Dynamics of Lotka-Volterra equations and its sign structure

九州大学大学院理学研究院　今 隆助

1　Lotka-Volterra 方程式

本発表では以下の Lotka-Volterra 方程式について考える：

$$\frac{dx_i}{dt} = x_i(r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j), \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{1}$$

$x_i(t)$ は時刻 t における生物種 i の個体群密度をあらわす．パラメータ a_{ij} は種 i と j の相互作用を決定し，$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ は相互作用行列と呼ばれている．パラメータ r_i は生物種 i の内的自然増加率であり，密度効果がないときの各生物種の増加率（または減少率）を表している．Lotka-Volterra 方程式は主に相互作用する生物種の個体群動態を記述する数理モデルとして研究されきたが，化学反応における物質の濃度変化やゲームにおける戦略の頻度変化を記述する数理モデルとしても知られている [1]．最近では，齢構造や空間構造を考慮した構造化個体群モデルの分岐構造を理解するうえで Lotka-Volterra 方程式のダイナミクスを知ることが重要であることも分かってきている．

2　定性的パーマネンス

発表では，行列 A の符号パターンと Lotka-Volterra 方程式のダイナミクスとの関係について考える．特に，パーマネンスという系の性質について考える．Lotka-Volterra 方程式のパーマネンスは次のように定義される．

定義 1 (パーマネンス). 次のような正の定数 $\delta > 0$ が存在するとき(1) はパーマネンスであるといわれる：正の初期値を持つ全ての解 $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))^\top$ に対して

$$\delta \le \liminf_{t\to\infty} x_i(t) \le \limsup_{t\to\infty} x_i(t) \le \frac{1}{\delta}, \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

が成り立つ．

定義から，内部平衡点が大域漸近安定であれば(1) は明らかにパーマネンスである．逆に，(1) がパーマネンスであっても，内部平衡点が大域漸近安定になるとは限らず，パーマネンスな系はあらゆる共存のダイナミクスを示しうる．

(1) がパーマネンスであるなら内部平衡点が存在する．また内部平衡点が存在しなければ，どんな解のオメガ極限集合も $\mathbb{R}^n_+$ の内部の点を含むことはない．以下では内部平衡点の存在を常に仮定し，行列 A の符号パターンが系のパーマネンスに与える影響に注目する．(1) の内部平衡点 $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)^\top > 0$ は線形方程式 $r_i + \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$ の

解として与えられる．この式を使い，(1) の r_i を消すと

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x_j - x_j^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{2}$$

を得る．

Q_A を行列 A と同じ符号パターンを持つ行列から成る集合とし，定性的パーマネンスを次のように定義する．

定義 2 (定性的パーマネンス).

$$\dot{x}_i = x_i \sum_{j=1}^{n} \widetilde{a}_{ij}(x_j - x_j^*), \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

が任意の $\widetilde{A} \in Q_A$ と $\mathbf{x}^* > \mathbf{0}$ に対してパーマネンスになるとき，$n \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ は定性的パーマネンスであるという．

この様に，定性的パーマネンスを定義することにより，行列 A の符号パターン（種間相互作用の構造）と種の共存可能性との関係について考える．発表者らは定性的パーマネンスに関して次の結果を得た．

定理 1 (Hofbauer, Kon, Saito [2]). 全ての i に対して $a_{ii} < 0$ を仮定する．このとき，$A = (a_{ij})$ が定性的パーマネンスであるなら，次が成り立つ．

(C1) 2 以上の全てのサイクルは正ではない（つまり $k \geq 2$ である全ての相異なる $i_1, i_2, \ldots, i_k$ に対して $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_k i_1} \leq 0$），

(C2) 負のサイクル $a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \ldots a_{i_k i_1} < 0$ は負の要素 $a_{ij} < 0$ を唯一つだけ含む．

定理 2 (Hofbauer, Kon, Saito [2]). 全ての i に対し $a_{ii} < 0$ を仮定し，$n \leq 3$ であるとする．このとき，$n \times n$ 行列 A が定性的パーマネンスであるための必要十分条件は (C1) と (C2) が成り立つことである．

発表ではこれらの定理の証明の概要および，今後の課題について触れたい．

参考文献

[1] Hofbauer, J. and Sigmund, K.: *Evolutionary games and population dynamics*, Gambridge, Cambridge University Press, 1998 （竹内康博ほか訳 (2001) 進化ゲームと微分方程式，現代数学社）

[2] Hofbauer J., Kon, R. and Saito, Y.: Qualitative permanence of Lotka-Volterra equations (preprint).

〒 812-8581 福岡市東区箱崎 6-10-1

kon-r@bio-math10.biology.kyushu-u.ac.jp