波動方程式及び消散的波動方程式の解の漸近挙動

池畠　良

広島大学大学院教育学研究科

〒 739-8524　東広島市鏡山 1-1-1

E-mail: ikehatar@hiroshima-u.ac.jp

この講演では、次のタイプの波動方程式のエネルギー減衰及びその周辺部分に焦点を当てて話をする予定である。

$$\rho(x)^2 u_{tt} - \Delta u + \delta(x) u_t = \mu |u|^p, \quad t > 0, \quad x \in \Omega \tag{0.1}$$

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{0.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \quad t > 0. \tag{0.3}$$

ここに、$\Omega \subset \mathbf{R}^N$ $(N \geq 2)$ は、滑らかな境界 $\partial\Omega$ を持つ外部領域とし、ある $R_0 > 0$ について、$\partial\Omega \subset B_{R_0} = \{|x| < R_0\}$ かつ $0 \notin \bar{\Omega}$ とし、更に障害物 $\mathcal{O} = \mathbf{R}^N \setminus \bar{\Omega}$ は、原点 0 に関して**星型**であるとする。ただし、$\bar{\Omega}$ は、Ω の $\mathbf{R}^N$ での閉包である。

（講演者のささやかな経験によると）、一般に上記外部問題の解の全エネルギーや局所エネルギーの減衰を導出しようとするとき、あるいは、$\mu > 0$ の場合に時間大域解を構成しようとするとき、領域の非有界性からくる解の L^2- 有界性の欠如による困難に出合い、またある時は波の有限伝播性に依存しない議論をしようとした途端に大きな困難に出合ったりするようである。そこで、この講演では、(I) 解の L^2- 有界性の簡便な導出方法（I.-Matsuyama の工夫（1999））、(II) 有限伝播性の議論を避けるための代わりの議論となる、（修正）Todorova-Yordanov の重み付エネルギー評価（2001）の応用、を中心に話をする予定である。

最終的には弱解を考えるのであるが、話の本筋だけを観る為に、解は (以下の計算が正当化されるくらい) 十分滑らかであるとする。

(I) L^2- 評価：半線形問題 $\mu > 0$ を扱うには、その線形問題 $\mu = 0$ の解析が重要であるので、ここでは、$\mu = 0$, $\rho \in C^1(\bar{\Omega})$, $\delta \in L^\infty(\Omega)$, $\delta(x) \geq 0$, で更に以下の条件を満たすとする。

(A-1) $\exists\ \epsilon_0 > 0$ and $L \gg 1$ such that $\delta(x) \geq \epsilon_0$ for $|x| \geq L$,

(A-2) $0 < \nu_0 \leq \rho(x) \leq \nu_1$ for some $\nu_i > 0$ $(i = 0,1)$.

(A-3) $2x \cdot \nabla\rho(x) \geq -\eta_0 \rho(x)$ with $\eta_0 \in [0,1)$ for all $x \in \Omega$,

(A-4) there are constants $\rho_0 > 0$ and $r_0 > R_0$ such that $\rho(x) = \rho_0$ for $x \in \Omega$ satisfying $|x| > r_0$.

Notation: $\|\cdot\|_q$ で $L^q(\Omega)$-norm を表し、特に $\|\cdot\| = \|\cdot\|_2$ と置く。また、通常の L^2 内積を、$(\cdot,\cdot)$ で表す。問題（1）の解の全エネルギーと局所エネルギーをそれぞれ

$$E(t) = \frac{1}{2}(\|\rho(\cdot)u_t(t,\cdot)\|^2 + \|\nabla u(t,\cdot)\|^2),$$

$$E_R(t) = \int_{\Omega(R)} E(t,x)dx, \quad \Omega(R) = \Omega \cap B_R, \quad R > R_0,$$

ただし、

$$E(t,x) = \frac{1}{2}(\rho(x)^2|u_t(t,x)|^2 + |\nabla u(t,x)|^2),$$

と定めておく。

I-Matsuyama の方法 (Math. Japon. 55, 2002) を使うと、次の補題を得る。

Lemma 0.1 $N \geq 3$ のとき、

$$\|\rho(\cdot)u(t,\cdot)\|^2 + \int_0^t \int_\Omega \delta(x)|u(t,x)|^2 dxds \leq C(\||x|(u_1 + \delta(\cdot)u_0)\|^2 + \|u_0\|^2)$$

(II) 重み付きエネルギー評価：2001 年にブルガリア人数学者 Todorova-Yordanov によって、彼らの方法による重み付きエネルギー評価を使って、Damped wave equation の藤田臨界指数問題についての重要な貢献が JDE(174, 2001) に公表された。ここでは、その方法の一つの応用として、上記問題の (II-1) non-dissipative case ($\delta(x) \equiv 0$) と (II-2) dissipative case ($\delta(x) > 0$), のそれぞれの場合について分けて主に 2 つの結果について報告する。とりあえず、以下 $\mu = 0$ (線形方程式の場合に対応) に限定しておく。

(II-1) $\delta(x) \equiv 0$ の場合：まず重み関数 $\psi(t,x) \in C^1([0,+\infty) \times \bar{\Omega})$ を次のように定める：

$$\psi(t,x) \approx \begin{cases} (1 + |x| - \rho_0^{-1}t), & |x| \geq \rho_0^{-1}t, \\ (1 + \rho_0^{-1}t - |x|)^{-1}, & |x| < \rho_0^{-1}t. \end{cases}$$

我々の出発点は次の identity にある。

Lemma 0.2

$$(\psi u_t)(\rho(x)^2 u_{tt} - \Delta u) = \frac{\partial}{\partial t}(\psi(t,x)E(t,x)) - \mathrm{div}(\psi u_t \nabla u)$$

$$-\frac{1}{2\psi_t}|\psi_t \nabla u - u_t \nabla\psi|^2 + \frac{\rho(x)^2 u_t^2}{2\psi_t}(\frac{1}{\rho(x)^2}|\nabla\psi|^2 - \psi_t^2).$$

(II-2) $\delta(x) > 0$ かつ $\rho(x) \equiv 1$ の場合:

$$\psi(t,x) \approx \frac{\epsilon_0|x|^2}{4(1+t)}$$

について、次の identity から出発する。

Lemma 0.3

$$e^{2\psi}u_t(u_{tt} - \Delta u + \delta(x)u_t) = \frac{\partial}{\partial t}\{\frac{e^{2\psi}}{2}(u_t^2 + |\nabla u|^2)\} - \mathrm{div}(e^{2\psi}u_t\nabla u)$$

$$-\frac{e^{2\psi}}{\psi_t}|\psi_t\nabla u - u_t\nabla\psi|^2 + \frac{e^{2\psi}}{\psi_t}u_t^2(\delta(x)\psi_t + |\nabla\psi|^2) - \psi_t u_t^2 e^{2\psi}.$$

上記補題 0.1〜0.3 の応用による主結果については, 講演中その証明の概略と共に述べる。