Semiclasssical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields

田村　英男（岡山大学）

量子力学にしたがう粒子の運動に磁場ポテンシャル自身が関与する現象は、アハラノフ・ボーム (Aharonov–Bohm) 効果 (AB 効果) とよばれている。２つのソレノイド磁場による散乱において AB 効果がどの様に現れるかを考える。複数個のソレノイド磁場による散乱においては磁場の中心間で振動する古典軌道が存在し、trapping 現象が生じる。目的は、散乱振幅や散乱断面積の準古典極限における漸近公式を通して、量子力学からの AB 効果と古典力学からの trapping 効果がいかに関係し合うかを解析することにある。時間が許せば、散乱位相（time delay) や resonance などの問題についても言及したい。

1.　結果は、単一ソレノイド磁場による散乱振幅を用いて記述される。この系は、散乱に関係する量が具体的に計算できる可解系モデルのひとつとして知られている ([1–3])。磁場ポテンシャル

$$\Lambda(x) = \left(-x_2/|x|^2, x_1/|x|^2\right) = \left(-\partial_2 \log|x|, \partial_1 \log|x|\right) : \boldsymbol{R}^2 \to \boldsymbol{R}^2, \quad \partial_j = \partial/\partial x_j,$$

は原点に中心をもつソレノイド磁場

$$\nabla \times \Lambda(x) = \left(\partial_1^2 + \partial_2^2\right) \log|x| = \Delta \log|x| = 2\pi\delta(x)$$

を定義する。このポテンシャルは、その台を全平面に有し、無限遠で緩やかに減衰する長距離型摂動である。ポテンシャルとして $\alpha\Lambda(x)$（$\alpha \in \boldsymbol{R}$ をフラックスという）をもつハミルトニアン

$$K = (-i\nabla - \alpha\Lambda)^2, \qquad \alpha \in \boldsymbol{R},$$

はソレノイド磁場 $2\pi\alpha\delta(x)$ 中の粒子の運動を記述し、部分波展開される：

$$K \simeq \sum_{l \in Z} \oplus k_l, \qquad k_l = -\partial_r^2 + (\nu^2 - 1/4)r^{-2}, \quad \nu = |l - \alpha|.$$

作用素 K の $L^2 = L^2(\boldsymbol{R}^2)$ での自己共役拡張は、ポテンシャル $\Lambda(x)$ が原点で強い特異性をもつため、境界条件

$$\lim_{|x| \to 0} |u(x)| < \infty$$

を課すことによって実現される。このとき、入射方向 $\omega_- \in S^1$ に対して、エネルギー $E > 0$（固定する）を固有値とする (outgoing) 固有関数 $\varphi_+(x;\omega_-)$ ($K\varphi_+ = E\varphi_+$) は次式によって与えられる：

$$\varphi_+(x;\omega_-) = \sum_{l \in Z} \exp(-i\nu\pi/2) \exp\left(il\theta(\hat{x}; -\omega_-)\right) J_\nu\left(\sqrt{E}|x|\right), \quad \hat{x} = x/|x|,$$

$$\varphi_+(x;\omega_-) \longrightarrow \exp\left(i\sqrt{E}x \cdot \omega_-\right), \quad x = -|x|\omega_-, \quad |x| \to \infty.$$

ただし、$\theta(\hat{x};\omega)$ は ω から $\hat{x}$ への方位角を表わす。固有関数は入射波 $\varphi_{\mathrm{in}}(x;\omega_-)$ と散乱波 $\varphi_{\mathrm{sc}}(x;\omega_-)$ との和 ($\varphi_+ = \varphi_{\mathrm{in}} + \varphi_{\mathrm{sc}}$) に分解され、入射波は次の形をとる：

$$\varphi_{\mathrm{in}}(x;\omega_-) = \exp\left(i\alpha(\theta(\hat{x};\omega_-) - \pi)\right) \exp\left(i\sqrt{E}x \cdot \omega_-\right), \quad \hat{x} \neq \omega_-.$$

一方、散乱波はその無限遠での漸近挙動によってエネルギー $E>0$ における入射方向 ω_- に対する散乱振幅 $f(\omega_-\to\omega)$ $(\omega\neq\omega_-)$ を定義する：

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathrm{sc}}(x;\omega_-) &= f(\omega_-\to\hat{x})\exp(i\sqrt{E}|x|)|x|^{-1/2}+o(|x|^{-1/2}),\quad \hat{x}\neq\omega_-,\quad |x|\to\infty,\\ f(\omega_-\to\omega) &= (2i/\pi)^{1/2}\,E^{-1/4}\sin\alpha\pi\,\exp\left(i[\alpha](\omega-\omega_-)\right)F_0(\omega-\omega_-).\end{aligned}$$

ただし、単位ベクトル $\omega,\ \omega_-\in S^1$ は x_1 正軸からの角度と同一視し、$F_0(\sigma)$ は

$$F_0(\sigma)=e^{i\sigma}/\left(1-e^{i\sigma}\right),\qquad \sigma\neq 0,$$

として定義される関数である。関数 $\theta(x;\omega)=\theta(\hat{x};\omega):\boldsymbol{R}^2\to\boldsymbol{R}$ は、関係式

$$\Lambda(x)=\nabla\theta(x;\omega)$$

をみたす。入射波に含まれる補正項 $\alpha(\theta(\hat{x};\omega_-)-\pi)$ は、$\Lambda(x)$ の長距離型摂動によるものであるが、線積分によって

$$\alpha\int_\gamma\Lambda(y)\cdot dy=\alpha\int_\gamma\nabla\theta(y;\omega_-)\cdot dy=\alpha\left(\theta(\hat{x};\omega_-)-\pi\right)$$

と表わせる。ただし、$\gamma=\{y=x+t\omega_-;t\leq 0\}$ とする。それゆえ、補正項をソレノイド磁場 $2\alpha\pi\delta(x)$ によって生成されるポテンシャルが ω_- 方向に直線運動する粒子に及ぼす位相変位として理解することができる。

ソレノイド磁場 $2\pi\alpha\delta(x)$ を有する準古典シュレディンガー作用素

$$K_h=(-ih\nabla-\alpha\Lambda)^2,\qquad 0<h\ll 1,$$

を考える。エネルギー $E>0$ における入射方向 ω_- に対する散乱振幅 $f_h(\omega_-\to\omega;\alpha)$ $(\omega\neq\omega_-)$ は、E と α をそれぞれ E/h^2 と α/h に置き換えることによって得られる：

$$f_h(\omega_-\to\omega;\alpha)=(2i/\pi)^{1/2}\,E^{-1/4}h^{1/2}\sin(\alpha/h)\pi\,\exp\left(i[\alpha/h](\omega-\omega_-)\right)F_0(\omega-\omega_-)\sim h^{1/2}.$$

さらに、点 $p\in\boldsymbol{R}^2$ に中心が位置する磁場 $2\pi\alpha\delta(x-p)$ による散乱振幅は

$$f_h(\omega_-\to\omega;\alpha,p)=\exp\left(-ih^{-1}\sqrt{E}p\cdot(\omega-\omega_-)\right)f_h(\omega_-\to\omega;\alpha)$$

として計算できる。

2. その中心が $e_\pm$ に位置し、フラックスとして $\pm\alpha$ をもつ２つのソレノイド磁場による散乱を考える（したがって、フラックスの総和は消える）。ハミルトニアン

$$H_h=(-ih\nabla-\Lambda_0)^2,\quad \Lambda_0(x)=\alpha\Lambda(x-e_+)-\alpha\Lambda(x-e_-),$$

がこのような磁場中の粒子の運動を記述し、境界条件

$$\lim_{|x-e_\pm|\to 0}|u(x)|<\infty$$

のもとで自己共役作用素となる。エネルギー $E>0$ における入射方向 ω_- に対する散乱振幅 $f_h(\omega_-\to\omega)$ は、固有関数 $\varphi_h(x;\omega_-)$ $(H_h\varphi_h=E\varphi_h)$ の無限遠での漸近挙動を通して定義される：

$$\varphi_h=\exp\left(ih^{-1}\sqrt{E}x\cdot\omega_-\right)+f_h(\omega_-\to\hat{x})\exp\left(ih^{-1}\sqrt{E}|x|\right)|x|^{-1/2}+o(|x|^{-1/2}),\quad |x|\to\infty.$$

散乱振幅は $\omega = \omega_-$ に対しても定義することができる。

得られた結果を述べる。次の記号を用いる：

$$\tau(\omega;\xi,\eta) = \theta(\omega;\xi) - \theta(\omega;-\eta), \quad \omega,\ \xi,\ \eta \in S^1.$$

もし $\omega = \xi$ あるいは $\omega = -\eta$ ならば、$\theta(\omega;\omega) = (0+2\pi)/2 = \pi$ として $\tau(\omega;\xi,\eta)$ を定義する。例えば、$\alpha\tau(\hat{p};\omega_-,\omega_+)$ をソレノイド磁場 $2\pi\alpha\delta(x)$ によって生成されるポテンシャルが点 p で ω_- 方向から ω_+ 方向に散乱する粒子に及ぼす位相変位として解釈できる：

$$\alpha\left(\int_{l_-}\nabla\theta(y;\omega_-)\cdot dy + \int_{l_+}\nabla\theta(y;-\omega_+)\cdot dy\right) = \alpha\left(\theta(\hat{p};\omega_-)-\pi\right) + \alpha\left(\pi - \theta(\hat{p};-\omega_+)\right).$$

ただし、$l_\pm = \{y = p + t\omega_\pm; \pm t \ge 0\}$ とする。

Theorem 1 ([4]) $e = e_+ - e_- \neq 0$, $\hat{e} = e/|e|$ とおく。入射方向 ω_- と散乱方向 ω_+ は

$$\omega_- \neq \omega_+, \qquad \omega_- \neq \pm\hat{e}, \qquad \omega_+ \neq \pm\hat{e}$$

をみたすものとする。次式によって $g_\pm(\xi\to\eta)$ を定める：

$$g_\pm = \gamma_\mp(\xi,\eta) f_h(\xi\to\eta;\pm\alpha,e_\pm) \sim h^{1/2}, \qquad \gamma_\mp = \exp\left(\pm i(\alpha/h)\tau(\mp\hat{e};\xi,\eta)\right).$$

このとき、散乱振幅 $f_h = f_h(\omega_-\to\omega_+)$ は次の漸近公式に従う：

$$\begin{aligned}
f_h &= g_-(\omega_-\to\omega_+) + g_+(\omega_-\to\omega_+)\\
&+ |e|^{-1/2}\left(g_-(\omega_-\to\hat{e})g_+(\hat{e}\to\omega_+) + g_+(\omega_-\to-\hat{e})g_-(-\hat{e}\to\omega_+)\right)\\
&+ |e|^{-1}g_-(\omega_-\to\hat{e})g_+(\hat{e}\to-\hat{e})g_-(-\hat{e}\to\omega_+)\\
&+ |e|^{-1}g_+(\omega_-\to-\hat{e})g_-(-\hat{e}\to\hat{e})g_+(\hat{e}\to\omega_+) + o(h^{3/2}), \quad h\to 0.
\end{aligned}$$

Theorem 2 ([5]) 入射方向 $\omega_- \neq \hat{e}$ に対して、次式で定義される散乱断面積

$$\sigma_h(\omega_-) = \int |f_h(\omega_-\to\omega)|^2\, d\omega$$

は次の漸近公式に従う：

$$\begin{aligned}
\sigma_h &= 4\left(|e(\omega_-)| - 2\left(\alpha/h - [\alpha/h] - 1/2\right)E^{-1/2}h\right)\sin^2(\alpha/h)\pi\\
&- 2(2\pi)^{1/2}|e|^{-1/2}E^{-1/4}h^{1/2}\mathrm{Re}\left[e^{i\pi/4}g_+(\omega_-\to-\hat{e})g_-(-\hat{e}\to\omega_-)\right]\\
&- 2(2\pi)^{1/2}|e|^{-1/2}E^{-1/4}h^{1/2}\mathrm{Re}\left[e^{i\pi/4}g_-(\omega_-\to\hat{e})g_+(\hat{e}\to\omega_-)\right] + o(h^{3/2}).
\end{aligned}$$

ただし、$e(\omega_-) = e - (e\cdot\omega_-)\,\omega_- \neq 0$ は、ベクトル e の ω_- に直交する成分を表わす。

References [1] Y. Aharanov and D. Bohm, Phys. Rev., 115 (1959).
[2] 大貫義郎, アハラノフ・ボーム効果, 物理学最前線 9 (共立出版).
[3] 河原林研, 量子力学 (岩波書店).
[4] H. T. Ito and H. Tamura, J. London Math. Soc., 74 (2006).
[5] H. Tamura, Ann. Henri Poincaré, 8 (2007).