Riemann-Wirtinger 積分とその応用

眞野　智行　（琉球大理)

指標付きテータ関数を $a,b\in\mathbf{R}$ に対して

$$\theta_{a,b}(u)=\theta_{a,b}(u,\tau):=-\sqrt{-1}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(-1)^n e^{\pi\sqrt{-1}(n+a+1/2)^2\tau}e^{2\pi\sqrt{-1}(n+a+1/2)(u+b)}$$

と定義する．また $\rho_{a,b}(u):=\theta'_{a,b}(u)/\theta_{a,b}(u)$ とする．Riemann-Wirtinger 積分とは, 次の積分表示によって定義される $t_1,\ldots,t_n,\tau$ を変数とする関数である:

$$f_i=\int_\gamma e^{2\pi\sqrt{-1}c_0}\theta(u-t_1)^{c_1}\cdots\theta(u-t_n)^{c_n}\mathfrak{s}(u-t_i;\lambda)du,\quad i=1,\ldots,n,$$

ここで $\theta(u)=\theta_{0,0}(u,\tau)$ であり,

$$\mathfrak{s}(u;\lambda)=\frac{\theta(u-\lambda)\theta'}{\theta(u)\theta(-\lambda)}$$

は, 擬周期性

$$\mathfrak{s}(u+1;\lambda)=\mathfrak{s}(u;\lambda),\ \mathfrak{s}(u+\tau;\lambda)=e^{2\pi\sqrt{-1}\lambda}\mathfrak{s}(u;\lambda),$$

を持つ．また $c_0,c_\infty\in\mathbf{C}$, $c_1,\ldots,c_n\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ に対し関係式

$$c_1+\cdots+c_n=0, \tag{1}$$

$$\lambda+c_0\tau+c_1t_1+\cdots+c_nt_n+c_\infty=0 \tag{2}$$

が成り立っていると仮定する．積分路は被積分関数の特異点を結ぶ path を取るのだが正確なことは省略する ([4] を参照)．この仮定の下で f_i $(i=1,\ldots,n)$ は次の線形偏微分方程式をみたす:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f_i}{\partial t_j}=-c_j\mathfrak{s}(t_j-t_i;\lambda)f_j+c_j\rho(t_j-t_i)f_i,\quad j\neq i,\\ \dfrac{\partial f_i}{\partial t_i}=\displaystyle\sum_{k\neq i}c_k\mathfrak{s}(t_k-t_i;\lambda)f_k+(2\pi\sqrt{-1}c_0-\sum_{k\neq i}c_k\rho(t_k-t_i))f_i,\\ 2\pi\sqrt{-1}\dfrac{\partial f_i}{\partial\tau}=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{c_k}{2}(\rho(t_i-t_k)^2-\wp(t_i-t_k))f_i+\sum_{k=1}^n c_k\frac{\partial\mathfrak{s}}{\partial\lambda}(t_k-t_i;\lambda)f_k.\end{cases}$$

この対象は, 楕円曲線上のフックス型微分方程式のモノドロミー保存変形の特殊解として [1], [2] において発見されたものである．なお, テータ関数の冪積の積分によって定義される関数は Riemann の遺稿の中に現われる ([5]) ようであるが Riemann がこの対象についてどのような研究を行おうとしていたかについてはよく分からない.

さて, Riemann-Wirtinger 積分の定義において, 関係式 (2) を保ちつつ変数を特殊化することによりいくつかの興味深い対象が得られることがある．一例として 2 以上の自然数 N に対して, $t_1,\ldots,t_n$ を トーラス上の N 等分点に制限し $\lambda=0$ としたものを考える: N を固定して $\theta_{m/N,n/N}(u)$ $(m,n\in\mathbf{Z})$ のことをあらためて $\theta_{m,n}(u)$ と書くことにし, $\sum_{m,n=0}^{N-1}c_{m,n}=0$ をみたす $c_{m,n}\in\mathbf{C}\setminus\mathbf{Z}$ に対して

$$\int_\gamma\prod_{m,n=0}^{N-1}\theta_{m,n}(u)^{c_{m,n}}du \tag{3}$$

とおくと, これは τ を変数とする N^2 階の線形常微分方程式をみたす．このような対象は Wirtinger が [8],[9] においてすでに考察している．特に $N=2$ の時はガウスの超幾何関数を楕円モジュラー関数 $\lambda(\tau)=\theta_{0,1}^4/\theta_{1,1}^4$ を用いて上半平面上で一意化したものに一致する:

$$\begin{aligned}&\lambda(\tau)^{\frac{\gamma-1}{2}}(1-\lambda(\tau))^{\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}}F(\alpha,\beta,\gamma,\lambda(\tau))\\ =&\frac{2\pi\Gamma(\gamma)\theta_3^2}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma-\alpha)}\int_0^{\frac12}\theta(u)^{2\alpha-1}\theta_{0,1}(u)^{2\gamma-2\alpha-1}\theta_{1,0}(u)^{2\beta-2\gamma+1}\theta_{1,1}(u)^{-2\beta+1}du,\end{aligned} \tag{4}$$

この公式自体は超幾何関数のオイラーの積分表示をリーマン球面上 4 点で分岐する 2 重被覆を用いてトーラス上で書き直すことにより比較的容易に得られる. $N \geq 3$ の場合についても同様に, (3) はレベル N のモジュラー曲線上定義された, あるフックス型方程式のモジュラー関数による一意化に一致すると期待するのは自然である. これは従来顧みられなかった (Wirtinger は [9] で考察を試みているのだが, その後忘れ去られた) 方法によるガウスの超幾何関数の自然な一般化を与えるものと考えられる. その一方で, N が大きくなるにつれてモジュラー曲線の種数も大きくなっていくことから一般にはこの方法で得られるフックス型方程式は非 rigid であることが予想され, ガウスの超幾何関数 (これは rigid なフックス型方程式の典型例である) とはかなり異なる側面を持つ. それにもかかわらず積分表示 (3) を用いてテータ関数のモジュラー変換公式から接続行列等の大域的データが計算可能であり ([6],[7] は超幾何関数の古典的な接続公式を (3) の表示を用いて計算したものである), 極めて興味深い対象である. ただし現時点ではその性質について一般的にはほとんど何も分かっていない.

[3] では, $N = 3$ の場合にパラメータ $c_{m,n}$ の値を制限したときにどのようなフックス型方程式が現れるかについて述べている ($N = 3$ の時, 一般には 9 階の微分方程式が現れるのだが, パラメータを特殊化することにより可約なものから低階の部分を取り出していることに対応する). 例えば最も簡単な場合として

$$c_{0,0} + c_{1,0} = 0,\ c_{0,1} = c_{0,2} = c_{2,0} = c_{1,1} = c_{2,2} = c_{1,2} = c_{2,1} = 0$$

としたとき, ガウスの超幾何関数とレベル 3 の Wirtinger 積分との間の次のような関係式が得られる:

$$\kappa \int_0^1 \theta_{0,0}(u)^{c_{0,0}} \theta_{1,0}(u)^{c_{1,0}} du = \text{const.}\,(1 - a^3)^{-c_{1,0}/3} F\left(\frac{1 - c_{1,0}}{3}, \frac{1 - c_{1,0}}{3}, 1 - \frac{2}{3}c_{1,0}; 1 - a^3\right).$$

ここで

$$a = a(\tau) = 1 - \sqrt{3}i\frac{\theta_{0,1}^3}{\theta_{1,0}^3},\quad \kappa = \kappa(\tau) = \frac{\omega}{3}\frac{\theta_{1,0}^2\theta'}{\theta_{0,1}\theta_{1,1}\theta_{1,2}},\quad \omega = e^{2\pi i/3}$$

であり, これは (4) に比べてはるかに非自明な公式であるように思われる.

References

[1] T. Mano, Studies on monodromy preserving deformation of linear differential equations on elliptic curves, J. Math. Phys., 50 (2009), 103501 (21 pages).

[2] T. Mano, The Riemann-Wirtinger integral and monodromy-preserving deformation on elliptic curves, Intern. Math. Res. Notices, 2008 (2008), ID:rnn110 (19 pages).

[3] 眞野 智行, レベル 3 の Wirtinger 積分から得られるフックス型方程式について, 数理解析研究所講究録, No.1662 (2009), 176-194.

[4] T. Mano, H. Watanabe, Twisted cohomology and homology groups associated to the Riemann-Wirtinger integral, preprint, RIMS-1641.

[5] B. Riemann, Gesammelte mathematische Werke. In *Nachträge*, edited by M. Noether and W. Wirtinger. Leipzig, Germany: Teubner, 1902.

[6] H. Watanabe, Transformation relations of matrix functions associated to the hypergeometric function of Gauss under modular transformations, J. Math. Soc. Japan, 59 (2007), 113-126.

[7] H. Watanabe, On the general transformation of the Wirtinger integral, preprint.

[8] W. Wirtinger, Zur Darstellung der hypergeometrischen Function durch bestimmte Integrale, Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 111 (1902), 894-900.

[9] W. Wirtinger, Eine neue Verallgemeinerung der hypergeometrischen Integrale, Akad. Wiss. Wien. S.-B. IIa, 112 (1903), 1721-1733.