自己随伴非線形微分方程式の臨界減衰について

山岡 直人 （大阪府立大学大学院工学研究科）

自己随伴非線形微分方程式

$$(a(t)x')' + b(t)g(x) = 0, \qquad ' = \frac{d}{dt} \tag{1}$$

の解の減衰性および振動性について考える．ただし，関数 $a(t), b(t)$ は区間 (α, ∞) で正値連続かつ局所有界変動であり，関数 $g(x)$ は実数値連続かつ初期値に関する解の一意性を保証できるぐらい滑らかで

$$xg(x) > 0, \qquad x \neq 0 \tag{2}$$

を満たすものとする．このとき，方程式 (1) の全ての解は大域的に存在する ([1] 参照). したがって，方程式 (1) の全ての解に対して振動するか否かを議論することができる. なお，本講演で扱う解の振動・非振動は，次のように定義される：方程式 (1) の非自明解 $x(t)$ が振動するとは $+\infty$ の任意の近傍で零点をもつことをいい，逆に，$x(t)$ が振動しないとは $+\infty$ のある近傍で零点をもたないことをいう．

関数 $a(t)$ に条件

$$\int_\alpha^\infty \frac{1}{a(t)}dt < \infty \tag{3}$$

を加えると，方程式 (1) の振動問題は減衰項をもつ方程式

$$t^2x'' + 2tx' + g(x) = 0$$

の振動問題に帰着できる ([2] 参照)．この方程式に $g(x) = \omega^2x/(4\gamma^2)$ を代入し，変数変換 $t = e^{2\gamma s}, x(t) = u(s)$ を行うと，減衰振動の運動方程式

$$\ddot{u} + 2\gamma\dot{u} + \omega^2 u = 0 \qquad \dot{} = \frac{d}{ds} \tag{4}$$

が得られる．ただし，定数 γ, ω は正である．方程式 (4) は厳密解を求めることができ，その解は，γ が大きければ零に減衰し易く，ω が大きければ振動し易い．したがって，方程式 (4) の解に対して，定数 γ は減衰性を，定数 ω は振動性をそれぞれ特徴付けることができる．

ここで，解の振動性だけに焦点を絞れば，方程式 (4) の厳密解から，その全ての解は，$\omega > \gamma$ ならば振動し，$\omega \leq \gamma$ ならば振動しない．したがって，$\omega = \gamma$ は方程式 (4) の解の振動・非振動を分離する臨界条件である．さらに，その条件は解の振動と減衰が釣り合う状態とみなすこともできることから，一般に臨界減衰と呼ばれる．

本講演では，臨界減衰の観点から方程式 (1) の振動問題を考え，全ての解が振動するための十分条件と全ての解が振動しないための十分条件を与える．なお，これらの十分条件を記述するには，次の３つの関数列が必要となる：

$$\log_1 w = |\log w|, \qquad \log_{n+1} w = \log(\log_n w);$$
$$l_1(w) = 1, \qquad l_{n+1}(w) = l_n(w)\log_n w;$$
$$S_0(w) = 0, \qquad S_n(w) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\{l_i(w)\}^2}.$$

定理 1. 条件 (2), (3) を仮定する．また，係数項 $a(t)$ と $b(t)$ は十分大きな t に対して

$$a(t)b(t)\left(\int_t^\infty \frac{1}{a(\tau)}d\tau\right)^2 \geq 1$$

を満たすものとする．さらに，十分小さな $|x|$ に対して

$$\frac{g(x)}{x} \geq \frac{1}{4}S_{n-1}(x^2) + \frac{\lambda}{\{l_n(x^2)\}^2}$$

を満たす自然数 n と $\lambda > 1/4$ が存在すると仮定する．このとき，方程式 (1) の全ての非自明解は振動する．

定理 2. 条件 (2), (3) を仮定する．また，係数項 $a(t)$ と $b(t)$ は十分大きな t に対して

$$a(t)b(t)\left(\int_t^\infty \frac{1}{a(\tau)}d\tau\right)^2 \leq 1 \tag{5}$$

を満たすものとする．さらに，十分小さな $|x|$ に対して

$$\frac{g(x)}{x} \leq \frac{1}{4}S_n(x^2)$$

を満たす自然数 n が存在し

$$\int_0^x g(\xi)d\xi \leq \frac{1}{2}x^2, \quad x \in \mathbb{R} \tag{6}$$

が成り立つと仮定する．このとき，方程式 (1) の全ての非自明解は振動しない．

注意. 条件 (5) が等号で成り立つとき，条件 (6) は不要であり，方程式 (1) の全ての解は零に減衰する．

参考文献

[1] J. Sugie, K. Kita and N. Yamaoka, Oscillation constant of second-order non-linear self-adjoint differential equations, Ann. Mat. Pura Appl. (4), **181** (2002), 309–337.

[2] J. Sugie and N. Yamaoka, Oscillation of solutions of second-order nonlinear self-adjoint differential equations, J. Math. Anal. Appl., **291** (2004), 387–405.