線型項には未知なる相互作用ポテンシャル V が含まれている. 本研究の目的は「散乱データが充分得られているとき, それを用いて未知なる V を決定すること」である.

導入: 本講演では幾つかの方程式に関する逆散乱問題を扱う予定だが, ここでは線型摂動項付非線型 Schrödinger 方程式

$$i\frac{\partial u}{\partial t}(t,x) + \Delta u(t,x) = V_0 u(t,x) + \left(V_1 * |u(t,x)|^2\right) u(t,x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \tag{1}$$

に関する結果を中心に記載する. 但し, ここで V_j $(j=0,1)$ は未知パラメータ $Q_j \in \mathbb{R}$, $\mu_j > 0$ によって

$$V_j(x) = \frac{Q_j \exp(-\mu_j |x|)}{|x|}$$

で定まる未知な湯川ポテンシャルである. この方程式は, 非相対論的 Debye 遮蔽モデルハミルトニアンに由来し, μ_j は遮蔽の強さを意味する.

先ず, 以下の定理によって, 散乱作用素 S の存在が保障される:

定理: Q_0, μ_0 は

$$|Q_0| < \mu_0 \tag{2}$$

を満たすものとする. このとき十分小さい $\phi_- \in L^2$ に関して, (1) の一意な解 $u \in C(\mathbb{R}; L^2) \cap L^3(\mathbb{R}; L^{18/7})$ とデータ $\phi_+ \in L^2$ が存在し,

$$\lim_{t\to\pm\infty} \|u(t) - U(t)\phi_\pm\|_2 = 0 \qquad （ただし, U(t) = e^{it\Delta} とする）$$

を満たす. 更に散乱作用素 $S : \phi_- \mapsto \phi_+$ が定義される.

以上の背景を踏まえて本研究の主目的を書き下すと, 次の通りとなる:

散乱データ $(\phi, S(\phi))$ を用いて未知なる V_0, V_1 を同定せよ.

既知の結果: まず冪型非線型項 $F(u) = V(x)|u|^{p-1}u$ 付 Schrödinger 方程式について, $V(x)$ が同定された ([5]). 証明の核となるのが以下の small amplitude limit（一種の線型化）である:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{i}{\varepsilon^p} \langle S(\varepsilon\phi) - \varepsilon\phi, \phi \rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}} \left\langle F\left(e^{it\Delta}\phi\right), e^{it\Delta}\phi \right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} dt.$$

後に Weder は, 線型摂動項付冪型非線型項 $F(u) = \widetilde{V}(x)u + V(x)|u|^{p-1}u$ への応用に成功した.

これらの手法を発展させることで, 渡邊 [6, 8] は, 非局所的項 $F(u) = \widetilde{V}(x)u + \lambda(|x|^{-\sigma} * |u|^2)u$ に於ける $\widetilde{V}$, λ, σ を同定した（関連する結果については [2, 3, 7, 9] 等を参照されたい）.

再構成: 考察対象を (1) に戻す. 今後常時 (2) を仮定する. このモデルに対しては, 既存の手法を直接使用することは不可能である為, 新たな方法 (以下にある Step 3,4) が必須である. 以下に V_j に対する決定法の概要を述べる (以下にある Step 1,2 は [1, 6] に準拠. 詳細は [4] を参照されたい):

Step 1 まず, 非線型項 $F(u)$ を追い出す. 具体的には, 公式

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{S(\varepsilon\phi)}{\varepsilon} = S_0(\phi), \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

を用いる. ここで S_0 は摂動項 $V_0 u$ のみ伴った線型 Schrödinger 方程式に関する散乱作用素である.

Step 2 Higher velocity limit と呼ばれる極限を用いることにより S_0 から Q_0, μ_0 が決定される. 従って, 線型発展群 $U[V_0](t) = \exp(-it(-\Delta) + V_0)$ 並びに波動作用素

$$\Omega_\pm = \mathrm{s}-\lim_{t\to\pm\infty} U[V_0](-t)U(t) \qquad \text{（複号同順）}$$

が一意的に再構成される.

Step 3 既知となった $\Omega_\pm$ 及び, small amplitude limit のアイデアを用いると, 小さい $\lambda > 0$ で

$$i\lambda^{-4}\left\langle(\Omega_+ S\Omega_-)(\lambda^3\phi[\lambda]) - \lambda^3\phi[\lambda], \phi[\lambda]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)} = \int_{\mathbb{R}^3}\frac{Q_1\exp(-\mu_1|y|)}{|y|}\Psi(\lambda;y)dy + o(\lambda)$$

を得る. 但しここで, $\phi[\lambda](x) = \phi(\lambda x)$ であり, $\Psi(\lambda;y)$ は

$$\Psi(\lambda;y) = \int_{\mathbb{R}^{1+3}}\left|e^{-itH(\lambda,y)}\phi(x-\lambda y)\right|^2\left|e^{-itH(\lambda,0)}\phi(x)\right|^2 d(t,x),\ H(\lambda,y) = -\Delta + \lambda^{-2}V_0(\lambda^{-1}x - y)$$

で与えられる関数である. ここで適当な ϕ を取る[1]と, $L^2(\mathbb{R}^3)$ の意味で $e^{-itH(\lambda,y)}\phi \to U(t)\phi$ ($\lambda \to 0$ のとき) となる. 更に吟味すると, $\Psi(\lambda,y)$ は既知なる定数 $\|U(t)\phi; L^4(\mathbb{R}; L^4)\|^4$ に収束することが分かる. 最終的に公式

$$\frac{Q_1}{\mu_1^2} = \frac{i\lim\limits_{\lambda\to 0}\lambda^{-4}\left\langle(\Omega_+ S\Omega_-)(\lambda^3\phi[\lambda]) - \lambda^3\phi[\lambda], \phi[\lambda]\right\rangle_{L^2(\mathbb{R}^3)}}{4\pi\|U(t)\phi; L^4(\mathbb{R}; L^4)\|^4}$$

を得る. 故に Q_1/μ_1^2 が決定される.

Step 4 Small amplitude limit を応用することで, 既知となった Q_1/μ_1^2 を用いて Q_1 そして μ_1 が決定される.

参考文献

[1] V. Enss and R. Weder, J. Math. Phys. 36 (1995), 3902–3921.

[2] H. Sasaki, Journal of Physics: Conference Series 73 (2007), 012021.

[3] H. Sasaki, Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications 66 (2007), 1770–1781.

[4] H. Sasaki, Comm. Partial Diff. Equations 33 (2008), 1175–1197.

[5] W.A. Strauss, Non linear scattering theory, in "Scattering Theory in Mathematical Physics", pp. 53–78. J. A. Lavita and J.-P. Marchand, editors, D. Reidel, Dordrecht-Holland / Boston 1974.

[6] M. Watanabe, Tokyo J. Math. 24 (2001), 59–67.

[7] M. Watanabe, Inverse Problems 18 (2002), 1477–1481.

[8] M. Watanabe, Journal of Physics: Conference Series 73 (2007), 012025.

[9] M. Watanabe, J. Math. Phys. 48, 053510 (2007) (9 pages).

[1] 具体的には $(\Delta^2+1)^{-1}\phi$ が滑らかで且つ, 台が原点から外れているような ϕ を取る.