Energy estimates for wave equations with time dependent propagation speeds of the Gevrey class

廣澤 史彦（山口大学理工学研究科）

変数係数波動方程式の初期値問題:

$$\begin{cases} \partial_t^2 u - a(t)^2 \Delta u = 0, & (t,x) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}^n, \\ u(0,x) = u_0(x), \quad \partial_t u(0,x) = u_1(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \tag{1}$$

の解の時刻 t におけるエネルギー $E(t)$:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(a(t)^2 |\nabla_x u(t,x)|^2 + |\partial_t u(t,x)|^2 \right) dx \tag{2}$$

に対して, 次のようなエネルギー評価を考える:

$$\eta(t)^{-1} E(0) \le E(t) \le \eta(t) E(0) \quad (t \gg 1). \tag{3}$$

ここで, $a \in \mathscr{B}^1([0,\infty))$, $a_0 \le a(t) \le a_1$ (a_0, a_1: 正定数), $\eta(t) \ge 1$ は単調増加な連続関数とする. $a(t)$ が定数の場合, エネルギー保存: $\eta(t)=1$ に対して (3), が成り立つが, 変数係数の場合はエネルギーが保存されないため, 一般には $\eta(t) > 1$ となる. ここで, $\eta(t) = e^{rt}$, $r = \sup_{t \ge 0}\{2|a'(t)|/a(t)\}$ に対して (3) が成り立つことは, 通常のエネルギー法によって直ちに示される. 本研究の目的は, 上記の $\eta(t)=1$ と $\eta(t)=e^{rt}$ の場合を補間するような係数に対する条件を, 特に係数の滑らかさの影響を考慮して与えることである.

一般には, たとえ $a \in \mathscr{B}^\infty([0,\infty))$ の場合でも, $\eta(t) = e^{rt}$ に関する (3) の評価を改良することは望めない. しかし, 係数の高回微分可能性と併せ, $p \in [0,1)$ に対して振動量を規定する次の仮定:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_0^t a(s)\,ds}{t} = \exists a_\infty, \quad \sup_{t \ge 1} \left\{ \frac{\int_0^t |a(s) - a_\infty|\,ds}{t^p} \right\} < \infty \tag{4}$$

を導入すると, $\eta(t)$ のオーダーは係数の滑らかさに応じて次のように改良されることが知られている.

Theorem 1. $a \in \mathscr{B}^m([0,\infty))$ $(m \ge 2)$ が (4) を満たすならば, $r > 0$ が存在して次の $\eta(t)$ に対して (3) が成り立つ:

$$\eta(t) = \exp\left(r t^{\sigma_m}\right), \quad \sigma_m = p + \frac{1-p}{m}.$$

$\sigma_m < 1$ かつ σ_m は m に関して単調減少であるので, Theorem 1 より, m の大きさに応じて (3) の評価が改良されることがわかる.

Remark 1. $p = 1$ の場合, (4) の後者の仮定は自明なものとなる. この場合, σ_m は m に無関係となり, 係数の滑らかさによる評価の改良は望めない. 一方, $m = 1$ の場合には $\eta(t)$ のオーダーは p とは無関係となる. このように, Theorem 1 が意味を持つのは (4) と $m \ge 2$ を同時に仮定した場合に限る.

ところで, Theorem 1 は本質的に $m < \infty$ に対する結果であるため, 仮に $a \in \mathscr{B}^\infty([0,\infty))$ としても, $\eta(t) = \exp(r t^{\sigma_\infty})$, $\sigma_\infty = p$ に対して (3) を結論づけることはできない. そこで $a \in \mathscr{B}^\infty([0,\infty))$ に対してより精密な考察を行うため, 次の関数空間 $\gamma^{(\nu)}$ $(\nu \ge 1)$ を導入する:

$$\gamma^{(\nu)} = \left\{ f(t) \in \mathscr{B}^\infty([0,\infty))\,;\, \left| f^{(k)}(t) \right| \le k!^\nu \rho^{-k} \quad (k \in \mathbb{N},\ \rho > 0) \right\}. \tag{5}$$

ここで, $\nu > 1$ ならば $\gamma^{(\nu)}$ はオーダー ν の Gevrey class, $\nu = 1$ の場合は real-analytic class となる. このとき次の定理が証明される:

Theorem 2. $a \in \gamma^{(\nu)}$ が (4) を満たすならば, $r>0$ が存在して次の $\eta(t)$ に対して (3) が成り立つ:

$$\eta(t) = \exp\left(rt^p(\log t)^\nu\right).$$

更に, $a \in \mathscr{B}^m([0,\infty))$, $a \in \gamma^{(\nu)}$ の導関数に対して, それぞれ次のような減衰条件を仮定する:

$$\left|a^{(k)}(t)\right| \le C_k(1+t)^{-qk} \quad (k=1,\cdots,m,\ q\ge 0), \tag{6}$$

$$\left|a^{(k)}(t)\right| \le k!^\nu \left(\rho_0(1+t)\right)^{-qk} \quad (\rho_0>0,\ k=1,2,\cdots,\ q\ge 0). \tag{7}$$

このとき Theorem 1, 2 は次のように一般化される:

Theorem 3 ([2])**.** $a \in \mathscr{B}^m([0,\infty))$ $(m\ge 2)$ が (4) と (6) を満たすならば, $r>0$ が存在して次の $\eta(t)$ に対して (3) が成り立つ:

$$\eta(t) = \exp(rt^{\tilde{\sigma}_m}), \quad \tilde{\sigma}_m = \max\left\{0, p-q+\frac{1-p}{m}\right\}.$$

Theorem 4 ([3])**.** $a \in \gamma^{(\nu)}$ が (4) と (7) を満たすならば, $r>0$ が存在して次の $\eta(t)$ に対して (3) が成り立つ:

$$\eta(t) = \exp\left(rt^{\tilde{\sigma}_\infty}\left(\log(e+t)\right)^\nu\right), \quad \tilde{\sigma}_\infty = \max\{0, p-q\}.$$

このように, “係数の滑らかさ”, (4) で与えられる “振動量”, (6)(7) で与えられる “導関数の減衰オーダー” の条件を付加することによって, 単に $a \in \mathscr{B}^1([0,\infty))$ を仮定した場合と比較し, エネルギー評価 (3) が改良され得ることがわかる. 講演では, これら係数の性質が, 具体的にエネルギー評価においてどのように有効であるかを紹介する.

Remark 2. ここで紹介した結果は, (1) という単純な方程式に対するものであったが, 証明の基本的なアイディアは, より一般的な方程式に対して適用可能である. また, [1] は Theorem 3 の証明のアイディアを Kirchhoff 型非線形波動方程式の大域可解性に応用したものであったが, Theorem 4 で新たに導入した手法を用いることにより, Kirchhoff 方程式の大域可解性をより広いクラスで証明できることが可能になると考えられる.

References

[1] F. Hirosawa, Global solvability for Kirchhoff equation in special classes of non-analytic functions. *J. Differential Equations.* **230** (2006), 49–70.

[2] F. Hirosawa, On the asymptotic behavior of the energy for the wave equations with time depending coefficients. *Math. Ann.* **339** (2007), 819–839.

[3] F. Hirosawa, Energy estimates for wave equations with time dependent propagation speeds of the Gevrey class. Preprint.