Reflection of a traveling wave in smoldering combustion

池田 幸太, 三村 昌泰 (明治大学)

1 序論

比較的進行が遅く, 温度が低く, 煙を伴わない燃焼はすす燃焼と呼ばれる．その例として火の付いた炭や煙草が挙げられる．また, 家屋や山の火災が鎮火した後時間をおいて再燃することがあると知られているが, これはすす燃焼によって引き起こされると考えられる．よって, 防災の観点からすす燃焼における再燃に関する研究を推進することは重要である．

[4] において, ある実験におけるすす燃焼の燃焼過程が調べられ, 定性的に異なるいくつかの燃焼パターンが観測された．この現象に対して我々は [1] においてモデル方程式を提唱し, 燃焼パターンが反応拡散方程式系 (RD) によって再現されることを数値シミュレーションによって示した．研究を始めた当初はパターン形成問題の観点から研究を進めていたが, 研究を推進する過程で, 図のような進行波解の反射現象が数値シミュレーションによって観測された．反射現象とは, 1 次元進行波解が境界にぶつかりその形状を変え, 逆向きに進むある進行波解に収束することを指すとする．反射現象は再燃の一種であると考えており, すす燃焼の研究においてその性質を調べることは重要である．なお [4] における空間パターンは, 微小重力下の燃焼実験 [3] で観測された空間パターンとよく似ており, 本研究は微小重力下での燃焼の研究にもつながるであろう．

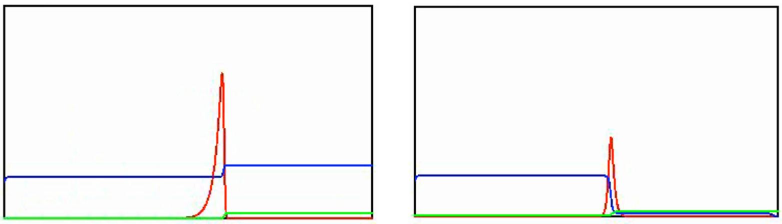

図 1: 進行波解の反射．左 (右) 図はそれぞれ, 右 (左) に向かってほぼ一定速度で進む進行波解を表す．

[1] で提唱された反応拡散系 (RD) は,

$$\begin{cases} u_t = Leu_{xx} + \gamma k(u)vw - au, & x \in (-\infty,\infty), t>0, \\ v_t = -k(u)vw, & x \in (-\infty,\infty), t>0, \\ w_t = w_{xx} + \lambda w_x - k(u)vw, & x \in (-\infty,\infty), t>0 \end{cases} \tag{RD}$$

と表される．ここで, Le は熱と酸素と窒素の混合気体の拡散係数の比で, ルイス数と呼ばれる正定数である．γ, a は正定数, λ は非負定数である．非線形項 $k(u)$ はアレニウス則から得られ, $\theta \geq 0$ に対して

$$k(u) = \begin{cases} \exp(-1/(u-\theta)), & u > \theta, \\ 0, & 0 \leq u \leq \theta \end{cases}$$

で定義されるとする．u, w に対する境界条件として, $t>0$ に対して

$$\lim_{|x|\to\infty} u(x,t) = 0, \quad \lim_{x\to\infty} w(x,t) = w_r > 0, \quad \lim_{x\to-\infty} w(x,t) = w_l \geq 0$$

を満たすことを要請する．ここで, $w_r > w_l$ は非負定数である．

本講演ではルイス数が小さい場合にのみ注目し，$Le \to \varepsilon,\ \gamma \to \gamma/\varepsilon,\ a \to a/\varepsilon$ と置き換えられるとする． ここで $\varepsilon > 0$ は十分小さなパラメータとする． この置き換えによって, (RD) における進行波解 $(u(x,t), v(x,t), w(x,t)) = (u(x-ct), v(x-ct), w(x-ct))$ を求めるには

$$
(\mathrm{TW})_\pm \qquad \begin{cases} \varepsilon^2 u'' \pm \varepsilon c u' + \gamma k(u) v w - a u = 0, \\ \pm\, c v' - k(u) v w = 0, \\ w'' + (\pm c + \lambda) w' - k(u) v w = 0, \\ u(+\infty) = u(-\infty) = 0, \quad v(\pm\infty) = \overline{v}, \quad w(+\infty) = w_r \end{cases}
$$

において解を構成すればよい．ここで $'$ は $z = x - ct$ に関する微分を表す．$(TW)_+$ ($(TW)_-$) では x 軸上正 (負) の方向に進む進行波解を考えていることに注意する．本講演では, 反射現象の解明の第一歩として, 我々が提唱した反応拡散方程式系 (RD) における進行波解を構成する．

2 主定理

まず始めに λ が $\varepsilon > 0$ に依存し, かつ十分大きい場合について考える．

定理 1 ([2])**.** *γ, a, w_r を任意に取り固定する．このとき，ある $v_1, v_2, \varepsilon_0 > 0$ が存在して次の性質を満たす; 任意の $\varepsilon < \varepsilon_0$, $v_1 < \overline{v} < v_2$ に対してある $\lambda_0 > 0$ が存在し，$\lambda > \lambda_0$ が成り立つならば，$(TW)_\pm$ は有界な解を持つ．さらに，適当な重み付き空間においてこの進行波解は (RD) において漸近安定である．*

この結果によって, 十分大きな $\lambda > 0$ に対して x 軸上正, 負の方向に進む進行波解の存在と安定性を保証できた．しかしながら, 進行波解の性質を詳しく調べると, 定理 1 で考えられているパラメータ領域では反射現象を観測することはできないと予想できる．したがって, 定理 1 は反射現象を考えるには不十分であり, ε に依存しない λ に対して進行波解を構成する必要がある．

定理 2. *任意に $\gamma, a, w_r, \lambda > 0$ を取り固定する．このとき，ある $\varepsilon_0, v_1, v_2 > 0$ が存在して，任意の $v_1 < \overline{v} < v_2$, $\varepsilon < \varepsilon_0$ に対して $(TW)_\pm$ は有界な解を持つ．*

定理 2 によって, 任意の $\lambda > 0$ に対する進行波解の存在を保証することができた．数値計算結果によれば, λ が比較的小さな値を取る等適当なパラメータに対して反射現象が (RD) で起こるので, 定理 2 で得られた進行波解の中には反射現象に対応する解も含まれると期待できる．今後はこの予想を正当化するため, 進行波解のパラメータ依存性や安定性について研究を進めたい．

参考文献

[1] K. Ikeda, M. Mimura, *Mathematical treatment of a model for smoldering combustion*, Hiroshima Math. J., **38**, 3, (2008), 349–361.

[2] K. Ikeda, M. Mimura, Existence and Stability of a traveling wave solution on a 3-component reaction-diffusion model in combustion, in preparation.

[3] S. L. Olson, H. R. Baum, T. Kashiwagi, *Finger-like smoldering over thin cellulosic sheets in microgravity*, The Combustion Institute, (1998), 2525–2533.

[4] O. Zik, Z. Olami, E. Moses, *Fingering Instability in Combustion*, Phys. Rev. Lett., **81**, (1998), 3868–3871.