A third order dispersive flow into almost Hermitian manifolds

小野寺 栄治（九州大数理） onodera@math.kyushu-u.ac.jp

X を実数直線 $\mathbb{R}$ または 1 次元平坦トーラス $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, (N, J, g) をコンパクト概エルミート多様体とする. N 上の曲線の運動を記述する 3 階分散型偏微分方程式の初期値問題

$$u_t = a\,\nabla_x^2 u_x + J_u\,\nabla_x u_x + b\,g(u_x, u_x)u_x \quad \text{in} \quad \mathbb{R}\times X, \tag{1}$$
$$u(0,x) = u_0(x) \quad \text{in} \quad X \tag{2}$$

を考察する. ここに, $u(t,x) : \mathbb{R}\times X \to N$ は (t,x) を独立変数とする N-値未知関数, $u_0(x) : X \to N$ は与えられた N-値初期曲線, $u_t = du(\partial/\partial t)$, $u_x = du(\partial/\partial x)$, $\nabla_x (= \nabla^N_{u_x})$ は写像 u に沿う x 方向の共変微分, ∇^N は N 上の g に関する Levi-Civita 接続, $a, b \in \mathbb{R}$ を定数とする. 特に $a, b = 0$ のとき, (1) の解は (1 次元) シュレーディンガー写像とよばれる.

方程式 (1) は, 渦糸運動に関連した $\vec{u}(t,x) : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{S}^2$ を未知関数とする古典力学モデル

$$\vec{u}_t = \vec{u}\wedge\vec{u}_{xx} + a\left[\vec{u}_{xxx} + \frac{3}{2}\{\vec{u}_x \wedge (\vec{u}\wedge\vec{u}_x)\}_x\right], \quad (\wedge : \mathbb{R}^3\text{の外積}) \tag{3}$$

- $\vec{u} = \vec{\gamma}_x$, $\vec{\gamma}(t,x) \in \mathbb{R}^3$: 渦糸の位置ベクトル, $x \in \mathbb{R}$: 孤長パラメータ
- $a = 0$: Da Rios (Rend. Circ. Mat. Palermo(1906))
- $a \neq 0$: Fukumoto-Miyazaki (J. Fluid Mech.(1991)) ($a \neq 0$: 渦管内部の軸流の影響)

を幾何学的に一般化することにより導出される. ((3) は $N = \mathbb{S}^2$, $b = a/2$ の場合に対応)

本研究では, 初期値問題 (1)-(2) の時間局所解の存在及び時間大域的延長可能性を考察する. 特に, 多様体の一般化を通じて, (1) や (3) の偏微分方程式系としての構造を, 多様体の幾何学的設定という観点から理解したい.

この種の研究は, Koiso(1997) による先駆的研究以降, この 10 年程で進展を見せているが, 先行研究では N がケーラー多様体であること ($\nabla^N J \equiv 0$) が仮定されてきた. 一方, 最近になり Chihara によって, シュレーディンガー写像 ($a, b = 0$ の場合) についてはケーラー性を仮定せずとも時間局所解が唯一つ存在することがわかった. 本講演では,「ケーラー性の有無」に着目し, 3 階方程式 ($a \neq 0$ の場合) に対して考察を試みて得られた最近の成果を報告したい.

初期値問題 (1)-(2) の解の一意存在については以下の関連する先行研究が知られている:

- Koiso (Osaka J. Math.(1997)): (i) $a, b = 0$, $\nabla^N J \equiv 0 \implies$ 時間局所解の存在
  (ii) $a, b = 0$, $\nabla^N J \equiv \nabla^N R \equiv 0$ (局所エルミート対称空間) $\implies$ 時間大域解の存在
- Nishiyama-Tani (Publ. RIMS(1997)): $a \neq 0$, $b = a/2$, $N = \mathbb{S}^2 \implies$ 時間大域解の存在
- Onodera (J. Geom. Anal.(2008)): (i) $a \neq 0$, $\nabla^N J \equiv 0 \implies$ 時間局所解の存在
  (ii) $a \neq 0$, N : 定曲率 ($\equiv K$) 閉リーマン面, $b = aK/2 \implies$ 時間大域解の存在
- Onodera (arXiv:0906.3171.): $a \neq 0$, $\nabla^N J \equiv \nabla^N R \equiv 0 \implies$ 時間大域解の存在
- Chihara (arXiv:0807.3395.): $a, b = 0$, X: 閉リーマン多様体, N: 概エルミート多様体
  $\implies$ 時間局所解の存在 ($u_t = J_u \tau(u)$, $\tau(u)$ は $u : X \to N$ のテンション場)

今回は, **「3 階方程式の場合も, 必ずしも N のケーラー性がなくとも (1)-(2) は時間局所的に一意可解である」** ことを確認した. (以下, $a \neq 0$, N はコンパクト概エルミート多様体.)

定理 1. ([2] : $X=\mathbb{R}$ の場合, [1] : $X=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の場合) $m=4,5,6,\dots$ とする. このとき
$$u_0 \in C(X;N), \quad u_{0x} \in H^m(X;TN)$$
をみたす任意の u_0 に対して, ある $T=T(a,b,N,\|u_{0x}\|_{H^4(X;TN)})>0$ が存在して,
$$u \in C([-T,T]\times X;N), \quad u_x \in C([-T,T]:H^m(X;TN))$$
をみたす (1)-(2) の時間局所解 u が唯一つ存在する.

N のケーラー性が成立する場合と破綻する場合との違い

形式的には十分大きい m に対して $\nabla_x^m u_x$ の満たすべき方程式は以下の形になる:

$$\begin{aligned}&\left(\nabla_t - a\,\nabla_x^3 - \nabla_x J_u \nabla_x - m\,(\nabla_x J_u)\nabla_x\right)\nabla_x^m u_x\\ =&a\,R(\nabla_x\nabla^m u_x, u_x)u_x + 2b\,\{g(\nabla_x^m u_x, u_x)\}_x\,u_x + b\,g(u_x,u_x)\nabla_x\nabla_x^m u_x + \cdots.\end{aligned}$$

$(\nabla_x J_u)(:=\nabla_x J_u - J_u\nabla_x)$ は反対称な $(1,1)$-テンソル場であり, J と ∇^N との非可換部分の影響を反映する. もし $\nabla^N J\equiv 0$ ならば, $m(\nabla_x J_u)\nabla_x$ が常に消えるため, 古典的エネルギー法が機能し, 時間局所解の存在が従う. (右辺の 1 階項は, 曲率テンソル R と計量 g の基本性質により対称双曲系のように振舞う.) 一方, もし $\nabla^N J\not\equiv 0$ ならば, 反対称な 1 階項 $m(\nabla_x J_u)\nabla_x$ が一般には消えないため, いわゆる derivative loss が生じ, 古典的エネルギー法は機能しない.

定理 1 の証明のアイデア: $X=\mathbb{R}$ の場合

$\mathbb{R}$ 上の $e^{ta\partial^3/\partial x^3}$ の局所平滑化効果をある種のゲージ変換によって引き出すことにより, 反対称な 1 階項 $m(\nabla_x J_u)\nabla_x$ を解消することができる. 実際, $|(\nabla_x J_u)|=\mathcal{O}(g(u_x,u_x)^{1/2})$ に着目し,

$$\Lambda(t,x) := \exp\left(-\frac{1}{3a}\int_{-\infty}^{x} g(u_x(t,y),u_x(t,y))dy\right)$$

と定めると, Λ は $L^2(\mathbb{R};TN)$ の線型同型で, $[\Lambda, a\nabla_x^3]$ が生成する 2 階楕円型作用素 $-g(u_x,u_x)\nabla_x^2$ が 1 階項 $m(\nabla_x J_u)\nabla_x=\mathcal{O}(g(u_x,u_x)^{1/2})\nabla_x$ を吸収するので, $\Lambda\nabla_x^m u_x$ に対するエネルギー法が機能する. これは, Tarama (J. Math. Kyoto Univ.(1997)) による 3 階線型分散型偏微分作用素の初期値問題が $\mathbb{R}$ 上で L^2-適切となるための必要十分条件をみたす低階項のうちの扱いやすい特殊な場合に相当する.

定理 1 の証明のアイデア: $X=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の場合

平滑化効果を用いなくても反対称な 1 階項 $m(\nabla_x J_u)\nabla_x$ を解消することができる. 実際, 粗く言うと $(\nabla_x J_u)$ を "ある関数の微分" と見なせることに着目し, Chihara(arXiv:0807.3395.) の方法を参考にすると,
$$\Lambda := 1 + \frac{m}{3a}J_u\nabla_x^{-1}$$
の形のゲージ変換を $\nabla_x^m u_x$ に作用させることができて, $[a\nabla_x^3,(m/3a)J_u\nabla_x^{-1}]\nabla_x^m u_x$ が生成する 1 階項が $m(\nabla_x J_u)\nabla_x$ を相殺して, $\Lambda\nabla_x^m u_x$ に対するエネルギー法が機能することがわかる. これは, Mizuhara (Funkc. Ekvacioj(2006)) による 3 階線型分散型偏微分作用素の初期値問題が $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上で L^2-適切となるための必要十分条件をみたす低階項のうちの, 1 階項の係数がポテンシャルを持つ特別な場合に相当する.

参考文献

[1] H. Chihara and E. Onodera: J. Funct. Anal. **257** (2009), 388–404.
[2] E. Onodera: arXiv:0805.3219.