Feynman 経路積分、時間分割近似法による経路空間上の解析として[1]

熊ノ郷 直人（工学院大学）

1948 年、Feynman は Schrödinger 方程式の基本解の積分核 $K(T,x,x_0)$ を経路積分を用いて

$$K(T,x,x_0)=\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}\mathcal{D}[\gamma]\,, \tag{1}$$

と表現した。ここで $0<\hbar<1$ はプランクパラメータ、$\gamma:[0,T]\to\mathbf{R}^d$ は $\gamma(0)=x_0,\,\gamma(T)=x$ となる経路、$S[\gamma]=\int_0^T \frac{1}{2}\left|\frac{d\gamma}{dt}\right|^2-V(t,\gamma(t))dt$ は作用であり、経路積分 $\int\sim\mathcal{D}[\gamma]$ はすべての経路に関する新しい和である。Feynman は経路積分 (1) を有限次元積分の極限として説明した。この方法は時間分割近似法と呼ばれる。さらに、Feynman は一般の汎関数 $F[\gamma]$ を振幅としてもつ汎関数積分 $\int F[\gamma]e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}\mathcal{D}[\gamma]$ と汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ からなる経路空間上の新しい解析学を提案した。しかし、1960 年、Cameron は経路積分の測度 $e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}\mathcal{D}[\gamma]$ が数学的に存在しないことを証明した。ゆえに、この講演では時間分割近似法を用いて、なめらかな汎関数微分 $(DF)[\gamma][\eta]$ をもつ経路積分

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}F[\gamma]\mathcal{D}[\gamma]\,, \tag{2}$$

の存在とその性質について述べる。正確に言えば、経路積分 (2) の時間分割近似法が始点 x_0 と終点 x の空間 $\mathbf{R}^{2d}$ で広義一様収束するような汎関数 $F[\gamma]$ のかなり一般的なクラス $\mathcal{F}$ を与える。

Assumption 1 (ポテンシャル) 実数値関数 $V(t,x)$ は、任意の多重指数 α に対して、$\partial_x^\alpha V(t,x)$ が $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ 上連続で、定数 A_α が存在し、$|\partial_x^\alpha V(t,x)|\le A_\alpha(1+|x|)^{\max(2-|\alpha|,0)}$.

区間 $[0,T]$ の任意の分割 $\Delta_{T,0}:T=T_{J+1}>T_J>\cdots>T_1>T_0=0$ に対し、$t_j=T_j-T_{j-1}$ とおき、分割の幅を $|\Delta_{T,0}|=\max_{1\le j\le J+1}t_j$ とする。さらに、$x_{J+1}=x$ とおき、$x_j,\,j=1,2,\ldots,J$ を $\mathbf{R}^d$ の任意の点とし、$\gamma_{\Delta_{T,0}}=\gamma_{\Delta_{T,0}}(t,x_{J+1},x_J,\ldots,x_1,x_0)$ を (T_j,x_j) と (T_{j-1},x_{j-1}) を結ぶ折れ線経路とする。このとき、$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$, $F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]$ は $x_{J+1},x_J,\ldots,x_1,x_0$ の関数となる。i.e.,

$$S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]=S_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},x_J,\ldots,x_1,x_0)\,,\ F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]=F_{\Delta_{T,0}}(x_{J+1},x_J,\ldots,x_1,x_0)\,. \tag{3}$$

Feynman の経路積分 (1) の時間分割近似法（$F[\gamma]\equiv 1$）にならって、我々は経路積分 (2) を

$$\int e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma]}F[\gamma]\mathcal{D}[\gamma]=\lim_{|\Delta_{T,0}|\to 0}\prod_{j=1}^{J+1}\left(\frac{1}{2\pi i\hbar t_j}\right)^{d/2}\int_{\mathbf{R}^{dJ}}e^{\frac{i}{\hbar}S[\gamma_{\Delta_{T,0}}]}F[\gamma_{\Delta_{T,0}}]\prod_{j=1}^{J}dx_j\,, \tag{4}$$

で定義する。右辺の積分は $F[\gamma]\equiv 1$ でも絶対収束しない。右辺の積分は振動積分として扱う。

Definition 1 (汎関数微分) 折れ線経路 $\gamma:[0,T]\to\mathbf{R}^d$ と折れ線経路 $\eta_l:[0,T]\to\mathbf{R}^d,\ l=1,2,\ldots,L$ に対して、高階の汎関数微分 $(D^LF)[\gamma]\prod_{l=1}^L[\eta_l]$ を

$$(D^LF)[\gamma]\prod_{l=1}^L[\eta_l]=\Big(\prod_{l=1}^L\frac{\partial}{\partial\theta_l}\Big)F[\gamma+\sum_{l=1}^L\theta_l\eta_l]\Big|_{\theta_1=\theta_2=\cdots=\theta_L=0}\,, \tag{5}$$

で定義する。

[1]藤原大輔先生（学習院大学）との共同研究

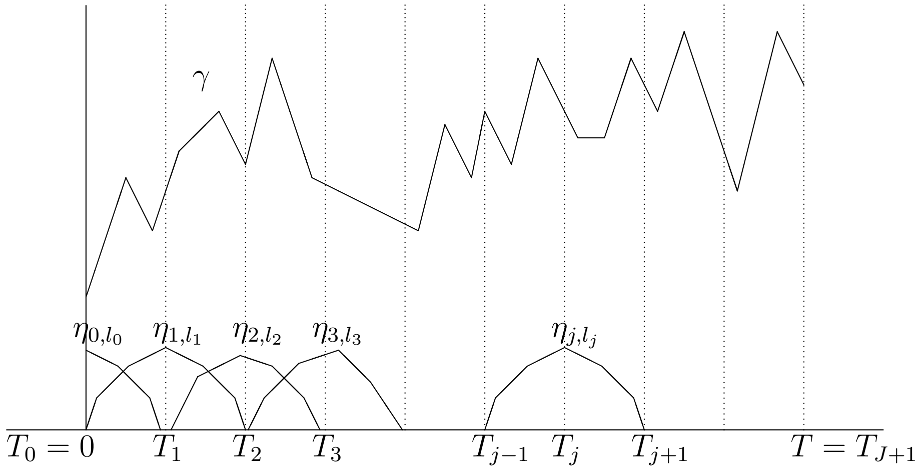
Assumption 2 (汎関数 $F[\gamma]$ のクラス $\mathcal{F}$) $F[\gamma]$ が以下を満たすとき、$F[\gamma] \in \mathcal{F}$ とする。:

m は非負整数、$\rho(t)$ は $[0,T]$ 上の有界変動関数とする。任意の非負整数 M に対して、正定数 C_M が存在して、以下を満たす。

$$\left|(D^{\sum_{j=0}^{J+1} L_j}F)[\gamma]\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l_j=1}^{L_j}[\eta_{j,l_j}]\right| \le (C_M)^{J+2}\,(1+||\gamma||)^m \prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l_j=1}^{L_j}||\eta_{j,l_j}||\,, \tag{6}$$

$$\left|(D^{1+\sum_{j=0}^{J+1} L_j}F)[\gamma][\eta]\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l_j=1}^{L_j}[\eta_{j,l_j}]\right| \le (C_M)^{J+2}\,(1+||\gamma||)^m \int_0^T |\eta(t)|d|\rho|(t)\prod_{j=0}^{J+1}\prod_{l_j=1}^{L_j}||\eta_{j,l_j}||\,. \tag{7}$$

ここで、$\Delta_{T,0}$ は任意の分割、$L_j = 0,1,\dots,M$、$\gamma : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ と $\eta : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ は任意の折れ線経路、$\eta_{j,l_j} : [0,T] \to \mathbf{R}^d$, $l_j = 1,2,\dots,L_j$ は台を $[T_{j-1}, T_{j+1}]$ 内にもつ任意の折れ線経路、$0 = T_{-1} = T_0$, $T_{J+1} = T_{J+2} = T$、$||\gamma|| = \max_{0\le t\le T}|\gamma(t)|$、$|\rho|(t)$ は $\rho(t)$ の全変動とする。



Theorem 1 (Smooth algebra) 任意の $F[\gamma]$, $G[\gamma] \in \mathcal{F}$, 任意の折れ線経路 $\zeta : [0,T] \to \mathbf{R}^d$ と任意の $d \times d$ 型実行列 P に対して、

(1) $F[\gamma] + G[\gamma]$, $F[\gamma]G[\gamma] \in \mathcal{F}$. (2) $F[\gamma + \zeta]$, $F[P\gamma] \in \mathcal{F}$. (3) $(DF)[\gamma][\zeta] \in \mathcal{F}$.

Theorem 2 (経路積分の存在) T は十分小さいとする。このとき、任意の $F[\gamma] \in \mathcal{F}$ に対し、(4) の右辺は $(x, x_0) \in \mathbf{R}^{2d}$ に関して広義一様に収束する。

応用として、Riemann-Stiletjes 積分や limit との順序交換定理、$\hbar \to 0$ としたときの準古典近似、平行移動や直交変換に対する不変性、汎関数微分に関する部分積分や Taylor 展開、微分積分学の基本定理が経路積分において成立することを述べる。時間が許せば、準古典近似の第2項についての Fujiwara の結果 [3] や、相空間上の経路積分についても述べたい。

[1] N. Kumano-go, *Feynman path integrals as analysis on path space by time slicing approximation.* Bull. Sci. math. **128** (2004) 197–251.

[2] D. Fujiwara and N. Kumano-go, *Smooth functional derivatives in Feynman path integrals by time slicing approximation.* Bull. Sci. math. **129** (2005) 57–79.

[3] D. Fujiwara and N. Kumano-go, *The second term of the semi-classical asymptotic expansion for Feynman path integrals with integrand of polynomial growth* J. Math. Soc. Japan **58** (2006) 837–867.