



第 57 回  
トポロジーシンポジウム  
講演集

2010年8月11日～8月14日  
於 さん太ホール  
平成2010年度科学研究費基盤研究（A）  
課題番号 22244005

第五十七回

トポロジーションポジウム

講演集

二〇一〇年八月

於

さん太ホール

## は し が き

この講演集は 2010 年 8 月 11 日から 8 月 14 日までの間、さん太ホールにおいて開催される第 57 回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこの講演集は、

平成 20 年度科学研究費

研究種目 基盤研究 (A)

研究代表者 大鹿 健一

研究課題名 クライン群とタイヒミュラー空間の  
大域幾何的研究

課題番号 22244005

により作成されたものである。

世話人： 島川 和久 (岡山大学自然科学研究科)  
鳥居 猛 (岡山大学自然科学研究科)  
上 正明 (京都大学大学院理学研究科)  
栗林 勝彦 (信州大学理学部)

# 第57回トポロジーシンポジウム

## プログラム

### 8月11日 (水)

14:00 ~ 15:00

吉田 耕平(岡山大学) 双変関手による一般ホモロジー・コホモロジーの構成 . . . . . 1

15:30 ~ 16:30

玉木 大(信州大学) Combinatorial configuration spaces . . . . . 5

### 8月12日 (木)

09:30 ~ 10:30

黒木 慎太郎(K A I S T) 余次元1の軌道を持つ群作用について . . . . . 13

11:00 ~ 12:00

于 立(南京大學) A Survey of Halperin-Carlsson Conjecture . . . . . 23

13:30 ~ 14:30

Hélène Eynard (JSPS特別研究員) On the connected components of the space of codimension 29  
one foliations on a closed 3-manifold . . . . .

15:00 ~ 16:00

森 淳秀(大阪大学) Reeb foliations and contact structures on  $S^5$  . . . . . 43

16:30 ~ 17:30

塩田 昌弘(名古屋大学名誉教授)  $G$ -多様体から軌道空間への写像のPL化 . . . . . 53

## 8月13日 (金)

09:30 ~ 10:30

矢口 義朗 (広島大学) ブレイド群の直積における Hurwitz 作用と低次元トポロジーへの応用..... 59

11:00 ~ 12:00

岸本 健吾 (大阪市立大学) Braid presentation of handlebody-knots..... 67

13:30 ~ 14:30

Alex Bene (東京大学) Fatgraph Nielsen Reduction and the Chord Slide Groupoid 75

15:00 ~ 16:00

森内 博正 (KAIST) Enumerations of spatial trivalent graphs..... 85

16:30 ~ 17:30

田中 心 (東京学芸大学) カンドル理論の曲面結び目への応用について..... 95

## 8月14日 (土)

09:30 ~ 10:30

平田 康史 (横浜国立大学) 順序数の積の位相的性質..... 105

11:00 ~ 12:00

岸本 大祐 (京都大学) ゲージ群のトポロジー..... 113

# 双変関手による一般ホモロジー・コホモロジーの構成

吉田 耕平

本講演の目的は次の2つである。(1) デカルト閉性を満たす位相空間の圏  $\text{NG}$  を定義し、微分空間を対象とする圏  $\text{Diff}$  との関係性を述べる。(2) 双変関手  $F: \text{NG}_0^{\text{op}} \times \text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}_0$  により一般ホモロジー・コホモロジーを構成する方法を述べる。さらに具体例として、特異ホモロジー・コホモロジー群やステーンロッドホモロジー・チェックコホモロジー群を双変関手により構成する。

## 1 位相空間の圏 $\text{NG}$ および $\text{STOP}$

**定義 1.1.**  $X, Y$  を位相空間とする。次の条件を満たす写像  $f: X \rightarrow Y$  を数値的連続写像とよぶ。

**条件** 任意の連続写像  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  に対して、合成写像  $f \circ \sigma: \Delta^n \rightarrow Y$  は連続である。

位相空間を対象とし、数値的連続写像を射とする圏を  $\text{STOP}$  とする。また、基点付き空間と基点を保つ数値的連続写像からなる圏を  $\text{STOP}_0$  と表す。任意の写像  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  に対して、写像  $\sigma^*: \text{smap}(X, Y) \rightarrow \text{map}(\Delta^n, Y)$  を  $\sigma^*(f) = f \circ \sigma$  で定義し、 $\text{smap}(X, Y) = \text{hom}_{\text{STOP}}(X, Y)$  に  $\{\sigma^{*-1}(U) \mid U \text{ は } \text{map}(\Delta^n, Y) \text{ の開基}\}$  で生成される位相を与える。ただし、 $\text{map}(\sigma^n, Y)$  の位相はコンパクト開位相とする。言い換えれば、 $\text{smap}$  の位相は、 $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  を連続写像、 $L$  を  $\Delta^n$  のコンパクト部分集合、 $U$  を  $Y$  の開集合としたとき、 $W(\sigma, L, U) = \{f \mid f(\sigma(L)) \subset U\}$  で生成される。

**命題 1.2.**  $X$  を CW 複体とする。任意の空間  $Y$  に対して、包含写像

$$\text{map}(X, Y) \rightarrow \text{smap}(X, Y)$$

は同相写像である。

**命題 1.3.** 圏  $\text{STOP}$  は、完備かつ余完備である。

**定理 1.4.** 任意の位相空間  $X, Y, Z$  に対して、次の写像  $\alpha$  は同相写像である。

$$\alpha: \text{smap}(X \times Y, Z) \rightarrow \text{smap}(X, \text{smap}(Y, Z))$$

ただし、 $\alpha f(x)(y) = f(x, y), f \in \text{smap}(X \times Y, Z), x \in X, y \in Y$  とする。

**系 1.5.** 圏  $\text{STOP}$  は、デカルト閉圏である。

**系 1.6.** 圏  $\text{STOP}_0$  は、スマッシュ積

$$\wedge: \text{STOP}_0 \times \text{STOP}_0 \rightarrow \text{STOP}_0, (X, Y) \rightarrow X \wedge Y$$

に関してモノイド閉圏である。すなわち、 $\alpha$  から誘導される写像

$$\text{smap}_0(X \wedge Y, Z) \rightarrow \text{smap}_0(X, \text{smap}_0(Y, Z))$$

は同相写像である。

一般的に  $\text{map}_0(X \wedge Y, Z) \rightarrow \text{map}_0(X, \text{map}_0(Y, Z))$  は同相ではないことに注意しておく。

次に位相空間の圏  $\text{NG}$  を定義する。位相空間を対象とし、連続写像を射とする圏を  $\text{TOP}$  で表す。包含関手  $\text{TOP} \rightarrow \text{STOP}$  の左随伴  $\nu: \text{STOP} \rightarrow \text{TOP}$  を次のように定義する。位相空間  $X$  に対して、 $\nu X$  は集合  $X$  に、すべての特異単体  $\sigma: \Delta^n \rightarrow X$  が連続写像となるようなもっとも粗な位相を導入した空間とする。このとき  $\nu X$  の位相の入れ方より、条件「 $f: X \rightarrow Y$  が数値的連続写像である」と条件「 $f: \nu X \rightarrow Y$  が連続写像である」は同値である。また、 $\nu f: \nu X \rightarrow \nu Y$  は連続写像になり、関手  $\nu: \text{STOP} \rightarrow \text{TOP}$  が得られる。

**定義 1.7.** 自然な写像  $X \rightarrow \nu X$  が同相写像であるような位相空間  $X$  を、数値的生成空間とよぶ。数値的生成空間からなる  $\text{TOP}$  の充満部分圏を  $\text{NG}$  とかく。また基点付き数値的生成空間を対象と基点を保つ連続写像からなる圏を  $\text{NG}_0$  とかく。

$\nu(\nu X) \cong \nu X$  が成り立つので、 $\nu: \text{STOP} \rightarrow \text{TOP}$  は、関手  $\nu: \text{STOP} \rightarrow \text{NG}$  を誘導する。

**命題 1.8.**  $\nu$  は圏同値  $\text{NG} \cong \text{STOP}$  を誘導する。

定理 1.4 より、圏  $\text{NG}$  は exponential  $Y^X = \nu \text{smap}(X, Y)$  に関してデカルト閉圏である。また、命題 1.2 より、圏  $\text{NG}$  は CW 複体を含む。デカルト閉性を満たす位相空間の圏（いわゆる Convenient Category of Topological Spaces）としては、コンパクト生成空間の圏  $\text{GC}$  などが知られているが、 $\text{NG}$  の長所として次に定義する圏  $\text{Diff}$  との関連性があげられる。

**定義 1.9.** ([1]) 集合  $X$  とする。ユークリッド空間の開領域から  $X$  への写像の族  $\mathcal{D} = \{\sigma_\lambda: U_\lambda \rightarrow X\}$  が与えられ、次の条件をみたすとき、 $\mathcal{D}$  を  $X$  の微分構造とよび、 $(X, \mathcal{D})$  を微分空間とよぶ：

1. 定値写像  $c_x: \mathbb{R}^m \rightarrow X$ , ( $c_x \equiv x$ ) は  $\mathcal{D}$  に属する。
2.  $\sigma: U \rightarrow X \in \mathcal{D} \iff$  任意の  $v \in U$  に対して、 $v$  を含む  $U$  の開近傍  $V$  が存在し、 $\sigma|_V \in \mathcal{D}$  が成り立つ。
3. 任意の写像  $\sigma: U \rightarrow X \in \mathcal{D}$  と  $C^\infty$  級写像  $\psi: V \rightarrow U$  に対して、 $\sigma \circ \psi \in \mathcal{D}$  が成り立つ。

**定義 1.10.**  $(X, \mathcal{D}_X)$ ,  $(Y, \mathcal{D}_Y)$  を微分空間とする。 $f: X \rightarrow Y$  が滑らかな写像であるとは、任意の  $\sigma \in \mathcal{D}_X$  に対して、 $f \circ \sigma \in \mathcal{D}_Y$  が成り立つことである。

**命題 1.11.**  $\text{Diff}$  を微分空間と滑らかな写像からなるカテゴリーとする。圏  $\text{NG}$  は圏  $\text{Diff}$  の充満部分圏と同型である。

## 2 ホモロジー・コホモロジーの構成

この節では、共変関手  $\text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}_0$  によりホモロジーを構成し、さらに、双変関手でホモロジー・コホモロジーを構成する方法を述べる。以後、 $\nu \text{smap}(X, Y)$  を  $\text{map}(X, Y)$  とあらわすことにする。

**定義 2.1.** 任意の  $X, Y \in \text{NG}_0$  に対して、

$$\text{map}_0(X, Y) \rightarrow \text{map}_0(F(X), F(Y))$$

が連続写像であるような共変関手  $F: \text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}_0$  を連続関手とよぶ。

**定義 2.2.** 空間対  $(X, A)$  に対して、包含写像によって誘導される系列

$$F(A) \rightarrow F(X) \rightarrow F(X \cup CA)$$

が、ホモトピーファイバー系列となるような連続関手  $F: \text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}$  を完全連続関手とよぶ。

$F$  を完全連続関手とする。

**定理 2.3.** ([2])  $X$  を基点付き数値的生成空間とし、整数  $n$  に対して、

$$h_n(X, F) = \begin{cases} \pi_n F X & n \geq 0 \\ \pi_0 F \Sigma^{-n} X & n < 0 \end{cases}$$

と定めるとき、対応  $X \rightarrow \{h_n(X, F) | n \in \mathbb{Z}\}$  は一般ホモロジー論である。

**例 2.4.**  $X$  を CW 複体とする。  $AG(X)$  を  $X$  の点により生成される位相的自由加群とする。このとき  $AG$  は、完全連続関手である。また、Dold-Thom の定理  $[S^n, AG(X)] \cong H_n(X, \mathbb{Z})$  より、  $AG$  は特異ホモロジーを与えることがわかる。

**定理 2.5.** ([3])  $X \in \text{NG}_0$  とする。  $\mu$  を  $X$  の開被覆とし、  $X_\mu$  を  $\mu$  の脈複体とする。  $F(X) = \varprojlim_\mu AG(X_\mu)$  とすると、  $F$  は完全連続関手である。

$X$  がコンパクト距離空間のとき、  $h_n(X, F)$  がステーンロッドホモロジーに同型であることを示そう。次の条件を満たす有限開被覆の列  $\{\lambda_i\}_{i \geq 0}$  が存在する：

**条件**  $\lambda_0 = X$ 、  $\lambda_i$  は  $\lambda_{i-1}$  の細分であり、  $X = \varprojlim_i X_i$  が成り立つ。

**補題 2.6.** ([4])  $X = \varprojlim_i X_i$  とする。このとき、短完全列

$$* \longrightarrow \varprojlim_i^1 \pi_{n+1}(X_i) \longrightarrow \pi_n(X) \longrightarrow \varprojlim_i \pi_n(X_i) \longrightarrow *$$

が存在する。

**補題 2.7.** ([5])  $X = \varprojlim_i X_i$  とする。このとき、短完全列

$$* \longrightarrow \varprojlim_i^1 H_{n+1}(X_i) \longrightarrow H_n^{st}(X) \longrightarrow \varprojlim_i H_n(X_i) \longrightarrow *$$

が存在する。ただし  $H_*^{st}$  は、ステーンロッドホモロジー群とする。

すべての  $i$  に対して、  $X_i$  は有限単体複体なので、Dold-Thom の定理  $\pi_*(AG(X_i)) \cong H_*(X_i)$  が成り立つ。補題 2.6, 2.7 より、準同型  $H_*^{st}(X) \rightarrow \pi_*(\varprojlim_i AG(X_i))$  が存在すれば、五項補題より  $\pi_*(\varprojlim_i AG(X_i))$  はステーンロッドホモロジー群と同型になる。  $H_*^{st}(X)$  を Eilenberg-MacLane スペクトラムを係数に持つホモロジーとみなす。すなわち

$$H_n^{st}(X) = \varinjlim_k \pi_{n+k}(\varprojlim_i (X_i \wedge AG(S^k)))$$

とみなす。包含写像  $i : X \wedge AG(S^k) \rightarrow AG(X \wedge AG(S^k))$  と同相写像  $AG(X \wedge AG(S^k)) \rightarrow AG(X \wedge S^k)$  の合成について考えれば、自然な準同型

$$H_*^{st}(X) \rightarrow \pi_*(\varprojlim_i AG(X_i))$$

を誘導するので、  $F$  はステーンロッドホモロジーを与えることがわかる。

さらに、  $X$  が movable コンパクト距離空間であるとき、  $\varprojlim_i^1 \pi_{n+1}(AG(X_i)) = *$  が成り立つので、補題 2.6 から  $h_n(X, F)$  はチェックホモロジー群と一致することがわかる。

次に、双変関手によりホモロジー・コホモロジーを構成する方法を述べる。

**定義 2.8.** 次の条件を満たす関手

$$F : \text{NG}_0^{\text{op}} \times \text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}_0, \quad (X, Y) \rightarrow F(X, Y)$$

を双変関手とよぶ：

1.  $F(1_X, 1_Y) = 1_{F(X, Y)}$ ,  $F(f, g) = F(1_X, g) \circ F(f, 1_Y) = F(f, 1'_Y) \circ F(1_{X'}, g)$ ,  
 $F(f' \circ f, 1_Y) = F(f, 1_Y) \circ F(f', 1_Y)$ ,  $F(1_X, g' \circ g) = F(1_X, g') \circ F(1_X, g)$
2.  $F(*, Y) = F(X, *) = *$  が成り立つ。

**定義 2.9.** 任意の連続写像の組  $(f, g)$  に対して,

$$\text{map}_0(X, X') \times \text{map}_0(Y, Y') \rightarrow \text{map}_0(F(X', Y), F(X, Y')), (f, g) \rightarrow F(f, g)$$

が連続であるような双変関手  $F$  を連続双変関手という。

**定義 2.10.** 次の条件を満たす連続双変関手  $F$  を完全連続双変関手とよぶ。空間対  $(X, A)$  に対して, 包含写像によって誘導される系列

1.  $F(X \cup CA, S^n) \rightarrow F(X, S^n) \rightarrow F(A, S^n)$
2.  $F(S^n, A) \rightarrow F(S^n, X) \rightarrow F(S^n, X \cup CA)$

がホモトピーファイバー系列となる。

**定理 2.11.** ([6])  $F$  を完全連続双変関手とし,  $S^n$  を  $n$  次球面とする。

$$h_n(X, F) = \begin{cases} \pi_0 F(S^n, X) & n \geq 0 \\ \pi_0 F(S^0, \Sigma^{-n} X) & n < 0 \end{cases}, \quad h^n(X, F) = \begin{cases} \pi_0 F(X, S^n) & n \geq 0 \\ \pi_{-n} F(X, S^0) & n < 0. \end{cases}$$

と定めるとき, 対応  $X \rightarrow \{h_n(X, F) | n \in \mathbb{Z}\}$ ,  $X \rightarrow \{h^n(X, F) | n \in \mathbb{Z}\}$  は, それぞれ一般ホモロジー論, 一般コホモロジー論である。

**例 2.12.**  $F : \text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}_0$  を完全連続関手とする。  $G : \text{NG}_0^{\text{op}} \times \text{NG}_0 \rightarrow \text{NG}_0$  を  $G(X, Y) = \text{map}_0(X, F(Y))$  で定義すると,  $G$  は完全連続双変関手となる。

**例 2.13.**  $X, Y$  を CW 複体とする。このとき  $F(X, Y) = \text{map}_0(X, AG(Y))$  で定義すると, 例 2.12 より  $F$  は完全連続双変関手となる。さらに, 同型  $[S^n, AG(X)] \cong H_n(X, \mathbb{Z})$ ,  $[X, AG(S^n)] \cong H^n(X, \mathbb{Z})$  より特異ホモロジーを与える完全連続双変関手となる。

**定理 2.14.** ([6]) 任意の  $\text{NG}_0$  空間  $X, Y$  に対して, 完全連続双変関手を

$$\check{C}F(X, Y) = \varinjlim_{\lambda} \text{map}_0(X_{\lambda}, \varprojlim_{\gamma} AG(Y_{\gamma})),$$

と定義すると,  $h^n(X, \check{C}F)$  はチェックコホモロジー群と一致する。  $X$  がコンパクト距離空間のとき,  $h_n(X, \check{C}F)$  は, スティーンロッドホモロジー群と一致する。

## 参考文献

- [1] P.Iglesias-Zemmour. Diffeology.(working document).
- [2] Shimakawa, K. *Configuration spaces with partially summable labels and homology theories.* Math.J.Okayama Univ., 43:43-72,2001
- [3] Yoshida,K. *A continuous bifunctor representing Čech cohomology* preprint
- [4] A.K.Bousfield and D.M.Kan, *Homotopy limits, completions and localization*, Springer Lecture Notes in Math. 304 Springer-Verlag, Berlin, 1972.
- [5] J.Milnor, *On the steenrod homology theory.* Berkeley. 1961, mimeo.
- [6] Shimakawa, K. and Yoshida, K., *Numerical continuity and cartesian closedness.*preprint
- [7] Mccord M, C, *Classifying spaces and infinite symmetric products*, Trans. Amer. Math. Soc., 1969.

# Combinatorial Configuration Spaces

Dai Tamaki  
 Department of Mathematical Sciences  
 Shinshu University

August 11, 2010

## 1 Introduction

Given a topological space  $X$ , the configuration space of ordered  $k$ -tuples of points in  $X$  is defined by

$$\text{Conf}_k(X) = \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}.$$

With the notations

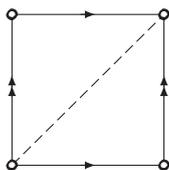
$$\begin{aligned} H_{i,j}(X) &= \{(x_1, \dots, x_k) \in X^k \mid x_i = x_j\} \\ \Delta_k(X) &= \bigcup_{1 \leq i < j \leq k} H_{i,j}(X), \end{aligned}$$

we have

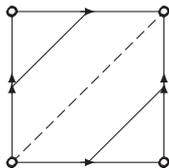
$$\text{Conf}_k(X) = X^k - \Delta_k(X).$$

The space  $\Delta_k(X)$  is called the  $k$ -th discriminant or the fat diagonal of  $X$ . Being an open subspace of  $X^k$ ,  $\text{Conf}_k(X)$  can be often deformed onto a much smaller subspace.

**Example 1.1.** Consider the case of  $X = S^1$  and  $k = 2$ . Under the identification  $S^1 = [0, 1]/\partial[0, 1]$ ,  $\text{Conf}_2(S^1)$  is the complement of the diagonal in  $S^1 \times S^1$  as depicted below, in which four vertices and the dotted line are removed.



There is a “line” parallel to the diagonal onto which there is a strong deformation retraction of  $\text{Conf}_2(S^1)$ .



Thus we have a homotopy equivalence

$$\text{Conf}_2(S^1) \simeq S^1.$$

□

Several attempts have been made to find a systematic way of constructing such a “core” in  $\text{Conf}_k(X)$ .

When  $X = \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ , each  $H_{i,j}(\mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{C}^k \mid z_i = z_j\}$  is a hyperplane in  $\mathbb{C}^k$ . The collection  $\mathcal{A}_{k-1} = \{H_{i,j}(\mathbb{C}) \mid 1 \leq i < j \leq k\}$  is called the (complexified type  $A$ ) braid arrangement of rank  $k - 1$ . In general, given a real hyperplane arrangement  $\mathcal{A}$  in a real vector space  $V$ , Salvetti [Sal87] constructed a cell complex  $\text{Sal}(\mathcal{A})$  embedded in the complement

$$M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{C}) = V \otimes \mathbb{C} - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{C}$$

of the complexification as a deformation retract. The construction has been generalized to the complement

$$M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n) = V \otimes \mathbb{R}^n - \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{R}^n$$

of the  $n$ -dimensionalization. A sketch can be found in a paper [BZ92] by Björner and Ziegler. A more detailed construction along the line of [Sal87] can be found in a paper [DCS00] by De Concini and Salvetti. Their construction gives us a cellular model for  $\text{Conf}_k(\mathbb{R}^n) = M(\mathcal{A}_{k-1} \otimes \mathbb{R}^n)$ .

On the other hand, Abrams proposed a cellular model for  $\text{Conf}_k(X)$  when  $X$  is a 1-dimensional finite cell complex in his thesis [Abr00]. The construction can be applied to any CW-complex without a change, although the resulting model may not be homotopy equivalent to  $\text{Conf}_k(X)$ . For a CW-complex  $X$ , he defined a subcomplex

$$C_k^{\text{Abrams}}(X) = \bigcup_{\bar{e}_i \cap \bar{e}_j = \emptyset \text{ if } i \neq j} e_1 \times \dots \times e_k$$

of  $X^k$  contained in  $\text{Conf}_k(X)$ . This subspace is not a deformation retract of  $\text{Conf}_k(X)$  in general, but Abrams found conditions under which  $C_k^{\text{Abrams}}(X)$  is homotopy equivalent to  $\text{Conf}_k(X)$ , when  $\dim X = 1$ .

Let us summarize the pros and cons of these two models.

	Salvetti		Abrams
$X$	$V \otimes \mathbb{R}^n$	<	any CW-complex
$\Delta_k(X)$	(hyperplanes) $\otimes \mathbb{R}^n$	>	fat diagonal
homotopy equivalence	always	>	very limited cases
deformation retraction	explicit	>	not constructed

As we can see from this table, Salvetti’s construction is far better than Abrams’. We should try to modify Salvetti’s construction in such a way it works for any cell complexes.

## 2 The Salvetti Complex

Let us quickly recall Salvetti’s construction following Björner and Ziegler [BZ92]. Although Salvetti constructs a deformation retraction very explicitly in [Sal87], the construction is hard to understand. It’s better to use a more sophisticated language of combinatorial algebraic topology as is done by Björner and Ziegler.

Consider a real hyperplane arrangement  $\mathcal{A} = \{H_1, \dots, H_k\}$  in a real vector space  $V$  defined by affine 1-forms  $\ell_1, \dots, \ell_k : V \rightarrow \mathbb{R}$ . For simplicity, let us assume that  $\mathcal{A}$  is central, i.e.  $\ell_1, \dots, \ell_k$  are linear. These linear forms define a stratification of  $V \otimes \mathbb{R}^n$  as follows: Let  $A = \{\ell_1, \dots, \ell_k\}$  and consider the evaluation map

$$\text{eval} : V \times A \rightarrow \mathbb{R}.$$

It induces

$$\text{eval} \otimes \mathbb{R}^n : (V \otimes \mathbb{R}^n) \times A \rightarrow \mathbb{R}^n$$

or

$$\text{ad}(\text{eval} \otimes \mathbb{R}^n) : V \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Map}(A, \mathbb{R}^n).$$

Define a poset  $S_n$  of  $2n + 1$  elements by

$$S_n = \{0 < \pm e_1 < \dots < \pm e_n\}$$

and define the  $n$ -dimensional sign vector

$$\text{sign}_n : \mathbb{R}^n \rightarrow S_n$$

by

$$\text{sign}_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} \text{sign}(x_n)e_n, & \text{if } x_n \neq 0 \\ \text{sign}(x_{n-1})e_{n-1}, & \text{if } x_n = 0, x_{n-1} \neq 0 \\ \vdots \\ \text{sign}(x_1)e_1, & \text{if } x_n = \dots = x_2 = 0, x_1 \neq 0 \\ 0, & \text{if } x_n = \dots = x_1 = 0, \end{cases}$$

where  $\text{sign} : \mathbb{R} \rightarrow \{0, \pm 1\}$  is the standard sign function. Let

$$s_A = (\text{sign}_n) \circ \text{ad}(\text{eval} \otimes \mathbb{R}^n) : V \otimes \mathbb{R}^n \rightarrow \text{Map}(A, S_n).$$

Then we have a stratification

$$V \otimes \mathbb{R}^n = \bigcup_{\varphi \in \text{Im } s_A} s_A^{-1}(\varphi).$$

Let  $F_{\mathcal{A}}(V \otimes \mathbb{R}^n)$  be the collection of  $s_A^{-1}(\varphi)$  for all  $\varphi \in \text{Im } s_A$ . Let  $F_{\mathcal{A}}(\Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n))$  be the subset of  $F_{\mathcal{A}}(V \otimes \mathbb{R}^n)$  consisting of all faces contained in

$$\Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n) = \bigcup_{H \in \mathcal{A}} H \otimes \mathbb{R}^n.$$

Since we are assuming that  $\mathcal{A}$  is central, we have a homotopy equivalence

$$M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n) = V \otimes \mathbb{R}^n - \Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n) \simeq S(V \otimes \mathbb{R}^n) - S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n),$$

where  $S(-)$  denotes the unit sphere and

$$S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n) = S(V \otimes \mathbb{R}^n) \cap \Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n).$$

It turns out that each  $s_A^{-1}(\varphi)$  is a convex cone and defines a regular cell decomposition on the unit sphere  $S(V \otimes \mathbb{R}^n)$ . Let  $F_{\mathcal{A}}(S(V \otimes \mathbb{R}^n))$  be the face poset of this regular cell decomposition and  $F_{\mathcal{A}}(S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n))$  be the subposet consisting of those faces contained in  $S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$ . Let

$$\mathcal{L}^{(n)}(\mathcal{A}) = F_{\mathcal{A}}(S(V \otimes \mathbb{R}^n)) - F_{\mathcal{A}}(S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)) = F_{\mathcal{A}}(V \otimes \mathbb{R}^n) - F_{\mathcal{A}}(\Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)).$$

**Definition 2.1.** The  $n$ -th order Salvetti complex is the simplicial complex defined by

$$\text{Sal}^{(n)}(\mathcal{A}) = B(\mathcal{L}^{(n)}(\mathcal{A})),$$

where  $B(-)$  is the classifying space functor for small categories and posets are regarded as small categories<sup>1</sup>.

The following two facts guarantee that  $\text{Sal}^{(n)}(\mathcal{A})$  can be embedded in  $M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$  as a strong deformation retract.

**Proposition 2.2.** *Let  $Q$  be a subposet of  $P$ , then  $B(P - Q)$  can be embedded in  $BP - BQ$  as a strong deformation retract.*

*Proof.* As is observed by Quillen [Qui78], the classifying space functor on posets converts disjoint unions into joins. Thus we have a homeomorphism

$$BP = B((P - Q) \amalg Q) \cong B(P - Q) * BQ.$$

The general property of join tells us that  $B(P - Q)$  is a strong deformation retract of  $B(P - Q) * BQ - BQ = BP - BQ$ .  $\square$

**Proposition 2.3.** *For a regular CW-complex  $X$ , we have a homeomorphism  $BF(X) \cong X$ , where  $F(X)$  is the face poset of  $X$ .*

*Proof.* See Proposition 4.7.8 in [BLVS<sup>+</sup>99] and its proof.  $\square$

**Corollary 2.4.** *Let  $\mathcal{A}$  be a real central arrangement in  $V$ . The  $\text{Sal}^{(n)}(\mathcal{A})$  can be embedded in  $M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$  as a strong deformation retract.*

*Proof.* It suffices to show that  $\text{Sal}^{(n)}(\mathcal{A})$  can be embedded in  $S(V \otimes \mathbb{R}^n) - S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$  as a strong deformation retract. By the above Propositions,

$$S(V \otimes \mathbb{R}^n) - S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n) \cong BF(S(V \otimes \mathbb{R}^n)) - BF(S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n))$$

contains

$$\text{Sal}^{(n)}(\mathcal{A}) = B(F(S(V \otimes \mathbb{R}^n)) - F(S_{\Delta}(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)))$$

as a strong deformation retract.  $\square$

### 3 Cellular Stratified Spaces

The above discussion suggests that, when we want to study  $\text{Conf}_k(X)$ ,

- we should subdivide  $X^k$  into cells,
- the decomposition does not have to be a decomposition into a cell complex (i.e. open cells are allowed),
- and well-known facts in combinatorial algebraic topology will tell us a small cell complex  $C_k(X)$  contained in  $\text{Conf}_k(X)$  as a strong deformation retract.

---

<sup>1</sup>For a poset  $P$ ,  $BP$  is called the order complex of  $P$  and is often denoted by  $\Delta(P)$  by combinatorialists. Since we are topologists, we follow Segal and Quillen.

Here we introduce a notion of totally normal cellular stratification and state a theorem which can be regarded as a generalization of Proposition 2.2 and 2.3 combined.

**Definition 3.1.** Let  $X$  be a topological space. A cellular stratification on  $X$  is a filtration

$$X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset X_{n+1} \subset \cdots \subset X$$

satisfying the following conditions:

1. The filtration is complete, i.e.  $X = \bigcup_{n=0}^{\infty} X_n$  as a topological space equipped with the colimit topology.
2.  $X_0$  has the discrete topology.
3. For  $n > 0$ ,  $X_n - X_{n-1}$  decomposes into a disjoint union

$$X_n - X_{n-1} = \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda_n} e_\lambda$$

in such a way that

- (a) for each  $e_\lambda$ , called an  $n$ -cell in  $X$ , there exists a subspace  $D_\lambda \subset D^n$  with  $\text{Int}D^n \subset D_\lambda$  and a continuous map

$$\varphi_\lambda : D_\lambda \longrightarrow \overline{e_\lambda} \subset X,$$

called the characteristic map of  $e_\lambda$ , whose restriction

$$\varphi_\lambda|_{\text{Int}D^n} : \text{Int}D^n \longrightarrow e_\lambda$$

is a homeomorphism, and

- (b) if  $\dim e_\lambda = n$ ,  $\partial e_\lambda = \overline{e_\lambda} - e_\lambda$  is contained in  $X_{n-1}$ .

We usually impose certain conditions on cellular stratified spaces.

**Definition 3.2.** Let  $X$  be a cellular stratified space.

- We say an  $n$ -cell  $e_\lambda$  is regular if its characteristic map is a homeomorphism onto  $\overline{e_\lambda}$ . We say a cellular stratification is regular if all cells are regular.
- An  $n$ -cell is called closed if its characteristic map is defined on the whole  $D^n$ . If all cells are closed,  $X$  is called a cell complex.
- A subspace  $A$  of  $X$  is called a stratified subspace, if it is a union of cells in  $X$  under the induced filtration from  $X$ .
- Let  $A$  be a stratified subspace of  $X$ . We say the pair  $(X, A)$  is relatively regular, if  $X - Y$  is regular.
- $X$  is called strongly normal if, for each pair of cells  $e_\lambda$  and  $e_\mu$  with  $e_\mu \subset \partial e_\lambda$ , there exists a map

$$b_{\mu,\lambda} : D_\mu \longrightarrow D_\lambda$$

making the following diagram commutative

$$\begin{array}{ccc} D_\lambda & \xrightarrow{\varphi_\lambda} & X \\ b_{\mu,\lambda} \uparrow & \nearrow \varphi_\mu & \\ D_\mu & & \end{array}$$

- $X$  is called totally normal if it is strongly normal and, for each  $n$ -cell  $e_\lambda$ , there exists a structure of regular cell complex on  $S^{n-1}$  containing  $\partial D_\lambda$  as a stratified subspace of  $S^{n-1}$ .

The collection of all cells in a cellular stratified space forms a poset.

**Definition 3.3.** For a cellular stratification  $C$  on a space  $X$ , define

$$F(X, C) = \{e \mid e \text{ is a cell in } C\}.$$

Define a partial order on  $F(X, C)$  by

$$e \leq e' \iff e \subset \bar{e'}.$$

This poset  $F(X, C)$  is called the face poset of  $C$ . When  $C$  is obvious from the context, we denote it by  $F(X)$ .

Here is a main theorem of this talk.

**Theorem 3.4.** For a totally normal regular cellular stratification  $C$  on  $X$ ,  $BF(X; C)$  can be embedded in  $X$  as a deformation retract.

## 4 Applications

Our main theorem can be regarded as a generalization of Corollary 2.4 in the following sense.

**Example 4.1.** Let  $\mathcal{A}$  be a real (not necessarily central) hyperplane arrangement in  $V$ . Then the stratification described in §2 defines a totally normal regular cellular stratification of  $V \otimes \mathbb{R}^n$  which contains  $\Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$  as a stratified subspace. Then  $\mathcal{L}^{(n)}(\mathcal{A}) = F_{\mathcal{A}}(V \otimes \mathbb{R}^n) - F_{\mathcal{A}}(\Delta(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n))$  is nothing but the face poset of  $M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$  and Theorem 3.4 says that  $\text{Sal}^{(n)}(\mathcal{A}) = B\mathcal{L}^{(n)}(\mathcal{A})$  can be embedded in  $M(\mathcal{A} \otimes \mathbb{R}^n)$  as a strong deformation retract.  $\square$

**Example 4.2.** Let  $X$  be a CW-complex. The product cell decomposition on  $X^k$  does not contain  $\Delta_k(X)$  as a subcomplex. We need to subdivide further to apply Theorem 3.4.

Consider the case  $X = S^n = e^0 \cup e^n$ . Since we are interested in the complement of  $\Delta_k(S^n)$ , all we need are cells in  $(S^n)^k$  of the form

$$(e^n)^k, (e^n)^\ell \times e^0 \times (e^n)^{k-\ell-1}.$$

Under the identification

$$(e^n)^k \cong (\mathbb{R}^n)^k \cong \mathbb{R}^k \otimes \mathbb{R}^n,$$

the stratification by the braid arrangements  $\mathcal{A}_{k-1}$  and  $\mathcal{A}_{k-2}$  define stratifications on  $(e^n)^k$  and  $(e^n)^{k-1}$  which contain the fat diagonals as stratified subspaces, respectively. The resulting cellular stratification on  $\text{Conf}_k(S^n)$  is a totally normal regular stratification. By applying Theorem 3.4, we obtain a finite simplicial complex  $BC_k(S^n)$  of dimension  $(n-1)(k-1) + 1$  embedded in  $\text{Conf}_k(S^n)$  as a  $\Sigma_k$ -equivariant strong deformation retract.

According to a known computation of  $H_*(\text{Conf}_k(S^n); \mathbb{Z})$ , for example in [FZ02], this dimension is optimal.  $\square$

**Remark 4.3.** The above model can be used to obtain a good upper bound of the symmetric topological complexity of  $S^n$ .

In general, the braid stratification may not give us a regular cellular stratification. By subdividing further, we should be able to get a good cellular model. Assuming the existence of such a good model, it is easy to count the dimension of the complex. Thus we have the following conjecture.

**Conjecture 4.4.** *Let  $X$  be a finite CW-complex of dimension  $n$  with a single 0-cell. If  $X$  has no cell  $e$  with  $0 < \dim e < \ell$ , there exists a finite cell complex  $C_k(X)$  of dimension  $(n-1)k - (\ell-1)$  embedded in  $\text{Conf}_k(X)$  as a  $\Sigma_k$ -equivariant deformation retract.*

## 5 Concluding Remarks

I might have given an impression that Abrams' model is bad. Let me conclude this talk by making a couple of comments on Abrams' model. One of the most significant properties is its connection to the Hom-complex.

**Definition 5.1.** Given a graph  $G$ , the sets of vertices and edges are denoted by  $V(G)$  and  $E(G)$ , respectively. For graphs  $G$  and  $H$ , define a cell complex  $\text{Hom}(G, H)$  by

$$\text{Hom}(G, H) = \bigcup_{f \in P_{G,H}} \prod_{v \in V(G)} \Delta^{f(v)},$$

where

$$P_{G,H} = \left\{ \varphi : V(G) \rightarrow 2^{V(H)} - \{\emptyset\} \mid (v, v') \in E(G) \Rightarrow (w, w') \in E(H) \text{ for any } w \in \varphi(v), w' \in \varphi(v') \right\}.$$

As is observed by Kozlov in [Koz08], for any finite simplicial complex  $X$ , we have

$$C_k^{\text{Abrams}}(X) = \text{Hom}(K_k, K_{|V(X)|}) \cap X^k,$$

where  $V(X)$  is the set of vertices in  $X$ . Although Abrams' simply-minded construction fails to give us a right model in many cases, we might be able to use  $\text{Hom}(-, -)$  or related constructions to obtain a good cellular model for  $\text{Conf}_k(K)$ . In fact, the following striking result of C. Schultz tells us that  $\text{Conf}_3(S^n)$  can be constructed as a Hom-complex.

**Theorem 5.2** (C. Schultz [Sch08]). *We have a homeomorphism*

$$\text{Hom}(C_5, K_{n+2}) \cong V_{n+1,2}.$$

**Theorem 5.3** (Fadell [Fad62]). *We have a fiber homotopy equivalence*

$$\begin{array}{ccccc} \text{Conf}_2(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \text{Conf}_3(S^n) & \longrightarrow & S^n \\ \cong \uparrow & & \uparrow \cong & & \parallel \\ S^{n-1} & \longrightarrow & V_{n+1,2} & \longrightarrow & S^n. \end{array}$$

We have the following combinatorial model for Fadell's fibration.

**Theorem 5.4.** *We have a quasifibration of the following form*

$$\text{Hom}(K_2, K_{n+1}) \longrightarrow \text{Hom}(C_5, K_{n+2}) \longrightarrow \partial\Delta^{n+1}.$$

*Proof.* Quillen's Theorem B. □

**Remark 5.5.** It is known that  $\text{Hom}(K_2, K_{n+1})$  is the boundary of a convex polytope of dimension  $n$ . See a paper [BK06] by Babson and Kozlov.

### Acknowledgement

This is a part of a joint work with Basabe, González, and Rudyak on the higher symmetric topological complexity. The speaker is grateful to Jesus González for many fruitful discussions on Google Wave.

### References

- [Abr00] Aaron Abrams. *Configuration Spaces and Braid Groups of Graphs*. PhD thesis, University of California at Berkeley, 2000, <http://www.math.uga.edu/~abrams/research/papers/thesis.ps>.
- [BK06] Eric Babson and Dmitry N. Kozlov. Complexes of graph homomorphisms. *Israel J. Math.*, 152:285–312, 2006, arXiv:math.CO/0310056.
- [BLVS<sup>+</sup>99] Anders Björner, Michel Las Vergnas, Bernd Sturmfels, Neil White, and Günter M. Ziegler. *Oriented matroids*, volume 46 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [BZ92] Anders Björner and Günter M. Ziegler. Combinatorial stratification of complex arrangements. *J. Amer. Math. Soc.*, 5(1):105–149, 1992.
- [DCS00] C. De Concini and M. Salvetti. Cohomology of Coxeter groups and Artin groups. *Math. Res. Lett.*, 7(2-3):213–232, 2000.
- [Fad62] Edward Fadell. Homotopy groups of configuration spaces and the string problem of Dirac. *Duke Math. J.*, 29:231–242, 1962.
- [FZ02] Eva Maria Feichtner and Günter M. Ziegler. On orbit configuration spaces of spheres. *Topology Appl.*, 118(1-2):85–102, 2002. Arrangements in Boston: a Conference on Hyperplane Arrangements (1999).
- [Koz08] Dmitry Kozlov. *Combinatorial algebraic topology*, volume 21 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin, 2008.
- [Qui78] Daniel Quillen. Homotopy properties of the poset of nontrivial  $p$ -subgroups of a group. *Adv. in Math.*, 28(2):101–128, 1978.
- [Sal87] Mario Salvetti. Topology of the complement of real hyperplanes in  $\mathbf{C}^N$ . *Invent. Math.*, 88(3):603–618, 1987.
- [Sch08] Carsten Schultz. Small models of graph colouring manifolds and the Stiefel manifolds  $\text{Hom}(C_5, K_n)$ . *J. Combin. Theory Ser. A*, 115(1):84–104, 2008, arXiv:math.CO/0510535.

# 余次元一の軌道を持つ群作用について

黒木慎太郎\*†

Dep. of Mathematical Sciences, KAIST

2010年8月12日

## 1 はじめに

位相変換群論とは多様体上の対称性 (群作用) を位相幾何的な視点から研究する分野である。中でも  $G/H$  の形で書かれる等質空間と呼ばれる空間はもっとも高い対称性を有する空間として昔から (現在も) 盛んに研究が行われている ([30] 等を参照)。余次元 1 の軌道を持つ多様体は、等質空間の次に対称性の高いクラスとすることができる。対称性の高さより豊富な構造を持つだけでなく、一般的な群作用を持つ場合に比べ自明でない例を簡単に構成することができるので、トポロジーのみならず幾何学全般で研究がなされている。

本稿では、多様体上の群作用が余次元 1 の軌道を持つ場合に、同変同相類でどのように分類するかということに話題を絞って紹介する。変換群論の基本的な事実については参考文献 [5, 17, 18] 等を参照されたい。

## 2 基本用語

まず初めに、変換群を考える上で基本となる記号と言葉を導入しよう (この章は基本用語の説明なので読み飛ばしてもらっても構わない)。

$M$  を  $n$  次元多様体\*<sup>1</sup>、 $G$  をコンパクトで連結なリー群とする。可微分写像  $\varphi: G \times M \rightarrow M$  が二つの関係式:

$$(1) \varphi(g, \varphi(h, x)) = \varphi(gh, x); (2) \varphi(e, x) = x$$

を満たす時、 $G$  は  $M$  に作用する、または  $M$  は  $G$ -作用を持つという。ここで  $x \in M$ ,  $g, h \in G$ ,  $e$  は  $G$  の単位元。 $G$ -作用をもつ  $M$  を  $(M, G)$  または作用込みで  $(M, G, \varphi)$  と書き、 $M$  を  $G$ -多様体と呼ぶ。

$G$ -多様体の同値関係は次のようにして与えられる。 $(M, G, \varphi)$  と  $(M', G', \varphi')$  が弱 ( $G$ -) 同変同相であるとは、微分同相写像  $f: M \rightarrow M'$  と同型写像  $\psi: G \rightarrow G'$  が存在し、 $f(\varphi(g, x)) = \varphi'(\psi(g), f(x))$  を満たす時を言う。もしも、 $\psi$  が identity map であるなら、 $(M, G)$  と  $(M', G)$  は ( $G$ -) 同変同相であると言い、 $M \stackrel{G}{\cong} M'$  と書く。

点  $x$  を  $G$ -作用で動かした  $M$  の部分集合  $\{\varphi(g, x) \mid g \in G\}$  を  $x$  を通る軌道と言い、 $G(x)$  と書く。2 点  $x, y \in M$  に対して、それらの軌道は必ず、 $G(x) = G(y)$  か  $G(x) \cap G(y) = \emptyset$  を満たしている。よって、 $M$  上の各元の間に軌道が同一になるかどうかで同値関係を入れる事が出来る。 $M$  をこの同値関係で割った空間、すなわち軌道全体を集

\* kuroki@kaist.ac.kr; <http://mathsci.kaist.ac.kr/~31871/index.html>

† The author was supported in part by Basic Science Research Program through the NRF of Korea funded by the Ministry of Education, Science and Technology (2010-0001651) and the Fujyukai Foundation.

\*<sup>1</sup> 特に断らない限り、多様体は  $C^\infty$  で連結な境界を持たないものと仮定する。

めた空間を、軌道空間と言ひ、 $M/G$  と書く。 $M$  から  $M/G$  への全射を次のように書く：

$$\begin{array}{ccc} \pi: M & \longrightarrow & M/G \\ \psi & & \psi \\ x & \longrightarrow & [x] \end{array} \quad (2.1)$$

ここで  $[x]$  は軌道  $G(x)$  を表す。

点  $x$  を動かさない  $G$  の部分集合  $\{g \in G \mid \varphi(g, x) = x\}$  を  $x$  のアイソトロピー部分群と言ひ、 $G_x$  と表記する。 $G$  がコンパクトなので、 $x$  を通る軌道  $G(x)$  はアイソトロピー部分群によって次のように書ける：

$$G(x) \cong \overset{G}{G/G_x}. \quad (2.2)$$

もしも全てのアイソトロピー部分群が単位群、つまり  $G_x = \{e\}$ 、ならば  $G$  は  $M$  に自由に作用していると言う。また、 $\bigcap_{x \in M} G_x = \{e\}$  の場合<sup>\*2</sup>、 $G$  は  $M$  に効果的に作用する、または  $G$ -作用は効果的であると言う。

更に  $G_x$  の共役類全体に対して、 $G$  の部分群として包含関係を用いて順序を入れることができる。この順序によって最小になる共役類 ( $G_x$ ) の  $x$  の軌道を主軌道と呼ぶ。このとき、主軌道は最大次元の軌道になることが分かる。主軌道よりも次元の低い軌道を特異軌道と呼ぶ。それ以外の軌道、つまり最大次元だが主軌道ではない軌道、を例外軌道と呼ぶ (主軌道は例外軌道の有限被覆になる)。

二つの  $G$ -多様体  $(M, G)$  と  $(N, G)$  から、新しい  $G$ -多様体  $(M \times N, G)$  が直積への対角作用によって定義できる。 $(M \times N, G)$  の軌道空間を  $M \times_G N$  と書く。もしも、 $G$  が  $M$  または  $N$  に自由に作用しているならば、 $M \times_G N$  は多様体になる。特に、 $K$ -多様体  $(N, K)$  に対して、次の形の  $G$ -多様体は今後頻りに現れる：

$$G \times_K N,$$

ここで、 $K$  は  $G$  の閉部分群で  $G$  に右から (逆元の掛け算によって) 作用している。よって  $K$ -多様体とみなした  $(G, K)$  が自由な作用になり、 $G \times_K N$  は多様体になる。また、 $G \times_K N$  上の  $G$ -作用は、 $G \times N$  の  $G$ -因子への左からの (掛け算による)  $G$ -作用によって誘導される。更に、 $G \times_K N$  は  $G/K$  上の  $N$  をファイバーとする、ファイバー束の構造があることも分かる。

次の可微分スライス定理 (またはスライス定理) は、コンパクト群の可微分作用を研究する上で基本的かつ非常に強力な定理である。

**Theorem 2.1.** 任意の  $x \in M$  の軌道  $G(x) \cong G/K$  に対して、 $G$ -不変な ( $G$ -が作用している) 閉近傍  $X$  が存在し、 $X$  は次の境界付き多様体と  $G$ -同変同相になる：

$$X \cong G \times_K D_x,$$

但し閉円盤  $D_x$  (次元は  $\dim M - \dim G(x) = k_x$ ) 上への  $K$ -作用は、直行群への線形表現  $\sigma: K \rightarrow O(D_x) \simeq O(k_x)$  を通して作用している。

Theorem 2.1 にある表現  $\sigma$  を  $x$  のスライス表現と呼ぶ。また、閉近傍  $X$  を  $G(x)$  の (閉) 管状近傍と呼ぶ。開管状近傍と言う場合は  $X$  の内点集合  $\text{int}(X)$  を考える。

### 3 $(M, G)$ が余次元 1 の軌道を持つ場合の位相型

$n$  次元多様体  $M$  の部分多様体  $N$  が  $n - \dim N = k$  を満たす時、 $N$  を余次元  $k$  の部分多様体と言う。本章では余次元 1 の軌道を持つ  $G$ -多様体の構造について紹介する。

<sup>\*2</sup> この条件は次のように言い換えることもできる。『 $\Phi(g) = \varphi(g, \cdot)$  で与えられた表現  $\Phi: G \rightarrow \text{Diff}(M)$  が単射になる場合。』

### 3.1 $(M, G)$ が余次元 0 の軌道を持つ場合

本章の主題に入る前に、 $n$  次元多様体  $M$  上の  $G$ -作用が余次元 0 の軌道を持つ場合について考えてみよう。つまり、次のような  $x \in M$  が存在すると仮定する:

$$\dim G(x) = n.$$

$G$  がコンパクトと仮定しているので、 $M$  もコンパクトとなり、 $M = G(x)$  になることが分かる\*<sup>3</sup>。(2.2) よりある閉部分群  $H$  が存在して  $M \cong G/H$  となることが言える (このような  $M$  の事を  $(G)$  の等質空間と言ひ、 $G$  が  $M$  に推移的に作用すると言う)。つまり、コンパクトな多様体  $M$  上の余次元 0 の  $G$ -作用  $(M, G)$  を同変同相類によって分類する問題は、『 $G$  の部分群を分類する問題』と言いかえることができる。そのような問題は、古典的に確立しているリー群論の結果を用いることによって解くことができる ([30] 等を参照)。

実際に、変換群論の道具が必要になるのは余次元 1 の軌道を持つ場合からである\*<sup>4</sup>。3.2 章から、余次元 1 の軌道を持つ多様体の構造を考えていこう。

### 3.2 $(M, G)$ が余次元 1 の軌道を持つ場合 ( $Q \neq [0, 1]$ の場合)

$n$  次元多様体  $M$  上の  $G$ -作用が余次元 1 の軌道を持つ場合を考える。すなわち、次のような  $x \in M$  が存在する場合を考える:

$$\dim G(x) = n - 1.$$

このような  $M$  上の  $G$ -作用の事を余次元 1 の軌道を持って働く作用もしくは余等質性 1 の作用を持つと言う。また、 $G$  がコンパクトであるので、主軌道の次元が余次元 1、つまり  $n - 1$ 、になることも分かる。

同変同相型を調べるために、まずは軌道空間に着目してみよう。余次元 1 の軌道を持つ場合、軌道空間  $Q = M/G$  は常に 1 次元の (境界付きの) 多様体になる事が分かる。すなわち  $Q$  は次のいずれかになる:

$$(1) Q = \mathbb{R}, \text{ 直線}; (2) Q = \mathbb{R}^+, \text{ 半直線}; (3) Q = S^1, \text{ 円周}; (4) Q = [0, 1], \text{ 区間}.$$

3.2 章では、最初の 3 つの場合 ( $Q = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, S^1$ ) について  $M$  の  $G$ -同変同相型がどのようなものか考えてみる。

#### 3.2.1 $Q = \mathbb{R}$ の場合

『スライス表現は主軌道の管状近傍において常に自明になる』と言う事実を用いると、軌道空間の内点を (2.1) の  $\pi$  によって引き戻すと、主軌道になるということが分かる。

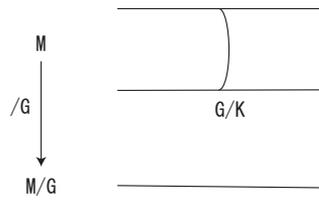
この事実とスライス定理を用いて  $Q = \mathbb{R}$  の場合は具体的に、ある閉部分群  $K \subset G$  が存在して、次のような直積の形で書けることがわかる:

$$M \cong G/K \times \mathbb{R}, \tag{3.1}$$

ここで、 $G$  は  $G/K$ -因子に左から作用し、 $\mathbb{R}$  に自明に作用する。このとき、軌道は  $G/K$  の形のみになることがわかる。

\*<sup>3</sup> 一般に、 $G$  が非コンパクト群になる場合、この事実は成立しない ([39] 等を参照)。  $G$  が代数群で余次元 0 の軌道を持つ場合、代数幾何においては、*toric variety* やもっと一般的に *spherical variety* と言う性質のいいクラスが考えられている ([6] 等を参照)。

\*<sup>4</sup> この点から、変換群論はリー群論の一般化とすることもできる。

図1  $Q = \mathbb{R}$  のイメージ.

以上より、 $Q = \mathbb{R}$  の場合は、3.1 章の余次元 0 の軌道を持つ場合を考えると本質的に変わらない。

### 3.2.2 $Q = \mathbb{R}^+$ の場合

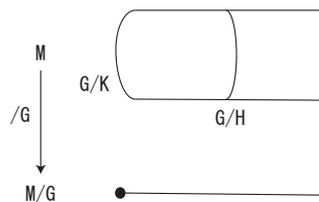
次に、スライス表現が非自明の場合、つまり  $G(x) \cong G/K$  が特異軌道か例外軌道になる場合を考えてみる。この場合、 $G(x)$  の管状近傍  $X \cong G \times_K D$  上の点  $y \in X$  を  $[g, z] \in G \times_K D$  と (スライス定理の同型を用いて) 同一視すると、次の二つが成立する。

- $z$  が  $D$  の原点  $o \in D$  ならば、 $y$  の軌道は  $G/K$  そのものになる。
- $z \in D$  が原点でなければ、 $y$  の軌道は主軌道  $G/H$  になる (但し、 $H \subset K$ )。

この事実と 3.2.1 章で述べた事実を用いると、 $Q = \mathbb{R}^+$  の場合は具体的に、ある閉部分群  $K \subset G$  が存在して、次のような  $G/K$  上のベクトル束の形で書ける事がわかる:

$$M \cong G \times_K V, \quad (3.2)$$

ここで、 $V \cong \mathbb{R}^\ell$  は  $K$  の線形表現空間で、その軌道空間が  $\mathbb{R}^+$  になるものである。いいかえると、 $V$  上の  $K$ -作用の主軌道として、 $K/H \cong S^{\ell-1} \subset V$  が現れるものになる。但し、 $S^{\ell-1}$  は  $(\ell-1)$  次元球面で  $\ell = n - \dim G/K \geq 1$  を満たす。このとき、 $G/K$  は特異軌道 ( $\ell > 1$  の場合) か例外軌道 ( $\ell = 1$  の場合) になり、 $G/H$  は主軌道になる。

図2  $Q = \mathbb{R}^+$  のイメージ.

以上より、 $Q = \mathbb{R}^+$  の場合は、 $G$  の部分群の対  $H \subset K$  で  $K/H \cong S^{\ell-1} (\ell = n - \dim G - \dim K)$  なるものを見つけることに帰着される。一般の次元の球面に推移的に (線形に) 作用するコンパクトリー群の分類は、1950 年代までに Borel[4], Montgomery-Samelson[31], Poncet[35] によってなされているので ([16] も参照)、この場合はそれらを用いることで分類がなされる。

### 3.2.3 $Q = S^1$ の場合

次に  $Q = S^1$  の場合について考えてみる。この場合は、3.2.1 章で述べた事実を用いれば、全ての軌道が主軌道  $G/K$  になることがすぐに分かる。更に、 $S^1$  は二つの 1 次元開集合  $U, V$  を張り合わせるにより作ることが

できたので、それらの開集合に対して  $\pi^{-1}(U) \cong G/K \times U$ ,  $\pi^{-1}(V) \cong G/K \times V$  となることも分かる。よって  $Q = S^1$  の場合は、ファイバーが主軌道  $G/K$  となる  $S^1$  上のファイバー束になる。つまり、(2.1) の  $\pi$  に対して、次のファイブレーションが存在する:

$$G/K \longrightarrow M \xrightarrow{\pi} S^1. \quad (3.3)$$

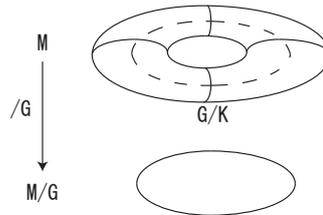


図3  $Q = S^1$  のイメージ.

ファイバー束 (3.3) の構造群を調べるために、 $M$  上の  $G$ -作用を軌道空間から構成する事を考えてみよう。つまり、 $M = \pi^{-1}(U) \cup \pi^{-1}(V)$  全体に  $\pi^{-1}(U)$  と  $\pi^{-1}(V)$  の  $G$ -作用が拡張するのはいつかを考えてみる。そのような拡張が存在するためには、 $U \cap V$  上のファイバー  $G/K$  の張り合わせ写像  $\tau: G/K \rightarrow G/K$  が  $G$ -同変でなければならないことが分かる。また、そのような  $\tau$  は、次の群の元とみなせることが知られている:

$$\tau \in N_G(K)/K, \quad (3.4)$$

但し、 $N_G(K) = \{g \in G \mid gKg^{-1} = K\}$  は  $K$  の正規化群。ここで、 $G$ -同変同相写像  $\tau: G/K \rightarrow G/K (\in N_G(K)/K)$  は  $G/K$  への右からの掛け算と見ること定義できる。

以上より、 $Q = S^1$  の場合は、 $S^1$  上の構造群が  $N_G(K)/K$  となる  $G/K$ -束の分類に帰着される。よって古典的に確立されたファイバー束の分類に関する結果が使える ([30, 36] 等を参照。より詳しくは [1] も参照)。

### 3.3 $(M, G)$ が余次元 1 の軌道を持つ場合 ( $Q = [0, 1]$ の場合)

$Q = \mathbb{R}, \mathbb{R}^+, S^1$  の場合は推移的な作用の分類や  $S^1$  上の特殊なバンドルの分類に帰着できたが、 $Q = [0, 1]$  の場合はそのような場合に帰着することはできない。よって、この場合が余次元 1 の軌道を持つ群作用の中では本質的な場合であると同時に、最も複雑な場合である。しかしながら、 $Q = [0, 1]$  の場合は、面白く具体的な例を豊富に提供してくれるので、古くから現在までトポロジーのみならずさまざまな分野の人たちによって研究されている ([1, 3, 5, 11, 13, 19, 20, 21, 23, 24, 34, 37, 40] 等がある)。3.3 章では、球面上の余次元 1 の作用を調べた Wang[40] の結果を改良した Uchida[37] の分類方法 (ここでは **Wang-Uchida の方法** と呼ぶ) を、具体的な多様体のクラス (Hattori-Masuda のトーラス多様体 [15, 26]) を例に紹介しよう。

#### 3.3.1 $Q = [0, 1]$ の場合

まず初めに、 $Q = [0, 1]$  の時の一般的な構造を簡単に見てみよう。

$Q = [0, 1]$  の場合は、 $Q = \mathbb{R}^+$  の場合を二つ張り合わせた形になる。つまり、 $\pi^{-1}(0)$  と  $\pi^{-1}(1)$  に現れる軌道が特異軌道か例外軌道になり、他が主軌道になることが分かる。主軌道を  $G/K$ 、それ以外の軌道を  $G/K_1, G/K_2$  と書き、 $G/K_i$  の管状近傍を  $X_i$  と書こう ( $i = 1, 2$ )。スライス定理から  $X_i \cong G \times_{K_i} D^{k_i}$  が分かり、図 4 のようなイメージになる。

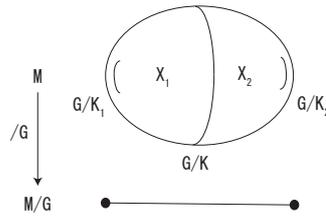


図4  $Q = [0, 1]$  のイメージ.

### 3.3.2 トーラス多様体

3.3.2 章では、Hattori-Masuda[15] によって定義された、トーラス多様体と呼ばれる多様体のクラスを導入しよう ([26] も参照)。そして、何故このクラスが  $Q = [0, 1]$  の場合と関係するのかを考える。

$(M, T)$  を  $2n$  次元の向きつけられたコンパクト連結多様体  $M$  上の  $n$  次元のトーラス  $T$ -作用\*<sup>5</sup> とする。 $(M, T)$  が次の二つの条件を満たす時に **トーラス多様体** と言う\*<sup>6</sup>:

- (1)  $T$  の作用は効果的かつ滑らかである; (2)  $T$  作用による不動点集合  $M^T$  が空ではない。

ここで、**不動点集合**とは  $M^T = \{x \in M \mid T(x) = x\}$  なる  $T$  作用で動かない  $M$  の点の集合の事である。定義から、 $M^T$  はいつも有限集合になる事が分かる。

次の二つ  $(S^{2n}, T^n)$  と  $(\mathbb{C}P(n), T^n)$  は、もっとも基本的なトーラス多様体の例である。

**例1**  $2n$  次元の球面上の点  $(z_1, \dots, z_n, r) \in S^{2n} \subset \mathbb{C}^n \oplus \mathbb{R}$  への  $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$  作用を次のように定義する:

$$(z_1, \dots, z_n, r) \mapsto (t_1 z_1, \dots, t_n z_n, r).$$

このとき、不動点は北極  $(0, \dots, 0, +1)$  と南極  $(0, \dots, 0, -1)$  のちょうど 2 点。

**例2** 複素  $n$  次元複素射影空間上の点  $[z_0 : \dots : z_n] \in \mathbb{C}P(n) = \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} / \mathbb{C}^*$  への  $(t_1, \dots, t_n) \in T^n$  作用を次のように定義する:

$$[z_0 : z_1 : \dots : z_n] \mapsto [z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n].$$

このとき、軌道空間は  $n$  次元単体とみなすことができ、その頂点が不動点に対応する。つまり  $n + 1$  個の不動点を持つ。

上の二つの  $T^n$  作用はそれぞれ、 $\mathbb{C}^n$  上の  $U(n)$  作用 (または  $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^{2n}$  とみなした時の  $SO(2n)$  作用) と  $\mathbb{C}^{n+1}$  上への  $PU(n+1)$  作用から誘導されていることに注意する。ここで  $PU(n+1) = SU(n+1)/C$  (但し、 $C$  は  $SU(n+1)$  の中心)。また、これらの作用はそれぞれ、余次元 1 の軌道を持つ作用、推移的な作用になることも注意しておこう。よって次の問題が自然に考えられる:

\*<sup>5</sup>  $n$  次元のトーラスとは円周群  $S^1$  の  $n$  個の直積の事、つまり  $n$  次元のコンパクトな可換リー群のことである。

\*<sup>6</sup> 本来の [15, 26] の定義では、単に多様体が向きつけ可能と言うだけでなく、『余次元 2 の部分トーラス多様体上の向き』を一つ決めてトーラス多様体と呼ぶ (このように部分多様体の向きも定めたものを **omniorientation** と呼ぶ)。Omniorientation の取り方は  $M$  上の  $T$ -不変な stable almost complex structure の取り方に関係してくる。本稿ではトーラス多様体上への可微分な作用 (omniorientation を保存するとは限らない作用) に興味があるので omniorientation は仮定していない。

**Problem 1.**  $(M, T, \varphi)$  をトーラス多様体、 $G$  を  $T$  を極大トーラスとして持つ非可換なコンパクトリー群とする。トーラス多様体上の  $T$ -作用が  $G$ -作用  $(M, G, \tilde{\varphi})$  へ拡張するとする。つまり  $\tilde{\varphi}|_{T \times M} = \varphi$  を満たすような  $G$ -作用が存在するとする。もしも  $G$ -作用が余次元 1 の軌道を持つ場合は  $M$  はどのような  $G$ -多様体になるか?

### 3.3.3 Wang-Uchida の方法

Problem 1 のように仮定すると、トーラス多様体の定義から  $M/G = [0, 1]$  であることが分かる。Problem 1 を Wang-Uchida の方法で解いてみよう。ここでは簡単のために  $M$  を単連結でかつ  $G/K_1$  と  $G/K_2$  が部分トーラス多様体であると仮定し (3.3.1 章を参照)、アウトラインのみ紹介する (詳しくは [23] を参照)。

**STEP 1.** Wang-Uchida の方法に従うと、最初に  $G/K_1$  と  $G/K_2$  を求めることになる。  $M$  は単連結なトーラス多様体であることから、 $G/K_1$  と  $G/K_2$  も単連結なトーラス多様体、つまり  $K_1$  と  $K_2$  も  $T$  を極大トーラスとして持つような等質空間 (このような空間を **同一階数の等質空間** と呼ぶ) になることが分かる。トーラス多様体が等質空間になるときを分類した [22] から、次の結果がわかる<sup>\*7</sup>:

**Lemma 3.1.** 上のよう仮定すると、 $G$  と  $K_i (i = 1, 2)$  は次のものしかない:

$$G \approx \prod_{j=1}^a PU(\ell_j + 1) \times \prod_{h=1}^b SO(2m_h + 1) \times G'_i, \quad K_i \approx \prod_{j=1}^a P(U(\ell_j) \times U(1)) \times \prod_{h=1}^b SO(2m_h) \times G'_i.$$

但し、 $\approx$  でリー環が同型と言う意味。つまり  $G/K_i \cong \prod_{j=1}^a \mathbb{C}P(\ell_j) \times \prod_{h=1}^b S^{2m_h}$ .

**STEP 2.** 次は管状近傍  $X_i \cong G \times_{K_i} D^{k_i}$  のスライス表現  $\sigma_i (i = 1, 2)$  の計算になる。まず始めに、Lemma 3.1 にある  $G'_i$  が、 $G$  の極大トーラスの次元が  $n$  であることと  $(G, K_1)$  と  $(G, K_2)$  を見比べることによって、具体的に求めることができる。よって、3.2.2 章 ( $Q = \mathbb{R}^+$  の場合) の方法で、 $X_i$  のスライス表現  $\sigma_i$  とともに主軌道のアイソトロピー部分群  $K$  の二つの包含写像  $\iota_i: K \rightarrow K_i$  を出すことができる。

**STEP 3.** 次に、3.3.1 章で述べた  $Q = [0, 1]$  の場合の構造から、 $X_1$  と  $X_2$  の境界を張り合わせて  $G$ -多様体を具体的に構成する。よって、張り合わせ写像を考察する必要がある。  $X_i$  の形から  $\partial X_i \cong G/K$  が分かるので張り合わせ写像は  $\tau: G/K \xrightarrow{\cong} G/K$  となる。このとき、3.2.3 章 ( $Q = S^1$  の場合) と同様に  $\tau \in N_G(K)/K$  も分かる。よって  $N_G(K)/K$  を計算すれば張り合わせ写像がどのくらいあるかが分かる。

**STEP 4.** STEP 2 で対  $(X_1, X_2)$  が分類された。STEP 3 でそれらの張り合わせ写像  $\tau$  が分類された。  $X_1, X_2$  を  $\tau$  で張り合わせてできた多様体を  $X_1 \cup_{\tau} X_2$  と書こう。最後は、二つの張り合わせ写像で作った多様体が、いつ同変同相になるかを考察する必要がある。次の補題を使う ([37] 等を参照)。

**Lemma 3.2** (Uchida's criterion).  $X_1 \cup_{\tau} X_2$  と  $X_1 \cup_{\tau'} X_2$  は以下のいずれかを満たせば同変同相:

- (1)  $\tau$  と  $\tau'$  は  $G$ -diffeotopic; (2)  $\tau^{-1}\tau'$  か  $\tau'\tau^{-1}$  が  $X_i$  上の同変同相写像へ拡張する。

以上より次の定理が導ける。

**Theorem 3.3** ([23]). トーラス多様体  $(M, T)$  が余次元 1 の軌道を持つ  $(M, G)$  へ (上述した仮定の下で) 拡張すると次の  $G$ -多様体と同変同相になる:

$$\left( \prod_{h=1}^b S^{2m_h} \times N, \quad \prod_{h=1}^b SO(2m_h + 1) \times H \right),$$

<sup>\*7</sup> [2] では toric variety が代数的に推移的な作用を持つ場合が分類されている。

ここで  $(N, H)$  は次のいずれかを満たす:

$N$	$H$
$\left(\prod_{j=1}^a S^{2\ell_j+1}\right) \times_{T^a} S(\mathbb{C}_\rho^k \oplus \mathbb{R})$	$\prod_{j=1}^a PU(\ell_j + 1) \times U(k)$
$\left(\prod_{j=1}^a S^{2\ell_j+1}\right) \times_{T^a} P(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$	$\prod_{j=1}^a PU(\ell_j + 1) \times P(U(k_1) \times U(k_2))$
$\prod_{j=1}^a CP(\ell_j) \times S(\mathbb{R}^{2k} \oplus \mathbb{R})$	$\prod_{j=1}^a PU(\ell_j + 1) \times SO(2k)$

ここで、 $P(\mathbb{C}_\rho^{k_1} \oplus \mathbb{C}^{k_2})$  は  $\dim_{\mathbb{C}} = k_1 + k_2 - 1$  の複素射影空間、 $S(V \oplus W) \subset V \oplus W$  は単位球面。

Theorem 3.3 の上から二つの  $N$  を説明しよう。 $N$  は、直積  $T^a = \prod_{j=1}^a S^1$  を球面の直積  $\prod_{j=1}^a S^{2\ell_j+1}$  上に因子ごとに作用させ、ファイバー方向へは  $\rho: T^a \rightarrow S^1$  なる表現で  $\mathbb{C}_\rho^k \simeq \mathbb{C}^k$ ,  $\mathbb{C}_\rho^{k_1} \simeq \mathbb{C}^{k_1}$  上にスカラー一倍で作用させた直積空間を割ったもの。つまり、 $N$  は複素射影空間の直積  $\prod_{j=1}^a CP(\ell_j)$  上の複素射影バンドルもしくは球面バンドルとすることができる。

より一般の場合 (向きづけを仮定しないトーラス多様体の場合) については [24] を参照。また、余次元 1 の軌道を持つ群作用の分類には、上述の Wang-Uchida の方法以外に、Aleksseevskii-Aleksseevskii の方法 [1] もある。

## 4 エピローグ

Theorem 3.3 から派生する研究や問題をいくつか述べて本稿を終わりにしよう。

### 4.1 何故、余次元 1 の場合を分類するのか?

Theorem 3.3 でみたように、余次元 1 の場合はそれほど自明とは思えないような例を含む形で、明確な形に分類できることが多い。そこで、余次元 1 の軌道を持つ多様体を分類することの意義の一つは、「未解決問題に対する試験場を提供すること」と言える。例えば、次の問題は [29] で提出され、まだ未解決である。

**Problem 2** (cohomological rigidity problem). 二つのトーリック多様体のコホモロジー環が同型ならばそれらは同相であろうか?

トーリック多様体 (定義は [9] 等を参照) は、トーラス多様体の中でもとても性質のいいクラスである。[29] では上の問題をもっと一般の場合に『 $T$ -作用の軌道空間がホモトピーセルであるようなトーラス多様体』についても問題を提出しているが、Theorem 3.3 で分類した結果を、同変同相ではなく  $G$ -作用を考えない、同相型で分類すると、この場合に対して否定的な答えを与えることができる ([7] を参照)。

### 4.2 余次元 $k$ の場合について

一般の余次元  $k$  の軌道を持つ場合は、古くは [16] で考えられ、 $k = 2$  の場合は [32, 33, 38] 等で考察されている。しかしながら  $k \geq 2$  の場合は、例えば [33] では現代的な言葉を用いれば『 $S^4$  以外の単連結な 4 次元のトーラス多様体は基本的なトーラス多様体 ( $CP(2)$  と Hirzebruch 曲面) からの同変連結和で書ける』というような結論となり、 $k = 1$  の時のような明確な形での分類はほとんど不可能になる。よって、このような場合は変換群論の不変量 (同変コホモロジー等) を計算し、それを用いて分類できないか考えることとなる。4.2 章では最近の発展の様子を簡単に述べてみたい。

#### 4.2.1 軌道空間から構成した $G$ -多様体を研究する

軌道空間の次元が  $k$  なら余次元  $k$  の主軌道を持つことに注意しよう。そこで最近は、3.2.3 章や 3.3 章で議論したような、軌道空間 (に群作用の情報を付加した物) から  $G$ -多様体を構成し、それを研究するという方法が注目されている ([1, 8, 9, 13, 14, 42] 等を参照\*<sup>8</sup>)。

特にトーリック幾何を動機とした Davis-Januszkiewicz[9] の研究により、位相的に定義したトーリック多様体と軌道空間の組み合わせ構造との間に綺麗な対応が見つかることが示され、現在ではトーリクトポロジーと言う分野となり盛んに研究されている。中でも同変同相型の分類に関しては、『[9] で構成された  $G$ -多様体は同変コホモロジーを用いて完全に分類できる』事が分かっている (Masuda の定理 [27]。[25] も参照)。

#### 4.2.2 トーラス作用の拡張作用について

Theorem 3.3 や [22, 23, 24] の『トーラス多様体の  $T$ -作用の  $G$ -作用への拡張の研究』は代数幾何の Demazure の研究 [10] のトポロジー版だと思えることができる\*<sup>9</sup>。一般に拡張作用の主軌道は、余次元 1 のみならず余次元  $k (\geq 2)$  の場合が現れる。最近では、トポロジーの立場から Masuda[28] がトーラス多様体のルート系と言う不変量を\*<sup>10</sup>、Wiemeler[41] が admissible 5-tuple という不変量を導入して、拡張作用を分類することが試みられている。それらの研究によると、トーラス多様体上の拡張作用は Theorem 3.3 で出てきたような SU, SO 型 (A, B, D 型) のものに限られることが分かる (toric variety の場合は A 型のみ) に注意)。

トーラス多様体よりもさらに広大なトーラス作用を持つクラスとして GKM 多様体と言うものがある ([12] 等を参照)。GKM 多様体には同一階数の等質空間  $G/H$  が全て含まれるので、この場合の拡張作用を考えれば A~G 全ての型が現れると容易に想像できる。GKM 多様体上の拡張作用を研究するのは今後の課題の一つである。

## 参考文献

- [1] A.V. Alekseevskii, D.V. Alekseevskii, *G-manifolds with one-dimensional orbit space*, Adv. in Soviet Math., **8** (1992), 1–31.
- [2] I.V. Arzhantsev, S.A. Gaifullin, *Homogeneous toric varieties*, J. Lie Theory, **20** (2010), 283–293.
- [3] T. Asoh, *Compact transformation groups on  $Z_2$ -cohomology spheres with orbits of codimension 1*, Hiroshima Math. J., **11** (1981), 571–616.
- [4] A. Borel, *Le plan projectif de actaves et les spheres comme espaces homogenes*, C.R. Acad. Sci., Paris, **230** (1950), 1378–1381.
- [5] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.
- [6] M. Brion, *Spherical varieties*, the lecture note written by R. Devyatov, D. Fratila, V. Tsanov, <http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/SphericalVar.pdf>, (2009).
- [7] S. Choi, S. Kuroki, *Topological classification of torus manifolds which have codimension one extended actions*, arXiv:0906.1335; OCAMI preprint series 09-9, (2009).
- [8] M. Davis, *Smooth G-manifolds as collections of fiber bundles*, Pacific J. of Math., **77** (1978), 315–363.
- [9] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus action*, Duke. Math. J., **62** (1991), 417–45.

\*<sup>8</sup> [42] ではより一般に局所的にトーラス作用を持つような空間の構成方法が示されている。

\*<sup>9</sup> Demazure は、toric variety の automorphism group を調べている。Automorphism group は代数的トーラス  $(C^*)^n$  作用の拡張作用であると考えられる。

\*<sup>10</sup> [28] では symplectic toric についてのみルート系を定義しているが、2010 年 5 月の Fudan University での Masuda の講演ではより一般にトーラス多様体上のルート系が定義されていた。

- [10] M. Demazure, *Sous-groupes algebriques de rang maximum du group de Cremona*, Ann. Sci. École Norm. Sup., **3**(1970), 507–588.
- [11] A. Gambioli, *Eight-dimensional  $SU(3)$ -manifolds of cohomogeneity one*, Ann. Global Anal. Geom., **34** (2008), 77–100.
- [12] V. Guillemin, C. Zara, *1-skeleta, Betti numbers, and equivariant cohomology*, Duke Math. J., **107** (2001), 283–349.
- [13] I. Hambleton, J-C. Hausmann, *Equivariant principal bundles over spheres and cohomogeneity one manifolds*, Proc. London Math. Soc., **86** (2003), 250–272.
- [14] I. Hambleton, J-C. Hausmann, *Equivariant bundles and isotropy representations*, Groups, Geom. and Dynamics, **4** (2010), 127-162
- [15] A. Hattori, M. Masuda, *Theory of Multi-fans*, Osaka. J. Math., **40** (2003), 1–68.
- [16] W.C. Hsiang, W.Y. Hsiang, *Classification of differentiable actions on  $S^n$ ,  $R^n$  and  $D^n$  with  $S^k$  as the principal orbit type*, Ann. of Math., **82** (1965), 421–433.
- [17] W.Y. Hsiang, *Cohomology Theory of Topological Transformation Groups*, Ergeb. Math., 85, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [18] K. Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, London, 1991.
- [19] A. Kollross, *A Classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc., **354** (2002), 571–612.
- [20] S. Kuroki, *On 8-manifolds with  $SU(3)$ -actions*, RIMS Kokyuroku, **1569** (2007), 81–93.
- [21] S. Kuroki, *Classification of compact transformation groups on complex quadrics with codimension one orbits*, Osaka J. Math., **46** (2009), 21–85.
- [22] S. Kuroki, *Characterization of homogeneous torus manifolds*, Osaka J. Math., **47** (2010), 285–299.
- [23] S. Kuroki, *Classification of quasitoric manifolds with codimension one extended actions*, OCAMI preprint series 09-4, (2009).
- [24] S. Kuroki, *Classification of torus manifolds with codimension one extended actions*, OCAMI preprint series 09-5, (2009).
- [25] S. Kuroki, *Equivariant cohomological rigidity of toric hyperKähler manifolds*, preprint (2010).
- [26] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, Tohoku Math. J., **51** (1999), 237–265.
- [27] M. Masuda, *Equivariant cohomology distinguishes toric manifolds*, Adv. Math., **218** (2008), 2005–2012.
- [28] M. Masuda, *Symmetry of a symplectic toric manifold*, to appear in J. Symp. Geom.; arXiv:0906.4479 (2009).
- [29] M. Masuda, D.Y. Suh, *Classification problems of toric manifolds via topology*, Proc. of Toric Topology, Contemp. Math., **460** (2008), 273-286.
- [30] M. Mimura, H. Toda, *Topology of Lie Groups, I and II*, Amer. Math. Soc., 1991.
- [31] D. Montgomery, H. Samelson, *Transformation groups of spheres*, Ann. of Math., **44** (1943), 454–470.
- [32] A. Nakanishi,  *$SO(n)$ ,  $SU(n)$ ,  $Sp(n)$ -homology spheres with codimension two principal orbits*, Tokyo J. Math., **7** (1984), 287–313.
- [33] P. Orlik, F. Raymond, *Actions of the torus on 4-manifolds. I*, Trans. Amer. Math. Soc., **152** (1970), 531–559.
- [34] F. Podesta, L. Verdiani, *Positive curved 7-dimensional manifolds*, Quart. J. Math., Oxford, **50** (1999), 497–504.
- [35] J. Poncet, *Groupes de Lie compacts de transformations de l'espace euclidien et les spheres comme espaces homogenes*, Comment. Math. Helv., **33** (1959), 109-120.
- [36] N. Steenrod, *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1951.
- [37] F. Uchida, *Classification of compact transformation groups on cohomology complex projective spaces with codimension one orbits*, Japan. J. Math., **3** (1977), 141–189.
- [38] F. Uchida, *Compact transformation groups on complex projective spaces with codimension two principal orbits*, Osaka J. Math., **15** (1978), 137–150.
- [39] F. Uchida: *Classification of real analytic  $SL(n, \mathbf{R})$  actions on  $n$ -sphere*, Osaka J. Math., **16** (1979), 561-579.
- [40] H.C. Wang, *Compact transformation groups of  $S^n$  with an  $(n - 1)$ -dimensional orbit*, Amer. J. Math., **82** (1960), 698–748.
- [41] M. Wiemeler, *Torus manifolds with non-abelian symmetries*, arXiv:0911.4936 (2009).
- [42] T. Yoshida, *Local torus actions modeled on the standard representation*, arXiv:0710.2166 (2007).

# A SURVEY OF HALPERIN-CARLSSON CONJECTURE

LI YU

## 1. SOME HISTORY OF HALPERIN-CARLSSON CONJECTURE

Let  $G$  be a topological group and let  $X$  be a Hausdorff topological space.

**Definition 1.1.** A  $G$ -action on  $X$  is a continuous map  $\phi : G \times X \rightarrow X$  which satisfies:

- (1)  $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$  for any  $g, h \in G$  and  $x \in X$ .
- (2)  $\phi(e, x) = x$  for any  $x \in X$ , where  $e$  is the identity of  $G$ .

For  $\forall x \in X$ ,  $G_x := \{g \in G \mid \phi(g, x) = x\}$  is called the *isotropy subgroup* of  $G$  at  $x$ , and the set  $G \cdot x = \{\phi(g, x) \mid \forall g \in G\}$  is called the *orbit* of  $x$ . For convenience, one often replaces  $\phi(g, x)$  by  $g \cdot x$  or  $g(x)$ .

A basic philosophy in theory of transformation group is that a group action on a space can often reveal some interesting information of both the space and the group itself. The following theorem proved by P. A. Smith in 1944 is one of the earliest practices of this philosophy.

**Theorem 1.2** (Smith [1]). *If a finite group  $G$  acts freely on a sphere, then any abelian subgroup of  $G$  must be cyclic.*

In 1957, Milnor [2] found another necessary condition for a finite group  $G$  to act freely on a sphere, which is: if  $G$  acts freely on a sphere, then every order 2 element in  $G$  must be in the center of  $G$ . Moreover, in the study of the spherical space forms in 1970s, people found that the two conditions in Smith's and Milnor's theorems are actually sufficient to guarantee the existence of a free  $G$  action on some sphere. The following theorem is due to Madsen, Thomas and Wall [3].

**Theorem 1.3** (Madsen, Thomas and Wall [3]). *A finite group  $G$  can act freely on some sphere  $S^n$  if and only if all of its abelian subgroups are cyclic and every order 2 element of  $G$  is in the center of  $G$ .*

---

2000 *Mathematics Subject Classification.* 57R22, 57S17, 57S10, 55R91.

*Key words and phrases.* free torus action, Halperin-Carlsson conjecture, toral rank, small cover, moment-angle manifold, real Bott manifold.

The author is supported by the Scientific Research Foundation for the Returned Overseas Chinese Scholars, State Education Ministry and by the Japanese Society for the Promotion of Sciences (JSPS grant no. P10018).

Let  $\mathbb{Z}_p$  ( $p$  is a prime) denote the quotient group  $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . The Smith's theorem just says that if  $(\mathbb{Z}_p)^r$  can act freely on some sphere  $S^n$ , it is necessary that  $r \leq 1$ . Then it is natural to conjecture the following on any  $(\mathbb{Z}_2)^r$ -action on a product of spheres.

**Conjecture 1:** If  $(\mathbb{Z}_p)^r$  ( $p$  is a prime) acts freely on a product of spheres  $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$ , then  $r \leq k$ .

This conjecture was confirmed to be true for  $S^n \times S^n$  by Cornner [6] and for any  $S^{n_1} \times S^{n_2}$  by Heller [8]. Later all the  $k \leq 3$  cases are confirmed by Carlsson in [16]. And a general result for an arbitrary product of equi-dimensional spheres was obtained by Adem and Browder in [10].

**Theorem 1.4** (Adem and Browder [10]). *If  $(\mathbb{Z}_p)^r$  acts freely on a finite CW-complex  $X$  which is homotopy equivalent to  $(S^n)^k$ , then  $r \leq k$  for  $p$  an odd prime. If  $p = 2$ , this holds for  $n \neq 1, 3, 7$ .*

Later, the above result was extended to the case  $p = 2$  and  $n = 1$  by Yalcin [13]. In addition, the Conjecture 1 was completely settled by Carlsson [14] and [15] with an additional assumption that the induced action of  $(\mathbb{Z}_p)^r$  on the integral homology groups of  $S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$  is trivial. The most recent progress for this conjecture is made by Hanke in [17].

**Theorem 1.5** (Hanke [17]). *If  $(\mathbb{Z}_p)^r$  acts freely on  $X = S^{n_1} \times \cdots \times S^{n_k}$  and  $p > 3 \cdot \dim(X)$ , then we must have  $r \leq k_0$  where  $k_0$  is the number of odd dimensional spheres in the product.*

But the other cases for Conjecture 1 remain intriguingly open. The main tools used to study this conjecture in the papers mentioned above come from the theory of spectral sequence, group cohomology, rational homotopy theory and commutative algebras. More information of the Conjecture 1 can be found in [12] and [18].

Moreover, Halperin and Carlsson formulated the following conjecture in the middle of 1980s, which significantly generalizes Conjecture 1.

**Halperin-Carlsson Conjecture:**

- (1) If  $(\mathbb{Z}_p)^r$  ( $p$  is a prime) acts freely on a finite CW-complex  $X$ , then we have:  $\sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Z}_p} H^i(X, \mathbb{Z}_p) \geq 2^r$ ;
- (2) If  $(S^1)^r$  acts almost freely on a finite CW-complex  $X$ , then we have  $\sum_{i=0}^{\infty} \dim_{\mathbb{Q}} H^i(X, \mathbb{Q}) \geq 2^r$ .

Here, an  $(S^1)^r$  action on  $X$  is called *almost free* if the isotropy subgroup of any point  $x \in X$  is finite. The above conjecture was proposed by S. Halperin in [4] for the torus case, and by G. Carlsson in [5] for the  $\mathbb{Z}_p$ -torus case. It is also called *toral rank conjecture* in some papers.

Aside from those confirmed cases in Conjecture 1, Halperin-Carlsson conjecture has been proved for general CW-complexes in [19] for  $r \leq 3$  in the torus and  $\mathbb{Z}_2$ -torus cases and  $r \leq 2$  in the odd  $\mathbb{Z}_p$ -torus case. But the general cases are still wide open. In the recent years, more and more new evidences were found to support the Halperin-Carlsson conjecture. In the next section, we will list some very recent results of this kind.

## 2. SOME RECENT RESULTS

### 2.1. Canonical torus actions on moment-angle complexes.

**Definition 2.1.** An (abstract) *simplicial complex* on a set  $[m] = \{1, \dots, m\}$  is a collection  $K$  of subsets of  $[m]$  such that for each  $\sigma \in K$ , all subsets of  $\sigma$  (including  $\emptyset$ ) also belong to  $K$ . Any  $\sigma \in K$  is called an (abstract) *simplex* of  $K$ .

**Definition 2.2.** Suppose  $K$  is a simplicial complex on  $[m]$ . Let  $(X, A)$  be a pair of CW-complex with  $A \subset X$ . For any subset  $\sigma$  of  $[m]$ , define

$$(X, A)^\sigma := \{(x_1, \dots, x_m) \in X^m \mid x_i \in A \text{ for } i \notin \sigma\}$$

The  $K$ -power of the pair  $(X, A)$  is  $(X, A)^K := \bigcup_{\sigma \in K} (X, A)^\sigma$ . By this notation, the *moment-angle complex*  $\mathcal{Z}_K := (D^2, S^1)^K$  and *real moment-angle complex*  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K := (D^1, S^0)^K$ .

In 2009, Cao and Lü [20] and Ustinovsky [21] independently proved the following result (via different methods).

**Theorem 2.3** (Cao and Lü [20] and Ustinovsky [21]). *If  $K$  is an  $(n-1)$ -dimensional simplicial complex on  $[m]$ . Then  $\sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathbb{R}\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geq 2^{m-n}$  and  $\sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(\mathcal{Z}_K, \mathbb{Q}) \geq 2^{m-n}$ .*

Note that the standard actions of  $(\mathbb{Z}_2)^m$  on  $(D^1)^m$  or  $(S^1)^m$  on  $(D^2)^m$  descent to a canonical  $(\mathbb{Z}_2)^m$ -action on  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  or a canonical  $(S^1)^m$ -action on  $\mathcal{Z}_K$ . It is not hard to see that if a subgroup  $H \subset (\mathbb{Z}_2)^m$  (or  $H \subset (S^1)^m$ ) acts freely on  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  (or almost freely on  $\mathcal{Z}_K$ ) through the canonical action, we should have  $\text{rank}(H) \leq m - n$ . So Theorem 2.3 confirms the Halperin-Carlsson conjecture for those canonical actions of the subtori of  $(\mathbb{Z}_2)^m$  and  $(S^1)^m$  on  $\mathbb{R}\mathcal{Z}_K$  and  $\mathcal{Z}_K$  respectively.

### 2.2. Free $(\mathbb{Z}_2)^r$ -actions whose orbit spaces are small covers.

Suppose  $(\mathbb{Z}_2)^r$  acts freely on a closed  $n$ -manifold  $M^n$ . Let  $Q^n = M^n/(\mathbb{Z}_2)^r$  be the orbit space. Let  $\pi : M^n \rightarrow Q^n$  be the orbit map. We can think of  $M^n$  either as a principal  $(\mathbb{Z}_2)^r$ -bundle over  $Q^n$  or as a regular covering over  $Q^n$  with deck transformation group  $(\mathbb{Z}_2)^r$ . It is shown in [24] that  $\pi$  determines a  $(\mathbb{Z}_2)^r$ -valued coloring  $\lambda_\pi$  on a nice manifold with corners  $V^n$  (called a  $\mathbb{Z}_2$ -core of  $Q^n$ ),

and up to equivariant homeomorphism, we can recover  $M^n$  by a standard *glue-back construction* from  $V^n$  and  $\lambda_\pi$ . Using this language, the following theorem is proved in [25].

**Theorem 2.4** (Yu [25]). *If  $(\mathbb{Z}_2)^r$  acts freely on a closed  $n$ -manifold  $M^n$  whose orbit space is homeomorphic to a small cover, then we must have:*

$$\sum_i \dim_{\mathbb{Z}_2} H^i(M^n, \mathbb{Z}_2) \geq 2^r \quad (1)$$

Recall that an  $n$ -dimensional *small cover* is a closed  $n$ -manifold with a locally standard  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -action whose orbit space can be identified with an  $n$ -dimensional simple polytope (see [22]). An  $n$ -dimensional polytope  $P^n$  is *simple* means that any vertex of  $P^n$  is the intersection of exactly  $n$  facets of  $P^n$ . Small covers are introduced in [22] as a topological analogue of non-singular toric variety in the category of real manifolds with  $\mathbb{Z}_2$ -torus actions. It was shown in [22] that many topological invariants of a small cover can be computed from the combinatorial data of the underlying simple polytope.

### 2.3. Torus actions on real Bott manifolds.

A manifold  $M$  is called a *real Bott manifold* if there is a sequence of  $\mathbb{R}P^1$ -bundles  $M = M_n \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_{n-1} \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} \cdots \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_1 \xrightarrow{\mathbb{R}P^1} M_0 = \{\text{a point}\}$  such that for each  $1 \leq j \leq n$ ,  $M_j \rightarrow M_{j-1}$  is the projective bundle of the Whitney sum of a real line bundle  $L_{j-1}$  and the trivial real line bundle over  $M_{j-1}$ . Note that  $M$  is a small cover and it is the quotient space of some free  $(\mathbb{Z}_2)^n$ -action on the  $n$ -dimensional torus  $T^n$ .

**Theorem 2.5** (Choi, Masuda and Oum [26]). *If a real Bott manifold  $M$  admits an effective action of  $(S^1)^r$ , then  $\sum_i \dim_{\mathbb{Q}} H^i(M; \mathbb{Q}) \geq 2^r$ .*

Here, any effective action of  $(S^1)^r$  on  $M$  actually must be almost free. The proof of this theorem uses the fact that real Bott manifolds are *aspherical manifolds* and some geometric results from [7] and [27].

## 3. ALGEBRAIC ANALOGUE OF HALPERIN-CARLSSON CONJECTURE

There is a purely algebraic analogue of the Halperin-Carlsson conjecture, which is proposed in [5] in the context of commutative algebras. Let  $G = (\mathbb{Z}_2)^r$ , and let  $\mathbb{Z}_2[G]$  be the group ring of  $G$  over  $\mathbb{Z}_2$ . We think of  $\mathbb{Z}_2[G]$  as a graded ring by assigning the grading 0 to all its elements.

**Definition 3.1.** Let  $R = \bigoplus_i R_i$  be a graded ring. A *differential graded  $R$ -module* is a graded  $R$ -module  $M = \bigoplus_i M_i$  with a graded  $R$ -module homomorphism

$d : M \rightarrow M$  of degree  $-1$  so that  $d \circ d = 0$ . The homology group  $H_*(M, d)$  of  $M$  is defined in the usual way.

The following conjecture is proposed by Carlsson in [5].

**Conjecture 2:** If  $M$  is a finitely generated free  $\mathbb{Z}_2[G]$ -module where  $G = (\mathbb{Z}_2)^r$ , then  $\sum_i \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(M, d) \geq 2^r$ .

This conjecture was confirmed by Carlsson in [16] for  $r \leq 3$ . More discussions along this line can be found in [28]. Notice that Conjecture 2 implies the Halperin-Carlsson conjecture in the  $(\mathbb{Z}_2)^r$ -action case. Indeed, if  $(\mathbb{Z}_2)^r$  acts on a finite CW-complex  $X$  freely, by subdividing the cells of  $X$  if necessary, we can assume that the cellular chain complex  $C_*(X, \mathbb{Z}_2)$  is a finitely generated free  $\mathbb{Z}_2[G]$ -module, and the cellular boundary map on  $C_*(X, \mathbb{Z}_2)$  makes it a differential graded  $\mathbb{Z}_2[G]$ -module whose homology is just the  $\mathbb{Z}_2$ -homology of  $X$ .

In addition, there is another conjecture in homological algebra, called Horrocks' conjecture, which is analogous to Conjecture 2.

**Horrocks' conjecture:** Let  $M$  be an Artinian graded module over the polynomial ring  $R = \mathbb{F}[x_1, \dots, x_r]$ , where  $\mathbb{F}$  is a field. Then

$$\sum_i \dim_{\mathbb{F}} \operatorname{Tor}_i^R(M, \mathbb{F}) \geq 2^r.$$

Recall that an  $R$ -module  $M$  is called *Artinian* if every ascending chain of  $R$ -submodules of  $M$  eventually terminates. Horrocks' conjecture is known to be related to the study of algebraic vector bundles over projective spaces (see [29] for more information).

## REFERENCES

- [1] P. A. Smith, *Permutable periodic transformations*, Proc. Nat. Acad. Sci. **30** (1944), 105-108.
- [2] J. Milnor, *Groups which act on  $S^n$  without fixed points*, Amer. J. Math. **79** (1957), 623-630.
- [3] I. Madsen, C. B. Thomas and C. T. C. Wall, *The topological spherical space form problem II*, Topology **15** (1976), 375-382.
- [4] S. Halperin, *Rational homotopy and torus actions*. Aspects of topology, 293-306, London Math. Soc. Lecture Note Ser., **93**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1985.
- [5] G. Carlsson, *Free  $(\mathbb{Z}/2)^k$  actions and a problem in commutative algebra*, Lecture Notes in Math., **1217**, Springer, Berlin, 1986, 79-83.
- [6] P. E. Conner, *On the action of a finite group on  $S^n \times S^n$* , Ann. of Math. **66** (1957), 586-588.
- [7] P. E. Conner and F. Raymond, *Injective operations of the toral groups*, Topology **10** (1971), 283-296.
- [8] A. Heller, *A note on spaces with operators*, Ill. J. Math. **3** (1959), 98-100.
- [9] A. Adem,  *$\mathbb{Z}/p$  Actions on  $(S^n)^k$* , Transactions of the AMS **300** (1987), 791-809.

- [10] A. Adem and W. Browder, *The free rank of symmetry of  $(S^n)^k$* , Invent. Math. **92** (1988), 431-440.
- [11] A. Adem and D. J. Benson, *Elementary abelian groups acting on products of spheres*, Math. Zeitschrift **228** (1998), 705-712.
- [12] A. Adem, *Constructing and deconstructing group actions*, Homotopy theory: relations with algebraic geometry, group cohomology, and algebraic  $K$ -theory, Contemp. Math., **346** (2004), 1-8.
- [13] E. Yalcin, *Group actions and group extensions*, Transactions AMS **352** (2000), 2689-2700.
- [14] G. Carlsson, *On the nonexistence of free actions of elementary abelian groups on products of spheres*, Amer. Journal Math. **102** (1980), 1147-1157.
- [15] G. Carlsson, *On the rank of abelian groups acting freely on  $(S^n)^k$* , Invent. Math. **69** (1982), 393-400.
- [16] G. Carlsson, *Free  $(\mathbb{Z}/2)^3$  Actions on Finite Complexes*, Annals of Math. Studies 113 (1987), 332-344.
- [17] B. Hanke, *The stable free rank of symmetry of products of spheres*, Invent. Math. **178** (2009), no. **2**, 265-298.
- [18] C. Allday and V. Puppe, *Cohomological methods in transformation groups*, Cambridge University Press (1993).
- [19] V. Puppe, *Multiplicative aspects of the Halperin-Carlsson conjecture*, Georgian Mathematical Journal, Volume **16** (2009), No. **2**, 369-379.
- [20] X. Cao and Z. Lü, *Möbius transform, moment-angle complex and Halperin-Carlsson conjecture*, Preprint (2009); arXiv:0908.3174
- [21] Y. Ustinovsky, *Toral rank conjecture for moment-angle complexes*, Preprint (2009); arXiv:0909.1053
- [22] M. W. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), no. **2**, 417-451.
- [23] V. M. Buchstaber and T.E. Panov, *Torus actions and their applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series, 24. American Mathematical Society, Providence, RI, 2002.
- [24] L. Yu, *On the constructions of free and locally standard  $\mathbb{Z}_2$ -torus actions on manifolds*, Preprint (2010); arXiv:1001.0289
- [25] L. Yu, *Small cover and Halperin-Carlsson Conjecture*, Preprint (2010); arXiv:1003.5740
- [26] S. Choi, M. Masuda and S. Oum, *Classification of real Bott manifolds and acyclic digraphs*, preprint (2010).
- [27] Y. Kamishima and A. Nazra, *Seifert fibered structure and rigidity on real Bott towers*, Contemp. Math. Vol. **501** (2009), 103-122.
- [28] L. Avramov, R. Buchweitz, S. Iyengar, *Class and rank of differential modules*, Invent. Math. **169** (2007), no. **1**, 1-35.
- [29] R. Hartshorne, *Algebraic vector bundles on projective spaces: a problem list*, Topology **18** (1979), no. **2**, 117-128.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS AND IMS, NANJING UNIVERSITY, NANJING, 210093, P.R.CHINA

and

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, OSAKA CITY UNIVERSITY, SUGIMOTO, SUMIYOSHI-KU, OSAKA, 558-8585, JAPAN

*E-mail address:* yuli@nju.edu.cn

# On the connected components of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold

Hélène EYNARD

JSPS fellow

Graduate School of Mathematical Sciences

The University of Tokyo, Japan

heynardb@umpa.ens-lyon.fr

## Abstract

In 1969, J. Wood showed that any plane field on a closed 3-manifold can be deformed into the tangent plane field to a foliation. In these notes, we outline the proof of a one-parameter version of this statement: if two  $C^\infty$  foliations have homotopic tangent plane fields, they can be connected by a path of  $C^1$  foliations. Under some restrictions on the holonomy of the initial foliations, one can actually remain in the  $C^\infty$  class. The full proof is to appear in an upcoming paper [Ey3] and is part of the author's PhD dissertation [Ey1].

## Introduction

A *codimension one foliation* on a closed 3-manifold  $M$  is a partition of  $M$  into connected subsets, called the *leaves*, such that every point of  $M$  has a neighbourhood  $U$  with coordinates  $(x, y, z): U \rightarrow \mathbb{R}^3$  in which every connected component of  $F \cap U$ , for every leaf  $F$ , is defined by  $z = \text{constant}$ . In other words, a foliation is a partition of  $M$  into immersed surfaces which locally pile up nicely like a family of parallel affine planes. Until further notice, everything – manifolds, coordinates, etc. – is assumed  $C^\infty$ .

An important example is the Reeb foliation on the solid torus, which can be visualized by rotating the leftmost picture on Fig. 1 around a vertical axis and quotienting out by the unit vertical translation. It has only one compact leaf, the boundary torus, on which all the other leaves accumulate. When this foliation appears in a larger foliated manifold, it is called a *Reeb component*.

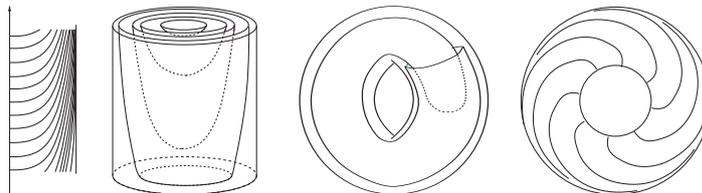


Figure 1: Reeb foliation of the solid torus

Whether any closed 3-manifold admits a codimension one foliation is not a priori obvious. It turns out however that they all do, according to Lickorish [Li] and Novikov and Zieschang [No] (independently). The next natural step is to try and classify these objects: how many “different” foliations are there on a given manifold  $M$ ?

One (rather unexplored) way of tackling this question is to put a nice topology on the set  $\mathcal{F}(M)$  of foliations on  $M$  and to try and describe the topological properties of this space. To that end, a key observation is that foliations can be viewed as “a special kind of plane fields”. Indeed, each leaf has, at each point, a tangent plane, and the collection of those planes defines the so-called *tangent plane field to the foliation*, which determines the foliation completely. Thus, one can consider a foliation and its tangent plane field to be the same object, and endow  $\mathcal{F}(M)$  with a natural topology, inherited from the space  $\mathcal{P}(M)$  of plane fields on  $M$ .

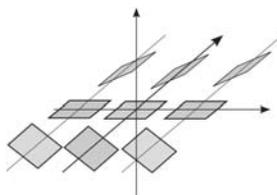


Figure 2: Nonintegrable plane field on  $\mathbb{R}^3$

Note that not every plane field is tangent to a foliation. The ones that are are called *integrable*. The others actually form a dense open subset of  $\mathcal{P}(M)$ . The topology of the closed subset  $\mathcal{F}(M)$  is therefore likely to be quite complicated. As a matter of fact, little is known about this topology, apart from the following fundamental theorem, proved first by J. Wood [Wo], and then by W. Thurston [Th2], whose original techniques underlie the work presented in these notes.

**Theorem** (Wood [Wo]). *Every plane field on a closed 3-manifold  $M$  is homotopic to an integrable plane field.*

In other words, every connected component of  $\mathcal{P}(M)$  contains at least one component of  $\mathcal{F}(M)$ : the map  $\pi_0\mathcal{F}(M) \rightarrow \pi_0\mathcal{P}(M)$  induced by the inclusion  $\mathcal{F}(M) \hookrightarrow \mathcal{P}(M)$  is surjective. It is tempting to ask whether this inclusion is actually a homotopy equivalence – or equivalently if *foliations satisfy Gromov’s  $h$ -principle* – all the more as this kind of result exists in the close field of 3-dimensional contact geometry: Y. Eliashberg [El] has generalized Thurston’s ideas [Th2] to prove a similar equivalence for overtwisted contact structures (another subspace of  $\mathcal{P}(M)$ ).

In these notes, we focus on the injectivity of the map between  $\pi_0$ ’s, though similar arguments give the surjectivity of the maps between  $\pi_k$ ’s,  $k \geq 1$  (see [Ey3]). The concrete question we have to tackle is:

*If two foliations have homotopic tangent plane fields, are they connected by a path of foliations?*

The aim of these notes is to present the strategy leading to the following partial answer:

**Theorem A.** *Let  $M$  be a closed 3-manifold. Two transversely oriented  $C^\infty$  foliations with homotopic tangent plane fields can be connected by a continuous path of  $C^1$  foliations.*

The complete proof lies in the author’s PhD dissertation [Ey1] and will be transcribed and improved in an upcoming paper [Ey3].

Let us make a few remarks about this statement. First of all, by  $\mathcal{C}^1$  foliations, we mean  $\mathcal{C}^1$  integrable plane fields, which is slightly stronger than the usual terminology but makes the notion of “continuous path” much simpler. Integrability has a meaning in any regularity class: for all  $r \geq 1$ , a  $\mathcal{C}^r$  plane field is said to be *integrable* if every point of the manifold belongs to a  $\mathcal{C}^r$  surface which is everywhere tangent to this plane field. Just like  $\mathcal{F}(M)(= \mathcal{F}^\infty(M))$ , the space  $\mathcal{F}^1(M)$  of  $\mathcal{C}^1$  foliations inherits a natural topology from the space  $\mathcal{P}^1(M)$  of  $\mathcal{C}^1$  plane fields on  $M$ .

As a matter of fact, the foliations we build are  $\mathcal{C}^\infty$  outside finitely many regions of the form  $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ , on which they are transverse to the  $[0, 1]$  factor, and they can even be made  $\mathcal{C}^\infty$  everywhere if we put some restriction on the holonomy of the initial foliations (cf. Theorem 7).

Let us note that a positive answer to the above question had already been obtained by A. Larcanché [La] in two specific cases: when  $M$  is a circle bundle and the foliations under scrutiny are transverse to the fibres, and, for a general  $M$ , when both foliations are *taut* and sufficiently close to each other (we will recall later what a taut foliation is). Her main tool plays a key role in the proof of Theorem A.

Let us finally dwell for a while on the perhaps misleading notion of “deformation” or “homotopy” of foliations. A continuous path of foliations/integrable plane fields is *not* necessarily induced by an isotopy! In particular, the topology of the leaves can change completely under such a deformation. Let us illustrate this via two crucial examples.

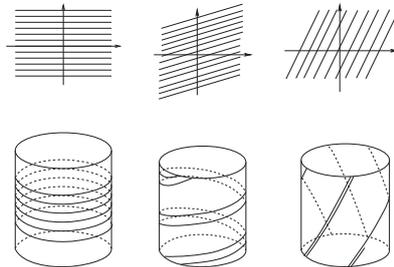


Figure 3: Linear foliations on the torus<sup>1</sup>

For the first example (cf. Fig. 3), we drop one dimension and consider codimension one foliations on the torus  $\mathbb{T}^2$ , obtained by quotienting out linear foliations of  $\mathbb{R}^2$  (that is foliations by parallel straight lines). A one parameter family of such foliations on  $\mathbb{R}^2$  (obtained by increasing the slope continuously) induces a continuous family of foliations on  $\mathbb{T}^2$ , which are clearly not pairwise isotopic: if the slope is rational, all the leaves are compact, whereas if the slope is irrational, all the leaves are dense.

The second example is the creation of a Reeb component: on the solid torus, the foliation by meridian disks can be homotoped (among foliations and relatively to the boundary) into a foliation with a Reeb component along the core and cylinder leaves accumulating on it. This homotopy can be visualized by rotating each picture of the central

<sup>1</sup>In most figures, tori are represented as cylinders for a better visibility. The top and bottom should be identified to get the real picture.

sequence of Fig. 4 around a vertical axis. This sequence represents a continuous path of dimension one foliations invariant under vertical translations, the continuous deformation of their tangent line fields being sketched above.

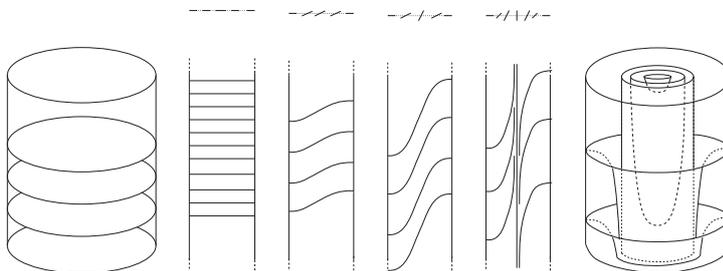


Figure 4: Adding a Reeb component

## Strategy of the proof

The main idea to prove Theorem A is to give a parametric version of the process carried out by Thurston in [Th2] to deform any given plane field into a foliation. But we must also deal with the relative aspect of the problem: the ends of the one parameter family of plane fields we want to deform must remain unchanged along the process.

Thurston’s construction, outlined in Section 1, consists of three steps: first make the initial plane field integrable outside ball-shaped holes, then enlarge the holes into solid toric ones by digging out tunnels along arcs transverse to the newly defined foliation, and finally make the plane field integrable inside the enlarged holes. Recently, A. Larcanché found a new way of carrying out the last step so that, in addition, the foliations inside the holes depend continuously on the foliations already given on their boundaries, which will be very useful for our problem. We recall her construction in Section 2. In Section 3, we start the parametric adaptation of Thurston’s construction by perturbing a given one-parameter family of plane fields into a family of foliations with holes. This step relies on works by Eliashberg in 3-dimensional contact geometry. In Section 4, we complete the proof of Theorem A in a specific case: when the initial foliations (the ends of the initial one-parameter family) have “sufficiently many” transversals. Eventually, in Section 5, we explain how to reduce to this specific case. Basically, the idea is: given any foliation, eliminate as many torus leaves as possible by a homotopy of foliations, and in particular get rid of those which do not bound solid tori. In Sections 1 to 4, all plane fields and foliations are  $C^\infty$ . The regularity loss occurs in Section 5, while trying to eliminate torus leaves.

## 1 Thurston’s process

Let  $M$  be a closed 3-manifold. In this section, we recall how Thurston deforms a given plane field  $\xi$  on  $M$  into a foliation.

*Step 1.* First, he constructs a triangulation “in good position” with respect to  $\xi$ , and makes  $\xi$  integrable in a neighbourhood  $V$  of its 2-skeleton. More precisely, he requires all faces and edges to be transverse to  $\xi$ , and the direction of  $\xi$  to be almost constant

on each 3-simplex. Then he makes  $\xi$  integrable in a neighbourhood of every vertex, then every edge, and finally every face (cf. Fig. 5). The key point is that, in a neighbourhood of every simplex  $\sigma$  of the 2-skeleton, there exists a nonsingular vector field  $\nu$  tangent to  $\xi$  and transverse to  $\sigma$ . The deformation consists in making  $\xi$  invariant under  $\nu$  in a neighbourhood of  $\sigma$ . Since  $\xi$  is already integrable near  $\partial\sigma$ , it is already invariant under  $\nu$  there and thus remains unchanged. This guarantees the global coherence of these local perturbations. The neighbourhood  $V$  of the 2-skeleton can be chosen so that, at the end of this step, every component of  $\partial V$  is a sphere  $S$  enclosed in a 3-simplex on which  $\xi$  is almost horizontal, meaning that the foliation traced by  $\xi$  on  $S$  has only two singularities, the *poles*, which are connected (on  $S$ ) by a vector field transverse to  $\xi$  (see Fig. 5).

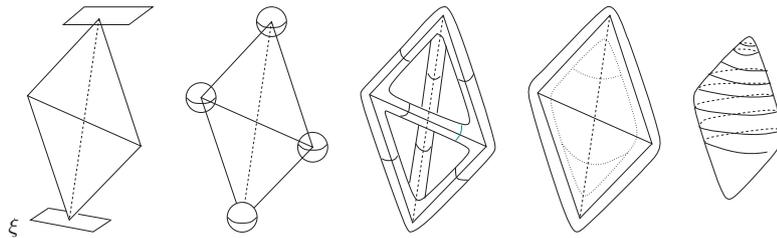


Figure 5: Making  $\xi$  integrable near the 2-skeleton

*Step 2.* At that stage, we have a “foliation with holes” (the new  $\xi|_V$ ), and we want to extend it to all of  $M$ . However, because of the Reeb Stability Theorem [Re], this is only possible if  $\xi|_S$  is a foliation by circles away from the poles for every component  $S$  of  $\partial V$ . So the newly built foliation  $\xi|_V$  needs to be modified in some places (outside the holes). A nice situation, Thurston observes, is when, for every  $S$ , there exists a properly imbedded arc  $A \subset V$  transverse to  $\xi|_V$  joining the poles of  $S$ . In that case, the union of the ball bounded by  $S$  and a tube around  $A$  foliated by disks forms a solid torus  $W \simeq \mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  on the boundary of which  $\xi$  induces a foliation transverse to  $\mathbb{S}^1$ . Now Thurston shows that such a foliation is always the trace of a foliation of the solid torus (homotopic to  $\xi$  rel. boundary), using the simplicity of the group  $\mathcal{D}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ , proved by M. Herman and J. Mather. A different argument, due to A. Larcanché and outlined in Section 2, provides an extension which, in addition, depends continuously on the foliation given on the boundary.

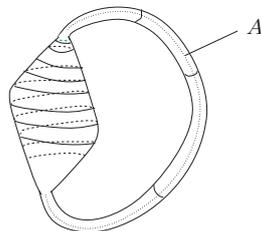


Figure 6: Enlarging the holes

*Step 3.* The required transverse arcs  $A$  do not always exist. A classical sufficient condition for them to exist is that  $\xi|_V$  has no compact leaf. Thurston artfully reduces to this situation by digging a number of new ball-shaped holes in  $V$  and breaking the integrability

on these balls. More precisely, assume that the grey surface on Fig. 7 is a small piece of compact leaf and that the foliation is horizontal in the neighbourhood represented on the picture. Then consider two little balls centered on this leaf and linked by a “cubic tunnel”. Perturb the foliation continuously inside the cube like the picture suggests. Because of the Reeb stability theorem again, this does not extend into a homotopy of foliations inside the balls, but it can be extended into a homotopy of plane fields. Now (what remains of) the grey leaf is not compact anymore since its boundary spirals around the balls and eventually accumulates on circles. Repeating this trick as many times as necessary (finitely many times since the manifold is compact), Thurston gets rid of all compact leaves.

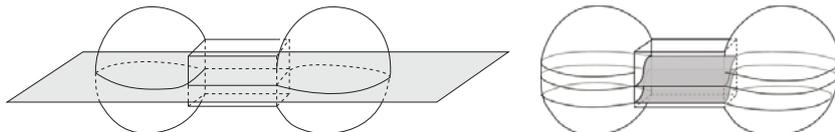


Figure 7: Killing all compact leaves

## 2 The key construction of Larcanché

As we said before, A. Larcanché [La] invented a *continuous* process to extend to  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  any foliation of  $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  transverse to  $\mathbb{S}^1$ .

To clarify this statement and give an idea of her construction, we first need to define the *holonomy* of a foliation  $\varphi$  of  $\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  transverse to  $\mathbb{S}^1$ . The transversality condition implies that, for every  $x$  in  $\mathbb{S}^1$ , the leaf through  $(1, x) \in \partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  goes all the way around the solid torus, alternately intersecting every fiber  $\{e^{2\pi it}\} \times \mathbb{S}^1$ ,  $t \in [0, 1]$ , at a point  $(e^{2\pi it}, f_t(x))$ . This defines a one-parameter family  $(f_t)_{t \in [0, 1]}$  of smooth orientation-preserving diffeomorphisms of the circle, which has a unique lift  $(\tilde{f}_t)_{t \in [0, 1]}$  in  $\widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$  – the group of orientation-preserving diffeomorphisms of  $\mathbb{R}$  commuting to the unit translation – satisfying  $\tilde{f}_0 = \text{id}_{\mathbb{R}}$ . What we call *holonomy* of the foliation  $\varphi$ , and denote by  $hol(\varphi)$ , is the diffeomorphism  $\tilde{f}_1$ .

If  $\mathcal{F}(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1)$  denotes the set of foliations on  $\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1$  transverse to the boundary (and homotopic rel. boundary to a plane field transverse to the  $\mathbb{S}^1$  factor), Larcanché’s key result can be stated as follows:

**Theorem** (Larcanché [La]). *There exists a continuous map*

$$\ell: \begin{cases} \widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathcal{F}(\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1) \\ f \mapsto \ell_f \end{cases}$$

satisfying  $hol(\ell_f |_{\partial\mathbb{D}^2 \times \mathbb{S}^1}) = f$ .

Her proof relies on two important facts. First, when the foliation on the boundary is linear – in which case the holonomy is a translation  $T_\lambda: x \mapsto x + \lambda$  – there is a classical way of extending it: put a Reeb component along the core of the solid torus, and wrap the external leaves around it as shown on Fig. 8 (explicit formulas can be written). We will call the resulting foliation a *Reeb filling of  $T_\lambda$* , or *of slope  $\lambda$* . This also works when the holonomy is conjugate to a translation, but not in the general case.

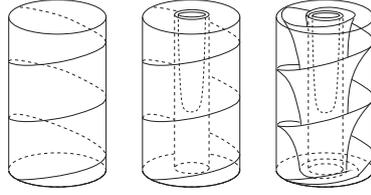


Figure 8: Reeb filling of a linear foliation

To deal with the general case, Larcanché’s idea is to combine the above with a decomposition theorem of Herman:

**Theorem** (Herman [He], p.123). *Let  $\mu = (1 + \sqrt{5})/2$  denote the Golden Number<sup>2</sup>. There is a continuous map*

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1) \rightarrow \mathbb{R} \times \widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1) \\ f \mapsto (\lambda_f, g_f) \end{cases}$$

such that  $f = T_{\lambda_f} \circ (g_f^{-1} \circ T_\mu \circ g_f)$  for all  $f \in \widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$ , and  $(\lambda_{\text{id}}, g_{\text{id}}) = (-\mu, \text{id})$ .

Now take any holonomy  $f$ . Roughly speaking, the foliation  $\ell_f$  is obtained by taking the Reeb fillings of  $T_{\lambda_f}$  and  $g_f^{-1} \circ T_\mu \circ g_f$ , gluing them together as Fig. 9 suggests, and inflating the result a little (to remove the angles). The holonomy on the boundary of the resulting bigger solid torus is exactly the composition of the holonomies on the smaller tori, *i.e.* precisely  $f$ , and this construction depends continuously on  $f$  since the decomposition of  $f$  does.

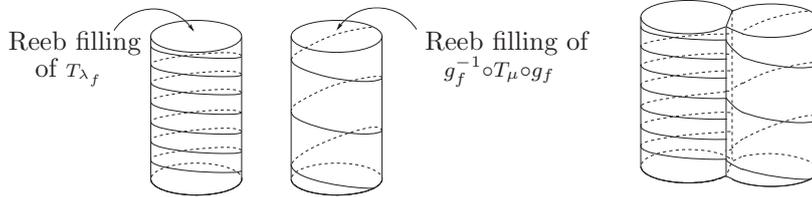
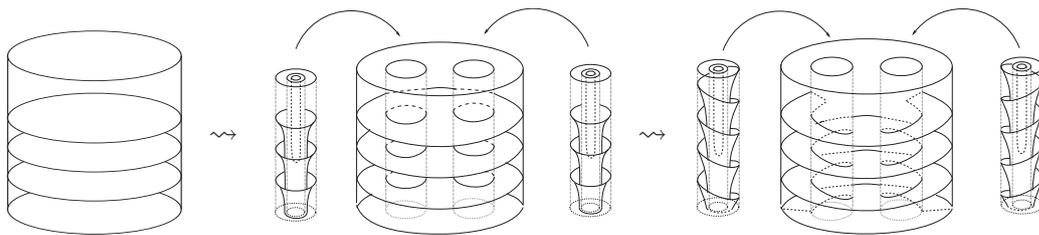


Figure 9: Larcanché filling

Note that when  $f$  is the identity, Larcanché’s extension is far from being the most natural one (*i.e.* a foliation by disks), since it consists of two Reeb fillings (of slope  $\mu$  and  $-\mu$  respectively) glued together. The “inflated” picture is depicted on Fig. 10.

It is crucial, however, to realize that  $\ell_{\text{id}}$  and the foliation by meridian disks are homotopic *among foliations*. Indeed, let us start with the foliation by meridian disks. By a homotopy of foliations (*cf.* Introduction), we can create two Reeb components (or, in other words, two Reeb fillings of slope 0) in two smaller solid tori within the big one. In these small tori, we simply increase the slopes of the Reeb fillings continuously, from 0 to  $\pm\mu$  respectively. Using some basic knowledge of *suspension foliations* on “Pair of pants”  $\times \mathbb{S}^1$  (that is foliations transverse to the  $\mathbb{S}^1$  factor), we extend this deformation to the complement without affecting the trivial foliation on the boundary of the big torus.

<sup>2</sup>actually any diophantine number would do according to [Yo]

Figure 10: From the trivial foliation to  $\ell_{id}$ 

### 3 Making foliations with holes

We are now ready to try and adapt Thurston's construction to the one-parameter situation. We start with a family  $\xi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , of plane fields on  $M$ , with  $\xi_0$  and  $\xi_1$  already integrable, and we want to make all the  $\xi_t$ 's integrable. Like Thurston, we first want to construct a nice triangulation and make all plane fields integrable near its 2-skeleton. However, we have *a priori* no chance of finding a triangulation whose edges and faces are transverse to *every*  $\xi_t$ , the direction of the latter varying with the parameter in an uncontrollable way. Still, we can find a triangulation such that the direction of each  $\xi_t$  is almost constant on every 3-simplex; but we will have to deal with the situation in which, for some parameter  $t$  and some point  $x$  of the 2-skeleton, the plane  $\xi_t(x)$  is tangent to the face or edge through  $x$ .

Fortunately, this problem has been studied by Eliashberg [El] in the case of contact structures, and his arguments work the same for foliations (see [Ey1] for the adaptation). As in Thurston's construction, the idea is to find near each simplex a continuous family  $\nu_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , of nonsingular vector fields tangent to their respective  $\xi_t$ , and to make  $\xi_t$  invariant under  $\nu_t$ . But this time,  $\nu_t$  will not necessarily be transverse to the simplex, and to ensure the coherence of the local deformations, we will have to start with the "problematic" simplices. Eliashberg also deals with the perhaps bigger issue of ensuring the almost horizontality of the resulting plane fields on the boundary spheres of the newly foliated area  $V$ . This requires a careful control of the amplitude of the deformations *and* of the size of the neighbourhood of the 2-skeleton on which the plane fields are made integrable.

Note that this process leaves  $\xi_0$  and  $\xi_1$  unchanged, since they were integrable from the beginning.

### 4 Enlarging and filling the holes in the taut case

We are now dealing with a (new) family  $\xi_t$ ,  $t \in [0, 1]$ , of plane fields which are integrable outside a number of ball-shaped holes on the boundary of which they are almost horizontal, and we want to make them integrable everywhere on  $M$ . Note that the poles of the boundary spheres vary continuously with the parameter  $t$ . Let  $V$  denote the complement of the holes. As in [Th2], a very nice situation is when one can find, for every sphere  $S$  of  $\partial V$  and every  $t \in [0, 1]$ , an arc  $A_t$  in  $V$  transverse to  $\xi_t|_V$  connecting the poles of  $S$  and depending continuously on  $t$ . In that case, Larcanché's construction (cf. Section 2) is the perfect tool to fill the time-dependent toric holes obtained by the union of a

ball-shaped one with a moving tubular neighbourhood of a moving transversal. Note that even in this ideal case, we are not quite done yet, because this last manipulation affects  $\xi_0$  and  $\xi_1$ , which were supposed to remain unchanged. Indeed, the new  $\xi_0$  and  $\xi_1$  differ from the initial ones by a number of Larcanché  $\ell_{\text{id}}$  foliations inserted in solid tori (toric holes) which initially contained simple foliations by meridian disks. But this is not a real problem according to the last remark of Section 2.

However, two real problems can prevent the situation from being ideal:

- though we can apply a parametric version of Thurston’s trick (cf. Section 1) to the family  $(\xi_t)_{t \in (0,1)}$  to ensure the existence of transverse arcs  $A_t$  for all  $t \in (0,1)$ , the ends  $\xi_0$  and  $\xi_1$  must remain unchanged (and one can easily come up with examples of  $\xi_0$  and  $\xi_1$  which do not have “enough” transversals);
- even when it is possible to find  $A_t$ ’s for all  $t \in [0,1]$ , it is in general impossible to make them depend continuously on  $t$ .

Let us forget about the first problem for a while by assuming that  $\xi_0$  and  $\xi_1$  are *taut* foliations, that is foliations for which each transverse arc can be extended into a closed transversal (note that not every manifold admits such a foliation, so this temporary hypothesis is a very restrictive one).

Now, for all  $t$  in  $[0,1]$  and all  $S$  in  $\partial V$ , there is an arc  $A_t$  in  $V$  transverse to  $\xi_t|_V$  connecting the poles of  $S$ . For  $s$  close enough to  $t$ ,  $A_t$  is still transverse to  $\xi_s$ , so one can actually make the family  $A_t$  piecewise continuous. In other words, for some values of the parameter  $t$ , we have two transverse arcs  $A_-$  and  $A_+$  joining the poles of some  $S \subset \partial V$ , which means two ways of digging out a tunnel in which to replace  $\xi := \xi_t$  by a Larcanché foliation. So what we need to check is:

**Lemma 1** (Communicating Vessels Lemma). *The two foliations built from  $\xi$  by Larcanché’s construction using the arcs  $A_-$  and  $A_+$  respectively are homotopic among foliations.*

To see this, let us define two foliations  $\xi_-$  and  $\xi_+$  which are not exactly the foliations mentioned above but isotopic ones. First, we perturb  $A_+$  and  $A_-$  near both ends to make them disjoint (see Fig. 11). Then, we cut the ball  $B$  bounded by  $S$  along a disk  $D$  through the poles and, to each half-ball  $B_{\pm}$ , we add a small tubular neighbourhood of  $A_{\pm}$  so as to obtain two (slightly angular) solid tori  $W_+$  and  $W_-$  intersecting along  $D$ . Outside  $B$ , both solid tori are foliated by disks.

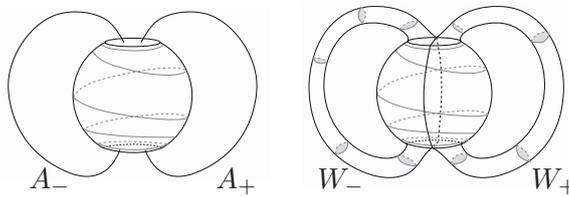


Figure 11:  $A_{\pm}$  and  $W_{\pm}$

The foliation  $\xi_{\pm}$  is obtained by filling  $W_{\mp}$  with a trivial foliation by meridian disks, which traces a new foliation on  $D$ , and then putting a “Larcanché foliation” in  $W_{\pm}$  –

the “only one” inducing the new foliation traced on  $\partial W_{\pm}$ . The key observation is that the holonomies of  $\xi_+ |_{\partial W_+}$  and  $\xi_- |_{\partial W_-}$  are the same. This diffeomorphism  $f$  essentially describes the holonomy of  $\xi$  around the ball.

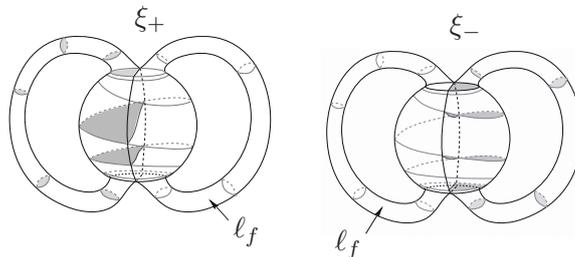


Figure 12:  $\xi_+$  and  $\xi_-$

Now to homotope  $\xi_+$  into  $\xi_-$ , we start with  $\xi_+$ , we perturb the trivial foliation on  $W_-$  into  $\ell_{\text{id}}$ , then we perturb the foliation on  $D$  so that the resulting holonomy on  $\partial W_+$  (resp.  $\partial W_-$ ) varies from  $f$  to  $\text{id}$  (resp.  $\text{id}$  to  $f$ ) and we extend this perturbation to  $W_{\pm}$  (rel. their complement) by continuous paths of Larcanché foliations. At the end,  $W_+$  is foliated by  $\ell_{\text{id}}$ . To get  $\xi_-$ , we only need to homotope  $\ell_{\text{id}}$  back into a foliation by meridian disks (cf. Section 2).

At this point, we have:

**Theorem 2.** *Two  $C^\infty$  taut foliations homotopic among plane fields can be connected by a path of  $C^\infty$  foliations.*

Actually, little extra work is needed to generalize this to a larger class of foliations, namely the kind we just used to build the path, which will be called *malleable* in these notes. A smooth foliation is *malleable* if it is taut outside finitely many solid tori on which it is of the form  $\ell_f$ , for an  $f$  having a whole interval of fixed points.

**Theorem 3.** *Two malleable foliations homotopic among plane fields can be connected by a path of  $C^\infty$  foliations.*

## 5 General case

To obtain the full force of Theorem A, the last thing to prove is that any  $C^\infty$  foliation can be deformed into a malleable one by a homotopy of foliations. This is where the loss of regularity occurs.

**Theorem 4.** *Any  $C^\infty$  foliation can be connected to a malleable one by a continuous path of  $C^1$  foliations.*

The general idea is to try and make the given foliation “as taut as possible”, by a homotopy of foliations. To that end, note that a foliation on some region is taut if and only if every leaf meets a closed transversal in this region. So basically, we want to alter the given foliation so that in the end, as many leaves as possible meet closed transversals. Now according to works by Novikov [No] and Goodman [Go], only torus leaves do not necessarily satisfy this condition. So our first task is to get rid of as many torus leaves as

possible (we call this *cleaning*, cf. 5.1). Then (cf. 5.2), we will have to see to it that the remaining “problematic” ones all lie in “Larcanché foliated” solid tori (in particular, we will need to get rid of the incompressible ones).

## 5.1 Cleaning

We start with any foliation and we want to reduce to a finite number of torus leaves by a homotopy of foliations. To do so, we first note (thanks to Novikov [No] and Thurston [Th1]) that the problematic torus leaves always arise in “bundles”: there are finitely many disjoint saturated sets of the form  $\mathbb{T}^2 \times J$ , where  $J$  is a segment, on which the foliation is transverse to  $J$  and outside which every leaf is cut by a closed transversal. The idea then is to shrink these foliated bundles into isolated compact leaves. By holonomy, this is in fact equivalent to proving that the space of representations (homomorphisms) of  $\mathbb{Z}^2 = \pi_1(\mathbb{T}^2)$  in  $\mathcal{D}_+^\infty[0, 1]$  is connected. This is a difficult problem, but the following result, based on classical works by Szekeres [Sz] and Kopell [Ko] on commuting interval diffeomorphisms, at least allows us to shrink the bundles via a homotopy of  $\mathcal{C}^1$  foliations.

**Theorem 5** ([Ey2]). *Every representation of  $\mathbb{Z}^2$  in  $\mathcal{D}_+^\infty[0, 1]$  can be linked to the trivial representation through a continuous path of representations of  $\mathbb{Z}^2$  in  $\mathcal{D}_+^1[0, 1]$ .*

With similar arguments (related to commuting germs of interval diffeomorphisms), we can actually reduce to foliations whose torus leaves all have a neighbourhood parametrized by  $\mathbb{T}^2 \times ]-\varepsilon, \varepsilon[$  where the foliation has an equation of the form:

$$dz - u(z)(a^+ dx_1 + b^+ dx_2) \quad \text{on} \quad \mathbb{T}^2 \times [0, \varepsilon[$$

and

$$dz - u(z)(a^- dx_1 + b^- dx_2) \quad \text{on} \quad \mathbb{T}^2 \times ]-\varepsilon, 0]$$

with  $(a^\pm, b^\pm) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  and  $u$  a smooth function vanishing only at 0 (see Fig. 13). We call them *clean* foliations. In the next step, we use the flexibility of this simple model to “kill” the problematic torus leaves of clean foliations, or, more precisely, to replace them by compressible ones enclosed in Reeb fillings.

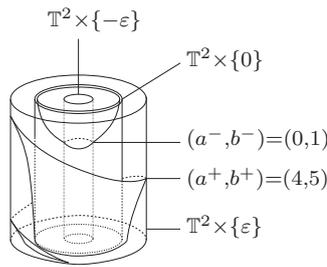


Figure 13: Model foliation near a torus leaf

## 5.2 Killing incompressible torus leaves

There is a nice case in which getting rid of the torus leaf  $\mathbb{T}^2 \times \{0\} =: T_0$  in the above model is easy: when  $(a^+, b^+) = (a^-, b^-)$  and  $u$  has a constant sign outside 0. In that case, we only need to perturb  $u$  locally around 0 into a nonvanishing function.

Now let us deal with the general case, represented on Fig. 13. In order to reduce to the previous case, we want to deform the foliation on one side of the compact leaf to make its slope match the slope on the other side. But this deformation has to be local – say between the compact leaf  $T_0$  and some slightly larger parallel torus  $T$  – because the foliation near the outermost tori  $T_\varepsilon$  and  $T_{-\varepsilon}$  must remain unchanged.

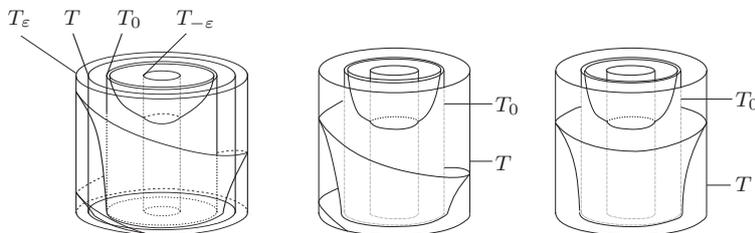


Figure 14: Desired deformation between  $T$  and the compact leaf  $T_0$

But this will trace on  $T$  a path of linear foliations of slope varying continuously from  $\lambda \neq 0$  to 0, which must then be extended between  $T$  and  $T_\varepsilon$  rel.  $T_\varepsilon$ . To make this possible, we first need to add a Reeb component in this external region, along a “vertical” transverse circle (see Fig. 15). We denote by  $T'$  the boundary torus of the affected region.  $T$ ,  $T_\varepsilon$  and  $T'$  bound a region of the form “*Pair of pants*”  $\times \mathbb{S}^1$ . In this region, it is easy (again using some basic knowledge on suspension foliations) to define a path of foliations which is invariant on  $T_\varepsilon$  and varies from the linear foliation of slope 0 (resp.  $\lambda$ ) to the one of slope  $\lambda$  (resp. 0) on  $T'$  (resp.  $T$ ) (cf. Fig. 15). We extend this by Reeb fillings on the solid torus bounded by  $T'$  and by the desired path of spiralling foliations between  $T$  and the compact leaf  $T_0$  (cf. Fig. 14), and we are done.

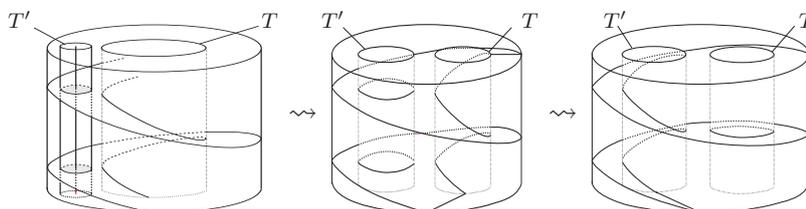


Figure 15: Deformation between  $T_\varepsilon$  and  $T$

### 5.3 Holonomy fragmentation

After the above step, we end up with a foliation which is taut outside finitely many solid tori foliated by Reeb fillings. The last thing to do is to replace each Reeb filling of slope  $\lambda$  by a collection of Larcanché foliations whose holonomies on the boundary have intervals of fixed points and have  $T_\lambda$  for product. To that end, we first homotope the Reeb filling into the Larcanché foliation  $\ell_{T_\lambda}$  (adapting the last remark of Section 2). Then we conclude with a combination of Larcanché’s theorem, the following (elementary) fragmentation lemma and, once again, the flexibility of suspension foliations on “*Punctured disk*”  $\times \mathbb{S}^1$ .

**Lemma 6.** *Every element of  $\widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$  a (finite) composition of elements of  $\widetilde{\mathcal{D}}_+^\infty(\mathbb{S}^1)$  which all have an interval of fixed points.*

Note that 5.2 and 5.3, together with Theorem 3, yield the following intermediate result:

**Theorem 7.** *Two clean foliations homotopic among plane fields can be connected by a continuous path of clean foliations.*

## Conclusion

The surjectivity of the map  $\pi_1\mathcal{F}(M) \rightarrow \pi_1\mathcal{P}(M)$  induced by the inclusion is actually much easier to prove than the injectivity of the map between  $\pi_0$ 's, since one avoids the relative aspect of the problem. All the necessary tools lie in Sections 3 and 4. As a matter of fact, most techniques described in these sections adapt to any number of parameters, yielding the surjectivity of the maps between  $\pi_k$ 's for all  $k \geq 1$  (see [Ey3]). Injectivity, on the other hand, requires, among other things, a better understanding of the topology of the space of  $\mathcal{C}^\infty$  orientation-preserving actions of  $\mathbb{Z}^2$  on  $[0, 1]$ , of which little is known.

**Acknowledgements.** I am deeply grateful to my advisor, Emmanuel Giroux, for trusting me with such a beautiful problem, and for his amazing guidance and support through all the stages of this work. I also wish to thank Pr. Tsuboi who gave me the opportunity to come back to Japan, after a decisive first stay, to present and pursue my research on the subject (with the financial support of the Japanese Society for the Promotion of Science).

## References

- [El] Y. ELIASHBERG — *Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds*. Invent. Math. **98** (1989), 623–637.
- [Ey1] H. EYNARD — *Sur deux questions connexes de connexité concernant les feuilletages et leurs holonomies*. Ph. D. dissertation (ENS-Lyon), available at <http://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00436304/fr/>.
- [Ey2] H. EYNARD — *A connectedness result for commuting diffeomorphisms of the interval*. Ergod. Th. & Dynam. Sys. (First published online 2010).
- [Ey3] H. EYNARD — *On the homotopy type of the space of codimension one foliations on a closed 3-manifold*. In preparation.
- [Go] S. GOODMAN — *Closed leaves in foliations of codimension one*. Comment. Math. Helvetici **50** (1975), 383–388.
- [He] M. R. HERMAN — *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **49** (1979), 5–233.
- [Ko] N. KOPELL — *Commuting diffeomorphisms*. In *Global Analysis*, Proc. Sympos. Pure Math. XIV, Amer. Math. Soc. (1968), 165–184.
- [La] A. LARCANCHÉ — *Topologie locale des espaces de feuilletages en surfaces des variétés fermées de dimension 3*. Comment. Math. Helvetici **82** (2007), 385–411.

- [Li] W. B. R. LICKORISH — *A foliation dor 3-manifolds*. Ann. of Math., **82** (1965), 414–420.
- [No] S. P. NOVIKOV — *Topology of foliations*. Trans. Moscow Math. Soc. **14** (1965), 248–278 (Russian), A.M.S Translation (1967), 268–304.
- [Re] G. REEB — *Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées*. Actual. Sci. Ind. **1183**, Hermann, Paris (1977).
- [Sz] G. SZEKERES — *Regular iteration of real and complex functions*. Acta Math. **100** (1958), 203–258.
- [Th1] W. P. THURSTON — *Foliations of Three-Manifolds Which are Circle Bundles*. Ph. D. Dissertation, University of California, Berkeley (1967).
- [Th2] W. P. THURSTON — *A local construction of foliations for three-manifolds*. Differential topology (Proc. Sympos. Pure Math. **27**, Stanford Univ., California, 1973), Amer. Math. Soc. (1975), 315–319.
- [Wo] J. WOOD — *Foliations on 3-manifolds*. Ann. of Math. **89** (1969), 336–358.
- [Yo] J-C. YOCCOZ — *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne*. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **17** (1984), 333–359.

# Reeb foliations and contact structures on $S^5$

森 淳秀 Atsuhide MORI (Osaka Univ.)

## 1. Results (English summary)

This work is the sequel of the following result.

**Theorem 1** ([M'02]). *Any (co-oriented) contact structure  $\mathcal{D}$  on  $M^3$  is linearly deformable to a spinnable foliation  $\mathcal{F}$ , i.e., there exist a contact form  $\alpha$  of  $\mathcal{D}$  and a 1-form  $\beta$  of  $\mathcal{F}$  such that  $(1-t)\alpha + t\beta$  is a contact form for any  $t \in [0, 1)$ .*

Here a spinnable foliation is a foliation associated to an open-book decomposition by inserting a Reeb component along the binding and coiling pages to it. The proof requires the Giroux correspondance between contact structures and open-book decompositions. Note that any family  $\{\mathcal{D}_t\}$  of contact structures on a closed manifold  $M^{2n+1}$  can be traced by a family of diffeomorphisms  $\Phi_t$  of  $M^{2n+1}$  so that  $\Phi_0 = \text{Id}$  and  $\Phi_{t*}(\mathcal{D}_0) = \mathcal{D}_t$ . Surprisingly certain higher dimensional contact structures are also deformable into spinnable foliations. For example,

**Theorem 2** ([M'09]). *The standard contact structure on  $S^5(\subset \mathbb{C}^3)$  is smoothly deformable to a spinnable foliation  $\mathcal{F}$ , i.e., there exists a smooth arc connecting the standard contact form via contact forms to a 1-form of  $\mathcal{F}$ .*

For codimension 1 foliations on  $M^3$  without Reeb components, Thurston proved the TB inequality  $-\langle e(\mathcal{D}|_\Sigma), [\Sigma, \partial\Sigma] \rangle \leq -\chi(\Sigma)$  for any Seifert surface  $\Sigma$  whose boundary  $\partial\Sigma$  is positively transverse to  $\mathcal{D} = T\mathcal{F}$ , where  $e(\cdot)$  denotes the relative Euler class. Bennequin proved the same inequality for the Reeb foliation and for the standard contact structure on  $S^3$ . ('TB' abbreviates Thurston-Bennequin.) Applying Giroux's convex surface theory, Eliashberg proved that a contact structure on  $M^3$  is tight iff the TB inequality holds for any  $\Sigma$ . Refining Giroux's convex hypersurface theory, we define the tightness for contact structures on  $M^{2n+1}$ .

**Definition 3.** (1) A closed oriented hypersurface  $\Sigma$  on a contact manifold is said to be convex if there exists a contact vector field  $X$  positively transverse to  $\Sigma$ .

(2) Let  $+\Sigma_+$  (resp.  $-\Sigma_-$ )  $\subset \Sigma$  denote the region where the contact vector field  $X$  is positively (resp. negatively) transverse to the contact structure. Generically, the dividing set  $\Gamma = \{\alpha(X) = 0\} = +\partial\Sigma_\pm$  is a contact submanifold.

(3) We say that a compact oriented hypersurface  $\Sigma$  with boundary is convex if it admits a positively transverse contact vector field  $X$  such that the contact submanifold  $\Gamma = \{\alpha(X) = 0\}$  contains  $+\partial\Sigma$  as a positive contact submanifold.

(4) For a connected convex hypersurface  $\Sigma$  with  $\partial\Sigma \neq \emptyset$ , we define the convex TB inequality as  $\chi(\Sigma_-) \leq 0$ . We say that a contact structure is (cTB-)tight if any convex hypersurface  $\Sigma$  with  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  satisfies the inequality.

**Theorem 4** ([M'09]). *There exists an exotic contact structure on  $S^5$  which is not tight. This contact structure is also deformable to a foliation.*

**Conjecture 5** ([M'09]). For the standard contact structure  $\mathcal{D}$  on  $S^{2n+1}$  ( $n > 1$ ),  $\partial\Sigma$  would be either connected or empty. Particularly  $\mathcal{D}$  would be tight.

This conjecture can be considered as a variation of the following Calabi's question.

**Calabi's question.** *Is there any compact exact symplectic manifold of dimension greater than two with disconnected contact-type boundary?*

This question was affirmatively answered by McDuff, Ghys, Mitsumatsu and Geiges. I used their examples to generalize the propeller construction.

**Proposition 6** (see [M'09]). (1) *The contact structure  $\ker(\sin xdy + \cos xdz)$  on  $\mathbb{R} \times T^2 \ni (x, y, z)$  is called the propeller. Suppose that a closed oriented 3-manifold  $M^3$  admits integrable 1-forms  $\xi$  and  $\eta$  which satisfy  $\xi \wedge d\eta = \eta \wedge d\xi > 0$ . Then the symplectic manifold  $([-1, 1] \times M^3, d(\xi + t\eta))$  has disconnected contact-type boundary. The product  $\mathbb{R} \times M^3 \times S^1 \ni (x, p, z)$  with the contact structure  $\ker(\xi + \sin x\eta + \cos xdz)$  is called the five dimensional propeller. Then the hypersurface  $\Sigma_n = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, z = \text{const} \right\}$  is convex with respect to  $\partial/\partial z$ .*

(3) *A Giroux-Lutz twist is roughly the insertion of the domain  $\Sigma_1 \times S^1$  of the propeller to a given contact 5-manifold after removing  $\Sigma_0 \times S^1$ . Precisely, we can use a neighbourhood of a hypersurface  $S$  in  $N^5$  which is contactomorphic to a neighbourhood of  $\{x = \text{const}\}$  in the propeller. If the binding of a supporting open-book decomposition is contactomorphic to the above  $(M^3, \xi + \eta)$ , we can take  $S$  as the boundary of the tubular neighbourhood of the binding. In this particular case, we can take back the "half" of the twist by blowing-down a smaller tubular neighbourhood of the binding. This is a generalization of a half Lutz twist.*

The following result relates to Sol-geometry and a spinnable foliation.

**Theorem 7** ([M'09]). *There exist a Sol-manifold  $M^3 \subset S^5$  which is a link of singularity. Since  $M^3$  admits an algebraic Anosov flow, we can perform a half Lutz twist along the binding  $M^3$  of the Milnor fibration. Then we obtain a non-tight exotic contact structure on  $S^5$ . The  $T^2$ -bundle of  $M^3$  defines a spinnable foliation on  $S^5$  to which the standard contact structure is smoothly deformable. Moreover the above exotic contact structure is also smoothly deformable to a foliation.*

## 2. 接触構造に“似ている”葉層

奇数次元有向多様体  $M^{2n+1}$  上の接触形式  $\alpha$  とは  $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$  を満たす 1-形式である. 有向接分布  $\mathcal{D} = \ker \alpha$  は接触構造と呼ばれる. また非特異 1-形式  $\beta$  が余次元 1 葉層  $\mathcal{F}$  を定める条件は  $\beta \wedge d\beta = 0$  である.  $n = 1$  の場合に接触構造が葉層に似ているというのは単に  $|\alpha| = 1, \alpha \wedge d\alpha \ll \text{dvol}$  で良いが, これは  $n > 1$  では駄目なので, confoliation 理論が 3 次元でのみ上手くいくとしても不思議ではない. しかし  $n$  変数関数の 1-jet 空間  $\mathbb{R}^{2n+1}(x_1, y_1, \dots, x_n, y_n, y)$  ( $y_i = \partial y / \partial x_i$ ) に全微分の公式  $dy - \sum_i y_i dx_i = 0$  が定める標準接触構造を考えると, 余次元 1 葉層が 1 階 PDE 系によって表わされるとすれば, それは高々  $n + 1$  次元の葉層部分多様体  $N \subset \mathbb{R}^{2n+1}$  上の葉層である. もしも  $N$  を滑らかに近似する接触部分多様体  $N'$  があれば,  $N$  の葉層は  $N'$  の接触構造に似ているだろう.

しかし本来, 接触構造は葉層よりもずっと symplectic 構造に似たものである.  $2n$  次元多様体  $\Sigma$  に exact symplectic 構造  $(d\lambda, \lambda)$  が与えられると,  $\Sigma \times \mathbb{R}(z)$  に接触構造  $\ker(\lambda + dz)$  が定まる. 例えば  $\mathbb{R}^{2n+1}$  上の標準接触構造がそれである. 他方  $\Sigma$  には  $\iota_Y d\lambda = \lambda$  を満たす拡大ベクトル場  $Y$  があり,  $Y$  を積分して得られる 1 次元葉層には  $\ker \lambda$  がホロノミー不変な横断的接触構造を定める. とくに  $Y$  の断面に  $\lambda$  を制限すれば接触形式である. 一般にコンパクト symplectic 多様体  $V$  が境界の近くに境界を外向きに横断する拡大ベクトル場  $Y$  を持つ場合,  $\partial V$  は  $Y$  の断面としての接触構造を持ち,  $V$  の**接触型境界**と呼ばれる. また  $V$  を  $\partial V$  の **strong symplectic filling** という. 例えば単位超球面  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  は球体の接触型境界としての**標準接触構造**を持ち,  $\mathbb{R}^{2n+1}$  上の標準接触構造の 1 点コンパクト化になっている. このように接触多様体は symplectic 多様体  $\Sigma$  の奇数次元版といえるものであり, その境界  $\partial\Sigma$  や柱  $\Sigma \times \mathbb{R}$  として現れる. Darboux の定理にも接触版があり,  $2n + 1$  次元の接触多様体の任意の開部分集合は標準接触構造を持つ  $\mathbb{R}^{2n+1}$  のいくらでも大きな球体を含む. こうした基本事項に限らず, 近年の結果についても, 接触構造と symplectic 構造の類比は実り多い.

実際 [Ibort-Martinez-Présas'00] は Donaldson-Auroux の漸近的正則性の理論が symplectic 多様体だけでなく接触多様体に対しても適用できることを示した. [Giroux-Morsen'02] はこれを exact symplectic open-book 分解の存在として解釈し, 高次元接触トポロジーの新局面を開拓した. exact symplectic open-book 分解とは, ページ束が exact symplectic であり, 綴じがページの接触型境界になるものである. Thurston-Winkelnkemper は 70 年代にこうした open-book 分解のページ束の構造が多様体上のある接触形式の制限の外微分であることを示した. このとき接触構造はイソトピーを法として一意に定まる. Giroux-Morsen は逆に任意の接触構造がある open-book 分解から定まることを示したわけである.

さて葉層との類比については, 3 次元多様体の open-book 分解に付随する**回転**

**可能葉層**という葉層がある（綴じの近傍が Reeb 成分になり，外からページがよい向きに巻きついて葉となる）．私の Theorem 1 は open-book 分解から定まる接触構造が，付随する回転可能葉層に線形に変形可能であるといっている．証明は実際に変形族を構成することによる．更に次が成り立つ．

**Theorem 8** ([M'02]+[三松-M'06]).  $M^3$  上のタイト接触構造の変形の極限となる回転可能葉層は Reeb 成分を持ちつつも TB 不等式を満たす．逆に TB 不等式を満たす回転可能葉層の open-book 分解から定まる接触構造はタイトである．

前半は自明である．後半は非自明だが Bennequin が標準接触構造に対して TB 不等式を示したのとほとんど同じ方法で示される． $2n+1$  次元の場合にも，open-book 分解の綴じが非特異 1-形式  $\nu$  を持つ場合には，回転可能葉層が定義される．（綴じの近傍では  $\nu$  が定める葉層と開円板の積であり，それが近傍の境界に巻きつくことによって Reeb 成分が構成される．外からはページがよい向きに巻きついて葉となる．）そのような回転可能葉層に関して更に次を仮定する．

**Definition 9.** 綴じ上の接触構造のある接触形式  $\mu$  の外微分  $d\mu$  が上の  $\ker \nu$  上で退化しているとする．すなわち  $(d\mu)^{n-1}|_{\ker \nu} \equiv 0$  とする．( $n > 1$  のときは  $\mu$  の Reeb ベクトル場が葉層に接するということ． $n = 1$  のときは自明と考える．) このとき付随する回転可能葉層は接触構造に似ているという．

**Theorem 10** ([M'09]).  $M^{2n+1}$  上の open-book 分解から定まる接触構造  $\mathcal{D}$  が付随する回転可能葉層  $\mathcal{F}$  に似ているならば， $\mathcal{D}$  は  $\mathcal{F}$  に滑らかに変形可能である．

### 3. [Giroux'91] の凸超曲面論

超曲面  $\Sigma \subset (M^{2n+1}, \alpha)$  は横断的接触ベクトル場  $X$  を持つとき**凸である**という．接触形式  $\alpha$  は，接触ベクトル場  $X$  を関数  $\alpha(X)$  にうつす線形写像と思えば，接触ベクトル場の空間から関数空間への**同形写像**である．従って集合  $\Gamma = \{\alpha(X) = 0\}$  は generic には  $2n-1$  次元の部分多様体であり， $\Sigma \setminus \Gamma$  は  $\alpha(X)$  の符号によって正負の領域  $\pm\Sigma_{\pm}$  に分割される． $\Gamma = \partial\Sigma_+ = \partial\Sigma_-$  はイソトピーを法として一意な接触部分多様体である．( $\Sigma_-$  の向きが  $\Sigma$  の向きと違うことに注意せよ.)

必要なら  $\alpha$  に適当な正の関数を掛けることによって， $d\alpha|_{\Sigma_{\pm}}$  はともに (正の) symplectic 構造としてよい．このとき  $\Gamma$  は  $\Sigma_{\pm}$  に共有された接触型境界である．**境界付き凸超曲面**とは，接触型境界を持つコンパクトな exact symplectic 多様体  $\overline{\Sigma_{\pm}}$  の同様の和になる超曲面  $\Sigma = \overline{\Sigma_+} \cup (-\overline{\Sigma_-})$  であって， $\partial\overline{\Sigma_-} \subset \partial\overline{\Sigma_+} = \Gamma$  を満たすものとする．このとき  $\partial\Sigma$  は正の領域  $\Sigma_+ (= \overline{\Sigma_+} \setminus \Gamma)$  のみと接することに注意する． $\iota_Y d\alpha|_{\Sigma_{\pm}} = \pm\alpha|_{\Sigma_{\pm}}$  を満たすベクトル場  $Y$  が定める  $\Sigma_{\pm}$  上の有向 1 次元葉層は，繋がって  $\Sigma$  の特性葉層になる．特性葉層はホロノミー不変な横断的接触構造を持ち，接触形式のとり方に依存しない．特性葉層が  $\Gamma$  を横断する向き

は正の領域から負の領域へ、あるいは正の領域から境界を外へ向く。

**Definition 11.** 境界が空でない凸超曲面に関する「**凸 TB 不等式**」とは、負の領域  $\Sigma_-$  の Euler 標数に関する不等式  $\chi(\Sigma_-) \leq 0$  である。

凸 TB 不等式は、然るべき境界条件の下で、通常の **TB 不等式**

$$-\langle e(\mathcal{D}|\Sigma), [\Sigma, \partial\Sigma] \rangle \leq -\chi(\Sigma) \quad (e(\cdot) \text{ は相対 Euler 類を表わす})$$

と同値である。ただし凸 TB 不等式は、考える超曲面  $\Sigma$  を凸なものに限るため、任意の  $\Sigma$  に関する不等式としては TB 不等式よりも弱い。

接触構造のタイト性を凸 TB 不等式で定義する理由は二つある。

1) まず 3 次元の TB 不等式は凸 TB 不等式に帰着する。このことは 3 次元接触多様体に埋め込まれた閉曲面が  $C^\infty$ -摂動によって凸になるという [Giroux'91] の近似定理に従う。(TB 不等式を破る曲面  $\Sigma$  を考えよ。  $\Sigma$  には接触構造との交わりが特性葉層を定め、  $\partial\Sigma$  は閉曲面の場合の吸引特異点と同様に振舞う。そこで閉曲面の場合の凸近似と同じことを  $\Sigma$  に対して行くと、境界は負の領域に属する。これが境界つき凸曲面との違いである。しかし負の領域の  $\partial\Sigma$  を含む連結成分の Euler 標数は正にならないことが容易に分かるので、そうした連結成分をすべて取り除いた曲面  $\Sigma'$  は凸 TB 不等式を破る境界つき凸曲面となる。)

2) 次に 5 次元以上の接触多様体の Darboux 近傍に TB 不等式を破る凸でない超曲面が含まれる ([M'08], 本稿 6 節を参照)。他方凸 TB 不等式については、次の「Calabi の問い」との関係から、容易には破れないと思われる。

**Calabi の問い.** 曲面以外の (4 次元以上の) コンパクトな exact symplectic 多様体であって、連結ではない接触型境界を持つものは存在するか？

じっさい凸 TB 不等式が破れる場合、  $\Sigma_+$  のある連結成分  $V$  は、一方では  $\Sigma_- \neq \emptyset$  の連結成分を取り囲み、他方では  $\partial\Sigma \neq \emptyset$  に接するので、境界  $\partial V$  は連結でない。凸 TB 不等式を破る超曲面を凸過旋超曲面と呼ぶ。例えば 3 次元接触構造の凸過旋円板  $\Delta$  は、負の円板  $\Delta_-$  を正のアニュラス  $\Delta_+$  で囲んだものである。必要なら  $\Delta$  を  $C^0$ -摂動して、接触構造  $\mathcal{D}$  と  $\Delta$  の接点集合は、円板  $\Delta_-$  の中心点  $P$  とアニュラス  $\Delta_+$  の中心線  $S^1$  の和としてよい。このとき  $S^1$  は普通の過旋円板を張る Legendrian unknot である。3 次元接触構造のタイト性の正統な定義は、過旋円板が存在しないことである。しかし、高次元の場合も含めて、接触構造のタイト性を凸 TB 不等式によって再定義することは許されるだろう。

**Definition 12.** 凸 TB 不等式を満たす接触構造は (凸 TB-) **タイトである** という。

さて Calabi の問いそのものには McDuff, Ghys, 三松による 3 次元 Anosov 流に関連した肯定的な解答があるが、次節で述べるように私はその解答を利用して  $S^5$

に標準接触構造とは異なる (接触同相でない) 接触構造を構成し, 更にそれが凸 TB 不等式を破ることを示した. もともとの私の意図は Calabi の問いの肯定的な例を排除することであったが, 今では問いを標準接触構造のタイト性の問題とタイトでない構造の存在問題へ分解して理解することが目標となった.

#### 4. open-book 分解と Giroux-Lutz 捻り

本節ではタイトでない構造を次の「凸 open-book 分解」を利用して構成する.

**Proposition 13** ([M'09]). (1) compact な exact symplectic 多様体  $(\Sigma, d\lambda, \lambda)$  の境界が接触型であるとする. すなわち  $\mu = \lambda|_{\partial\Sigma}$  は接触形式であり, それが  $\partial\Sigma$  に定める向きは  $\Sigma$  の向きと整合するとする. このとき  $\Sigma \times \mathbb{R}(z)$  には  $\alpha_0 = \lambda + dz$  という接触形式がある.  $(\Sigma \times \mathbb{R}, \alpha_0)$  は  $\Sigma$  の接触化と呼ばれる.  $\partial\Sigma$  の近くに  $\partial\Sigma = \{s = 0\}$  となる座標  $s(\leq 0)$  を適当に定めれば, そこでは  $\lambda = e^s \mu$  なので,  $\alpha_0$  を  $\alpha = f(s)e^s \mu + g(s)dz$  の形に修正して, 境界のごく近くで  $\alpha = \mu - sdz$  となるようにできる.  $(\Sigma \times \mathbb{R}, \alpha)$  を修正された接触化という. 修正された接触化の内部は  $\Sigma$  を  $s \rightarrow +\infty$  まで延長した場合の通常接触化と接触同相である.

(2) 接触型境界 (の一部) を共有する二つの exact symplectic 多様体  $\overline{\Sigma}_{\pm}$  が与えられたとき, 修正された接触化  $\overline{\Sigma}_{\pm} \times \mathbb{R}(\pm z)$  を貼り合わせて  $\Sigma = \overline{\Sigma}_+ \cup (-\overline{\Sigma}_-)$  と  $\mathbb{R}(z)$  の直積が得られる. とくに  $\partial\Sigma_-$  が  $\partial\Sigma_+$  の部分集合のとき,  $\Sigma \times \mathbb{R}$  は境界付き凸超曲面  $\Sigma \times \{0\}$  の近傍のモデルとなる.

(3) (2) の  $\Sigma \times \mathbb{R}$  が周期的に被覆するコンパクト接触多様体 (写像トーラス) であって, 境界の近くでは  $S^1$  との直積になっているものを考える. その境界  $(\partial\Sigma \times S^1, \mu)$  を  $(\partial\Sigma, \mu)$  に blow-down したものは閉接触多様体であり, 凸超曲面をページとする open-book 分解を持つ. (縦じの近傍には  $\sqrt{-s}$  を半径とし,  $z$  を角とする円柱座標が入る.) これを凸 open-book 分解という. symplectic open-book 分解と同様に, 凸 open-book 分解も接触構造を一意に定める.

凸 open-book 分解は exact symplectic open-book 分解の一般化である. 以下ではモノドロミーは正の領域と負の領域に台を持つ symplectomorphism の合成とする. このような symplectomorphism のホモトピー類は「exact 1-form の差を除いて  $\lambda$  を保つ symplectomorphism  $\varphi$ 」によって代表される (Giroux-Morsen). このとき  $\Sigma_+$  上の適当な正の関数  $h(+定数)$  に対して  $\varphi^* \lambda = \lambda + dh$  であるから, 接触化  $\Sigma_+ \times \mathbb{R}(z)$  を  $(p, z+h) \sim (\varphi(p), z)$  という同値関係で割った写像トーラスができる.  $\varphi$  は  $\Gamma$  の近くで恒等写像としてよく, 接触化の修正はそこで行う.

McDuff, Ghys, 三松の例からタイトでない 5 次元接触多様体を構成しよう.

**Proposition 14.** (1)  $\mathbb{R} \times T^2 \ni (x, y, z)$  上のプロペラ  $\ker(\sin x dy + \cos x dz)$  は (かなり振れているけれども) タイトな接触構造である.

(2)  $M^3$  に 2 つの積分可能な 1-形式  $\xi, \eta$  ( $\xi \wedge d\xi = \eta \wedge d\eta = 0$ ) が存在して,  $\xi \wedge d\eta = \eta \wedge d\xi > 0$  が成り立つとする. たとえば  $M^3$  に代数的 Anosov 流がある場合には,  $\xi, \eta$  は Anosov 葉層を定める 1-形式とすればよい. このとき exact symplectic 多様体  $([-1, 1] \times M^3, d(\xi + t\eta))$  の境界は接触型であるから, Calabi の問いへの肯定的な例となる. さらに  $\mathbb{R} \times M^3 \times S^1 \ni (x, p, z)$  上には接触構造  $\ker(\xi + \sin x\eta + \cos xdz)$  がある. これは (1) のプロペラの 5 次元版といえる.

(3) Geiges に倣って (2) の構成を更に一般化する.  $M^{2n-1}$  に正負の接触形式  $\alpha, \beta$  が存在して,  $\alpha \wedge (d\alpha)^{n-1} = -\beta \wedge (d\beta)^{n-1} > 0$  であり, これら以外に  $\alpha, \beta, d\alpha, d\beta$  の積に書かれる  $(2n-1)$ -形式はすべて 0 とする. このとき  $\xi = \alpha + \beta, \eta = \alpha - \beta$  とおくと,  $\mathbb{R} \times M^{2n-1} \times S^1 \ni (x, p, z)$  上には接触構造  $\ker(\xi + \sin x\eta + \cos xdz)$  がある. これが高次元のプロペラである. このとき超曲面  $\Sigma_n = \left\{ -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} + 2n\pi, z = \text{const} \right\}$  は接触ベクトル場  $\partial/\partial z$  と横断的な凸超曲面であり,  $\Sigma_-$  の  $n$  個の連結成分が  $\Sigma_+$  の  $n+1$  個の連結成分に挟まれている.

5 次元接触多様体に 5 次元プロペラの  $\{x_0\} \times M^3 \times S^1$  の近傍と接触同相な部分が存在するとき, それを  $[x_0, x_0 + 2\pi] \times M^3 \times S^1$  の近傍に取り替えることによって接触構造を 1 回転捻る操作が 5 次元の **Giroux-Lutz 捻り** である (更に高次元でも同様である). たとえば上の open-book 分解の綴じが代数的 Anosov 流に付随する 3 次元接触多様体であれば, 綴じの閉管状近傍の境界に沿って接触構造を 1 回転捻ることができる. これを「**綴じに沿う全 Lutz 捻り**」と呼ぶ. 他方, 綴じに沿う全 Lutz 捻りを行った後, 綴じから半回転捻ったところまでの管状近傍を心棒の綴じへと潰す blow-down によって, 多様体を変えずに接触構造を半回転捻り戻すことができる (ただし綴じは負の接触部分多様体になる). こうして綴じに沿って差し引き半回転捻る操作が「**半 Lutz 捻り**」である. 半 Lutz 捻りの結果はページの向きとモノドロミーを逆にした凸 open-book 分解を持つ.

とくに exact symplectic open-book 分解の綴じに沿って半 Lutz 捻りを行った凸 open-book 分解のページは, 負の領域を正の襟が取り囲む凸超曲面  $\Sigma$  である. もしページの Euler 標数が正であれば  $\Sigma$  は凸 TB 不等式を破る. 例えば 3 次元 Brieskorn 多様体は Euler 標数が正の Milnor fibre の綴じである. 従って  $S^5$  の標準接触構造に Brieskorn  $\widetilde{SL}_2$ -多様体に沿う半 Lutz 捻りを行うと, タイトでない接触構造ができる (この例は三松氏の示唆による). 私としては次節の例を先に見つけたのだが, それは葉層への収束を同時に考えていたからである.

## 5. Sol-多様体の幾何学

3 次元 Sol-多様体は  $T^2$  の双曲的自己写像 (Anosov) の写像トーラスである.

**Theorem 15** ([M'09]).  $\mathbb{C}^3$  の代数曲面であって, 特異点のリンクが Sol-多様体であるものが無限個存在する. これらの Sol-多様体の  $T^2$ -束から定まる回転可能

葉層は標準接触構造に似ている．またこれらの  $Sol$ -多様体に沿って半 Lutz 捻りを行うと  $S^5$  上のタイトでない exotic な接触構造が得られる．

Niederkrüger と Chekanov は「**過旋族**」(=Plastikstufe) というものを含む接触多様体は strong (semi-positive) symplectic filling を持たないことを示した．5次元の半 Lutz 捻りは代数的 Anosov 流の閉軌道と過旋円板の積の形をした過旋族を産み出す．従って上の定理から得られるタイトでない接触構造は，symplectic 球体の接触型境界の標準接触構造とは異なるものである．この exotic 接触構造を含め，一般に凸 open-book 分解が定める接触構造は次の葉層に似ている．

**Theorem 16** ([M'09]). 凸 open-book 分解の回転可能葉層の各ページ葉を  $\Sigma_+$  と  $-\Sigma_-$  に切り分けて  $-\Sigma_-$  の向きが逆に (つまり  $\Sigma_-$  に) なるように  $\Gamma \times S^1$  に巻きつけた葉層は，凸 open-book 分解から定まる接触構造に似ている．

接触多様体の Darboux 近傍は，標準接触構造を持つ球面  $S^{2n+1}$  から 1 点の近傍を除いたものである．従って Darboux 近傍において上の半 Lutz 捻りを行えば，任意の接触構造をタイトでない接触構造に改変できる．

さて標題の Reeb 葉層とは Theorem 16 の葉層を典型例とするものである．

**Definition 17.** 球面  $S^{2n+1}$  上の **Reeb 葉層**とは，広義には標準接触構造に似た回転可能葉層であって，ページ葉の Euler 標数が正のものである．狭義には更に綴りに沿って標準接触構造に Lutz 捻りを行うことが可能なものをいう．

Theorem 16 は狭義の Reeb 葉層を与える  $Sol$ -多様体の例がたくさんあるとされている．証明には  $Sol$ -多様体に関する次の結果を使う．

**Theorem 18.** (1)(本田)  $T^2$  の双曲的自己写像は次の形の積  $f_{(m,k_1,\dots,k_m)}$  (ただし  $m > 0, k_i \geq 0, k_1 + \dots + k_m > 0$ ) の少なくとも何れかひとつと共役である．

$$f_{(m,k_1,\dots,k_m)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & k_m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(2)(Van Horn 学位論文)  $f_{(m,k_1,\dots,k_m)}$  の suspension Anosov 流に付随する正の接触構造は，次の open-book から定まるものと接触同相である：ページは Pants 分解  $\bigcup_{i=1}^m P_i$  を持つ  $m$  個穴あきトーラス  $T_m$  であり，モノドロミーは  $P_i \cap P_{i+1} (\neq \emptyset)$  に沿う右  $k_i$  回 Dehn 捻りと  $\partial T_m$  に沿う右 1 回 Dehn 捻りの合成である．

私が特異点の link として実現することができた  $Sol$ -多様体は  $m = 1, 2$  のものである．特異点の link 上には **Milnor open-book 分解** (Caubel-Nemethi-Popescu) というものがあり，これが link の接触構造を定めているので，上の Theorem 19 に書かれているものを Milnor open-book 分解として実現すれば Theorem 16 が示

される。(注:特異点の link は Milnor 束という超球面上の open-book 分解の綴じであるが, この link 自身が内的な open-book 分解を持ち, それが link 上の Milnor open-book 分解と呼ばれている. ややこしいので要注意.) しかも Theorem 19 で  $m = 1$  のとき (あるいは  $m = 2$  のとき), 形式的に  $k_1 = 0$  (あるいは  $k_1 = k_2 = 0$ ) とすれば Brieskorn Nil-多様体  $M(2, 3, 6)$  (あるいは  $M(2, 4, 4)$ ) と接触同相になるので, それとの比較で Sol-多様体を構成することができた. すなわち

**Proposition 19.**  $f_{1,k_1}$  (あるいは  $f_{2,k_1,k_2}$ ) が定める Sol-多様体は  $\mathbb{C}^3$  の曲面

$$\{(y - 2x^2)(y^2 + 2x^2y + x^4 - x^{4+k_1}) + z^2 = 0\}$$

$$\text{(あるいは } \{(x^2 + 2xy + y^2 - x^{2+k_1})(x^2 - 2xy + y^2 + x^{2+k_2}) + z^2 = 0\})$$

の孤立特異点  $(0, 0, 0)$  の link と接触同相である. このとき Milnor 数は  $10 + k_1$  (あるいは  $9 + k_1 + k_2$ ) である.

Milnor 数の計算は  $m = 1$  では容易だが,  $m = 2$  では Cardano の方法をまねる箇所があって難しい. 最後の Brieskorn Nil-多様体は  $M(3, 3, 3)$  であり,  $m = 3$  の場合に対応すると思われるが,  $f_{3,k_1,k_2,k_3}$  が定める Sol-多様体を  $\mathbb{C}^3$  の特異点の link として実現するのは今後の課題である (やはり 4 次方程式なのか?).

## 6. 展望

(1) 私は綴じが連結な open-book 分解を持つ閉有向 3-多様体が与えられたとき, それを  $S^5$  に埋め込むことができ, 更にその open-book 分解が  $B^4$  による  $S^5$  の自明な open-book 分解の引き戻しにできることを示した. またこの open-book 埋め込み定理の接触幾何版を示したつもりでいたが, モノドロミーが超楕円的でない場合にだけギャップがあった (修正中). これは次の結果の続きである.

**Theorem 20** ([M'04]). 任意の閉接触 3-多様体は, open-book 分解を利用して  $S^5$  の標準接触構造にはめ込むことができる. 一般次元の場合にも, 多くても約 3 倍の次元の標準接触構造にはめ込む/埋め込むことができる.

定理の前半はページの種数が 0 の場合には埋め込みである. これを Etnyre の結果と併せれば任意の過旋接触 3-多様体を  $S^5$  の標準接触構造に埋め込むことができる. 何れにせよ  $S^5$  に 3 次元の過旋円板の近傍を埋め込むことは容易である.  $S^5$  に埋め込まれた過旋円板の近傍の境界からある円周の近傍を除いた  $D^2 \times S^2$  は, 先に述べた「TB 不等式を破る凸でない超曲面」になる.

ところで  $\mathbb{R}^5$  (あるいは  $\mathbb{R}^7$ ) の中で 3 次元接触部分多様体を変形して葉層に近づけるということはできるのだろうか? より一般に接触構造と葉層構造を PDE 系 (つまり 1-jet 空間の部分多様体) という観点から捉えてどの程度のことができるか? こうした問題は幾何的埋め込みとの関係もあって面白いと思う.

(2) 凸超曲面論は [Giroux'91] が勾配状接触ベクトル場を持つ Morse 関数を研究する中で作り上げたものである. そして [Giroux-Morsen'02] の結果は, 暗にそうした Morse 関数の存在を主張している. というのも, 彼らはページが Morse 関数つき exact symplectic 多様体 (**Weinstein 多様体**) である open-book 分解が存在すると言っているからである. 実際 [Ibort-Martinez-Presas'00] が存在証明をした「ほとんど正則」な関数  $\varphi: M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}$  の偏角  $\theta = \arg \varphi: M^{2n+1} \setminus \{\varphi = 0\} \rightarrow S^1$  は open-book 分解のページ束の射影であり, 各ページには絶対値  $|\varphi|$  の逆数が Weinstein の Morse 関数を定める.  $\theta = 0$  のページ  $\overline{\Sigma_-}$  と  $\theta = \pi$  のページ  $\overline{\Sigma_+}$  の和  $\Sigma = \overline{\Sigma_+} \cup_{\partial} (-\overline{\Sigma_-})$  は, 上半平面の逆像  $M_+ = \varphi^{-1}(\mathbb{H})$  の境界となる閉凸超曲面である.  $\theta = \pi/2$  のページ  $V$  上の固有 Morse 関数と勾配状拡大ベクトル場  $Y$  は  $M_+ \approx \text{int } V \times \mathbb{R}$  上の固有 Morse 関数と勾配状接触ベクトル場に自然に拡張するので, 下半平面の逆像  $M_-$  と併せて  $M^{2n+1}$  上の Morse 関数が得られる.

[Giroux'91] は, 接触多様体  $M^{2n+1}$  に固有 Morse 関数  $f$  とその勾配状接触ベクトル場  $X$  が存在することを仮定して, **特性超曲面**  $C = \{\alpha(X) = 0\}$  というものを考え,  $f$  の臨界点が全て  $C$  上の Morse 関数  $f|_C$  の臨界点であることを示した. 上の場合は  $C = V$  であり, それは  $\varphi$  による虚軸の逆像である. つまり  $f: M^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}$  の臨界点と  $M_{\pm}$  の接触位相型の情報は虚軸の上に集まっている. 実部が接触 Hamilton 関数, 虚部が Morse 関数ならば虚軸に全ての臨界点があり, 接触 Hamilton ベクトル場が勾配状になるという絵は open-book より美しい.

## 参考文献

- [Giroux'91] E. Giroux: *Convexit  en topologie de contact*, Comm. Math. Helv. **66** (1991), 637–677.
- [Giroux-Morsen'02] E. Giroux: *G om trie de contact: de la dimension trois vers les dimensions sup rieures*, Proc. ICM-Beijing, **2** (2002), 405–414.
- [Ibort-Martinez-Presas'00] A. Ibort, D. Martinez and F. Presas: *On the construction of contact submanifolds with prescribed topology*, J. Diff. Geom., **56** (2000), 235–283.
- [三松-M'06] Y. Mitsumatsu and A. Mori: *On Bennequin's isotopy lemma*, Appendix to Mitsumatsu: *Convergence of contact structures to foliations in "Foliations 2005"* (Lodz), World Scientific 2006, 365–371.
- [M'02] A. Mori: *A note on Thurston-Winkelnkemper's construction of contact forms on 3-manifolds*, Osaka J. Math. **39**(2002), 1–11.
- [M'04] —: *Global models of contact forms*, J.M.S. Univ. Tokyo **11** (2004), 447–454.
- [M'08] —: *On the violation of Thurston-Bennequin inequality for a certain non-convex hypersurface*, preprint (2008).
- [M'09] —: *Reeb foliations on  $S^5$  and contact 5-manifolds violating the Thurston-Bennequin inequality*, preprint(2009), arXiv: 0906.3237v1 [Math. GT].

Graduate School of Science, Osaka University, e-mail: ka-mori@ares.eonet.ne.jp

## G-多様体から軌道空間への写像の PL 化

名古屋大学 塩田昌弘

### 1. 定理

これは東京工業大学の村山光孝さんとの共同研究である。

$G$  を Lie 群とし  $M$  を固有な  $C^r$   $G$ -多様体とする、 $r = 1, \dots, \omega$ 。ここで  $G$ -多様体が固有であるとは写像  $G \times M \ni (g, x) \rightarrow (x, gx) \in M^2$  が固有写像であることである。Cairns-Whitehead によって  $M$  は PL 多様体と同相であること、また Yang [11] 等によって軌道空間  $M/G$  は多面体と同相であることが知られている。ここではそんな同相写像  $\tau: P \rightarrow M$  と  $\sigma: Q \rightarrow M/G$  を巧く取れば  $\sigma^{-1} \circ \pi \circ \tau: P \rightarrow Q$  が PL 写像となるようにできることを述べたい。ただし、 $\pi: M \rightarrow M/G$  は自然な連続写像である。正確に述べると次のようになる。単体的複体  $K$  に対して  $|K| = \cup\{\alpha \in K\}$  とおく。

**定理 1.** 上の  $M$  と  $G$  に対して単体的複体  $K$  と  $L$  と同相写像  $\tau: |K| \rightarrow M$  と  $\sigma: |L| \rightarrow M/G$  が存在して、 $\sigma^{-1} \circ \pi \circ \tau: K \rightarrow L$  は単体的写像で  $|K|$  は PL 多様体である。

**注意.** ここで  $\tau$  として Cairns-Whitehead の  $M$  の  $C^r$  三角形分割がとれる。そうすると  $|K|$  は PL 同相をのぞいて一意的である。以下に説明する準解析的集合と写像のカテゴリーで  $M/G$  の三角形分割をすれば、同じように  $|L|$  も一意的である。しかし  $\sigma^{-1} \circ \pi \circ \tau: |K| \rightarrow |L|$  が一意的かどうかは分からない。また  $G$  と  $M$  が代数的なとき、 $M$  が固有という条件を緩めて、 $M/G$  が Hausdorff という条件で十分ではないかと思うが、証明できなかった。定理で  $M$  を境界付きとしても良い。それは  $M$  のダブルを考えれば良い。更に言えることは、定理において、単独の  $M$  ではなく、 $M$  が有限個の  $C^r$   $G$ -多様体  $M_i$  を含み、各  $M_i$  が  $M$  で閉じているとき、 $K$  の部分複体  $K_i$  がとれ、 $\tau(|K_i|) = M_i$  とできる。

$G$ -多様体と特異点理論と組合せ位相幾何ができる人は上の定理を局所的には証明できるであろう。その証明は3つの分野の基本的な組み合わせである。しかし大域的にはそれでは十分でないと思う。準解析的集合と写像のカテゴリーで議論を展開して初めて私は証明できた。元々は  $\pi: M \rightarrow M/G$  は準解析カテゴリーに属さない。それをここに持ち込んで話を進める。この結果は準解析カテゴリーの他の分野への応用である。私の専門は特異点理論と準解析カテゴリーであるが、トポロジーの分野でどんな問題があるかあまり知らない。この定理に近いことを昔、広島大学の松本堯生さんと共同研究して結果を得た。局所的には解けていて、大域的にはまだ解けていないトポロジーの問題に準解析カテゴリーが役立つかもしれない。トポロジーの分野の人から問題の提起があればありがたい。

### 2. 準解析的集合と写像

以下実数上で考える。複素数上でも考えれるが、何もその利点はない。固有解析写像による解析的集合の像が研究対象として悪くないと最初に気がついたのは Gabrielov である。その後、廣中がそれを明記した [1]。

**定義.**  $\mathbf{R}^n$  の部分集合  $X$  が準解析的であるとは有限個の解析的多様体  $N_{i,j}$  と固有解析的写像  $f_{i,j} : N_{i,j} \rightarrow \mathbf{R}^n$  があって  $X = \cup_i (f_{i,1}(N_{i,1}) - f_{i,2}(N_{i,2}))$  となること。(準解析的集合はいつもユークリッド空間の部分集合であるが、そのユークリッド空間を必ずしもいちいち断らない。) 準解析的集合間の連続写像が準解析的とはそのグラフが準解析的集合であること。

準解析的集合と写像はいろいろな性質を持っている。  $X$  と  $Y$  を  $\mathbf{R}^n$  中の準解析的集合とする。すると次のことが言える。

(1)  $X \cap Y, X \cup Y, X \times Y, X - Y, \mathbf{R}^n - X, \bar{X}$  は準解析的。  $X$  の連結成分の集合は局所有限で各連結成分は準解析的。

(2)  $f : X \rightarrow \mathbf{R}^n$  を固有準解析的写像とすると  $f(X)$  は準解析的。

(3)  $r = 0, \dots, \omega$  とする。  $\text{Reg}_r X$  を  $X$  の部分集合でその各点の近くで  $X$  が最高次の  $C^r$  多様体になるものとする。すると  $\text{Reg}_r X$  は準解析的。さらに  $\{\text{Reg}_r X, \text{Reg}_r(X - \text{Reg}_r X), \text{Reg}_r(X - \text{Reg}_r X - \text{Reg}_r(X - \text{Reg}_r X)), \dots\}$  は有限な  $X$  の準解析的分割。それを  $X$  の標準的準解析的  $C^r$  分割という。

(4)  $\text{Reg}_r X$  の次元を  $X$  の次元と呼ぶ。それは次元理論による次元と同じ。また  $r$  によらない。  $X$  が空集合でないなら、  $\bar{X} - X$  の次元は  $X$  の次元より小さい。

(5) 以下  $r > 0$  とする。  $X$  と  $Y$  を  $C^r$  滑らか、  $f : X \rightarrow Y$  を微分可能な準解析的写像とする。すると接束  $TX \rightarrow X$  と微分  $df : TX \rightarrow TY$  は準解析的。(しかし準解析的関数の不定積分、準解析的ベクトル場の積分、準解析的関数の積分変換等、積分は準解析的でない。準解析的集合と写像の理論において、いかに積分を避けるかというのが主な議論である [9].)  $\text{Reg}_r f$  を  $f$  のヤコビアン行列が最大階数になる  $X$  の点全体とする。すると  $\text{Reg}_r f$  は準解析的で、  $X$  が連結で空集合でないなら、  $X - \text{Reg}_r f$  の次元は  $X$  の次元より小さい。

(6)  $X$  と  $Y$  は  $\mathbf{R}^n$  で閉じているとする。  $f : X \rightarrow Y$  を固有準解析的写像とする。すると  $X$  と  $Y$  の準解析的  $C^r$  分割  $\{X_i\}$  と  $\{Y_j\}$  があり、各  $i$  に対して  $f|_{X_i}$  はある  $Y_j$  への沈み込みである。  $f : \{X_i\} \rightarrow \{Y_j\}$  を  $f : X \rightarrow Y$  の  $C^r$  分割という。この場合も (3) と同じような標準的準解析的  $C^r$  分割があることが (5) よりわかる。

(7)  $\mathbf{R}^n$  の中で閉じた多面体は準解析的。逆に  $\mathbf{R}^n$  の中で閉じた  $X$  に対して  $\mathbf{R}^n$  の中で閉じた多面体  $P$  と  $X$  から  $P$  への準解析的同相写像がある。そして  $P$  は PL 同相をのぞいて一意的である [9]。

### 3. 特異点理論からの準備

ここでは  $r$  を 2 以上の整数とする。ただし  $\infty$  とか  $\omega$  ではない。後で準解析的カテゴリーで話を進めるが、  $r$  が有限でないとは成り立たない。  $M$  と  $N$  を  $\mathbf{R}^n$  の中の  $C^r$  多様体として  $(\bar{M} - M) \cap N \neq \emptyset$  と仮定する。

**定義.**  $(M, N)$  が  $N$  の点  $y$  で Whitney 条件を満たすとは、  $N$  の点列  $y_i, i = 1, 2, \dots$  と  $M$  の点列  $x_i, i = 1, 2, \dots$  が  $y$  に収束し、さらにもし接空間  $T_{x_i} M$  が空間  $L$  に収束し、  $x_i$  と  $y_i$  を通る直線が直線  $l$  に収束するとき、常に  $l \subset L$  となること。  $\{M_i\}$  を  $\mathbf{R}^n$  のある集合の有限個の  $C^r$  多様体への分割 ( $C^r$  分割という) とする。どの  $M_i$  と  $M_{i'}$  のペアも全ての  $M_{i'}$  の点で Whitney 条件を満たすとき、  $\{M_i\}$  を Whitney  $C^r$  分割という。

準解析的集合に関して次のことが言える。  $X$  と  $Y$  を準解析的集合とする。

(8)  $X$  と  $Y$  が  $C^r$  多様体で  $(\bar{X} - X) \cap Y \neq \emptyset$  とする。すると  $Y$  の点でそこで  $(X, Y)$  が Whitney 条件を満たさないものを全て集めると準解析的集合になり、その次元は  $Y$  の次元

より小さい。よって  $X$  の標準的準解析的 Whitney  $C^r$  分割が存在する。

(9) 上の (6) と同じ仮定で、 $f : X \rightarrow Y$  の標準的準解析的 Whitney  $C^r$  分割  $f : \{X_i\} \rightarrow \{Y_j\}$  がある。

また一般の  $C^r$  分割に戻る。

**定義.**  $M$  の  $C^r$  管とは  $T = (|T|, \pi, \rho)$  で  $|T|$  は  $M$  の  $\mathbf{R}^n$  での開近傍、 $\pi$  は  $|T|$  から  $M$  への  $C^r$  級沈み込みのレトラクション、 $\rho$  は  $|T|$  上の非負  $C^r$  関数で各  $x \in M$  に対して  $\rho|_{\pi^{-1}(x)}$  は  $x$  でのみ特異でそこで非退化である。 $\{M_i\}$  を  $\mathbf{R}^n$  のある集合の有限個の  $C^r$  分割とする。そのとき  $\{M_i\}$  の  $C^r$  管系とは  $\{T_i = (|T_i|, \pi_i, \rho_i)\}$  で各  $T_i$  は  $M_i$  の管のこと。もし次の条件が満たされているとき  $\{T_i\}$  は管理されているという。

$$|T_i| \cap |T_j| \quad \text{で} \quad \pi_j \circ \pi_i = \pi_j, \quad \rho_j \circ \pi_j = \rho_j.$$

次のことは特異点理論でよく知られている。

**事実 1.**  $\{M_i\}$  を Whitney  $C^r$  分割とする。すると管理された  $\{M_i\}$  の  $C^r$  管系が存在する。特に  $M_i$  が準解析的のとき、管理された準解析的  $C^r$  管系がとれる。ただし、管系  $\{T_i = (|T_i|, \pi_i, \rho_i)\}$  が準解析的とはすべての  $|T_i|, \pi_i, \rho_i$  が準解析的なこと。

写像に関しても同様な定義と事実がある。

**定義.**  $\{M_i\}$  と  $\{N_j\}$  を  $C^r$  分割  $\{T_i^M = (|T_i^M|, \pi_i^M, \rho_i^M)\}$  を管理された  $\{M_i\}$  の  $C^r$  管系、 $f : \cup_j N_j \rightarrow \cup_i M_i$  を  $C^r$  写像 (すなわち  $f$  は  $\cup_j N_j$  の近傍に  $C^r$  写像  $\bar{f}$  として拡張される) とし、各  $j$  に対して  $f|_{N_j}$  はある  $M_i$  への沈み込みとする。そのとき  $\{N_j\}$  の  $C^r$  管系  $\{T_j^N = (|T_j^N|, \pi_j^N, \rho_j^N)\}$  は次の 3 つの条件を満たすとき  $\{T_i^M\}$  上管理されているという。各  $i$  に対して  $\{T_j^N : N_j \subset f^{-1}(M_i)\}$  は  $\{N_j : N_j \subset f^{-1}(M_i)\}$  の管理された  $C^r$  管系である。

$$|T_j^N| \cap \bar{f}^{-1}(|T_i^M|) \quad \text{で} \quad \pi_i^M \circ \bar{f} = f \circ \pi_j^N.$$

$(\bar{N}_j - N_j) \cap N_{j'} \neq \emptyset$  となる、各  $N_j, N_{j'}$  に対して  $(\pi_{j'}^N, f)|_{N_j \cap |T_{j'}^N|}$  はファイバー積  $N_{j'} \times_{(f, \pi_i^M)} (M_i \cap |T_{j'}^M|)$  への沈み込み。ただし  $M_i$  と  $M_{i'}$  は  $f(N_j) \subset M_i, f(N_{j'}) \subset M_{i'}$  となるもの。

**定義.**  $\{M_i\}$  と  $\{N_j\}$  と  $f : \{N_j\} \rightarrow \{M_i\}$  を上と同じとする。さらに  $\{M_j\}$  と  $\{N_i\}$  は Whitney  $C^r$  分割とする。 $f$  が次の条件を満たすとき、それを Thom 写像と呼ぶ。 $N_j$  と  $N_{j'}$  を上と同じとする。 $y_k, k = 1, 2, \dots$ , を  $N_{j'}$  の点  $y$  に収束する  $N_j$  の点列とする。もし接平面の列  $T_{y_k}(f|_{N_j})^{-1}(f(y_k))$  が空間  $L$  に収束すれば、 $T_y(f|_{N_{j'}})^{-1}(f(y)) \subset L$ 。

**事実 2.**  $\{M_i\}$  と  $\{N_j\}$  と  $\{T_i^M\}$  と  $f : \{N_j\} \rightarrow \{M_i\}$  を上と同じとし、 $f$  を Thom 写像とする。すると  $\{T_i^M\}$  上に管理された  $\{N_j\}$  の管系  $\{T_j^N\}$  が存在する。また  $\{M_i\}$  と  $\{N_j\}$  と  $\{T_i^M\}$  と  $f$  がすべて準解析的のとき、準解析的  $\{T_j^N\}$  がとれる。

Thom は固有な Thom 写像は PL 化可能だと予想し、それは正しかった。

**定理 [10].**  $f : \{N_j\} \rightarrow \{M_i\}$  を Thom 写像とし、 $f : \cup_j N_j \rightarrow \cup_i M_i$  を固有な  $C^2$  写像、 $\cup_j N_j$  と  $\cup_i M_i$  は  $\mathbf{R}^n$  で閉集合とする。すると単体的複体  $K$  と  $L$  と同相写像  $\tau : |K| \rightarrow \cup_j N_j$  と  $\sigma : |L| \rightarrow \cup_i M_i$  が存在して  $\sigma^{-1} \circ f \circ \tau : K \rightarrow L$  は単体的写像である。

(写像が Thom 写像であることは PL 化可能であることの必要条件ではない。しかし複素解析的のときは近いことが [2] より分かる。複素解析的多様体間の複素解析的写像が PL 化

可能あることの1つの必要条件は写像が平坦であることである [9]。) この定理を当てはめて定理 1 を証明するには、 $f$  が固有という条件が強すぎる。幸いなことに [10] の証明は次の定理が成り立つと言っている。

**定理 2.**  $f : \{N_i\} \rightarrow \{M_i\}$  を Thom 写像とし、 $\{N_i\}$  と  $\{M_i\}$  の指数集合は同じとし、各  $i$  に対して  $f(N_i) = M_i$  とする。さらに管理された  $\{M_i\}$  の管系  $\{T_i^M\}$  と  $\{T_i^M\}$  上管理された  $\{N_i\}$  の管系  $\{T_i^N\}$  が存在して、写像  $(\pi_i^N, f) : |T_i^N| \cap (\cup_i N_i) \rightarrow N_i \times |T_i^M|$  が固有であると仮定する。すると単体的複体  $K$  と  $L$  と同相写像  $\tau : |K| \rightarrow \cup_i N_i$  と  $\sigma : |L| \rightarrow \cup_i M_i$  が存在して  $\sigma^{-1} \circ f \circ \tau : K \rightarrow L$  は単体的写像である。

#### 4. 定理 1 の証明の概略

$G$  は  $C^\omega$  級だと仮定できる。また [3]、[4]、[5]、[7]、[8] 等によって  $C^\omega$   $G$ -多様体  $M'$  と  $M$  から  $M'$  への  $G$ -同変微分同相写像があり、 $r = \omega$  と仮定できる。さらに [6] によって、 $m$  を十分大な整数とし  $\mathbf{R}^m$  に  $G$  は自明に作用するとすれば、 $M$  から  $\mathbf{R}^m$  への準解析的同変微分同相写像  $p$  が存在して、 $p(M)$  は  $\mathbf{R}^m$  で閉じていて準解析的でさらに自然な写像  $M/G \rightarrow p(M)$  が同相となる。よって  $M/G$  を  $p(M)$  で置き換えられる。しかし、そのとき  $p : M \rightarrow p(M)$  は  $C^\omega$  級でないので、さらに  $M$  を次のように代える。 $X = \text{graph } p$ ,  $Y = p(M)$  とおく。そして  $\phi : X \rightarrow Y$  を射影とする。すると  $X$  は準解析的集合で、作用  $G \times M \times \mathbf{R}^m \supset G \times X \ni (g, x, p(x)) \rightarrow (gx, p(x)) \in X \subset M \times \mathbf{R}^m$  は準解析的かつ  $C^\omega$  級、 $\phi$  は  $C^\omega$  級。ただし  $X$  は滑らかな多様体ではない。 $M$  は  $\mathbf{R}^n$  そして  $X$  は  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  に含まれているとする。

$\phi : X \rightarrow Y$  は固有ではないが、3の(9)が成り立つ。そなわち  $\phi$  の標準的準解析的 Whitney  $C^\omega$  分割が存在する。作り方を簡単に述べる。 $X_1 = \text{Reg}_\omega \phi|_{\text{Reg}_\omega X}$  とおく。すると  $X_1$  は準解析的  $C^\omega$   $G$ -多様体で、 $X_1$  の点を一つでも含む  $X$  の連結成分を  $X_0$  とすれば  $\dim(X_0 - X_1) < \dim X$  で  $GX_1 = X_1$ 。よって  $\phi^{-1}(\phi(X_1)) = X_1$  で  $\phi(X_1)$  は準解析的  $C^\omega$  多様体で  $\phi|_{X_1} : X_1 \rightarrow \phi(X_1)$  は  $C^\omega$  沈み込み。 $Y_1 = \phi(X_1)$  とおく。次に同じ議論を  $\phi|_{X-X_1} : X-X_1 \rightarrow Y-Y_1$  に関して行い、それをくりかえして  $\phi$  の標準的準解析的  $C^\omega$  分割  $\phi : \{X_i\} \rightarrow \{Y_i\}$  が得られる。さらに 3の(8)より  $\{X_i\}$  と  $\{Y_i\}$  は Whitney  $C^\omega$  分割であるようにとれる。そのとき  $\phi : \{X_i\} \rightarrow \{Y_i\}$  が Thom 写像であることが計算によって求まる。

$r$  を十分大な整数とする。2の事実 1、2 によって管理された  $\{Y_i\}$  の準解析的  $C^r$  管系  $\{T_i^Y = (|T_i^Y|, \pi_i^Y, \rho_i^Y)\}$  と  $\{T_i^Y\}$  上管理された  $\{X_i\}$  の準解析的  $C^r$  管系  $\{T_i^X = (|T_i^X|, \pi_i^X, \rho_i^X)\}$  が存在する。しかし定理 2 を当てはめて定理 1 を得るには  $\{T_i^X\}$  を写像  $(\pi_i^X, \phi) : |T_i^X| \cap X \rightarrow X_i \times |T_i^Y|$  が固有であるようにとらなければいけない。すなわち、 $\pi_i^X : |T_i^X| \rightarrow X_i$  は管状近傍であるが、各  $X_i$  の点  $x$  に対して、 $\pi_i^{X-1}(x)$  を大きくとって、 $\phi(\pi_i^{X-1}(x)) = \pi_i^{Y-1}(\phi(x))$  となるようにしなければいけない。 $G$  がコンパクトの場合それは容易であるが、容易でないノンコンパクトの場合も考えなければいけないので、 $\{T_i^X\}$  が満たす条件に次のいたって自然な条件を付け加える。

$$(*)_i \quad \pi_i^X(gx) = g\pi_i^X(x), \quad (g, x) \in G \times (X \cap T_i^X).$$

$(*)_i$  が満たされれば、 $\phi(\pi_i^{X-1}(x)) = \pi_i^{Y-1}(\phi(x))$  となるように  $\{T_i^X\}$  が取れることは明らかであろう。コンパクトの場合でも  $(*)_i$  を満たすように  $\{T_i^X\}$  を作るのは自明ではない。次の特殊な場合を考えて、その次、一般の場合はスライス (near slice) 定理を使って、その特殊な場合に近い場合に帰着させる。

$G$  が直交群  $O(m)$  のコンパクト部分群で  $G$  の各元は  $M$  に直交変換として作用する場合。特異点理論の常套手段を使って、この場合  $(*)_i$  を満たす  $\{T_i^X\}$  を作れる。しかし  $G$ -

多様体の専門家にはなじみがないであろうから、少し説明する。記号を簡単にするため、 $\dim X_i \leq \dim X_{i+1}$  とする。帰納法を使うので、 $\{T_i^X\}$  の満たすべき条件をもう一度書く。条件は  $(*)_i$  と

$$(**)_i \quad \phi \circ \pi_i^X = \pi_i^Y \circ \bar{\phi},$$

$$(***)_i, j \quad \pi_i^X \circ \pi_j^X = \pi_i^X, \quad i < j.$$

ただし  $\bar{\phi}$  は  $X$  の  $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m$  での近傍への  $\phi$  の  $C^\omega$  拡張。ある整数  $k$  があって、 $\{\pi_i^X : i < k\}$  が条件  $(*)_i$  と  $(**)_i$  と  $(***)_i, j$  が満たされるように作られていたとする。そのとき  $G$  が  $M$  に直交変換として作用していることから  $\pi_k^X$  を  $(*)_k$  と  $(**)_k$  が満たされるようにとるのは容易である。 $(***)_i, j$  が満たされるように  $\pi_k^X$  を修正しなければいけない。また帰納法を使う。 $l < k$  を整数とし、どんな  $i$  でも  $l < i < k$  のとき  $(***)_i, k$  が満たされているとする。そのとき  $(***)_l, k$  が満たされるように  $\pi_k^X$  を修正しなければいけない。それは、 $G$  と  $M$  のこの特殊な場合の性質と1の準解析的  $C^r$  分割を使って特異点理論の常套手段でできる。このように  $G$  と  $M$  が特殊な場合は  $\{T_i^X\}$  は作られる。

**$G$  と  $M$  が一般の場合。** 各  $M$  の点  $a$  に対して  $G_a$  を  $G$  の  $a$  における等方群とする。するとスライス定理により、 $a$  を含む  $M$  の  $C^\omega$   $G_a$ -部分多様体  $S$  があり写像  $G \times_{G_a} S \ni (g, s) \rightarrow gs \in M$  は  $a$  の  $M$  での近傍への  $C^\omega$  同相写像になる。さらに  $G_a$  は  $O(m)$  の部分群で  $S$  に直交変換として作用していると見なせる。ただし  $G \times_{G_a} S$  はトウイステイド積を意味する。すると前の  $G$  と  $M$  の特殊な場合の結果と  $G$  を使って、 $\{\pi_i^X\}$  が  $(*)_i$  と  $(**)_i$  と  $(***)_i, j$  が満たすように  $p^{-1}(f(S))$  で作れる。 $f(S)$  は  $Y$  の開集合、かつ  $Y$  はユークリッド空間で閉じているので、 $M$  の中で可算個の  $a_\alpha$ ,  $\alpha \in A$ , がとれ各  $a_\alpha$  に対して上の  $S_\alpha$  がとれ  $\{f(S_\alpha) : \alpha \in A\}$  は  $Y$  で局所有限となる。各  $i$  に対して  $\alpha \in A$  を  $X_i \subset GS_\alpha \times \mathbf{R}^m$  となるようにとる。それを  $\alpha_i$  と書き、 $S_i = S_{\alpha_i}$  とおく。

上の特殊な場合と同じように、ある整数  $k$  があって、 $\{\pi_i^X : i < k\}$  が条件  $(*)_i$  と  $(**)_i$  と  $(***)_i, j$  が満たされるように作られたとする。さらにある整数  $l (< k)$  があって、 $\pi_k^X$  が  $(*)_k$  と  $(**)_k$  と  $(***)_i, k$ ,  $l < i < k$ , が満たされるように作られたとする。そのとき  $\pi_k^X$  を  $(***)_l, k$  が満たされるように修正すれば良い。それは  $S_l = S_k$  のときは  $S_k$  の線形構造を使って上の場合と同じようにできる。しかし  $S_l \neq S_k$  のときは  $S_l$  の線形構造と  $S_k$  のそれとは違う可能性がある。よって構造が変わらないように、次の非線形の場合に  $\pi_k^X$  を修正できることを証明して、一般の場合に  $\pi_k^X$  を修正する。

**$G$  がコンパクト  $C^\omega$  Lie 群で  $M$  は  $C^\omega$   $G$ -多様体、そして  $M$  には  $C^\omega$   $G$ -同変 Riemann 計量がある場合。**

この場合も、少し複雑になるが、線形な場合と同じように  $\pi_k^X$  を修正できる。また  $G$  がコンパクト  $C^\omega$  Lie 群で  $M$  が  $C^\omega$   $G$ -多様体のとき、 $M$  に  $C^\omega$   $G$ -同変 Riemann 計量があることは知られている。よって  $S_l$  と  $S_k$  に  $G_l$ -と  $G_k$ -同変 Riemann 計量をいれる。それらは異なるが、少し技巧的に1の準解析的  $C^r$  分割を使って、繋げる。そして  $(***)_l, k$  を満たすように  $\pi_k^X$  を修正する。□

最後に既に何回かでてきたことであるが、準解析カテゴリーの大事な特色の一つを述べておく。それは1の準解析的  $C^r$  分割が使えることである。 $C^\omega$  カテゴリーでは使えない。

## REFERENCES

- [1] H. Hironaka, *Subanalytic sets*, Number theory, Algebraic geometry and Commutative algebra, Kinokuniya, 1973, 453-493.
- [2] \_\_\_\_\_, *Stratification and flatness*, Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976), Sijthoff and Noordhoff, Alphen aan den Rijn, 1977, 199-265.
- [3] J. L. Koszul, *Sur certains groupes des transformations de Lie*, Colloque de géométrie différentiable, Strasbourg, 1953, 137-141.
- [4] S. Illman, *Every proper smooth action of a Lie group is equivalent to a real analytic action: A contribution to Hilbert's fifth problem*, Ann. Math. Stud., 138 (1995), 189-220.
- [5] T. Matumoto and M. Shiota, *Unique triangulation of the orbit space of a differentiable transformation group and its application*, Adv. Stud. Pure. Math., 9 (1986) 41-55.
- [6] \_\_\_\_\_, *Proper subanalytic transformation groups and unique triangulation of the orbit spaces*, Transformation groups, Poznan 1985, Lecture Notes in Math., Springer, 1217(1986), 290-302.
- [7] R. S. Palais, *On the existence of slices for actions of non-compact Lie groups*, Ann. of Math., 73 (1961), 295-323.
- [8] \_\_\_\_\_,  *$C^1$  action of compact Lie groups on compact manifolds are  $C^1$ -equivalent to  $C^\infty$  action* Amer. J. Math., 92 (1970), 748-759.
- [9] M. Shiota, *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, Progress in Math., 150, Birkhäuser, 1997.
- [10] \_\_\_\_\_, *Thom's conjecture on triangulations of maps*, Topology, 39 (2000), 383-399.
- [11] C. T. Yang, *The triangulability of the orbit space of a differentiable transformation group*, Bull. Amer. Math. Soc., 69 (1963), 405-408.

# ブレイド群の直積における Hurwitz 作用と 低次元トポロジーへの応用

矢口義朗 (日本学術振興会特別研究員 (DC2))

**アブストラクト.** Hurwitz 作用は, 群の直積へのブレイド群の自然な作用として定義されるもので, 低次元トポロジーなどモノドロミーが扱われる対象を研究する上での代数的な道具である. ブレイド群の異なる標準的生成元の組における Hurwitz 作用による軌道の元全体を決定した. さらに, この結果のブレイド状曲面への応用について述べる.

## 1 Hurwitz 作用

$n$  次ブレイド群  $B_n$  の表示が標準的生成元  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  ( $\sigma_i$  は下の図のようなブレイドの同値類) を用いて, 次で与えられる事は良く知られている.

$$\left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_j \sigma_i = \sigma_j \sigma_i \sigma_j (|i-j|=1), \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i (|i-j|>1) \end{array} \right\rangle,$$

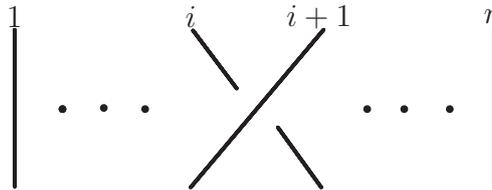


Figure 1.1

$n$  次ブレイド群  $B_n$  は, 群  $G$  の  $n$  個の直積  $G^n$  へ次のように右から作用する ( $B_n$  の Hurwitz 作用 と呼ばれている):

$$\begin{aligned} & (g_1, \dots, g_{i-1}, g_i, g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n) \cdot \sigma_i \\ &= (g_1, \dots, g_{i-1}, g_{i+1}, g_{i+1}^{-1} g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n) \end{aligned}$$

以下では,  $G$  を群とし,  $(g_1, \dots, g_n) \in G^n$  の Hurwitz 軌道 (Hurwitz 作用による軌道) を単に  $(g_1, \dots, g_n) \cdot B_n$  と書く.

$G^n$  の 2 つの元  $(g_1, \dots, g_n)$  と  $(g'_1, \dots, g'_n)$  が Hurwitz 同値 であるとは, それらが同じ Hurwitz 軌道にあるとき, 即ち  $(g_1, \dots, g_n) \in (g'_1, \dots, g'_n) \cdot B_n$  となるときをいう.

本公演では,  $n+1$  次ブレイド群  $B_{n+1}$  の  $n$  個の (異なる) 標準的生成元の組における,  $B_n$  の Hurwitz 軌道の元全体を決定した結果を主結果として報告する. また, 主結果のブレイド状曲面 (詳細は 3 章) への応用を解説する.

**補足.** アルチン群 (ブレイド群の拡張) の標準的生成元の組における Hurwitz 軌道の研究は重要であると思われる ([2,5,6,8,9]). その理由を次のように述べる:

$G$  を任意の群とする.  $G^n$  の任意の元  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$  に対し,  $m_{ij} = \min\{l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\} \mid \pi(g_i, g_j, l) = \pi(g_j, g_i, l)\}$  とする. ここで,  $\pi(g_i, g_j, \infty) = id$  とし,  $l \neq \infty$  ならば  $\pi(g_i, g_j, l) = g_i g_j g_i \cdots$  ( $g_i$  と  $g_j$  の長さ  $l$  の積) とする. (例えば,  $\pi(g_i, g_j, 3) = g_i g_j g_i$  である.) この時, アルチン群  $A^{\vec{g}}$  を  $\langle t_1, \dots, t_n \mid \pi(t_i, t_j, m_{ij}) = \pi(t_j, t_i, m_{ij}), 1 \leq i < j \leq n \rangle$  と定めることで, 準同型  $f^{\vec{g}} : A^{\vec{g}} \rightarrow G$ ;  $t_i \mapsto g_i$  が定義でき,  $(f^{\vec{g}})^n((t_1, \dots, t_n) \cdot B_n) = (g_1, \dots, g_n) \cdot B_n = \vec{g} \cdot B_n$  となる. したがって, Hurwitz 軌道  $(t_1, \dots, t_n) \cdot B_n$  の元全体を求める事は,  $\vec{g} \cdot B_n$  の元全体を求めるために役立つと思われる.

本公演はアルチン群の1つであるブレイド群に焦点をあてる.

## 2 Some notions

この章では,  $n+1$  次ブレイド群  $B_{n+1}$  の  $n$  個の直積  $B_{n+1}^n$  への  $B_n$  の Hurwitz 作用について述べる. 煩雑さを防ぐために,  $B_n$  と  $B_{n+1}$  の標準的生成元を区別することにする:  $t_1, \dots, t_n$  をそれぞれ  $B_{n+1}$  の標準的生成元  $\sigma_1, \dots, \sigma_n$  とし,  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  を  $B_n$  の標準的生成元とする.

**定理 2.1.**  $1$  から  $n$  までの置換の元  $\varphi \in \text{Sym}\{1, \dots, n\}$  に対して,

- (1)  $(t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n = \{\varphi - \text{good}\}$ ,
- (2)  $\#((t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n) = (n+1)^{n-1}$ .

**注意.** S.P.Humphries の論文 [6] において,  $\varphi = id$  の場合の Hurwitz 軌道, 即ち  $(t_1, \dots, t_n) \cdot B_n$  の元が, "ある条件" を満たすことが示されている. そこで著者は, [6] で導入された "ある条件" を, 一般の  $\varphi$  に対して拡張し " $\varphi$ -good" と名付けた. そして, Hurwitz 軌道  $(t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n$  の元が, 条件 " $\varphi$ -good" を満たす事を示した. 更に, 集合としての等号  $(t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n = \{\varphi - \text{good}\}$  であることを示した. また位数  $\#((t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n)$  が  $(n+1)^{n-1}$  であることは,  $\varphi = id$  の場合に [6] で示されているが, 一般の  $\varphi$  の場合にも成り立つ事が分かった.

さて, 置換  $\varphi$  を一つ固定して,  $\varphi$ -good の定義を述べよう.

$A = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq n, \varphi^{-1}(k-1) < \varphi^{-1}(k)\}$  とおく.

このとき,  $1 \leq i < j \leq n+1$  に対して,  $B_{n+1}$  の元  $t_{ij}^\varphi$  を次で定義する:

$$t_{ij}^\varphi = \left( \prod_{k=i+1}^{j-1} t_k^{\epsilon_k} \right)^{-1} t_i \prod_{k=i+1}^{j-1} t_k^{\epsilon_k}, \text{ 但し } \epsilon_k = 1 (k \in A), \epsilon_k \neq -1 (k \notin A).$$

$t_{ij}^\varphi$  を  $\varphi$  に付随するバンド生成元と呼ぶ.

また, 集合  $\Sigma^\varphi$  を  $\Sigma^\varphi = \{t_{ij}^\varphi \in B_{n+1} \mid 1 \leq i < j \leq n+1\}$  で定義する.

$1 \leq k \leq n+1$  に対して,  $P_k = (k, 0) \in \mathbb{R}^2$  とする.

$C_1$  を  $\mathbb{R}^2$  内の円周で, 2点  $P_1, P_{n+1}$  を通り, 線分  $\overline{P_1 P_{n+1}}$  を直径に持つものとする. 今,  $C_1$  上に点  $Q_k$  ( $1 \leq k \leq n+1$ ) を次のようにとる:

- $Q_1 = P_1, Q_{n+1} = P_{n+1}$
  - $2 \leq k \leq n$  に対して,  $Q_k = (k, y_k)$ , 但し  $y_k < 0$  ( $k \in A$ ),  $y_k > 0$  ( $k \notin A$ ).
- このとき, 線分  $\overline{Q_i Q_j}$  を,  $t_{ij}^\varphi$  に対応する線分と呼ぶ.

**例 2.2.**  $n = 4$  とし,  $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4)) = (4, 3, 1, 2)$  とする. このとき,  $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq 4, \varphi^{-1}(k-1) < \varphi^{-1}(k)\} = \{2\}$  であり,

(1)  $t_{14}^\varphi \in \Sigma^\varphi$  は,  $t_{14}^\varphi = t_3 t_2^{-1} t_1 t_2 t_3^{-1}$  (図 2.1) である.

(2) 図 2.2 は,  $t_{14}^\varphi \in \Sigma^\varphi$  に対応する線分である.

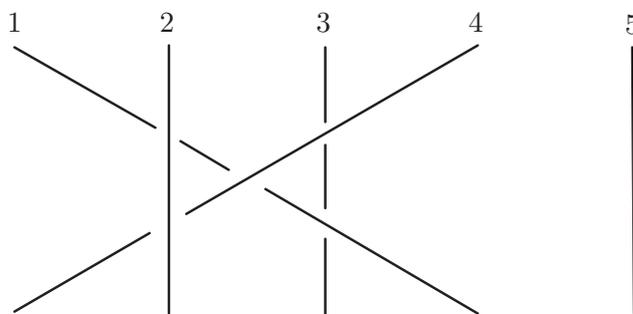


図 2.1

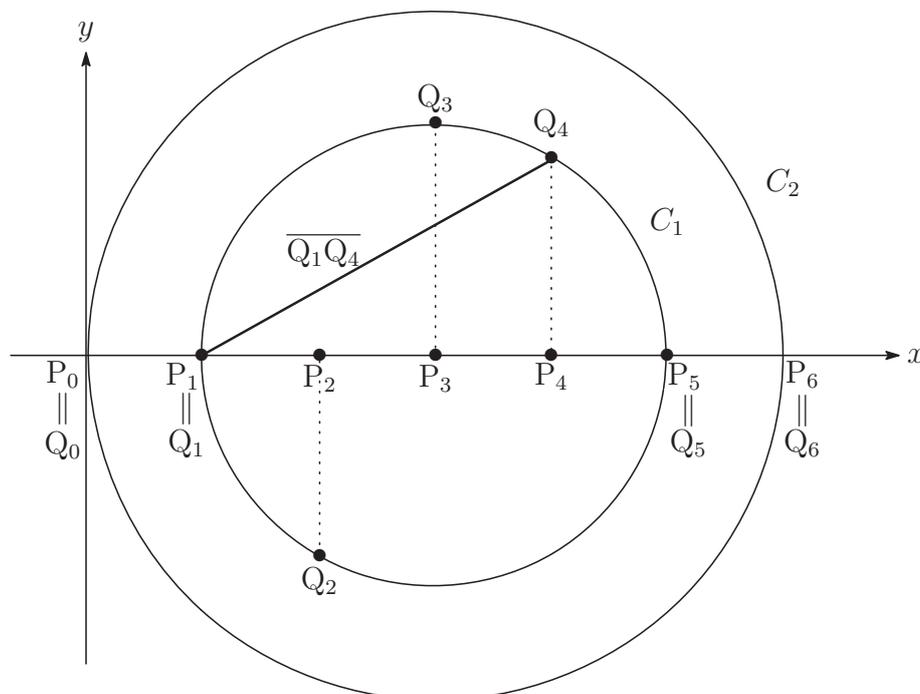


図 2.2

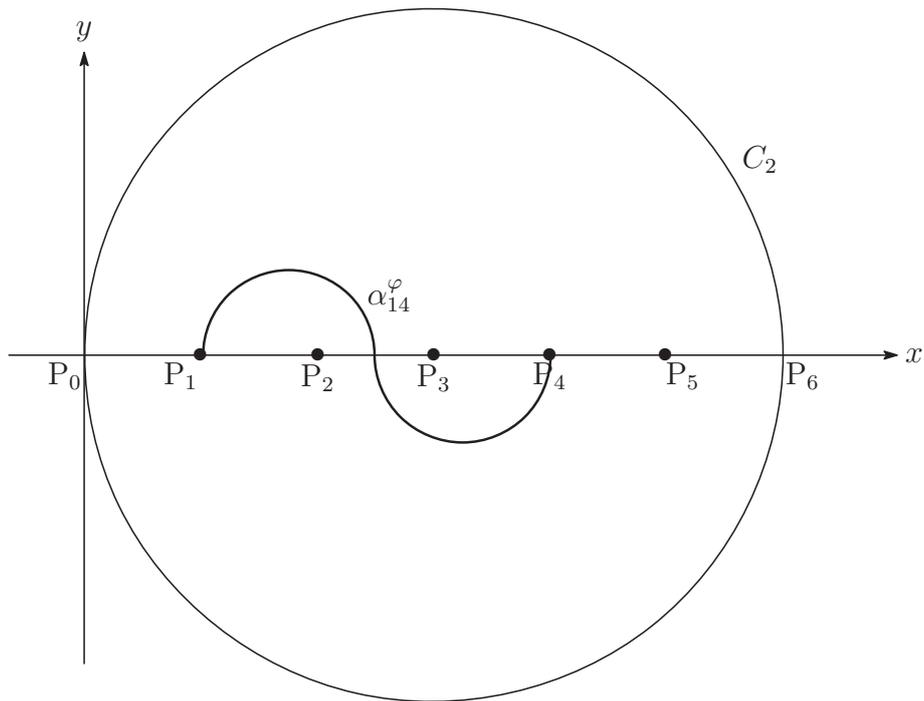


図 2.3

**注意.** 前のページで、「バンド生成元に対応する線分」を定義したが、なぜこのような呼び方をするのか、その理由を説明する：

$P_0 = Q_0 = (0, 0) \in \mathbb{R}^2$ ,  $P_{n+2} = Q_{n+2} = (n+2, 0) \in \mathbb{R}^2$  とし,  $C_2$  を  $\mathbb{R}^2$  内の円周で, 2点  $P_0, P_{n+1}$  を通り, 線分  $\overline{P_0 P_{n+2}}$  を直径にもつものとする.

$D$  を  $\mathbb{R}^2$  内の  $\partial D = C_2$  なる円板とする.  $D$  のアンビエントイソトピー  $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$  で, 各  $u \in [0, 1]$  に対して  $h_0 = id$ ,  $h_u|_{\partial D} = id$  を満たし, 各  $u \in [0, 1]$  と各  $(x, y) \in \cup_{i=0}^{n+1} \overline{Q_i Q_{i+1}}$  に対し,  $h_u(x, y) = (x, (1-u)y)$  を満たすものをとる.

このとき, 各  $i$  に対して,  $h_1(Q_i) = P_i$  となる. ここで,  $1 \leq i < j \leq n+1$  に対して,  $\alpha_{ij}^\varphi = h_1(\overline{Q_i Q_j})$  と定める. このとき,  $\partial \alpha_{ij}^\varphi = \{P_i, P_j\}$  であり,  $k \in A$  ならば  $\alpha_{ij}^\varphi$  は  $P_k$  の上方,  $k \in A$  ならば  $\alpha_{ij}^\varphi$  は  $P_k$  の下方にくる (図 2.3 は, 例 2.2 における線分  $\overline{Q_1 Q_4}$  の  $h_1$  による像  $\alpha_{14}^\varphi$  を表す).

ブレイド群と穴あき円板の写像類群の間の同型写像 ([1]) を通して, バンド生成元  $t_{ij}^\varphi$  は  $\alpha_{ij}^\varphi$  と同一視が出来る (図 2.1 の  $t_{14}^\varphi$  は, 図 2.3 の  $\alpha_{14}^\varphi$  の十分小さなカラー近傍を, その外側を止めながら 180 度回転するという,  $(D, \{P_1, \dots, P_5\})$  の自己同相写像のイソトピー類に対応する).

さらに,  $h_1$  を通して,  $\alpha_{ij}^\varphi$  と  $\overline{Q_i Q_j}$  が同一視できるので,  $t_{ij}^\varphi$  と  $\overline{Q_i Q_j}$  が同一視できる. これが,  $\overline{Q_i Q_j}$  を  $t_{ij}^\varphi$  に対応する線分と名付けた所以である.

**定義 2.3.**  $(\Sigma^\varphi)^n$  の元  $(g_1, \dots, g_n)$  が  $\varphi$ -good であるとは,  $g_1, \dots, g_n$  にそれぞれ対応する線分  $a_1, \dots, a_n$  が条件 (i)-(iii) を満たすときにいう :

- (i)  $k \neq l$  ならば,  $a_k$  と  $a_l$  は交わらない, またはある 1 点  $Q_i$  で交わる.
- (ii)  $k < l$  かつ,  $a_k$  と  $a_l$  が交わるならば, 次の (\*) が成り立つ. ここで, (i) より,  $\partial a_k \cup \partial a_l$  はちょうど 3 点からなり,  $\partial a_k = \{Q_x, Q_y\}$ ,  $\partial a_l = \{Q_y, Q_z\}$  とする :  
(\*) 「 $Q_x, Q_y, Q_z$  はこの順に, 円周  $C_1$  上に反時計周りに並ぶ.」
- (iii)  $a_1 \cup \dots \cup a_n$  は 1 点とホモトピー同値である.

**例 2.4.**  $n = 4$  とし,  $(\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4)) = (4, 3, 1, 2)$  とする.

このとき,  $(t_{23}^\varphi, t_{24}^\varphi, t_{13}^\varphi, t_{25}^\varphi) \in (\Sigma^\varphi)^4$  は  $\varphi$ -good である.

実際,  $A = \{k \in \mathbb{N} \mid 2 \leq k \leq 4, \varphi^{-1}(k-1) < \varphi^{-1}(k)\} = \{2\}$  であり,  $t_{23}^\varphi, t_{24}^\varphi, t_{13}^\varphi, t_{25}^\varphi$  に対応する線分は図 2.4 のようになる.

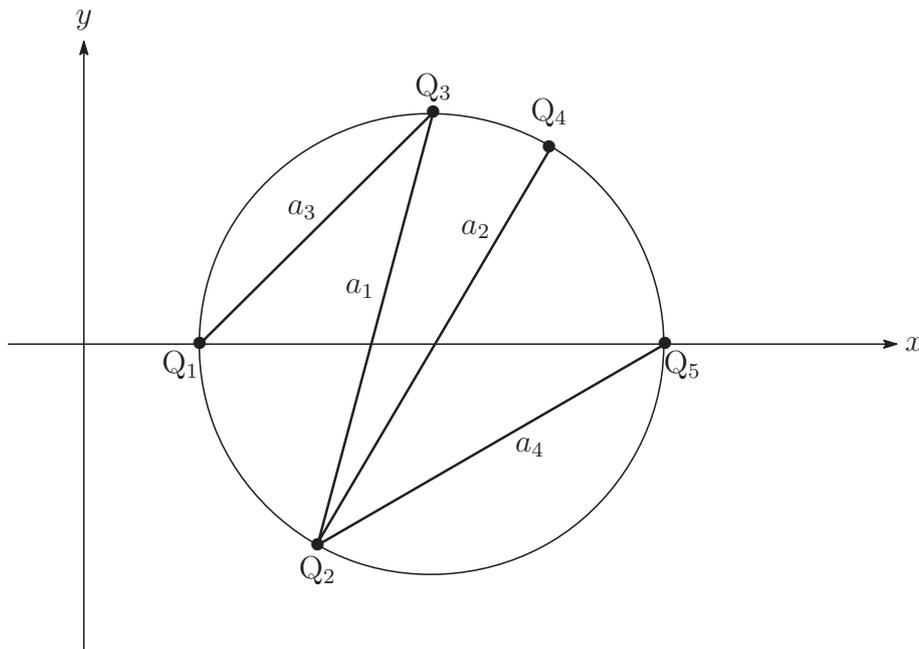


図 2.4

**補足.**  $\varphi \in \text{Sym}\{1, \dots, n\}$  に対して,  $\{i_1, \dots, i_k\} = \{2, \dots, n\} \setminus A$  ( $i_1 < \dots < i_k$ ) とし,  $\Delta_\varphi = \Delta_{i_k} \Delta_{i_{k-1}} \dots \Delta_{i_1} \in B_{n+1}$  とする. 但し,  $\Delta_l = t_1 t_2 \dots t_{l-1} \in B_{n+1}$  とする. このとき,  $((\Delta_\varphi)^{-1} t_1 \Delta_\varphi, \dots, (\Delta_\varphi)^{-1} t_n \Delta_\varphi)$  は  $\varphi$ -good である (要確認). 定理 2.1(1) を認めると,  $((\Delta_\varphi)^{-1} t_1 \Delta_\varphi, \dots, (\Delta_\varphi)^{-1} t_n \Delta_\varphi) \in (t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n$  である. これは, Hurwitz 軌道  $(t_1, \dots, t_n) \cdot B_n$  が  $\Delta_\varphi$  による共役によって  $(t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n$  に移る事を意味しており,  $\#((t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \cdot B_n) = \#((t_1, \dots, t_n) \cdot B_n)$  が成り立つ. 更に, [6] によって  $\#((t_1, \dots, t_n) \cdot B_n) = (n+1)^{n-1}$  であり, 定理 2.1(2) が示せた.

### 3 ブレイド状曲面への応用

この章では、PL カテゴリー、もしくは  $C^\infty$  カテゴリーの中で、ブレイド状曲面 ([3,4]) の定義し、第2章で得られた結果の応用を述べる。

$D_1^2, D_2^2$  を2次元円板とし、 $D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_i^2$  ( $i = 1, 2$ ) を  $i$  番目の標準的射影とする。  $D_1^2$  の内部  $IntD_1^2$  内の  $m$  個の点の集合  $Q_m \subset D_1^2$  を固定し、境界  $\partial D_2^2$  上の点  $y_0 \in \partial D_2^2$  を固定する。

$D_1^2 \times D_2^2$  の中へ適切にかつ局所平坦に埋め込まれた向き付け可能な2次元多様体  $S$  が  $y_0$  を基点とする  $m$  次ブレイド状曲面 であるとは、次の条件をみたすときにいう。

- (1) 制限写像  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$  が次数  $m$  の単純分岐被覆写像である、
- (2)  $S$  の境界  $\partial S$  がソリットーラス  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  に含まれる、
- (3)  $pr_1(S \cap pr_2^{-1}(y_0)) = Q_m$ .

ここで、分岐被覆  $pr_2$  が単純であるとは、 $IntD_2^2$  内の有限集合  $\Sigma(S) \subset D_2^2$  が存在し、各点  $y \in \Sigma(S)$  に対して、 $|S \cap pr_2^{-1}(y)| = m - 1$  であり、各点  $y \in D_2^2 \setminus \Sigma(S)$  に対して、 $|S \cap pr_2^{-1}(y)| = m$  であるときにいう。このとき、 $\Sigma(S) \subset D_2^2$  を  $S$  の分岐点の集合と呼ぶ。

以下、特に断らない限り、単に  $m$  次ブレイド状曲面といったら、 $y_0$  を基点とする  $m$  次ブレイド状曲面であるとする。

**定義 3.1.**  $S, S'$  を  $m$  次ブレイド状曲面とする。

(1)  $S$  と  $S'$  が 強い同値 であるとは、 $S$  と  $S'$  が次の条件 (☆) を満たす  $D_1^2 \times D_2^2$  のイソトピー  $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$  によって  $D_1^2 \times D_2^2$  の中でアンビエントイソトピックになるときをいう：

(☆) 各  $u \in [0, 1]$  に対して、 $pr_2 = pr_2 \circ h_u$ , かつ  $h_u|_{pr_2^{-1}(y_0)} = id$ .

(2)  $S$  と  $S'$  が 同値 であるとは、 $S$  と  $S'$  が次の条件 (★) を満たす  $D_1^2 \times D_2^2$  のイソトピー  $\{h_u\}_{u \in [0,1]}$  によって  $D_1^2 \times D_2^2$  の中でアンビエントイソトピックになるときをいう：

(★) 各  $u \in [0, 1]$  に対して、 $\bar{h}_u \circ pr_2 = pr_2 \circ h_u$  を満たす同相写像  $\bar{h}_u : D_2^2 \rightarrow D_2^2$  が存在する、かつ  $h_u|_{pr_2^{-1}(y_0)} = id$ .

以下では、 $S$  を  $D_1^2 \times D_2^2$  内の次数  $m$  のブレイド状曲面とし、 $\Sigma(S)$  を  $S$  の分岐点の集合とする。また、 $C_m = C_m(IntD_1^2)$  を  $IntD_1^2$  の (順序を無視した)  $m$  点配置空間とする。

このとき、ループ  $c : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0)$  に対して、ループ  $\alpha_S(c) : ([0, 1], \{0, 1\}) \rightarrow (C_m, Q_m)$  を  $\alpha_S(c)(t) = pr_1(S \cap pr_2^{-1}(c(t))) \in C_m$  で定義する。 $S$  の ブレイドモノドロミー とは準同型  $\alpha_S : \pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0) \rightarrow \pi_1(C_m, Q_m) = B_m$ ,  $\alpha_S([c]) = [\alpha_S(c)]$  のことである。

以下,  $\#(\Sigma(S)) = n$  とする.  $\Sigma(S)$  に関する Hurwitz アークシステム とは,  $D_2^2$  上の  $n$  個の単純アークの組  $A = (a_1, \dots, a_n)$  で, 次の条件を満たすものをいう:

- 各  $a_i$  の始点は  $y_0$ , 終点は  $\Sigma(S)$  のどれか 1 点である.
- $i \neq j$  ならば  $a_i \cap a_j = \{y_0\}$  である.
- $y_0$  の周りで  $a_1, \dots, a_n$  はこの順に現れる.

また, Hurwitz アークシステム  $A$  に付随する, (基本群  $\pi_1(D_2^2 \setminus \Sigma(S), y_0)$  の) Hurwitz 生成系  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  が定まる.

このとき,  $S$  の  $A$  に付随する ブレイドシステム とは,  $B_m^n$  の元  $(\alpha_S(\mu_1), \dots, \alpha_S(\mu_n))$  のことをいう.

$l$  を  $D_1^2 \times \partial D_2^2$  内の閉  $m$  ブレイドで,  $pr_1(l \cap pr_2^{-1}(y_0)) = Q_m$  を満たすものとする.  $b \in B_m$  を,  $l$  をファイバー  $pr_2^{-1}(y_0)$  で切り開いて得られる  $m$  ブレイドとする.  $SA_m$  を,  $B_m$  の標準的生成元の共役元と,  $B_m$  の標準的生成元の逆元の共役元からなる,  $B_m$  の部分集合とする.

**補題 3.2.** ( $[3,4]$ )  $B_m^n$  の元  $(b_1, \dots, b_n)$  が,  $l$  を境界とする  $n$  個の分岐点をもつ  $m$  次のブレイド状曲面のブレイドシステムであるための必要十分条件は, 次の (1), (2) を満たすことである:

- (1) 各  $i \in \{1, \dots, n\}$  に対して  $b_i \in SA_m$ ,
- (2)  $b_1 \cdots b_n = b$ .

**補題 3.3.** ( $[3,4]$ )  $S, S'$  を  $n$  個の分岐点を持ち,  $\Sigma(S) = \Sigma(S')$  をみたすブレイド状曲面とする. また,  $(b_1, \dots, b_n), (b'_1, \dots, b'_n)$  を同じ Hurwitz アークシステムに付随するブレイドシステムとする. このとき,

- (1)  $S$  と  $S'$  が強い同値である必要十分条件は,  $(b_1, \dots, b_n) = (b'_1, \dots, b'_n)$  を満たすことである.
- (2)  $S$  と  $S'$  が同値である必要十分条件は,  $(b_1, \dots, b_n)$  と  $(b'_1, \dots, b'_n)$  が Hurwitz 同値になることである.

$S$  を,  $(b_1, \dots, b_n) \in (SA_m)^n$  をブレイドシステムとして持つ次数  $m$  のブレイド状曲面とする.  $X_S$  を,  $\Sigma(S) = \Sigma(S')$  をみたす  $S$  と同値なブレイド状曲面  $S'$  達の強い同値類とする. 補題 3.2 と補題 3.3 より,  $X_S$  の元全体と Hurwitz 軌道  $(b_1, \dots, b_n) \cdot B_n$  の元全体には 1 対 1 対応がある. 定理 2.1 の系として次を得る: ただし,  $t_1, \dots, t_n$  は  $B_{n+1}$  の標準的生成元とし,  $\varphi$  を  $Sym\{1, \dots, n\}$  の固定された元とする.

**系 3.4.**  $S$  を,  $(t_{\varphi(1)}, \dots, t_{\varphi(n)}) \in (SA_{n+1})^n$  をブレイドシステムとして持つ, 次数  $n+1$  のブレイド状曲面とする. このとき,  $\#(X_S) = (n+1)^{n-1}$  である.

## おわりに

東京大学の伊藤哲也氏は [7] において, ブレイド群  $B_m$  の 2 つの直積  $B_m^2$  の元における Hurwitz 軌道が有限のとき, その数を上から評価する  $m$  の式を与えている. また  $m = 3$  の場合においては, (一般の  $n$  に対して)  $n$  個の直積  $B_3^n$  の元における Hurwitz 軌道が有限のとき, その数を上から評価する  $n$  の式を与えている. さらに  $m = n = 3$  の場合においては, Hurwitz 軌道が有限のとき, その有限個の元全体を, 作用の推移グラフを使って完全に決定している.

## 参考文献

- [1] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics Studies **82**, Princeton University Press, 1974.
- [2] J. Michel, *Hurwitz action on tuples of Euclidean reflections*, J. Algebra **295**(2006), 289-292.
- [3] L. Rudolph, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 1-37.
- [4] S. Kamada, *Braid and Knot Theory in Dimension Four*, Math. Surveys and Monographs **95**, Amer. Math. Soc., 2002.
- [5] S. P. Humphries, *Finite Hurwitz braid group actions on sequences of Euclidean reflections*, J. Algebra **269** (2003), 556-588.
- [6] S. P. Humphries, *Finite Hurwitz braid group actions for Artin groups*, Isr. J. Math. **143** (2004), 189-222.
- [7] T. Ito, *Finite orbits of Hurwitz actions on braid systems*, arXiv:0912.0405v2
- [8] Y. Yaguchi, *The orbits of Hurwitz action of the braid groups on the standard generators*, Fund. Math., to appear.
- [9] 矢口義朗, On the Hurwitz orbits of Coxeter type, 「結び目の数学 I I」報告集

Department of Mathematics, Hiroshima  
University, Higashi-Hiroshima, Hiroshima, 739-8526, Japan  
email: d083645@hiroshima-u.ac.jp

# Braid presentation of handlebody-knots

岸本 健吾 (大阪市立大学数学研究所)

## 1 はじめに

ハンドル体結び目とは, 3次元球面  $S^3$  に埋め込まれたハンドル体のことである. ハンドル体結び目の種数とは, 埋め込むハンドル体の種数のことである. 通常の結び目は, その正則近傍をとることで種数1のハンドル体結び目とみなすことができるので, ハンドル体結び目は結び目の自然な拡張のひとつである.

2つのハンドル体結び目が,  $S^3$  のイソトピーで互いにくっつきあうとき, それらは同値であるという. また  $S^3$  内に標準的に埋め込まれたハンドル体と同値なものを自明なハンドル体結び目という.

ハンドル体結び目は, ある連結な空間3価グラフ ( $S^3$  に埋め込まれた有限3価グラフ) の正則近傍として表すことができ ([7] 参照), この空間3価グラフをハンドル体結び目の空間スパインという.

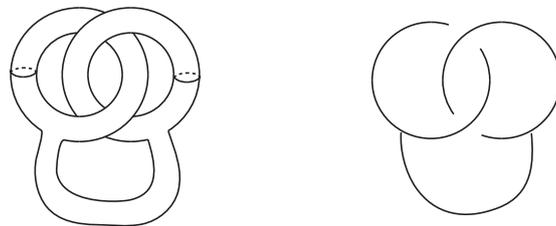


図 1: ハンドル体結び目とその空間スパイン

一つのハンドル体結び目に対して, その空間スパインは無数個存在するが, それらは  $S^3$  のイソトピーと,  $S^3$  内の局所変形である IH 変形で互いに移りあうことが, Ishii によって示されている [2].

全ての結び目は, (次の章で定義する) ブレイドを用いて表されることが知られている. ブレイド全体が群構造をもつことから, ブレイドは結び目よりも扱いやすいものであり, ブレイド表示を通じた結び目の研究は盛んに行われている. ハンドル体結び目においても, 適切なブレイド表示を与えることによって, ブレイドを通してハンドル体結び目を研究することが本研究の動機である.

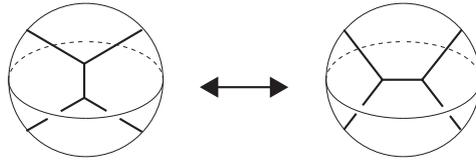


図 2: IH 変形

本稿では, ハンドル体結び目のブレイド表示の定義を与え, 全てのハンドル体結び目がブレイド表示をもつことを示す. また3次ブレイド表示をもつ種数2のハンドル体結び目について得られた結果を紹介する.

## 2 ハンドル体結び目のブレイド表示

立方体内において, 上から下に単調に絡ませた  $n$  本の紐の和集合のことを  $n$  次ブレイドという. 特に, 各紐の端点の位置が同じブレイドを純ブレイドという. 図3のように, ブレイドの端点を順につなぐことで結び目(または絡み目)が得られ, これをブレイドの閉包という. このように結び目をブレイドの閉包として表すことを, **結び目のブレイド表示**といい, 全ての結び目がブレイド表示をもつことが Alexander によって示されている [1].

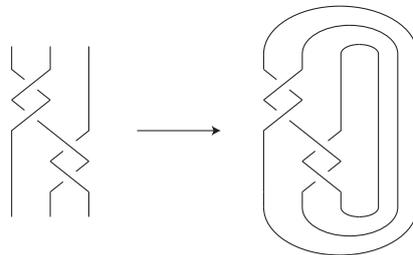
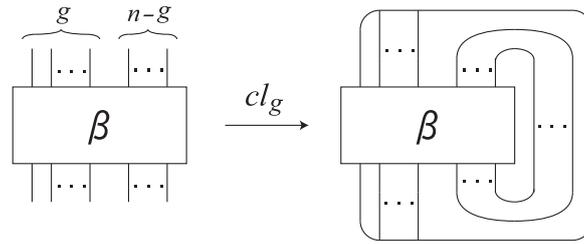


図 3: 純ブレイドとその閉包の例

ハンドル体結び目のブレイド表示を以下のように与える.

$n$  次ブレイド  $\beta$  と自然数  $g \leq n$  に対して, 図4のようにまず1番目の上下の端点と,  $(g+1)$ 番目から  $n$ 番目の上下の端点を  $(n-g+1)$ 個の平行な曲線で閉じる. その後2番目から  $g$ 番目の上下の端点を, 1番目の上下の端点を結ぶ曲線にそれぞれ3個頂点でつなげる. 以上の操作によって, 空間3個グラフと絡み目の和集合が得られる. これをブレイド  $\beta$  の種数  $g$  の閉包といい,  $cl_g(\beta)$  で表す. 本稿では,  $cl_g(\beta)$  が連結である場合, つまり  $cl_g(\beta)$  の連結成分が1つである場合を考える.  $cl_g(\beta)$  は, 種数  $g$  のハンドル体結び目の空間スパインであるので, そのハンドル体結び目はブレイドによって表すことができる. このようにハンドル体結び目をブレイドで表すことを**ハンドル体結び目のブレイド表示**という. このブレイド表示は, 結び目のブレイド表示の拡張となっている. 実際に  $g=1$  のとき, つまり種数1の閉包は, 通常のブレイドの閉包である.

図 4: 種数  $g$  の閉包

**定理 2.1.** 全てのハンドル体結び目はブレイド表示をもつ.

この定理は, Alexander による結び目についての結果の拡張となっている.

ハンドル体結び目  $H$  をブレイド表示するために必要なブレイドの紐の最小数を**ブレイド指数**といい,  $b(H)$  で表す. ブレイド指数は結び目に対して定義された古典的な不変量のひとつで, 結び目の複雑さを測るものである.

本稿で導入したブレイド表示の長所の一つは, ハンドル体結び目の自明性とブレイド指数の間に次の関係があることである.

**命題 2.2.** 種数  $g$  のハンドル体結び目  $H$  が自明である必要十分条件は,  $b(H) = g$  である.

### 3 ハンドル体結び目の $R_p$ 彩色

この章では, ハンドル体結び目の不変量である  $R_p$  彩色 [2, 3] の定義を紹介する.

$X$  を空でない集合とする. 二項演算  $*$ :  $X \times X \rightarrow X$  が次の公理をみたすとき,  $(X, *)$  を**カンドル** [4, 6] という.

[Q<sub>1</sub>] 任意の  $a \in X$  に対して,  $a * a = a$ ,

[Q<sub>2</sub>] 任意の  $a \in X$  に対して,  $S_a: X \rightarrow X; x \mapsto x * a$  が全単射,

[Q<sub>3</sub>] 任意の  $a, b, c \in X$  に対して,  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$ .

$X = \mathbb{Z}_p (= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ , 二項演算を  $a * b = 2b - a$  とするとき,  $R_p := (\mathbb{Z}_p, *)$  はカンドルの公理をみたし, これを**二面体カンドル**という.

$K$  を空間 3 価グラフとし,  $E(K)$  を  $K$  の辺の集合とする.  $\varphi: E(K) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  が  $K$  の  $\mathbb{Z}_2$  フローであるとは, 各 3 価頂点に対して, 接続している辺を  $e_1, e_2, e_3$  とするとき,  $\varphi(e_1) + \varphi(e_2) + \varphi(e_3) \equiv 0 \pmod{2}$  をみたすときをいう.  $K$  と  $\varphi$  の組  $(K, \varphi)$  を  $\mathbb{Z}_2$  フロー付き空間 3 価グラフという.

次に  $\mathbb{Z}_2$  フロー付き空間 3 価グラフに対して,  $R_p$  彩色を定義する.  $(K, \varphi)$  を  $\mathbb{Z}_2$  フロー付き空間 3 価グラフとし,  $D$  をその図式とする.  $A(D)$  を  $D$  の弧全体の集合とする. ここで  $D$  の弧とは, 下交点または頂点を端点とする  $D$  の部分曲線とする. 写像  $C: A(D) \rightarrow R_p$  が  $D$  の  $R_p$  彩色であるとは, 全ての交点と頂点の周囲で図 5 の状態であるときをいう.

ここで,  $\underline{s}$  はフロー  $\varphi$  で与えられる辺の整数値を表し, また  $a *^0 b := a$ ,  $a *^1 b := a * b$  とする.

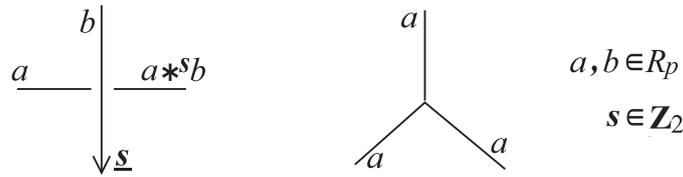
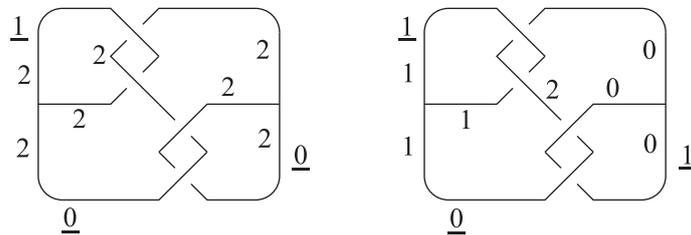


図 5:

写像  $C : \mathcal{A}(D) \rightarrow R_p$  が定値写像であるとき,  $C$  は  $D$  の  $R_p$  彩色である. このような  $R_p$  彩色を自明な彩色という. また  $D$  の  $R_p$  彩色全体を  $Col_{R_p}(D)$  と表す.

図 6: 自明な  $R_3$  彩色と非自明な  $R_3$  彩色

**定理 3.1** ([3]).  $D, D'$  を  $\mathbb{Z}_2$  フロー付き空間 3 価グラフ  $(K, \varphi)$  の図式とする. このとき,  $\#Col_{R_p}(D) = \#Col_{R_p}(D')$  が成り立つ. つまり  $Col_{R_p}(K, \varphi) := Col_{R_p}(D)$  は  $\mathbb{Z}_2$  フロー付き空間 3 価グラフの不変量である.

多重集合  $\#Col_{R_p}^\Sigma(K)$  を次で定める.

$$\#Col_{R_p}^\Sigma(K) := \{\#Col_{R_p}(K, \varphi) \mid \varphi \text{ は } K \text{ の } \mathbb{Z}_2 \text{ フロー}\}.$$

**定理 3.2** ([3]). ハンドル体結び目  $H$  の空間スパイン  $K, K'$  に対して, 次が成り立つ.

$$\#Col_{R_p}^\Sigma(K) = \#Col_{R_p}^\Sigma(K').$$

つまり  $\#Col_{R_p}^\Sigma(H) := \#Col_{R_p}^\Sigma(K)$  はハンドル体結び目の不変量である.

空間 3 価グラフ  $K$  のトンネル数  $\tau(K)$  とは,  $\partial t_i \subset K$  であり, かつ  $K \cup t_1 \cup \dots \cup t_n$  の補空間がハンドル体となるような,  $K$  の外部に埋め込まれた互いに交わらない弧  $t_1, \dots, t_n$  の最小数のことである ([5] 参照). ハンドル体結び目の定義から, 同じハンドル体結び目  $H$  を表す空間 3 価グラフのトンネル数は全て等しいことがわかるので,  $\tau(H) := \tau(K)$  とする.

**定理 3.3** ([2]). ハンドル体結び目  $H$  の任意の空間スパイン  $K$  と,  $K$  の任意の  $\mathbb{Z}_2$  フロー  $\varphi$  に対して, 次が成り立つ.

$$\log_p(\#Col_{R_p}(K, \varphi)) - 1 \leq \tau(H).$$

ブレイド指数の定義から  $\tau(H) \leq b(H) - g$  が成り立つので, 次が得られる.

**系 3.4.** ハンドル体結び目  $H$  の任意の空間スパイン  $K$  と,  $K$  の任意の  $\mathbb{Z}_2$  フロー  $\varphi$  に対して, 次が成り立つ

$$\log_p(\#Col_{R_p}(K, \varphi)) + g - 1 \leq b(H).$$

**例 3.5.** 図7の  $\mathbb{Z}_2$  フロー付き空間3価グラフを  $(K, \varphi)$  とし,  $K$  の表すハンドル体結び目を  $H$  とする. このとき,  $\#Col_{R_3}(K, \varphi) = 27$  であることから,  $4 \leq b(H)$  が分かる. また  $(K, \varphi)$  は4次ブレイドの種数2の閉包として表されているので,  $b(H) = 4$  である.

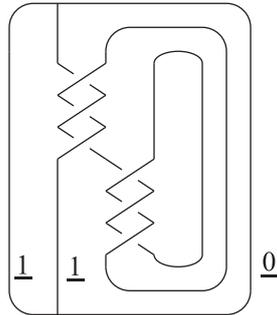


図 7:

#### 4 3次ブレイド表示をもつ種数2のハンドル体結び目

以降, 3次ブレイド表示をもつ種数2のハンドル体結び目について述べる. 3次ブレイド  $\beta$  に対して, 種数2の閉包  $cl_2(\beta)$  がいつ連結な種数2のハンドル体結び目になるかを考える. ブレイドのひもの上下のつながりは図8のように6通りであるが, (1) の場合は連結成分が2つであるため除く.

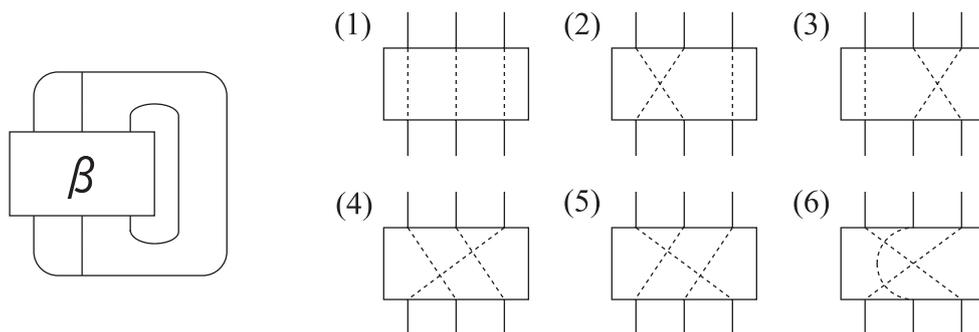


図 8:

また  $S^3$  のイソトピーで, 図9のように各頂点の周りで辺同士を交差させてもよいので, 図8 (3) の形の3次ブレイドを考えれば十分であることがわかる.

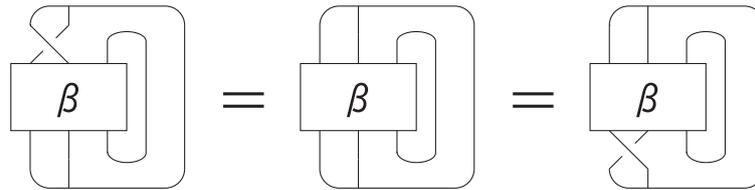


図 9:

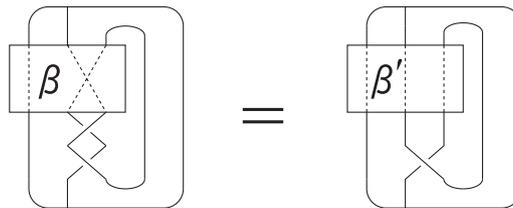


図 10:

さらに図 10 のようにブレイドのひもを適当に交差させることにより,  $\beta$  を純 3 次ブレイド  $\beta'$  と 1 つの交点に分けることができる.

純 3 次ブレイドは, 3 次ブレイド群の標準的生成元  $\sigma_1, \sigma_2$  を用いて,  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \Delta^2 = (\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1)^2$  の積で表すことができる.

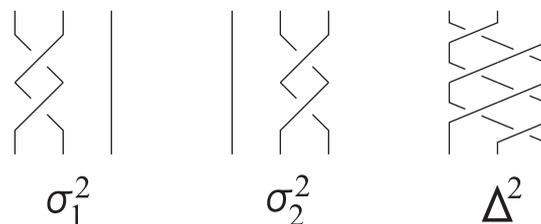


図 11:

**補題 4.1.**  $b(H) = 3$  の種数 2 のハンドル体結び目  $H$  は, 次のような 3 次ブレイド  $\beta$  の閉包で表される.

$$\beta = \Delta^{2k} \left( \prod_{i=1}^r \sigma_2^{b_i} \sigma_1^{a_i} \right) \sigma_2^{b_{r+1}}.$$

ここで,  $k$  は整数,  $a_i, b_i$  ( $1 \leq i \leq r$ ) は偶数,  $b_{r+1}$  は奇数である.

**定理 4.2.**  $p$  を奇素数とする.  $\beta$  を補題 4.1 で与えられている 3 次ブレイドとし, その種数 2 の閉包である空間 3 価グラフを  $K$  で表す.  $K$  の  $\mathbb{Z}_2$  フローを,  $K$  の各辺  $e_1, e_2, e_3$  (図 12) に与えられている  $\mathbb{Z}_2$  の元を用いて,  $\varphi_{i,j,k}$  ( $i, j, k \in \mathbb{Z}_2$ ) で表す.

(1)  $(K, \varphi_{1,1,0})$  が非自明な  $R_p$  彩色をもつのは以下のときのみである.

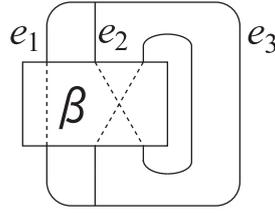


図 12:

$$\bullet \sum_{i=1}^{r+1} b_i P_i \equiv 0 \pmod{p}.$$

$$\bullet \sum_{i=1}^r \left( a_i \sum_{j=1}^i b_j P_j \right) \equiv 1 - (-1)^k \pmod{p}.$$

ここで,  $P_n$  は次の漸化式を満たす数列とする.

$$\begin{cases} P_1 = 1, & P_2 = 1 - a_1 b_1 \\ P_{i+2} = \left( 1 - a_{i+1} b_{i+1} + \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) P_{i+1} + \left( a_{i+1} - a_{i+1} b_i - \frac{a_{i+1}}{a_i} \right) P_i \end{cases}$$

(2)  $(K, \varphi_{0,1,1})$  が非自明な  $R_p$  彩色をもつのは以下のときのみである.

$$\bullet \sum_{i=1}^{r+1} b_i \equiv 2k \pmod{p}.$$

$$\bullet \sum_{i=1}^r \left( b_i - (-1)^{\delta_i} (1 - (-1)^{a_i/2}) \sum_{j=1}^i b_j \right) \equiv 0 \pmod{p},$$

$$\text{ここで } \delta_i = \sum_{k=i+1}^r \frac{a_k}{2}, \delta_r = 0 \text{ とする.}$$

(3)  $(K, \varphi_{1,0,1}), (K, \varphi_{0,0,0})$  は非自明な  $R_p$  彩色をもたない.

この定理 4.2 と系 3.4 から以下が導かれる.

**系 4.3.** ハンドル体結び目  $H$  の空間スパインを  $K$  とする.  $K$  の相異なる 3 つの  $\mathbb{Z}_2$  フローに対して,  $K$  が非自明な  $R_p$  彩色をもつなら,  $4 \leq b(H)$ .

## 参考文献

- [1] J. W. Alexander, *A lemma on a system of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA. **9** (1923) 93–95.

- [2] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008) 1403–1418.
- [3] A. Ishii and M. Iwakiri, *Quandle cocycle invariants for spatial graphs and knotted handlebodies*, preprint.
- [4] D. Joyce, *A classifying invariants of knots, the knot quandle*, *J. Pure Appl. Alg.* **23** (1982) 37–65.
- [5] A. Kawauchi, *A Survey of knot theory*, Birkhäuser Verlag, Basel, Switzerland (1996).
- [6] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, (in Russian), *Math. USSR-Sbornik* **47** (1982) 73–83.
- [7] S. Suzuki, *On linear graphs in 3-sphere*, *Osaka J. Math.* **7** (1970) 375–396.

## A POLYGONAL PERSPECTIVE OF NIELSEN REDUCTION AND THE CHORD SLIDE GROUPOID

ALEX JAMES BENE

ABSTRACT. Nielsen reduction is an algorithm which decomposes any automorphism of a free group into a product of elementary Nielsen transformations. While this may be applied to a mapping class of a surface  $S_{g,1}$  with one boundary component, the resulting decomposition in general will not have a topological interpretation. In this survey, we discuss a variation called fatgraph Nielsen reduction which decomposes such a mapping class into elementary Nielsen transformations interpreted as rearrangements of polygon domains for  $S_{g,1}$  described by systems of arcs in  $S_{g,1}$ . These elementary moves generate the chord slide groupoid of  $S_{g,1}$ , which we survey and describe in terms of generators and relations.

### 1. INTRODUCTION

Let us begin by briefly recalling Nielsen reduction for an automorphism of a free group  $F_n$  on  $n$  free generators  $\{x_i\}_{i=1}^n$ . An *elementary Nielsen transformation* with respect to these generators is an automorphism of  $F_n$  given by either permuting two generators:  $x_i \mapsto x_j$ , inverting some generator:  $x_i \mapsto \bar{x}_i$ , or multiplying some generator by another:  $x_i \mapsto x_i x_j$  for  $j \neq i$ . *Nielsen reduction* is an algorithm which applies basic cancellation theory to decomposes every  $f \in \text{Aut}(F_n)$  into a product of these elementary transformations [4]. Roughly, the algorithm proceeds by continuously applying elementary transformations which reduce the total word length of the generating set  $\{f(x_i)\}_{i=1}^n$  with respect to the  $x_i$ 's whenever possible, with the final goal of obtaining  $\{x_i\}_{i=1}^n$ . In the event that no length-reducing transformation is available, a lexicographical ordering of  $F_n$  is used to ensure progress is made towards this final goal.

Let  $S_{g,1}$  be a surface of genus  $g$  with one boundary component, and let  $\pi = \pi_1(S_{g,1}, p)$  be its fundamental group with respect to a basepoint  $p \in \partial S_{g,1}$  on the boundary. The mapping class group  $\mathcal{M}_{g,1}$  of  $S_{g,1}$  acts on  $\pi$  and can be identified with the subgroup of  $\text{Aut}(\pi)$  which preserves the element  $\partial S_{g,1} \in \pi$  representing the boundary [8]. Since  $\pi \cong F_{2g}$  is a free group, every mapping class  $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}$  can be decomposed via Nielsen reduction; however, this decomposition has no obvious topological interpretation.

In this short survey, we will discuss a variation of the above algorithm for mapping classes called fatgraph Nielsen reduction which was introduced in [3]. This algorithm has a simple topological interpretation in terms of polygon domains of  $S_{g,1}$  (see the next section) and in fact produces a sequence of elementary moves, called CS moves, relating any two polygon domains of  $S_{g,1}$ , not only those differing by the action of a mapping class.

Motivated by this application to Nielsen reduction, we introduce the *chord slide groupoid*  $\mathcal{CS}_{g,1}$ , the groupoid naturally generated by CS moves, which can be thought of as a groupoid laying somewhere “between” the mapping class group  $\mathcal{M}_{g,1}$  and the full automorphism group  $\text{Aut}(\pi)$  (as discussed at the end of Section 2).

This survey essentially summarizes the results of [2] and [3], as well as some results of [1]. However, the perspective taken here is different in that we do not emphasize the use of fatgraphs and chord diagrams, but rather choose to focus on the dual notions of triangulations and polygon domains of  $S_{g,1}$ . In some ways, this perspective is the most natural and classical, and hopefully this will allow for these results to be accessible to a wider audience.

## 2. THE CHORD SLIDE GROUPOID

Instead of considering all generating sets of  $\pi$ , let us consider only those which can be topologically realized by  $2g$  disjoint arcs in  $S_g$  based at  $p$ . We will call such a set a CG set<sup>1</sup> and consider two CG sets equivalent if they are realized by the same collection of arcs. Cutting along any such collection  $\mathbf{X} = \{x_i\}_{i=1}^{2g}$  of arcs decomposes  $S_g$  into a polygon  $P_{\mathbf{X}}$  with  $4g + 1$  edges labelled by  $\pi$  (see below),  $4g$  of which are identified in pairs. We call this a *polygon domain* of  $S_{g,1}$ , and there is a 1-1 correspondence between (equivalence classes of) CG sets and polygon domains of  $S_g$ .

When a particular polygon domain is assumed, we shall denote its oriented sides by  $\{c_i\}_{i=0}^{4g}$ , where the ordering and orientation is given by the clockwise cyclic ordering of  $\partial P$  with  $c_0 = \partial S_{g,1}$ . See Figure 5.1. We shall often abuse notation and confuse an oriented side of  $P$  with the corresponding oriented arc of a CG set or generator in  $\pi$ , so that we will often simply write  $c_i \in \pi$ . An immediate observation is that for any polygon  $P$  decomposition of  $S_{g,1}$  with sides  $\{c_i\}_{i=0}^{4g}$ , we have

$$(1) \quad \prod_{i=0}^{4g} c_i = 1, \quad \text{thus} \quad \prod_{i=1}^{4g} c_i = \overline{\partial S_{g,1}},$$

---

<sup>1</sup>These initials stand for *combinatorial generating set* as introduced in [3], although perhaps *topological generating set* may have been a better name.

where again we consider the boundary  $\partial S_{g,1} \in \pi$  as an element of  $\pi$  and we use a bar to denote an inverse in  $\pi$  or the reversal of an orientation of an arc. As each arc of a CG set  $\mathbf{X}$  corresponds to two oriented sides of  $P_{\mathbf{X}}$ , we can (and will) canonically orient and order the arcs of  $\mathbf{X}$  according to their first appearance in  $\partial P$ .

As a familiar example, a symplectic generating set  $\{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^g$  with  $\prod_{i=1}^g [\alpha_i, \beta_i] = \partial S_{g,1}$  defines a polygon domain of  $S_{g,1}$  with sides  $c_1 = \beta_g$ ,  $c_2 = \alpha_g$ ,  $c_3 = \bar{\beta}_g$ , etc., identified in the “standard” way.

Recall that a groupoid can be described as a category in which every morphism is an isomorphism. We define the *chord slide groupoid*, denoted  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ , to be the groupoid whose objects are copies of  $\pi$ , one for every equivalence class of CG set, and whose morphisms are the automorphisms of  $\pi$  provided by taking one (canonically ordered) CG set to another. In this way, we have a groupoid morphism (functor)  $\mathfrak{CS}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}(\pi)$  which is neither 1-to-1 nor onto (neither faithful nor full), but does have trivial kernel.

By the fundamental result of decorated Teichmüller theory, it is known that  $\mathfrak{CS}_{g,1}$  is equivalent to a trivial groupoid, as it represents a discrete version of the fundamental path groupoid of a contractible space, the so-called decorated Teichmüller space of  $S_{g,1}$  (see [1, 5, 7]). In other words, there is a unique morphism between any two objects of  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ . Moreover, the mapping class group  $\mathcal{M}_{g,1}$  acts freely on the chord slide groupoid via its action on (isotopy classes of) collections of arcs. Thus, the quotient  $\mathfrak{CS}_{g,1}/\mathcal{M}_{g,1}$  is a groupoid equivalent (as a groupoid) to the mapping class group  $\mathcal{M}_{g,1}$  itself. The advantage of the groupoid viewpoint presented here is that the generators and relations can be stated quite simply, as we shall see.

### 3. CS MOVES

As the source and target of every morphism of  $\mathfrak{CS}_{g,1}$  both correspond to a particular generating set for  $\pi$ , it makes sense to ask when a morphism of  $\mathfrak{CS}_{g,1}$  is an elementary Nielsen transformation. Instead, let us ask the related question, when a morphism is a product of elementary transformations involving only one multiplication, so that up to permutation we have

$$x_i \mapsto (x_i^{\pm 1} x_j^{\pm 1})^{\pm 1} \quad \text{for some } i \neq j, \quad x_k \mapsto x_k^{\pm 1} \quad \text{for } k \neq i, j.$$

It is easy to see when the answer to this new question is “yes”. It is exactly when a morphism is between CG sets which differ by the exchange of a single generator such that the corresponding polygon domains  $P_1$  and  $P_2$  are related by cutting a triangle off of  $P_1$  and reattaching it to another side of  $P_1$  (according to the identification of sides of  $P_1$ ). See

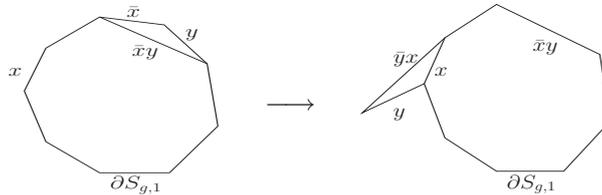


FIGURE 3.1. Triangle cut slide move.

Figure 3.1 where we depict the transformation  $x \mapsto \bar{y}x$ . We call such a move a *triangle cut-slide move*, or simply a CS move for short.

It is not hard to see that a more general cut-slide move, where we cut off a larger polygon from  $P_1$  and reattach it to another side, can be decomposed into triangle cut-slide moves. In fact, we shall soon see that CS moves generate all of  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ , but first we return to the topic of Nielsen reduction.

#### 4. NIELSEN REDUCTION

We now adapt Nielsen reduction to the case of polygon domains of  $S_{g,1}$ , with CS moves taking the place of elementary Nielsen transformations. For this, it will be convenient to fix a particular symplectic generating set  $\mathcal{S} = \{\alpha_i, \beta_i\}_{i=1}^{2g}$  to serve as our “basepoint” in  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ . Let  $P_{\mathcal{S}}$  be the corresponding polygon domain of  $S_{g,1}$ , and let us denote its (ordered) sides by  $\{\sigma_i\}_{i=0}^{4g+1}$ , so that  $\sigma_1 = \beta_g$ , etc.

Now consider any other CG set with polygon domain  $P$  and sides  $\{c_i\}_{i=0}^{4g}$ . Our goal is to find a sequence of CS moves which will transform  $\{c_i\}_{i=1}^{4g}$  to  $\{\sigma_i\}_{i=1}^{4g}$ . As with classical Nielsen reduction, we first concentrate on word length and define the *length* of  $P$  by

$$|P| = \sum_{i=1}^{4g} |c_i|$$

where  $|x|$  denotes the word length of  $x \in \pi$  with respect to the letters  $\{\sigma_i\}_{i=1}^{4g}$ .

We call a side  $c_i$  of  $P$  *unbalanced* if more than half of it cancels with one of its neighbors, meaning either  $c_i = \ell\bar{y}$  and  $c_{i+1} = yr$  as reduced words with  $|y| > |\ell|$ , or  $c_{i-1} = \ell\bar{x}$  and  $c_i = xr$  as reduced words with  $|x| > |r|$ . It is immediate that if  $c_i$  is unbalanced, a CS move involving  $c_i$  can reduce the word length of  $P$ . As  $|P| = 4g$  if and only if  $P = P_{\mathcal{S}}$  (due to the restriction (1)), if we were always able to find an unbalanced side of  $P$ , we would have our algorithm for evolving  $P$  into  $P_{\mathcal{S}}$ . Unfortunately,

we cannot always do this; however, we will always be able to find a CS move which makes progress towards  $P_{\mathcal{S}}$  and is non-increasing in length.

We say that  $c_i$  is balanced if  $c_i = x\bar{y}$ ,  $c_{i-1} = \ell\bar{x}$ , and  $c_{i+1} = yr$  as a reduced words with  $|x| = |y|$ , so that  $c_i$  cancels equal amounts to the left and to the right. Our choice of CG set  $\mathcal{S}$  was motivated by the following fact (which we conjecture to be true for any CG set), whose proof we leave to the interested reader.

**Lemma 4.1.** *If  $P$  has no unbalanced or balanced side, then  $P = P_{\mathcal{S}}$ .*

Now, to make use of the above lemma, we need to introduce an *energy function* which lexicographically orders  $\pi$ . We define the *energy*  $\|x\|$  of an element  $x \in \pi$  by  $\|\sigma_i\| = i$  for  $1 \leq i \leq 4g$  and

$$\|w\| = \left\| \prod_{j=1}^{|w|} \sigma_{i_j} \right\| = \sum_{j=1}^{|w|} (4g+1)^{|w|-j} \|\sigma_{i_j}\|$$

for  $w = \prod_{j=1}^{|w|} \sigma_{i_j}$  as a reduced word. Note that this indeed defines a lexicographical ordering on  $\pi$  and that it extends the word length function in that  $|x| < |y|$  implies  $\|x\| < \|y\|$ . We similarly define the energy of a polygon domain by

$$\|P\| = \sum_{i=1}^{4g} \|c_i\|.$$

**Lemma 4.2.** *If  $c_i$  is a balanced side of  $P$ , then a triangle cut-slide move involving  $c_i$  reduces the energy  $\|P\|$  of  $P$ .*

*Proof.* Let  $c_i = x\bar{y}$  with  $|x| = |y|$ ,  $c_{i-1} = \ell\bar{x}$ , and  $c_{i+1} = yr$ . If we cut off the triangle  $\tau_{i-1,i}$  defined by  $c_i$  and  $c_{i-1}$  and reattach it to the side  $\bar{c}_{i-1}$ , then the CG set is changed by  $\ell\bar{x} \mapsto \ell\bar{y}$  (and thus also  $x\bar{\ell} \mapsto y\bar{\ell}$ ). Similarly, if we cut off  $\tau_{i,i+1}$  and attach it to  $\bar{c}_{i+1}$ , then we have  $yr \mapsto xr$  (and also  $r\bar{y} \mapsto r\bar{x}$ ). Thus it is not hard to see that if  $\|x\| < \|y\|$ , then the first cut-slide move reduces the energy, while if  $\|x\| > \|y\|$  then the second one does. As one of these two inequalities must hold, we have our result.  $\square$

Collecting the above lemmas, we are able to describe our ‘‘fatgraph’’ Nielsen reduction algorithm: whenever possible, reduce the word length of  $P$  by a CS move involving an unbalanced side. When no unbalanced side exists, perform a CS move on a balanced side to reduce the energy.

5. PRESENTATION OF  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ 

Recall that a groupoid can also be defined as a partially composable set with inverses. Viewing  $\mathfrak{CS}_{g,1}$  in this way, we see that a consequence of the fatgraph Nielsen reduction is the following lemma:

**Lemma 5.1.** *Triangle cut-slide moves generate  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ .*

In this section, we shall give an alternative proof of this, as well as a description of the relations of  $\mathfrak{CS}_{g,1}$ . To this end, we begin by noting that any polygon domain  $P$  of  $S_{g,1}$  can be canonically extended to a triangulation  $T(P)$  of  $S_{g,1}$  (based at  $p$ ) by triangulating the polygon in a fan-like fashion as depicted in Figure 5.1a.

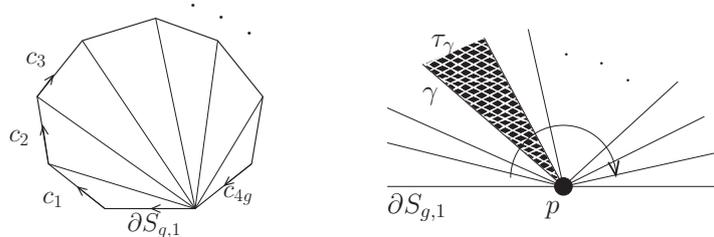


FIGURE 5.1. a) Fan triangulation and b) Arcs based at  $p$  with  $\tau_\gamma$  to the right of  $\gamma$ .

Conversely, an inverse to this fan-like triangulation is given by the following greedy algorithm [1]: Given a triangulation  $T$  of  $S_{g,1}$  based at  $p$ , we canonically order the arcs of  $T$  according to their first appearance in the clockwise ordering at  $p$  (see Figure 5.1b). In this ordering, we consecutively remove every arc from this collection as long as the complement of the remaining arcs in  $S_{g,1}$  consists of a union of polygons. This is clearly an inverse of the fan-like triangulation. Moreover, we have the following “locality” result:

**Lemma 5.2.** *Given an arc  $\gamma$  in a triangulation  $T$ , let  $\tau_\gamma$  be the triangle lying to the right of  $\gamma \in T$  at its first occurrence in the ordering of arcs at  $p$  (see Figure 5.1b), and let  $v$  be the sector of  $\tau_\gamma$  opposite to  $\gamma$ . Then  $\gamma$  is removed during the greedy algorithm if and only if  $v$  precedes  $\gamma$  in the clockwise order at  $p$ .*

*Proof.* Whenever an arc is removed during the greedy algorithm, its complement in  $S_{g,1}$  changes by attaching a triangle to the current polygon containing  $\partial S_{g,1}$  as a side. This can happen for  $\gamma$  if and only if  $v$  does not precede  $\gamma$ .  $\square$

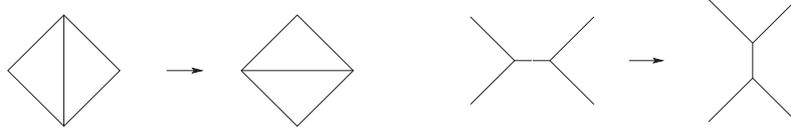


FIGURE 5.2. a) A Diagonal exchange. b) A Whitehead move.

We are now ready to give our alternate proof of Lemma 5.1.

*Alternate proof of Lemma 5.1.* The proof relies on the classical result of Whitehead which states that any two triangulations of  $S_{g,1}$  are related by a sequence of elementary diagonal exchanges (see Figure 5.2a), where an arc is removed and replaced by the opposite diagonal in the resulting quadrilateral. Note that a triangle cut-slide move can be realized by (usually) two or (sometimes) one diagonal exchange on the corresponding fan-like triangulation of  $S_{g,1}$ . We essentially need to show the converse.

Given any two polygon domains  $P$  and  $P'$  of  $S_{g,1}$ , we can canonically triangulate each to obtain triangulations  $T$  and  $T'$ . By Whitehead's result,  $T$  and  $T'$  are related by a sequence of diagonal exchanges:  $T = T_0 \rightarrow T_1 \rightarrow \dots \rightarrow T_n = T'$ . Let  $P_i = P(T_i)$  denote the  $i$ th polygon domain corresponding to  $T_i$  via the greedy algorithm so that  $P_0 = P$  and  $P_n = P'$ . Lemma 5.2 can be interpreted as saying the inclusion of an arc in  $T_i$  as a side of  $P_i$  is a "local" property; thus, as  $T_{i+1}$  differs from  $T_i$  by the replacement of a single arc,  $P_{i+1}$  can differ from  $P_i$  only by the replacement of a single arc. As we have already noted, such a move can be realized by a sequence of CS moves; thus, we have our result.  $\square$

Once we know how to generate  $\mathcal{CS}_{g,1}$ , it is natural to ask what relations the groupoid satisfies. Some relations are immediate, such as following a CS move by its inverse, which reattaches the cut triangle to its original position. We call this the *involutivity* relation  $I$ . Similarly, cut-slide moves for non-adjacent triangles (which remain non-adjacent after sliding) are easily seen to commute with each other, and we call this the *commutativity* relation  $C$ . Also, it is not hard to see that we have the following *triangle* relation  $T$  where a triangle  $\tau_{x,y}$  with sides  $x$  and  $y$  is cut off and attached to  $\bar{x}$ , then cut off again and attached to  $\bar{y}$ , then cut off again and reattached in its original position.

Finally, we have two relations which involve cutting and sliding two adjacent triangles. The *left pentagon* relation  $L$  is depicted in Figure 5.3. The *right pentagon*  $R$  is defined analogously.

**Theorem 5.3** ([2]).  *$I, C, T, L,$  and  $R$  generate all relations in  $\mathcal{CS}_{g,1}$ .*

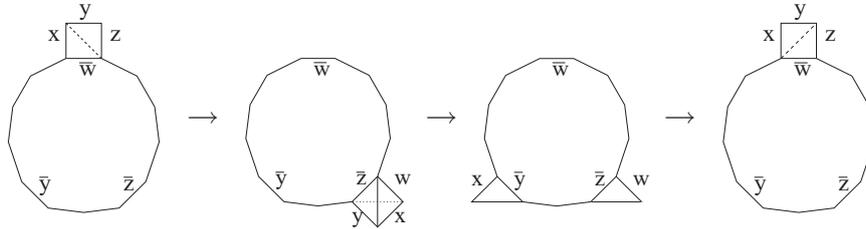


FIGURE 5.3. Left pentagon relation.

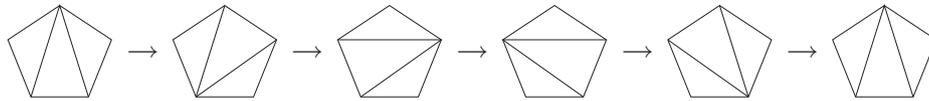


FIGURE 5.4. Pentagon relation.

*Proof.* The proof is a bit technical and involves many cases, but the main idea is simple. It relies on the results of decorated Teichmüller theory [5] which tell us precisely what the relations are for the analogous groupoid generated by diagonal exchanges, the so-called *Ptolemy groupoid*  $\mathfrak{Pt}_{g,1}$  [6]. All relations in  $\mathfrak{Pt}_{g,1}$  are generated by three types of relations: the obvious involutivity relation where a diagonal exchange is followed by its inverse, the commutativity relation involving diagonal exchanges on non-adjacent arcs, and the famous *pentagon relation* which is depicted in Figure 5.4.

The proof then proceeds by doing a careful analysis between diagonal exchanges and cut-slide moves via the greedy algorithm to rewrite (the image under the greedy algorithm of) each possible incarnation of a relation in  $\mathfrak{Pt}_{g,1}$  as a product of the relations  $I$ ,  $C$ ,  $T$ ,  $L$ , and  $R$ .  $\square$

## 6. FATGRAPHS AND CHORD DIAGRAMS

While we have so far focused on the perspective of arc systems and polygon domains, there is a dual perspective which is worth briefly mentioning (and in fact is the perspective taken in [1, 2, 3]). Given any (non-degenerate) arc system  $Y = \{y_i\}$  based at  $p$  which cuts  $S_{g,1}$  into a number of polygon components, we define the Poincaré dual graph  $G_Y$  of  $Y$  to be the graph embedded in  $S_{g,1}$  which has one vertex for every component of  $S_{g,1} \setminus Y$  and one edge  $e_i$  for every arc  $y_i$  of  $Y$  such that  $e_i$  intersects  $y_j$  if and only if  $i = j$ . In particular, if  $T$  is a triangulation,  $G_T$  is a trivalent graph, and if  $X$  is a CG set,  $G_X$  is a “rose” graph with only

one vertex. Note that every oriented edge of the graph  $G_Y$  is colored by an element of  $\pi$  in a natural way (after choosing an orientation of  $S_{g,1}$ ).

In fact, this dual graph inherits some additional structure, as the orientation of the surface induces a cyclic ordering of half-edges incident to every vertex. We call such a vertex-oriented graph a *fatgraph*. It is convenient (for technical reasons) to consider the boundary  $\partial S_{g,1}$  to be an arc included in every arc system, in which case Poincaré duality will produce *bordered fatgraphs*: fatgraphs with a special edge called the *tail* whose univalent endpoint lies on the boundary  $t \neq p \in \partial S_{g,1}$ . (See Figure 6.1.)

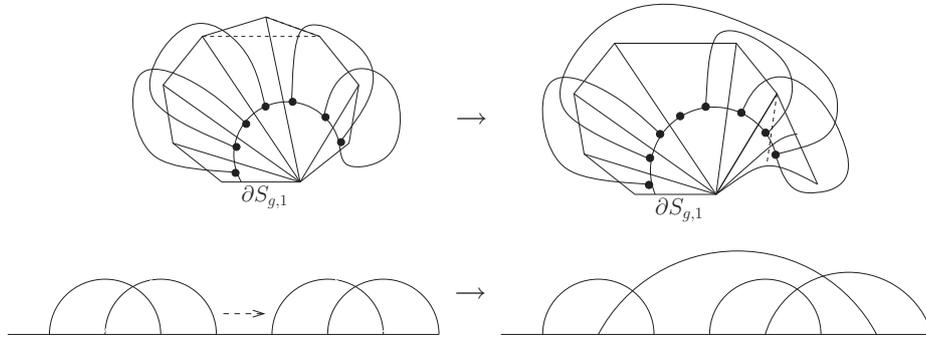


FIGURE 6.1. Chord diagram and corresponding fan-like triangulation evolving under a chord slide.

We are primarily interested in trivalent bordered fatgraphs which are dual to triangulations of  $S_{g,1}$ . In particular, the graph we obtain as the dual of a fan-like triangulation of a polygon domain takes the form of a *linear chord diagram*. A linear chord diagram is a trivalent graph immersed in the plane consisting of a segment of the real axis called the *core*, together with line segments lying in the upper half-plane called the *chords* which are attached to distinct points of the core. Under this duality, the chords of a linear chord diagram embedded in  $S_{g,1}$  exactly correspond to pairs of identified sides of a polygon domain of  $S_{g,1}$ , and the structure of the chord diagram essentially captures the information of how these sides are identified.

We now depict how the elementary moves of arc systems look in this dual viewpoint. Firstly, a diagonal exchange on a triangulation corresponds to a *Whitehead move* on a trivalent bordered fatgraph, which is a move where one non-tail edge is collapsed to a four-valent vertex and then expanded in the opposite direction. See [1]. A triangle CS move, on the other hand, corresponds to a *chord slide* (thus, finally explaining the name of the chord slide groupoid) on a linear chord diagram, which

is a move where one endpoint of a chord is slid along a neighboring chord to a new position on the core, as depicted in Figure 6.1. During both of these moves,  $\pi$ -colorings of the edges of these graphs evolve in natural ways, according to certain “vertex compatibility” relations. See [1, 2].

For convenience, we finish by listing diagrammatically the  $T$ ,  $L$ , and  $R$  relations for linear chord diagrams, where the thin lines represent chords and the thick lines represent segments of the core.

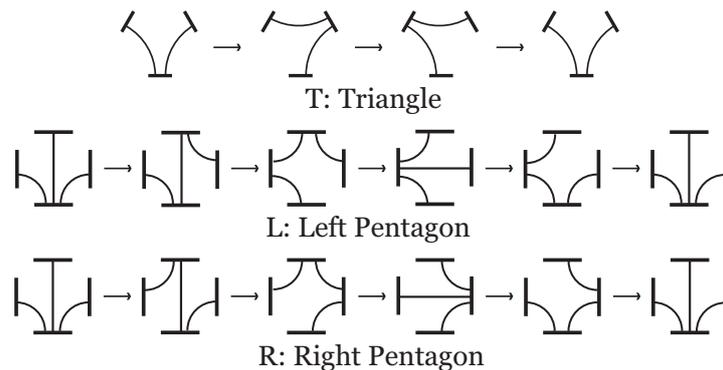


FIGURE 6.2.  $T$ ,  $L$ , and  $R$  relations for chord diagrams.

#### REFERENCES

1. J. Andersen, A. Bene, R. Penner: *Groupoid extensions of mapping class representations for bordered surfaces*, *Topology and its Applications* **156** (2009) 2713–2725.
2. A. Bene *A chord diagrammatic presentation of the mapping class group of a once bordered surface*, *Geom. Ded.* 144 (2010), 171–190.
3. —, *Mapping class factorization via fatgraph Nielsen reduction*, pre-print, arXiv:0904.4067 (2009).
4. W. Magnus, A. Karrass, D. Solitar *Combinatorial group theory* Dover Publications Inc., 2004.
5. R. Penner, *The decorated Teichmüller space of punctured surfaces*, *Comm. Math. Phys.* 113 (1987), 299–339.
6. —, *Universal constructions in Teichmüller Theory*, *Adv. Math.* 98 (1993), 143–215.
7. —, *Decorated Teichmüller theory of bordered surfaces*, *Comm. Anal. Geom.* 12 (2004), 793–820.
8. H. Zieschang, E. Vogt, H. Coldewey: *Surfaces and Planar Discontinuous Groups*, *Lecture Notes in Mathematics* 835, Springer-Verlag, 1980.

IPMU, TOKYO UNIVERSITY, 5-1-5 KASHIWANOHA, KASHIWA 277-8568, JAPAN,  
*E-mail address:* alex.bene@ipmu.jp

# Enumerations of spatial trivalent graphs

森内 博正\* (MORIUCHI, Hiromasa)

Korea Advanced Institute of Science and Technology

## 概要

結び目理論の研究の大きな問題として分類問題がある。すなわち、2つの結び目が与えられた際にそれらが同値かどうかを調べるというものである。そして、アンビエントアイソトピーでの同値関係による分類で、結び目および絡み目の表をつくるという研究がある。同様に、空間グラフ理論においても表を作るという研究が存在する。本講演では、空間3価グラフ、特に $\theta$ -曲線と手錠グラフを交点数の小さい順に漏れなく数え上げる手法を説明し、分類に使用した不変量を紹介し、現在までに作成した表を見せる。

## 1 はじめに

一般に、有限グラフの3次元球面  $S^3$  への埋め込みのことを空間グラフとよぶ。2つの空間グラフ  $G, G'$  に対して、 $S^3$  の自己同相写像の族  $\{h_t \mid 0 \leq t \leq 1\}$  で  $h_0 = \text{id}$  かつ  $h_1(G) = G'$  となるものが存在するとき、 $G$  と  $G'$  はアンビエントアイソトピックであるという。今回はグラフの頂点が3価の場合について考える。グラフが2つの頂点とそれらを繋ぐ3本の辺から構成されるとき、その空間グラフを $\theta$ -曲線、それぞれの頂点を始点と終点とする2本のループと頂点をつなぐ1本の辺から構成されるとき、その空間グラフを手錠グラフとよぶ。空間グラフの正則射影の二重点の部分に交点の上下情報を与えた図式によって数え上げを行なうため、アンビエントアイソトピックであるかどうかの判定には、Kauffmanによって与えられた次の定理が有用となる。

**定理 1** ([2]). 2つの空間3価グラフ  $G, G'$  に対して、次は同値。

- $G$  と  $G'$  がアンビエントアイソトピック。
- $G$  の図式  $g$  と  $G'$  の図式  $g'$  がライデマイスター移動I-Vの有限回の操作で移りあう。

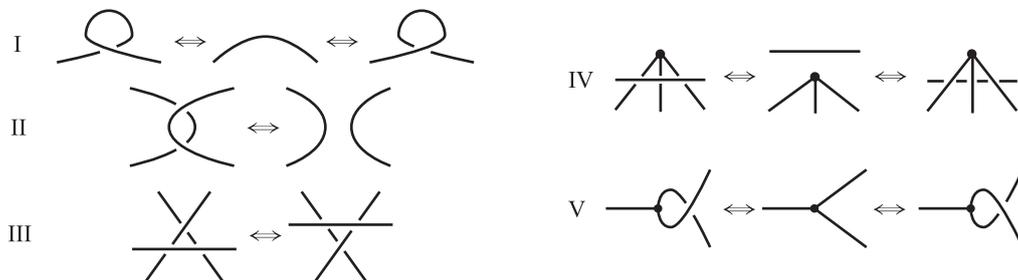


図 1: 空間3価グラフのライデマイスター移動。

\* この研究は、韓国科学技術院 (KAIST), 大阪市立大学数学研究所 (OCAMI) および 日本学術振興会 組織的な若手研究者等海外派遣プログラム「数学研究所がリードする数学・数理科学の国際的若手研究者の育成」によって援助されている。

ここで、 $\theta$ -曲線と手錠グラフに関する定義をしておく。

**定義 1.**  $\theta$ -曲線 (または手錠グラフ) が 2 次元球面に埋め込み可能なとき、**自明**であるという。

**定義 2.**  $\theta$ -曲線 (または手錠グラフ) が自明でなく、*admissible sphere* を持たないとき**素**であるという。

ここで、3 次元球面  $S^3$  を 3 次元球体  $B_1, B_2$  に分割する球面  $\Sigma$  が、空間 3 価グラフ  $G$  の *admissible sphere* であるとは、次をみたすときをいう (図 2 を参照):

(type I)  $\Sigma$  が  $G$  と 1 点  $w$  で交わり、 $(G - w) \cap B_1$  と  $(G - w) \cap B_2$  のどちらも空でない。

(type II)  $\Sigma$  が  $G$  と 2 点で交わり、アニュラス  $A = \Sigma \setminus \text{Int}N(G; S^3)$  が  $S^3 \setminus \text{Int}N(G; S^3)$  で本質的。

(type III)  $\Sigma$  が  $G$  と 3 点で交わり、 $G \cap B_1$  と  $G \cap B_2$  のどちらも *unknotted bouquet* でない。

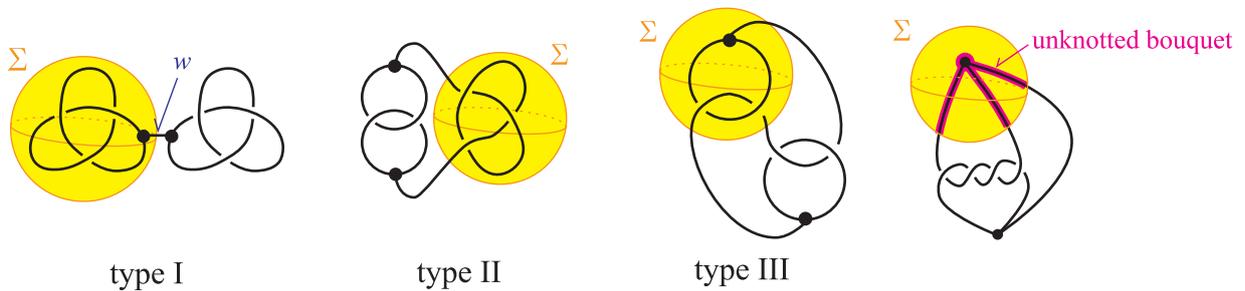


図 2: *admissible sphere* の 3 つの type と *unknotted bouquet*.

**注意 1.** “ $\theta$ -曲線 (または手錠グラフ) が自明でなく、他のグラフとの**頂点連結和**でないとき素である” と定義したいのが本音ではある。頂点連結和とは空間グラフの頂点部分のある方法で繋いだものである [8]。

## 2 $\theta$ -曲線と手錠グラフの数え上げ

Conway は**タングル**と**基本多面体**を使って結び目や絡み目の表を作成した [1]。その方法を応用すれば空間グラフの表作成も作成可能なのではと思ひ、結び目や絡み目に系統の近い  $\theta$ -曲線と手錠グラフを数え上げた。

本講演では、タングルとは結び目図式の一部分を切り出したものとみなす。タングルのうち、図 3 の操作から得られるものを**代数タングル**という。7 交点までの代数タングルは講演者によって数え上げられている [5]。

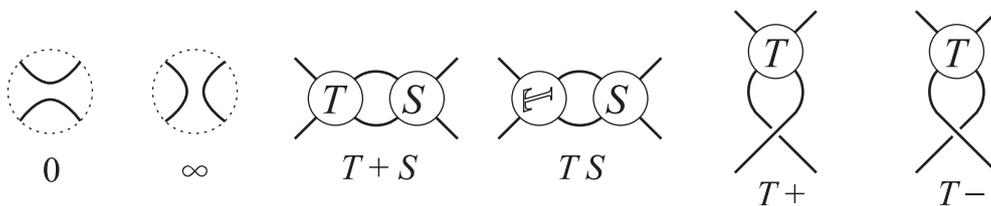
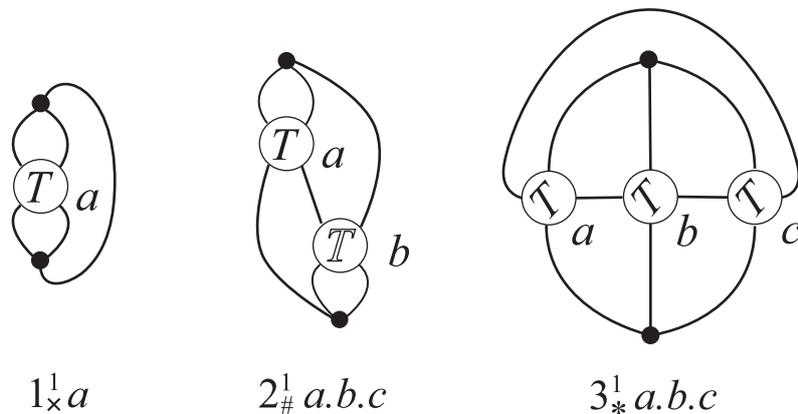


図 3: 0 タングルと  $\infty$  タングルから 4 つの操作で代数タングルを構成する。

Conway の基本多面体は全ての頂点が 4 価の球面グラフのことであった。講演者は  $\theta$ -曲線と手錠グラフを数え上げるため、2 つの頂点が 3 価で、残りの頂点が全て 4 価の球面グラフを構成した [6], [7]。その球面グラフを  $\theta$ -**多面体**とよぶことにする。

図4:  $\theta$ -多面体の例.

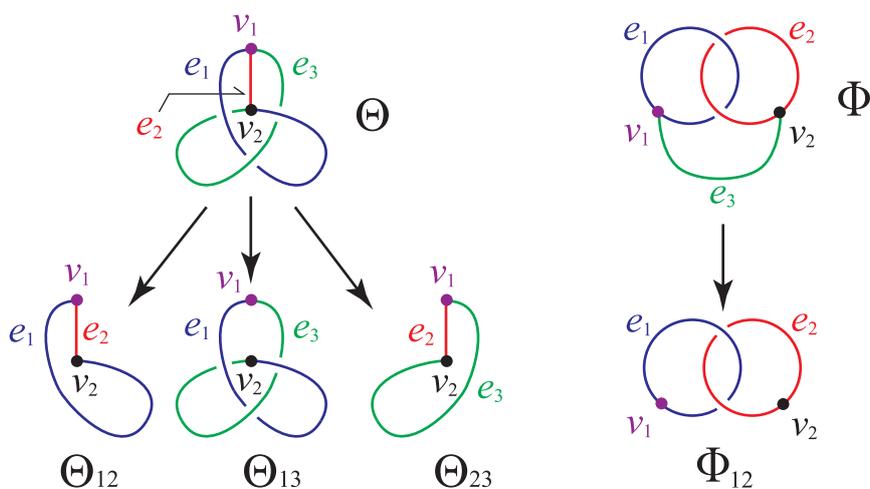
$\theta$ -多面体を構成する際, Yamano [11] による円板グラフの表を利用した.  $\theta$ -多面体の4個頂点の部分に代数タングルを代入することにより, 交点数の小さなものから順に全ての $\theta$ -曲線と手錠グラフの図式を得ることが出来る.

### 3 $\theta$ -曲線と手錠グラフの分類表

ライデマイスター移動を繰り返すことで, 2つの空間グラフがアンビエントアイソトピックであることは示せても, そうでないことは証明できない. 空間グラフの分類するには不変量が必要不可欠である. アンビエントアイソトピーによる分類で有効な不変量を紹介する.

#### 3.1 不変量

空間グラフの部分グラフである,  $\theta$ -曲線における3つの *constituent knots* と手錠グラフにおける *constituent link* は不変量となる (図5).

図5:  $\theta$ -曲線の constituent knots および手錠グラフの constituent link.

また, 空間グラフ図式  $g$  に対して, 次の (Y1)–(Y5) で山田多項式  $R(g) \in \mathbf{Z}[x^{\pm 1}]$  が定義される:

(Y1) 空グラフ  $\emptyset$  に対し,  $R(\emptyset) = 1$ ,

(Y2)  $R(\text{X}) = xR(\text{O}) + x^{-1}R(\text{Y}) + R(\text{Z})$ ,

(Y3) 辺  $e$  がループでないとき,  $R(\text{A} \xrightarrow{e} \text{B}) = R(\text{A}) + R(\text{C})$ ,

(Y4) 2つの図式  $g_1, g_2$  の分離和  $g_1 \sqcup g_2$  に対し,  $R(g_1 \sqcup g_2) = R(g_1)R(g_2)$ ,

(Y5)  $B_n$  を  $n$  枚のブーケとすると,  $R(B_n) = -(-x - 1 - x^{-1})^n$ ,  
特に,  $R(\bullet) = R(B_0) = -1$ ,  $R(\bigcirc) = R(B_1) = x + 1 + x^{-1}$ .

$\theta$ -曲線と手錠グラフの山田多項式は, (Y1)–(Y5) の定義式から導かれる次の性質 (1)–(9) を用いて計算できる. また, 性質 (5)–(9) から, ある整数  $n$  について  $(-x)^n$  を除いて空間 3 価グラフのアンビエントアイソトピーの不変量となることが分かる [9].

$$(1) R(\bigcirc) = -x^2 - x - 2 - x^{-1} - x^{-2},$$

$$(2) R(\bigcirc \bullet \bigcirc) = 0,$$

$$(3) R(g' \sqcup \bigcirc) = (x + 1 + x^{-1})R(g') \quad (g' \text{ は任意の空間グラフ図式}),$$

$$(4) R(\text{X}) - R(\text{Y}) = (x - x^{-1})(R(\text{O}) - R(\text{Y})),$$

$$(5) R(\text{Q}) = x^2R(\text{R}), \quad R(\text{Q}) = x^{-2}R(\text{R}),$$

$$(6) R(\text{S}) = R(\text{O}),$$

$$(7) R(\text{T}) = R(\text{U}),$$

$$(8) R(\text{V}) = R(\text{W}) = R(\text{X}),$$

$$(9) R(\text{Y}) = -xR(\text{Z}), \quad R(\text{Y}) = -x^{-1}R(\text{Z}).$$

Yamada は空間グラフ  $G$  の頂点次数が 3 以下の場合に限り,  $R(g)$  とブラケット多項式との関係式が存在することを示している [10]. その場合,  $g$  から得られる絡み目図式のブラケット多項式を計算することで  $R(g)$  を求めることもできる [4],[6].

### 3.2 分類表

代数タングルを  $\theta$ -多面体の 4 価頂点に代入することで, 交点数の小さい順に全ての図式が得られる. それらを constituent knots や constituent links で大きく分類し, 山田多項式で細かく分類していく. 7 交点以下の素な  $\theta$ -曲線と手錠グラフに対しては, それらで完全に分類できた. 定理 2 は Litherland の手紙 [3] によって証明抜きで公表されていたものと全く同じであり, これで証明を与えたことになる.

定理 2 ([3], [6]). 7 交点以下の素な  $\theta$ -曲線は図 6 の 90 個である.

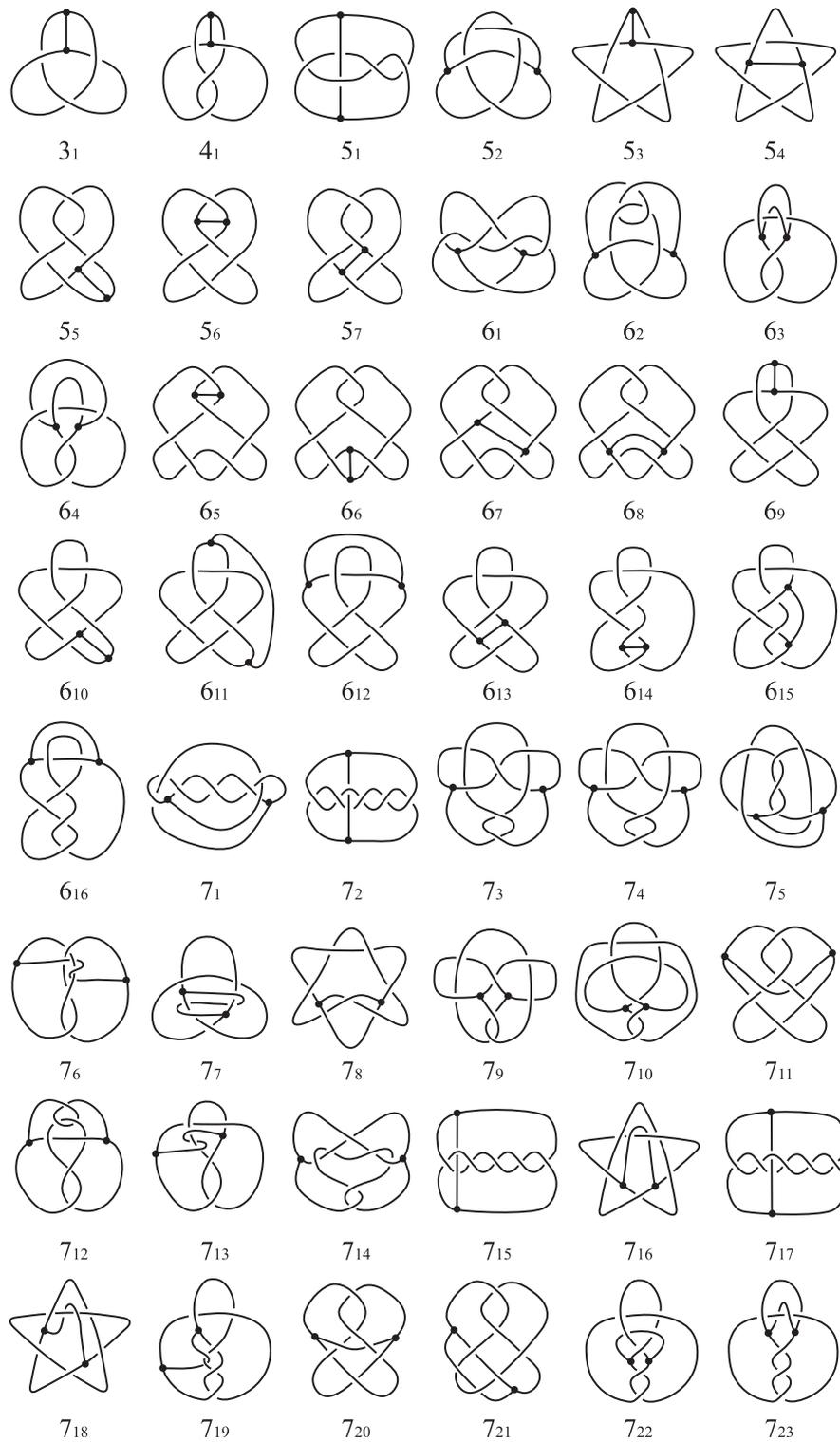


図 6: 7 交点以下の素な  $\theta$ -曲線.

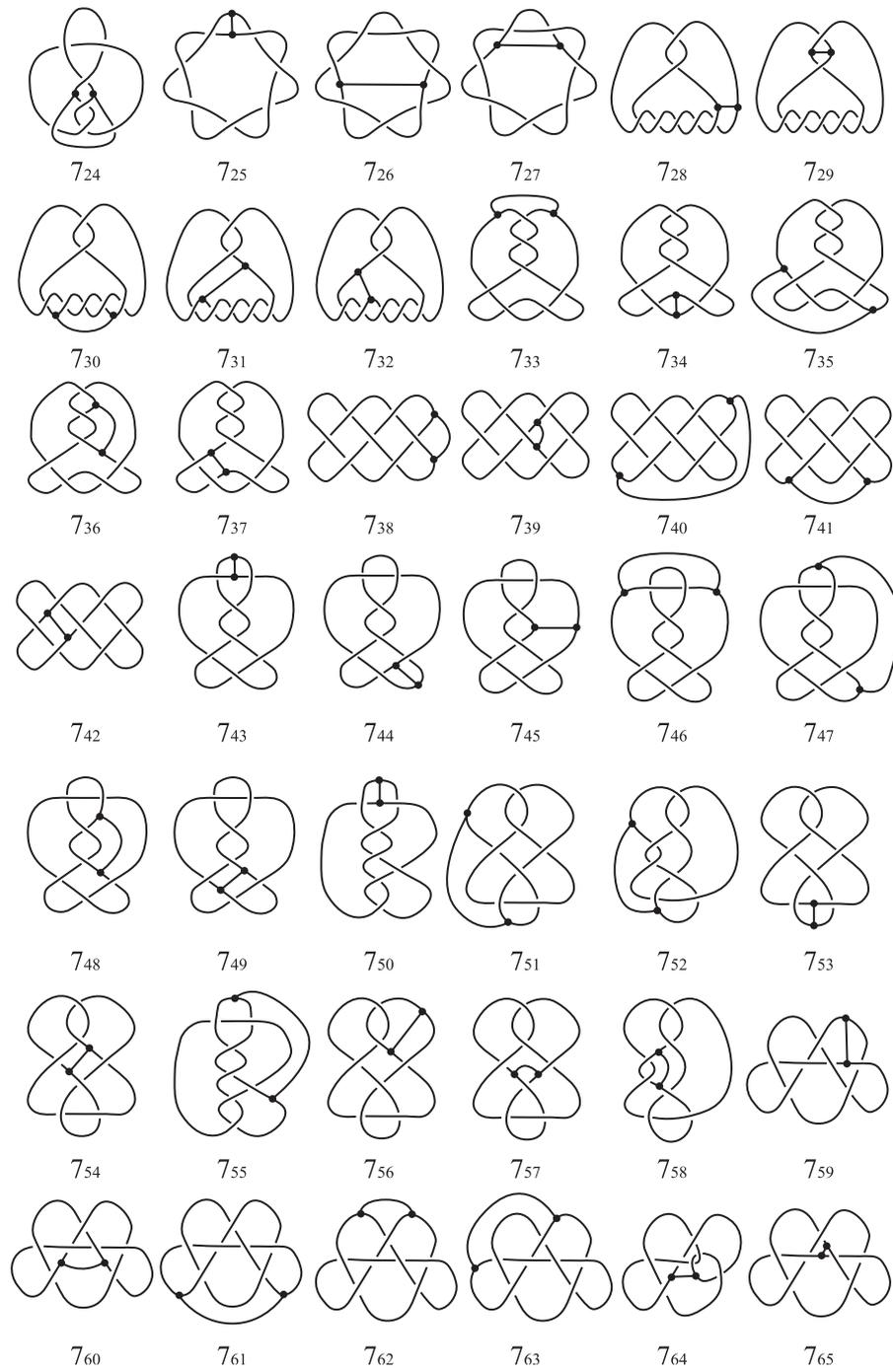


図 6: 7 交点以下の素な  $\theta$ -曲線 (続き).

**注意 2.** 図 6 の  $\theta$ -曲線の交点の上下は Litherland の表 [3] のままにしてある.

定理 3 ([4]). 7 交点以下の素な手錠グラフは図 7 の 48 個である.

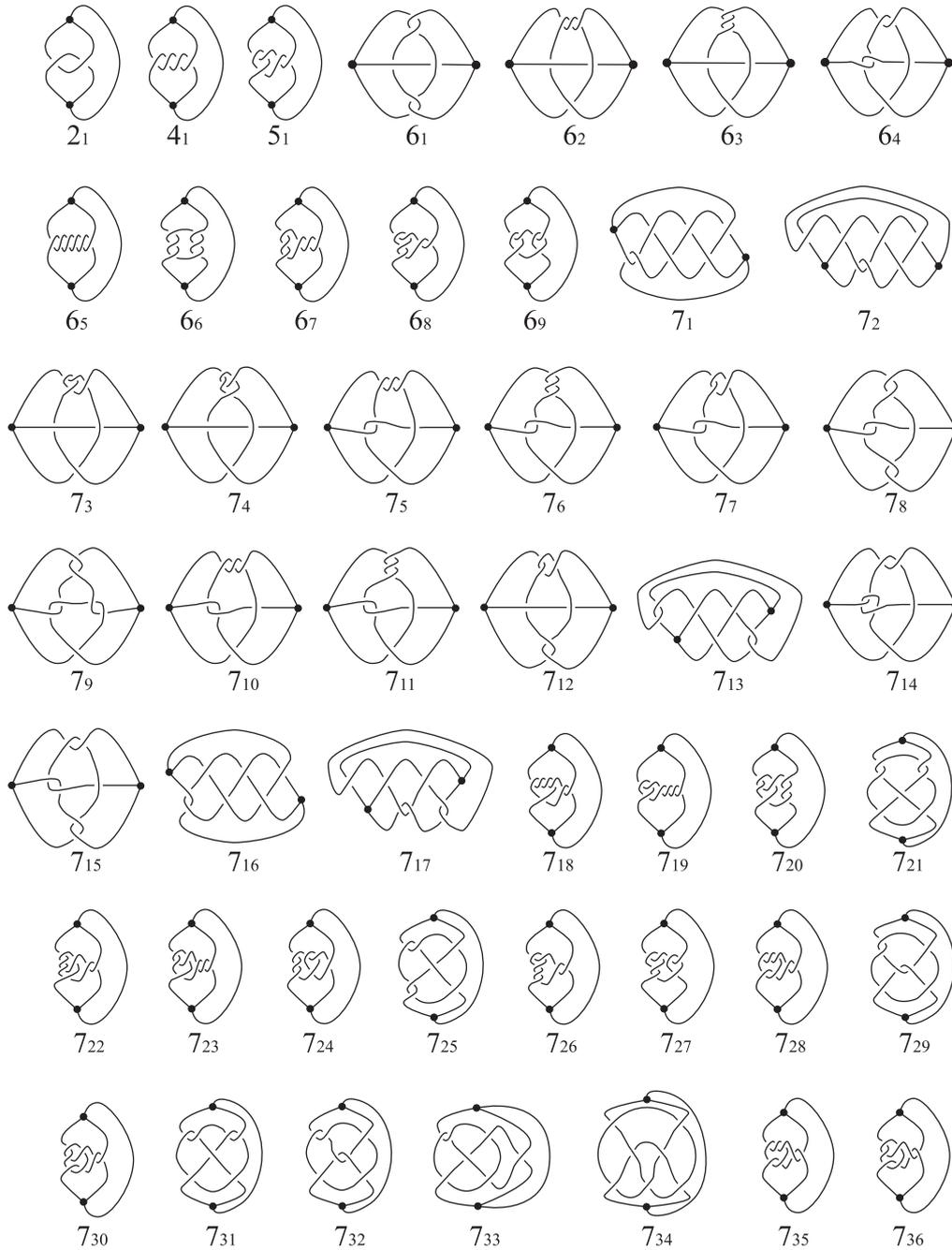


図 7: 7 交点以下の素な手錠グラフ.

素でない  $\theta$ -曲線と手錠グラフに対しても同様に分類していくのだが, 山田多項式と空間グラフの頂点連結和  $\#_2$  および  $\#_3$  に関する次の性質がある.

**命題 1** ([9]).  $g, g'$  を空間グラフ図式とするとき

$$R(g \#_2 g') = R(g) R(g') / (x + 1 + x^{-1})$$

$$R(g \#_3 g') = R(g) R(g') / (-x^2 - x - 2 - x^{-1} - x^{-2})$$

**定理 4.** 6 交点以下の素でない  $\theta$ -曲線は図 8 の 20 個である.

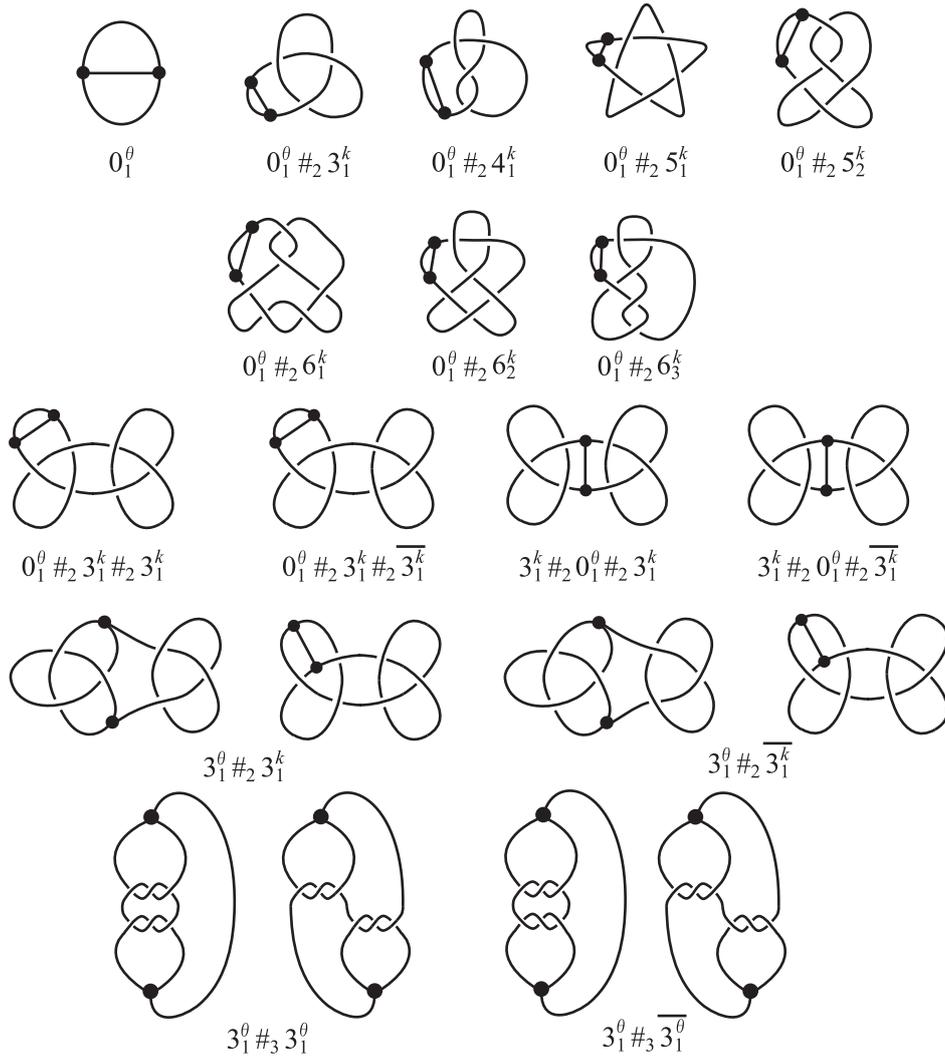


図 8: 6 交点以下の素でない  $\theta$ -曲線.

**注意 3.** 上付きの  $^\theta$  は図 6 の  $\theta$ -曲線を表し, 上付きの  $^k$  は Conway [1] の表示法に沿った結び目を表している. また,  $\overline{G}$  で  $G$  の交点の上下を全て入れ替えた鏡像を表している. 例えば,  $\overline{3_1^k}$  は  $3_1^k$  の鏡像である.

**注意 4.**  $3_1^\theta$  は図 6 の  $3_1$   $\theta$ -曲線と交点の上下を逆にしているが, これは整合性を保つためである.

定理 5. 6 交点以下の素でない手錠グラフは図 9 の 23 個である.

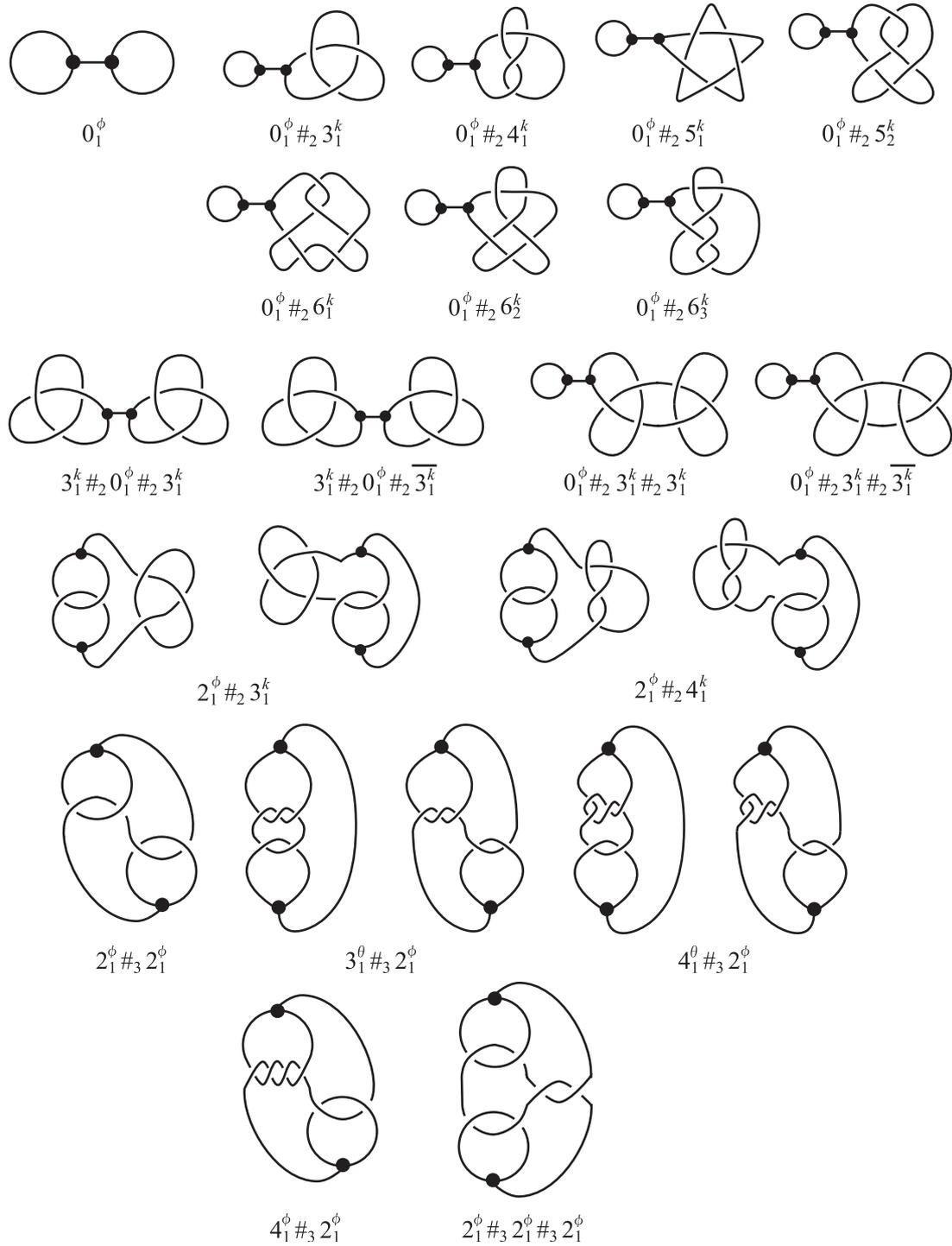


図 9: 6 交点以下の素でない手錠グラフ.

注意 5. 上付きの  $\phi$  は図 7 の手錠グラフを表している.

**注意 6.** 図 6-9 にある空間グラフは、それ自身の鏡像と同じものと見なしている。

7 交点の素でない手錠グラフについては constituent knots や constituent link, 山田多項式だけでは分類不可能なものが出てきた。それらに対しては他の不変量を使う必要がある。

今後の課題としては次が挙げられる。

**問題 1.** 他の空間 3 価グラフの表作成にあたり、同様の手法が使えるか。

**問題 2.** 一般の空間グラフではどうか。

## 参考文献

- [1] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, Computational Problems in Abstract Algebra(Proc. Conf. Oxford 1967), Pergamon Press, 1969, 329–358.
- [2] L. H. Kauffman, *Invariants of graphs in three-space*, Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), no. 2, 697–710.
- [3] R. A. Litherland, *A table of all prime theta-curves in  $S^3$  up to 7 crossings*, a letter, 1989.
- [4] H. Moriuchi, *A table of handcuff graphs with up to seven crossings*, OCAMI Studies Vol 1. Knot Theory for Scientific Objects (2007), 179–200.
- [5] H. Moriuchi, *Enumeration of algebraic tangles with applications to theta-curves and handcuff graphs*, Kyungpook Mathematical Journal 48 no.3 (2008), 337–357.
- [6] H. Moriuchi, *An enumeration of theta-curves with up to seven crossings*, Journal of Knot Theory and Its Ramifications 18 no.2 (2009), 167–197.
- [7] H. Moriuchi, *An enumeration of non-prime theta-curves and handcuff graphs*, preprint.
- [8] K. Wolcott, *The knotting of theta-curves and other graphs in  $S^3$* , Geometry and Topology: Manifolds, Varieties, and Knots, eds. C. McCrory and T. Shifrin, (Marcel Dekker, New York, 1987), 325–346.
- [9] S. Yamada, *An invariant of spatial graphs*, J. Graph Theory **13** (1989), 537–551.
- [10] S. Yamada, *A topological invariant of spatial regular graphs*, Knots 90, Ed. A. Kawauchi, de Gruyter, 1992, 447–454.
- [11] H. Yamano, *Classification of tangles of 7 crossings or less* (in Japanese), Master Thesis, Tokyo Metrop. Univ. , 2001.

# カンドル理論の曲面結び目への応用について

田中 心 (東京学芸大学 教育学部)

## 1. INTRODUCTION

曲面結び目とは4次元ユークリッド空間内に局所平坦に埋め込まれた連結な有向閉曲面<sup>1</sup>の事であり, 図式を用いた研究手法が90年代以降発展してきている (cf. [9]). ここで図式とは, 曲面結び目を3次元ユークリッド空間へ射影した像 (の特異点集合に交差情報を与えたもの) の事である. 曲面結び目理論の最終目標は, 曲面結び目の全同位による同値類の分類であり, 曲面結び目を区別する為に様々な不変量が考えられてきた. 例えば,

- 補空間のホモトピー型に関わる不変量 (曲面結び目群など) や,
- 補空間の無限巡回被覆空間に関わる不変量 (アレキサンダー不変量など)

は古くから研究されていた. 近年, カンドルという代数系を用いた曲面結び目不変量 (カンドル彩色数 [27, 38] やカンドルコサイクル不変量 [4] など) が発見され, 様々な研究がなされている. これらの不変量は図式を用いて定義される為, 図式を用いた研究手法と非常に相性が良い. 本稿では, カンドルやそれに伴うホモロジー理論から構成される不変量を紹介し, それらを用いて得られた研究結果を解説する.

キーワードとなる不変量は, 結び目カンドル [27, 38] と基本類 [6] である. ここで, 結び目カンドルとはカンドル彩色数に関する普遍的な対象物であり, また基本類とはカンドルコサイクル不変量に関する普遍的な対象物である. (これらの詳しい定義は, §2.4 と §2.6 を参照せよ.) 不変量を与えられた際に, 我々が知りたい事は以下の二点であろう.

- その不変量はどの程度曲面結び目を区別するのか?
- その不変量から曲面結び目のどのような情報が読み取れるか?

一番目の問題に対しては, 例えば結び目カンドルの情報を用いる事によって, あるクラスの球面結び目たち (トーラス結び目から作られるツイストスパン結び目たち) を互いに区別できる [2] ということが知られている. また, 二番目の問題に対しては, 例えば次のような事柄との関係が知られている.

### 結び目カンドル (とカンドル彩色数) に関して

補空間の基本群 [27, 38], 結び目解消数 [24], シート数 [44, 47].

### 基本類 (とカンドルコサイクル不変量) に関して

非可逆性 [4, 1, 23], 最小三重点数<sup>2</sup>[50, 51, 22, 53, 40, 49], 三重点解消数 [24], リボン同境 [10], シート数 [45, 48],  $w$ -指数 [25].

本稿では, 一番目の視点からの研究結果 [54] を §3 に於いて, また二番目の視点からの研究結果 [52] を §4 に於いて, それぞれ解説する.

<sup>1</sup>4次元球面内の埋め込みを考える場合もある. また, 非連結な場合は曲面絡み目と呼ばれる. 向き付け不可能な曲面を考えることもあるが, 本稿では扱わない.

<sup>2</sup>向き付け不可能な曲面絡み目に対しては, 通常のカンドル理論は適用できないが, “対称カンドル理論” を用いた応用が知られている [35, 43, 8]. なお, 対称カンドルやそのホモロジー理論は [33, 35] で導入された概念である.

## 2. 定義

曲面結び目理論とカンドル理論の基本事項を復習する. この節の内容は, [9, 32, 6] に詳しく述べられている.

**2.1. 曲面結び目とその例.** 4次元ユークリッド空間  $\mathbb{R}^4$  内に局所平坦に埋め込まれた連結な有向閉曲面<sup>1</sup>を曲面結び目という. 埋め込まれた閉曲面を具体的に明示したい場合, 2次元球面  $S^2$  の埋め込みは  $S^2$ -結び目 (或いは, 球面結び目), トーラス  $T^2$  の埋め込みは  $T^2$ -結び目, 種数  $g$  の閉曲面の埋め込みは  $\Sigma_g$ -結び目などという.

重要な球面結び目のクラスとしてツイストスパン結び目 [56] があるが, これは以下のように構成される. 与えられた一次元結び目  $k \subset \mathbb{R}^3$  を一点で切り開き, 上半空間  $\mathbb{R}_+^3$  内のタングルを作る. (タングルの両端点は境界  $\partial\mathbb{R}_+^3 (= \mathbb{R}^2)$  の上におく.) そこで, 境界  $\mathbb{R}^2$  を軸として一回公転する間にタングル部分を  $r$  回自転させる. このとき, 上半空間から  $\mathbb{R}^4$  が得られ, またタングルが通過した軌跡は球面結び目となる. これを,  $k$  の  $r$ -ツイストスパン結び目といい,  $\tau^r(k)$  と表す. また, 一次元結び目  $k \subset \mathbb{R}^3$  からスパン  $T^2$ -結び目と呼ばれる  $T^2$ -結び目 ( $T(k)$  と表す) と, ターンドスパン  $T^2$ -結び目 [3] と呼ばれる  $T^2$ -結び目 ( $\tilde{T}(k)$  と表す) を構成する方法も知られている. 構成法の詳細は省略するが, これらは  $T^2$ -結び目の重要なクラスを成している.

**2.2. 曲面結び目の図式.** 写像  $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$  を第4座標に関する射影とする. 曲面結び目  $F$  に対して, 必要ならば  $\mathbb{R}^4$  の全同位で少し動かすことにより, 像  $\pi(F)$  上の点は正則点, 二重点, 三重点, ブランチ点のいずれかであると仮定できる. (Figure 1 を参照せよ.)

曲面結び目  $F$  の図式とは, 像  $\pi(F)$  に交差情報を以下のように与えたもののことを指す. 各二重点の近傍では, 局所的に二枚の円板が横断的に交わっており,  $\mathbb{R}^4$  に於いて第4座標に関する“高さ”が異なっている. そこで, 下方にある円板を切断して交差情報を入れる. 一般に曲面結び目の図式は, 二重点がなす曲線に沿って切断されるので, いくつかの交わりを持たないコンパクト曲面 (シートと呼ぶ) の集まりで構成される. 各三重点の近傍では局所的に三枚の円板が横断的に交わっており, 高さに関して上シート, 中シート, 下シートと呼ばれる. 局所的には, 下シートは四枚に切断され, 中シートは二枚に切断されている. (Figure 1 を参照せよ.)

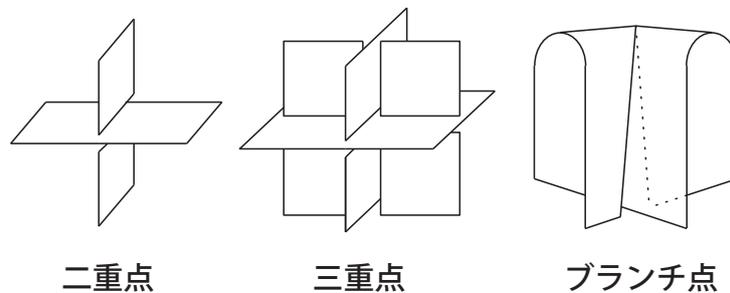


FIGURE 1

**2.3. カンドル.** 空でない集合  $X$  と二項演算  $*: X \times X \rightarrow X$  の組  $(X, *)$  がカンドル [27, 38] であるとは, 次の三つの公理を満たすときにいう. (しばしば,  $(X, *)$  を単に  $X$  と表記する.)

- (Q1) 任意の  $a \in X$  に対して,  $a * a = a$  が成り立つ.
- (Q2) 任意の  $a, b \in X$  に対して,  $c * b = a$  を満たすような  $c \in X$  が唯一つ存在する.
- (Q3) 任意の  $a, b, c \in X$  に対して,  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  が成り立つ.

カンドル  $X, Y$  の間の写像  $f: X \rightarrow Y$  が,  $f(a * b) = f(a) * f(b)$  ( $\forall a, b \in X$ ) を満たすとき,  $f$  はカンドル準同型であるという. カンドル  $X$  に対して, 以下で定義される群

$$G_X = \langle \bar{x} \ (x \in X) \mid \bar{x} * \bar{y} = \bar{y}^{-1} \bar{x} \bar{y} \ (x, y \in X) \rangle$$

をカンドル  $X$  に付随する群と呼ぶ.

例 1. 自然数  $p$  に対して, 集合  $R_p = \{0, 1, \dots, p-1\}$  を考え,  $i * j \equiv 2j - i \pmod{p}$  で二項演算を入れる. すると  $R_p$  はカンドルの構造を持つことが確認できる. このカンドル  $R_p$  を, 位数  $p$  の二面体カンドルと呼ぶ.

2.4. **結び目カンドルとカンドル彩色数.** 曲面結び目  $F$  の図式  $D$  に対して,  $E = \{s_1, \dots, s_m\}$  を図式  $D$  のシートの集合とする. 各シートには  $F$  の向きと  $\mathbb{R}^3$  の向きから誘導される法線ベクトルを与えておく. 曲面結び目  $F$  の結び目カンドル  $Q(F)$  [27, 38] とは, シートの集合  $E$  を生成元とし, 各二重点曲線に沿って以下のような関係式を入れたカンドルの事である. ある二重点曲線に沿って,  $s_j$  を上シート,  $s_i$  を下シートの中で  $s_j$  の法線ベクトルに対して後ろにあるシート,  $s_k$  を下シートの中で  $s_j$  の法線ベクトルに対して前にあるシートとする. この時, その二重点曲線に沿った関係式は  $s_i * s_j = s_k$  で与えられる. (Figure 2 の左側を参照せよ.) ここで,  $Q(F)$  は曲面結び目  $F$  の図式の取り方によらない事, また  $Q(F)$  に付随する群  $G_{Q(F)}$  は  $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$  と同型になる事を注意しておく.

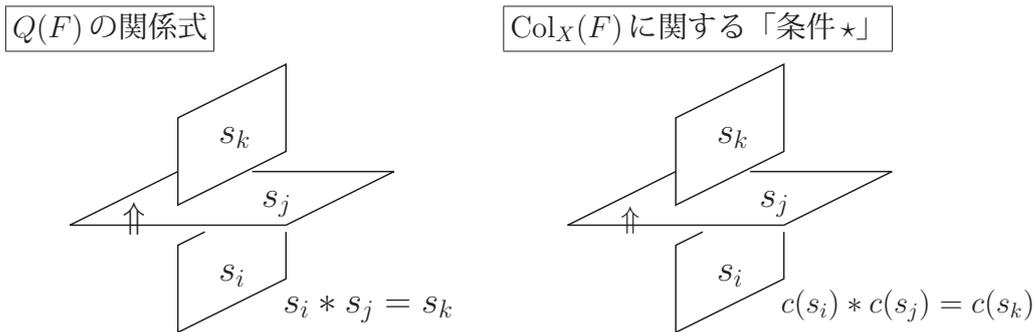


FIGURE 2

結び目カンドルから次のようにして計算比較しやすい量を取り出すことができる. 有限カンドル  $X$  に対して, カンドル準同型  $c: Q(F) \rightarrow X$  をカンドル彩色と呼び, カンドル彩色全体の集合を  $\text{Col}_X(F)$  と書く. 図式の言葉では,

$$\text{Col}_X(F) = \{c: E = \{\text{シート全体}\} \rightarrow X \mid c \text{ は条件 } \star \text{ を満たす}\}$$

と言い換えることもできる. (条件  $\star$  については, Figure 2 の右側を参照せよ.) このとき,  $\text{Col}_X(F)$  は有限集合であり, その位数  $\#\text{Col}_X(F)$  はカンドル彩色数と呼ばれる.

注意 2.1. 二面体カンドル  $R_p$  による彩色は, Fox による  $p$ -彩色 [17, 18] の概念と一致する.

2.5. **カンドルホモロジー理論.** カンドルホモロジー理論 [4] は, ラックホモロジー理論 [13, 14, 15, 16] の変種とみなすことができる. カンドル  $X$  に対して, ラック鎖複体  $C_*^R(X)$  とその部分複体  $C_*^D(X)$  を構成し, その商複体としてカンドル鎖複体  $C_*^Q(X)$  が定義される.

整数  $n > 0$  に対して, カンドル  $X$  の元から成る  $n$  対  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  で生成された自由アーベル群を  $C_n^R(X)$  とする. (整数  $n \leq 0$  に対しては  $C_n^R(X) = 0$  とする.) また整数  $n > 1$  に対して, 境界準同型  $\partial_n: C_n^R(X) \rightarrow C_{n-1}^R(X)$  を

$$\partial_n(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i \left\{ (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) - (x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) \right\}$$

で定義する. (整数  $n \leq 1$  に対しては,  $\partial_n = 0$  とする.) このとき, カンドルの公理 (Q3) から  $\partial_{n-1} \circ \partial_n = 0$  が成立し,  $C_*^R(X) = (C_n^R(X), \partial_n)$  が鎖複体となることが分かる.

整数  $n > 1$  に対して,  $\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid \exists i, x_i = x_{i+1}\}$  で生成される  $C_n^R(X)$  の部分アーベル群を  $C_n^D(X)$  とする. (整数  $n \leq 1$  に対しては  $C_n^D(X) = 0$  とおく.) このとき, カンドルの公理 (Q1) より,  $\partial_n(C_n^D(X)) \subset C_{n-1}^D(X)$  となるので,  $C_*^D(X) = (C_n^D(X), \partial_n)$  は  $C_*^R(X)$  の部分鎖複体となる.

商群  $C_n^Q(X) = C_n^R(X)/C_n^D(X)$  を取り, 商複体  $C_*^Q(X) = (C_n^Q(X), \partial_n)$  を考える. (ここで,  $\partial_n$  から誘導される境界準同型も同じ記号で書いた.)  $C_n^R(X)$  の元  $x$  に対して,  $C_n^Q(X)$  での  $x$  の同値類を  $x|_Q \in C_n^Q(X)$  と書くことにする. 鎖群  $C_*^Q(X)$  の  $n$  次輪体群を  $Z_n^Q(X)$ ,  $n$  次境界輪体群

を  $B_n^Q(X)$  と表す. また  $n$  次ホモロジー群を  $H_n^Q(X)$  と表し,  $n$  次カンドルホモロジー群 [4] と呼ぶ. アーベル群  $A$  に対して, 双対鎖複体

$$C_W^*(X; A) = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(C_*^W(X), A), \quad \delta^* = \text{Hom}(\partial_*, \text{id})$$

を通常ホモロジー理論と同様に定義する. (ここで,  $W = \mathbb{R}, \mathbb{D}$  or  $\mathbb{Q}$  とする.) 双対鎖群  $C_Q^*(X; A)$  の  $n$  次双対輪体群を  $Z_Q^n(X; A)$ ,  $n$  次双対境界輪体群を  $B_Q^n(X; A)$  と表す. また  $n$  次コホモロジー群を  $H_Q^n(X; A)$  と表し  $n$  次カンドルコホモロジー群 [4] と呼ぶ.

**例 2.** 奇素数  $p$  に対して  $H_Q^3(\mathbb{R}_p; \mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p$  が示されており, さらに生成元  $\theta_p$  の具体的な表示も知られている [39]. また, この生成元  $\theta_p$  は, 望月コサイクル<sup>3</sup> と呼ばれている.

$$\theta_p(x, y, z) = (x - y) \frac{(2z - y)^p + y^p - 2z^p}{p} \in Z_Q^3(\mathbb{R}_p; \mathbb{Z}_p).$$

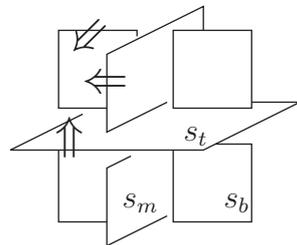
**2.6. 基本類とカンドルコサイクル不変量.** 曲面結び目  $F$  の図式  $D$  の三重点  $r$  に於いて, 上シート, 中シート, 下シートの法線ベクトルを  $\vec{v}_t, \vec{v}_m, \vec{v}_b$  とする. ( $t$  は top,  $m$  は middle,  $b$  は bottom の頭文字である.) 三つ組  $(\vec{v}_t, \vec{v}_m, \vec{v}_b)$  の向きが  $\mathbb{R}^3$  の向きと一致するときに  $\varepsilon(r) = 1$  とし, 異なるときに  $\varepsilon(r) = -1$  とする. (Figure 3 を参照せよ.)

また, 三重点  $r$  に於いて, 4 枚の下シートのうち中シートと上シートの法線ベクトルに対して後ろにあるシート  $s_b$  とする. また, 2 枚の中シートのうち上シートの法線ベクトルに対して後ろにあるシートを  $s_m$ , 上シートを  $s_t$  とする. このとき,  $D$  のシートを自然に  $Q(F)$  の元とみなし,  $Q(F)$  の元の三つ組  $(s_b, s_m, s_t)$  を  $C(r)$  とおく. (Figure 3 を参照せよ.)

このとき, 三重点  $r$  に対して, ボルツマンウエイト  $B(r) \in C_3^{\mathbb{R}}(Q(F))$  を

$$B(r) := \varepsilon(r)C(r) \left( = \pm(s_b, s_m, s_t) \right).$$

で定義する. (Figure 3 を参照せよ.) また, ボルツマンウエイト  $B(r)$  を  $D$  の全ての三重点に関して足し合わせたものを  $|D| \in C_3^{\mathbb{R}}(Q(F))$  と表す. このとき, 以下が成立する.



$$\begin{aligned} \varepsilon(\tau) &= +1 && \in \{+1, -1\} \\ C(\tau) &= (s_b, s_m, s_t) \in Q(F)^3 \end{aligned}$$

FIGURE 3

**補題 2.2.** (cf. [4, Theorem 5.6]) 曲面結び目  $F$  の図式  $D$  に対して, 次が成り立つ.

- (i)  $|D|_{\mathbb{Q}} \in Z_3^{\mathbb{Q}}(Q(F))$ .
- (ii)  $F$  の他の図式  $D'$  に対して,  $|D'|_{\mathbb{Q}} - |D|_{\mathbb{Q}} \in B_3^{\mathbb{Q}}(Q(F))$ .

この補題より, 輪体  $|D|_{\mathbb{Q}}$  のホモロジー類は, 図式の取り方に寄らないことが分かる. そこで, 曲面結び目  $F \in H_3^{\mathbb{Q}}(Q(F))$  の 基本類 [F] を以下で定義する [6] (cf. [53]).

$$[F] := \left[ |D|_{\mathbb{Q}} \right] \in H_3^{\mathbb{Q}}(Q(F)).$$

曲面結び目  $F$  の基本類  $[F] \in H_3^{\mathbb{Q}}(Q(F))$  はそのままでは扱いにくい. そこで, 基本類から扱いやすい量を取り出す事を考える. 有限カンドル  $X$ , アーベル群  $A$ , 3-コサイクル  $\theta \in Z_Q^3(X; A)$  の組を取り固定する. それら三つの与えられたデータに対して, 次のようにしてアーベル群  $A$

<sup>3</sup>原論文の式ではなく, [1] に於いて整理された形の式を紹介した. また, 高次のコホモロジー群  $H_Q^n(\mathbb{R}_p; \mathbb{Z}_p)$  の決定と生成元の表示が [42] で得られており,  $H_Q^3(\mathbb{R}_p; \mathbb{Z}_p)$  の生成元の別の表示が [28] で得られている.

の群環  $\mathbb{Z}[A]$  の元  $\Phi_\theta(F)$  を対応させたものを, 曲面結び目  $F$  の カンドルコサイクル不変量 [4] と呼ぶ.

$$\Phi_\theta(F) := \sum_{\substack{c: Q(F) \rightarrow X \\ c \in \text{Col}_X(F)}} \langle c_*([F]), [\theta] \rangle \in \mathbb{Z}[A]$$

ここで, 写像  $c_*: H_3^Q(Q(F)) \rightarrow H_3^Q(X)$  はカンドル準同型  $c: Q(F) \rightarrow X$  によって誘導された準同型写像,  $[\theta]$  は  $\theta$  のコホモロジー類,

$$\langle \cdot, \cdot \rangle: H_3^Q(X) \otimes_{\mathbb{Z}} H_Q^3(X; A) \rightarrow A$$

はクロネッカー積とする. なお, カンドル  $X$  の位数が有限である事から, 上の和は有限和として well-defined となる. また定義より,  $\theta - \theta' \in B_Q^3(X; A)$  ならば  $\Phi_\theta(F) = \Phi_{\theta'}(F)$  が成り立ち, また  $\theta \in B_Q^3(X; A)$  ならば  $\Phi_\theta(F) = \#\text{Col}_X(F) \cdot 0_A \in \mathbb{Z}[A]$  が成り立つ.

### 3. カンドルを用いた不変量の強さ

本節では「カンドルを用いて定義される曲面結び目不変量は, どの程度曲面結び目を区別するのか?」という問題に対して, 一次元結び目理論と比較するという立場から考察する. (論文 [54] の内容の要約になっている.)

**3.1. 一次元結び目の場合.** 曲面結び目の場合と同様に, 一次元結び目  $k \subset \mathbb{R}^3$  に対しても, 結び目カンドル  $Q(k)$  と基本類  $[k] \in H_2^Q(Q(k))$  が定義される. (一次元結び目の場合の基本類は, 2次ホモロジー群に値を取る.) 一次元結び目  $k$  に対して,  $-k$  を  $k$  の向きを逆にした結び目とし,  $k^*$  を  $k$  の鏡像を取った結び目とする. このとき, 次のことが知られている.

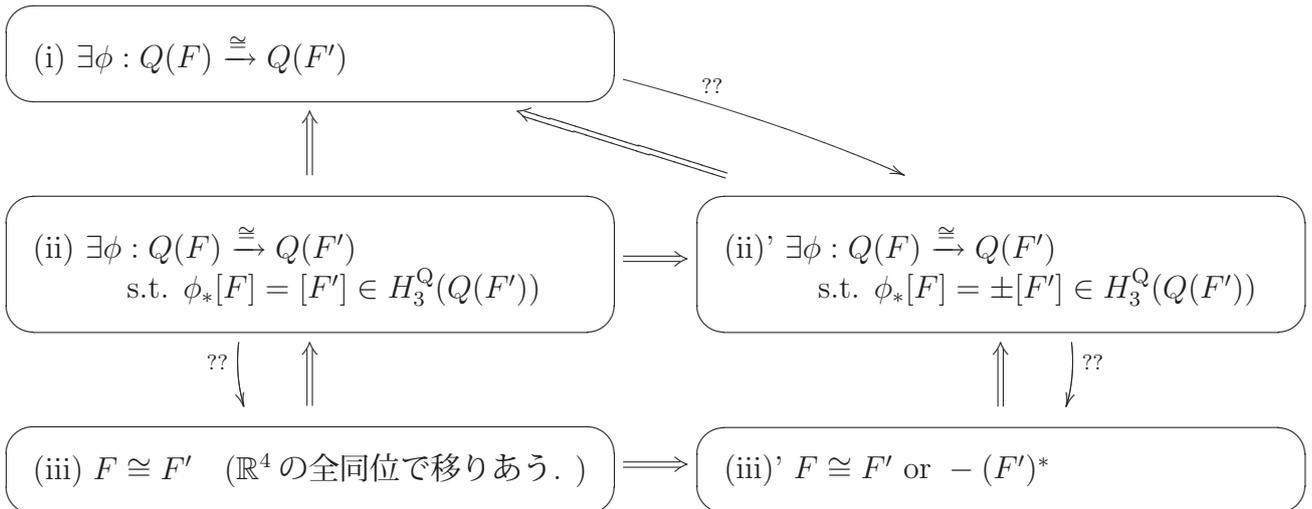
- Joyce [27]–Matveev [38] の定理: 一次元結び目  $k$  と  $k'$  に対して, カンドル同型写像  $\phi: Q(k) \rightarrow Q(k')$  が存在するならば,  $k$  は  $k'$  と同値であるか, 或いは  $-(k')^*$  と同値である. ( $k'$  と  $-(k')^*$  が同値である事もあり得る.)
- Eisermann [11] の定理: 一次元結び目  $k$  と  $k'$  に対して, カンドル同型写像  $\phi: Q(k) \rightarrow Q(k')$  が存在し,  $\phi_*[k] = [k']$  を満たすならば,  $k$  と  $k'$  は同値である.

Joyce–Matveev の定理は,  $Q(k)$  が “ほぼ” 完全な不変量である事を意味しており, Eisermann の定理は,  $Q(k)$  と  $[k]$  の組が完全不変量である事を意味している.

**3.2. 問題.** 前節 §3.1 の状況を踏まえ, 曲面結び目に対して以下を問題として設定した.

**問題 3.1.** Joyce [27]–Matveev [38] の定理や Eisermann [11] の定理は, 曲面結び目に対して成立するのか?

曲面結び目  $F$  に対して,  $-F$  を  $F$  の向きを逆にした結び目とし,  $F^*$  を  $F$  の鏡像を取った結び目とする. 結び目カンドルや基本類からは曲面結び目の種数の情報を得ることができない. そこで整数  $g \geq 0$  を固定し, 種数  $g$  の曲面結び目に対して問題を考えることにする. 問題を具体的ににする為に, 曲面結び目  $F$  と  $F'$  に対して以下の条件 (i), (ii), (ii)', (iii), (iii)' を考える. 定義からすぐに矢印 “ $\implies$ ” が示せる. ((iii)'  $\implies$  (ii)') に関しては [5, Proof of Theorem 9.2] を参照せよ.)



このとき, (i)  $\Rightarrow$  (iii)' を考察する事が Joyce–Matveev の定理の類似に相当し, (ii)  $\Rightarrow$  (iii) を考察する事が Eisermann の定理の類似に相当する.

**3.3. 結果.** 論文 [54] で得られた結果は, (i) と (ii)', (ii)' と (iii)', (ii) と (iii) の間にはそれぞれ差がある, すなわち, 「Joyce–Matveev の定理や Eisermann の定理は, 曲面結び目に対して成立しない」というものである.

**定理 3.2.** 任意の自然数  $N$  に対して, 次を満たすような種数  $g$  の曲面結び目が  $N$  個存在する:  $N$  個の中のどの二つの曲面結び目も (i) を満たすが (ii)' は満たさない.

**定理 3.3.** (ii) を満たすが (iii)' は満たさないような種数  $g$  の曲面結び目の組が存在する. また, そのような組は無数個存在する.

**3.4. 定理 3.2 の証明の概略.** 各奇素数  $p$  に対して, 二つの球面結び目  $F_{p,1}$  と  $F_{p,2}$  を構成し, それらの性質を調べる. 奇素数  $p$  に対して,  $K_p$  を  $(2, p)$  トーラス結び目から得られた 2-ツイストスパン結び目し,  $F_{p,1}$  を  $K_p$  と  $K_p$  の連結和,  $F_{p,2}$  を  $K_p$  と  $-(K_p)^*$  の連結和とする. このとき,  $Q(F_{p,1}) \cong Q(F_{p,2})$  である (すなわち, (i) を満たす) ことが分かる.

また, §2.5 の例 2 で紹介した望月コサイクル  $\theta_p \in Z_Q^3(R_p; \mathbb{Z}_p)$  に関するコサイクル不変量をの値を計算することにより, 次の命題が証明できる. ([1] の計算結果を補助的に用いた.)

**命題 3.4.**  $p \equiv 3 \pmod{4}$  を満たすならば,  $\Phi_{\theta_p}(F_{p,1})$  と  $\Phi_{\theta_p}(F_{p,2})$  は  $\mathbb{Z}[\mathbb{Z}_p]$  の元として異なる.

この命題より, 奇素数  $p$  が  $p \equiv 3 \pmod{4}$  を満たすならば,  $F_{p,1}$  と  $F_{p,2}$  の基本類が異なる (すなわち, (ii)' を満たさない) ことが分かる. この二つの球面結び目をうまく用いることによって, 定理 3.2 を証明することができる.

**3.5. 定理 3.3 の証明の概略.** 種数  $g$  が 0 の場合と, 1 以上の場合に分けて証明の概略を紹介する.

**3.5.1.  $g = 0$  の場合.** 整数  $n, p, q > 5$  で,  $p, q$  は互いに素であるようなものを取る.  $K$  を  $(p, q)$  トーラス結び目から得られた  $n$ -ツイストスパン結び目とし,  $\hat{K}$  を  $K$  から Gluck 手術 [19] で得られた球面結び目とする. ここで,  $K$  の外部  $E(K)$  と  $\hat{K}$  の外部  $E(\hat{K})$  は同相である事に注意しておく. この時 [20] に於いて,  $\hat{K}$  のアンビエント空間は四次元球面  $S^4$  であり,  $\hat{K}$  は  $K$  と向きを無視しても同値ではない (つまり, (iii)' を満たさない) 事が示されている. 基本類が一致している (つまり, (ii) を満たす) 事を示す部分は, 多少技巧的である.

**3.5.2.  $g > 0$  の場合.** 非自明な一次元結び目  $k$  から得られるスパン  $T^2$ -結び目  $T(k)$  とターンドスパン  $T^2$ -結び目  $\hat{T}(k)$  を用いて具体例を作った. このとき, 構成した例が (ii) を満たす事は容易に証明できる. 一方, 曲面結び目  $F$  のガウス和不変量 [37] を用いることで, (iii)' を満たさない (つまり, 曲面結び目として異なる) ことを示すことができた.

3.6. 問題. ここで, いくつか問題を挙げておく.

- (1) 定理 3.2 を証明する際に, 連結和を用いて例を構成した. (定理 3.3 の証明でも一部連結和を用いた.) では, 連結和に分解できないような曲面結び目<sup>4</sup>に限定して, Joyce–Matveev の定理の類似や Eiserman の定理の類似を考察したら何が言えるだろうか?
- (2) 曲面結び目  $F$  の「補空間  $+\alpha$ 」に関する情報<sup>5</sup>の中で, 結び目カンドル  $Q(F)$  と等価である情報を特徴づけよ. (一次元結び目に対しては, 解答が与えられている [27, 38]. (cf. [11]))
- (3) 曲面結び目  $F$  の「補空間  $+\alpha$ 」に関する情報<sup>5</sup>の中で, 基本類  $[F]$  と等価である情報を特徴づけよ. また, カンドルホモロジー群  $H_3^0(Q(F))$  を計算し, その計算結果の意味を明らかにせよ. (一次元結び目に対しては, 解答が与えられている [11].)

#### 4. ブレイド指数との関係

本節では「カンドルを用いて定義される曲面結び目不変量から, 曲面結び目のどのような情報を読み取ることができるか?」という問題に対して, 曲面結び目のブレイド指数との関係を紹介する. (論文 [54] の内容の要約になっている.)

4.1. 曲面ブレイド. 曲面ブレイドの基本事項について復習する. [32] に詳しく述べられている.

$D_1^2, D_2^2$  を二次元円板とし,  $X_m$  を  $\text{int} D_1^2$  の異なる  $m$  点とする. また,  $pr_2 : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_2^2$  を第 2 成分への射影とする. 次数  $m$  の曲面ブレイド<sup>6</sup>とは,  $D_1^2 \times D_2^2$  に適切に埋め込まれた向き付けられた曲面  $S$  で, 以下の二つの条件を満たすものの事を言う.

- 制限写像  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$  が, 次数  $m$  の単純分岐被覆写像である.
- $\partial S = X_m \times \partial D_2^2 \subset D_1^2 \times \partial D_2^2$ .

ここで, 曲面ブレイド  $S$  に付随する分岐被覆写像  $pr_2|_S$  が単純であるとは, 各点  $y \in D_2^2$  に対して,  $|S \cap pr_2^{-1}(y)| = m - 1$  または  $m$  である時に言う.

$D_2^2$  に別の二次元円板  $\overline{D_2^2}$  を貼り付けて得られる二次元球面を  $S^2$  とする. 曲面ブレイド  $S$  の閉包  $\widehat{S}$  とは,  $D_1^2 \times S^2$  に埋め込まれた有向閉曲面で, 次を満たすものの事である.

$$\widehat{S} \cap (D_1^2 \times D_2^2) = S, \quad \widehat{S} \cap (D_1^2 \times \overline{D_2^2}) = X_m \times \overline{D_2^2}$$

さらに,  $D_1^2 \times S^2$  を自明な球面結び目 ( $\mathbb{R}^4$  に自明に埋め込まれた二次元球面) の管状近傍と同一視することで, 閉包  $\widehat{S}$  を  $\mathbb{R}^4$  に埋め込まれた閉曲面とみなす.

4.2. 曲面結び目のブレイド指数について. 曲面結び目に関しても, 一次元結び目理論に於けるアレキサンダーの定理の類似が成り立つことが知られている. つまり, 任意の曲面結び目はある曲面ブレイドの閉包に同値であることが示されている. そこで, 曲面結び目  $F$  を閉包として持つような曲面ブレイドの次数の最小値を  $F$  のブレイド指数と呼び,  $\text{Braid}(F)$  と表す. ここで, 曲面結び目のブレイド指数に関して知られている事をまとめておく. 但し, 次節 §4.3 で述べる結果は含めていない.

#### ブレイド指数が低い場合に関する結果

- $\text{Braid}(F) = 1 \Leftrightarrow F$  : 自明な  $S^2$ -結び目.
- $\text{Braid}(F) = 2 \Leftrightarrow F$  : 自明な  $\Sigma_g$ -結び目 or 自明な 2 成分  $S^2$ -絡み目.
- $\text{Braid}(F) = 3 \Rightarrow F$  : リボン曲面絡み目 ([29]) (逆は一般に不成立である.)
- $\text{Braid}(\tau^2(3_1)) = 4$ . ([31]) ( $\tau^2(3_1)$  は非リボン型である.)
- ブレイド指数 3 のリボン  $S^2$ -結び目が無限個存在する. ([31])
- $4 \leq \text{Braid}(\tau^0(4_1)) \leq 5$ . ([31]) ( $\tau^0(4_1)$  はリボン型である.)
- ブレイド指数 4 のリボン  $S^2$ -結び目が無限個存在する. ([36])

<sup>4</sup>ところで, 「任意の  $S^2$ -結び目が素な  $S^2$ -結び目たちの連結和で表す事が出来るか?」は未解決問題である.

<sup>5</sup>ここで想定している「 $+\alpha$ 」は, メリディアンや周辺構造などである.

<sup>6</sup>単純曲面ブレイドと呼ばれることもある.

## ブレイド指数の上からの評価

一次元結び目に対しても、同様にブレイド指数が定義できる。そこで、ブレイド指数が  $m$  であるような一次元結び目を  $k$  とする。このとき、以下の評価が知られている。

- $\text{Braid}(\tau^0(k)) \leq 2m - 1$ . ([32])
- $\text{Braid}(\tau^r(k)) \leq (m - 1)(|r| + 1) + 1$ . ([21]) (但し,  $r \neq 0$  とする.)
- $\text{Braid}(T(k)) \leq 2m$ . ([32]?)
- $\text{Braid}(\tilde{T}(k)) \leq 3m$ . ([21]) (その後,  $\text{Braid}(\tilde{T}(k)) \leq 2m$  に拡張された ([41]).)

## 連結和に関する振る舞い

- $\text{Braid}(F_1 \# F_2) \leq \text{Braid}(F_1) + \text{Braid}(F_2) - 2$  が成り立つ。ただし、曲面結び目  $F_1, F_2$  は自明な  $S^2$ -結び目ではないとする。([36])
- $\text{Braid}(F_1 \# F_2) \leq \text{Braid}(F_1) + \text{Braid}(F_2) - 3$  を満たすような曲面結び目  $F_1, F_2$  が存在する。([46])

4.3. **ブレイド指数の下からの評価.** 前節を見ると分かるように、「ブレイド指数が5であるような曲面結び目を具体的に構成し、実際に5となることを証明せよ」という問題でさえ(2005年当時)未解決であった。その大きな理由の一つとして、ブレイド指数を下から評価する手法が確立されていなかった<sup>7</sup>ことが挙げられる。(2010年7月現在でも、次の命題 4.1 以外の手法はほとんど知られていない<sup>7</sup>と思われる。) 論文 [52] では、カンドル彩色数を用いて以下の評価を得た。

**命題 4.1.** 曲面結び目  $F$  は自明な球面結び目でないとする。整数  $n > 1, s > 0$  に対して位数  $n$  の有限カンドル  $X$  が存在し、 $F$  の  $X$  彩色数が  $n^s$  以上であるとする。このとき、 $\text{Braid}(F) \geq s + 1$  が成り立つ。

上記の命題 4.1 を具体例に対して適用すると、実際にブレイド指数を決定できる場合がある。

**命題 4.2.** 奇数  $p \geq 3$  に対して、スパン  $(2, p)$  トーラス結び目を  $\ell$  個連結和して得られる球面結び目を  $F_p(\ell)$  とすると、 $\text{Braid}(F_p(\ell)) = \ell + 2$  が成り立つ。

*Proof.* 位数  $p$  の二面体カンドル  $R_p$  による彩色を考えると、 $\#\text{Col}_{R_p}(F_p(\ell)) = p^{\ell+1}$  となる。よって、命題 4.1 より  $\text{Braid}(F_p(\ell)) \geq \ell + 2$  となる。一方で、[36] より  $\text{Braid}(F_p(\ell)) \leq \ell + 2$  となる。□

**系 4.3.** 奇数  $p \geq 3$  に対して、球面結び目  $F_p(\ell)$  に自明な  $T^2$  結び目を  $g$  個連結和して得られる曲面結び目(種数は  $g$ ) のブレイド指数は、 $\ell + 2$  である。

ここで、 $F_p(\ell)$  はリボン型であることから、次の系が得られる。

**系 4.4.** 整数  $k \geq 3, g \geq 0$  に対して、種数  $g$  でブレイド指数が  $k$  であるような(リボン)曲面結び目が無限個存在する。

4.4. **非リボン型の曲面結び目に対する考察と問題.** 前節で扱った曲面結び目はリボン型であった。本節では、非リボン型の曲面結び目に対する考察と問題を述べる。整数  $\ell \geq 0$  に対して、2ツイストスパン三葉結び目と  $F_2(\ell)$  を連結和した球面結び目を  $G(\ell)$  とする。 $G(0)$  は非リボン型であり、 $\text{Braid}(G(0)) = 4$  であることは知られている。整数  $\ell \geq 1$  に対して、次が言えた。

**補題 4.5.** 自然数  $\ell$  に対しても、球面結び目  $G(\ell)$  は非リボン型である。また、そのブレイド指数は  $\ell + 3$  か  $\ell + 4$  のどちらかである。

残念ながら、非リボン球面結び目  $G(\ell)$  ( $\ell \geq 1$ ) のブレイド指数を決定するには至らなかったが、補題 4.5 を用いて次のような結果を示すことはできる。

**命題 4.6.** 任意の整数  $k > 3$  に対して、ブレイド指数が  $k$  であるような非リボン曲面結び目が存在する。

<sup>7</sup>ブレイド指数が3の球面結び目は1融合リボン型である事と、1融合リボン球面結び目のアレキサンダー加群の性質を用いて、ブレイド指数が4以上となる十分条件が得られている [36]。しかし、この方法でより良い評価を得る事は難しいと思われる。

最後に、非リボン曲面結び目のブレイド指数に関する問題を挙げておく。

**問題 4.7.** 曲面結び目  $F$  は非リボン型であるとする。また、整数  $n > 1, s > 0$  に対して位数  $n$  の有限カンドル  $X$  が存在し、 $F$  の  $X$  彩色数が  $n^s$  以上であるとする。

- (1) このとき、 $\text{Braid}(F) \geq s + 2$  が成り立つか?
- (2) (1) が成り立たない場合には、さらに次の仮定を置く: あるアーベル群  $A$  と 3-コサイクル  $\theta \in H^3_{\mathbb{Q}}(X; A)$  が存在して、 $F$  のコサイクル不変量  $\Phi_{\theta}(F) \notin \mathbb{Z}[0_A](\subset \mathbb{Z}[A])$  であるとする。このとき、 $\text{Braid}(F) \geq s + 2$  が成り立つか?

**問題 4.8.** 自然数  $\ell > 0$  に対して、 $\text{Braid}(G(\ell))$  の値を決定せよ<sup>8</sup>。

## REFERENCES

- [1] S. Asami and S. Satoh, *An infinite family of non-invertible surfaces in 4-space*, Bull. London Math. Soc. **37** (2005), no. 2, 285–296.
- [2] J. Bojarczuk and P. Lopes, *Quandles at finite temperatures. III*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 3, 275–373.
- [3] J. Boyle, *The turned torus knot in  $S^4$* , J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), no. 3, 239–249.
- [4] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), no. 10, 3947–3989.
- [5] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, M. Saito, *Computations of quandle cocycle invariants of knotted curves and surfaces*, Adv. Math. **157** (2001), no. 1, 36–94.
- [6] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Diagrammatic computations for quandles and cocycle knot invariants*, Contemp. Math., **318**, 51–74.
- [7] J. S. Carter, S. Kamada, M. Saito, “Surfaces in 4-space”, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **142**. Low-Dimensional Topology, III. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [8] S. Carter, K. Oshiro, M. Saito, *Symmetric extensions of dihedral quandles and triple points of non-orientable surfaces*, Topology Appl. **157** (2010), no. 5, 857–869.
- [9] J. S. Carter and M. Saito, “Knotted surfaces and their diagrams”, Math. Surveys and Monographs **55**, Amer. Math. Soc., 1998.
- [10] J. S. Carter, M. Saito, S. Satoh, *Ribbon concordance of surface-knots via quandle cocycle invariants*, J. Aust. Math. Soc. **80** (2006), no. 1, 131–147.
- [11] M. Eisermann, *Homological characterization of the unknot*, J. Pure Appl. Algebra **177** (2003), no. 2, 131–157.
- [12] R. Fenn, C. Rourke, *Racks and links in codimension two*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 343–406.
- [13] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *An introduction to species and the rack space*, Topics in knot theory (Erzurum, 1992), 33–55, NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci., 399.
- [14] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *Trunks and classifying spaces*, Appl. Categ. Structures **3** (1995), no. 4, 321–356.
- [15] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *The rack space*, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), no. 2, 701–740.
- [16] R. Fenn, C. Rourke, B. Sanderson, *James bundles*, Proc. London Math. Soc. (3) **89** (2004), no. 1, 217–240.
- [17] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, Topology of 3-manifolds and related topics (Proc. The Univ. of Georgia Institute, 1961), 120–167.
- [18] R. H. Fox, *Metacyclic invariants of knots and links*, Canad. J. Math. **22** (1970), 193–201.
- [19] H. Gluck, *The embedding of two-spheres in the four-sphere*, Trans. Amer. Math. Soc. **104** (1962) 308–333.
- [20] C. McA. Gordon, *Knots in the 4-sphere*, Comment. Math. Helv. **51** (1976), no. 4, 585–596.
- [21] I. Hasegawa, *Chart descriptions of monodromy representations on oriented closed surfaces*, Ph.D. Thesis, Univ. of Tokyo, (2006).
- [22] E. Hatakenaka, *An estimate of the triple point numbers of surface-knots by quandle cocycle invariants*, Topology Appl. **139** (2004), no. 1-3, 129–144.
- [23] M. Iwakiri, *Calculation of dihedral quandle cocycle invariants of twist spun 2-bridge knots*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 2, 217–229.
- [24] M. Iwakiri, *Triple point cancelling numbers of surface-links and quandle cocycle invariants*, Topology Appl. **153** (2006), no. 15, 2815–2822.
- [25] M. Iwakiri, *The lower bound of the  $w$ -indices of surface links via quandle cocycle invariants*, preprint (2007).

<sup>8</sup>最近 (2010 年 6 月), 大阪市立大学の岩切雅英氏 [26] によって  $\text{Braid}(G(1)) = 5$  であることが証明された。二面体カンドル  $R_3$  に関するコサイクル不変量を用いることで、 $\text{Braid}(F) \geq 5$  となる十分条件を得たようである。

- [26] M. Iwakiri, *Invariants of conjugacy classes of surface braids derived from Alexander quandles or core quandles*, talk given at “Intelligence of Low-dimensional Topology” (June, 2010).
- [27] D. Joyce, *A classifying invariant of knots, the knot quandle*, *J. Pure Appl. Algebra* **23** (1982), no. 1, 37–65.
- [28] Y. Kabaya, *Quandle cocycles from group cocycles*, talk given at “Intelligence of Low-dimensional Topology” (June, 2010).
- [29] S. Kamada, *Surfaces in  $R^4$  of braid index three are ribbon*, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), no. 2, 137–160.
- [30] S. Kamada, *A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space*, *Topology* **33** (1994), no. 1, 113–122.
- [31] S. Kamada, *Standard forms of 3-braid 2-knots and their Alexander polynomials*, *Michigan Math. J.* **45** (1998), no. 1, 189–205.
- [32] S. Kamada, “Braid and Knot Theory in Dimension Four”, *Math. Surveys and Monographs* 95, Amer. Math. Soc., 2002.
- [33] S. Kamada, *Quandles with good involutions, their homologies and knot invariants*, *Intelligence of low dimensional topology 2006*, 101-108, Ser. Knots Everything, **40** (2007), World Sci. Publ.
- [34] S. Kamada, Y. Matsumoto, *Enveloping monoidal quandles*, *Topology Appl.* **146/147** (2005), 133–148.
- [35] S. Kamada, K. Oshiro, *Homology groups of symmetric quandles and cocycle invariants of links and surface-links*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), no. 10, 5501–5527.
- [36] S. Kamada, S. Satoh, M. Takabayashi, *The braid index is not additive for the connected sum of 2-knots*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **358** (2006), no. 12, 5425–5439.
- [37] A. Kawachi, *On pseudo-ribbon surface-links*, *J. Knot Theory Ramifications* **11** (2002), no. 7, 1043–1062.
- [38] S. V. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* **119(161)** (1982), no. 1, 78–88, 160.
- [39] T. Mochizuki, *Some calculations of cohomology groups of finite Alexander quandles*, *J. Pure Appl. Algebra* **179** (2003), no. 3, 287–330.
- [40] A. Mohamad, T. Yashiro, *On triple point numbers of 5-colorable 2-knots*, *J. Knot Theory Ramifications* **18** (2009), no. 11, 1493–1508.
- [41] I. Nakamura, *Braiding surface links which are coverings of a trivial torus knot*, preprint (arXiv:0905.1469), (2009)
- [42] T. Nosaka, *On quandle homology groups of Alexander quandles of prime order*, preprint (RIMS-1680), (2009)
- [43] K. Oshiro, *Triple point numbers of surface-links and symmetric quandle cocycle invariants*, *Alg. Geom. Topol.* **10** (2010), no. 2, 853–865.
- [44] M. Saito, S. Satoh, *The Spun Trefoil Needs Four Broken Sheets*, *J. Knot Theory Ramifications*, **14** (2005), no. 7, 853–858.
- [45] S. Satoh, *Sheet numbers and cocycle invariants of surface-knots*, *Intelligence of low dimensional topology 2006*, 287–291, Ser. Knots Everything, **40** (2007), World Sci. Publ.
- [46] S. Satoh, *Braid index of connected sum of surface-knots II*, talk given at “Four-dimensional Topology” (January, 2007).
- [47] S. Satoh, *Sheet number and quandle-colored 2-knot*, *J. Math. Soc. Japan* **61** (2009), no. 2, 579–606.
- [48] S. Satoh, *A note on the sheet numbers of twist-spun knots*, *Hiroshima Math. J.* **40** (2010), no. 1, 1–15.
- [49] S. Satoh, *The length of 3-cocycle of 5-dihedral quandle*, preprint (2010).
- [50] S. Satoh, A. Shima, *The 2-twist-spun trefoil has the triple point number four*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **356** (2004), no. 3, 1007–1024.
- [51] S. Satoh, A. Shima, *Triple point numbers and quandle cocycle invariants of knotted surfaces in 4-space*, *New Zealand J. Math.* **34** (2005), no. 1, 71–79.
- [52] K. Tanaka, *The braid index of surface-knots and quandle colorings*, *Illinois J. Math.* **49** (2005), no. 2, 517–522.
- [53] K. Tanaka, *On surface-links represented by diagrams with two or three triple points*, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), no. 8, 963–978.
- [54] K. Tanaka, *Inequivalent surface-knots with the same knot quandle*, *Topology Appl.* **154** (2007), no. 15, 2757–2763.
- [55] T. Yajima, *On simply knotted spheres in  $R^4$* , *Osaka J. Math.* **1** (1964), 133–152.
- [56] E. C. Zeeman, *Twisting spun knots*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **115** (1965), 471–495.

## 順序数の積の位相的性質

YASUSHI HIRATA

ABSTRACT. 順序数に全順序位相を入れた空間と、その積空間の位相的性質について概観する。特に、順序数の2つの部分空間の積では成り立つが、3つの部分空間の積では成り立たないような性質があることについて述べる。

### 1. SUBSPACES OF ORDINALS

An ordinal  $\mu$  is identified with the set  $\{\alpha : \alpha \text{ is an ordinal } < \mu\}$ . Each ordinal is well-ordered by the usual order of ordinal numbers, and we assume that each ordinal has the linear order topology.

A cardinal number  $\kappa$  is identified with the least ordinal of cardinality  $\kappa$ , so  $\kappa = \{\alpha : \alpha \text{ is an ordinal, } |\alpha| < \kappa\}$ . The least infinite ordinal  $\omega$  is identified with the set of all natural numbers, and it is also the least infinite cardinal. For an infinite cardinal  $\kappa$ , we denote by  $\kappa^+$  the least cardinal larger than  $\kappa$ . Let  $\omega_0 = \omega$  and  $\omega_{n+1} = \omega_n^+$  for each  $n \in \omega$ . In particular,  $\omega_1$  denotes the least uncountable cardinal.

A topological space  $X$  is said to be *monotonically normal* iff there is

$$\langle H(x, U) \mid U \text{ is an open neighbourhood of } x \in X \rangle$$

such that  $H(x, U) \cap H(y, V) \neq \emptyset$  implies either  $x \in V$  or  $y \in U$ . It is well known that every linearly ordered space and every metrizable space are monotonically normal  $T_1$ -spaces. And it is trivial that every subspace of a monotonically normal space is monotonically normal. So we have

**Fact 1.** *every subspace of an ordinal is monotonically normal  $T_1$ -space.*

A topological space  $X$  is said to be *orderable* iff the topology of  $X$  coincides with the linear order topology for some linear order on  $X$ . A topological space  $X$  is said to be *suborderable* iff the topology of  $X$  coincides with the subspace topology of some linearly ordered space  $(Y, <)$  with  $X \subseteq Y$ . For a subset  $X$  of a linear ordered space  $(Y, <)$ , the subspace topology on  $X$  of  $(Y, <)$  may differ from the linear order topology of  $(X, <)$ . In fact, suborderability does not imply orderability. For instance, it is well known that the Sorgenfrey line is suborderable but not orderable [26]. In case  $X$  is a subset of an ordinal  $\mu$ ,  $X$  is well ordered by the usual order  $<$  of ordinals, so there are unique ordinal  $\text{otp } X$ , which is called the *order type* of  $X$ , and an order preserving bijection  $e : (X, <) \rightarrow (\text{otp } X, <)$ . The linear order topology of  $(X, <)$  is homeomorphic to the linear order topology of  $(\text{otp } X, <)$ , but not always coincides with the subspace topology on  $X$  of  $(\mu, <)$ . Even in such case, we can take another linear order  $\prec$  on  $X$  such that the linear order topology of  $(X, \prec)$  coincides with the subspace topology on  $X$  of  $(\mu, <)$ .

**Theorem 1.** [12] *Every topological subspace of an ordinal is orderable.*

From now on, each set of ordinals is assumed to have the subspace topology of an ordinal with no mention. For notational convenience, we assume that  $-1 < \alpha$  for every ordinal  $\alpha$ . Let  $X$  be a subspace of an ordinal  $\mu$ , and  $\alpha \in X$ . Then  $\{X \cap (\gamma, \alpha] : \gamma \in \alpha \cup \{-1\}\}$  is a clopen neighbourhood base of  $\alpha$  in  $X$ . Actually,  $X \cap (\gamma, \alpha] = X \cap (\gamma, \alpha + 1) = X \cap [\gamma + 1, \alpha]$  is a clopen set of  $X$ .

A space is said to be *zero-dimensional* iff for each open set  $U$  and  $x \in U$ , there is a clopen set  $K$  with  $x \in K \subseteq U$ . We have

**Fact 2.** *every subspace of an ordinal is zero-dimensional.*

Let  $X$  be a set of an ordinal. An ordinal  $\alpha > 0$  is called a *limit point* of  $X$  iff  $X \cap (\gamma, \alpha) \neq \emptyset$  for every  $\gamma < \alpha$ . And  $\text{Lim}(X)$  denotes the set of all limit points of  $X$ .

Existence of  $\mu \in \text{Lim}(X) \setminus X$  refutes compactness of  $X$ , actually an open cover  $\{X \cap \alpha : \alpha < \mu\} \cup \{X \cap (\mu, \infty)\}$  of  $X$  does not have a finite subcover.

**Fact 3.** *Let  $X$  be a subspace of an ordinal.*

- (1) *If  $\alpha \in X \setminus \text{Lim}(X)$ , then  $\alpha$  is an isolated point.*
- (2) *If  $\alpha \in X \cap \text{Lim}(X)$ , then  $\{X \cap (\gamma, \alpha] : \gamma \in X \cap \alpha\}$  is a clopen neighbourhood base of  $\alpha$  in  $X$ .*
- (3) *For  $Y \subseteq X$ ,  $\text{cl}_X(Y) = Y \cup (X \cap \text{Lim}(Y))$  and  $|\text{cl}_X(Y)| = |Y|$  hold.*
- (4)  *$X$  is compact iff  $\text{Lim}(X) \subseteq X$ . In particular, an ordinal  $\mu$  is compact iff  $\mu$  is either 0 or a successor ordinal.*
- (5)  *$X$  is second countable iff  $X$  is separable iff  $|X| \leq \omega$ . In particular, every countable subspace of an ordinal is metrizable.*

Let  $\mu$  be an ordinal.  $C \subseteq \mu$  is said to be *cofinal* in  $\mu$  iff  $C \cap [\gamma, \mu) \neq \emptyset$  for every  $\gamma < \mu$ . The ordinal  $\text{cf } \mu = \min\{\text{otp } C : C \subseteq \mu \text{ is cofinal}\}$  is called the *cofinality* of  $\mu$ . An ordinal  $\kappa$  with  $\text{cf } \kappa = \kappa \geq \omega$  is called a *regular cardinal*. The fact below is well known.

**Fact 4.** *Let  $\mu$  be an ordinal.*

- (1)  *$\text{cf}(\text{cf } \mu) = \text{cf } \mu \leq |\mu| \leq \mu$  holds.*
- (2)  *$\text{cf } 0 = 0$ ,  $\text{cf } \mu = 1$  for each successor ordinal  $\mu$ , and  $\text{cf } \mu \geq \omega$  for each limit ordinal  $\mu$ .*
- (3) *If  $\mu$  is a limit ordinal and  $\langle \nu_\xi \mid \xi < \mu \rangle$  is a strictly increasing sequence of ordinals, then  $\text{cf}(\sup\{\nu_\xi : \xi < \mu\}) = \text{cf } \mu$ .*
- (4) *If  $\kappa$  is an infinite cardinal, then  $\kappa^+$  is a regular uncountable cardinal. In particular,  $\omega_1 = \omega^+$  is a regular uncountable cardinal.*

**Fact 5.** *Let  $X$  be a subspace of an ordinal.*

- (1) *If  $\mu \in X \cap \text{Lim}(X)$ , then  $\text{cf } \mu$  is the minimal cardinality of neighbourhood bases of  $\mu$  in  $X$ .*
- (2)  *$X$  is first countable iff there is not  $\mu \in X \cap \text{Lim}(X)$  with  $\text{cf } \mu > \omega$ .*
- (3)  *$X$  is Lindelöf iff there is not  $\mu \in \text{Lim}(X) \setminus X$  such that  $\text{cf } \mu > \omega$ .*

Let  $\mu$  be an ordinal with  $\text{cf } \mu > \omega$ . A closed and cofinal subset of  $\mu$  is called a *club set* of  $\mu$ . A subset  $X$  of  $\mu$  is said to be *stationary* in  $\mu$  iff  $X \cap C \neq \emptyset$  for any club set  $C$  of  $\mu$ . The basic facts below are well known. Moreover, there are many studies of stationary sets in set theory, you know. (See for instance [25], [16].)

**Fact 6.** *Let  $\mu$  be an ordinal such that  $\text{cf } \mu = \kappa > \omega$ .*

- (1) (*Completeness of the club filter.*) If  $\rho < \kappa$  and  $\langle C_\xi \mid \xi < \rho \rangle$  is a sequence of club sets of  $\mu$ , then  $\bigcap_{\xi < \rho} C_\xi$  is a club set of  $\mu$ .
- (2) If  $C \subseteq \mu$  is cofinal, then  $\mu \cap \text{Lim}(C)$  is a club set of  $\mu$ .

**Fact 7.** Let  $\kappa$  be a regular uncountable cardinal.

- (1) (*Diagonal Intersection Lemma*) If  $\langle C_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$  is a sequence of club sets of  $\kappa$ , then  $\{\alpha < \kappa : \alpha \in \bigcap_{\xi < \alpha} C_\xi\}$  is a club set of  $\kappa$ .
- (2) (*Pressing Down Lemma*) If  $S$  is a stationary subset of  $\kappa$  and  $\gamma_\xi < \xi$  holds for every  $\xi \in S$ , then there are a stationary subset  $S'$  of  $S$  and  $\gamma < \kappa$  such that  $\gamma_\xi = \gamma$  for every  $\xi \in S'$ .
- (3) (*Solovay's theorem*) Every stationary subset of  $\kappa$  is partitioned into  $\kappa$ -many stationary subsets. I.e. if  $S$  is a stationary subset of  $\kappa$ , then there is a pairwise disjoint collection  $\langle S_\xi \mid \xi < \kappa \rangle$  of stationary subsets of  $S$  such that  $S = \bigcup_{\xi < \kappa} S_\xi$ .

A topological space is said to be (*countably*) *paracompact* iff every (countable) open cover has a locally finite open refinement. A topological space is said to be (*countably*) *metacompact* iff every (countable) open cover has a point finite open refinement.

For a subspace  $A$  of an ordinal, define  $\Gamma(A) = \Gamma_0(A) \cup \Gamma_1(A)$  by putting

$$\Gamma_0(A) = \{\mu \in \text{Lim}(A) \setminus A : \text{cf } \mu > \omega, A \cap \mu \text{ is stationary in } \mu\},$$

$$\Gamma_1(A) = \text{Lim}(A) \cap A.$$

And for a regular cardinal  $\kappa$  and for each  $i = 0, 1$ , let

$$\Gamma_i(A, \kappa) = \{\mu \in \Gamma_i(A) : \text{cf } \mu = \kappa\},$$

$$\Gamma(A, \kappa) = \{\mu \in \Gamma(A) : \text{cf } \mu = \kappa\}.$$

To see that a subspace  $A$  of an ordinal has a certain topological property in inductive argument, the lemma below is frequently used.

**Lemma 1.** Let  $A$  be a subspace of an ordinal, and  $\mu \notin \Gamma(A)$  an ordinal. Then  $A \cap [0, \mu]$  is decomposed as a topological sum  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  such that for each  $i \in I$ , either  $A_i = \{\mu\}$  or  $A_i \subseteq [0, \mu_i]$  for some  $\mu_i < \mu$ .

On the other hand, existence of  $\mu \in \Gamma_0(A)$  refutes metacompactness of  $A$ . Actually, it is seen from Pressing Down Lemma that an open cover

$$\{A \cap \alpha : \alpha < \mu\} \cup \{A \cap (\mu, \infty)\}$$

of  $A$  does not have a point finite open refinement.

**Fact 8.** Let  $X$  be a subspace of an ordinal.

- (1)  $X$  is paracompact iff  $X$  is metacompact iff  $\Gamma_0(X) = \emptyset$ .
- (2)  $X$  is metrizable iff  $X$  is paracompact and first countable.

## 2. NORMALITY AND COUNTABLE PARACOMPACTNESS

A topological space is said to be *shrinking* iff for each open cover  $\mathcal{U}$ , there is a closed cover  $\mathcal{F} = \langle F(U) \mid U \in \mathcal{U} \rangle$  such that  $F(U) \subseteq U$  for every  $U \in \mathcal{U}$ . A space is said to be *collectionwise normal* iff for each discrete collection  $\mathcal{F}$  of closed sets, there is a pairwise disjoint collection  $\mathcal{U} = \langle U(F) \mid F \in \mathcal{F} \rangle$  of open sets such that  $F \subseteq U(F)$  for every  $F \in \mathcal{F}$ . A space is said to be *normal* iff for each disjoint

pair  $\langle F_0, F_1 \rangle$  of closed sets, there is a disjoint pair  $\langle U_0, U_1 \rangle$  of open sets such that  $F_0 \subseteq U_0$  and  $F_1 \subseteq U_1$ .

It is well known that

- monotonically normal spaces are shrinking and collectionwise normal [1],
- shrinking spaces are normal and countably paracompact,
- collectionwise normal spaces are normal,
- normal space is countably paracompact iff it is countably metacompact.

Hence, every subspace of an ordinal is shrinking and collectionwise normal, and so normal and countably paracompact. Every normal  $T_1$ -space is Tychonoff (=completely regular). And product spaces and subspaces of Tychonoff (and zero-dimensional) spaces are also Tychonoff (and zero-dimensional). So we have

**Fact 9.** *subspaces of product spaces of ordinals are zero-dimensional, Tychonoff  $T_1$ -space.*

It is well-known that normality of  $X$  and  $Y$  does not always imply normality of  $X \times Y$ .

**Fact 10.**  $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$  is not normal.

A normal space  $X$  such that  $X \times \mathbb{I}$  is not normal is called a *Dowker space*, where  $\mathbb{I} = [0, 1] = \{y \in \mathbb{R} : 0 \leq y \leq 1\}$  is the unit interval in the real line. It is well known that  $X$  is a Dowker space iff  $X$  is normal and not countably paracompact [2]. The problem of the existence of such a space had been a hard problem. Rudin found the first ZFC example of a Dowker space.

**Theorem 2.** [27]

$$X = \{x \in \square_{1 < n < \omega} (\omega_n + 1) : \exists m \in \omega \forall n (1 < n < \omega \rightarrow \omega_1 \leq \text{cf } x(n) < \omega_m)\}$$

is a Dowker space.

The box product  $\square_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  coincides with  $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  as a set, but  $\square_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$  has an open base  $\{\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda : U_\lambda \subseteq X_\lambda \text{ is open for every } \lambda \in \Lambda\}$ .

In 1992, Kemoto, Ohta, and Tamano characterized shrinking property, collectionwise normality, normality, and countable paracompactness of products of two subspaces of ordinals in terms of stationarity.

If  $\mu$  is an ordinal with  $\text{cf } \mu > \omega$ , then there is a club set  $C$  of  $\mu$  with  $\text{otp } C = \text{cf } \mu$ , and the order preserving bijection  $c : \text{cf } \mu \rightarrow C$  for such club set  $C$  is called a *normal sequence*. Note that  $S \subseteq \mu$  is stationary in  $\mu$  iff  $c^{-1}[S] = \{\xi < \text{cf } \mu : c(\xi) \in S\}$  is stationary in  $\text{cf } \mu$  for all (some) normal sequence  $c : \text{cf } \mu \rightarrow \mu$ .

For a collection  $\langle A(k) \mid k \in N \rangle$  of subspaces of ordinals, and  $\langle \mu_k \mid k \in N \rangle \in \prod_{k \in N} \Gamma(A(k), \kappa)$  for a regular uncountable cardinal  $\kappa$  with  $|N| < \kappa$ , we say that  $\prod_{k \in N} A(k)$  is *diagonal stationary* in  $\prod_{k \in N} \mu_k$  iff  $\bigcap_{k \in N} c_k^{-1}[A(k)]$  is stationary in  $\kappa$  where  $c_k : \kappa \rightarrow \mu_k$  is a normal sequence.

**Theorem 3.** [19] *Let  $A$  and  $B$  be subspaces of ordinals.*

- (1) *The following conditions are equivalent.*
  - (a)  $A \times B$  is shrinking.
  - (b)  $A \times B$  is collectionwise normal.
  - (c)  $A \times B$  is normal.
  - (d) For each regular uncountable cardinal  $\kappa$ ,

- $\Gamma_0(A, \kappa) \times \Gamma_1(B, \kappa) = \Gamma_1(A, \kappa) \times \Gamma_0(B, \kappa) = \emptyset$ ,
  - $A \times B$  is diagonal stationary in  $\mu \times \nu$  for every  $\langle \mu, \nu \rangle \in \Gamma_0(A, \kappa) \times \Gamma_0(B, \kappa)$ .
- (2) The following conditions are equivalent.
- (e)  $A \times B$  is countably paracompact.
  - (f)  $A \times B$  is diagonal stationary in  $\mu \times \nu$  for each regular uncountable cardinal  $\kappa$  and for each  $\langle \mu, \nu \rangle \in (\Gamma_0(A, \kappa) \times \Gamma(B, \kappa)) \cup (\Gamma(A, \kappa) \times \Gamma_0(B, \kappa))$ .
- (3) If  $A, B \subseteq \omega_1$ , then (a)-(f) are all equivalent with (g) below.
- (g) Either  $A$  or  $B$  is non-stationary, or  $A \cap B$  is stationary in  $\omega_1$ .

**Corollary 2.**  $A \times B$  is neither normal nor countably paracompact if  $A$  and  $B$  are disjoint stationary subsets of  $\omega_1$ .

We can characterize normality of product spaces of arbitrary many subspaces of ordinals as below.

**Theorem 4.** Let  $A(\lambda)$  be a subspace of an ordinal with  $|A(\lambda)| \geq 2$  for each  $\lambda \in \Lambda$ . Then the following conditions are equivalent.

- (a)  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda)$  is shrinking.
- (b)  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda)$  is collectionwise normal.
- (c)  $\prod_{\lambda \in \Lambda} A(\lambda)$  is normal.
- (d)  $|\Lambda_0| \leq \omega$  holds for

$$\Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda : \{\mu \in \text{Lim}(A(\lambda)) \setminus A(\lambda) : \text{cf } \mu = \omega\} \neq \emptyset\},$$

and for each regular uncountable cardinal  $\kappa$ , the following hold:

- $\Gamma_0(A(\lambda_0), \kappa) \times \Gamma_1(A(\lambda_1), \kappa) = \emptyset$  holds for every distinct  $\lambda_0, \lambda_1 \in \Lambda$ ,
- if  $\kappa \leq |\Lambda|$ , then  $\Gamma_0(A(\lambda), \kappa) = \emptyset$  for every  $\lambda \in \Lambda$ ,
- if  $\kappa > |\Lambda|$ , then  $\prod_{\lambda \in \Lambda'} A(\lambda)$  is diagonal stationary in  $\prod_{\lambda \in \Lambda'} \mu(\lambda)$  for every  $\Lambda' \subseteq \Lambda$  and  $\langle \mu(\lambda) \mid \lambda \in \Lambda' \rangle \in \prod_{\lambda \in \Lambda'} \Gamma_0(A(\lambda), \kappa)$ .

Let  $X$  be a topological space, and  $\mathbb{R}$  the real line.  $E \subseteq X$  is called a *zero-set* (resp. *cozero set*) of  $X$  iff there is a continuous function  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  such that  $E = \{x \in X : f(x) = 0\}$  (resp.  $E = \{x \in X : f(x) \neq 0\}$ ). A space is said to be *strongly zero-dimensional* iff for each disjoint pair  $\langle F_0, F_1 \rangle$  of zero-sets, there is a clopen set  $K$  such that  $F_0 \subseteq K$  and  $F_1 \cap K = \emptyset$ .

**Theorem 5.** The following hold.

- (1) Products of arbitrary many ordinals are strongly zero-dimensional [23].
- (2) Finite products of subspaces of ordinals are strongly zero-dimensional [6].
- (3) There is a subspace of  $c^2$  which is not strongly zero-dimensional, where  $c = |\mathbb{R}|$  [6].

**Problem 1.** Are product spaces of subspaces of ordinals strongly zero-dimensional?

**Theorem 6.** [5] Let  $X$  be a subspace of a finite product of ordinals. Then the following conditions are equivalent.

- (1)  $X$  is shrinking.
- (2)  $X$  is collectionwise normal.
- (3)  $X$  is normal.
- (4)  $X$  is normal and strongly zero-dimensional.

In particular, normality implies countable paracompactness for a subspace of a finite product of ordinals. On the other hand,  $\omega_1 \times (\omega_1 + 1)$  is countably paracompact, but not normal. Kemoto, Smith, and Szeptycki proved the consistency with ZFC of the statement that every countable paracompact subspace of  $\omega_1^2$  is normal. But it is not known whether such statement is derived from only ZFC.

**Theorem 7.** [22] *Assume  $\diamond_{SS}$  or PMEA. Then every countably paracompact subspace of  $\omega_1^2$  is normal.*

**Problem 2.** [22] *Is it derived from only ZFC that every countably paracompact subspace of  $\omega_1^2$  is normal?*

For countable metacompactness, it is known that

**Theorem 8.**

- (1) *Every subspace of a finite product of ordinals is countably metacompact* [20], [4].
- (2) *There are a sequence  $\langle A(k) \mid k < \omega \rangle$  of subspaces of  $\omega_1$  such that  $\prod_{k \in \omega} A(k)$  is not countably metacompact* [20].
- (3)  *$\omega^{\omega_1}$  is not countably metacompact.*

### 3. WEAKENINGS OF NORMALITY

The author and Kemoto found examples of topological property  $\mathcal{P}$  such that

- $A \times B$  has the property  $\mathcal{P}$  for every subspaces  $A, B$  of ordinals (or  $\omega_1$ ),
- there are subspaces  $A, B, C$  of ordinals (or  $\omega_1$ ) such that  $\mathcal{P}$  does not hold for  $A \times B \times C$ .

A topological space is said to be *subnormal* iff for each disjoint pair  $\langle F_0, F_1 \rangle$  of closed sets, there is a disjoint pair  $\langle U_0, U_1 \rangle$  of  $G_\delta$ -sets such that  $F_0 \subseteq U_0$  and  $F_1 \subseteq U_1$ .

**Theorem 9.** *The following hold.*

- (1) *Every subspace of  $\omega_1^2$  is subnormal* [18].
- (2) *There is a subspace of  $\omega_1^3$  which is not subnormal* [9].
- (3) *For each  $n < \omega$ , every subspace of*

$$\omega_1^n|_< = \{x \in \omega_1^n : x(i) < x(j) \text{ for every } i < j < n\}$$

*is subnormal* [9].

The closure of an open set is called a *regular closed* set. A topological space is said to be  $\kappa$ -*normal* iff for each disjoint pair  $\langle F_0, F_1 \rangle$  of regular closed sets, there is a disjoint pair  $\langle U_0, U_1 \rangle$  of open sets such that  $F_0 \subseteq U_0$  and  $F_1 \subseteq U_1$ .

**Theorem 10.** *The following hold.*

- (1) *Products of arbitrary many ordinals are  $\kappa$ -normal* [15].
- (2) *There is a subspace of  $\omega_1^2$  which is not  $\kappa$ -normal* [14].
- (3)  *$A \times B$  is  $\kappa$ -normal for each subspaces  $A$  and  $B$  of ordinals*[14].
- (4) *There are subspaces  $A, B, C$  of  $\omega_1$  such that  $A \times B \times C$  is not  $\kappa$ -normal* [11].

We also characterized subnormality and  $\kappa$ -normality of finite products of subspaces of  $\omega_1$  in terms of stationarity.

**Theorem 11.** [11], [7] *Let  $\langle A(k) \mid k \in N \rangle$  be a finite collection of non-empty subsets of  $\omega_1$ . Then the following conditions are equivalent.*

- (a)  $\prod_{k \in N} A(k)$  is subnormal.
- (b)  $\prod_{k \in N} A(k)$  is  $\kappa$ -normal.
- (c) There is an equivalence relation  $\sim$  on

$$N_0 = \{k \in N : A(k) \text{ is stationary in } \omega_1\}$$

such that

- for each  $k_0, k_1 \in N_0$ , if  $A(k_0) \cap A(k_1)$  is stationary in  $\omega_1$ , then  $k_0 \sim k_1$ ,
- for each equivalence class  $r$ ,  $\prod_{k \in r} A(k)$  is stationary in  $\omega_1$ .

A subset  $D$  of a topological space  $X$  is said to be a *discrete closed set* iff  $\langle \{d\} \mid d \in D \rangle$  is a discrete collection of closed sets of  $X$ . A space  $X$  is said to be *collectionwise Hausdorff* iff for each discrete closed set  $D$  of  $X$ , there is a pairwise disjoint collection  $\langle U(d) \mid d \in D \rangle$  of open sets of  $X$  such that  $d \in U(d)$  for every  $d \in D$ .

**Theorem 12.** *The following hold.*

- (1) For each  $n \in \omega$ , every subspace of  $\omega_1^n$  is collectionwise Hausdorff [10].
- (2) There is a collection  $\langle A(k) \mid k < \omega \rangle$  of subspaces of  $\omega_1$  such that  $\prod_{k < \omega} A(k)$  is not collectionwise Hausdorff [10].
- (3) There is a subspace of  $(\omega_1 + 1)^2$  which is not collectionwise Hausdorff.
- (4) For each subspaces  $A, B$  of ordinals,  $A \times B$  is collectionwise Hausdorff [8].
- (5) There are subspaces  $A, B, C$  of  $\omega_1 + 1$  such that  $A \times B \times C$  is not collectionwise Hausdorff [8].

A space  $X$  is said to be  *$\sigma$ -collectionwise Hausdorff* iff for each discrete closed set  $D$  of  $X$ , there is a sequence  $\langle D_n \mid n \in \omega \rangle$  such that  $D = \bigcup_{n \in \omega} D_n$ , and for each  $n \in \omega$ , there is a pairwise disjoint collection  $\langle U(d) \mid d \in D_n \rangle$  of open sets of  $X$  such that  $d \in U(d)$  for every  $d \in D_n$ .

**Theorem 13.** [13] *Every subspace of a countable product of ordinals is  $\sigma$ -collectionwise Hausdorff.*

## REFERENCES

- [1] Z. Balogh and M. E. Rudin, *Monotone normality*, Topology Appl. 47 (1992) 115-127.
- [2] C. H. Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. 3 (1951), 219-224.
- [3] R. Engelking, *General Topology* (Revised and completed edition), Heldermann Verlag, 1989.
- [4] W. G. Fleissner, *Metacompact subspaces of products of ordinals*, Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002), 293-301.
- [5] W. G. Fleissner, *Normal subspaces of products of finitely many ordinals*, Proc. Amer. Math. Soc. 131 (2003), 2279-2287.
- [6] W. G. Fleissner, N. Kemoto and J. Terasawa, *Strong Zero-dimensionality of Products of Ordinals*, Top. Appl., 132 (2003) 109-127.
- [7] Y. Hirata, *Subnormal Finite products of subspaces of  $\omega_1$* , Houston J. Math, 31(4) (2005) 1085-1095.
- [8] Y. Hirata, *The collectionwise Hausdorff property of products of two or three subspaces of ordinals*, Houston J. Math, 35(3) (2009) 891-901.
- [9] Y. Hirata and N. Kemoto, *Separating by  $G_\delta$ -sets in finite powers of  $\omega_1$* , Fund. Math., 177 (2003) 83-94.
- [10] Y. Hirata and N. Kemoto, *The hereditarily collectionwise Hausdorff property in products of  $\omega_1$* , Top. Proc., 29 (2005) 167-173.
- [11] Y. Hirata and N. Kemoto, *Mild normality of finite products of subspaces of  $\omega_1$* , Top. Appl., 153 (2006) 1203-1213.

- [12] Y. Hirata and N. Kemoto, *Orderability of subspaces of well-orderable topological spaces*, Top. Appl., 157 (2010) 127-135.
- [13] Y. Hirata and N. Kemoto, *Applications of a theory of stationary sets to topology*, preprint.
- [14] L. Kalantan and N. Kemoto, *Mild normality in products of ordinals*, Houston J. Math, 29(4) (2003) 937-947.
- [15] L. Kalantan and P.J. Szeptycki,  *$\kappa$ -normality and products of ordinals*, Topology Appl. 123 (2002) 537-545.
- [16] A. Kanamori, *The higher infinite*, Springer-Verlag, 1994.
- [17] N. Kemoto, *Orthocompact subspaces in products of two ordinals*, Top. Proc. 22 (1997)
- [18] N. Kemoto, *Subnormality in  $\omega_1^2$* , Top. Appl., 122 (2002) 287-296.
- [19] N. Kemoto, H. Ohta and K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Top. Appl. 45 (1992) 119-130.
- [20] N. Kemoto and K. D. Smith, *The product of two ordinals is hereditarily countably metacompact*, Top. Appl. 74 (1996) 91-96.
- [21] N. Kemoto and K. D. Smith, *Hereditarily countable metacompactness in finite and infinite product spaces of ordinals*, Top. Appl.77 (1997) 57-63.
- [22] N. Kemoto, K. D. Smith and P. J. Szeptycki, *Countable paracompactness versus normality in  $\omega_1^2$* , Top. Appl., 104 (2000) 141-154.
- [23] N. Kemoto and P. J. Szeptycki, *Topological properties of products of ordinals*, Top. Appl., 143 (2004) 257-277.
- [24] N. Kemoto and P. J. Szeptycki, *Countable paracompactness of  $\sigma$ -products*, Top. Appl., 149 (2005) 259-271.
- [25] K. Kunen, *Set theory*, North-Holland, Amsterdam, 1980.
- [26] D.J. Lutzer, *On generalized ordered spaces*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 89 (1971).
- [27] M. E. Rudin, *A normal space  $X$  for which  $X \times I$  is not normal*, Fund. Math. 73 (1971), 179-186.
- [28] M. E. Rudin, *Dowker spaces*, Handbook of set-theoretic topology, 761-780.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA, IBARAKI 305-8571, JAPAN  
*E-mail address:* yhira@jb3.so-net.ne.jp

# ゲージ群のトポロジー

岸本大祐

## 1 ゲージ群

### 1.1 定義

以下,  $G$  を位相群,  $P \rightarrow K$  を主  $G$  束とする.

**定義 1.1.**  $P$  の自己同型群のことを  $P$  のゲージ群といい,  $\mathcal{G}(P)$  で表す. つまり,  $\mathcal{G}(P)$  は  $G$ -同変自己写像  $P \rightarrow P$  で  $K$  の恒等写像の持ち上げとなっているものからなる空間で, 写像の合成により積を定められた位相群<sup>1</sup>である.

$\mathcal{G}(P)$  は  $P$  に関して自然である. つまり, 写像  $f: L \rightarrow K$  に対する  $P$  の引き戻し  $f^{-1}P$  が準同型  $\mathcal{G}(P) \rightarrow \mathcal{G}(f^{-1}P)$  を与える. 特に, 基点の包含写像  $*$   $\rightarrow K$  は全射準同型<sup>2</sup>

$$\mathcal{G}(P) \rightarrow G$$

を得る. ただし, 1 点上の主  $G$  束のゲージ群と  $G$  を自然に同一視することにする.

**定義 1.2.** 上の全射準同型の核を  $P$  の基点付きゲージ群といい,  $\mathcal{G}_0(P)$  で表す.

ゲージ群のトポロジーを調べる際には主に次のふたつの方法がとられる.

1.  $P$  の随伴束を調べる.
2.  $\mathcal{G}(P)$  の分類空間を通して得られる評価ファイブレーションを調べる.

この講演はゲージ群に関する次の3つについて行われる.

1. ホモトピー型
2. 分裂 (局所情報の抜き出し可能性)
3. mod  $p$  分解

まずはゲージ群の基本的な事柄について復習する.

<sup>1</sup>実際には  $P$  がある程度 'よい' 空間のときに位相群となるが, 細かい条件は気にしないことにする.

<sup>2</sup>これも  $K$  がある程度 'よい' ときに全射となるが, 細かい条件は気にしないことにする.

## 1.2 随伴束

まずはいくつか言葉を用意する.  $K$  上のファイバーワイズ空間とは写像  $X \rightarrow K$  のことをいい,  $K$  上のファイバーワイズ空間  $X \rightarrow K$  から  $Y \rightarrow K$  への写像を可換図式  $X \longrightarrow Y$  で定める.

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longleftarrow & K \end{array}$$

$K$  自信を恒等写像により  $K$  上のファイバーワイズ空間と見なしたものを  $\underline{K}$  と書く.  $K$  上のファイバーワイズ位相モノイドとはファイバーワイズ空間  $\pi: X \rightarrow K$  で次をみたすファイバーワイズ写像  $\mu: X \times_K X \rightarrow X$ ,  $e: \underline{K} \rightarrow X$  が与えられたものをいう. ここで,  $p: A \rightarrow K$ ,  $q: B \rightarrow K$  に対して  $A \times_K B = \{(a, b) \in A \times B \mid p(a) = q(b)\}$  とする.

$$1. \mu \circ (1 \times e \circ \pi) \circ \Delta = \mu \circ (e \circ \pi \times 1) \circ \Delta = 1$$

$$2. \mu \circ (\mu \times 1) = \mu \circ (1 \times \mu)$$

ただし,  $\Delta: X \rightarrow X \times_K X$  は対角写像. さらに次をみたすファイバーワイズ写像  $\iota: X \rightarrow X$  が与えられたとき,  $X$  をファイバーワイズ位相群という.

$$3. \mu \circ (1 \times \iota) \circ \Delta = \mu \circ (\iota \times 1) \circ \Delta = e \circ \pi$$

$\Gamma(X)$  をファイバーワイズ空間  $X \rightarrow K$  の切断全体のなす空間とする.  $X$  がファイバーワイズ位相モノイド (群) のとき  $\Gamma(X)$  が自然に位相モノイド (群) となることに注意する.

**定義 1.3.**  $P$  の随伴束  $\text{ad}P$  とは  $P \times G / (p, g) \sim (ph, h^{-1}gh)$  で定まる  $K$  上のファイバー束でファイバーが  $G$  であるものをいう.

随伴束  $\text{ad}P$  は

$$\mu([p, g], [p, h]) = [p, gh], \quad e(x) = [x, 1], \quad \iota([p, g]) = [p, g^{-1}]$$

によりファイバーワイズ位相群となる. よって, 特に,  $\Gamma(\text{ad}P)$  は自然に位相群となる. 今,  $\text{ad}P$  の切断は写像  $s: P \rightarrow G$  で  $s(pg) = g^{-1}s(p)g$  をみたすものとみなせ,  $\Gamma(\text{ad}P)$  の積構造は  $s, t: P \rightarrow G$  に対して定まる積  $(s \cdot t)(p) = s(p)t(p)$  により実現される. 上の写像  $s$  は  $\mathcal{G}(P)$  の元  $\bar{s}$  を  $\bar{s}(p) = p \cdot s(p)$  により定める.

**定理 1.1** (Atiyah-Bott [1]). 上の対応により  $\mathcal{G}(P)$  と  $\Gamma(\text{ad}P)$  は位相群として同型である.

これにより, 随伴束のファイバーワイズな分解や自明性がゲージ群の分解や自明性を与えることがわかる. しかし, 逆は一般に正しくないはずだが, ギャップのある例を見つけるのは難しい易しくない.

## 1.3 分類空間

$f: X \rightarrow Y$  を基点を保つ写像とすると,  $\text{map}(X, Y; f)$  を  $X$  から  $Y$  への写像で  $f$  と基点を保たずにホモトピックなものがなす空間とし,  $\text{map}_0(X, Y; f)$  を  $\text{map}(X, Y; f)$  の部分区間で基点を保つ写像からなるものとする. また,  $V, W$  を  $G$ -空間とすると  $\text{map}^G(V, W)$  を  $V$  から  $W$  への  $G$ -同変写像のなす空間とする. ゲージ群の分類空間のモデルを写像空間で与えよう. 基本となるのは次の結果である.

**補題 1.1** (Gottlieb [3]).  $\text{map}^G(P, EG)$  は弱可縮である.

今, 写像の合成により  $\mathcal{G}(P)$  は  $\text{map}^G(P, EG)$  に自由に作用するので, 次のホモトピー同値を得る.

$$\text{map}^G(P, EG)/\mathcal{G}(P) \simeq BG(P)$$

一方,  $\alpha : K \rightarrow BG$  を  $P$  の分類写像とすると, 射影  $\text{map}^G(P, EG) \rightarrow \text{map}(K, BG; \alpha)$  は同相写像  $\text{map}^G(P, EG)/\mathcal{G}(P) \approx \text{map}(K, BG; \alpha)$  を誘導する. 以上をまとめると次を得る.

**定理 1.2** (Gottlieb [3], Atiyah-Bott [1]). 次の  $P$  に関して自然なホモトピー同値が存在する.

$$BG(P) \simeq \text{map}(K, BG; \alpha)$$

上のホモトピー同値は  $P$  に関して自然なので, 基点の包含写像から導かれる写像  $B\mathcal{G}(P) \rightarrow BG$  は, 基点における評価写像  $\omega : \text{map}(K, BG; \alpha) \rightarrow \text{map}(*, BG) = BG$  に対応する.

**系 1.1.** 次の図式はホモトピー可換である.

$$\begin{array}{ccccc} B\mathcal{G}_0(P) & \longrightarrow & B\mathcal{G}(P) & \longrightarrow & BG \\ \downarrow \simeq & & \downarrow \simeq & & \parallel \\ \text{map}_0(K, BG; \alpha) & \longrightarrow & \text{map}(K, BG; \alpha) & \xrightarrow{\omega} & BG \end{array}$$

**系 1.2.**  $\mathcal{G}(P)$  はループ空間として  $\Omega \text{map}(K, BG; \alpha)$  とホモトピー同値である. よって, 特に,  $\mathcal{G}(P)$  は連結写像  $\delta : G \rightarrow \text{map}_0(K, BG; \alpha)$  のホモトピーファイバーのホモトピー型をもつ.

## 2 ホモトピー型

ゲージ群  $\mathcal{G}(P)$  のホモトピー型についての研究は次により始まった.

**定理 2.1** (Kono [10]).  $P_k$  を  $k \in \mathbb{Z} \approx \pi_4(BSU(2))$  で分類される  $S^4$  上の主  $SU(2)$  束とすると,  $\mathcal{G}(P_k) \simeq \mathcal{G}(P_l)$  となる必要十分条件は  $(12, k) = (12, l)$  となることである. ただし,  $(p, q)$  は  $p, q$  の最大公約数を表す.

一見無限個である族  $\{\mathcal{G}(P_k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  のホモトピー型がたった6個しかないことは驚きである. この定理を証明するために次を用いる.

**定理 2.2** (Whitehead [16], Lang [12]). 評価ファイブレーションの連結写像  $\Omega X \rightarrow \text{map}_0(\Sigma A, X; \alpha)$  は次の同一視のもと Samelson 積  $\langle \bar{\alpha}, 1_{\Omega X} \rangle$  で与えられる. ただし,  $\bar{\alpha} : A \rightarrow \Omega X$  は  $\alpha$  の随伴写像.

$$[\Omega X, \text{map}_0(\Sigma A, X; k)] \approx [\Omega X, \text{map}_0(\Sigma A, X; 0)] \approx [\Sigma A \wedge \Omega X, X] \approx [A \wedge \Omega X, \Omega X]$$

定理 2.1 の証明の概要は次の通り. 系 1.2 より,  $\mathcal{G}(P_k)$  は連結準同型  $S^3 \rightarrow \text{map}_0(S^4, BS^3; k)$  のホモトピーファイバーである. ここで,  $SU(2)$  と  $S^3$  を同一視する. 一方, 定理 2.2 によりこの写像は Samelson 積  $\langle 1_{S^3}, 1_{S^3} \rangle$  の  $k$  倍に対応することがわかり,  $\langle 1_{S^3}, 1_{S^3} \rangle$  が  $\pi_6(S^3) \approx \mathbb{Z}/12$  の生成元であることと, 後少しの確認作業で定理は証明される.

このように懸垂空間上のゲージ群のホモトピー型を考察する上で定理 2.2 は非常に有効であることがわかる. 実は一般の空間に対して評価写像のファイブレーションを書き下すことができる. これについては後で述べる.

ゲージ群のホモトピー型に関する論文は数多く出版されている. 例えば, [11], [7], [4], [5] を参照されたい.

ここであらわれる疑問は, ホモトピー型の有限性は群構造を忘れ去ったから保証されたのではないかということである. これに関して Crabb と Sutherland は次の結果を得た.

**定理 2.3** (Crabb-Sutherland [2]).  $K$  を連結有限複体とし,  $G$  を連結コンパクトリー群とする.  $P$  が  $K$  上の主  $G$  束全体をわたるとき  $\mathcal{G}(P)$  のホップ空間としてのホモトピー型は有限個である.

ここでさらに疑問に思うのは, 上の定理の有限性はホップ構造というかなり”ゆるい”積構造しか考えていないからではなかろうかというものである. では, ホモトピー論的に最も強い積構造の縛り, つまり,  $A_\infty$  構造込みでホモトピー型の個数はどうなるのであろう. これに関しては次の結果が得られている.

**定理 2.4** (Tsukuda [14]).  $P_k$  を  $k \in \mathbb{Z} \approx \pi_4(BSU(2))$  で分類される  $S^4$  上の主  $SU(2)$  束とする.  $B\mathcal{G}(P_k) \simeq B\mathcal{G}(P_l)$  となる必要十分条件は  $k = \pm l$  である.

上の定理により  $A_\infty$  構造まで含めるとゲージ群のホモトピー型は無数個となってしまうことがわかった. さて,  $A_2$  (ホップ構造) から  $A_\infty$  までにはフィルトレーション  $A_n$  が入るが, どの  $n$  に対して  $A_n$  構造込みのゲージ群のホモトピー型が有限から無限に変わるのだろうか. 最近, 蔦谷はこれに関する次の結果を得た.

**定理 2.5** (Tsutaya [15]).  $K$  を連結有限複体とし,  $G$  を連結コンパクトリー群とする.  $P$  が  $K$  上の主  $G$  束全体をわたるとき  $\mathcal{G}(P)$  の  $A_n$  空間としてのホモトピー型は有限個である.

定理 2.3 と定理 2.5 の証明では, 実は,  $P$  の随伴束のファイバーワイズな  $A_n$  同値類 (後ほど定義する) を分類している. (したがって, 実際は定理よりもかなり強いことを証明している.) その際に最も重要な部分はリー群の有理化が可換な位相モノイド (ホモトピー論的にこれ以上”可換”なものはない) となるので任意の随伴束のファイバーワイズな有理化が自明束になるというところである.

今後, ゲージ群の  $A_n$  空間としてのホモトピー型の個数の  $n$  に関する変化や, 主束を素数  $p$  で局所化した際にどのようにゲージ群の  $A_n$  空間としてのホモトピー型が  $p$  により変化するかをみることなどの研究が期待される. また, 具体的な主束に対して上記の結果を精密化することや, 逆にゲージ群がホモトピー同値となる十分条件の算出も期待される.

### 3 分裂

この節では最初の節で与えた位相群の完全列

$$1 \rightarrow \mathcal{G}_0(P) \rightarrow \mathcal{G}(P) \rightarrow G \rightarrow 1 \quad (3.1)$$

の  $A_n$  空間としての分裂に関して考える. つまり, 局所的な情報  $G$  を大域的な情報  $\mathcal{G}(P)$  から  $A_n$  の意味で抜き出せるのかを考える. この節の結果は [9] のものである. まず, 通常群の完全列の分裂を真似て  $A_n$  空間としての位相群の完全列の分裂を定義する.

**定義 3.1.** 位相群の完全列

$$1 \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$$

が  $A_n$  空間として分裂 ( $A_n$  分裂) するとは次をみたすことをいう.

1.  $K \times G$  に  $A_n$  構造が入り ( $K$  と  $G$  の積構造の直積とは限らない), 包含写像  $K \rightarrow K \times G$ ,  $G \rightarrow K \times G$  が  $A_n$  写像となる.
2. 次をホモトピー可換とする  $A_n$  写像  $K \times G \rightarrow H$  が存在する. ただし,  $K \times G$  には 1 の  $A_n$  構造を入れる.

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & K \times G & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \\ \parallel & & \parallel & & \downarrow & & \parallel & & \parallel \\ 1 & \longrightarrow & K & \longrightarrow & H & \longrightarrow & G & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

通常群拡大の場合と異なり, 次の補題は自明なものではない.

**補題 3.1.** 位相群の完全列  $1 \rightarrow K \rightarrow H \rightarrow G \rightarrow 1$  が  $A_n$  分裂する必要十分条件は  $A_n$  写像である切断  $G \rightarrow H$  が存在する.

完全列 (3.1) が  $A_n$  分裂する条件を随伴束  $\text{ad}P$  で記述したいので次の定義を与える. これは通常群の  $A_n$  写像の単純な一般化である.

**定義 3.2.**  $K$  上のファイバーワイズ位相モノイド  $X, Y$  の間のファイバーワイズ写像  $f: X \rightarrow Y$  がファイバーワイズ  $A_n$  写像であるとは次をみたすファイバーワイズホモトピーの族  $\{h_k: I^{k-1} \times X^k \rightarrow Y\}_{1 \leq k \leq n}$  が存在することをいう.

1.  $h_1 = f$
- 2.

$$h_k(t_1, \dots, t_{k-1}, x_1, \dots, x_k) = \begin{cases} h_{k-1}(t_1, \dots, \hat{t}_j, \dots, t_{k-1}, x_1, \dots, x_j x_{j+1}, \dots, x_k) & t_k = 0 \\ h_j(t_1, \dots, t_{j-1}, x_1, \dots, x_j) h_{k-j}(t_{j+1}, \dots, t_{k-1}, x_{j+1}, \dots, x_k) & t_j = 1 \end{cases}$$

ファイバーワイズ  $A_n$  写像の基本的な性質は次の通りである.

**命題 3.1.** 1. ファイバーワイズ  $A_n$  写像にファイバーワイズホモトピックな写像はファイバーワイズ  $A_n$  写像となる.

2. ファイバーワイズ  $A_n$  写像の合成はファイバーワイズ  $A_n$  写像である.

3. ファイバーワイズ  $A_n$  写像がファイバーワイズホモトピー同値写像であるとき, そのホモトピー逆写像もファイバーワイズ  $A_n$  写像である.

したがって, ファイバーワイズ  $A_n$  写像であるファイバーワイズホモトピー同値は同値関係になる. これをファイバーワイズ  $A_n$  同値という.

位相モノイドに対する Dold-Lashof 構成を一般化して  $K$  上のファイバーワイズ位相モノイド  $X$  に対して行うことができる. これによって得られる  $n$  次ファイバーワイズ射影空間を  $P_K^n X$  で表す. 通常の場合と同様ファイバーワイズ射影空間を用いてファイバーワイズ  $A_n$  写像の特徴付けが可能であるが, ここでは割愛する. 一つ注意する点はファイバーワイズ空間の圏において適切な準ファイブレーションの概念が存在しないため, ホモトピー持ち上げ性質等を使いたくても簡単には使えないことである. ファイバーワイズ空間の圏に適切な準ファイブレーションを定義するというのはそれだけで独立した興味ある研究対象である.

$K$  上のファイバーワイズ位相モノイド  $X$  とその切断のなす位相モノイド  $\Gamma(X)$  の  $A_n$  構造は次により関係づけられる.

**補題 3.2.** 自然な写像  $P^n \Gamma(X) \rightarrow \Gamma(P_K^n X)$  が存在する. ここで,  $P^n M$  は位相モノイド  $M$  の  $n$  次射影空間とする.

**定理 3.1.** 完全列 (3.1) が  $A_n$  分裂をもつための必要十分条件は,  $\text{ad}P$  が自明束  $K \times G$  にファイバーワイズ  $A_n$  同値であること.

$A_1$  の場合の証明を与える.  $A_n$  のときはファイバーワイズ  $A_n$  写像をファイバーワイズ射影空間によって記述し, 上の補題の写像により通常の  $A_n$  写像に変換することをこの証明に組み合わせることにより与えられる.

$\text{ad}P$  が  $K \times G$  にファイバーワイズホモトピー同値のとき  $\mathcal{G}(P) \rightarrow G$  となるのは明らか. 逆を示す.  $\mathcal{G}(P)$  を  $\Gamma(\text{ad}P)$  と同一視すると写像  $\mathcal{G}(P) \rightarrow G$  は

$$\omega : \Gamma(\text{ad}P) \rightarrow G, s \mapsto s(x_0)$$

となる. ここで,  $x_0$  は  $K$  の基点とする.  $\theta : G \rightarrow \Gamma(\text{ad}P)$  を  $\omega$  の切断とするとき次の写像を考える.

$$\bar{\theta} : K \times G \rightarrow \text{ad}P, (x, g) \mapsto \theta(g)(x)$$

$\bar{\theta}$  はファイバーワイズ写像であり,  $\bar{\theta}$  を  $x_0 \times G$  に制限すると  $\omega \circ \theta = 1_G$  となる. よって, Dold の定理より  $\bar{\theta}$  はファイバーワイズホモトピー同値写像である.

さて, 次に (3.1) が  $A_n$  分裂をもつための十分条件を与えよう. 位相モノイド  $G$  に対して包含写像  $P^n G \rightarrow P^\infty G$  を  $i_n$  で表す.

**定義 3.3.** 空間  $X$  が  $H(k, l)$  空間であるとは次をみたすことである.

$$\begin{array}{ccc} P^k \Omega X \vee P^l \Omega X & \xrightarrow{i_k \vee i_l} & X \\ \downarrow & & \parallel \\ P^k \Omega X \times P^l \Omega X & \xrightarrow{\exists} & X \end{array}$$

**命題 3.2.** 1.  $X$  が  $H(1, 1)$  空間であることと  $\Omega X$  がホモトピー可換であることは同値.

2.  $H(\infty, \infty)$  空間であることとホップ空間であることは同値.

3.  $H(k, \infty)$  空間は *Aguadé* の  $T_k$  空間である.

上の命題により  $H(k, l)$  空間のループ空間がホモトピー可換であることがわかる. この高次ホモトピーをある種の多面体を用いて具体的に与えることも可能であるがここでは省略する.

**定理 3.2.**  $BG$  が  $H(k, l)$  空間で  $K$  の  $L$ - $S$  カテゴリー数が  $k$  以下のとき (3.1) は  $A_l$  分裂をもつ.

ここで, 次の結果を紹介しておく. これは  $H(1, k)$  空間の特徴付けだけではなく連結写像が具体的に書き下されていることが重要である. (加算単体複体は  $BG$  のホモトピー型をもつことに注意.)

**定理 3.3.** 評価ファイブレーションの連結写像  $\delta : G \rightarrow \text{map}_0(K, BG; \alpha)$  は

$$\delta(g) = \text{Bad}(g) \circ \alpha$$

で与えられる. ここで,  $\text{Bad}(g) : BG \rightarrow BG$  は  $\text{ad}(g) : G \rightarrow G$  の誘導する写像とする. 特に,  $BG$  が  $H(1, k)$  空間である必要十分条件は  $\text{Bad} \circ i_k$  が零ホモトピックである.

この定理より定理 (2.2) は容易に導ける.

## 4 Mod $p$ 分解

ホモトピー論においてリー群を考えると最も重要な事実は mod  $p$  分解である. つまり, リー群  $G$  を素数  $p$  で局所化すると

$$G \simeq_{(p)} X_1 \times \cdots \times X_{p-1}$$

という  $p$  局所なホモトピー同値が存在する. ここではこの分解に対応するゲージ群の mod  $p$  分解を紹介する. まずは Harris [6] によるリー群の mod  $p$  分解に対応する次の定理を紹介する.

**定理 4.1** (K-Kono [8]).  $G, H, p, d$  を次の表の通りとし,  $P_k, Q_k$  をそれぞれ  $S^4$  上の主  $G, H$  束で  $k \in \mathbb{Z} \approx \pi_3(G) \approx \pi_3(H)$  で分類されるものとする. このとき,  $S^4$  上の空間  $E$  が存在し,

$$\mathcal{G}(P_{dk})_{\frac{1}{p}} \simeq \mathcal{G}(Q_k)_{\frac{1}{p}} \times \Gamma(E)_{\frac{1}{p}}$$

となる.

$G$	$H$	$p$	$d$
$\text{SU}(2n+1)$	$\text{SO}(2n+1)$	2	2
$\text{SU}(2n)$	$\text{Sp}(n)$	2	1
$E_6$	$F_4$	2	1
$\text{Spin}(8)$	$G_2$	3	1

元々Harris [6] はリー群を自己同型により分解した. ここではリー群の自己同型から随伴写像の自己同型写像を構成し, それにより随伴写像を分解した. したがって, 実際には上の定理より強いことを証明している.

一方, Theriault [13] は評価写像の連結写像を解析することにより次を得た.

**定理 4.2** (Theriault [13]).  $G$  を単純リー群でコホモロジーの生成元が  $x_{2n_1-1}, \dots, x_{2n_l-1}$  ( $n_1 \leq \dots \leq n_l$ ) であるとする.  $p > n_l + 1$  のとき

$$\mathcal{G}(P_k) \simeq_{(p)} \prod_{k=1}^l (S^{2n_k-1} \times \Omega_0^3 S^{2n_k-1})$$

となる. ただし,  $P_k$  は  $S^4$  上の主  $G$  束で  $k \in \mathbb{Z} \approx \pi_3(G)$  で分類されるもの.

同様に Theriault [13] は  $S^4$  上の主  $SU(n)$  束のゲージ群について, もう少し小さな素数で局所化したときの mod  $p$  分解を与えている. 今後, ゲージ群のさらに一般的な mod  $p$  分解における結果が期待される.

## References

- [1] M.F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A **308** (1983), no. 1505, 523-615.
- [2] M.C. Crabb and W.A. Sutherland, *Counting homotopy types of gauge groups*, Proc. London Math. Soc. (3) **81** (2000), no. 3, 747-768.
- [3] D.H. Gottlieb, *Applications of bundle map theory*, Trans. Amer. Math. Soc. **171** (1972), 23-50.
- [4] H. Hamanaka and A. Kono, *Unstable  $K^1$ -group and homotopy type of certain gauge groups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **136** (2006), no. 1, 149-155.
- [5] H. Hamanaka, S. Kaji and A. Kono, *Samelson products in  $Sp(2)$* , Topology Appl. **155** (2008), no. 11, 1207-1212.
- [6] B. Harris, *On the homotopy groups of the classical groups*, Ann. of Math. **74** (1961), no. 2, 407-413.
- [7] Y. Kamiyama, D. Kishimoto, A. Kono and S. Tsukuda, *Samelson products of  $SO(3)$  and applications* Glasg. Math. J. **49** (2007), no. 2, 405-409.
- [8] D. Kishimoto and A. Kono, *Note on mod  $p$  decompositions of gauge groups*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **86** (2010), no. 1, 15-17.
- [9] D. Kishimoto and A. Kono, *Splitting of gauge groups*, to appear in Trans. Amer. Math.

- [10] A. Kono, *A note on the homotopy type of certain gauge groups*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **117** (1991), no. 3-4, 295-297.
- [11] A. Kono and S. Tsukuda, *4-manifolds  $X$  over  $BSU(2)$  and the corresponding homotopy types  $\text{Map}(X, BSU(2))$* , J. Pure Appl. Algebra **151** (2000), no. 3, 227-237.
- [12] G.E. Lang, *The evaluation map and EHP sequences*, Pacific J. Math. **44** (1973), no. 1, 201-210.
- [13] S. Theriault, *Odd primary homotopy decompositions of gauge groups*, preprint.
- [14] S. Tsukuda, *Comparing the homotopy types of the components of  $\text{Map}(S^4, BSU(2))$* , J. Pure Appl. Algebra **161** (2001), no. 1-2, 235-243.
- [15] M. Tsutaya, *Finiteness of  $A_n$ -homotopy types of gauge groups*
- [16] G.W. Whitehead, *On products in homotopy theory*, Ann. of Math. **47** (1946), no. 3, 460-475.