一般大久保型方程式とその応用

川上 拓志（東大数理）

次のような線型常微分方程式系を大久保型方程式と呼ぶ：

$$(xI_n - T)\frac{\mathrm{d}\Psi}{\mathrm{d}x} = A\Psi.$$

ここで T は定数対角行列で，A は任意の定数行列である．従ってこれは Fuchs 型方程式である．一般の Fuchs 型方程式系は，行列サイズをふくらませることで大久保型に変換することができるので，Fuchs 型方程式の 1 つの標準形と言ってよい．表題の一般大久保型方程式とは，T として（対角行列ではない）Jordan 標準形を許したもののことで，こちらは一般に不確定特異点を持つ．以下では，このような一般化をすることの理由，研究の背景について述べたい．

Fuchs 型方程式において，特性指数を与えても決まらないパラメータはアクセサリーパラメータと呼ばれる．また，アクセサリーパラメータを持たないことを rigid と呼ぶことにする．

rigid な方程式によって定義される関数は，local な情報から global な挙動が決まるという著しい性質を持っており，Gauss の超幾何関数はこのクラスに入っている．従って，超幾何関数のような特殊関数を見つけたいと思ったとき，rigid な方程式はどのくらいあるのかということが興味深い問題として浮かび上がってくるが，この問題は Katz と横山により独立に解決された．

Katz は，addition と middle convolution という operation を定義し，次の定理を示した [2].

定理 (Katz)． 任意の *rigid*，既約な *Fuchs* 型方程式は *1* 階の *Fuchs* 型方程式に *addition* と *middle convolution* を有限回施すことで得られる．

また，横山は大久保型方程式に対する拡大と縮小という操作を定義し，次の定理を証明した [4].

定理 (Yokoyama)． 任意の *rigid*，既約な半単純大久保型方程式は *1* 階の大久保型方程式に拡大と縮小を有限回施すことで得られる．

以上の 2 つの定理は，既約で rigid な Fuchs 型方程式を得るアルゴリズムを与えている．

我々の目標は，上の理論を不確定特異点を持つ方程式も扱えるように拡張することである．

横山理論は，大久保型方程式に対する理論だが，実は Katz の middle convolution も，与えられた Fuchs 型方程式を大久保型方程式に変換することと関係している（命題 3 参照）．従って，両方の理論において大久保型方程式がキーワードといえる．そのため，与えられた非 Fuchs 型方程式を一般大久保型方程式に変換できるかということが問題になる．

今，大久保型方程式の集合を $\mathcal{O}$ と書き，$\mathcal{O}$ と一般大久保型方程式全体との和集合を $\mathcal{GO}$ と書く．また大久保型とは限らない（無限遠を確定特異点にもつ）常微分方程式系の集合を $\mathcal{E}$ と書き，Fuchs 型方程式全体のなす $\mathcal{E}$ の部分集合を $\mathcal{F}$ と表すことにする．詳細は講演で説明するが，写像 $\pi : \mathcal{GO} \to \mathcal{E}$ をある方法で定義すると，次の定理が成り立つ．

定理 1. $\pi : \mathcal{GO} \to \mathcal{E}$ は全射.

この定理は，Fuchs 型ではない方程式も，一般大久保型方程式に変換できるということを保証している.（一般）大久保型方程式は，Laplace 変換すると特異点が原点と無限遠点に移るので次も成り立つ.

系 2. 任意の（*Fuchs* 型とは限らない）線型常微分方程式は，特異点を原点と無限遠点のみに持つ方程式に変換できる.

また，この写像 π と middle convolution とは次のような関係がある.

命題 3. $F \in \mathcal{F}$ に対して，$\pi^{-1}(F)$ の中で *size* が最小な大久保型方程式（が *unique* に存在する）を O とする．また，F のパラメータ λ の *middle convolution* を $mc_\lambda(F)$ と書く．このとき $\pi \circ T_\lambda(O) = mc_\lambda(F)$.

ここで，大久保型方程式の右辺の行列 A にスカラー行列 λI を足す変換を T_λ とした.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \arrow[r, "T_\lambda"] \arrow[d, "\pi|_{\mathcal{O}}"'] & \mathcal{O} \arrow[d, "\pi|_{\mathcal{O}}"] \\ \mathcal{F} \arrow[r, "mc_\lambda"'] & \mathcal{F} \end{tikzcd}$$

つまり middle convolution は

1. $\mathcal{F}$ の元を $\mathcal{O}$ に最小サイズで持ち上げ,
2. 右辺を λI でずらし,
3. π で戻す.

という手続で与えられる.

もともと π は $\mathcal{GO}$ で定義されていたので，命題 3 と同様の手続により，Fuchs 型ではない方程式に対しても middle convolution の類似が定義できる.

講演では，不確定特異点型方程式に対する middle convolution の具体例，rigid な不確定特異点型方程式の分類に関する結果などにも触れる予定である.

参考文献

[1] Dettweiler, M., Reiter, S.: An algorithm of Katz and its application to the inverse Galois problem, *J. Symbolic Computation* **30** (2000) 761–798.

[2] Katz, N. M.: Rigid Local Systems, *Princeton Univ. Press*, (1996).

[3] Kawakami, H.: Generalized Okubo systems and the middle convolution, preprint.

[4] Yokoyama, T.: Construction of systems of differential equations of Okubo normal form with rigid monodromy, *Math. Nachr.* **279**, No. 3 (2006) 327–348.