Blowup inhibited by diffusion in reaction diffusion equations *

二宮　広和（龍谷大学・理工学部）

正値関数 f に対して常微分方程式

$$U_t = f(U) \tag{1}$$

の解が有限時間で爆発するかどうかは

$$\int^{\infty} \frac{du}{f(u)} < \infty. \tag{2}$$

によって決まる．常微分方程式 (1) に拡散項を加えた方程式

$$u_t = \Delta u + f(u) \qquad (x \in \Omega,\ t > 0) \tag{3}$$

の解が爆発するかどうかを考えよう．境界条件が，ノイマン境界条件

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \qquad (\partial\Omega,\ t > 0) \tag{4}$$

なら，(3) の空間一様な解は，(1) の解でもあるので，(2) をみたすような非線形項 f に対しては，(3),(4) は有限時間で爆発する解をもつことになる．ここで，n は $\partial\Omega$ の外向き法線ベクトルである．ディリクレ境界条件

$$u(x,t) = 0 \qquad (\partial\Omega,\ t > 0), \tag{5}$$

なら，境界で u を 0 に保っているため，解も (1) の解より小さくなると期待される．しかし，非線形性の影響は大きく，u^p $(p > 1)$ のような非線形項 $f(u)$ では，(3) は爆発する解をもつことが容易に分かる．そこで，(1) が爆発解をもつような状況下で，以下のような疑問が生じる．

関数 $f(u)$ が，$f(u) > 0$ $(u > 0)$ および (2) をみたすとき，有界な非負関数を初期値とする (3), (5) の解は爆発するか？

考えられる解の挙動は，３通りある.（ここで初期値としては，有界な非負関数に限っている.）

(i) 常微分方程式のように，すべての解が爆発する．

(ii) 十分大きな初期値に対して，解は爆発する．

---

*この研究は，M. Fila （Comenius University），J. L. Vazquez（Universidad Autónoma de Madrid）との共同研究をもとにしています.

(iii) どんな初期値に対しても解も爆発せず，時間大域的に存在する．

(i),(ii) を実現するような非線形項 $f(u)$ は容易に構成できる．本講演では，(iii) を実現するような非線形項を構成する．

定理 1 以下をみたす関数 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ f(u) > 0\ (u > 0)$ が存在する．

(i) $U(0) > 0$ をみたす (1) のすべての解は爆発する；

(ii) 有界領域 $\Omega \subset \mathbb{R}^N\ (N \geq 1)$ 上 (3), (5) の非負初期値の解は，すべて大域的に存在し，$t \geq 0$ で有界に留まる．

さらに，ディリクレ境界値を有界関数に置き換えても成り立つ．

この定理は，ディリクレ境界条件をもつ拡散によって，爆発は完全に抑止できる場合があることを意味している．

定理 1 の証明は，優解の無限列を構成できるような条件を調べ，その条件をみたす非線形項 f を構成することによって行う．まず，任意の (2) をみたす非線形項を用意し，区間 $I_n = (a_n, b_n)\ (a_n < b_n < a_{n+1})$ 上で変形して構成する．

領域は非有界の場合は，以下のことを示すことができる．

定理 2 $\Omega = \mathbb{R}^N$ のとき，定理 1(i) および以下をみたすような関数 $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty),\ f(u) > 0\ (u > 0)$ が存在する．

(ii)′ コンパクトサポートをもつ非負初期関数から出発する (3) の解は，時間大域的に存在する．

領域が非有界のとき，解が有界に留まるかどうかは分からない．

次に，方程式が 2 成分以上のシステムの場合を考えよう．

$$\begin{aligned} f(u,v) &:= |u-v|^{p-1}(u-v), \\ g(u,v) &:= |u-v|^{p-1}(u-v) - v, \end{aligned} \tag{6}$$

$(p > 1)$ ととり，$\lambda_1(\Omega)$ をディリクレ境界条件下の $-\Delta$ の第一固有値として

$$(N-2)p < N+2, \quad (d_1 - d_2)\lambda_1(\Omega) > 1 \tag{7}$$

を仮定すると以下が成り立つ．

定理 3 条件 (7) を仮定し，f, g は (6) で与えられたものとすると，常微分方程式系

$$\begin{cases} U_t = f(U,V) \\ V_t = g(U,V) \end{cases} \tag{8}$$

は，有限時間で爆発する解をもつが，ディリクレ境界条件下の反応拡散系

$$\begin{cases} u_t = d_1 \Delta u + f(u,v), & x \in \Omega,\ t > 0, \\ v_t = d_2 \Delta v + g(u,v), & x \in \Omega,\ t > 0. \end{cases} \tag{9}$$

のすべての解は，時間大域的に存在し，$H^1(\Omega) \times H^1(\Omega)$ の位相で $(0,0)$ に収束する．

このような反応拡散系では最大値の原理が使えないので，リャプノフ関数を用いて証明する．

参考文献

[1] M. Fila and H. Ninomiya: *Reaction versus diffusion: Blow-up induced and inhibited by diffusivity*, Russian Mathematical Surveys 60 (2006) 1217–1235.