Regularity and existence of solutions for non-cutoff Boltzmann equation

森本 芳則 (京都大学人間環境学研究科)

2009 年 12 月 18 日

概要

Boltzmann 方程式は衝突積分核に Grad's angular cutoff 条件を仮定しないと，空間一様，あるいは非一様な場合，それぞれに応じて，熱方程式，あるいはコルモゴロフ方程式 $(\partial_t + v\cdot\nabla_x - \Delta_v)f(t,x,v) = 0$ におけるような，解の平滑効果が予想されてきた．本講演では，解の平滑効果と解の存在に関する Alexandre, 鵜飼, Xu, Yang, Huo 氏との一連の共同研究を解説する．

1 序：Boltzmann 方程式

気体運動論の基礎方程式である Boltzmann 方程式は, 時刻 t における位置 $x \in \mathbb{R}^3$ で速度 $v \in \mathbb{R}^3$ を持つ粒子の分布密度 $f = f(t,x,v)$ を未知関数とする微積分方程式

$$\partial_t f + v\cdot\nabla_x f = Q(f,f) \tag{1.1}$$

である．右辺 $Q(f,f)$ は衝突積分項と呼ばれ，双線形衝突積分作用素

$$Q(g,f)(t,x,v) = \int_{\mathbb{R}^3}\int_{\mathbb{S}^2} B\left(v-v_*,\sigma\right)\left\{g'_*f' - g_*f\right\}d\sigma dv_* \tag{1.2}$$

によって定義される．ここで,

$$g'_* = g(t,x,v'_*), f' = f(t,x,v'), g_* = g(t,x,v_*), f = f(t,x,v),$$

v', v'_* と v, v_* は気体 2 粒子の衝突前と衝突後の速度をあらわし、

$$v' = \frac{v+v_*}{2} + \frac{|v-v_*|}{2}\sigma,\ \ v'_* = \frac{v+v_*}{2} - \frac{|v-v_*|}{2}\sigma,\ \ \sigma\in\mathbb{S}^2$$

の関係が従う．容易に $v'+v'_* = v+v_*, |v'-v'_*| = |v-v_*|,\ |v'|^2+|v'_*|^2 = |v|^2+|v_*|^2$ が検証できるが，最後の等式から Maxwellian $e^{-|v|^2/2}$ が (1.1) の安定解であることがわかる．一般に，衝突積分核 B は 2 粒子の相対速度 $|v-v_*|$ と，衝突角 θ による因子の積

$$B(v-v_*,\sigma) = \Phi(|v-v_*|)b(\cos\theta),\quad \cos\theta = \left\langle \frac{v-v_*}{|v-v_*|}\,,\sigma\right\rangle,\ \ 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}$$

であらわされ，角度因子 $b(\cos\theta)$ は $\theta=0$ で特異性をもっている．実際，粒子間に働くポテンシャルが逆べき則（inverse power law potential） $U(\rho) = \rho^{-(q-1)}, q>2$ に従う場合,

$$\Phi(|v-v_*|) = |v-v_*|^{(q-5)/(q-1)}, \tag{1.3}$$

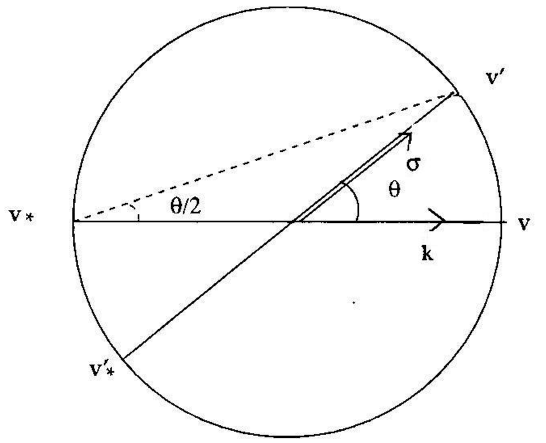

図 1　post and pre collisional velocities:　σ ,　$\mathbf{k} = \frac{v-v_*}{|v-v_*|}$,　$\cos\theta = \langle \mathbf{k}, \sigma \rangle$

$$\sin\theta\, b(\cos\theta) \;\approx\; K\theta^{-1-2s} \quad \text{as} \;\; \theta \to 0, \tag{1.4}$$

が近似的に得られる（参照 [13]). ただし，$K > 0$,　$0 < s = 1/(q-1) < 1$ であり，

$$\int_{\mathbb{S}^2} b(\langle \frac{v - v_*}{|v - v_*|}\,, \sigma \rangle) d\sigma = 4\pi \int_0^{\pi/2} \sin\theta b(\cos\theta) d\theta = \infty$$

が成立する*.

Boltzmann 方程式に対する，これまでの多くの研究では $b(\cos\theta)$ が σ 変数に関して積分可能となるように, $\theta = 0$ での特異性を取り去った条件（Grad's angular cutoff assumption）が仮定されてきた．一方，角度変数の特異性から Boltzmann 方程式の解の平滑効果が生じることは，1970 年代の Pao[22] の研究以来，予想されていたが Alexandre-Desvillettes-Villani-Wennberg[3](2000) による 衝突積分項 $Q(f, f)$ に関する精密な L^2 評価が得られて以降, 新たな数学理論の展開が可能となった．Desvillettes-Wennberg[14]（cf., [4, 5]）は, Boltzmann 方程式 (1.1) が空間変数 x によらない（空間一様な）場合に, 初期値問題の解の平滑効果がおこることを示したが，空間非一様な場合は未解決であった．尚，non-cutoff Boltzmann 方程式については，空間非一様な場合まで初期値問題の局所解を Gevrey 関数空間で考察した鵜飼氏の先駆的な仕事 [24](1984) がある．

本講演の目的は，空間非一様な non-cutoff Boltzmann 方程式に対して得られた，解の平滑効果と局所解, 大域解の存在に関する, Alexandre, 鵜飼, Xu, Yang 氏との一連の共同研究 ([7, 8, 9, 10, 11]) を報告することであるが，衝突積分項の擬微分作用素を用いた取扱いなどを述べるため，空間一様な場合を考察した， Huo 氏を含む共同研究（[18, 16]）についても解説する．

2　衝突積分作用素の仮定と評価式

積分核 $B(v - v_*, \sigma) = \Phi(|v - v_*|) b(\cos\theta)$ の角度因子 b は特異性

$$\sin\theta\; b(\cos\theta) \;\approx\; K\theta^{-1-2s} \;\; \text{as} \;\; \theta \to 0+, \;\; 0 < s < 1, \;\; K > 0 \tag{2.1}$$

* $Q(f, f)$ を扱う際，$f(v')f(v'_*)$ は変換 $\sigma \to -\sigma$ に不変なので $\frac{v-v_*}{|v-v_*|} \cdot \sigma = \cos\theta \geq 0$, すなわち $\theta \in [0, \pi/2]$ を仮定する．

をもち，Φ は相対速度 $|v-v_*|=0$ での特異性から生じる困難を避けるため

$$\Phi(|v-v_*|)=\left(1+|v-v_*|^2\right)^{\frac{\gamma}{2}}, \qquad \gamma\in\mathbb{R}, \tag{2.2}$$

と仮定する．粒子間に働くポテンシャルを逆べき則 $U(\rho)=\rho^{-(q-1)}$ から Debye-湯川型 $U(\rho)=\rho^{-1}e^{-\rho^\tau}\quad(0<\tau<2)$ に代えると

$$\sin\theta\, b(\cos\theta)\ \approx\ K\theta^{-1}(\log\theta^{-1})^{\varepsilon}\ \text{ as }\ \theta\to 0,\ \ \varepsilon=\tfrac{2}{\tau}-1. \tag{2.3}$$

$$\Phi(|v-v_*|)=\left(1+|v-v_*|^2\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.4}$$

をみたす積分核 B が導出される．

衝突積分作用素 $Q(g,f)$ の評価を述べるため次の重み付きソボレフ空間を導入する．$p\geq 1$ と $\beta,s\in\mathbb{R}$ に対して

$$\|f\|_{L^p_\beta}=\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\langle v\rangle^\beta f(v)|^p dv\right)^{1/p},$$

$$\|f\|_{H^s_\beta}=\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\langle D_v\rangle^s\big(\langle v\rangle^\beta f(v)\big)|^2dv\Big)^{1/2}.$$

また，$\|f\|_{L\log L}=\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n}|f(v)|\log(1+|f(v)|)dv$ とおく．

2.1 Coercive 評価（Alexandre-Desvillettes-Villani-Wennberg[3]）

命題 2.1（AMUXY[10],cf., HMUY[16]） 積分核 B が (2.1),(2.2) をみたすとき，$g\geq 0,\not\equiv 0$, $g\in L^1_2\bigcap L\log L$ ならば, $\|g\|_{L^1_2}$ と $\|g\|_{L\log L}$ にのみよる定数 $c_g>0$ 存在して，すべての $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n_v)$ に対して

$$\begin{aligned}c_g\|\langle D_v\rangle^s\langle v\rangle^{\gamma/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}\leq&-\left(Q(g,f),f\right)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\\&+C\|g\|_{L^1_{\max(\gamma^+,2-\gamma^+)}}\|f\|^2_{L^2_{\gamma^+/2}(\mathbb{R}^3)},\end{aligned}$$

が成立する．ここで $r^+=\max(r,0)$ for $r\in\mathbb{R}$ である．また，(2.1) の代わりに (2.3) を仮定すると，左辺を

$$c_g\|(\log(e+|D_v|^2))^{(1+\varepsilon)/2}\langle v\rangle^{\gamma/2}f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^3)}$$

に置き換えた評価式が成立する．

2.2 Upper bound estimates（上からの評価）

命題 2.2（AMUXY[10]） 積分核 B が (2.1),(2.2) をみたすならば，任意の $m,\beta\in\mathbb{R}$ に対して定数 $C>0$ が存在して

$$\begin{aligned}&\Big|\Big(Q(f,\,g),h\Big)_{L^2(\mathbb{R}^3_v)}\Big|\\&\qquad\leq C||f||_{L^1_{\beta^++(\gamma+2s)^+}(\mathbb{R}^3_v)}||g||_{H^{m+2s}_{(\beta+\gamma+2s)^+}(\mathbb{R}^3_v)}||h||_{H^{-m}_{-\beta}(\mathbb{R}^3_v)}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

が成立する (cf., Alexandre[2], Alexandre-He[6], HMUY[16]).

この評価から

$$\|Q(f,\,g)\|_{H^m_\beta(\mathbb{R}^3_v)} \le C||f||_{L^1_{\beta^+ + (\gamma+2s)^+}(\mathbb{R}^3_v)}||g||_{H^{m+2s}_{(\beta+\gamma+2s)^+}(\mathbb{R}^3_v)}$$

が従うが，Coercive 評価と併せると衝突積分項は

$$-Q(f,f) \;\approx\; (-\Delta_v)^s\,,\; 0<s<1$$

と，重さ $\langle v\rangle$ を無視すると解釈できる．従って，空間非一様な non-cutoff Boltzmann 方程式の初期値問題は，粗く言ってコルモゴロフ型方程式の初期値問題

$$\partial_t f - v\cdot\nabla_x f + (-\Delta_v)^s f = 0\,,\;\; f(0,x,v)=f_0(x,v)\in L^2(\mathbb{R}^6_{x,v}).$$

と同様と考えることができる．フーリエ変換を用いて解を具体的に

$$\hat{f}(t,\eta,\xi) = e^{-\int_0^t|\xi+\rho\eta|^{2s}d\rho}\hat{f}_0(\eta,\xi+t\eta).$$

と書けるので，不等式

$$\exists c_s>0\;;\; c_s\left(t|\xi|^{2s}+t^{2s+1}|\eta|^{2s}\right) \le \int_0^t |\xi+\rho\eta|^{2s}d\rho,$$

を用いて

$$e^{c_s(t(-\Delta_v)^s + t^{2s+1}(-\Delta_x)^s)}f(t,\,\cdot,\,\cdot\,)\in L^2(\mathbb{R}^6).$$

を得る．これは任意の α,β に対して

$$\|(t^{1/2s}\partial_v)^\alpha(t^{1+1/2s}\partial_x)^\beta f(t,\cdot,\cdot)\|_{L^2(\mathbb{R}^{2n})} \le C_0C_1^{|\alpha+\beta|}(\alpha!\beta!)^{1/2s}$$

が成立することと同値であり，non-cutoff Boltzmann 方程式に対しても解の C^∞ 平滑効果のみならず Gevrey 関数空間での平滑効果が期待できることを示唆している．

2.3 Commutator Estimate (Maxwellian molecule case)

命題 2.3 積分核 B が (2.1),(2.2) をみたし，$\gamma=0$ とする．$0<\delta<1$ に対して $M_\delta(\xi) = (1+|\xi|^2)^{N_0}(1+\delta|\xi|^2)^{-N_1}$，$(N_1\ge N_0+4\ge 0)$ とおくと, δ によらない $C>0$ が存在して

$$|(Q(f,M_\delta(D)g),h)_{L^2} - ((Q(f,g),M_\delta(D)h)_{L^2}| \le C\|f\|_{L^1}\|M_\delta(D)g\|_{L^2}\|h\|_{L^2}$$

が成立する．

3 空間一様な non-cutoff Boltzmann 方程式

解 f が空間変数 x によらない場合の初期値問題

$$\begin{cases} \partial_t f(t,v) = Q(f,f)(t,v), & t\in\mathbb{R}^+,\; v\in\mathbb{R}^3,\\ f(0,v)=f_0(v), \end{cases} \tag{3.1}$$

について，質量，エネルギー，エントロピーに関する有界条件

$$\sup_{0<t}\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)[1+|v|^2+\log(1+f(t,v))]dv<+\infty, \tag{3.2}$$

をみたす Villani[25] によって存在が示された弱解に対する平滑効果を考察する．

定義 3.1　$f_0(v) \geq 0$ が，$L^1_2(\mathbb{R}^3) \cap L\log L(\mathbb{R}^3)$ に属するとき，$f(t,v)$ が初期値問題 (3.1) の弱解であるとは次を満たすことである．

$$\begin{aligned}
&f(t,v) \geq 0, \quad f(t,v) \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)) \cap L^1([0,T]; L^1_{2+\gamma^+}(\mathbb{R}^3)),\\
&\quad f(0,v) = f_0(v),\\
&\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\psi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^3} f_0(v)\psi(v)dv \text{ for } \psi = 1, v_j, |v|^2;\\
&f(t,v) \in L\log L(\mathbb{R}^3), \quad \int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\log f(t,v)dv \leq \int_{\mathbb{R}^3} f_0 \log f_0 dv, \quad \forall t \geq 0;\\
&\int_{\mathbb{R}^3} f(t,v)\varphi(t,v)dv - \int_{\mathbb{R}^3} f_0\varphi(0,v)dv - \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} f(\tau,v)\partial_\tau\varphi(\tau,v)dv \qquad (3.3)\\
&\qquad\qquad = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(\tau,v)\varphi(\tau,v)dv,
\end{aligned}$$

が任意の $\varphi(t,v) \in C^1(\mathbb{R}^+; C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$ に対して成立する．ここで右辺の積分は, 変数変換 $(v, v_*, \sigma) \to (v', v'_*, \mathbf{k})$ に注意して

$$\int_{\mathbb{R}^3} Q(f,f)(v)\varphi(v)dv = \int_{\mathbb{R}^6}\int_{\mathbb{S}^2} Bf(v_*)f(v)(\varphi(v') - \varphi(v))dvdv_*d\sigma$$

によって定義され，$\varphi \in L^\infty([0,T]; W^{2,\infty}(\mathbb{R}^3))$ であれば well-defined である (cf., p. 291 [25])．

積分核の角度因子 b の特異性が弱い場合 $(0 < s < 1/2)$ についてまず結果を述べる．

定理 3.1（HMUY[16]）　積分核 B が，(2.1)-(2.2) を付加条件 $0 < s < 1/2$，$0 \leq \gamma \leq 1$ のもとでみたすとする．このとき，f が (3.1) の弱解ならば，任意の $t > 0$ について f は $H^{+\infty}(\mathbb{R}^3)$ に属する．すなわち，

$$f \in L^\infty([t_0, T];\ H^{+\infty}(\mathbb{R}^3)),$$

が任意の $T > 0$ と $t_0 \in (0, T)$ に対して成立する．また，積分核 B が (2.3)-(2.4) をみたす場合も同じ結果が成立する．$\gamma = 0$ の場合は $0 < s < 1$ で同じ結果が成立する (MUXY[18])．

特異性が強い場合には，弱解に次の L^1 モーメント条件を仮定する．

$$0 \leq \exists T_0 < \exists T_1\ ;\ |v|^m f \in L^\infty([T_0, T_1]; L^1(\mathbb{R}^3)),\ \text{for all } m \in \mathbb{N}. \qquad (3.4)$$

定理 3.2（HMUY[16]）　$\gamma \leq 1$ として† (2.1)-(2.2) を仮定する．f が (3.1) の弱解で条件 (3.4) をみたすならば，f は $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ に属する，すなわち，

$$f \in L^\infty([t_0, T_1];\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)),$$

が任意の $t_0 \in (T_0, T_1)$ に対して成立する

注意 3.1　Wennberg[26] により，$\gamma > 0$ のとき，初期値 f_0 が L^1 モーメント有界条件を満たさなくても，任意の $T_0 > 0$ について (3.4) をみたす弱解が存在することが知られている．尚，空間一様な non-cutoff Boltzmann 方程式の初期値問題の弱解の一意性は $\gamma = 0$ の場合（Maxwellian molecule case）しか知られていない [23]．

前章で Gevrey 関数空間での解の平滑効果の可能性について言及したが，空間一様な場合に得られた部分的な結果について述べる．

† The case $0 \leq \gamma < 1$ is only considered in [16], but the proof there is applicable to the case $\gamma < 0$.

定理 3.3 (M-Ukai[19]) 積分核 B が，(2.1)-(2.2) を付加条件 $0 < s < 1/2,\ \gamma \geq 0, \gamma + 2s < 1$ のもとでみたすと仮定する．$\nu = 1/(2s)$ とする．$f(t, v)$ が初期値問題 (3.1) の解で，$T > 0$ に対して次の意味で *smooth Maxwellian decay solution*

$$\begin{cases} f \geq 0\,,\ \not\equiv 0, \\ \exists \delta_0 > 0\ \ ;\ \ e^{\delta_0 \langle v \rangle^2} f \in L^\infty([0, T];\, H^{+\infty}(\mathbb{R}^n)) \end{cases}$$

であるとする．このとき，任意の $t_0 \in]0, T[$ に対して $\rho > 0$ と，$\delta > \kappa T$ をみたす $\delta, \kappa > 0$ が存在して

$$\sup_{t \in [t_0, T]} \sup_{\alpha} \frac{\rho^{|\alpha|} \| e^{(\delta - \kappa t) \langle v \rangle^2} \partial_v^\alpha f(t) \|_{L^2}}{\{\alpha!\}^\nu} < +\infty \tag{3.5}$$

が成立する．

Gevrey 平滑効果に関連する結果としては，MUXY[18] で安定解 $\mu(v) = (2\pi)^{-3/2} e^{-v^2/2}$ の周りでの解 $f = \mu + g$ を考え，摂動 g が線形近似方程式の解である場合が考察された．また，non-cutoff Boltzmann 方程式の $s \to 1$ の場合の極限として考察される Landau 方程式について，同様な Gevrey 平滑効果が M-Xu[20] で示された．いずれも $\gamma = 0$ の場合 (Maxwellian molecule case) のみで, 空間一様な場合に限っても多くが未解決である．

4 空間非一様な場合の解の regularizing effect

第 2 章と同様に，$\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3$ での重み付きソボレフ空間を用いる．$m \in \mathbb{R},\ l \in \mathbb{R}$ について

$$H_l^m(\mathbb{R}^7) = \left\{ f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^7);\ \langle v \rangle^l f \in H^m(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_x^3 \times \mathbb{R}_v^3) \right\}.$$

とする．$H_l^m(\mathbb{R}_{x,\,v}^6)$ も同様に定義される．重みは $v \in \mathbb{R}^3$ 変数のみである．時間と空間については局所的に解を考察するので次の空間を導入する．$0 < T \leq +\infty$ と領域 $\Omega \subset \mathbb{R}_x^3$ に対して，

$$\mathcal{H}_l^m(]0,\, T[\times \Omega \times \mathbb{R}_v^3) =$$
$$\left\{ f \in \mathcal{D}'(]0,\, T[\times \Omega \times \mathbb{R}_v^3);\ \varphi(t)\psi(x) f \in H_l^m(\mathbb{R}^7)\,,\ \forall \varphi \in C_0^\infty(]0,\, T[),\ \psi \in C_0^\infty(\Omega) \right\}.$$

とおく．

定理 4.1 積分核 B について，(2.1)，(2.2) を仮定する．$0 < T \leq +\infty$, Ω を $\mathbb{R}_x^3$ の領域とする．非負な関数 f がどんな $l \in \mathbb{N}$ についても $\mathcal{H}_l^5(]0,\, T[\times \Omega \times \mathbb{R}_v^3)$ に属し，方程式

$$\partial_t f + v \cdot \nabla_x f = Q(f, f) \tag{4.1}$$

を領域 $]0,\, T[\times \Omega \times \mathbb{R}_v^3$ で古典解としてみたし，更に

$$\| f(t, x, \cdot) \|_{L^1(\mathbb{R}_v^3)} > 0, \tag{4.2}$$

がすべての $(t, x) \in]0,\, T[\times \Omega$ について成立するならば,

$$f \in C^\infty(]0,\, T[\times \Omega;\, \mathcal{S}(\mathbb{R}_v^3))$$

が従う.

注意 4.1 $0 < s < 1/2, \gamma = 0$ の場合は，$\mathcal{H}_l^5$ $(\forall l \in \mathbb{N})$ の仮定は，$\mathcal{H}_l^3$ $(\forall l \in \mathbb{N})$ に置き換えることができる.

定理の証明では，Boltzmann 方程式の輸送項 $\partial_t + v \cdot \nabla_x$ の t, x によるフーリエ変換を考慮して，$|\tau + v \cdot \eta|^2 = V(v; \tau, \eta)$ とおき，衝突積分項を $(-\Delta_v)^s$ と捉えて，時間非依存の Schrödinger 型作用素 $(-\Delta_v)^s + V(v; \tau, \eta)$ の正値性を考察する方法が重要である．この種の正値性は $s = 1$ の場合は Fefferman によって 1980 年代に不確定性原理として定式化されており，一般の s については退化楕円型作用素の準楕円性の解析のために [17] などで用いられてきた。

5　空間非一様な場合の解の存在定理

定理 4.1 の仮定をみたす古典解の存在について述べる．空間非一様な non-cutoff Boltzmann 方程式の解の存在について既知な結果はわずかである．Ukai[24] では，Gevrey 関数空間に属する初期値に対する局所解の存在が示されているが，解はすでに C^∞ な関数空間の中で構成されており，定理 4.1 で対象とする解ではない．Alexandre[1], Alexandre-Villani[12] では，それぞれ，局所解，大域解が構成されているが，それらは弱解で定理 4.1 が対象とする古典解ではない．

5.1　局所解の存在

速度変数 v について, 定理 3.3 で述べたような Maxwellian のオーダで減少する関数空間を導入する．$k \in \mathbb{R}$，$T > 0$ に対して,

$$\mathcal{E}_0^k(\mathbb{R}^6) = \Big\{ g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^6_{x,v});\ \exists \rho_0 > 0\ s.t.\ e^{\rho_0 \langle v \rangle^2} g \in H^k(\mathbb{R}^6_{x,v}) \Big\},$$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^k([0,T] \times \mathbb{R}^6_{x,v}) = &\Big\{ f \in C^0([0,T]; \mathcal{D}'(\mathbb{R}^6_{x,v}));\ \exists \rho > 0\, s.t. \\ &\qquad\qquad e^{\rho \langle v \rangle^2} f \in C^0([0,T];\ H^k(\mathbb{R}^6_{x,v})) \Big\},\end{aligned}$$

とおく．

定理 5.1　積分核 B が，(2.1)-(2.2) を付加条件 $0 < s < 1/2$, $\gamma + 2s < 1$ のもとでみたすと仮定する．このとき，$f_0 \geq 0$ かつ, $k_0 \geq 4$ について $f_0 \in \mathcal{E}_0^{k_0}(\mathbb{R}^6)$ ならば，$T_* > 0$ が存在して初期値問題

$$\begin{cases} f_t + v \cdot \nabla_x f = Q(f,f), \\ f|_{t=0} = f_0, \end{cases} \tag{5.1}$$

は関数空間 $\mathcal{E}^{k_0}([0,T_*] \times \mathbb{R}^6)$ に属する非負な解をただ一つもつ．更に，初期値 f_0 が $\mathcal{E}_0^5(\mathbb{R}^6)$ に属し，有界閉集合 $K \subset \mathbb{R}^3_x$ について

$$\|f_0(x,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^3_v)} > 0, \quad \forall\ x \in K,$$

をみたすならば，適当な $\tilde{T}_0 \in]0, T_*]$ と K の近傍 $V_0 \subset \mathbb{R}^3_x$ に対して

$$f \in C^\infty(]0, \tilde{T}_0[\times V_0;\ \mathcal{S}(\mathbb{R}^3_v))$$

が成立する．また, $\gamma \leq 0$ のときは，初期値問題 (5.1) の非負な解は関数空間 $C^0([0,T_*];\ H^m_p(\mathbb{R}^6))$ で一意的である．ただし，$m > 3/2 + 2s$, $p > 3/2 + 4s$ とする．

存在定理の証明における困難さの一つは，衝突積分項 $Q(f,f)$ の上からの評価（命題 2.2) と下からの (coercive) 評価 (命題 2.1）との間に，速度変数 v に関する $2s$ 次モーメントの間隙があることである．これを制御するため，Ukai[24] で用いられた t と共に変化する重み関数

$$\mu_\kappa(t) = \mu(t,v) = e^{-(\rho - \kappa t)\langle v \rangle^2},\ \kappa, \rho > 0, \quad 0 \leq t \leq T_0 := \rho/(2\kappa)$$

を導入して，$f = \mu_\kappa(t) g$，$\Gamma^t(g,g) = \mu_\kappa(t)^{-1} Q(\mu_\kappa(t) g,\, \mu_\kappa(t) g)$ とおいて g に対する初期値問題

$$\begin{cases} g_t + v \cdot \nabla_x g\ + \kappa \langle v \rangle^2 g = \Gamma^t(g,g), \\ g|_{t=0} = g_0\,, \end{cases} \tag{5.2}$$

を考察する．$l \geq 3$, $k \geq 4$ とするとき, 初期値 $g_0 \in H^k_l(\mathbb{R}^6)$, ($g_0 \geq 0$) に対して (5.2) の非負な解

$$g \in C^0([0, T_*];\ H^k_l(\mathbb{R}^6)) \bigcap\ L^2(]0, T_*[; H^k_{l+1}(\mathbb{R}^6))$$

が一意的に存在することを, 衝突積分核 B を $B_\varepsilon = \Phi(|v - v_*|)b_\varepsilon(\theta)$ (ただし, $b_\varepsilon(\cos\theta) = b(\cos\theta)$ if $|\theta| \geq 2\varepsilon$, $b(\cos\varepsilon)$ if $|\theta| \leq \varepsilon$) で近似することによって得られる近似解 $\{g_\varepsilon\}$ に対する ε に関する一様評価から示すことができる.

5.2　大域解の存在

積分核 B が速度因子 $\Phi(|v-v_*|)$ によらない Maxwellian molecule case, すなわち, $B = b(\cos\theta)$ で，かつ特異性が弱い場合（$0 < s < 1/2$) を考察する．正規化された Maxwellian 分布

$$\mu(v) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}} e^{-\frac{|v|^2}{2}},$$

のまわりでの摂動解 $f = \mu + \sqrt{\mu} g$ を考える．$Q(\mu, \mu) = 0$ から

$$Q(\mu + \sqrt{\mu}g,\, \mu + \sqrt{\mu}\, g) = Q(\mu,\, \sqrt{\mu}\, g) + Q(\sqrt{\mu}\, g,\, \mu) + Q(\sqrt{\mu}\, g,\, \sqrt{\mu}\, g)$$

が成立し,

$$\Gamma(g,\, h) = \mu^{-1/2} Q(\sqrt{\mu}\, g,\, \sqrt{\mu}\, h) \tag{5.3}$$

とおいて，線形化 Boltzmann 作用素を

$$\mathcal{L}g = \mathcal{L}_1\, g + \mathcal{L}_2\, g = -\Gamma(\sqrt{\mu}\,,\, g) - \Gamma(g,\, \sqrt{\mu}\,) \tag{5.4}$$

で定義すると，f に対する初期値問題 (5.1) は摂動 g に対する初期値問題

$$\begin{cases} g_t + v \cdot \nabla_x g + \mathcal{L}g = \Gamma(g,\, g), \ \ t > 0\,, \\ g|_{t=0} = g_0 \end{cases} \tag{5.5}$$

に帰着される．ここで初期値 g_0 は $f_0 = \mu + \sqrt{\mu} g_0$ から定める．

定理 5.2　整数 $k, \ell \geq 3$ に対して $g_0 \in H^k_\ell(\mathbb{R}^6)$ かつ

$$f_0(x, v) = \mu + \sqrt{\mu}\, g_0(x, v) \geq 0$$

ならば，次をみたす $\varepsilon_0 > 0$ が存在する：初期値 g_0 が $\|g_0\|_{H^k_\ell(\mathbb{R}^6)} \leq \varepsilon_0$ をみたすならば, 初期値問題 (5.5) は，$L^\infty([0, +\infty[\,;\ H^k_\ell(\mathbb{R}^6))$ に属する一意的な大域解 g をもち,

$$f(t, x, v) = \mu + \sqrt{\mu}\ g(t, x, v) \geq 0 \quad かつ \quad g \in C^\infty(]0, +\infty[\,\times \mathbb{R}^6)$$

が従う.

解 $g(t, x, v)$ は逐次近似

$$\begin{cases} (\partial_t + v\nabla_x) g^{n+1} + \mathcal{L}_1(g^{n+1}) + \mathcal{L}_2(g^n) = \Gamma(g^n, g^{n+1}), \\ g^{n+1}|_{t=0} = g_0 \end{cases} \tag{5.6}$$

$$\Longleftrightarrow \quad (\partial_t + v\nabla_x) f^{n+1} = Q(f^n, f^{n+1}) \ \ , \ \ f^{n+1}|_{t=0} = f_0 \tag{5.7}$$

によって求められる‡ .

‡ (5.7) から $f^n \geq 0$ を帰納的に示すことにより $f = \mu + \sqrt{\mu} g \geq 0$ が得られる.

局所解の存在で述べたような衝突積分項の上からと下からの評価の間隙を埋めるため，次のノルムを導入する．

$$|||g|||^2 = \iiint b(\cos\theta)\mu_* \left(g' - g\right)^2 dv dv_* d\sigma + \iiint b(\cos\theta) g_*^2 \left(\sqrt{\mu'} - \sqrt{\mu}\,\right)^2 dv dv_* d\sigma\,. \quad (5.8)$$

補題 5.1　$\exists C > 0$; for $\forall g, f, h \in H^s_s(\mathbb{R}^3_v)$

$$C^{-1}(||g||^2_{H^s} + ||g||^2_{L^2_s}) \le |||g|||^2 \le C||g||^2_{H^s_s}\,,$$

$$\left|\Big(\Gamma(f,\, g),\, h\Big)_{L^2(\mathbb{R}^3)}\right| \le C\,\Big(||f||_{L^2_s}\,|||g||| + ||g||_{L^2_s}\,|||f|||\Big)\ |||h|||\,,$$

$$C^{-1}|||(I-P)g|||^2 \le (\mathcal{L}g, g)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le 2(\mathcal{L}_1 g, g)_{L^2(\mathbb{R}^3)} \le C|||g|||^2\,. \quad (5.9)$$

ただし，P は線形化 Boltzmann 作用素 $\mathcal{L}$ の零空間

$$\mathrm{Ker}\,\big(\mathcal{L}\big) = \mathrm{Span}\left\{\sqrt{\mu}\,,\, v_1\sqrt{\mu}\,,\, v_2\sqrt{\mu}\,,\, v_3\sqrt{\mu}\,,\, |v|^2\sqrt{\mu}\,\right\}$$

への射影を表す．

評価式 (5.9) の最初の不等式の証明では，Mouhot-Strain[21] 評価 $||(I-P)g||_{L^2_s} \le C(\mathcal{L}g, g)_{L^2(\mathbb{R}^3)}$ が本質的である．定理 5.2 は補題 5.1 を用いて，Pg に関する Guo[15] 評価 (micro-macro 分解) を，non-cutoff な場合に拡張することにより示される．

参考文献

[1] R. Alexandre, Some solutions of the Boltzmann equation without angular cutoff, *J. Stat. Physics*, **104** (2001) 327–358.

[2] R. Alexandre, Integral estimates for linear singular operator linked with Boltzmann operator. Part I: small singularities $0 < \nu < 1$, *Indiana Univ. Math. J.*, **55** (2006) 1975-2021.

[3] R. Alexandre, L. Desvillettes, C. Villani and B. Wennberg, Entropy dissipation and long-range interactions, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **152** (2000) 327-355.

[4] R. Alexandre and M. Elsafadi, Littlewood Paley decomposition and regularity issues in Boltzmann equation homogeneous equations. I. Non cutoff and Maxwell cases, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **15** (2005) 907-920.

[5] R. Alexandre and M. Elsafadi, Littlewood Paley decomposition and regularity issues in Boltzmann homogeneous equations. II. Non cutoff and non Maxwell cases. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, **24**(2009), 1-11.

[6] R. Alexandre and L. He, Integral estimates for a linear singular operator linked with Boltzmann operator. Part II: high singularities $1 \le \nu < 2$, *Kinetic and Related Models*, **1** (2008) 491-514.

[7] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Uncertainty principle and kinetic equations, *J. Funct. Anal.*, **255** (2008) 2013-2066.

[8] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Regularizing effect for non-cutoff Boltzmann equation, Comptes Rendus Mathematique, **347**, (2009),747-752,

[9] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Local existence for non-cutoff Boltzmann equation, Comptes Rendus Mathematique, **347**, (2009), 1237-1242.

[10] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Regularizing effect and local existence for non-cutoff Boltzmann equation, preprint, http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00349854/en/

[11] R.Alexandre, Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Global existence and full regularity of the boltzmann equation without angular cuoff, part I: Maxweelian case and small singularity, in preparation.

[12] R. Alexandre and C. Villani, On the Boltzmann equation for long-range interaction, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **55** (2002) 30–70.

[13] C. Cercignani, *The Boltzmann equation and its applications*, Applied mathematical sciences, **67**, Springer-Verlag, 1988.

[14] L. Desvillettes and B. Wennberg, Smoothness of the solution of the spatially homogeneous Boltzmann equation without cutoff. *Comm. Partial Differential Equations*, **29-1-2** (2004) 133–155.

[15] Y. Guo, The Boltzmann equation in the whole space. *Indiana Univ.. Math. J.* , **53** (2004) 1081–1094.

[16] Z. H. Huo, Y.Morimoto, S.Ukai and T.Yang, Regularity of solutions for spatially homogeneous Boltzmann equation without Angular cutoff. *Kinetic and Related Models*, **1** (2008) 453-489.

[17] Y. Morimoto, The uncertainty principle and hypoelliptic operators, *Publ. RIMS Kyoto Univ.*, **23** (1987), 955-964.

[18] Y.Morimoto, S.Ukai, C.-J.Xu and T.Yang, Regularity of solutions to the spatially homogeneous Boltzmann equation without Angular cutoff. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series A*, **24**(2009), 187-212.

[19] Y.Morimoto and S.Ukai, Gevrey smoothing effect of solutions for spatially homogeneous nonlinear Boltzmann equation without angular cutoff, *to appear in Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications*, **1** (2010).

[20] Y. Morimoto and C.-J. Xu, Ultra-analytic effect of Cauchy problem for a class of kinetic equations, *J. Differential Equations*, **247**(2009) 596-617.

[21] C. Mouhot and R.M. Strain, Spectral gap and coercivity estimates for linearized Boltzmann collision operators without angular cutoff, J. Math. Pures Appl. (9) 87 (2007), no. 5, 515–535.

[22] Y. P. Pao, Boltzmann collision operator with inverse power intermolecular potential, I, II. *Commun. Pure Appl. Math.*, **27** (1974), 407–428, 559–581.

[23] G.Toscani and C.Villani, Probability metrics and uniqness of the solution to the Boltzmann equation for a Maxwell gas, *J. Statist. Phys.* , **94** (1999), 619-637

[24] S. Ukai, Local solutions in Gevrey classes to the nonlinear Boltzmann equation without cutoff, *Japan J. Appl. Math.*, **1-1** (1984) 141–156.

[25] C. Villani, On a new class of weak solutions to the spatially homogeneous Boltzmann and Landau equations, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **143** (1998) 273–307.

[26] B. Wennberg, *The Povzner inequality and moments in the Boltzmann equation. Proceedings of the VIII International Conference on Waves and Stability in Continuous Media, Part II (Palermo, 1995).* Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. No. 45, part II (1996), 673–681.