Some removability results for solutions to fully nonlinear PDEs
(完全非線形偏微分方程式の解に対するある種の除去可能性定理について)

広島大学・大学院理学研究科　　滝本　和広 (Kazuhiro Takimoto)
E-mail : takimoto@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

1　問題

本講演では**完全非線形楕円型偏微分方程式**

$$F(x,u,Du,D^2u)=0 \qquad \text{in } \Omega\subset\mathbb{R}^n \tag{1}$$

および**完全非線形放物型偏微分方程式**

$$u_t+F(t,x,u,Du,D^2u)=0 \qquad \text{in } \mathcal{O}\subset\mathbb{R}_t\times\mathbb{R}^n_x \tag{2}$$

に対して次の**問題**を考える.

> **問題.**　関数 u が, 領域全体から u の 0-等高面 $u^{-1}(0)=\{x\in\Omega \mid u(x)=0\}$ or $\{(t,x)\in\mathcal{O}\mid u(t,x)=0\}$ を除いた集合上で (1) または (2) の解であるならば, 実は u は領域全体で (1) または (2) の解となっているか?

即ち,「**解の等高面は常に除去可能であるか?**」という問題を考察する.

2　歴史

複素解析学においては, Radó による次の定理 [7] が知られている : 領域 $\Omega\subset\mathbb{C}$ 上で連続な複素数値関数 f が $\Omega\setminus f^{-1}(0)$ で正則ならば, f は Ω 全体で正則である.

即ち「正則関数のクラスにおいては (関数が連続ならば) 等高面は除去可能である」ことを意味する. この種の「等高面の除去可能性」に関する問題については, Laplace 方程式に対しては古くより研究がなされている ([1, 2, 4]). 一般の線形楕円型偏微分方程式に対しては Šabat [8], p-Laplace 方程式や一般の準線形方程式に対しては Kilpeläinen, Juutinen-Lindqvist [3, 5, 6] による結果がある. しかしながら, 完全非線形方程式に対する結果は知られていなかった.

3　主結果

ここでは, 楕円型方程式 (1) に対する結果について述べる. $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ を領域とし, F に次の仮定を課す. 以下, $\mathbb{S}^{n\times n}$ で n 次実対称行列全体を表す.

(A1) $F:\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{S}^{n\times n}\to\mathbb{R}$ は連続関数.

(A2) F は退化楕円型, 即ち任意の $x\in\Omega$, $r\in\mathbb{R}$, $q\in\mathbb{R}^n$, $X,Y\in\mathbb{S}^{n\times n}$ に対し, $X\geq Y$ ならば $F(x,r,q,X)\leq F(x,r,q,Y)$.

(A3) 任意の $x\in\Omega$ に対して $F(x,0,0,O)=0$.

(A4) $\alpha>2$ が存在し, 任意のコンパクト集合 $K\Subset\Omega$ に対して, ある $\varepsilon>0$, $C>0$, $\omega_K(0)=0$ かつ非減少な関数 $\omega_K\in C([0,\infty))$ があって次を満たす :

$x, y \in K$, $r, s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, $j \geq C$, $X, Y \in \mathbb{S}^{n\times n}$ が

$$-3j(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2} I_{2n} \leq \begin{pmatrix} X & O \\ O & -Y \end{pmatrix} \leq 3j(\alpha-1)|x-y|^{\alpha-2} \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ -I_n & I_n \end{pmatrix} \tag{3}$$

を満たすならば

$$\begin{aligned} &F\left(y, s, j|x-y|^{\alpha-2}(x-y), Y\right) - F\left(x, r, j|x-y|^{\alpha-2}(x-y), X\right) \\ &\quad \leq \omega_K\left(|r-s| + j|x-y|^{\alpha-1} + |x-y|\right). \end{aligned} \tag{4}$$

このとき，次が成立する．

__定理 1.__ [9]　**(A1)**, **(A2)**, **(A3)**, **(A4)** を仮定する．このとき，$u \in C^1(\Omega)$ が $\Omega \setminus u^{-1}(0)$ で (1) の粘性解ならば，u は Ω 全体で (1) の粘性解である．

4　注意

(i) **定理 1** において，条件 $u \in C^1(\Omega)$ は optimal なものであり，$u \in C^{0,1}(\Omega)$ に弱めると定理が成立しないような反例が存在する．例えば

$$u(x) = |x_1|, \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \Omega = B_1 = \{|x| < 1\} \tag{5}$$

は $\Omega \setminus u^{-1}(0) = B_1 \setminus \{x_1 = 0\}$ において $-\Delta u = 0$ の古典解であるが（従って粘性解でもある），$\Omega = B_1$ 全体では $-\Delta u = 0$ の粘性解とはなっていない．

(ii) $F(x, r, q, X) = \tilde{F}(q, X)$ または $F(x, r, q, X) = \tilde{F}(q, X) + f(r)$ の場合は，**(A1)**, **(A2)** の下で **(A4)** は自動的に成立する．即ち次の結果を得る．

__系 2.__ [9]　$F(x, r, q, X) = \tilde{F}(q, X) + f(r)$ と書けたとする．いま，

(B1) $\tilde{F}$ は連続かつ退化楕円型　　**(B2)** f は連続

(B3) $\tilde{F}(0, O) + f(0) = 0$

を仮定する．このとき，$u \in C^1(\Omega)$ が $\Omega \setminus u^{-1}(0)$ で (1) の粘性解ならば，u は Ω 全体で (1) の粘性解である．

この結果により初めて完全非線形方程式に対しても等高面の除去可能性定理が得られただけでなく，これまでの研究結果の多くを包括するものとなっている．証明および放物型方程式 (2) に対する結果・その他の拡張については講演中に述べる．

参考文献

[1] E.F. Beckenbach, *On characteristic properties of harmonic functions*, Proc. Amer. Math. Soc. **3** (1952), 765–769.

[2] J.W. Green, *Functions that are harmonic or zero*, Amer. J. Math. **82** (1960), 867–872.

[3] T. Kilpeläinen, *A Radó type theorem for p-harmonic functions in the plane*, Electoric J. Differential Equations **9** (1994), 1–4.

[4] J. Král, *Some extension results concerning harmonic functions*, J. London Math. Soc. **28** (1983), 62–70.

[5] P. Juutinen and P. Lindqvist, *A theorem of Radó's type for the solutions of a quasi-linear equation*, Math. Res. Lett. **11** (2004), 31–34.

[6] P. Juutinen and P. Lindqvist, *Removability of a level set for solutions of quasilinear equations*, Comm. Partial Differential Equations **30** (2005), 305–321.

[7] T. Radó, *Über eine nicht fortsetzbare Riemannsche Mannigfaltigkeit*, Math. Z. **20** (1924), 1–6.

[8] A.B. Šabat, *On a property of solutions of elliptic equations of second order*, Soviet Math. Dokl. **6** (1965), 926–928.

[9] K. Takimoto, *Radó type removability result for fully nonlinear equations*, Differential Integral Equations **20** (2007), 939–960.