Twistor 理論から見た (退化)Schlesinger 系

木村 弘信 （熊本大学・自然科学研究科）

本講演では，Twistor 理論の立場から，monodromy 保存変形と Schlesinger 系およびその退化した系を扱う．

$G = \mathrm{GL}(N+1)$ とし，G の自分自身への随伴作用 $\mathrm{Ad}_g : G \to G, \quad a \mapsto \mathrm{Ad}_g(a) = gag^{-1}$ による $a \in G$ の軌道を $O(a)$, 固定化部分群を $Z_G(a)$ とする．$a \in G$ が**正則元**であるとは，$\dim O(a)$ が最大になることである．a が Jordan 標準形の正則元のとき，Jordan 細胞のサイズを指定する $N+1$ の分割を $\lambda = (n_1, \ldots, n_\ell)$ とすると，その固定化部分群 $Z_G(a)$ として G の極大可換部分群

$$H_\lambda = J(n_1) \times \cdots \times J(n_\ell)$$

が定まる．ここで n 次の shift 行列 $\Lambda = (\ \ _{i+1,j})$ を用いて

$$J(n) = \{h = \sum_{k=0}^{n-1} h_k \Lambda^k \mid h_0 \neq 0\} \subset \mathrm{GL}(n).$$

複素射影空間 $\mathbb{P}^N$ の斉次座標を $x = (x_0, \ldots, x_N)$，それに対応する $\mathbb{P}^N$ の点を $[x]$ と表わす．群 H_λ の $\mathbb{P}^N$ への右から作用を $\mathbb{P}^N \times H_\lambda \ni ([x], h) \mapsto [xh] \in \mathbb{P}^N$ で定義すると，これは概均質的，すなわち open dense な軌道を持つ作用である．分割 λ に応じて $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(\ell)}), \quad x^{(k)} = (x_0^{(k)}, \ldots, x_{n_k-1}^{(k)})$ と表わすと，作用は $[x] \mapsto [xh] = [x^{(1)}h^{(1)}, \ldots, x^{(\ell)}h^{(\ell)}]$ と書かれる．

$y = (y_0, y_1, \ldots,)$ の関数 $\theta_m(y)$ を

$$\log(y_0 + y_1 T + y_2 T^2 + \cdots) = \sum_{m=0}^{\infty} \theta_m(y) T^m$$

で定めると $\theta_0 = \log y_0$ で，$m \geq 1$ のときは $y_0 = 0$ に m 位の極をもつ有理関数となる．

定理 1 開集合 $U \subset \mathbb{P}^N$ と *rank* が r の正則ベクトル束 $\ \ : E \to U$ で次の性質をみたすものがあるとする．

1) U は H_λ の作用で不変 $(x \in U, g \in H \to xg \in U)$ である．

2) H_λ の U への無限小作用は E に持ち上げることができる．

このとき H_λ の E への無限小作用は E における平坦な接続 ∇ を定める．局所的に ∇ は次のように表わせる．

$$\nabla = d - \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k-1} \tilde{A}_j^{(k)}(x) d\theta_j(x^{(k)}) \right) \wedge \qquad (1)$$

ここで $\tilde{A}_j^{(k)}(x)$ は局所自明化において正則である．

次に，この平坦接続と monodromy 保存変形と結び付けることを考える．

分割 λ に応じて $z \in \mathrm{M}(2, N+1)$ を

$$z = (z^{(1)}, \ldots, z^{(\ell)}), \quad z^{(k)} = (z_0^{(k)}, \ldots, z_{n_k-1}^{(k)}) \in \mathrm{M}(2, n_k)$$

と表す．$\mathrm{M}(2, N+1)$ の開集合 Z_λ を

$$Z_\lambda = \left\{ z \in \mathrm{M}(2, N+1) \mid \det(z_0^{(k)}, z_1^{(k)}) \neq 0, \quad \det(z_0^{(k)}, z_0^{(l)}) \neq 0 \quad (1 \leq k, l \leq \ell) \right\}$$

と定める．さらに，$\zeta = (\zeta_0, \zeta_1)$ を $\mathbb{P}^1$ の斉次座標とし，正則写像 $\Phi : \mathbb{P}^1 \times Z_\lambda \to \mathbb{P}^N$ を

$$([\zeta], z) \mapsto [\zeta z] = [\zeta z^{(1)}, \ldots, \zeta z^{(\ell)}]$$

でよって定義する．

定理 2 $U \in \mathbb{P}^N$ はある *line* を含む H_λ 不変な開集合とし，　$: E \to U$ を U 上の *rank* r の正則ベクトル束で，定理 *1* の仮定に加えて条件

E は U に含まれる *line* 上自明である．

を満たすとする．このとき，E の無限小作用から得られる E の平坦接続 ∇ は、写像 $\Phi : \mathbb{P}^1 \times Z_\lambda \to \mathbb{P}^N$ によって得られる $\Phi^* E$ 上の平坦接続 $\Phi^* \nabla$ によって次の形の微分方程式の *monodromy* 保存変形を与える．$\vec{\zeta} = (1, \zeta)$ とすると

$$\frac{dy}{d\zeta} = \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k - 1} A_j^{(k)}(z) \frac{d\theta_j(\vec{\zeta} z^{(k)})}{d\zeta} \right) y \tag{2}$$

命題 3 方程式 *(2)* の *monodromy* 保存変形は $\mathbb{P}^1 \times Z_\lambda$ 上の平坦接続

$$\Phi^* \nabla = d - \left(\sum_{k=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{n_k - 1} A_j^{(k)}(z) d\theta_j(\vec{\zeta} z) \right) \wedge \tag{3}$$

によって与えられる．変形方程式は平坦性条件 $\Phi^* \nabla^2 = 0$ で与えられる．

注意 4 定理 *2,* 命題 *3* において Z_λ の代わりに $\mathrm{GL}(2) \backslash Z_\lambda / H_\lambda$ の適当な実現 $X_\lambda \subset \mathrm{M}(2, N+1)$ を用いると，*Painlevé* 方程式や *Schlesinger* 方程式が導かれる． $P_{VI}, P_V, P_{IV}, P_{III}, P_{II}$ に対応する *(*退化*) Schlesinger* 系 は $N = 3$ の場合で，それぞれ λ が $(1,1,1,1), (2,1,1), (3,1), (2,2).(4)$ の場合に対応し，いわゆる *Schlesinger* 系は N が一般で分割が $(1, \ldots, 1)$ の場合に対応する．λ が一般のとき，得られる非線型方程式を一般 *Schlesinger* 方程式という．

講演においては， $P_{VI}, P_V, P_{IV}, P_{III}, P_{II}$ の場合や，通常の Schlesinger 系の導出の具体的な計算を示す．またこのような視点から次のような事項についても触れたい．

- Weyl 群の類似 $W_\lambda = N_G(H_\lambda)/H_\lambda$ と一般 Schlesinger 系の対称性について
- 一般 Schlesinger 系の合流について

参考文献

[1] L.J.Mason, N.M.J. Woodhouse, Self-duality and the Painlevé transcendents. Nonlinearity 6 (1993), no. 4, 569–581.

[2] L.J.Mason, N.M.J. Woodhouse, Twistor theory and the Schlesinger equations, Applications of analytic and geometric methods to nonlinear differential equations (Exeter, 1992), 17–25, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 413, Kluwer Acad. Publ., Doldrecht, 1993.

[3] Y. Ohyama, Isomonodromy deformations and twistor theory, Contemporary Math. **309**, (2002), 185–193.

[4] H. Kimura, T. Koitabashi, Normalizer of maximal abelian subgroup of GL(n) and general hypergeometric functions. Kumamoto J. Math. **9** (1996), 13–43.