

第 56 回
トポロジーシンポジウム
講演集

2009年8月8日～8月11日
於 北海道大学クラーク会館
平成2009年度科学研究費基盤研究（A）
課題番号 19204007

第五十六回

トポロジーションポジウム

講演集

二〇〇九年八月

於 北海道大学クラーク会館

は し が き

この講演集は2009年8月8日から8月11日までの間、北海道大学クラーク会館において開催される第56回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこの講演集は、

平成21年度科学研究費

研究種目 基盤研究(A)

研究代表者 柘田 幹也

研究課題名 トポロジーの総合的研究

課題番号 19204007

により作成されたものである。

世話人： 秋田 利之 (北海道大学)
 泉屋 周一 (北海道大学)
 栗林 勝彦 (信州大学)
 中西 康剛 (神戸大理)

第56回トポロジーシンポジウム

プログラム

8月8日 (土)

14:00 ~ 15:00

鄭 仁 大 (大阪市立大学) Alexander 多項式が成す単体的複体について 1

15:30 ~ 16:30

五味 清紀 (京都大学) Twisted K-theory and finite-dimensional approximation... 11

17:00 ~ 18:00

奥間 智弘 (山形大学) Splice quotient singularities and the Casson invariant conjecture 23

8月9日 (日)

09:30 ~ 10:30

渋谷 一博 (北海道大学) Prolongations of canonical systems on Jet spaces 33

11:00 ~ 12:00

安井 弘一 (京大数理研) Corks, plugs and exotic 4-manifolds (joint work with Selman Akbulut) 43

13:30 ~ 14:30

嶺 幸太郎 (筑波大学) 多様体となる無限次元空間の位相について 53

15:00 ~ 16:00

山下 温 (東京大学) 無限次元位相多様体をなす関数空間について 65

16:30 ~ 17:30

Tamas Kalman (東京大学) Extremal coefficients of the Homfly polynomial 71

8月10日 (月)

09:30 ~ 10:30

門上 晃久 (大連理工大学) Geometric method in virtual knot theory 81

11:00 ~ 12:00

Mark Hamilton (東京大学) Geometry quantization of integrable systems 91

13:30 ~ 14:30

池田 岳 (岡山理科大学) 「シューベルト多項式」の現在 99

15:00 ~ 16:00

鍛冶 静雄 (福岡大学) リー群のトポロジーから見るシューベルトカリキュラス .. 109

16:30 ~ 17:30

佐藤 正寿 (東京大学) レベル2写像類群のアーベル化 119

8月11日 (火)

09:30 ~ 10:30

安部 哲哉 (大阪市立大学) 結び目の交差交換とバンド手術について 129

11:00 ~ 12:00

久野 雄介 (東京大学) 射影多様体に対する Meyer 函数とその応用 139

Alexander 多項式が成す単体的複体について

鄭 仁大 (Jong, In Dae)

大阪市立大学大学院理学研究科

e-mail: jong@sci.osaka-cu.ac.jp

URL: <http://www.ex.media.osaka-cu.ac.jp/~d07sa009/index.html>

1 はじめに

近年、低次元トポロジーの研究において、これまで研究されてきた個々の対象が成す集合を研究することで、これまで捉えることが出来なかった情報を捉えようという試みが盛んに行われている。本稿では、結び目の Alexander 多項式全体が成す集合に対して単体的複体の構造を定義し、それについて考察する。特に、種数 2 以下の交代結び目の Alexander 多項式が生成する部分複体において、頂点間の距離が 2 以上となるための十分条件 (定理 6.4) を与える。

記号. 本稿において特に断ることなく使用する記号を以下に記しておく。

- \mathcal{K} : 3次元球面内の結び目全体から成る集合, $\mathcal{J} \subset \mathcal{K}$.
- $\Delta_K(t)$: 結び目 K の Alexander 多項式, $\Delta\mathcal{J} = \{\Delta_J(t) \mid J \in \mathcal{J}\}$.
- 結び目の Alexander 多項式は,

$$\Delta(t) = b_0 + \sum_{i=1}^n b_i (t^i + t^{-i}), \quad \Delta(1) = +1 \quad (*)$$

を満たすように正規化されているものとする。又、このときの非負整数 n を Alexander 多項式 $\Delta(t)$ の**次数**といい、 $\deg \Delta(t)$ と表す。

- $g(K)$: 結び目 K の種数.

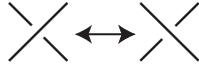


図1 交差交換

2 Gordian 複体

2.1 結び目の距離と Gordian 複体

2つの結び目 $K, K' \in \mathcal{J}(\subset \mathcal{K})$ の \mathcal{J} 上の Gordian 距離 $d_G(K, K')_{\mathcal{J}}$ を,

$$d_G(K, K')_{\mathcal{J}} = \min\{n \mid K = K_0 \overset{\times}{\leftrightarrow} K_1 \overset{\times}{\leftrightarrow} \cdots \overset{\times}{\leftrightarrow} K_n = K', K_i \in \mathcal{J}\}$$

と定める. ただし, このような結び目の列 (K_0, K_1, \dots, K_n) , $K_i \in \mathcal{J}$ が存在しない場合は, $d_G(K, K')_{\mathcal{J}} = \infty$ と定める. ここで, $K_i \overset{\times}{\leftrightarrow} K_{i+1}$ は, 2つの結び目 K_i と K_{i+1} が1回の交差交換 (図1) で互いに移りあうことを表す. このとき, $d_G(\cdot, \cdot)_{\mathcal{J}}$ は \mathcal{J} 上の距離となる.

$\mathcal{J} = \mathcal{K}$ のときは \mathcal{J} を省略して $d_G(\cdot, \cdot)$ と表し, 単に **Gordian 距離** と呼ぶ.

注意 2.1. (1) $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}$ とするとき, 任意の $K, K' \in \mathcal{J}'$ に対して, $d_G(K, K')_{\mathcal{J}} \leq d_G(K, K')_{\mathcal{J}'}$ が成り立つ.

(2) 任意の $K, K' \in \mathcal{J}$ に対して, $d_G(K, K')_{\mathcal{J}} = 1 \Leftrightarrow d_G(K, K') = 1$ である.

定義 2.2 ([2]). 結び目を 0-単体 (頂点) とし, $d_G(K_i, K_j) = 1$ ($i \neq j$) を満たす $n+1$ 個の頂点 $K_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$ が n -単体を張るような単体的複体を, **Gordian 複体** といい, \mathcal{GC} で表す.

定義 2.3. \mathcal{J} に含まれる各結び目を 0-単体とし, $d_G(K_i, K_j)_{\mathcal{J}} = 1$ ($i \neq j$) を満たす $n+1$ 個の頂点 $K_0, K_1, \dots, K_n \in \mathcal{J}$ が n -単体を張るような Gordian 複体の部分複体を, \mathcal{J} が生成する (**Gordian 複体の**) **部分複体** といい, $\mathcal{GC}_{\mathcal{J}}$ で表す.

注意 2.4. 定義 2.3 において, n -単体を張る条件として $d_G(K_i, K_j) = 1$ ($i \neq j$) を採用しても, 注意 2.1.(2) より, 定義される単体的複体は同じものとなる.

2.2 Gordian 複体の性質

ここでは, Gordian 複体 \mathcal{GC} の単体的複体としての性質について述べる. まず, 任意の 2 つの結び目は有限回の交差交換を施すことで互いに移りあうことから, \mathcal{GC} は連結な単体的複体である.

定義 2.5. \mathcal{C} を連結な単体的複体とする.

- (1) \mathcal{C} の任意の 0-単体に対して, それを頂点として含む \mathcal{C} の単体は高々有限個であるとき, \mathcal{C} は局所有限であるという.
- (2) \mathcal{C} に含まれる頂点間の距離の最大値を \mathcal{C} の直径といい, $\text{diam } \mathcal{C}$ で表す. ただし, このような最大値が存在しない場合は $\text{diam } \mathcal{C} = \infty$ とする. (ここで 2 頂点間の距離とは, それらを結ぶ \mathcal{C} の 1-単体の列の長さの最小値である.)
- (3) \mathcal{C} に含まれる単体の最大次元を \mathcal{C} の次元といい, $\text{dim } \mathcal{C}$ で表す. ただし, 任意の次元の単体を含む場合は, $\text{dim } \mathcal{C} = \infty$ とする.

命題 2.6. \mathcal{GC} の局所有限性, 直径, 次元について, 次の事実が知られている.

- (1) \mathcal{GC} は局所有限でない.
- (2) $\text{diam } \mathcal{GC} = \infty$.
- (3) $\text{dim } \mathcal{GC} = \infty$.

証明. (1) 及び (2) に関しては, 結び目解消数 1 の結び目が無限個存在すること (例えば, ツイスト結び目 (図 2)), 及び任意の自然数 n に対して結び目解消数が n である結び目 (例えば, $(2, 2n+1)$ -トーラス結び目) が存在することからわかる. (3) は Hirasawa-Uchida によって示されている. 実際には, \mathcal{GC} の任意の 1-単体に対して, それを含む \mathcal{GC} の n 次元単体が, 任意の整数 $n \geq 2$ について存在することを示している [2]. \square

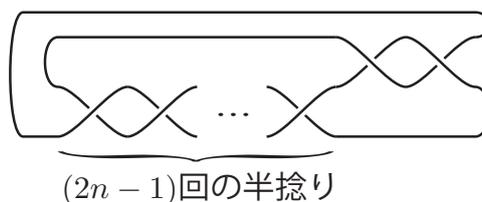


図 2 ツイスト結び目

3 AP 複体

3.1 AP 距離と AP 複体

ここでは、結び目の Alexander 多項式の集合に対して単体的複体の構造を導入する。

定義 3.1. $f, f' \in \Delta\mathcal{J}$ に対して、 $\Delta\mathcal{J}$ 上の AP 距離 $d_A(f, f')_{\mathcal{J}}$ を、

$$d_A(f, f')_{\mathcal{J}} = \min\{d_G(K, K')_{\mathcal{J}} \mid (\Delta_K, \Delta_{K'}) = (f, f')\},$$

このような最小値が存在しない場合は $d_A(f, f')_{\mathcal{J}} = \infty$ と定める。

$\mathcal{J} = \mathcal{K}$ のときは \mathcal{J} を省略して $d_A(\cdot, \cdot)$ と表し、単に **AP 距離** と呼ぶ。

注意 3.2. $f, f' \in \Delta\mathcal{J}$ に対して、 $d_A(f, f')_{\mathcal{J}} = 1 \Rightarrow d_A(f, f') = 1$ は正しいが、逆は一般的に成り立たない。(後述の注意 6.6 参照)

定義 3.3. 結び目の Alexander 多項式を 0-単体とし、 $d_A(f_i, f_j) = 1$ ($i \neq j$) を満たす $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Delta\mathcal{K}$ が n -単体を張るような単体的複体を、**AP 複体** といい、 \mathcal{AC} で表す。

定義 3.4. $\Delta\mathcal{J}$ の各元を 0-単体とし、 $d_A(f_i, f_j)_{\mathcal{J}} = 1$ ($i \neq j$) を満たす $f_0, f_1, \dots, f_n \in \Delta\mathcal{J}$ が n -単体を張るような AP 複体の部分複体を、 $\Delta\mathcal{J}$ が生成する (**AP 複体の**) 部分複体 といい、 $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}}$ で表す。

注意 3.5. 定義 3.4 において、 n -単体を張る条件を $d_A(f_i, f_j) = 1$ ($i \neq j$) とすると、注意 3.2 より定義される単体的複体は異なるものになる。

写像 $\Delta : \mathcal{J} \ni J \mapsto \Delta_J(t) \in \Delta\mathcal{J}$ は、 $\mathcal{GC}_{\mathcal{J}}$ から $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}}$ への自然な単体写像を誘導する。この単体写像を同じ記号 $\Delta : \mathcal{GC}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{AC}_{\mathcal{J}}$ で表すことにする。

3.2 AP 複体の性質

ここでは、AP 複体 \mathcal{AC} が満たす基本的な性質を紹介する。次の補題は、AP 複体を考察する上で基本となる事実の 1 つである。

補題 3.6 ([6], [13]). 任意の結び目の Alexander 多項式は、結び目解消数が 1 の結び目によって実現される。

補題 3.6 より、自明な Alexander 多項式と任意の非自明な Alexander 多項式とを結び

\mathcal{AC} の 1-単体が存在する. よって, \mathcal{AC} は連結であり, 局所有限でないことがわかる.

最近, Δ_{3_1} と Δ_{4_1} の AP 距離が 2 であるかという Nakanishi [10, 11] による問題に対する答えが Kawauchi [5] によって与えられた.

命題 3.7 ([5], cf. [10, 11]). $d_A(\Delta_{3_1}, \Delta_{4_1}) = 2$.

以降, \mathcal{AC} の直径, 及び次元について考察する.

命題 3.8. $\text{diam}(\mathcal{AC}) = 2$.

証明. 補題 3.6 より, 自明な Alexander 多項式 1 と任意の結び目の Alexander 多項式 f に対して, $d_A(f, 1) \leq 1$ が成り立つ. よって, 任意の結び目の Alexander 多項式 f, g に対して,

$$d_A(f, g) \leq d_A(f, 1) + d_A(1, g) \leq 2$$

が成り立つ. 即ち, $\text{diam}(\mathcal{AC}) \leq 2$ である. 一方で, 命題 3.7 より, AP 距離が 2 である Alexander 多項式の組が存在する. よって, $\text{diam}(\mathcal{AC}) = 2$ である. \square

これらに関して, 次のような問いが考えられる.

問 3.9. AP 距離が 2 である結び目の Alexander 多項式の組を決定せよ.

一方, AP 複体の次元はまだ分かっていない. 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対して, Hirasawa-Uchida が構成した Gordian 複体の n -単体の頂点は, 全て同じ Alexander 多項式を持つ結び目であるため [2, Fact 2.8], 単体写像 $\Delta : \mathcal{GC} \rightarrow \mathcal{AC}$ によるその像は AP 複体の 0-単体である.

命題 3.10. $\dim \mathcal{AC} \geq 3$.

証明. $K_0 = 0_1, K_1 = 3_1, K_2 = 5_2, K_3 = 7_4, K_4 = 9_2$ とすると, $\Delta_{K_0} = 1, \Delta_{K_1} = -1 + (t + t^{-1}), \Delta_{K_2} = -3 + 2(t + t^{-1}), \Delta_{K_3} = \Delta_{K_4} = -7 + 4(t + t^{-1})$ となる. このとき, $d_A(f_i, f_j) = 1$ ($i \neq j$) となり, これらを頂点とする 3-単体を張る (図 3). \square

問 3.11 (cf. [2, Problem 3]). $\dim \mathcal{AC} = \infty$?

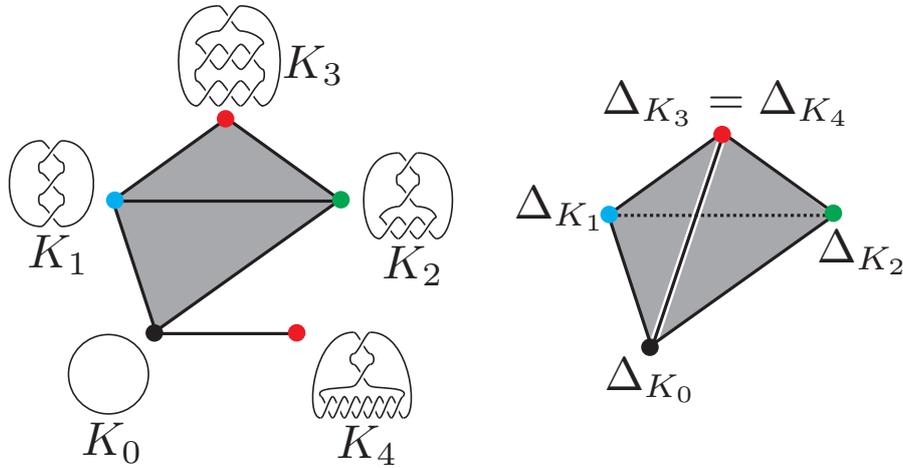


図 3

4 交代結び目の Alexander 多項式が成す部分複体

以降の章では, 交代結び目の Alexander 多項式の集合が生成する AP 複体の部分複体について考察する.

$\mathcal{J}_g = \{ \text{種数 } g \text{ 以下の交代結び目} \}$ とする. 写像 $\varphi: \Delta\mathcal{J}_g \rightarrow \mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}$ を次のように定義する: 非自明な Alexander 多項式 $f = b_0 + \sum_{i=1}^g b_i (t^i + t^{-i})$ に対して,

$$\varphi(f) = (b_1, \dots, b_g) \in \underbrace{\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}}_g,$$

自明な多項式 1 に対しては, $\varphi(1) = 0$ と定める. 1 章で述べたように, 結び目の Alexander は条件 (*) を満たすように正規化しているので,

$$\Delta(1) = b_0 + \sum_{i=1}^g 2b_i \Leftrightarrow b_0 = 1 - \sum_{i=1}^g 2b_i$$

が得られることを注意しておく.

- 例 4.1.**
- $\varphi(-1 + (t + t^{-1})) = 1.$
 - $\varphi(3 - (t + t^{-1})) = -1.$
 - $\varphi(7 - 5(t + t^{-1}) + 2(t^2 + t^{-2})) = (-5, 2).$

この写像 φ を用いることで複体の頂点は整数格子点で表示され, 視覚的にも捉えやすい対象となる. ここで, 交代結び目の Alexander 多項式でなくても, 一般的に同じような

方法で整数座標が対応することを注意しておく.

次の命題は交代結び目の Alexander 多項式に関する基本的な事実である.

命題 4.2 ([1], [7]). K を交代結び目とする. このとき, $\deg \Delta_K(t) = g(K)$ が成り立ち, $b_i \cdot b_{i+1} < 0$ ($i = 0, 1, \dots, g(K) - 1$) が成り立つ.

命題 4.2 より, 種数 g の交代結び目の Alexander 多項式は, φ を通すことで g 次元整数格子点と同一視でき, それらの座標の符号は \pm が交互に現れることが分かる. よって, 1 つの座標の符号が定まれば, それ以外の座標の符号は一意的に定まる. 又, 次で述べるように g 番目の係数 b_g の符号は, 結び目の符号数から決定される.

命題 4.3. K を交代結び目, $\sigma(K)$ を K の符号数, $g = g(K)$, K の Alexander 多項式は (*) を満たすとする. このとき, $\text{sign}(b_g) = (-1)^{\sigma(K)/2}$.

証明. 任意の結び目 J に対して, $\text{sign}(\Delta_J(-1)) = (-1)^{\sigma(J)/2}$ が成り立つ [9]. K を交代結び目とする. このとき, (*) より, $\Delta_K(-1) = b_0 + 2 \sum_{i=1}^g (-1)^i b_i$ である. ここで, $b_i \cdot b_{i+1} < 0$ (命題 4.2) より, $\text{sign}(\Delta_K(-1)) = \text{sign}(b_g)$ が成り立つ. よって, $\text{sign}(b_g) = (-1)^{\sigma(K)/2}$ となる. \square

交代結び目の Alexander 多項式が生成する部分複体について研究する 1 つの方法として, 種数 g が小さい場合から順に $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_g}$ について考察していくという方法が考えられる. 以降の 5, 6 章では, $g = 1, 2$ の場合について $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_g}$ が満たす性質を調べ, 得られた結果を紹介する.

注意 4.4. 種数 0 の結び目は自明結び目なので, $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_0} = \{\Delta_U = 1\}$ である.

注意 4.5. 任意の $f \in \Delta\mathcal{K}$ に対して, 単体写像 $\Delta : \mathcal{GC} \rightarrow \mathcal{AC}$ による f の逆像を考えると, $\#\{\Delta^{-1}(f) \in \mathcal{K}\} = \infty$ である. 一方で, 任意の $f' \in \Delta\mathcal{J}$ に対して, 単体写像 $\Delta : \mathcal{GC}_{\mathcal{J}} \rightarrow \mathcal{AC}_{\mathcal{J}}$ による f' の逆像を考えると, $\#\{\Delta^{-1}(f') \in \mathcal{J}\} < \infty$ である [12].

5 $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1}$

この章では, 種数 1 交代結び目の Alexander 多項式が成す部分複体 $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1}$ について考察する. まず, どのような Alexander 多項式が $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1}$ の頂点となるか, 即ち (φ で写すことで) どのような整数格子点 $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1}$ の頂点となるか, が問題となる.

命題 5.1. $\varphi : \Delta\mathcal{J}_1 \rightarrow \mathbb{Z}$ は全単射写像.

証明. K_n を図 2 の結び目 (ツイスト結び目) とすると $g(K_n) \leq 1$ である. このとき, $\Delta_{K_n} = (-2n + 1) + n(t + t^{-1})$ となり, $\varphi(\Delta_{K_n}) = n$ である. \square

以下, $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1}$ の直径, 及び次元について考察する.

命題 5.2. $\text{diam } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1} = 2$.

証明. ツイスト結び目は結び目解消数が 1 なので, 任意の非自明な Alexander 多項式 $f \in \Delta\mathcal{J}$ に対して $d_A(f, 1)_{\mathcal{J}} = 1$ が成り立つ. よって, $\text{diam } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1} \leq 2$ となる. 一方で, 命題 3.7 より, $\text{diam } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1} = 2$ である. \square

命題 5.3. $\text{dim } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1} \geq 3$.

証明. 命題 3.10 で用いた結び目 K_0, \dots, K_3 は全て種数 1 以下の結び目なので, $\text{dim } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1} \geq 3$ が成り立つ. \square

問 5.4. $\text{dim } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_1} = 3$?

6 $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2}$

この章では, 種数 2 交代結び目の Alexander 多項式が成す部分複体 $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2}$ について考察する. まず, $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2}$ の頂点に対応する整数格子点について, 次の命題が成り立つ.

命題 6.1 ([4]). K を種数 2 の交代結び目, $\varphi(\Delta_K) = (b_1, b_2)$ とする. このとき, 次の不等式が成り立つ:

$$\begin{aligned} \sigma(K) = 0 &\Rightarrow b_0 > 0, \quad -6b_0 - 1 \leq b_1 \leq -3b_0 + 1, \\ |\sigma(K)| = 2 &\Rightarrow b_0 < 0, \quad -2b_0 + 1 \leq b_1 \leq -6b_0 - 1, \\ |\sigma(K)| = 4 &\Rightarrow b_0 > 0, \quad -4b_0 + 2 \leq b_1 \leq -2b_0 + 1. \end{aligned}$$

注意 6.2. 任意の結び目 K に対して, $\sigma(K)$ は偶数であり, $|\sigma(K)| \leq 2g(K)$ が成り立つ.

命題 6.1 より, $\varphi : \Delta\mathcal{J}_2 \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ は全射ではなく, 又, $\#(\Delta\mathcal{K}_2 \setminus \Delta\mathcal{J}_2) = \infty$ であることが分かる. これは, 種数が 1 以下の場合 ($\Delta\mathcal{K}_1 = \Delta\mathcal{J}_1$) とは異なる状況である.

注意 6.3 ([3, 4]). 命題 6.1 の不等式を満たすが, $\Delta\mathcal{J}_2$ に含まれない Alexander 多項式が

無限に存在する. また, 命題 6.1 の各不等式において, 等号が成立する Alexander 多項式を実現する交代結び目が無限に存在する.

ここで, $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2}$ の頂点間の距離について, 次の定理が得られる.

定理 6.4. $f, g \in \Delta_{\mathcal{J}_2}$ を, $\varphi(f) = (b_1, b_2)$, $\varphi(f') = (b'_1, b'_2)$ とする. このとき, もし $b_0, b'_0 > 0$, $-3b_0 + 1 < b_1$, かつ $b'_1 < -4b'_0 + 2$ ならば, $d_A(f, f')_{\mathcal{J}_2} \geq 2$ が成り立つ.

証明. K, K' を種数 2 の交代結び目で, $f = \Delta_K, f' = \Delta_{K'}$ とする. すると, 命題 6.1 より, $|\sigma(K)| = 4, \sigma(K') = 0$ となる. 1 回の交差交換で結び目の符号数は高々 ± 2 しか変わらないので [8], $d_G(K, K') \geq 2$ となる. これが, $f = \Delta_K, f' = \Delta_{K'}$ を満たす任意の交代結び目 $K, K' \in \mathcal{J}_2$ について成り立つので, $d_A(f, f')_{\mathcal{J}_2} \geq 2$ となる. \square

以降, $\mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2}$ の直径及び次元について述べる.

命題 6.5. $\text{diam } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2} \geq 2$.

注意 6.6. 命題 6.5 において, $\text{diam } \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2} = 2$ かどうかは分かっていない. 特に, 種数が 1 以下のときのように, 任意の $f \in \Delta_{\mathcal{J}_2}$ に対して $f = \Delta_K$ を満たす結び目解消数 1 の $K \in \mathcal{J}_2$ が存在するわけではない. 実際, $f = 1 - (t + t^{-1}) + (t^2 + t^{-2})$ とすると, $\Delta_K = f$ を満たす交代結び目は (2, 5)-トーラス結び目のみであることが, 結び目の行列式を用いることで示せる. (2, 5)-トーラス結び目の結び目解消数は 2 である. すなわち, $d_A(f, 1)_{\mathcal{J}_2} = 2$ である.

次元に関しては, 種数が 1 の場合と同じところまでしか明らかになっていない.

命題 6.7. $\dim \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2} \geq 3$.

問 6.8. $\dim \mathcal{AC}_{\mathcal{J}_2} = \infty$?

参考文献

- [1] R. H. Crowell, *Genus of alternating link types*, Ann. of Math. **69** (1959), no. 2, 258–275.
- [2] M. Hirasawa and Y. Uchida, *The Gordian complex of knots*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), no. 3, 363–368.

- [3] I. D. Jong, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two*, Osaka J. Math. **46** (2009), no. 2, 353–371.
- [4] ———, *Alexander polynomials of alternating knots of genus two II*, to appear in J. Knot Theory Ramifications (2009).
- [5] A. Kawauchi, *On the Alexander polynomials of knots with Gordian distance one*, preprint (2009).
- [6] H. Kondo, *Knots of unknotting number 1 and their Alexander polynomials*, Osaka J. Math. **16** (1979), no. 2, 551–559.
- [7] K. Murasugi, *On the genus of the alternating knot I, II*, J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 94–105, 235–248.
- [8] ———, *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965), 387–422.
- [9] K. Murasugi, *Knot theory and its applications*, Birckhäuser-Verlag, Boston, 1996.
- [10] Y. Nakanishi, *A note on unknotting number, II*, J. Knot Theory Ramifications **14** (2005), no. 1, 3–8.
- [11] ———, *Local moves and Gordian complex II*, Kyungpook Math. J. **47** (2007), 329–334.
- [12] R. Riley, *A finiteness theorem for alternating links*, J. London Math. Soc. (2) **5** (1972), 263–266.
- [13] T. Sakai, *A remark on the Alexander polynomials of knots*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **5** (1977), no. 3, 451–456.

Twisted K -theory and finite-dimensional approximation

五味 清紀
 京都大学理学部数学教室
 kgomi@math.kyoto-u.ac.jp

1 序

本稿では、振じられた K 理論 (twisted K -theory) を、有限次元的な幾何対象で一般的に実現する、という結果 ([15]) を説明したい。

振じられた K 理論 (twisted K -theory) [1] とは、位相的 K 理論の変種の一つである。もう少し詳しく言えば、ある局所係数付きの位相的 K 理論ということができる。この概念は、Donovan-Karoubi [10], 及び, Rosenberg [19] によってもともと導入されたものである。2000 年頃になって弦理論における D -brane charge との関係があることがわかり [16], 多くの物理学者・数学者に盛んに研究されるようになった。最近では、 D -brane charge の分類への応用の他に、 T -duality [5], Verlinde 代数 [12], 量子 Hall 効果 [8] といった方面へ応用されている。

位相的 K 理論の定式化として、次のような方法がよく知られている。

- (1) ベクトル束の同型類の Grothendieck 群,
- (2) 連続関数のなす C^* 代数の K 群,
- (3) Fredholm 作用素のなす空間へのホモトピー類.

振じられた K 理論を定義する際には、(2) あるいは (3) に相当する定式化が通常使われる。一方で (1) のベクトル束に相当するものとして、これまでは振じられたベクトル束 (twisted vector bundle), また, bundle gerbe K -module という概念が知られていた [3, 4, 10, 16, 17, 20]. しかしながら、これらの幾何対象で振じられた K 理論を定式化することは、その「捻じれ」が特別な場合にのみ可能であった。一般の「捻じれ」の場合には、それらの幾何対象としては、自明なもの以外が存在しない。

より正確に説明すると、振じられた K 理論の「捻じれ」は、考えている空間 X 上の主束 $P \rightarrow X$ であって、その構造群が無限次元可分 Hilbert 空間 \mathcal{H} の射影ユニタリー群 $PU(\mathcal{H})$ であるもので与えられる。主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \rightarrow X$ は、3 次の整数係数コホモロジー類 $\delta(P) \in H^3(X; \mathbb{Z})$ で分類される。上で述べた特別な捻じれの場合とは、 $\delta(P)$ が有限位数、つまり $H^3(X; \mathbb{Z})$ の捻じれ類の場合である。

すると、一般的な「捻じれ」の場合、つまり $\delta(P)$ が無限位数の場合にも、ベクトル束のような有限次元的な幾何対象を使って、振じられた K 理論を定式化でき

るのか、という問題が考えられる。この問題自身は、自然なもので、それ自体で興味をひくものと思われる。また、位相的 K 理論が幾何学へ応用されて成功をおさめた背景に、ベクトル束を用いた定式化があったことを考えれば、上記の問題は、振じられた K 理論を応用する上で意義あるものと言える。

[15]における結果とは、「振じられた Hermite 一般ベクトル束」という概念が、振じられた K 理論を一般的に定式化の際に用いることができ、上の問題に対する解答の一つとなる、というものである。

定理 1.1. 任意の CW 複体 X 上の主 $PU(\mathcal{H})$ 束 P に対して、 P で振じられた X の K 群を $K_P(X)$ とし、 P で振じられた Hermite 一般ベクトル束のホモトピー類のなす群を $KF_P(X)$ と書く。この時、次の自然な同型写像が存在する。

$$\alpha : K_P(X) \longrightarrow KF_P(X).$$

Hermite 一般ベクトル束とは、ベクトル束を一般化する概念であり、[13]の中で古田幹雄氏によって導入された。それは、言ってみれば、Fredholm 作用素の族を「有限次元近似」して得られるような幾何対象であり、[13]においては族の指数を定義する際に用いられている。振じられた K 理論を (3) に相当する方法で定式化した場合、その代表元は Fredholm 作用素の「振じられた」族とみなすことができる。そのため、この族に対しても有限次元近似を考えることができ、その結果得られる幾何学的対象が、まさに振じられた Hermite 一般ベクトル束そのものである。つまり次のような対応になっていると解釈できる：

$$\begin{aligned} K_P(X) &= \text{“Fredholm 作用素の振じられた族”}, \\ KF_P(X) &= \text{“振じられた Hermite 一般ベクトル束”}, \\ \alpha &= \text{“有限次元近似”}. \end{aligned}$$

以上で主定理とその背景のおおまかな説明をした。以降それぞれの内容について、より詳しく説明したい。具体的には次のとおりである。次の章 (§2) では振じられた K 理論の定義や例、および、捻じられたベクトル束について説明する。§3 では (振じられていない)Hermite 一般ベクトル束の定義や例などを説明する。最後に §4 において K 群との関係について述べる。

2 振じられた K 理論

基本的な内容についての参考文献として [1, 9, 11] をあげておく。

2.1 定義

無限次元可算 Hilbert 空間 \mathcal{H} 上の Fredholm 作用素とは、(有界) 線形作用素 $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ であって、核 $\text{Ker}A$ と余核 $\text{Coker}A$ が有限次元のものであった。それら Fredholm 作用素のなす空間を $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ と書き、作用素ノルムで位相を入れる。また、 \mathcal{H} の射影ユニタリー群を $PU(\mathcal{H}) = U(\mathcal{H})/U(1)$ と書き、 $U(\mathcal{H})$ の作用素ノルムから誘導される位相を与える。

コンパクト Hausdorff 空間 X 上に主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \rightarrow X$ が与えられたとする。このとき、 $PU(\mathcal{H})$ の $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ への共役作用に付随した、 $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ をファイバーとするファイバー束を $P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H}) \rightarrow X$ と書く。

定義 2.1. P で振じられた X の K 群 $K_P(X)$ を, $P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H})$ の切断のホモトピー類として定義する:

$$K_P(X) = \Gamma(X, P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H})) / \text{ホモトピー}.$$

二つの切断 \mathbb{A}_0 と \mathbb{A}_1 がホモトピーでつなげるとは, $X \times [0, 1]$ 上の主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \times [0, 1]$ に付随したファイバー束 $(P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H})) \times [0, 1]$ の切断 $\tilde{\mathbb{A}}$ があって, $\tilde{\mathbb{A}}|_{t=i} = \mathbb{A}_i$, ($i = 0, 1$) となっていることと定める.

$K_P(X)$ にはアーベル群の構造が入るが, それは Hilbert 空間の間の同型 $j : \mathcal{H} \oplus \mathcal{H} \cong \mathcal{H}$ を一つ固定することによって得られている:

$$(\mathbb{A}, \mathbb{A}') \mapsto j \circ (\mathbb{A} \oplus \mathbb{A}') \circ j^{-1}.$$

単位元 0 は各点で可逆な (Fredholm) 作用素であるような切断で代表される.

主 $PU(\mathcal{H})$ 束が自明束 $P = X \times PU(\mathcal{H})$ である場合を考える. この時, P で振じられた K 群は $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ への写像のホモトピー類 $[X, \mathcal{F}(\mathcal{H})]$ となり, 通常の位相的 K 群 $K(X)$ を回復する.

従って, 本質的に振じられた K 群が意味があるのは, P が非自明な場合である. 主 $PU(\mathcal{H})$ 束は, 3 次の整数係数コホモロジーで分類される. これは, ユニタリー群 $U(\mathcal{H})$ が可縮であることから, $PU(\mathcal{H})$ は Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathbb{Z}, 2)$ にホモトピー同値であり, 主 $PU(\mathcal{H})$ 束の分類空間が $K(\mathbb{Z}, 3)$ にホモトピー同値であることから従う. 記号として, 主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \rightarrow X$ の同型類に対応するコホモロジー類を $\delta(P) \in H^3(X; \mathbb{Z})$ と書く.

2.2 例

$K_P(X)$ の例をいくつかあげる.

1. X が 3 次元閉多様体の場合. 主 $PU(\mathcal{H})$ 束 P が非自明であれば, 次の同型がある:

$$K_P(X) \cong H^2(X; \mathbb{Z}).$$

2. $X = SU(3)$ の場合. 主 $PU(\mathcal{H})$ 束 P を分類するコホモロジー類 $\delta(P)$ を, 同型 $H^3(SU(3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ を通して整数 ℓ と同一視する. P が非自明, つまり $\ell \neq 0$ の場合, 次のようになることが知られている ([18]):

$$K_P(SU(3)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}, & (\ell = \delta(P) : \text{奇数}) \\ \mathbb{Z}/\frac{\ell}{2}\mathbb{Z}. & (\ell = \delta(P) : \text{偶数}) \end{cases}$$

3. $X = SU(3)/SO(3)$ の場合. ここで, 3×3 行列として, $SO(3)$ を $SU(3)$ の部分群とみなしている. 主 $PU(\mathcal{H})$ 束 P として $H^3(SU(3)/SO(3); \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/2$ の非自明な元に対応するもの考えると次の同型がある:

$$K_P(SU(3)/SO(3)) \cong \mathbb{Z}.$$

2.3 振じられたベクトル束

§1 で言及した、振じられたベクトル束について簡単に説明する. 空間 X 上の主 $PU(\mathcal{H})$ 束で振じられたベクトル束とは、本質的に、次のデータであらわされるものである:

$$(U, E_\alpha, \phi_{\alpha\beta}).$$

- X の開被覆 $U = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$,
- ベクトル束 $E_\alpha \rightarrow U_\alpha$, ($\alpha \in \mathfrak{A}$),
- ベクトル束の同型写像 $\phi_{\alpha\beta} : E_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \rightarrow E_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, ($\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$) であって、次の条件を満たすもの.

$$\begin{aligned}\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\alpha} &= 1, \\ \phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma} &= z_{\alpha\beta\gamma}\phi_{\alpha\gamma}.\end{aligned}$$

ここで、 $z_{\alpha\beta\gamma} : U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \rightarrow U(1)$ は、同型 $H^2(X; U(1)) \cong H^3(X; \mathbb{Z})$ を通して $\delta(P) \in H^3(X; \mathbb{Z})$ を代表するような、 $U(1)$ 値関数の芽のなす層 $\underline{U}(1)$ を係数とする Čech 2-コサイクルである.

この振じられたベクトル束の定義で恒等的に $z_{\alpha\beta\gamma} = 1$ が成り立つ場合、それは普通のベクトル束の局所的なデータに他ならない. 言い換えれば、振じられたベクトル束は、変換関数 $\phi_{\alpha\beta}$ のコサイクル条件が振じられている.

普通のベクトル束の場合の類似として次の事実がある ([3, 4, 9, 10, 16, 17, 20]):

命題 2.2. コンパクト Hausdorff 空間 X 上の主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \rightarrow X$ であって、 $\delta(P) \in H^3(X; \mathbb{Z})$ が有限位数のものが与えられたとする. このとき、次の自然な同型が存在する.

$$K_P(X) \xrightarrow{\cong} K(\text{Vect}_P(X)).$$

右辺は $P \rightarrow X$ で振じられたベクトル束の同型類のなす半群 $\text{Vect}_P(X)$ から Grothendieck 構成によって得られるアーベル群である.

P が自明ならば、上の命題はよく知られた事実 $[X, \mathcal{F}(\mathcal{H})] \cong K(\text{Vect}(X))$ に他ならない. 命題のポイントは、 $\delta(P)$ が有限位数ならば、主 $PU(\mathcal{H})$ 束 $P \rightarrow X$ が、ある主 $PU(n)$ 束 $Q \rightarrow X$ から誘導されるという事実である.

冒頭で述べたとおり、 $\delta(P)$ が無限位数の場合、 P で振じられたベクトル束は自明なもの以外存在しない. これは次の主張から従う: P で振じられたベクトル束のランクが $r > 0$ であれば、 $r\delta(P) = 0$ が成り立つ. この主張を示すためには、「振じられたコサイクル条件」の行列式をとる.

$$\det\phi_{\alpha\beta}\det\phi_{\beta\gamma} = (z_{\alpha\beta\gamma})^r \det\phi_{\alpha\gamma}.$$

よって、2-コサイクル $(z_{\alpha\beta\gamma})^r$ はコバウンダリーであり、 $r\delta(P) = 0$ となる.

注意 1. ここで述べた振じられたベクトル束のデータには、厳密に言えば不足しているものがある. すなわち、本当の定義には P に関する局所的なデータまで含める必要がある. その情報は同型を考える際に必要になるが、ここでは省略する.

3 Hermite 一般ベクトル束

3.1 有限次元近似のアイデア

言ってみれば, Hermite 一般ベクトル束とは, Fredholm 作用素の族を「有限次元近似」して得られるものの性質を抽象化して定義したような幾何的な対象である. そのため, Hermite 一般ベクトル束の定義を述べる前に, 有限次元近似というアイデアをまずは説明したい.

簡単な Fredholm 作用素の族として, Fredholm 作用素 $A \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$ を一つだけ考える. すると, A の有限次元近似として得られるものは, (E, h) という対である. ここで, E は \mathbb{Z}_2 次数付 (有限次元)Hermite ベクトル空間で, $h: E \rightarrow E$ は次数 1 の Hermite (または自己共役) 写像である.

この対は次のようにして A から得られる.

- まず, \mathbb{Z}_2 次数付 Hilbert 空間 $\hat{\mathcal{H}}$ と, 次数 1 の自己共役 Fredholm 作用素 $\hat{A}: \hat{\mathcal{H}} \rightarrow \hat{\mathcal{H}}$ を次のように定める:

$$\hat{\mathcal{H}} = \mathcal{H} \hat{\oplus} \mathcal{H}, \quad \hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & A^* \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

ここで, \mathbb{Z}_2 次数付ベクトル空間の次数を区別するために, 通常の直和の記号 \oplus のかわりに $\hat{\oplus}$ という記号を使う. この記号の左が次数 0 で右が次数 1 だとする. また, A^* は A の共役作用素である.

- \hat{A} もまた Fredholm 作用素であるので, ある正数 $\mu > 0$ で次の性質をもつものを見つけることができる:
 - μ は \hat{A}^2 のスペクトル集合に含まれない;
 - μ より小さい \hat{A}^2 のスペクトルは有限個の固有値のみ;
 - \hat{A}^2 の μ より小さい固有値を持つ固有空間は有限次元.
- \hat{A}^2 の μ より小さい固有値に対応する固有空間の直和として E を定義し, $h: E \rightarrow E$ を \hat{A} の E への制限として定義する:

$$E = (\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{<\mu} = \bigoplus_{\lambda < \mu} \{\xi \in \hat{\mathcal{H}} \mid \hat{A}^2 \xi = \lambda \xi\},$$

$$h = \hat{A}|_E.$$

\hat{A}^2 の μ より小さい固有値を小さい方から順に, $0 \leq \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \mu$ と書き, 各固有空間を $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{\lambda_i}$ と書くと, $\hat{\mathcal{H}}$ は次のように直交直和分解できる.

$$\hat{\mathcal{H}} = (\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{\lambda_1} \oplus (\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus (\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{\lambda_n} \oplus \hat{\mathcal{H}}'.$$

ただし $\hat{\mathcal{H}}'$ は直交補空間である. \hat{A} はこの分解を保つことに注意しよう.

\hat{A} の固有値に 0 が含まれる ($\lambda_1 = 0$) とする. 一般に \hat{A} は $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_0 \subset \hat{\mathcal{H}}$ の直交補空間 $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_0^\perp$ 上で可逆になっている. 上の固有分解を使うともう少し詳しい

ことが言えて、各部分空間 $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{\lambda_2}, \dots, (\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_{\lambda_n}$ および $\hat{\mathcal{H}}'$ の上で \hat{A} が可逆になっている。可逆な作用素は、Fredholm 作用素としては、つまらない作用素である。そこで、無限次元である $\hat{\mathcal{H}}'$ の部分を切り離し、 $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_0$ の周りの有限次元のところ E だけ取り出す操作が、ここで考えている有限次元近似である。

勿論、今の場合の一つの Fredholm 作用素しか考えていないので、 $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_0$ の「近く」に注目することと、 $(\hat{\mathcal{H}}, \hat{A})_0$ そのものに注目することとの差異は本質的でない。しかし、Fredholm 作用素の族を考える段になると、差があらわれる。固有値 0 の固有空間そのものを見る場合、その次元がジャンプすることがある。一方で、固有値 0 の固有空間の近くを見る場合、うまい近似によって局所的にベクトル束を作ることができる。

補題 3.1. 連続写像 $A : X \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$ が与えられたとする。任意の点 $x \in X$ に対して、ある正数 $\mu > 0$ と x を含むある開集合 $U \subset X$ が存在して、次のベクトル空間の族が U 上の (有限ランク \mathbb{Z}_2 次数付 Hermite) ベクトル束になる:

$$\bigcup_{y \in U} (\hat{\mathcal{H}}, \hat{A}_y)_{<\mu} = \bigcup_{y \in U} \bigoplus_{\lambda < \mu} \{\xi \in \hat{\mathcal{H}} \mid \hat{A}_y^2 \xi = \lambda \xi\} \subset U \times \mathcal{H}.$$

この補題によって、Fredholm 作用素の族 $A : X \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$ の有限次元近似により、 X の各点のまわりでベクトル束が得られる。こうしたベクトル束達を集めたものが、(\mathbb{Z}_2 次数付)Hermite 一般ベクトル束になる。

3.2 定義

[13] で導入された \mathbb{Z}_2 次数付 Hermite 一般ベクトル束の定義を与える。ここで述べる定義には、もともとの定義と比べて、記述の方法などに多少の違いがあるが、本質的に同じである。

定義 3.2. 空間 X 上の \mathbb{Z}_2 次数付き Hermite 一般ベクトル束は次のデータからなる:

$$\mathbb{E} = (\mathcal{U}, (E_\alpha, h_\alpha), \phi_{\alpha\beta}).$$

- X の開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\alpha\}_{\alpha \in \mathfrak{A}}$,
- \mathbb{Z}_2 次数付 Hermite ベクトル束 $E_\alpha \rightarrow U_\alpha$, ($\alpha \in \mathfrak{A}$),
- 次数 1 の Hermite 写像 $h_\alpha : E_\alpha \rightarrow E_\alpha$, ($\alpha \in \mathfrak{A}$),
- 次数 0 のベクトル束の写像 $\phi_{\alpha\beta} : E_\beta|_{U_\alpha \cap U_\beta} \rightarrow E_\alpha|_{U_\alpha \cap U_\beta}$, ($\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$) であつて、 $\phi_{\alpha\beta} h_\beta = h_\alpha \phi_{\alpha\beta}$ 及び、次の条件を満たすもの。

$$\begin{aligned} \phi_{\alpha\beta} \phi_{\beta\alpha} &\equiv 1, \\ \phi_{\alpha\beta} \phi_{\beta\gamma} &\equiv \phi_{\alpha\gamma}. \end{aligned}$$

上の定義の中で \equiv は同値関係である。「 $\phi_{\alpha\beta} \phi_{\beta\alpha} \equiv 1$ 」の意味は次のとおりである。

各 $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して, ある正数 $\mu > 0$ と x を含むある開集合 V が存在して次が成立する: 任意の $y \in V$ と任意の $\xi \in (E_\alpha, h_\alpha)_{y, < \mu}$ に対して,

$$\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\alpha}\xi = \xi.$$

ただし, $(E_\alpha, h_\alpha)_{y, < \mu}$ は, E_α の y におけるファイバーの部分空間であって, $(h_\alpha)_y^2$ の固有値が μ より小さい固有空間の直和となっているものである:

$$(E_\alpha, h_\alpha)_{y, < \mu} = \bigoplus_{\lambda < \mu} \{\xi \in (E_\alpha)_y \mid (h_\alpha)_y^2 \xi = \lambda \xi\}.$$

なお, Hermite 一般ベクトル束には \mathbb{Z}_2 次数付でないものもあるが, それらは本稿では使わないので, 「 \mathbb{Z}_2 次数付 Hermite 一般ベクトル束」を単に「Hermite 一般ベクトル束」と呼んでいる.

3.3 例

空間 X 上にベクトル束の対 (E^0, E^1) があると, これから (\mathbb{Z}_2 次数付)Hermite 一般ベクトル束が得られる. 実際, $U = \{X\}$, $E = E^0 \hat{\oplus} E^1$ とし, $h : E \rightarrow E$ として自明なもの $h = 0$ をとればよい.

もう少しそれらしい例として, S^2 上の Hermite 一般ベクトル束の例を与える. S^2 の開被覆 $U = \{U_+, U_-\}$ であって, $U_\pm \cong \mathbb{C}$, $U_+ \cap U_- \simeq S^1$ となるものをとる. (E_\pm, h_\pm) は次のように定める.

$$\begin{aligned} E_+ &= U_+ \times (\mathbb{C} \hat{\oplus} \mathbb{C}), & (h_+)_z &= \begin{pmatrix} 0 & \bar{z} \\ z & 0 \end{pmatrix}, \quad (z \in U_+ \cong \mathbb{C}) \\ E_- &= U_- \times (\{0\} \hat{\oplus} \{0\}), & h_- &= 0. \end{aligned}$$

$\phi_{\pm\mp} : E_\mp|_{U_+ \cap U_-} \rightarrow E_\pm|_{U_+ \cap U_-}$ を自然な単射と全射で定めると, これは S^2 上の Hermite 一般ベクトル束になる.

後述するように, Hermite 一般ベクトル束によって, K 群を実現することができる. 従って, S^2 上の Hermite 一般ベクトル束は, $K(S^2)$ の元の何かを代表している筈である. 上で記述した Hermite 一般ベクトル束は, $\tilde{K}(S^2) \subset K(S^2)$ の生成元を代表している.

4 K 群の実現

4.1 捻じれていない場合

補題 3.1 より, Fredholm 作用素の族 $A : X \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$ があれば, その有限次元近似として, Hermite 一般ベクトル束が得られることは明らかである. 近似の際に「どの正数より小さい固有値を考えるか」などの選択があるので, A から得られる Hermite 一般ベクトル束そのものは一意でない. しかし, その選択の任意性は同型という概念を導入することによって吸収することができ, $A : X \rightarrow \mathcal{F}(\mathcal{H})$ に対して Hermite 一般ベクトル束の同型類を一意的に対応させることができる. さらにホ

ホトピーという概念を Hermite 一般ベクトル束に導入することによって次の写像が得られる.

$$\alpha : [X, \mathcal{F}(\mathcal{H})] \longrightarrow KF(X).$$

ここで $KF(X)$ は X 上の Hermite 一般ベクトル束の (同型類の) ホトピー類のなす集合である. 写像のホトピー類 $[X, \mathcal{F}(\mathcal{H})]$ はアーベル群の構造が入ったが, $KF(X)$ にもアーベル群の構造が入り, 有限次元近似の写像 α は準同型になる.

命題 4.1. コンパクト Hausdorff 空間 X に対し α は同型写像である.

これは, 次の結果の系として得られる:

定理 4.2 (古田 [13]). コンパクト Hausdorff 空間 X に対し次の同型写像がある.

$$K(X) = K(\text{Vect}(X)) \xrightarrow{\cong} KF(X).$$

この同型写像は, X 上のベクトル束の対 (E^0, E^1) に対して, (例で構成した) Hermite 一般ベクトル束 $(\{X\}, (E^0 \hat{\oplus} E^1, h = 0))$ を対応させるものである.

4.2 扱われている場合

ここまで, ベクトル束の概念の一般化として, 扱われたベクトル束と Hermite 一般ベクトル束という概念を説明した. 扱われた Hermite 一般ベクトル束とは, それらを併せた概念である. 具体的には, P で扱われた Hermite 一般ベクトル束とは, Hermite 一般ベクトル束と同じデータであって, コサイクル条件に相当する「 $\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma} \doteq \phi_{\alpha\gamma}$ 」のかわりに,

$$\phi_{\alpha\beta}\phi_{\beta\gamma} \doteq z_{\alpha\beta\gamma}\phi_{\alpha\gamma}$$

を満たすもの, として定義できる. $z_{\alpha\beta\gamma}$ は $\delta(P)$ を代表する Čech 2-コサイクルである. (扱われたベクトル束の場合と同様に, 厳密には, P の局所的なデータも含める必要がある.)

P で扱われた K 群の元は, $P \times_{Ad} \mathcal{F}(\mathcal{H})$ の切断で代表される. これは局所的には $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ への連続写像で記述できる. 従って, 扱われていない場合と同様にして有限次元近似を考えることができ, 次の自然な準同型が得られる.

$$\alpha : K_P(X) \longrightarrow KF_P(X).$$

ここで, $KF_P(X)$ は, X 上の P で扱われた Hermite 一般ベクトル束の (同型類の) ホトピー類のなすアーベル群である.

定理 1.1 は X が CW 複体の場合に α が同型であることを主張する:

定理 4.3 ([15]). 任意の CW 複体 X 上の主 $PU(\mathcal{H})$ 束 P に対し α は同型である.

この証明のアイデアはコホモロジー理論の比較である. 位相的 K 理論は K コホモロジー理論の一部であった. 同様に, 扱われた K 群を一部として含むよう, ある種の一般コホモロジー理論 $K_P^*(X, Y)$ を構成することができる. それとほぼ並行して, 群 $KF_P(X)$ を一部に含むようなコホモロジー理論 $KF_P^*(X, Y)$ を構成することができる. 有限次元近似が定める写像 $\alpha : K_P(X) \rightarrow KF_P(X)$ は,

これらのコホモロジー理論の間の自然変換に拡張できる。ここで通常のコホモロジー理論を比較する際の手法を応用すると、これらの理論が α を通じて同値であることが結論できる。

この議論は似たような設定でも有効で、「捻じられた K コホモロジー $K_P^n(X)$ を、 \mathbb{Z}_2 次数付一般 Clifford 加群 ([13]) の捻じれ版で実現できる」、という主張の証明にも使うことができる。

4.3 2-ベクトル束

最後に、捻じられた K 理論を有限次元の幾何対象で実現する、という問題を考えたもともとの動機に関連して、2-ベクトル束との関係について述べたい。

2-ベクトル束とは、ベクトル束を圏化した概念のことを指す。しかし、それとして確たる定式化があるわけではなく、色々な提案があるのが現状であろう。

一つの定式化として、Brylinski [6] によるものがある。彼の定式化による 2-ベクトル束で (2-) ランクが 1 のもの (いわば 2-直線束) は、捻じられたベクトル束を使って作ることができる。より具体的には、主 $PU(\mathcal{H})$ 束 P が与えられた空間 X を考え、各開集合 $U \subset X$ に $P|_U$ で捻じられたベクトル束のなす圏 $\mathcal{K}_P(U)$ を対応させる。この対応付けが与える圏の層 (stack) \mathcal{K}_P が、Brylinski の 2-直線束の例になっている。

通常のベクトル束はある主束と対応する。特に、ランク 1 のベクトル束 (つまり直線束) は、円周束と一対一に対応する。この類似として、Brylinski の 2-直線束は、 $U(1)$ -gerbe ([7, 14]) と本質的に一対一に対応している。 $U(1)$ -gerbe とは、円周束を圏化した概念の一つであり、それらの同型類は $H^3(X; \mathbb{Z})$ で分類される。 P で捻じられたベクトル束の圏を使って作った 2-直線束の場合、それに対応する $U(1)$ -gerbe を分類する $H^3(X; \mathbb{Z})$ の元は $\delta(P)$ である。

この 2-直線束と gerbe の関係に鑑みると、任意の 2-直線束は、本質的には、捻じられたベクトル束から作られた 2-直線束と同じであると言える。

本稿では、捻じられたベクトル束の一般化として、捻じられた Hermite 一般ベクトル束を考えた。これを使って、2-直線束 (そして 2-ベクトル束) を定式化してみようというのは、自然な発想である。

具体的には、開集合 $U \subset X$ に対して、 $P|_U$ で捻じられた Hermite 一般ベクトル束のなす圏 $\mathcal{KF}_P(U)$ を対応させる対応づけを考える。すると、 X に適当な仮定をおけば、 \mathcal{KF}_P が stack になる。Brylinski の 2-直線束から $U(1)$ -gerbe を再構成する方法をこの場合に一般化すると、 \mathcal{KF}_P から $\delta(P)$ で分類される $U(1)$ -gerbe が得られる。

§2 で注意したように、 P で捻じられたベクトル束は、自明なもの以外存在しない場合がある。言いかえれば、2-直線束 \mathcal{K}_P の大域切断のなす圏 $\Gamma(X, \mathcal{K}_P) := \mathcal{K}_P(X)$ には、十分な対象が含まれていない場合がある。そのような場合でも、 \mathcal{KF}_P の大域切断のなす圏 $\Gamma(X, \mathcal{KF}_P) := \mathcal{KF}_P(X)$ には、非自明な対象が含まれる。この意味で、Hermite 一般ベクトル束による一般化は、Brylinski による 2-直線束を真に一般化している。(強いて言えば、定理 1.1 の応用である。)

Brylinski の 2-直線束からは, $U(1)$ -gerbe だけではなく, 非可換な gerbe も得られる. 同様な方法で Hermite 一般ベクトル束で一般化した 2-直線束に対しても非可換な gerbe が得られるかもしれない.

また, Baas, Dundas と Rognes は楕円コホモロジーの幾何的实现へのアプローチの一つとして, Brylinski のものとは少し違う 2-ベクトル束を定式化した ([2]). Hermite 一般ベクトル束を使って彼らと同様な構成をすることも面白い課題だと考えられる.

References

- [1] M. F. Atiyah and G. Segal, *Twisted K-theory*. Ukr. Mat. Visn. 1 (2004), no. 3, 287–330; translation in Ukr. Math. Bull. 1 (2004), no. 3, 291–334. arXiv:math/0407054.
- [2] N. A. Baas, B. I. Dundas and J. Rognes, *Two-vector bundles and forms of elliptic cohomology*. Topology, geometry and quantum field theory, 18–45, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 308, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004. arXiv:math/0306027.
- [3] P. Bouwknegt, A. L. Carey, V. Mathai, M. K. Murray and D. Stevenson, *Twisted K-theory and K-theory of bundle gerbes*. Comm. Math. Phys. 228 (2002), no. 1, 17–45. arXiv:hep-th/0106194.
- [4] P. Bouwknegt and V. Mathai, *D-branes, B-fields and twisted K-theory*. J. High Energy Phys. 2000, no. 3, Paper 7, 11 pp. arXiv:hep-th/0002023.
- [5] P. Bouwknegt, J. Evslin and V. Mathai, *T-duality: topology change from H-flux*. Comm. Math. Phys. 249 (2004), no. 2, 383–415. arXiv:hep-th/0306062.
- [6] J-L. Brylinski, *Categories of vector bundles and Yang-Mills equations*. Contemp. Math., 230, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [7] J-L. Brylinski, *Loop spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [8] A. L. Carey, K. C. Hannabuss, V. Mathai and P. McCann, *Quantum Hall effect on the hyperbolic plane*. Comm. Math. Phys. 190 (1998), no. 3, 629–673. arXiv:dg-ga/9704006.
- [9] A. L. Carey and B-L. Wang, *Thom isomorphism and push-forward map in twisted K-theory*. J. K-Theory 1 (2008), no. 2, 357–393. arXiv:math.KT/0507414.
- [10] P. Donovan and M. Karoubi, *Graded Brauer groups and K-theory with local coefficients*. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 38 1970 5–25.
- [11] D. S. Freed, M. J. Hopkins and C. Teleman, *Loop groups and twisted K-theory I*. arXiv:0711.1906.

- [12] D. S. Freed, M. J. Hopkins and C. Teleman, *Twisted K-theory and loop group representations*. arXiv:math/0312155.
- [13] 古田幹雄, 指数定理 2. 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 2002.
- [14] J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*. Grundle. 179, Springer Verlag (1971).
- [15] K. Gomi, *Twisted K-theory and finite-dimensional approximation*, arXiv:0803.2327.
- [16] A. Kapustin, *D-branes in a topologically nontrivial B-field*. Adv. Theor. Math. Phys. 4 (2000), no. 1, 127–154. arXiv:hep-th/9909089.
- [17] E. Lupercio and B. Uribe, *Gerbes over orbifolds and twisted K-theory*. Comm. Math. Phys. 245 (2004), no. 3, 449–489. arXiv:math.AT/0105039.
- [18] J. Maldacena, G. Moore and N. Seiberg, *D-brane instantons and K-theory charges*. J. High Energy Phys. 2001, no. 11, Paper 62, 42 pp. arXiv:hep-th/0108100.
- [19] J. Rosenberg, *Continuous-trace algebras from the bundle theoretic point of view*. J. Austral. Math. Soc. Ser. A 47 (1989), no. 3, 368–381.
- [20] J-L. Tu, P. Xu and C. Laurent-Gengoux, *Twisted K-theory of differentiable stacks*. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 37 (2004), no. 6, 841–910. arXiv:math.KT/0306138.

SPLICE QUOTIENT SINGULARITIES AND THE CASSON INVARIANT CONJECTURE

奥間智弘 (山形大学地域教育文化学部)

1. はじめに

本講演では, Neumann と Wahl によって導入された splice-quotient 特異点とよばれる複素 2 次元正規特異点 (以下では 2 次元特異点) と Casson 不変量予想, Némethi と Nicolaescu による予想の一般化などの紹介をさせていただきます.

2 次元特異点のリンクは 3 次元閉多様体であり, それは特異点解消グラフによって与えられます. 2 次元特異点の位相不変量とはリンクまたは解消グラフの不変量のことです. 解析的不変量を位相不変量で決定または評価することは興味ある問題ですが, 一般には非常に困難です. Casson 不変量予想は, 解析的不変量である Milnor ファイバーの符号数が位相で決まり, しかもリンクの Casson 不変量の 8 倍になるといふかなり強いことを主張しています.

splice-quotient 特異点の場合には幾何種数などの解析的不変量をグラフから帰納的な計算によって求めることが可能であり, Casson 不変量予想とその一般化もそのように証明することが出来ます.

2. 普遍アーベル被覆

X を複素 2 次元正規解析空間とし, その特異点は $o \in X$ のみであるとする. この場合の正規性とは $X \setminus \{o\}$ 上の正則関数が X 上に拡張されるという性質である. 組 (X, o) を **2 次元特異点** とよぶ. $\pi: \tilde{X} \rightarrow X$ を最小良特異点解消とし, 例外集合 $\pi^{-1}(o)$ を E と表す. \tilde{X} は非特異, すなわち複素多様体であり, π により $\tilde{X} \setminus E$ と $X \setminus \{o\}$ は複素解析的に同型である. ここで, 「良解消」とは E が Riemann 面 E_v の和集合であり, それらが正規交差していることを意味する. $E = \bigcup_{v \in \mathcal{V}} E_v$ と表す. 最小良特異点解消は一意的に存在し, すべての良解消は最小良解消を blowing up することで得られる. 例外集合 E の**双対グラフ**を Γ で表す. それは各 E_v を頂点に, 各交点 $E_v \cap E_w$ を辺に対応させ, 自己交点数と種数をウェイトとして頂点に付加したものである. したがって, Γ は交点行列 $I(E) = (E_v \cdot E_w)$ と E_v の種数のデータである. $I(E)$ は負定値であることが知られている.

X は $o \in X$ が原点となるように \mathbb{C}^n の開集合に埋め込まれているとし, S_ε^{2n-1} を o を中心とする十分小さい半径 ε をもつ球面とすると, $\Sigma = X \cap S_\varepsilon^{2n-1}$ は ε に

よらない3次元多様体であり, X の近傍は Σ 上の錐 $C(\Sigma)$ に同相であることが知られている. Σ を (X, o) のリンクという. $\partial X = \Sigma$ であるとしてよい. $\Sigma = \partial \tilde{X}$ であるが, Σ は Γ から定まるグラフ多様体として実現できる. 実際, Σ と Γ は同じ情報を持つ ([13]).

仮定 2.1. 以下, Σ は有理ホモロジー球面であると仮定する.

この条件は各 E_v が球面 S^2 と同相であって Γ が木となることと同値である. したがって, Γ と交点行列 $I(E)$ は同じ情報をもつ.

仮定より $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ は有限群になる. $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ を被覆変換群にもつ被覆 $\Sigma' \rightarrow \Sigma$ から, 自然な連続写像 $C(\Sigma') \rightarrow C(\Sigma) = X$ が得られるが, $C(\Sigma')$ には X から自然に複素構造が入り, 2次元特異点になる. これを (Y, o) と表す. 2次元特異点の有限被覆 $q: (Y, o) \rightarrow (X, o)$ を普遍アーベル被覆とよぶ.

例 2.2. (X, o) が商特異点 \mathbb{C}^2/G であれば, $Y = \mathbb{C}^2/[G, G]$ となる ($[G, G]$ は交換子群).

後の議論のために, $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ を $\{E_v\}$ を用いて表したい.

$$L := \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{Z}E_v$$

の元をサイクルとよぶ. 交点行列 $I(E)$ は負定値であるから, 任意の $v \in \mathcal{V}$ に対して $E_v^* \cdot E_w = -\delta_{vw}$ ($\forall w \in \mathcal{V}$) となる $E_v^* \in L \otimes \mathbb{Q}$ が存在する ($E_v^* > 0$ となる). これらで生成されるアーベル群を L^* と表す:

$$L^* = \sum_{v \in \mathcal{V}} \mathbb{Z}E_v^* \subset L \otimes \mathbb{Q}.$$

L^* は $\text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ と同一視される. 仮定により次の完全列がある:

$$0 \rightarrow H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(\tilde{X}, \partial X, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\partial X, \mathbb{Z}) \rightarrow 0.$$

$o \in X$ は X の変形レトラクトであるから E は \tilde{X} の変形レトラクトである. したがって, $H_2(\tilde{X}, \mathbb{Z}) = L$. その双対を考えると $H_2(\tilde{X}, \partial X, \mathbb{Z}) = L^*$ とみなしてよい. 以上により, $H_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ は次の群と同型である:

$$H := L^*/L.$$

H の元 $E_v^* + L$ を $[E_v^*]$ と表す.

3. SPLICE-QUOTIENT 特異点

splice-quotient 特異点は Neumann と Wahl によって導入され, 基本理論が構築された ([19], [18]. 解説としては [15], [22]). この節では, [21] で用いた方法でスプライス特異点と splice-quotient 特異点を導入する.

グラフ Γ の頂点 $v \in \mathcal{V}$ の次数を δ_v で表す: $\delta_v = (E - E_v) \cdot E_v$.

$$\mathcal{N} = \{v \in \mathcal{V} \mid \delta_v \geq 3\}, \quad \mathcal{E} = \{v \in \mathcal{V} \mid \delta_v = 1\}$$

とおき, \mathcal{N} の元を **node**, \mathcal{E} の元を **end** という.

まず, Neumann [14] の結果を振り返ることから始める. (X, o) は擬斉次特異点 (有限個の擬斉次多項式の零点集合) であると仮定する. このとき, Γ は星型 ($\#\mathcal{N} = 1$) であり, Σ はザイフェルト多様体になる. Γ の node を $0 \in \mathcal{V}$, $n = \delta_0$ とおく. Σ のザイフェルト不変量を $(b; (\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_n, \beta_n))$ と表す ($\alpha_i > \beta_i > 0$). Neumann は, (X, o) の普遍アーベル被覆 (Y, o) が \mathbb{C}^n において次の方程式で定義される完全交叉特異点になることを示した.

$$c_{i1}z_1^{\alpha_1} + \dots + c_{in}z_n^{\alpha_n} = 0, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

ここで, 係数 c_{ij} は, E_0 と他の E_v との交点の E_0 上の配置によって決定される. このような定義式を持つ特異点を **Brieskorn 完全交叉特異点** という.

上の結果をある条件の下で $\#\mathcal{N} > 1$ となる場合へ拡張する. 簡単のため, $\mathcal{E} = \{1, \dots, n\}$ と仮定する. $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ を非負整数全体の集合とし,

$$\mathcal{M} := \sum_{i=1}^n \mathbb{Z}_{\geq 0} E_i^* \subset L^*$$

とおき, その元を **monomial cycle** とよぶ. \mathcal{M} は次の対応によって多項式環 $\mathbb{C}[z_1, \dots, z_n]$ の単項式のなす半群と同型である:

$$D = \sum_{i=1}^n a_i E_i^* \mapsto z(D) := \prod_{i=1}^n z_i^{a_i}.$$

行列 $-I(E)^{-1}$ の (v, w) -成分を a_{vw} と表し, $d = |\det I(E)|$, $\ell_{vw} = da_{vw}$ とおく. ($E_v^* = \sum_w a_{vw} E_w$ となる.)

定義 3.1. 任意の $v \in \mathcal{V}$ に対し, z_i の v -weight を l_{vi} であると定める. これから決まる $\prod z_i^{\alpha_i}$ の v -degree は $\sum_{i \in \mathcal{E}} \alpha_i l_{vi}$ となる. $D = \sum_{w \in \mathcal{V}} \beta_w E_w \in \mathcal{M}$ なら次が成り立つ:

$$v\text{-deg } z(D) = d\beta_v = -dD \cdot E_v^*.$$

任意の $v \in \mathcal{V}$ に対して, $E - E_v$ の連結成分を E_v の**枝**とよぶ.

定義 3.2. 次の条件を **monomial condition** という: 任意の $v \in \mathcal{N}$ と E_v の任意の枝 C に対して, $D - E_v^* = \sum_{E_w \subset C} d_w E_w \in L$, 任意の $E_w \subset C$ に対して $d_w > 0$ となるような monomial cycle D が存在する (例 3.5 参照); このとき, $z(D)$ を C に属する **admissible monomial** という.

定義 3.3. Γ は monomial condition を満たすとし, C_1, \dots, C_{δ_v} を node E_v の枝, m_i を C_i に属する admissible monomials とする. すべての $(\delta_v - 2)$ 次小行列が正則となるような任意の $(\delta_v - 2) \times \delta_v$ 複素行列 (c_{ij}) をとり, $f_i = \sum_{j=1}^{\delta_v} c_{ij} m_j$, $\mathcal{F}_v := \{f_1, \dots, f_{\delta_v-2}\}$, $\mathcal{F} := \bigcup_{v \in \mathcal{N}} \mathcal{F}_v$ とおく. 次の等式に注意する:

$$\#\mathcal{F} = \sum_{v \in \mathcal{N}} (\delta_v - 2) = n - 2.$$

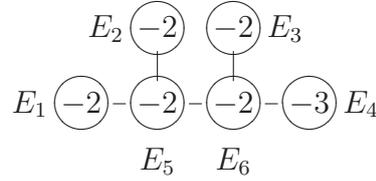
注意 3.4. (1) Γ が星型なら monomial condition は満たされており, \mathcal{F} が Brieskorn 完全交叉を与える.

(2) 定義 3.3 の行列 (c_{ij}) は行基本操作によって次の形に変形できる.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_2 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & a_{\delta_v-2} & b_{\delta_v-2} \end{pmatrix}$$

ただし, $a_i \neq 0, b_i \neq 0, a_i b_j - a_j b_i \neq 0 (i \neq j)$.

例 3.5. 次のグラフは monomial condition を満たす.



E_5 における admissible monomials は

$$2E_1^* = E_5^* + E_1 \quad \mapsto \quad z_1^2$$

$$2E_2^* = E_5^* + E_2 \quad \mapsto \quad z_2^2$$

$$E_3^* + 2E_4^* = E_5^* + (E_3 + E_4 + E_6) \quad \mapsto \quad z_3 z_4^2$$

定義 3.3 の \mathcal{F} として次を得る.

$$\{z_1^2 + z_2^2 + z_3 z_4^2, \quad z_3^2 + z_4^3 + z_1 z_2\}.$$

定義 3.6. $\mathbb{C}\{z\} := \mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}$ を収束べき級数環とする.

$$\mathcal{G}_v = \{g_{vj_v} \mid j_v = 1, \dots, \delta_v - 2\} \subset \mathbb{C}\{z\}$$

を \mathcal{F}_v の元に v -weight に関する高次項を任意に加えて得られるものとする. $\mathcal{G} := \bigcup_{v \in \mathcal{N}} \mathcal{G}_v$ によって定義される特異点を **splice type 特異点** という. \mathcal{G} を splice 関数系とよぶ.

注意 3.7. 上の状況で, \mathcal{G} で定義される特異点は \mathcal{F} で定義される特異点の同特異変形 (位相を保つような複素解析的な平坦族) である.

定理 3.8 (Neumann–Wahl [18, 2.6]). *splice type* 特異点は 2次元完全交叉正規特異点である.

$I(E)$ が定める双1次形式 $L^* \times L^* \rightarrow \mathbb{Q}$ から次の写像が導かれる.

$$\theta: H \times L^* \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \xrightarrow{e} \mathbb{C}^*, \quad e(x) = \exp(2\pi\sqrt{-1}x).$$

群 H の \mathbb{C}^n への作用を次の対角行列によって定義する:

$$\text{diag}[\theta(h, E_1^*), \dots, \theta(h, E_n^*)], \quad h \in H.$$

このとき H は次のように $\mathbb{C}\{z\}$ に作用する:

$$h \cdot z(D) := \theta(h, D)z(D), \quad (h, D) \in H \times \mathcal{M}.$$

λ_v を $\theta(\cdot, E_v^*)$ で定まる $\text{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ の元とすると, 任意の $f \in \mathcal{F}_v$ に対して

$$h \cdot f = \lambda_v(h)f, \quad h \in H.$$

一般に, $\theta(\cdot, D)$ -固有関数は $D + L$ の元に対応する monomial の級数である.

定理 3.9 (Neumann–Wahl [18, 7.2]). (Z, o) を *splice* 関数系 $\{g_{vj_v}\}$ で定義される *splice type* 特異点とすると, (Z, o) は (Y, o) と同相である. 各 g_{vj_v} が λ_v -固有関数ならば, 商 $(Z/H, o)$ は (X, o) に同相な 2次元正規特異点であって, 商写像 $Z \rightarrow Z/H$ は普遍アーベル被覆である.

定義 3.10. (Y, o) が *splice type* 特異点になるとき, (X, o) を **splice-quotient 特異点** という.

定理 3.11 ([14], [20]). 有理型特異点と, リンクが有理ホモロジー球面であるような擬斉次特異点および最小楕円型特異点は *splice-quotient* 特異点である.

注意 3.12. 定理 3.9 は, monomial condition を満たすグラフ (例えば 定理 3.11 の特異点のグラフ) が与えられたとき, それを実現する特異点の定義式を具体的に書き下す方法を与えている. splice-quotient 特異点の理論があらわれるまでは, 有理型特異点の場合でさえそのような方法は知られていなかった.

例 3.13. Γ は例 3.5 のグラフと同じものとし, そこで得た *splice type* 特異点を (Z, o) とする:

$$Z = \{z_1^2 + z_2^2 + z_3z_4^2 = 0, z_3^2 + z_4^3 + z_1z_2 = 0\} \subset \mathbb{C}^4.$$

$d = 4$, $E_1^* = \frac{9}{4}E_1 + \frac{7}{4}E_2 + \frac{3}{2}E_3 + E_4 + \frac{7}{2}E_5 + 3E_6$ であるから, H は $[E_1^*] \in H$ で生成される. したがって, $R := \mathbb{C}[z_1, z_2, z_3, z_4]$ への作用は対角行列 $[i, -i, -1, 1]$ によって与えられ, 不変環 R^H は

$$y_1 = z_4, y_2 = z_3^2, y_3 = z_1 z_2, y_4 = z_2^2 z_3, y_5 = z_1^2 z_3, y_6 = z_2^4, y_7 = z_1^4$$

で生成される. splice-quotient 特異点 Z/H は超曲面特異点になる¹.

$$Z/H \cong \{y_5^2 + y_2^3 + y_1^2 y_2 y_5 + 2y_1^3 y_2^2 + y_1^6 y_2\} \subset \mathbb{C}^3.$$

定義 3.14. 任意の $i \in \mathcal{E}$ に対して, 次を満たす複素曲線 $H_i \subset \tilde{X}$ と X 上の正則関数 f_i が存在するとき, \tilde{X} は**端曲線条件**を満たすという: H_i と E は1点で交わり, $H_i \cdot E_i = 1$ であって, 集合として $\{f_i = 0\} = \pi(H_i) \subset X$.

注意 3.15. H_1, \dots, H_n は $H_2(\tilde{X}, \partial X, \mathbb{Z})$ の基底になる.

端曲線条件が満たされるなら, 各 $i \in \mathcal{E}$ に対して, f_i が $\pi(H_i)$ で d_i 位の零を持つとすると, Y 上の正則関数 s_i で $s_i^{d_i} = f_i$ を満たすものが存在する.

次の定理を**端曲線定理** (end curve theorem) という,

定理 3.16 (Neumann–Wahl [16]). \tilde{X} が端曲線条件を満たすならば X は splice-quotient 特異点である. 実際, このとき Γ は *monomial condition* を満たし, $s = (s_1, \dots, s_n): Y \rightarrow \mathbb{C}^n$ は解析的な埋め込みであり, $s(Y)$ は splice 関数系によって定義され, H の作用による商 $s(Y)/H$ は X に一致する.

4. 幾何種数

(X, o) の幾何種数は $p_g(X, o) = h^1(\mathcal{O}_{\tilde{X}})$ と定義される. ここで, $\mathcal{O}_{\tilde{X}}$ は \tilde{X} 上の正則関数のなす層である. 幾何種数は解析的不変量であるが, splice-quotient 特異点の場合には Γ の不変量になる.

定義 4.1. $v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{E}$ に対して有理関数 $H_{\Gamma, v}(t)$ を次のように定める:

$$H_{\Gamma, v}(t) := \frac{1}{|H|} \sum_{h \in H} \prod_{w \in \mathcal{V}} (1 - \theta(h, E_w^*) t^{m_{vw}})^{\delta_w - 2}.$$

ただし, $m_{vw} = \ell_{vw} / \gcd\{\ell_{vw} \mid w \in \mathcal{V}\}$. $\deg r < \deg q$ を満たす多項式 p, q, r によって $H_{\Gamma, v}(t) = p(t) + r(t)/q(t)$ と表せるとき, $c_{\Gamma, v} = p(1)$ と定める.

これらは Γ の不変量である.

(X, o) が splice-quotient 特異点のとき, $H_{\Gamma, v}(t)$ は (X, o) の局所環に v -weight から決まる filtration の associated graded ring G_v の Hilbert 級数である. H が

¹SINGULAR [4] を使った.

自明なときは G_v は完全交叉であり、次の公式を得る:

$$H_{\Gamma,v}(t) = \frac{\prod_{w \in \mathcal{N}} (1 - t^{m_{vw}})^{\delta_w - 2}}{\prod_{u \in \mathcal{E}} (1 - t^{m_{vu}})}.$$

E_v の枝を C_1, \dots, C_{δ_v} とする. 交点行列 $I(C_i)$ は負定値であるから, Grauert の定理より C_i を正規特異点に blowing down することができる. その2次元特異点を (X_i, x_i) と表す. C_i の双対グラフを Γ_i と表せば, (X_i, x_i) のリンク Σ_i は Γ_i で定まるグラフ多様体である.

定理 4.2 ([21], cf. [1]). $v \in \mathcal{V} \setminus \mathcal{E}$ とする. (X, o) が *splice-quotient* 特異点ならば,

- (1) $p_g(X, o) = c_{\Gamma,v} + \sum_{i=1}^{\delta_v} p_g(X_i, x_i)$,
- (2) (X_i, x_i) も *splice-quotient* 特異点である.

系 4.3. (X, o) が *splice-quotient* 特異点で Γ が星型なら $p_g(X, o) = c_{\Gamma,v}$.

これらの結果により, *splice-quotient* 特異点の幾何種数は $\#\mathcal{N}$ に関する帰納法で計算できる.

5. CASSON 不変量予想とその一般化

次の予想を Casson 不変量予想という.

予想 5.1 (Neumann–Wahl [17]). (X, o) は2次元完全交叉特異点で $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$ を満たすとする. $\lambda(\Sigma)$ を Σ の Casson 不変量, $\sigma(F)$ を (X, o) の Milnor fiber F の符号数とすれば, 次の等式が成り立つ:

$$(5.1) \quad \lambda(\Sigma) = \sigma(F)/8.$$

この予想が成り立つことは, Fintushel–Stern [2] によって擬斉次超曲面特異点のときに示され, すぐに Neumann–Wahl [17], Fukuhara–Matsumoto–Sakamoto [3] によって Brieskorn 完全交叉特異点の場合に独立に拡張された. また, [17] では $z^k = f(x, y)$ という形の超曲面特異点に対しても証明している. これらの特異点は *splice-quotient* 特異点である. [12] では次が証明された.

定理 5.2. 予想 5.1 は *splice-quotient* 特異点に対して成り立つ.

Laufer–Durfee の公式により, (5.1) は次と同値である.

$$(5.2) \quad p_g(X, o) + \lambda(\Sigma) + \frac{K_{\tilde{X}}^2 + \#\mathcal{V}}{8} = 0,$$

ここで, $K_{\tilde{X}}^2$ は \tilde{X} 上の標準因子の自己交点数である.

不変量 $\sigma(F)$ を定義するには (X, o) の smoothing が必要であるが, (5.2) ではそのような条件は必要としない. Némethi と Nicolaescu は以下のように予想 5.1 を一般化した ([7]).

$\lambda(\Sigma)$ を Σ の Casson–Walker 不変量 ([5]), $\mathcal{T}_\Sigma = \sum_{h \in H} \mathcal{T}_\Sigma(h)h \in \mathbb{Q}[H]$ を Σ の canonical $spin^c$ structure に付随する Reidemeister–Turaev torsion とする. $\text{sw}(\Sigma) := \lambda(\Sigma)/|H| - \mathcal{T}_\Sigma(1)$ を Σ の **Seiberg–Witten 不変量** という.

$\mathcal{T}_\Sigma(1)$ は Γ の不変量であるが, 次のように求められる. $\chi \in \hat{H} := \text{Hom}(H, \mathbb{C}^*)$ を non-trivial な character とし, $v_\chi \in \mathcal{V}$ を $\chi([E_{v_\chi}^*]) \neq 1$ または v_χ と辺で結ばれるある $u \in \mathcal{V}$ が $\chi([E_u^*]) \neq 1$ を満たすようなものとする, 次の極限值は必ず存在する.

$$\tau_\chi = \lim_{t \rightarrow 1} \prod_{w \in \mathcal{V}} (1 - \chi([E_w^*]) t^{m_{v_\chi w}})^{\delta_w - 2}.$$

このとき, 次が成り立つ.

$$\mathcal{T}_\Sigma(1) = \frac{1}{|H|} \sum_{\chi \in \hat{H} \setminus \{1\}} \tau_\chi.$$

注意 5.3. $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$ なら $\text{sw}(\Sigma) = \lambda(\Sigma)$ (Casson 不変量).

次を Seiberg–Witten 不変量予想という.

予想 5.4 (Némethi–Nicolaescu [7], [1]). (X, o) が「よい」複素構造を持つなら,

$$(5.3) \quad p_g(X, o) + \text{sw}(\Sigma) + \frac{K_X^2 + \#\mathcal{V}}{8} = 0.$$

この予想では, 「よい」複素構造とは何であるかということも問題にしている². 予想 5.4 はまず有理型特異点, 楕円型 Gorenstein 特異点, Γ が星型であるような splice-quotient 特異点に対して示され ([9], [10], [8]), [11] において次が示された.

定理 5.5. 予想 5.4 は splice-quotient 特異点に対して成り立つ.

定理 5.5 は最近 [1] において得られた公式の系となる³. $\Sigma, \#\mathcal{V}, K_X^2$ と同じものを Section 4 の特異点 (X_i, x_i) に対して考え, それらを Σ_i, s_i, K_i^2 と表す. 次の定理では (X, o) は splice-quotient 特異点でなくてもよい.

定理 5.6 (Braun–Némethi [1]). 次の公式が成り立つ⁴.

$$\text{sw}(\Sigma) + \frac{K_X^2 + \#\mathcal{V}}{8} = -c_{\Gamma, v} + \sum_i \left(\text{sw}(\Sigma_i) + \frac{K_i^2 + s_i}{8} \right).$$

²[7] では, \mathbb{Q} -Gorenstein 特異点に対する予想であったが, [6] において反例が構成された

³予想 5.1 の証明が [12], [11], [1] において与えられたことになるが, 方法はすべて異なる

⁴[1] では, 予想 5.4 はより一般的な “equivariant version” の形で述べられており, 定理 5.6 もそのような形で証明されている. 定理 4.2 も同様である.

この定理と定理 4.2 により, 問題は Γ が星型の場合に帰着される (cf. Section 4).

最後にいくつか補足をしたい.

同特異変形は幾何種数を保つので, 予想 5.4 がある特異点について成り立てば, その同特異変形として得られる特異点についても成り立つ. [6] において, splice-quotient 特異点の同特異変形で splice-quotient 特異点でないものが現れる例が構成されている. すなわち, 予想 5.4 が成り立つような, splice-quotient ではない 2次元特異点が存在する (この例では $H_1(\Sigma, \mathbb{Z}) \neq 0$). しかし, 予想 5.1 については, それが成り立つような splice-quotient でない特異点は知られていないと思われる.

splice-quotient 特異点の理論を構築した Neumann と Wahl は splice-quotient 特異点に対する 予想 5.1 を「Milnor ファイバー予想」の系として得るアイデアを展開している ([19]). Milnor ファイバー予想は今でも未解決である.

REFERENCES

1. G. Braun and A. Némethi, *Surgery formula for Seiberg–Witten invariants of negative definite plumbed 3-manifolds*, arXiv:0704.3145.
2. R. Fintushel and R. J. Stern, *Instanton homology of Seifert fibred homology three spheres*, Proc. London Math. Soc. (3) **61** (1990), no. 1, 109–137.
3. S. Fukuhara, Y. Matsumoto, and K. Sakamoto, *Casson’s invariant of Seifert homology 3-spheres*, Math. Ann. **287** (1990), no. 2, 275–285.
4. G.-M. Greuel, G. Pfister, and H. Schönemann, *SINGULAR 3.0, A Computer Algebra System for Polynomial Computations*, Centre for Computer Algebra, University of Kaiserslautern, 2005, <http://www.singular.uni-kl.de>.
5. Christine Lescop, *Global surgery formula for the Casson–Walker invariant*, Annals of Mathematics Studies, vol. 140, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.
6. I. Luengo-Velasco, A. Melle-Hernández, and A. Némethi, *Links and analytic invariants of superisolated singularities*, J. Algebraic Geom. **14** (2005), no. 3, 543–565.
7. A. Némethi and L. I. Nicolaescu, *Seiberg–Witten invariants and surface singularities*, Geom. Topol. **6** (2002), 269–328.
8. ———, *Seiberg–Witten invariants and surface singularities. II. Singularities with good \mathbb{C}^* -action*, J. London Math. Soc. (2) **69** (2004), no. 3, 593–607.
9. András Némethi, *On the Ozsváth–Szabó invariant of negative definite plumbed 3-manifolds*, Geom. Topol. **9** (2005), 991–1042 (electronic). MR MR2140997 (2006c:57011)
10. ———, *Graded roots and singularities*, Singularities in geometry and topology, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 394–463.
11. András Némethi and Tomohiro Okuma, *The Seiberg–Witten invariant conjecture for splice-quotients*, J. Lond. Math. Soc. (2) **78** (2008), no. 1, 143–154.
12. ———, *On the Casson invariant conjecture of Neumann–Wahl*, J. Algebraic Geom. **18** (2009), no. 1, 135–149.

13. W. D. Neumann, *A calculus for plumbing applied to the topology of complex surface singularities and degenerating complex curves*, Trans. Amer. Math. Soc. **268** (1981), no. 2, 299–344.
14. ———, *Abelian covers of quasihomogeneous surface singularities*, Singularities, Part 2 (Arcata, Calif., 1981), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 40, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983, pp. 233–243.
15. ———, *Graph 3-manifolds, splice diagrams, singularities*, Singularity theory, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007, pp. 787–817.
16. W. D. Neumann and J. Wahl, *The end curve theorem for normal complex surface singularities*, arXiv:0804.4644v1.
17. ———, *Casson invariant of links of singularities*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 58–78.
18. ———, *Complete intersection singularities of splice type as universal abelian covers*, Geom. Topol. **9** (2005), 699–755.
19. ———, *Complex surface singularities with integral homology sphere links*, Geom. Topol. **9** (2005), 757–811.
20. T. Okuma, *Universal abelian covers of certain surface singularities*, Math. Ann. **334** (2006), 753–773.
21. ———, *The geometric genus of splice-quotient singularities*, Trans. Amer. Math. Soc. **360** (2008), 6643–6659.
22. Jonathan Wahl, *Topology, geometry, and equations of normal surface singularities*, Singularities and computer algebra, London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 324, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2006, pp. 351–371.

〒 990-8560 山形市小白川町一丁目 4-12 山形大学地域教育文化学部
E-mail address: okuma@e.yamagata-u.ac.jp

Prolongations of canonical systems on Jet spaces

澁谷 一博 (北海道大学大学院理学研究院)

1 はじめに

まず問題の背景と記号を説明する.

私は微分式系の幾何学を主に研究している. この理論は微分方程式を幾何学的に扱おうとする立場で Cartan, Engel, Goursat, Lie, Monge, Darboux らによって研究されてきた. 今日においても微分方程式を扱う理論としては最高のものであつた.

微分式系の幾何学とは多様体上の接空間の subbundle の幾何学であり, 特に微分方程式は正準微分式系付きの jet 空間の部分多様体 (一般に variety) として捉えられ, そのとき解は積分多様体として現れる. また微分方程式に関する研究は田中理論として再定式化され田中, 森本, 山口らによって研究されている.

本講演では, (R, D) で多様体 R と接空間 TR の subbundle D の組を表し, (R, D) を **微分式系 (differential system)** と呼ぶ. また (R_1, D_1) と (R_2, D_2) が同型であるとは, 微分同相写像 $\phi: R_1 \rightarrow R_2$ で $\phi_*(D_1) = D_2$ を満たすものが存在するときをいう.

微分式系 (R, D) に対して, その **derived system (派生系)** ∂D とは次のように定義されるものである; $D = \Gamma(D)$ に対して

$$\partial D := D + [D, D]$$

とし,

$$\partial D(x) = \{X(x) \in T_x R \mid X \in \partial D\} \quad (x \in R)$$

一般に derived system ∂D は TR の subbundle とは限らない. また $D = \partial D$ であることと D が完全積分可能であることは同値である.

∂D がまた微分式系になるとき,

$$\partial^i D = \partial(\partial^{i-1} D)$$

と帰納的に定義することが出来て $\partial^i D$ を微分式系 (R, D) の **i -th derived system** という.

Example (The canonical contact system on k -jet space of n independent and m dependent variables: $(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), C^k)$)

$$J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : (x_i, y^\alpha, p_I^\alpha) \quad (1 \leq |I| \leq k),$$

$$C^k = \{\varpi_I^\alpha = 0 \quad (0 \leq |I| \leq k-1, 1 \leq \alpha \leq m)\},$$

ここで I は multi-index であり, $\varpi_0^\alpha = dy^\alpha - \sum_{i=1}^n p_i^\alpha dx_i$, $\varpi_I^\alpha = dp_I^\alpha - \sum_{i=1}^n p_{Ii}^\alpha dx_i$.

特に $n = m = 1$ のときは次のようになり

$$J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}); (x, y, p_1, \dots, p_k), \quad C^k = \{\varpi_0 = \varpi_1 = \dots = \varpi_{k-1} = 0\},$$

ここで $\varpi_0 = dy - p_1 dx$, $\varpi_i = dp_i - p_{i+1} dx$.

このとき canonical system C^k の derived system は

$$C^k \subset \partial C^k \subset \partial^2 C^k \subset \dots \subset \partial^{k-1} C^k \subset \partial^k C^k = T(J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}))$$

$$\text{rank } \partial^i C^k = \text{rank } \partial^{i-1} C^k + 1 \quad i = 1, \dots, k$$

という性質を持つ.

この理論の中で jet 空間は重要な役割を果たしており, その特徴付けは重要な問題であった. 特に 1 未知関数 1 独立変数の k 階の jet 空間の特徴づけに Goursat は興味を持っていた.

Problem 1 (Goursat)

$(J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^k)$ は Goursat flag である. 逆に, 長さ k の Goursat flag (R, D) は $(J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}), C^k)$ に局所同型であるか?

ここで Goursat flag とは以下で定義されるものである;

(R, D) が長さ k の **Goursat flag** であるとは

$$D \subset \partial D \subset \partial^2 D \subset \dots \subset \partial^{k-1} D \subset \partial^k D = TR$$

$$\text{rank } \partial^i D = \text{rank } \partial^{i-1} D + 1 \quad i = 1, \dots, k$$

Remark $(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), C^k)$ は homogenous である, すなわち, jet 空間の任意の 2 点は局所同型である.

Answer to the problem 1

Yes; $k=1$ **Contact** manifold(of dimension 3)

Yes; $k=2$ **Engel** manifold

No ; $k=3$ Counter Example by Giaro, A. Kumpera, A. and Ruiz, C. 1978:

$D = \{\omega_0 = \omega_1 = \omega_2 = 0\}$, $\partial D = \{\omega_0 = \omega_1 = 0\}$, $\partial^2 D = \{\omega_0 = 0\}$,
where

$$\begin{aligned}\omega_0 &= dy - p_1 dx \\ \omega_1 &= dp_1 - p_2 dx \\ \omega_2 &= dx - p_3 dp_2.\end{aligned}$$

つまり Goursat はこの問題の答えを肯定的に考えていたが, Giaro-Kumpera-Ruiz により否定的に解決された ([GKR]). 長さが 3 の Goursat flag は generic には 3 階の jet だが特異点を持っている (上の反例の $\{p_3 = 0\}$ の部分), これを彼らは指摘した. 一般に長さが 3 以上の Goursat flag は特異点を持つ.

これに対し m 未知関数 n 独立変数の 1 階の jet 空間に対しては 1979 年に R.Bryant([B]) が, m 未知関数 n 独立変数の高階の jet 空間に対しては 1982,1983 年に K.Yamaguchi([Y1][Y2]) が特徴付けを与えた.

Problem 2 Goursat flag は jet space の特徴づけにはならず, 特異点を持っているわけだがそれはどのようなものか?

これに対し Montgomery-Zhitomirskii は次の解答を与えた;

Theorem [Montgomery and Zhitomirskii(2001)]

If (R, D) is a Goursat flag of length k , then (R, D) is a locally isomorphic to a point in **Monster Goursat Manifold** $P^{k-1}(J, C)$.

このような状況で本講演では多未知関数多独立変数の jet 空間に対応する Monster Goursat Manifold がどのようなものであるかを紹介したい.

2 $n = 1$ の場合

Rank 1 Prolongation(Geometric Construction of Jet spaces without transversality condition)

(R, D) を differential system とし,

$$D = \{\varpi_1 = \cdots = \varpi_s = 0\}$$

とする. このとき, $x \in R$ に対し, $E \subset T_x R$ が D の n -dimensional integral element であるとは, E は $T_x R$ の n -dimensional subspace であり

$$\varpi_1|_E = \cdots = \varpi_s|_E = d\varpi_1|_E = \cdots = d\varpi_s|_E = 0$$

を満たすときを言う.

つまり integral element とは D の integral manifold の接空間の候補である.

Definition R を $s+m+1$ 次元多様体, D を R 上の rank $m+1$ differential system とする. このとき (R, D) の **rank 1 Prolongation** $(P(R, D), \hat{D})$ とは以下のように定義されるものである;

$$P(R, D) := \bigcup_{x \in R} P_x$$

where $P_x = \{1 - \dim \text{integral elements of } (R, D)\}$
 $= \{u \subset D(x) \mid 1 - \dim \text{subspace}\} \cong \mathbb{R}P^m$.
 $\forall u \in P(M, D), p(u) = x$

$$\hat{D}(u) = p_*^{-1}(u) \subset T_u(P(R, D)) \xrightarrow{p_*} T_x M$$

where $p : P(R, D) \rightarrow R$: projection.

このとき $P(R, D)$ は多様体であり, canonical system: \hat{D} は rank $m+1$ になる. よってこの操作は繰り返し行うことが出来, rank $m+1$ differential system (R, D) の k -th **rank 1 Prolongation** というものが定義できる, つまり, $m+1$ 次元多様体 M に対し,

$$(P^k(M), C^k) := (P(P^{k-1}(M), C^{k-1}), \hat{C}^{k-1})$$

を generalized Monster Goursat manifold of length k と呼ぶ, ここで $(P^0(M), C^0) = (M, TM)$.

Remark この構成は E.Cartan による外微分式系の理論の中の一般的な prolongation であり, 特に K.Yamaguchi による jet 空間の幾何的構成 ([Y1],[Y2]) の横断性条件を外したものとして捉えられる.

また $m = 1$ のときは Montgomery-Zhitomirskii が呼んでる original の Monster Goursat manifolds である. Generalized Monster Goursat manifolds of length k は k -jet spaces $J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m)$ を open dense に含んでいる;

$$J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m) \subset P^k(M).$$

これに対し次の generalized Monster Goursat manifold of length k の特徴付けが得られた.

Theorem([SY])

For an m -flag (R, D) of length k ,

$$D \subset \partial^1 D \subset \cdots \subset \partial^{k-1} D \subset \partial^k D = TR$$

$$\text{rank } \partial^i D = \text{rank } \partial^{i-1} D + m \quad i = 1, \dots, k$$

(R, D) is locally isomorphic to generalized Monster Goursat manifold if and only if $\partial^{k-1} D$ is of **Engel (half) rank 1** for $m \geq 4$,
if and only if $\partial^{k-1} D$ is of **Cartan rank 1** for $m \geq 3$,
and, if and only if there exists a completely integrable subbundle F of $\partial^{k-1} D$ of corank 1 for $m \geq 2$.

ここで **Cartan rank**, **Engel rank** は以下で定義される量である;
微分式系 (R, D) が $D = \{\omega_1 = \cdots = \omega_s = 0\}$ で表されているとき D の **Cartan rank** とは次を満たす最小の自然数 ρ :

$$\exists \pi_1, \dots, \pi_\rho (\pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_\rho \wedge \omega_1 \wedge \cdots \wedge \omega_s \neq 0)$$

$$d\alpha \wedge \pi_1 \wedge \cdots \wedge \pi_\rho \equiv 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}$$

for $\forall \alpha \in \mathcal{D}^\perp$

また D の **Engel rank** とは次を満たす最小の自然数 ρ :

$$(d\alpha)^{\rho+1} \equiv 0 \pmod{\omega_1, \dots, \omega_s}$$

for $\forall \alpha \in \mathcal{D}^\perp$

3 $n \geq 2$ の場合

つぎに m 未知関数 n 独立変数の場合に対応する拡張された Monster Goursat Manifold を考える, その候補は自然に考えられる. つまり $n = 1$ のときと同様にして $(J^k(n, m), C^k)$ に対し

$$\Sigma(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \bigcup_{x \in J^k} \Sigma_x, \quad \Sigma_x :=$$

$$\{n - \dim \text{ integral elements of } C^k\}$$

と定める.

このとき $n = 1$ と違い本質的に問題になるのが, 一般に $\Sigma(J^k(m, n))$ は variety になり, 多様体にならないことである. なぜなら $n = 1$ のときは integral という 2-form を消す条件 ($d\omega_1|_E = \cdots = d\omega_s|_E = 0$) を 1-dim sub space は自明に満たしていたが, $n \geq 2$ のときは integral という条件が代数方程式として真に現れるからである.

Problem 3 $\Sigma(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ はいつグラスマンバンドル $Gr(n, T J^k)$ の中で部分多様体になるか?

Remark $n = 1$ のとき $\Sigma(J^k(\mathbb{R}, \mathbb{R}^m))$ は P^m -bundle で多様体になる. (これは §1 の rank 1 prolongation のこと) また $m = 1, k = 1$ のときは $\Sigma(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})) = J^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ は Lagrange-Grassmann bundle となり自然に多様体になる ([Y1],[Y2]). これらの場合を自明な場合と呼ぶことにする, このとき次が成り立つ.

Theorem([S1][S2]) $\Sigma(J^k(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ が多様体である必要十分条件は自明な場合または $(k, m, n) = (2, 1, 2)$ である.

このことより $\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ に対し, $p: \Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})) \rightarrow J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ を射影とし rank 1 prolongation のときと同様にして, $\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ 上の正準微分式系 D を自然に次で定義できる: $u \in \Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$, $p(u) = x$ に対し

$$D(u) = \{v \in T_u(\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))) \mid p_*(v) \in u\}.$$

この結果により 1 未知関数 2 独立変数の 2 階の jet 空間に対する延長または拡張された Monster Goursat Manifold を定義することができた. この結果は多変数微分方程式の解の特異点を扱う研究の第一歩であり, 礎となるものと期待される.(§5)

4 $(\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), D)$ の特異点の分類

またこの拡張された Monster Goursat Manifold は Goursat flag のときと同様に generic には 1 未知関数 2 独立変数の 3 階の jet 空間を open dense に含んでいるが特異点を持っている.

これに対し次のように, 余次元 1, 余次元 2 の積分要素, さらに余次元 2 の積分要素は双曲的, 放物的, 楕円の積分要素に分類して, それに対応して本質的に 4 つの特異点があらわれることを田中理論を用いて明らかにし, さらに各特異点に対し標準座標系を与えた ([S2]).

Theorem([S2]) $(\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), D)$ は次の disjoint な分解を持つ. (局所同型写像による軌道分解)

$$\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})) = \Sigma_0 \cup \Sigma_1 \cup (\Sigma_h \cup \Sigma_p \cup \Sigma_e)$$

ここで

$$\begin{aligned}
\Sigma_0 &:= \{w \in \Sigma(J^2) \mid \dim(w \cap \text{fiber}) = 0\} = J^3(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}) \\
\Sigma_1 &:= \{w \in \Sigma(J^2) \mid \dim(w \cap \text{fiber}) = 1\} \\
\Sigma_2 &:= \{w \in \Sigma(J^2) \mid \dim(w \cap \text{fiber}) = 2\} \\
\Sigma_2 &= \Sigma_h \cup \Sigma_p \cup \Sigma_e \\
\Sigma_h &:= \Sigma_2 \cap \{w : \text{hyperbolic point}\} \\
\Sigma_p &:= \Sigma_2 \cap \{w : \text{parabolic point}\} \\
\Sigma_e &:= \Sigma_2 \cap \{w : \text{elliptic point}\}
\end{aligned}$$

また Σ_0 は $\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}))$ の open set であり, Σ_1 は codim 1 の部分多様体, Σ_2 は codim 2 の部分多様体で特に $J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ 上の P^2 -bundle, Σ_h, Σ_e も codim 2 の部分多様体, Σ_p は codim 3 の部分多様体である.

特にそれぞれの任意の点は次の標準形を持つ;

(0) $w \in \Sigma_0$ は jet type normal form.

(1) $w \in \Sigma_1$ は次のものの原点のまわりと局所同型:

$(\mathbb{R}^{12}, \hat{D})$; $(\mathbb{R}^{12}; x, y, z, p, q, r, s, t, a, B, c, e)$ is coordinate and \hat{D} is expressed by $\hat{D} = \{\varpi_0 = \varpi_1 = \varpi_2 = \varpi_y = \varpi_r = \varpi_s = 0\}$, where

$$\begin{cases} \varpi_0 = dz - pdx - qdy & \varpi_y = dy - adx - Bdt \\ \varpi_1 = dp - rdx - sdy & \varpi_r = dr - cdx - (a^2 + eB)dt \\ \varpi_2 = dq - sdx - tdy & \varpi_s = ds - edx + adt. \end{cases}$$

(2)

$w \in \Sigma_h$ は次のものの $(0, \dots, 0, 1, 0)$ のまわりと局所同型:

$w \in \Sigma_p$ は次のものの $(0, \dots, 0, 0, 0)$ のまわりと局所同型:

$w \in \Sigma_e$ は次のものの $(0, \dots, 0, -1, 0)$ のまわりと局所同型:

$(\mathbb{R}^{12}, \hat{D})$; $(\mathbb{R}^{12}; x, y, z, p, q, r, s, t, B, D, E, F)$ is coordinate and \hat{D} is expressed by $\hat{D} = \{\varpi^0 = \varpi^1 = \varpi^2 = \varpi_x = \varpi_y = \varpi_t = 0\}$ where

$$\begin{cases} \varpi_0 = dz - pdx - qdy & \varpi_x = dx - (DE - BF)dr - Bds \\ \varpi_1 = dp - rdx - sdy & \varpi_y = dy - Bdr - Dds \\ \varpi_2 = dq - sdx - tdy & \varpi_t = dt - Edr - Fds \end{cases}$$

Remark 1 未知関数 1 独立変数 “Monster Goursat Manifold” に対しては低階を除いて局所的分類がなされていない.

5 高階のルジャンドル特異点論に向けて

前節までで多未知関数多独立変数においては1未知関数2独立変数の2階の jet 空間に対する延長のみが定義されることを述べた. これに対する積分曲面は1未知関数2独立変数の2階の方程式の“特異解”(1階の jet 空間への写像と思って特異点を持つもの)を記述するのだが, この“特異解”の J^2 の高階接触同値のもとで generic な分類を与える(特異点論的な意味で)という問題が考えられる.

この問題はルジャンドル特異点論を2階化せよ, とも捉えられる. つまりルジャンドル特異点論を接触多様体(1階の jet 空間)のはめ込みで射影すると特異点を持つものと捉えると,

Front case

$$\begin{array}{ccc} & (J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), C^1) : & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^3 : & \textit{not immersion} \end{array}$$

(ここで $(J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), C^1)$ は 5-dimensional contact manifold である.)

上で述べたことは, 2階の jet 空間(高階接触多様体)のはめ込みで1階の jet 空間へ射影すると特異点を持つもの, と捉えられる.

$$\begin{array}{ccc} & (\Sigma(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})), D) : & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ & (J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), C^2) & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ \mathbb{R}^2 & \rightarrow & (J^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), C^1) : & \textit{not immersion} \end{array}$$

Remark $J^2 \rightarrow J^1$ の fiber は J^2 の(または $\Sigma(J^2)$ の)高階接触変換で保存されるが $J^1 \rightarrow J^0 = \mathbb{R}^3$ の fiber は一般に保存されない. よって微分式系の立場では下の case を1階と捉えるのが自然である.

また §3 の定理により $(J^2(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}), C^2)$ 以外では一般に上のようなことは定式化できないのだが, 次の定理により, $n = 2$ の場合は余次元1の高階化, 多未知関数化を定式化することが出来る.

Theorem $\Sigma^1(J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m))$ (ただし $k = m = 1$ は除く) はグラスマンバンドル $Gr(2, TJ^k)$ の中で部分多様体である.

ここで

$$\Sigma^1(J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)) = \bigcup_{x \in J^k} \Sigma_x^1$$

$$\Sigma_x^1 := \{w : 2 - \dim \text{integral elements of } C^k \mid \dim(w \cap \text{fiber}) \leq 1\}$$

つまり全ての積分要素を集めた $\Sigma(J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m))$ は variety になるが、特異性の弱い、高々 fiber 方向との交わりが 1 次元のものだけ集めると多様体になるということである。ただし $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1) : (2n+1)$ 次元接触多様体に対しては $J^1 \rightarrow J^0$ の fiber がないので $\Sigma(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^1))$ は定義されない。

この定理により、

$$\begin{array}{ccc} & (\Sigma^1(J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m)), D) : & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ & (J^k(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m), C^k) & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ \mathbb{R}^2 \rightarrow & (J^{k-1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^m), C^{k-1}) : & \textit{not immersion}(\textit{corank}1) \end{array}$$

という corank 1 の特異点を持つような高階、多未知関数化されたルジャンドル特異点論が $n=2$ のときは定式化される。さらに §4 のような標準形を求めることが出来れば、この写像が具体的に書けることになる。

また $n \geq 3$ のときは次の定理により少なくとも余次元 1 で多未知関数化を定式化することが出来る。

Theorem $\Sigma^1(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ ($m \geq 2$) はグラスマンバンドル $Gr(n, TJ^1)$ の中で部分多様体である。

ここで

$$\Sigma^1(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)) = \bigcup_{x \in J^1} \Sigma_x^1$$

$$\Sigma_x^1 := \{w : n - \dim \text{integral elements of } C^1 \mid \dim(w \cap \text{fiber}) \leq 1\}$$

$$\begin{array}{ccc} & (\Sigma^1(J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)), D) : & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ & (J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), C^1) & \textit{immersion} \\ \nearrow & \downarrow & \\ \mathbb{R}^n \rightarrow & (J^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m), C^0) : & \textit{not immersion}(\textit{corank}1) \end{array}$$

参考文献

[B] Bryant, R. : Some aspect of the local and global theory of Pfaffian systems, Thesis, University of North Carolina, Chapel Hill, 1979.

- [GKR] Giaro, A., Kumpera, A. et Ruiz, C.: Sur la lecture correcte d'un resultat d'Elie Cartan, C.R.Acad.Sc.Paris, **287**, Sér.A(1978), 241-244.
- [MZ] Montgomery, R. and Zhitomirskii, M.: Geometric approach to Goursat flags, Ann.Inst. H.Poincaré-AN **18**(2001), 459-493.
- [S1] Shibuya, K. : A set of integral elements of higher order jet spaces, to appear in Demonstratio Math.
- [S2] Shibuya, K. : On the prolongation of 2-jet space of 2 independent and 1 dependent variables, to appear in Hokkaido Math. J.
- [SY] Shibuya, K. and Yamaguchi, K.: Drapeau theorem for differential systems, to appear in Differential Geom. Appl.
- [Y1] Yamaguchi, K.: Contact geometry of higher order, Japan.J.Math **8**(1982), 109-176.
- [Y2] Yamaguchi, K.: Geometrization of jet bundles, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 27-40.

Corks, plugs and exotic 4-manifolds (joint work with Selman Akbulut)

安井 弘一

1 Introduction

単連結閉 C^∞ 4次元多様体の同相型は 80年代の Freedman の研究によりほぼ完全に分類された。一方、微分同相型については分類には程遠いのが現状である。詳しくは [14], [13]などを参照。

ところで、単連結閉 C^∞ 4次元多様体の上の全ての (エキゾチック) 微分構造は可縮な部分多様体とその境界の involution によって決まっていることが知られている。そのような可縮な部分多様体と境界の involution の対は cork と呼ばれている (詳しい定義は次節で与える)。しかし、cork の具体例はごくわずかしかなく、どのような微分構造がどのような cork に対応しているか、などの基本的なことは何もわかっていない。そこで次の問いが自然に考えられる。

問題 1.1.

- (1) cork の新しい具体例を発見せよ。
- (2) cork と様々な手術を関連づけよ。
- (3) 4次元多様体の中で cork はどのような位置にあるか？
- (4) 可縮な部分多様体を固定したとき、その境界の involution の選び方は cork の構造にどのように影響するか？
- (5) 4次元多様体の上の全ての微分構造は同一の cork によって得られるか？

本講演ではこれらの問題意識の下で 4次元多様体の cork の構造の様々な具体例を構成する。さらに cork の応用として、同相だが微分同相でないコンパクト Stein 曲面の対を構成する。また、plug という対象を導入し、同様の考察を行う。

2 Cork

定義 2.1. C を境界付きの可縮でコンパクトな C^∞ (Stein¹) 4次元多様体, $\tau: \partial C \rightarrow \partial C$ を C^∞ involution とする。さらに, C^∞ 4次元多様体 X が C を含むとする。

- (1) (C, τ) が cork であるとは, τ が C の自己同相写像に拡張できるが, C の自己微分同相写像に拡張できないときをいう。
- (2) (C, τ) が X の cork であるとは, 次の条件をみたすときをいう: X から C を取り除き involution τ で C を貼り直すことで得られる 4次元多様体 Y と X が同相だが微分同相でない (図 1 参照)。

¹Stein 多様体については第 7 節を参照。第 6 節までは “Stein” を無視して構わない。

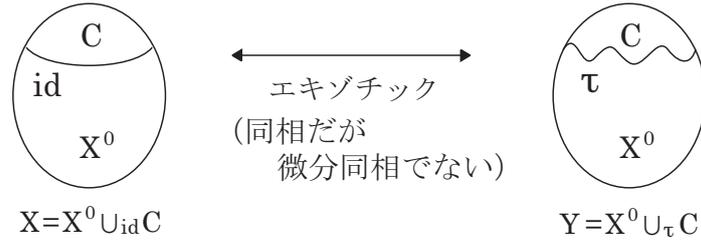


図 1:

注意 2.2. Freedman の定理によると, 可縮な 4 次元多様体の境界の自己微分同相写像は内部の自己同相写像に拡張する. 従って, (C, τ) が cork であるとは, τ が C の自己微分同相写像に拡張できないときである.

cork と 4 次元多様体の微分構造の関係については次の定理がよく知られている.

定理 2.3 (Matveyev [15], Curtis-Freedman-Hsiang-Stong [10], Akbulut-Matveyev [3]). X と Y を互いに同相だが微分同相でない単連結閉 C^∞ 4 次元多様体とする. このとき X のある cork (C, τ) が存在し, X から C を取り除き τ で C を貼り直して得られる多様体と Y が微分同相になる.

従って少なくとも単連結閉 4 次元多様体の場合は, その上の全ての微分構造が cork によって決定されていると言える. しかし, cork の具体例としては次のものが与えられていたのみであった (歴史的にはまず Akbulut による次の例の発見があり, その後で定理 2.3 の形に一般化された).

定理 2.4 (Akbulut [1], Bizaca-Gompf [9]). (W, f) は $E(n) \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ ($n \geq 2$) の cork である. (ここで, $E(n)$ とは Euler 数が $12n$ の楕円曲面のことである. (W, f) については次節を参照.)

3 New examples

本節では新しい cork の例を与える. 詳しくは [4] を参照.

定義 3.1. W_n を図 2 の Kirby 図式²で定まる 4 次元多様体とする. この図式は対称的な絡み目 (つまり成分を入れ替えるようなアイソトピーがある) になっていることに注意する. $f_n : \partial W_n \rightarrow \partial W_n$ を, 図 3 のように W_n の図式の \cdot (ドット) と 0 を取り替える (これは W_n の内部でのある手術に対応している) ことで誘導される involution とする. 図 3 の右側の図式は W_n の図式とアイソトピックであることに注意.

注意 3.2. (W_1, f_1) は定理 2.4 における (W, f) と一致している.

次の補題は W_n の Kirby 図式から簡単にわかる.

²Kirby 図式とは 4 次元ハンドル体における各ハンドルの接着写像を framed link を用いて図示したものである. 図式の変形により, 部分多様体の構成や, 2 つの多様体が微分同相であることなどを示すことができる. 詳しくは [14] を参照.

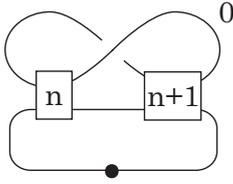
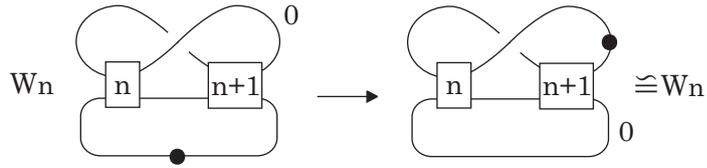
図 2: W_n 

図 3:

補題 3.3. $W_n (n \geq 1)$ はコンパクトで可縮な Stein 4 次元多様体.

我々は定理 2.4 の Gompf-Stipsicz [14] による証明を改良することで次の例を得た.

定理 3.4 (Akbulut-Y [4]). (W_{2n-1}, f_{2n-1}) と $(W_{2n}, f_{2n}) (n \geq 1)$ は $E(2n) \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ の cork である.

証明の概略. $E(2n) \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ の Kirby 図式を変形することで, 次のような W_{2n-1} (resp. W_{2n}) を部分多様体として見つけることができる: $E(2n) \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ から W_{2n-1} (resp. W_{2n}) を取り除き, それを f_{2n-1} (resp. f_{2n}) で貼り直した多様体は $\overline{2\mathbf{CP}^2}$ を連結成分に持つ. しかし, Seiberg-Witten 不変量から $E(2n) \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ は $\overline{2\mathbf{CP}^2}$ を連結成分に持たないことがわかる. 従って上記の W_{2n-1} (resp. W_{2n}) の貼り直しにより微分構造が変化していることになる. \square

注意 3.5. 定理 3.4 で用いた図式の変形方法を使えば, 2 成分の対称的な絡み目から定まる様々な可縮な 4 次元多様体とその境界の involution の対が楕円曲面の blow up の cork であることがわかる ([4]).

4 Rational blowdown and corks

4 次元多様体の様々な微分構造は手術を用いて構成されている. cork の具体例が少ないのは, 様々な手術との関係がわかっていなかったからともいえる. そこで, 本節では Fintushel-Stern [11] が導入した rational blowdown という有用な³手術と cork の関連を調べる. 詳しくは [4], [6] を参照.

定義 4.1. $p \geq 2$ に対し, C_p, B_p を図 4 の Kirby 図式で定まる 4 次元多様体とする. このとき, ∂C_p と ∂B_p はレンズ空間 $L(p^2, p-1)$ と微分同相である.

定義 4.2. X を C^∞ 4 次元多様体とし, C_p を含んでいるとする. このとき, X から C_p を取り除き, その境界に B_p を貼り付けることで得られる C^∞ 4 次元多様体 $X_{(p)}$ を X の rational blowdown と呼ぶ.

次の補題はよく知られている.

補題 4.3. X を C^∞ 4 次元多様体とし, C_p を含んでいるとする. $X_{(p)}$ を X の rational blowdown とする. このとき $b_2^+(X_{(p)}) = b_2^+(X)$, $b_2^-(X_{(p)}) = b_2^-(X) - (p-1)$ が成立.

³Fintushel-Stern により Seiberg-Witten 不変量の計算公式が与えられており, 様々な興味深い多様体が rational blowdown を用いて構成されている.

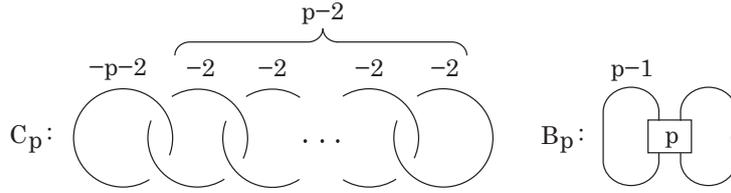
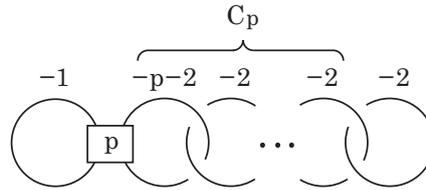


図 4:

補題 4.3 から, X と $X_{(p)} \# (p-1) \overline{\mathbf{CP}^2}$ の b_2^+ と b_2^- はそれぞれ等しくなる. そこで X と $X_{(p)} \# (p-1) \overline{\mathbf{CP}^2}$ が同相であることが期待されるが, 基本群などが異なる場合があり, 必ずしも同相にはならないことが知られている. 従って, cork で X と $X_{(p)} \# (p-1) \overline{\mathbf{CP}^2}$ を関連づけるには何らかの条件が必要となる. 我々は [16] で構成した多様体を詳しく調べ, Gompf-Stipsicz [14] による rational blowdown の Kirby 図式での操作を適用することで次の関係を得た.

定理 4.4 (Akbulut-Y [4], [6]). D_p を図 5 の Kirby 図式で定まる 4 次元多様体とする. また, X を C^∞ 4 次元多様体で D_p を含むものとし, $X_{(p)}$ を X の rational blowdown とする. このとき D_p の中に埋め込まれた W_{p-1} で次の性質を満たすものが存在する: X から W_{p-1} を取り除き f_{p-1} で W_{p-1} を貼り直すことで得られる多様体と $X_{(p)} \# (p-1) \overline{\mathbf{CP}^2}$ は微分同相.

図 5: D_p

5 Disjoint corks and involutions of corks

4 次元多様体の中での cork の配置や, 境界の involution の選び方と cork の構造の関係などは興味深い問題である. 本節では前節の応用として以下に挙げる例を構成する. 詳しくは [6] を参照.

次の定理は任意の有限個数の cork が 4 次元多様体の中で disjoint に配置されうることを示している.

定理 5.1 (Akbulut-Y [6]). 任意の $n \geq 1$ に対し, ある $n+1$ 個の単連結閉 C^∞ 4 次元多様体 X_i ($0 \leq i \leq n$) と, X_0 の cork (C_i, τ_i) ($1 \leq i \leq n$) で次の性質をみたすものが存在する.

- (1) X_i ($0 \leq i \leq n$) は互いに同相だがどの 2 つも微分同相でない.
- (2) X_i ($1 \leq i \leq n$) は X_0 から C_i を取り除き, C_i を τ_i で貼り直すことで得られる.
- (3) C_1, \dots, C_n は X_0 の中で disjoint.

次の定理は、可縮な多様体の埋め込みを固定していてもその境界の involution を取り替えることで 4 次元多様体の cork の構造が変わりうることを示している。

定理 5.2 (Akbulut-Y [6]). 任意の $n \geq 1$ に対し、ある $n+1$ 個の単連結閉 C^∞ 4 次元多様体 X_i ($0 \leq i \leq n$) と、 X に埋め込まれているコンパクトで可縮な Stein 4 次元多様体 C 、そして ∂C の互いに異なる n 個の involution τ_i ($1 \leq i \leq n$) で、次の性質をみたすものが存在する。

- (1) X_i ($0 \leq i \leq n$) は互いに同相だがどの 2 つも微分同相でない。
- (2) X_i ($1 \leq i \leq n$) は X_0 から C を取り除き、 C を τ_i で貼り直すことで得られる。従って、 (C, τ_i) ($1 \leq i \leq n$) は X_0 の cork である。但し、 C の X_0 への埋め込みは i に依らない。(つまり、 ∂C の involution を変えるだけで異なる微分構造が得られる。)

定理 5.1 の証明の概略. $p_1, \dots, p_n \geq 2$ とし、 $X_0 := E(p_1 + p_2 + \dots + p_n) \# n \overline{\mathbf{CP}^2}$ と定める。[16], [17] での多様体の構成の類似を行うことにより、 X_0 の中に $D_{p_1}, D_{p_2}, \dots, D_{p_n}$ と cusp ファイバーを disjoint に配置できる。ここで、 X_0 から D_{p_i} に含まれる C_{p_i} を rational blowdown して得られる多様体を X'_i ($1 \leq i \leq n$) とする。さらに、 $X_i := X'_i \# (p_i - 1) \overline{\mathbf{CP}^2}$ ($1 \leq i \leq n$) とする。ここで p_1, \dots, p_n を互いに異なる数にとっておく。すると、Fintushel-Stern による Seiberg-Witten 不変量の公式を用いることで、 X_0, X_1, \dots, X_n は互いに異なる Seiberg-Witten 不変量を持つことがわかる (SW 基本類の数が違う)。よって X_0, X_1, \dots, X_n はどの 2 つも微分同相ではない。一方、定理 4.4 より、 X_i ($1 \leq i \leq n$) は X_0 から D_{p_i} の中の W_{p_i-1} を取り除き f_{p_i-1} で W_{p_i-1} を貼り直すことで得られる。従って X_i ($1 \leq i \leq n$) は X_0 と同相であり、また上記の W_{p_i-1} ($1 \leq i \leq n$) は X_0 の中で互いに disjoint である。 \square

定理 5.2 の証明の概略. $p_1, \dots, p_n \geq 2$ を互いに異なる自然数とし、 X_i ($0 \leq i \leq n$) を定理 5.1 の証明と同様に定める。ここで、 C を境界和 $W_{p_1-1} \natural W_{p_2-1} \natural \dots \natural W_{p_n-1}$ と定め、 ∂C の involution $\tau_i : \partial C \rightarrow \partial C$ を C の Kirby 図式における W_{p_i-1} の成分の \cdot (ドット) と 0 を入れ替えることで誘導されるものとする (図 6 参照)。すると定理 5.1 の証明から、 X_i ($1 \leq i \leq n$) は X_0 から C を取り除き τ_i で C を貼り直すことで得られることがわかる。このとき C の埋め込みは i に依らないことに注意。 \square

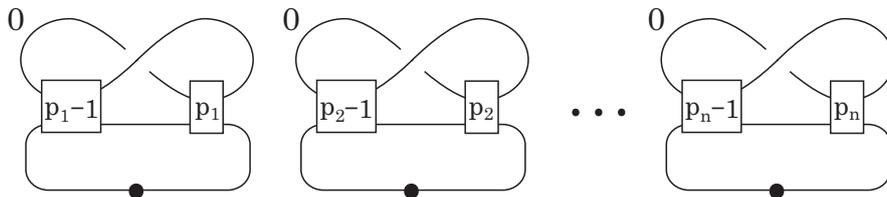


図 6: $W_{p_1-1} \natural W_{p_2-1} \natural \dots \natural W_{p_n-1}$

6 Knotted corks

我々は、[16] で構成した多様体と第 4 節で得た rational blowdown と cork の関係を用いることで、同一の cork (の貼り直し) により多様体の上の 2 つの異なる微

分構造が得られる例を [4] で構成した. この例から「4次元多様体の上の全ての微分構造は同一の cork で得られるか?」という問題が自然に考えられる. そこで本節では Fintushel-Stern [12] が導入した knot surgery という手術を用いて, 4次元多様体の上の無限個の互いに異なる微分構造が同一の cork から得られる例を構成する. 詳しくは [6] を参照.

定理 6.1 (Akbulut-Y [6]). ある無限個の単連結閉 C^∞ 4次元多様体 $X_i (i \geq 0)$ と, X_0 の cork (C, τ) で次の性質をみたすものが存在する,

- (1) $X_i (i \geq 0)$ は互いに同相だがどの2つも微分同相ではない.
- (2) $X_i (i \geq 1)$ は X_0 から C を取り除き, C を τ で貼り直すことで得られる.

従って, C の X_0 への無限個の異なる埋め込みで, 互いにアイトピックでないものが存在する.

証明の概略. 定理 3.4 の証明の際に用いた楕円曲面の Kirby 図式の変形と同様にして, $E(n) \# \overline{\mathbf{CP}^2} (k \geq 2)$ の中に次の (a), (b) をみたす W_1 を見つけることができる.

(a) W_1 は $E(n)$ の cusp ファイバーの近傍と disjoint.

ここで, $E(n) \# \overline{\mathbf{CP}^2} (n \geq 2)$ から W_1 を取り除き, f_1 で W_1 を貼り直した多様体を X_0 とおく. このとき (a) から X_0 は cusp 近傍を含んでいることに注意.

(b) X_0 は $S^2 \times S^2$ を連結和成分に持ち, この $S^2 \times S^2$ の成分は cusp 近傍と disjoint.

K を S^3 の結び目とする. さらに $E(n)_K \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ を, $E(n)$ の cusp 近傍で K に対応する knot surgery を行うことで得られる多様体とする. そして X_{0K} を, X_0 の cusp 近傍で K に対応する knot surgery を行うことで得られる多様体とする. このとき (a) より, $E(n)_K \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ は X_{0K} から W_1 を取り除き f_1 で W_1 を貼り直すことで得られることがわかる. ところで Akbulut [2] と Auckly [8] の定理により, knot surgery をした多様体に $S^2 \times S^2$ を連結和したものは, knot surgery をする前の多様体に $S^2 \times S^2$ を連結和したものと微分同相である. 従って (b) より X_{0K} は X_0 と微分同相になる. よって, $E(n)_K \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ は X_0 から W_1 を取り除き f_1 で W_1 を貼り直すことで得られる.

ここで S^3 の無限個の結び目 $K_i (i \geq 1)$ をどの2つも Alexander 多項式が異なるようにとっておき, $X_i := E(n)_{K_i} \# \overline{\mathbf{CP}^2}$ と定める. Fintushel-Stern [12] による Seiberg-Witten 不変量の公式から, $X_i (i \geq 1)$ はどの2つも Seiberg-Witten 不変量が異なり, かつ, どの Seiberg-Witten 不変量も消えていないことがわかる. 一方, X_0 は $S^2 \times S^2$ を連結和成分に持つので Seiberg-Witten 不変量は消えている. 従って, $X_i (i \geq 0)$ はどの2つも微分同相ではないことがわかる. また, 上で述べたことから, $X_i (i \geq 1)$ は X_0 から W_1 を取り除き f_1 で W_1 を貼り直すことで得られるので, $X_i (i \geq 1)$ は X_0 と同相である. \square

注意 6.2. 上の証明では $(C, \tau) = (W, f)$ の場合に行ったが, (W_n, f_n) を含む様々な cork に対しても定理 6.1 を証明することができる.

7 Small exotic Stein 4-manifolds

コンパクト Stein 4次元多様体とは, ある性質をみたす境界付きのコンパクト C^∞ 4次元多様体のことで, 俗に境界付き複素曲面と呼ばれている. また, Kirby 図式

による次の特徴付けも与えられている：境界付きのコンパクト C^∞ 4次元多様体がコンパクト Stein 4次元多様体であるのは、それが $\#mS^1 \times S^3$ ($m \geq 0$) における (Thurston-Bennequin 数 -1) の framing をもつ Legendrian 絡み目に沿って 2ハンドルを $\#mS^1 \times D^3$ ($m \geq 0$) に接着した多様体と微分同相であるときに限る．詳しくは [14] を参照．

境界の 3次元多様体を固定した時のコンパクト Stein 4次元多様体の微分構造の一意性はいくつかの条件の下で知られている．例えば、 S^3 を境界に持つコンパクト Stein 4次元多様体は D^4 のみである．一方、境界の 3次元多様体は同じだが互いに同相でない無限個のコンパクト Stein 4次元多様体が構成されている．そこで、互いに同相だが微分同相でないコンパクト Stein 4次元多様体の存在問題が考えられる．これに関して Fintushel-Stern の knot surgery を用いて次の結果が最近得られている．

定理 7.1 (Akhmedov-Etnyre-Mark-Smith [7]). 無限個の単連結コンパクト Stein 4次元多様体で、互いに同相だがどの 2つも微分同相でないものが存在する．

彼らの例では第 2ベッチ数 b_2 に関する考察がないが、4次元多様体のエキゾチック微分構造の構成は b_2 が小さいときが難しい．我々は cork に 2ハンドルを接着するという彼らとは異なる手法で次の例を与えた．

定理 7.2 (Akbulut-Y [5]). 任意の $n \geq 1$ に対し、 $b_2 = n$ をみたす 2つの単連結コンパクト Stein 4次元多様体で、互いに同相だが微分同相でないものが存在する．

この定理は次の命題から従う．

命題 7.3 ([5]). 境界付き単連結コンパクト C^∞ 4次元多様体 $S_1(m, n, p, q)$ と $S_2(m, n, p, q)$ を図 7 のように定め、次の (1), (2), (3) のいずれかが成立しているとする．

- (1) $n \geq 4, p \geq 1, q = 0, m \leq p^2 - 3p$;
- (2) $1 \leq n \leq 3, p \geq 3, q = 0, m \leq p^2 - 3p$;
- (3) $n \geq 1, p, q \geq 1, 0 \leq m \leq p^2 - 3p$.

このとき $S_1(m, n, p, q)$ と $S_2(m, n, p, q)$ は、 $b_2 = q + 1$ をみたす互いに同相だが微分同相でない 2つの単連結コンパクト Stein 4次元多様体である．

証明の概略. $S_1(m, n, p, q)$ と $S_2(m, n, p, q)$ が $b_2 = q + 1$ をみたす単連結コンパクト Stein 4次元多様体であることはそれらの Kirby 図式からわかる． $S_2(m, n, p, q)$ は $S_1(m, n, p, q)$ から W_n を取り除き f_n で W_n を貼り直すことで得られるので、 $S_2(m, n, p, q)$ は $S_1(m, n, p, q)$ と同相である．

$S_1(m, n, p, q)$ と $S_2(m, n, p, q)$ が微分同相でないことは次のようにして証明する．楕円曲面の Kirby 図式を変形することで、十分大きい k, l に対しては $S_1(m, n, p, q)$ を $E(k) \# l \overline{\mathbf{CP}^2}$ の“良い”部分多様体として実現できる．ここで簡単のため $q = 0$ の場合を考える． $E(k) \# l \overline{\mathbf{CP}^2}$ の“良い”部分多様体に対して adjunction 不等式を用いると、 $S_1(m, n, p, 0)$ の中の閉曲面で $H_2(S_1(m, n, p, 0); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元を代表するものの種数は $\frac{(p-1)(p-2)}{2} + 1$ 以上であることがわかる．一方、 $S_2(m, n, p, 0)$ の中の種数 $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ の閉曲面で、 $H_2(S_2(m, n, p, 0); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元を代表するものの存在が $S_2(m, n, p, 0)$ の Kirby 図式からわかる．従って、 $S_1(m, n, p, 0)$ と $S_2(m, n, p, 0)$ が微分同相でないことがわかる． $q \neq 0$ のときも同様に閉曲面の種数の評価を行うことで示せる． \square

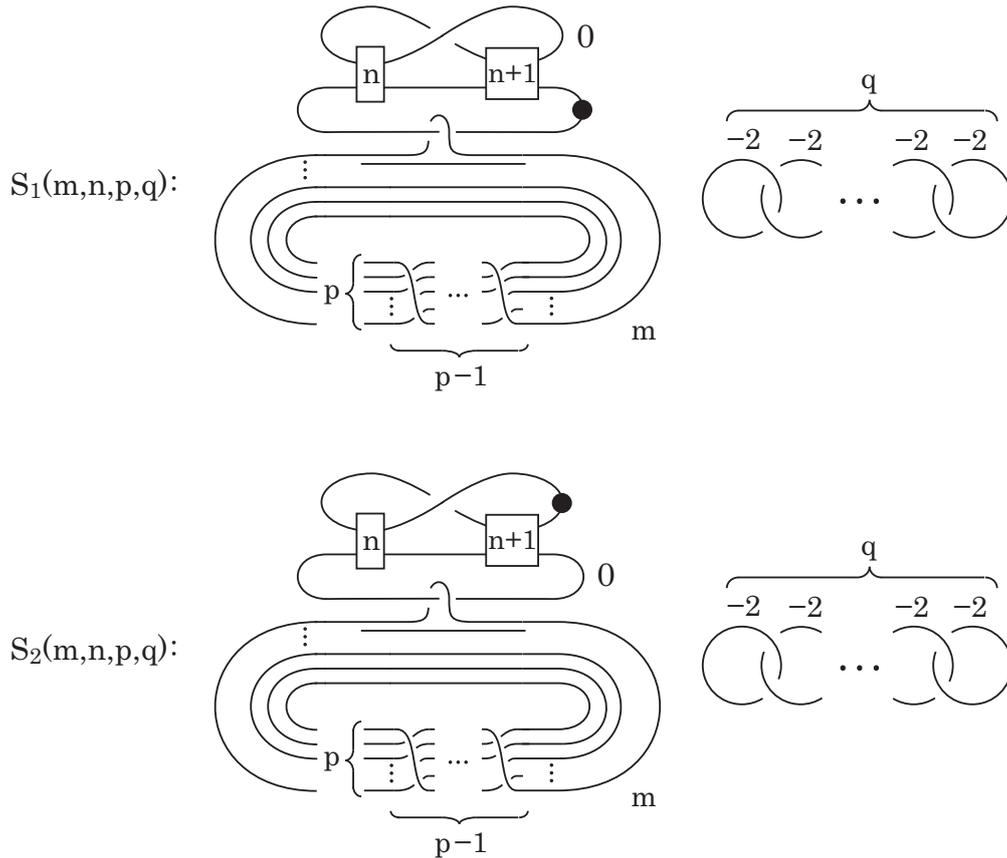


図 7:

8 Plug

我々が Kirby 図式を変形して cork の研究を行っているとき、様々な状況で cork の貼り直しが、cork とは異なるが少し似ている対象 (plug と名付けた) の貼り直しに対応していることに気づいた。そこで、本節では plug について少し述べる。詳しくは [4], [5], [6] を参照。

定義 8.1. P を境界付きのコンパクト C^∞ (Stein) 4次元多様体, $\tau: \partial P \rightarrow \partial P$ を C^∞ involution とする。さらに, C^∞ 4次元多様体 X が P を含むとする。

(1) (P, τ) が X の plug であるとは、以下の (a), (b) をみたすときをいう。

(a) X から P を取り除き τ で P を貼り直すことで得られる 4次元多様体 Y と X が同相だが微分同相でない。

(b) τ は P の自己同相写像に拡張できない。

(2) (P, τ) が plug であるとは、 (P, τ) が何らかの 4次元多様体の plug であるときをいう。

plug の例としてすぐに思いつくのは $T^2 \times D^2$ である (0-log transform)。しかし単連結のものの方が興味深い。次に挙げる例は rational blowdown を行う際によく現れるものである。

定義 8.2. $W_{m,n}$ ($m \geq 1, n \geq 2$) を図 8 で定まる単連結コンパクト Stein 4 次元多様体とし, $f_{m,n} : \partial W_{m,n} \rightarrow \partial W_{m,n}$ を $W_{m,n}$ の図式の \cdot (ドット) と 0 を入れ替えることで誘導される involution とする.

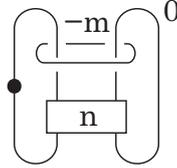


図 8:

定理 8.3 (Akbulut-Y [4]). $(W_{m,2n}, f_{m,2n})$ と $(W_{m,2n+1}, f_{m,2n+1})$ は $E(2n) \# m \overline{\mathbb{C}P^2}$ の plug である ($m, n \geq 1$).

証明の概略. この証明は定理 3.4 と同様である. 但し, $f_{m,n}$ が $W_{m,n}$ の自己同相写像に延びないことは次のようにして示す. まず適切に 2 ハンドルを $W_{m,n}$ に接着する. そして得られた多様体から $W_{m,n}$ を取り除き $f_{m,n}$ で $W_{m,n}$ を貼り直す. 交叉形式を比較することで, 位相型が変化したことをみればよい. \square

$W_{m,n}$ ($m \geq 1, n \geq 2$) に対しても第 3 ~ 7 節で得た定理に対応するものを得ることができる. 特に, 第 3 ~ 6 節の定理 (の証明) における W_n の貼り直しは $W_{m,n}$ の貼り直しと直接対応している. また第 7 節については, cork が果たした役割と同様に, plug もその上に 2 ハンドルを適切に接着することで, 同相だが微分同相でないコンパクト (Stein) 4 次元多様体の構成を行うことができる.

References

- [1] S. Akbulut, *A fake compact contractible 4-manifold*, J. Differential Geom. **33** (1991), no. 2, 335–356.
- [2] S. Akbulut, *Variations on Fintushel-Stern knot surgery on 4-manifolds*, Turkish J. Math. **26** (2002), no. 1, 81–92.
- [3] S. Akbulut and R. Matveyev, *A convex decomposition theorem for 4-manifolds*, Internat. Math. Res. Notices 1998, no. 7, 371–381.
- [4] S. Akbulut and K. Yasui, *Corks, Plugs and exotic structures*, Journal of Gökova Geometry Topology **2** (2008), 40–82.
- [5] S. Akbulut and K. Yasui, *Small exotic Stein manifolds*, arXiv:0807.3815, to appear in Commentarii Mathematici Helvetici.
- [6] S. Akbulut and K. Yasui, *Knotting corks*, arXiv:0812.5098, to appear in Journal of Topology.
- [7] A. Akhmedov, J. B. Etnyre, T. E. Mark, and I. Smith, *A note on Stein fillings of contact manifolds*, Math. Res. Letters **15** (2008), no. 6, 1127–1132.

- [8] D. Auckly, *Families of four-dimensional manifolds that become mutually diffeomorphic after one stabilization*, *Topology Appl.* **127** (2003), no. 1-2, 277–298.
- [9] Ž. Bižaca and R. E. Gompf, *Elliptic surfaces and some simple exotic R^4 's*, *J. Differential Geom.* **43** (1996), no. 3, 458–504.
- [10] C. L. Curtis, M. H. Freedman, W. C. Hsiang, and R. Stong, *A decomposition theorem for h -cobordant smooth simply-connected compact 4-manifolds*, *Invent. Math.* **123** (1996), no. 2, 343–348.
- [11] R. Fintushel and R. J. Stern, *Rational blowdowns of smooth 4-manifolds*, *J. Differential Geom.* **46** (1997), no. 2, 181–235.
- [12] R. Fintushel and R. J. Stern, *Knots, links, and 4-manifolds*, *Invent. Math.* **134** (1998), no. 2, 363–400.
- [13] R. Fintushel and R. J. Stern, *Six Lectures on Four 4-Manifolds*, arXiv:math/0610700.
- [14] R. Gompf and A. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, *Graduate Studies in Mathematics*, **20**. American Mathematical Society, 1999.
- [15] R. Matveyev, *A decomposition of smooth simply-connected h -cobordant 4-manifolds*, *J. Differential Geom.* **44** (1996), no. 3, 571–582.
- [16] K. Yasui, *Exotic rational elliptic surfaces without 1-handles*, *Algebr. Geom. Topol.* **8** (2008), 971–996.
- [17] K. Yasui, *Small exotic rational surfaces without 1- and 3-handles*, arXiv:0807.0373

安井 弘一
 京都大学数理解析研究所
 特定研究員 (グローバル COE)
 kyasui@kurims.kyoto-u.ac.jp

多様体となる無限次元空間の位相について

嶺 幸太郎（筑波大学大学院数理物質科学研究科）

本講演では、線形位相空間をモデル空間とする無限次元位相多様体論を概説するという形を通して、筆者がこれまで行ってきた研究について報告する。

なお、位相空間はすべてハウスドルフであるとする。また、とくに断りが無い限り、距離づけ可能な空間と距離空間を区別せずに扱う。

1. 無限次元多様体のモデル空間

まず、 E -多様体と呼ばれる概念を定義する。

定義. E を位相空間とする。各点が、 E の開集合と同相な近傍を持つようなパラコンパクト空間¹を **E -多様体**と定義し、 E を多様体の**モデル空間**と呼ぶ。

つまり、 n -次元多様体と \mathbb{R}^n -多様体は同値である。モデル空間 E がどんな空間であろうとも E -多様体という概念が定義できるが、ここでは E として無限次元空間、とくに線形位相空間となるものを主に考える。² その中でも重要なのはモデル空間としてフレシェ空間³を採用する場合である。

1.1. ヒルベルト多様体.

フレシェ空間の例としては、ヒルベルト空間やバナッハ空間などが挙げられるだろう。次の定理によると、フレシェ多様体を考える上でのモデル空間はヒルベルト空間のみを考えればよいことが分かる。

定理 1.1 (Kadec-Anderson). 稠密度⁴の等しい無限次元フレシェ空間はすべて同相 (\approx) である。⁵

¹任意の開被覆が局所有限な開被覆による細分を持つ位相空間を**パラコンパクト空間**と呼ぶ。距離空間はパラコンパクト空間である。

²ヒルベルト立方体 $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ による Q -多様体も部分的に紹介する。不動点定理により Q は線形位相空間には成り得ない。

³完備距離づけ可能な局所凸線形位相空間を**フレシェ空間 (Fréchet space)**と呼ぶ。

⁴位相空間 X の稠密部分集合の最小濃度を X の**稠密度**と言う。

⁵非可分な場合を含めた証明は [27] にある。

以下, τ を無限濃度, 稠密度 τ の無限次元ヒルベルト空間を $l_2(\tau) = \{ (x_t)_{t \in \tau} \in \mathbb{R}^\tau \mid \sum_{t \in \tau} x_t^2 < \infty \}$ とし, とくに可分な場合について $l_2(\mathbb{N}_0)$ を l_2 と略記する. $l_2(\tau)$ -多様体について次が成り立つ (Henderson-Schori[14]).

定理 1.2. 任意の連結な $l_2(\tau)$ -多様体は開部分空間として $l_2(\tau)$ 自身に埋め込める.

定理 1.3. 連結な $l_2(\tau)$ -多様体どうしが同相であるための必要十分条件はホモトピー同値となることである.

定理 1.4. 任意の連結な $l_2(\tau)$ -多様体 M には, $M \approx |K| \times l_2(\tau)$ となるような局所有限次元多面体 $|K|$ が存在する. ここで, $|K|$ の位相は距離位相によるものとする.

無限次元多様体のモデル空間の候補を考える場合, 上述の定理群に類似するような良い性質を満たす多様体であることが望ましい. 例えば, ノルム空間 E が $E \approx E^{\mathbb{N}}$ または $E \approx E_f^{\mathbb{N}}$ を満たすならば, 定理 1.2 及び 1.3 と同様の性質が E -多様体においても成立することが知られている. ここで, $E_f^{\mathbb{N}}$ は基点 $* \in E$ に関する σ -積を表す.⁶

次に, 普遍空間としての $l_2(\tau)$ -多様体の特徴づけを述べよう. ある位相空間のクラス \mathcal{C} に対して, 位相空間 X が \mathcal{C} の**普遍空間**であるとは, \mathcal{C} の任意の元が X に埋め込めることとする. ところがこの定義は若干曖昧で, 正確には, より強い意味での定義が必要となる.⁷ 議論の深追いを避けるため定義の詳細は省くが, 次の定理を見れば, 完備距離空間の“ある意味”での普遍空間として $l_2(\tau)$ -多様体の特徴づけられることが分かるだろう.

定理 1.5 (Toruńczyk [27]). 完備距離 ANR 空間 M が $l_2(\tau)$ -多様体となるための必要十分条件は, 稠密度 τ 以下の任意の完備距離空間 X に対して, X から M への任意の連続写像が閉埋蔵写像で近似できることである.⁸

ANR については次項で説明する.

1.2. ANR と ANE.

定理 1.5 から分かるように, 無限次元位相多様体論では, 空間が ANR であることを前提として議論を進めることが多い.

定義. 距離空間 X が **ANR (absolute neighborhood retract)** であるとは, X を閉集合として含む任意の距離空間 Y に対して, Y における X の近傍 U およびレトラクション $r : U \rightarrow X$ (すなわち $r|_X = \text{id}_X$) が存在することである. とくに U として常に Y が取れるとき, X は **AR (absolute retract)** であると言う.

⁶つまり $E_f^{\mathbb{N}} = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}} \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } x_n = * \}$ である.

⁷例えば, 普遍空間自身は \mathcal{C} に属するべきか, 埋め込みによる像は閉集合になり得るか, より特別な埋め込みがあるかといった様々な要請に応じて, 普遍空間の定義がいくつかある.

⁸論文 [27] における主張では Z -埋蔵写像で近似できるという条件であったが, 定理 1.5 の状況下では閉埋蔵写像による近似条件と同値になることが知られている.

距離空間において, ANR(AR) は次で定義される ANE(AE) と同値 (すなわち, ANR \Leftrightarrow 距離づけ可能な ANE) である事が知られている. (\Leftarrow) は定義より直ちに分かるが, (\Rightarrow) を示すには, 任意の距離空間には自らを閉集合として埋め込めるノルム空間 (これは AE である) が存在することを用いる.

定義. 位相空間 X が ANE (absolute neighborhood extensor) であるとは, 任意の距離空間 Y およびその閉集合 A , 連続写像 $f: A \rightarrow X$ に対して, Y における A の近傍 U および f の連続な拡張 $\tilde{f}: U \rightarrow X$ (すなわち $\tilde{f}|_A = f$) が存在することである. とくに U として常に Y が取れるとき, X は AE (absolute extensor) であると言う.

ANE の有限積空間は ANE, AE の積空間は AE である. 局所凸線形位相空間は AE であり, その凸部分空間は ANE であることが知られている. また, 局所的に ANE なパラコンパクト空間は ANE である. したがって, モデル空間 E が ANE ならば, E -多様体も ANE となる. 本講演で考えるモデル空間はすべて ANE である.

ANE との同値性を用いると, ANR ならば局所可縮であることが分かる. 一般には逆は成り立たないが, 有限次元⁹ならば逆も成り立つ.

1.3. 完備距離が入らないモデル空間.

完備距離が入らない多様体にも $l_2(\tau)$ -多様体と似たような特徴づけがある. まず, 次に挙げるような, いくつかの位相的クラスに対する普遍空間を考えよう. ここで, $l_2^f = \{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in l_2 \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } x_n = 0 \}$, $Q = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ とする.

- l_2^f — σ -有限次元コンパクト距離空間の普遍空間.
- $l_2^f \times Q$ — σ -コンパクト距離空間の普遍空間.
- $l_2 \times l_2^f$ — 可分な σ -完備距離空間の普遍空間.

こういった空間をモデル空間とする多様体も, 次の定理によって “ある種” の普遍空間として特徴づけることができる. 各用語の詳細は, いくつかの定義が繁雑なため省略するが, まず, モデル空間として吸収的集合 (absorbing set) と呼ばれる特別な普遍空間を定義し, “強普遍” という概念を用いることで多様体の特徴づけを与えているわけである.

定理 1.6 (Theorem 2.5 of [17]). 閉集合に関する有限和や遺伝性で閉じた位相的クラス \mathcal{C} が任意の $n \in \mathbb{N}$ について τ 個の n 次元立方体の直和空間を含むとする. このとき, \mathcal{C} に関する $l_2(\tau)$ の吸収的集合を E とすれば, ANR 空間 X が E -多様体となるための必要十分条件は X が \mathcal{C} に関して強普遍的な強 Z_σ 空間であり, かつ $X \in \mathcal{C}_\sigma$ となることである.

⁹可算次元 (有限次元空間の可算和で表わせる空間), あるいは, より一般に距離づけ可能な C -空間でもよい [12].

さて、ここで、開集合 (閉集合) の可算共通部分 (可算和) で書ける集合を G_δ -集合 (F_σ -集合) と呼び、いかなる距離空間に埋め込んでも、その空間の中で G_δ -集合 (F_σ -集合) となるような距離空間を **絶対 G_δ -空間 (絶対 F_σ -空間)** と呼ぶことにしよう。完備距離空間が絶対 G_δ -空間と同値である事はよく知られている事実である。コンパクト距離空間は絶対閉-空間であり、更に、 σ -コンパクト距離空間は可分な絶対 F_σ -空間と同値になる。蛇足ではあるが、絶対開-空間は空集合のみである。

先に挙げた普遍空間の例とこれらの事実を合わせた一般化を考えることで、Bestvina-Mogilski[6] は、可分な絶対ボレル空間¹⁰の各ボレル階層に対する普遍空間が存在することを示した。更に、Sakai-Yaguchi[25] や筆者[17] の研究により、非可分な絶対ボレル空間に対しても同等の事実が証明され、これらの普遍空間をモデルとする多様体も定理 1.2 や 1.3, 1.4 にあるような性質を満たすことが分かっている。

また、可分な空間については、解析集合¹¹やその補集合、それらの一般化である射影集合の各階層に対する普遍空間の存在が Cauty[7] により得られている。

1.4. LF-空間と箱位相.

次に、距離づけ不可能なモデル空間の例として、LF-空間と呼ばれる線形位相空間を挙げる。LF-空間とは、次で定義される、局所凸線形位相空間におけるフレシェ空間の帰納的極限 (inductive limit) のことである。

定義. フレシェ空間の増大列 $F_1 \subsetneq F_2 \subsetneq F_3 \subsetneq \dots$ に対して、各 F_n から $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ への自明な写像が連続となるような F の局所凸線形位相空間の位相の中で最強のものを導入した局所凸線形位相空間 F を **LF-空間** と呼び、 $\text{ind-lim } F_n$ と書く。

注意したいのは、位相空間における帰納的極限 $\varinjlim F_n$ ¹² と $\text{ind-lim } F_n$ の位相は一般には一致せず、 $\varinjlim F_n$ のほうが強いということである。二つの位相が一致するための必要十分条件は各 F_n が局所コンパクト (すなわち有限次元) となることであり、実際、局所コンパクトでない F_n が一つでもあると和の操作が $\varinjlim F_n$ では連続にならず、したがって $\varinjlim F_n$ は位相群にすらならない。

LF-空間は、積集合に“箱位相”と呼ばれる特殊な積位相を入れた空間の部分空間と見ることができる。

¹⁰いかなる距離空間に埋め込んでも、その空間の中でボレル集合となるような距離空間を **絶対ボレル空間 (absolute Borel space)** と呼ぶ。

¹¹無理数空間 $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ の連続像となる距離空間を **analytic set (解析集合)** と言い、可分完備距離空間における analytic subset の補集合を **coanalytic set** と言う。更に、coanalytic set の連続像となる距離空間を…というようにして、帰納的に射影集合 (projective set) の階層が定義されていく。analytic かつ coanalytic な空間全体は、ちょうど絶対ボレル空間全体と一致する。

¹² $U \subset \varinjlim F_n$ が開集合であることを、各 $U \cap F_n$ が F_n の開集合であることと定義する位相のこと。

定義. 積集合 $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$ において, 集合族 $\{\prod_{n \in \mathbb{N}} U_n \mid U_n \text{ は } X_n \text{ の開集合}\}$ で生成される位相を**箱位相**と呼び, この箱位相空間を $\square X_n$ と書く. 更に, 基点 $*_n \in X_n$ に対して定義される部分空間 $\square X_n = \{(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \square X_n \mid \text{有限個の } n \in \mathbb{N} \text{ を除いて } x_n = *_n\}$ を**弱箱位相空間**と呼ぶ.

記号の簡略化のために上の定義は可算無限積に限っているが, 本来は任意の積集合について定義されるものである. 弱箱位相空間は集合としては σ -積と等しい. 有限積の場合, 箱位相空間および弱箱位相空間は通常の積位相空間と一致する. 本講演では X_n として主に線形空間を考えるので, 基点 $*_n$ は原点とする.

箱位相空間の位相は複雑で, $\square l_2$ ですら正規空間にはならず, 連結でも局所連結でもなく, 特に線形位相空間ではない. しかしながら, その部分空間である弱箱位相空間は比較的良いふるまいをする. 実際, フレシェ空間の有限積による増大列,

$$F_1 \subset F_1 \times F_2 \subset F_1 \times F_2 \times F_3 \subset \cdots,$$

に関する LF-空間は弱箱位相空間に一致する:

命題 1.7. $\text{ind-lim} \prod_{i=1}^n F_i = \square F_n$. とくに, $\varinjlim \mathbb{R}^n = \text{ind-lim} \mathbb{R}^n = \square \mathbb{R}$.

Mankiewicz によれば, 稠密度が等しい LF-空間の位相は 2 種類以下に分類される:

定理 1.8 (Mankiewicz[16]). 可分な LF-空間は, $\square l_2$ および $\square \mathbb{R}$ のいずれかと同相になる. 更に, 稠密度が非可算濃度 τ の LF-空間は, $\square l_2(\tau)$ および $\square l_2(\tau_n)$ のいずれかと同相になる. ここで, 各 τ_n は $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 < \cdots$ および $\sup_{n \in \mathbb{N}} \tau_n = \tau$ を満たす濃度とする.¹³

系 1.9. 任意の無限濃度 τ について, $\square l_2(\tau) \approx l_2(\tau) \times \square \mathbb{R}$.

したがって, LF-空間をモデル空間とする多様体 (以下, これを総称して**LF-多様体**と呼ぶ) を考える場合, 位相的には 2 種類のモデル空間のみを考えればよい. $\square \mathbb{R}$ -多様体については, Heisey[13] や Sakai[23] の研究によって定理 1.2 や 1.3, 1.4 と同等の性質が成り立つことが分かっている. それ以外の LF-多様体についてはそこまでは分かっているが, LF-空間の開部分空間に対して次が得られている.

定理 1.10 (M-Sakai[18]). $\square l_2(\tau)$ の開部分空間どうしが同相であるための必要十分条件はホモトピー同値となることである.

定理 1.11 (M-Sakai[19]). LF-空間 F の任意の開部分空間 U には, $U \approx |K| \times F$ となるような局所有限次元多面体 $|K|$ が存在する. ここで, $|K|$ の位相は距離位相によるものとする.

¹³濃度の列 τ_n の取り方によらずに $\square l_2(\tau_n)$ の位相は決まる.

2. いくつかの無限次元多様体の例

与えられた多様体の性質を研究することは重要であるが、位相空間がいかなる条件を満たせば多様体となり得るかという問題もまた興味深い。前節では、やや天下りの無限次元多様体のモデル空間を紹介してしまった。それでは、実際に、どのような数学的対象が、これらをモデル空間とする多様体になり得るのであろうか。

実は、1854年に Riemann[21] が多様体の概念を提唱した際、無限次元多様体の存在について次のように言及している。¹⁴

“位置の規定が有限個の量規定ではなく、無限数列をなす量規定、あるいは連続多様体をなす量規定を要求するような多様体もある。そのような多様体をなすのは、例えば、ある与えられた領域に対する [この領域を定義域とする] 関数の可能な規定 や、空間図形の可能な形 などである。”

つまり、無限次元多様体の候補には、関数の空間や図形の空間が容易に挙げられるわけである。それ以外の例を考えるならば、筆者は、普遍空間として定義される空間の多様体性が思いつくが、これについては既に前節で述べている。本節では、図形の空間として冪空間を、関数の空間として連続関数空間を、一体どのような条件の下で多様体になるのか考察する。

2.1. 冪空間.

本項では、位相空間 X は2点以上からなる集合とし、 X の閉集合全体を $\text{Cld}(X)$ で表す。また、その部分集合として X のコンパクト集合全体を $\text{Comp}(X)$ 、 X の有限集合全体を $\text{Fin}(X)$ と書こう。今回は紹介できないが、これ以外にも有界閉集合全体や凸閉集合全体、ペアノ連続体¹⁵全体などを考える場合もある。

ヴェトリス位相をはじめとして、 $\text{Cld}(X)$ にはいくつかの位相が定義されている。ここではハウスドルフ距離による位相を導入しよう。

定義. 距離空間 (X, d) に対して、次で定義される $\text{Cld}(X)$ における距離 d_H を**ハウスドルフ距離**と呼ぶ。

$$d_H(A, B) = \inf\{ \varepsilon > 0 \mid B \subset N(A, \varepsilon) \text{ かつ } A \subset N(B, \varepsilon) \}.$$

ここで、 $N(A, \varepsilon)$ は集合 A の ε -開近傍を表す。

ハウスドルフ距離による位相は、 X の距離 d に依存する点に注意したい。つまり、 $(X, d) \approx (X, d')$ だからといって $(\text{Cld}(X), d_H) \approx (\text{Cld}(X), d'_H)$ とは限らないということである。なお、部分空間 $\text{Comp}(X)$ については距離によらずに位相が決まる。

¹⁴引用中の下線部は嶺によるもので、邦訳は [22] による。

¹⁵閉区間 $\mathbf{I} = [0, 1]$ の連続像となる空間を**ペアノ連続体**と言う。これは局所連結な連結コンパクト距離空間と同値である。

冪空間の多様体性に関する有名な結果としては、例えば次の定理が挙げられよう。冪空間は多様体になるというよりも、モデル空間そのものになることが多い。

定理 2.1 (Curtis-Schori[11]). $\text{Comp}(X)$ が Q と同相であるための必要十分条件は X がペアノ連続体となることである。

定理 2.2 (Curtis[8]). $\text{Comp}(X)$ が l_2 と同相であるための必要十分条件は X が局所連結な連結完備距離空間であり、かつ X の各点がコンパクトな近傍を持たないことである。

(X, d) がコンパクトでない場合は $\text{Cld}(X)$ の位相的分類はよく分かっておらず、とくに完備距離空間でない場合は $\text{Comp}(X)$ ですら扱いが難しい。例えば、 X が σ -コンパクトな場合でも $\text{Comp}(X)$ は絶対ボレル空間ではない：

命題 2.3 (Banach-Cauty[2]). $\text{Comp}(l_2^f)$ は coanalytic クラスの普遍空間 Π_2 と同相である。¹⁶

有限部分集合による冪空間については次が知られている。

定理 2.4 (Curtis-Nhu[10]). $\text{Fin}(X)$ が l_2^f と同相であるための必要十分条件は X が局所連結な連結 σ -コンパクト・強可算次元¹⁷距離空間となることである。

X のボレル階層が高くなると $\text{Fin}(X)$ の特徴づけを探すのは難しく、定理 2.4 のような綺麗な結果は得られていない。それでも特定の位相空間に関する冪空間の位相的決定は興味深く、例えば、 $\text{Fin}(Q) \approx \text{Fin}(l_2^f \times Q) \approx l_2^f \times Q$ (Curtis[9]), $\text{Fin}(l_2(\tau)) \approx l_2(\tau) \times l_2^f$ (Yaguchi[30]) などが得られている。更に、 X をある位相的クラスの普遍空間と見なし一般化することで次を得る。

定理 2.5 (M-Sakai-Yaguchi[20]). E を 1.3 項で挙げた完備距離づけ可能でない普遍空間とし、 M を連結な E -多様体とする。このとき $\text{Fin}(M)$ は E と同相である。

2.2. 連続関数空間.

位相空間 X から Y への連続写像全体を $C(X, Y)$ で表す。 $C(X, Y)$ の位相としては、コンパクト開位相や一様収束位相, limitation 位相, グラフ位相などいくつか与えられており、各位相の強弱は次のようになっている (ただし、一様収束位相は Y が距離空間のときに定義される位相である)：

コンパクト開位相 \subset 一様収束位相 \subset limitation 位相 \subset グラフ位相.

¹⁶Banach-Cauty[2] は必要十分条件も与えている。すなわち、 $\text{Comp}(X) \approx \Pi_2 \Leftrightarrow X$ は第 1 類かつ局所・連続体-連結な連結 coanalytic set. ここで、距離空間 X が**連続体-連結 (continuum-connected)** であるとは、 $\{x, y\}$ を含む X の連結コンパクト部分集合 (連続体) の存在が任意の 2 点 $x, y \in X$ について言えることである。更に、連続体-連結な部分集合による開基を持つ空間を**局所・連続体-連結 (locally continuum-connected)** であると定義する。

¹⁷有限次元開部分空間の可算和で書ける空間を**強可算次元空間**と言う。

これらの位相は, X がコンパクトでない場合に本質的に意味を持つ. すなわち, 定義域 X がコンパクトならば四つの位相はすべて一致する.

2.2.1. コンパクト開位相.

定義. X のコンパクト部分集合 K および Y の開集合 U を動かして定義される集合たち $[K, U] = \{f \in C(X, Y) \mid f(K) \subset U\}$ によって生成される $C(X, Y)$ 上の位相を**コンパクト開位相**と言う.

定義域 X が局所コンパクトであると集合 $[K, U]$ による情報量は豊かになり, コンパクト開位相は位相的に扱いやすい. X や Y を最も一般化した場合における $C(X, Y)$ の多様体性については次の定理がある.

定理 2.6 (Sakai [24]). 有限集合でないコンパクト距離空間 X および孤立点を持たない可分完備距離 ANR 空間 Y について, $C(X, Y)$ はコンパクト開位相において ℓ_2 -多様体である.

X がコンパクトでない場合は $C(X, Y)$ の ANR 性が問題になる. 例えば, X が CW 複体の場合については Smrekar-Yamashita[26] を見よ.

2.2.2. 一様収束位相.

定義. (Y, d) を距離空間とする. **上限距離**¹⁸ $d_S(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x)) \mid x \in X\}$ で定義される $C(X, Y)$ 上の位相を**一様収束位相**と言う.

ハウスドルフ距離と同様に, この位相も Y の距離に依存することに注意したい. $C(X, Y)$ の ANR 性を確保するために, 次の定理では, Y の条件に ANRU と呼ばれる性質を与えているが, ここでは概念の深入りはやめておこう.

定理 2.7 (Yamashita [31]). コンパクトでない可分距離空間 X および可分完備距離 ANRU 空間 Y に対して, Y の各連結成分の直径による下限が正数であるならば $C(X, Y)$ は一様収束位相において $\ell_2(2^{\aleph_0})$ -多様体となる.

2.2.3. limitation 位相.

定義. Y の開被覆 \mathcal{U} に対して, $\{f(x), g(x)\} \subset U$ なる $U \in \mathcal{U}$ の存在が任意の $x \in X$ について言えるとき, $f, g \in C(X, Y)$ は \mathcal{U} **だけ近い** (\mathcal{U} -close) と定義し, f と \mathcal{U} だけ近い $g \in C(X, Y)$ の全体を $\mathcal{U}(f)$ で表す. 集合族 $\{\mathcal{U}(f) \mid \mathcal{U} \text{ は } Y \text{ の開被覆}\}$ を各 $f \in C(X, Y)$ の近傍基とするような $C(X, Y)$ の位相を **limitation 位相**と言う.

¹⁸無限大の値も許す距離である.

連続関数による近似と言え、一様収束位相か limitation 位相による近似を意味するのが一般的であろう。例えば、定理 1.5 の近似は limitation 位相によるものである。つまり、定理 1.5 の必要十分条件は閉埋蔵写像全体が limitation 位相において $C(X, M)$ の中で稠密となることと同値である。

Y が距離空間かつ $f \in C(X, Y)$ が定数関数である場合、 f の近傍は一様収束位相による近傍と一致し、ゆえに f は可算近傍基を持つ。ところが、 f が同相写像である場合、 f は可算近傍基を持たないことが分かる (詳しくは定理 2.11 の後で述べる)。したがって、 $X = Y = \mathbb{R}$ の場合ですら $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ は多様体になり得ない。

2.2.4. グラフ位相.

次で定義されるグラフ位相は、0 階連続的微分可能な関数におけるホイットニー位相とも見なせる。

定義. 各 $f \in C(X, Y)$ に対して、 f のグラフを $\Gamma_f = \{ (x, f(x)) \in X \times Y \mid x \in X \}$ とする。更に、 $X \times Y$ の部分集合 U に対して、グラフが U に含まれるような連続関数全体を Γ_U で表す。グラフ位相とは、集合族 $\{ \Gamma_U \mid U \text{ は } X \times Y \text{ の開集合} \}$ で生成される $C(X, Y)$ 上の位相のことである。

この位相は箱位相と相性が良く、例えば空間の連結性についてその様子が見て取れる。まず、次のような $\square\mathbb{R}$ の部分集合 U を考えると、

$$U = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \square\mathbb{R} \mid \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \right\},$$

これは原点 $(0, 0, 0, \dots) \in \square\mathbb{R}$ の clopen な近傍であり、 U は $(1, 1, 1, \dots) \in \square\mathbb{R}$ を含まない。ゆえに、 $\square\mathbb{R}$ は不連結である。さて、

$$U' = \left\{ f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = 0 \right\},$$

とすると、 U' も原点 (すなわち定数関数 $g = 0$) の clopen な近傍であり、 g 以外の定数関数を含まない。したがって、 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ もまた不連結となる。連結成分を記述するために定義を続けよう。

基点 $* \in Y$ に関する $f \in C(X, Y)$ の台 (support) を次で定義する:

$$\text{supp } f = \text{cl}\{ x \in X \mid f(x) \neq * \}.$$

台がコンパクトな関数全体からなる $C(X, Y)$ の部分空間を $C_c(X, Y)$ と書くことにすると、次の命題が成り立つ。

命題 2.8. $\square\mathbb{R}$ の原点の連結成分は $\square\mathbb{R}$ に一致し、 $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ のグラフ位相における原点の連結成分は $C_c(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ に一致する。

Y が群構造を持つ場合について、 $C_c(X, G)$ が LF-多様体となることを筆者らは示した:

定理 2.9 (Banakh-M-Sakai-Yagasaki [5]). コンパクトでない局所コンパクト可分距離空間 X および可分完備距離 ANR 位相群 G に対して, グラフ位相による関数空間のペア $(C(X, G), C_c(X, G))$ は, ヒルベルト空間の箱位相空間と弱箱位相空間のペアと局所的に同相である. とくに $C_c(X, G)$ は LF-多様体である.

2.3. 連続関数空間の部分空間.

ところで, $C(X, Y)$ には部分空間がいくつかある. 例えば $X = Y = \mathbb{R}$ の場合に限っても, 有界関数空間や PL 写像空間, 微分可能関数空間, 多項式空間など様々な部分空間が考えられよう. 更には, 定理 2.9 にあるように, 全空間 $C(X, Y)$ への埋め込まれ方を熟慮する研究もあり, そのすべてを網羅することは難しい. 今回は, 特別な部分空間として同相群の研究の一部を報告する.

2.3.1. 同相群予想.

位相空間 X に対して, X の同相写像全体からなる群 $H(X)$ を X の**同相群**と呼ぶ. $C(X, X)$ の部分空間として $H(X)$ には様々な位相が入る. 一般に, 各位相において, $H(X)$ が位相群になるための必要十分条件を見つけるのは容易ではない. しかしながら, 後述する同相群はすべて位相群である.

さて, 同相群の多様体性についてであるが, 実はその証明は困難を極め, とくに ANR 性を示すのが難しく, X がコンパクト多様体の場合ですら分かっていない. 次は Homeomorphism group problem と呼ばれる未解決問題である.

問題. n 次元立方体 \mathbf{I}^n ($n \geq 3$) の同相群 $H(\mathbf{I}^n)$ は ANR 空間であるか?

なお, 2次元以下の多様体については同相群の多様体性が示されている:

定理 2.10 (Luke-Mason[15]). コンパクト 2次元多様体の同相群は ℓ_2 -多様体である.

また, コンパクト開位相の場合については, コンパクトでない連結 2次元多様体の同相群が ℓ_2 -多様体となるための必要十分条件が Yagasaki[28] により得られており, その連結成分の位相的分類も完了している (Yagasaki[29]).

2.3.2. グラフ位相における同相群.

グラフ位相に関する同相群の研究は比較的最近になってから始まったものである. 台がコンパクトな同相写像による部分群を $H_c(X)$ と書こう. ただし, 同相写像 h の台は次で定義される集合で, 連続関数版との違いに注意したい:

$$\text{supp } f = \text{cl}\{x \in X \mid f(x) \neq x\}.$$

まず, Banakh により次が示された.

定理 2.11 (Banach[1]). グラフ位相について $H_c(\mathbb{R}) \approx \square l_2$

実は, グラフ位相と limitation 位相は同相群に限ると一致することが分かる. $\square l_2$ は第 1 可算公理を満たさない空間であるから, したがって, limitation 位相における $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ 上の同相写像も可算近傍基を持たないのである.

項 2.2.4 で述べた通りグラフ位相は箱位相空間と相性が良かった. これに対して, コンパクト開位相は通常の積位相空間と相性が良い. その事実を象徴するのが次に紹介する定理である. Γ を 1 次元多面体 (すなわちグラフ) とし, Γ の位相はホワイトヘッド弱位相とする. 向きを保つ¹⁹同相写像による部分群を $H_+(\Gamma)$ と書き, $H_0(\Gamma) = H_+(\Gamma) \cap H_c(\Gamma)$ と定義する.

定理 2.12 (Banach-M-Sakai[3]). コンパクトでない連結 1 次元多面体 Γ について次が成立する:

- コンパクト開位相について $(H_+(\Gamma), H_0(\Gamma)) \approx (l_2^{\mathbb{N}}, l_{2f}^{\mathbb{N}})$,
- グラフ位相について $(H_+(\Gamma), H_0(\Gamma)) \approx (\square l_2, \square l_2)$.

最後に, 定理 2.11 の 2 次元への拡張に関する結果を述べよう.

定理 2.13 (Banach-M-Sakai-Yagasaki[4]). コンパクトでない連結 2 次元多様体 X のグラフ位相による同相群のペア $(H(X), H_c(X))$ は箱位相空間のペア $(\square l_2, \square l_2)$ と局所的に同型である. とくに $H_c(X)$ は LF-多様体である.

REFERENCES

- [1] T. Banach, *On hyperspaces and homeomorphism groups homeomorphic to products of absorbing sets and \mathbb{R}^∞* , Tsukuba J. Math. **23** (1999) 495–504.
- [2] T. Banach and R. Cauty, *Hyperspaces of nowhere topologically complete spaces*, Mat. Zametki **62** (1997), 35–51; translation in Math. Notes **62** (1997), 30–43 (1998).
- [3] T. Banach, K. Mine and K. Sakai, *Box products and homeomorphism groups of infinite graphs*, preprint.
- [4] T. Banach, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Homeomorphism and diffeomorphism groups of non-compact manifolds with the Whitney topology*, arXiv:0802.0337.
- [5] T. Banach, K. Mine, K. Sakai and T. Yagasaki, *Spaces of maps into topological group with the Whitney topology*, arXiv:0904.1458.
- [6] M. Bestvina and J. Mogilski, *Characterizing certain incomplete infinite-dimensional absolute retracts*, Michigan Math. J. **33** (1986), 291–313.
- [7] R. Cauty, *Ensembles absorbants pour les classes projectives*, Fund. Math. **143** (1993), 203–206
- [8] D.W. Curtis, *Hyperspaces homeomorphic to Hilbert space*, Proc. Amer. Math. Soc. **75** (1979), 126–130.
- [9] D.W. Curtis, *Hyperspaces of finite subsets as boundary sets*, Topology Appl. **22** (1986), 97–107.

¹⁹ $h \in H(\Gamma)$ が向きを保つとは, Γ に如何なる向き付けを行っても h が有向グラフ自己同型を誘導することと定義する.

- [10] D.W. Curtis and Nguyen To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces*, *Topology Appl.* **19** (1985), 251–260.
- [11] D.W. Curtis and R.M. Schori, *Hyperspaces of Peano continua are Hilbert cubes*, *Fund. Math.* **101** (1978), 19–38.
- [12] J.H. Gresham, *A class of infinite-dimensional spaces. II. An extension theorem and the theory of retracts*, *Fund. Math.* **107** (1980), 237–245.
- [13] R.E. Heisey, *Manifolds modelled on the direct limit of lines*, *Pacific J. Math.* **102** (1982), 47–54.
- [14] D.W. Henderson and R.M. Schori, *Topological classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **76** (1970), 121–124.
- [15] R. Luke and W.K. Mason, *The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **164** (1972), 275–285.
- [16] P. Mankiewicz, *On topological, Lipschitz, and uniform classification of LF-spaces*, *Studia Math.* **52** (1974), 109–142.
- [17] K. Mine, *Universal spaces of non-separable absolute Borel classes*, *Tsukuba J. Math.* **30** (2006), 137–148.
- [18] K. Mine and K. Sakai, *Open subsets of LF-spaces*, *Bull. Polish Acad. Sci. Math.* **56** (2008), 25–37.
- [19] K. Mine and K. Sakai, *Simplicial complexes and open subsets of non-separable LF-spaces*, *Canad. J. Math.*, to appear
- [20] K. Mine, K. Sakai and M. Yaguchi, *Hyperspaces of finite sets in universal spaces for absolute Borel classes*, *Bull. Polish Acad. Sci., Math.*, **53** (2005), 409–419.
- [21] B. Riemann, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*, *Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, **13**, (1867).
- [22] B. Riemann, 『リーマン論文集』(数学史叢書) 足立恒雄・杉浦光夫・長岡亮介編訳, 朝倉書店 (2004).
- [23] K. Sakai, *On \mathbb{R}^∞ -manifolds and Q^∞ -manifolds*, *Topology Appl.* **18** (1984), 69–79.
- [24] K. Sakai, *The space of cross sections of a bundle*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **103** (1988), 956–960.
- [25] K. Sakai and M. Yaguchi, *Characterizing manifolds modeled on certain dense subspaces of non-separable Hilbert spaces*, *Tsukuba J. of Math.* **27** (2003), 143–159.
- [26] J. Smrekar and A. Yamashita, *Function spaces of CW homotopy type are Hilbert manifolds*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **137** (2009), 751–759.
- [27] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, *Fund. Math.* **111** (1981), 247–262.
- [28] T. Yagasaki, *The homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, *Mem. Fac. Engrg. Design Kyoto Inst. Tech. Ser. Sci. Tech.* **47** (1998), 41–48.
- [29] T. Yagasaki, *Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds*, *Topology Appl.* **108** (2000), 123–136.
- [30] M. Yaguchi, *Hyperspaces of finite subsets of non-separable Hilbert spaces*, *Tsukuba J. Math.* **30** (2006), 181–193
- [31] A. Yamashita, *Non-separable Hilbert manifolds of continuous mappings*, [arXiv:math.GN/0610214](https://arxiv.org/abs/math.GN/0610214).

Institute of Mathematics,
 University of Tsukuba, Tsukuba, 305-8571, Japan
 pen@math.tsukuba.ac.jp

無限次元位相多様体をなす関数空間について

山下 温 (東京大学大学院数理科学研究科)

1 序

本稿では連続写像全体のなす空間の局所的な位相的性質について考察する. たとえば X がコンパクト距離空間なら, X 上の実数値連続関数の全体 $C(X, \mathbb{R})$ は, 上限ノルムによって Banach 空間になる. 値域を S^1 に変えて $C(X, S^1)$ を考えると, これは Banach 空間ではないが, それでも各点は Banach 空間 $E = C(X, \mathbb{R})$ と同相な近傍をもつ. つまり $C(X, S^1)$ は「局所的に Banach 空間 E と同相」である. 以下では, どのような X, Y について, $C(X, Y)$ が (自然な位相について) 局所的に Banach 空間に同相になるかを考える.

一般に空間 E が与えられたときに, 距離付け可能空間 X が E -多様体 (E -manifold) であるとは, X のどの点も E の開集合と同相な開近傍をもつことである. \mathbb{R}^n -多様体とは n 次元位相多様体のことを意味する. 以下では E が Hilbert 空間や Banach 空間の場合を考える. 上の例では, $C(X, S^1)$ は $E = C(X, \mathbb{R})$ に対して E -多様体となっている. 我々は E の線型空間・ノルム空間としての構造を考えずに位相的性質のみに着目する. この立場からは, 一見異なって見える Hilbert 空間や Banach 空間も非常にしばしば同じもの (同相) になることに注意する必要がある. 実際, 次の結果がある.

Theorem 1.1 (Kadec [3], Anderson [1], Toruńczyk [8]) E, F がともに無限次元 Fréchet 空間 (=局所凸, 完備距離付け可能な位相ベクトル空間) であるとする. もし, E と F の稠密度が等しければ, E と F は同相である.

ここで位相空間 X の稠密度 (density) とは, X の稠密部分集合の最小濃度のことである. 例えば, 稠密度が可算であるということは, その空間が可分であることを意味する. 上の結果は, Fréchet 空間の位相型はある意味での集合論的サイズで決まる, ということを述べている. 濃度 τ に対して, τ 本のベクトルが完全正規直交系をなす Hilbert 空間を $\ell^2(\tau)$ で表す. $\ell^2(\tau)$ の稠密度はちょうど τ となるので, 位相的性質のみを問題とする立場からは, Theorem 1.1 より, Fréchet 空間はすべてある τ について $\ell^2(\tau)$ であると考えてよい. τ が可算濃度 \aleph_0 である場合は, $\ell^2(\tau)$ は慣例にならい ℓ^2 と表す.

今回, 関数空間 $C(X, Y)$ について考える位相は一様収束位相とコンパクト開位相であ

る. $C(X, Y)$ に一様収束位相をもたせたものを $C^u(X, Y)$, コンパクト開位相をもたせたものを $C^k(X, Y)$ で表す. この二つの位相は X がコンパクトの場合には一致するが, この場合については次の結果が知られている.

Theorem 1.2 (Sakai [5]) X を無限個の点をもつコンパクト距離空間, Y を孤立点のない可分完備距離付け可能 ANR であるとする. このとき $C(X, Y)$ は ℓ^2 -多様体である.

ここで, 距離付け可能空間 X が **ANR (Absolute Neighborhood Retract)** であるとは X が別の距離付け可能空間 Y に閉集合として埋め込まれているとき, かならず X が Y におけるある近傍のレトラクトになっていることである. ANR は局所的なふるまいが良い距離空間のクラスであり, 例えば, 有限次元の距離空間については, 局所可縮であることと ANR であることは同値である. 例えば多様体や局所有限 CW 複体は ANR である. $\ell^2(\tau)$ -多様体も ANR である. 以下では Theorem 1.2 を, X がコンパクトでない場合に, 一様収束位相とコンパクト開位相との両方面で拡張することを考えていく.

2 一様収束位相をもつ関数空間

この節では X は非コンパクトな可分距離空間とする. Y が距離空間であるとき, $C_B^u(X, Y)$ により, 有界な連続関数全体のなす $C^u(X, Y)$ の部分集合を表すことにする. $C_B^u(X, Y)$ は $C^u(X, Y)$ の開集合である. $Y = \mathbb{R}$ の場合を考えると, $C_B^u(X, \mathbb{R})$ は稠密度が連続体濃度 2^{\aleph_0} の (したがって可分でない) Banach 空間となる. 例えば, $X = \mathbb{N}$ の場合を考えると, $C_B^u(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ は数列空間 ℓ^∞ に他ならない. よって, Theorem 1.1 により, X が非コンパクト可分距離空間ならば, $C_B^u(X, \mathbb{R})$ は ℓ^∞ と同相である.

次の結果は, \mathbb{R} でない距離空間 Y について, $C^u(X, Y)$ が ℓ^∞ -多様体になるための一つの十分条件を与える.

Theorem 2.1 ([9]) X を非コンパクトな可分距離空間, Y を ANRU (定義後述) であるような可分完備距離空間とする. このとき, もし Y の弧状連結成分の直径が正の下界をもつ, つまり $\inf\{\text{diam } C; C \in \pi_0(Y)\} > 0$ であるならば, $C^u(X, Y)$ は ℓ^∞ -多様体である. よってその開部分集合である $C_B^u(X, Y)$ も ℓ^∞ -多様体である.

ここで距離空間 Y が **ANRU** であるとは, Y が別の距離空間 Z に等長に埋め込まれているとき, $\varepsilon > 0$ および, Y の Z での ε -近傍 N から Y への一様連続なレトラクション $r: N \rightarrow Y$ が存在することである (Nhu [4]). ここで, 埋め込みが単なる位相的埋め込みではなく等長と仮定されていること, N が ε -近傍の形をしていると仮定されていること, および r の一様連続性が仮定されていることが ANR との違いである. ANRU は ANR と違い, 距離に依存した概念である (実際には, 距離空間が ANRU であるかどうかは距離の一様同値類のみによることが証明される).

例えば, Euclid 空間 \mathbb{R}^n や数列空間 l^∞ , およびコンパクトな多面体^{*1} (に距離を導入したもの) は ANRU である (Isbell [2]). したがって, 次の系が成り立つ.

Corollary 2.2 ([9]) X を非コンパクトな可分距離空間, Y を孤立点のないコンパクトな多面体とすると, $C^u(X, Y)$ は l^∞ -多様体である.

ANRU の概念が重要であるのは次が成り立つからである.

Proposition 2.3 Y が ANRU であれば $C^u(X, Y)$ は ANR である.

$C^u(X, Y)$ が ANR であることが分かれば, それが l^∞ -多様体であることを示すには次の強力な道具が使える. それを述べるために言葉を準備しておこう. (Z, d) が距離空間のとき, 連続写像 $f: K \rightarrow Z$ が性質 P をもった写像 g で近似できるとは, 任意の連続関数 $\alpha: Z \rightarrow (0, 1]$ に対して, 性質 P をもった $g: K \rightarrow Z$ であって $d(f(x), g(x)) < \alpha(f(x))$ が任意の $x \in K$ について成立するようなものが存在することである. また記号 \oplus は位相空間の直和を意味する.

Theorem 2.4 (Toruńczyk [8]) τ を無限濃度とし, Γ を濃度 τ の離散空間とする. このとき空間 Z が $l^2(\tau)$ -多様体であるための必要十分条件は, 次の (1)–(3) が成立することである.

- (1) Z は完備距離付け可能な ANR で, 稠密度が τ である.
- (2) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対して, 任意の連続写像 $f: I^n \times \Gamma \rightarrow Z$ は $(g(I^n \times \{\gamma\}))_{\gamma \in \Gamma}$ が Z で疎となるような g で近似できる^{*2}.
- (3) 頂点の個数が高々 τ の有限次元単体複体の任意の列 $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ に対して, 任意の連続写像 $f: \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} |K_n| \rightarrow Z$ は $(g(|K_n|))_{n \in \mathbb{N}}$ が Z で疎となる g で近似できる. ここで $|K_n|$ の位相は単体全体の族についての弱位相である.

Y を Theorem 2.1 の仮定の通り, ANRU であるような可分完備距離空間とする. すると, 前に述べたように $C^u(X, Y)$ は ANR であって, 更に完備距離付け可能で稠密度 2^{\aleph_0} であることが比較的簡単にわかる. こうして, $C^u(X, Y)$ は $\tau = 2^{\aleph_0}$ に対して上の Theorem 2.4 の条件 (1) を満たすことが分かる. 条件 (2)(3) を確かめるためには, そのどちらよりも強い次の性質を示す.

- (4) 単体複体の任意の族 $(K_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ に対して, 任意の連続写像 $f: \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} |K_\gamma| \rightarrow Z$ は $(g(|K_\gamma|))_{\gamma \in \Gamma}$ が Z で疎となる g で近似できる.

(4) は一見極めて強い主張であるが, 実際には任意の $l^2(\tau)$ 多様体は性質 (4) を満た

^{*1} 多面体 (polyhedron) とは有限単体複体の幾何的实现をいう.

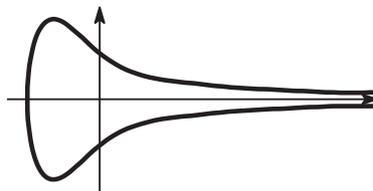
^{*2} Z の部分集合族 $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ が Z で疎 (discrete) であるとは Z のどの点も, 高々一個の A_λ としか交わらないような近傍をもつことである.

すことが分かっているので、これを証明しようとするのは決して無理のある方針ではない。

さて、Theorem 2.1 の応用として、次のような系が得られる。

Corollary 2.5 ([9]) X を非コンパクトな可分距離空間、 Y を完備な連結リーマン多様体とし、 Y には測地線距離が入っているものとする。このとき有界連続関数の全体 $C_B^u(X, Y)$ は ℓ^∞ -多様体である。

上の系で $C_B^u(X, Y)$ を $C^u(X, Y)$ に変えることはできない。実際、 Y として \mathbb{R} を \mathbb{R}^2 の中に下図のように滑らかに埋め込んで得られる完備リーマン多様体とすると、 $C^u(\mathbb{N}, Y)$ は局所弧状連結ではない。



最後に、Theorem 2.1 の条件「 Y の弧状連結成分の直径が正の下界をもつ」について述べる。この条件は外すことができず、実際に (Theorem 2.1 の精密化として) 次の命題が成り立つ。

Proposition 2.6 ([9]) Y を ANRU であるような完備可分距離空間とすると、次は同値である。

- (1) 任意の可分非コンパクト距離空間 X について、 $C(X, Y)$ は ℓ^∞ -多様体である。
- (2) $C(\mathbb{N}, Y)$ は ℓ^∞ -多様体である。
- (3) Y の弧状連結成分の直径が正の下界をもつ。

3 コンパクト開位相をもつ関数空間

この節は Smrekar 氏との共同研究である ([7])。Smrekar 氏のホモトピー的な考察と整合性を保つために、ここでは定義域 X が可算 CW 複体であるとする。

一様位相について ℓ^∞ -多様体になる条件がある程度分かってくると、コンパクト開位相の場合が気になってくる。まず一様収束位相との根本的な違いとして、コンパクト開位相の入った関数空間 $C^k(X, Y)$ は重要なケースでは、たいてい可分距離空間になっている ($C^u(X, Y)$ はしばしば ℓ^∞ -多様体で、したがって可分ではなかったことに注意)。実際、 X が可算 CW 複体で、 Y が可分距離空間ならば $C^k(X, Y)$ は可分距離空間である。したがって、 $C^k(X, Y)$ については、局所的に可分 Hilbert 空間 ℓ^2 に同相であるかどうかの問題である。

さて、コンパクト開位相の場合は $C^k(X, Y)$ が ℓ^2 -多様体である条件を調べることは、ANR である条件を調べることに帰着する。実際、Theorem 1.2 の証明のテクニックを用いて、次が示される。

Theorem 3.1 ([7]) X は 1 次元以上の可算 CW 複体で、 Y は孤立点のない可分完備距離付け可能 ANR であるとする。このとき $C^k(X, Y)$ は ANR であれば ℓ^2 -多様体である。

更に、次の結果より、 $C^k(X, Y)$ が ANR であることは、実際にはそのホモトピー的性質で決まる（この結果は Smrekar の先行研究 [6] によっている）。空間 Z が半局所可縮 (semilocally contractible) であるとは、 Z の任意の点が、 Z において可縮であるような近傍をもつことをいう。半局所可縮性はホモトピー不変な性質である。

Theorem 3.2 ([7]) X を可算 CW 複体、 Y を ANR であるとする。次は同値である。

- (1) $C^k(X, Y)$ は ANR である。
- (2) $C^k(X, Y)$ は CW 複体のホモトピー型をもつ。
- (3) $C^k(X, Y)$ は 半局所可縮である。

コンパクト開位相においては関数空間の一点の開近傍は無限遠付近でさまざまな振る舞いをする関数が入ってくるため、複雑な構造を持ちうる。例えば、 X が可算離散空間、 Y が二点からなる離散空間のとき、 $C^k(X, Y)$ はカントール集合に同相で、局所弧状連結ですらない。しかし、 X がコンパクト Hausdorff であれば、 $C^k(X, Y)$ は ANR になることが比較的簡単に分かる。そこで X が「ホモトピー的にコンパクトになる」ならば、 $C^k(X, Y)$ は ANR になるのではないかと期待されるが、実際に次の結果が得られた。

Theorem 3.3 ([7]) X を可算 CW 複体とする。このときホモトピー $h: X \times I \rightarrow X$ であって $h_0 = \text{id}_X$ かつ $h_1(X)$ の閉包がコンパクトであるものが存在するならば、 $C(X, Y)$ は ANR である。

更に X に単連結・有限次元という制限をつければ、次のようなきれいな結果が成り立つ。

Theorem 3.4 ([7]) X を単連結な有限次元可算 CW 複体とすると、次は同値である。

- (1) 任意の ANR Y に対して $C^k(X, Y)$ は ANR である。
- (2) 任意の有限 CW 複体 Y に対して $C^k(X, Y)$ は ANR である。
- (3) X は有限 CW 複体のホモトピー型をもつ。

更に値域が球面の場合は、次が成り立つ。

Theorem 3.5 ([7]) X を連結可算 CW 複体で、一点ではないものとする。次は同値

である.

- (1) $C^k(X, S^1)$ は ℓ^2 -多様体である.
- (2) $C^k(X, S^1)$ は ANR である.
- (3) $C^k(X, S^1)$ は CW 複体のホモトピー型をもつ.
- (4) $H^1(X; \mathbb{Z})$ は有限生成である.

Theorem 3.6 ([7]) X を連結可算 CW 複体で, 一点ではなく, かつ有限部分複体 $K_0 \subset X$ であって $\dim(X \setminus K_0) \leq n$ なるものが存在すると仮定する. 次は同値である.

- (1) $C^k(X, S^n)$ は ℓ^2 -多様体である.
- (2) $C^k(X, S^n)$ は ANR である.
- (3) $C^k(X, S^n)$ は CW 複体のホモトピー型をもつ.
- (4) X の各有限部分複体 K に対して, $K \subset L$ なる有限部分複体 L であって, $H^i(X, L; \mathbb{Z}) = 0$ ($1 \leq i \leq n$) となるものが存在する.

参考文献

- [1] R. D. Anderson, *Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines*, Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 515–519.
- [2] J. R. Isbell, *On finite-dimensional uniform spaces*, Pacific J. Math. **9** (1959), 107–121.
- [3] M. I. Kadec, *On topological equivalence of separable Banach spaces*, Soviet Math. Dokl. **7** (1966), 319–322.
- [4] Nguyen To Nhu, *On the extensions of uniformly continuous mappings*, Colloq. Math. **41** (1979), 935–940.
- [5] K. Sakai, *The space of cross sections of a bundle*, Proc. Amer. Math. Soc. **103** (1988), 956–960.
- [6] J. Smrekar, *CW type of inverse limits and function spaces*, arXiv:math.AT/07082838.
- [7] J. Smrekar and A. Yamashita, *Function spaces of CW homotopy type are Hilbert manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 2, 751–759.
- [8] H. Toruńczyk, *Characterizing Hilbert space topology*, Fund. Math. **111** (1981), no. 3, 247–262.
- [9] A. Yamashita, *Non-separable Hilbert manifolds of continuous mappings*, arXiv:math.GT/0610214.

Extremal coefficients in the Homfly polynomial

Tamás Kálmán
The University of Tokyo

This talk will be a report on work which is still in progress. The project consists of two distinct parts. At the time of this writing, the discrete mathematical part (where we generalize Tutte’s polynomial to hypergraphs) is mostly finished, with the notable exception of Conjecture 5. The knot theory side (where we relate the new hypergraph invariant to the Homfly polynomial) is less developed and several more results are only conjectures, but the program and direction are fairly clear.

After discussing the context of our work, we introduce the main definitions, theorems, and conjectures. Then these are illustrated by a lengthy example and we also mention some further ideas at the end.

Motivation

The Jones polynomial and related knot invariants [2] have been a great source of progress and at the same time, remain something of a mystery. Even after the recent discoveries of various categorifications (see [4], among others), we still do not have a clear answer to what exactly these invariants “measure.”

We will not give that answer either, although it is our hope that the results presented here will ultimately help find it. Instead, we are going to elaborate on a theme that was quite popular following the discovery of the Jones polynomial: the link between knot invariants and the combinatorics of (planar) graphs.

There are two immediate predecessors of our work. Thistlethwaite [9] realized that certain extremal coefficients in the Kauffman polynomial [3] of alternating links come from the Tutte polynomial of the chessboard graph derived from their diagrams (in [10], he extended this to semi-adequate links). Jaeger [1] noticed that in some very special cases, the Homfly polynomial of an alternating link is equivalent to the Tutte polynomial of another, slightly different graph.

The Kauffman and Homfly polynomials are both two-variable generalizations of the Jones polynomial. Many parallels have been noted between the two. Lickorish [5] called them the ‘semi-oriented’ and ‘oriented’ polynomials, and that indeed seems to sum up the main difference: the Homfly polynomial is far more sensitive to orientations.

The chessboard graph, formed by the black regions (connected at the crossings) in a black-and-white coloring of the complement of a knot diagram, does not take any orientation into account. Another classical construction does that: the Seifert graph. It is fitting, then, that the analogous extremal coefficients in the Homfly polynomial (at least for alternating links) should be derived from the Seifert graph of the projection. That is what Conjecture 7 states. In particular, the conjecture (to a large degree owing to a result of Murasugi and Przytycki [6]) reduces our program to the study of special alternating link diagrams.

Next, one could ask about the mechanism that derives the coefficients from the Seifert graph. It turns out that it is not (quite) the Tutte polynomial, but

a previously unknown (partial) generalization of it. The key observation is that the Seifert graph is always bipartite (which is why the spanning surface that Seifert constructed from it is orientable). In other words, the Seifert graph can be viewed as a hypergraph.

Tutte's polynomial for hypergraphs

A bipartite graph is a triple (V_1, V_2, E) , where V_1 and V_2 are disjoint finite sets, called color classes, and E is a finite set of edges, each connecting an element of V_1 to an element of V_2 (thus, multiple edges are not yet allowed).

A hypergraph is a pair (V, E) , where V is a finite set (vertices) and E is a finite multiset of non-empty subsets of V (hyperedges). A hypergraph is both a generalization and a special case of a graph. On the one hand, V and E may be viewed as the color classes in a bipartite graph: we connect $v \in V$ to $e \in E$ with an edge if $v \in e$. This construction is reversible (after specifying one of the two color classes in a bipartite graph) and we will often use it without explicit reference.

On the other hand, a graph (possibly with loop edges and multiple edges) can be turned into a bipartite graph and thus a hypergraph by placing a new vertex in the middle of each edge.

Tutte's original construction of the two-variable polynomial $T_G(x, y)$, associated to a graph $G = (V, E)$, proceeds as follows. (Loop edges and multiple edges are allowed. Assume that G is connected.) Order the set E arbitrarily, in other words label the edges of G with the integers $1, \dots, |E|$. Consider the set \mathcal{T} of spanning trees for G .

For each $\Gamma \in \mathcal{T}$, call an edge e in Γ *internally active* if, after removing e from Γ , connectedness cannot be restored by adding an edge to $\Gamma \setminus \{e\}$ that has a label lower than that of e . Call a non-edge e of Γ *externally active* if, after adding e to Γ , circuit-freeness cannot be restored by removing an edge from $\Gamma \cup \{e\}$ that has a label lower than that of e . Let $\iota(\Gamma)$ and $\varepsilon(\Gamma)$ denote the number of internally and externally active edges, respectively, for Γ . Then, the Tutte polynomial of G is the sum $T_G(x, y) = \sum_{\Gamma \in \mathcal{T}} x^{\iota(\Gamma)} y^{\varepsilon(\Gamma)}$. The polynomial $T_G(x, y)$ is independent of the chosen edge order. Many of its properties are known, such as the recursive deletion/contraction formula.

Let now $H = (V, E)$ be a hypergraph. By a *quasi-spanning tree* of H , we will mean a function $k: E \rightarrow \mathbf{N}$ so that a spanning tree of the corresponding bipartite graph can be found which has degree $k(e)$ at each $e \in E$. In particular, $1 \leq k(e) \leq |e|$ for each $e \in E$. (This generalizes spanning trees of graphs through the second construction mentioned above: there, an edge e is in the tree if $k(e) = 2$ and not in the tree if $k(e) = 1$. In our generalization, we allow hyperedges to be in a quasi-spanning tree only "partially.")

It turns out that quasi-spanning trees are exactly the integer points in a convex polytope. To describe it, let $E' \subset E$ be a non-empty subset and let $\cup E' \subset V$ denote all of its neighbors in the bipartite graph. Let the number of components of the bipartite graph spanned by $(\cup E') \cup E'$ be denoted with $c(E')$. Finally, let $t(E') = |E'| + |\cup E'| - c(E')$ denote the number of edges in any spanning forest of this graph.

Theorem 1. *Let $H = (V, E)$ be a hypergraph. Its quasi-spanning trees $k: E \rightarrow \mathbf{N}$ are exactly the integer solutions of the following system of linear inequalities in \mathbf{R}^E :*

$$\begin{aligned} k(e) &\geq 1 && \text{for all } e \in E \\ \sum_{e \in E'} k(e) &\leq t(E') && \text{for all non-empty } E' \subset E \\ \sum_{e \in E} k(e) &= |E| + |V| - 1. \end{aligned}$$

Next, order (label with $1, \dots, |E|$) the elements of E arbitrarily. With regard to a quasi-spanning tree k , we make the following definitions. A hyperedge $e \in E$ is *unstable* if $k(e)$ can be decreased by 1 and k of a hyperedge with a smaller label increased by 1 so that another quasi-spanning tree results. A hyperedge $e \in E$ is *attractive* if $k(e)$ can be increased by 1 and k of a hyperedge with a smaller label decreased by 1 so that another quasi-spanning tree results. It is easy to see that ‘unstable’ generalizes ‘not internally active edge of the spanning tree’ and ‘attractive’ generalizes ‘not externally active non-edge of the spanning tree.’

For a given quasi-spanning tree $k: E \rightarrow \mathbf{N}$, let the number of unstable hyperedges of H be denoted with $u(k)$ and the number of attractive hyperedges be denoted with $a(k)$. Then, let the *internal polynomial* and the *external polynomial* of the hypergraph $H = (V, E)$ be defined as

$$\mathcal{J}(H) = \sum_k \xi^{u(k)} \quad \text{and} \quad \mathcal{E}(H) = \sum_k \eta^{a(k)}, \quad (1)$$

respectively, where both summations are for all quasi-spanning trees k of H . These notions generalize $\xi^{|V|-1}T(1/\xi, 1)$ and $\eta^{|E|-|V|+1}T(1, 1/\eta)$, respectively.

Theorem 2. *The formulas (1) for the internal and external polynomials do not depend on the chosen order of the hyperedges.*

Unfortunately, the two-variable polynomial $\sum_k \xi^{u(k)} \eta^{a(k)}$ does depend on the choice of order. Thus, it is so far unclear how to generalize the full Tutte polynomial to hypergraphs. Likewise, the analogue of the deletion/contraction formula has not yet been found, even though it could be a very useful tool for the proofs of Conjectures 8 and 7 in the next section.

Both the internal and external polynomials have 1 for constant term. For any given hyperedge order, these two quasi-spanning trees can be constructed by a greedy algorithm. The order-independence of another coefficient is also apparent.

Proposition 3. *For any hypergraph H , the coefficient of the linear term in the interior polynomial $\mathcal{J}(H)$ is equal to the first Betti number of H , viewed as a bipartite graph.*

We will call a hypergraph planar if the corresponding bipartite graph is planar. Given an embedding of $H = (V, E)$ into the plane in the bipartite graph sense, we may define the *planar dual hypergraph* of H as follows. Keep

the set E of hyperedges, but let the new set of vertices be the set of regions complementary to the planar embedding. Let a region belong to a hyperedge if it is incident with the point representing it on the plane. It is easy to see that the dual of the dual of H is H , as well as that our notion generalizes the usual duality of planar graphs.

Proposition 4. *Let the hypergraphs H and H^* be planar duals. Then, up to interchanging the indeterminates ξ and η , we have $\mathcal{J}(H) = \mathcal{E}(H^*)$ and $\mathcal{E}(H) = \mathcal{J}(H^*)$.*

There is however a more obvious, ‘abstract’ notion of duality for hypergraphs: viewing them as bipartite graphs, we may interchange the roles of the two color classes. This operation will usually result in a change in the exterior polynomial. On the other hand, we have strong reasons to believe (see Conjecture 8 in the next section) in the following.

Conjecture 5. *For the hypergraphs $H = (V, E)$ and $\overline{H} = (E, V)$, we have $\mathcal{J}(H) = \mathcal{J}(\overline{H})$.*

This conjecture has a weaker version (for the sum of the coefficients) that can be stated without reference to the notion of instability.

Conjecture 6. *Let the connected bipartite graph G have color classes V_1 and V_2 . Consider the set \mathcal{T} of spanning trees for G . Let each $\Gamma \in \mathcal{T}$ have degree distributions $k_i^\Gamma: V_i \rightarrow \mathbf{N}$ ($i = 1, 2$) on V_1 and on V_2 . Then, the two sets $\{k_i^\Gamma \mid \Gamma \in \mathcal{T}\}$ ($i = 1, 2$) agree in size. (The set \mathcal{T} , which projects to both, is usually much larger.)*

Let us now turn to the considerations that lead to the discovery of the interior and exterior polynomials.

Homfly polynomials of alternating links

The present project grew out of observations on the Homfly polynomial $P(v, z)$, an invariant of oriented links. Many of these observations remain conjectures and I also apologize for not stating them very precisely. I hope to have both of these issues fixed by the time of the Symposium.

We consider the version when P of the unknot is 1. We will concentrate on the following ‘extremal’ coefficients: the *top edge* is the set of terms in which the highest exponent of z occurs with a nonzero coefficient. The *slant edges* are those terms $p_{\alpha\beta} v^\alpha z^\beta$ in which either $\beta - \alpha$ or $\alpha + \beta$ reaches a maximum. Together, we will refer to the top edge and the two slant edges as the *top contour* of the Homfly polynomial.

From an oriented link diagram, the Seifert graph is derived with the well-known procedure in which we resolve each crossing in the way that respects the orientation; then, we treat the resulting disjoint, simple closed curves as vertices, two of which are connected by an edge for each former crossing site that both visits. The Seifert graph is bipartite and it can have multiple edges. Let the *reduced Seifert graph* be the graph obtained when we keep only one element from each set of multiple edges.

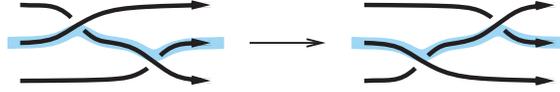


Figure 1: Changing the order of two crossings along a Seifert circle.

A vertex in the Seifert graph is also called a Seifert circle. A Seifert circle is said to be of type I if either its interior or its exterior is void of any other Seifert circles. Otherwise, the circle is of type II. Each Seifert graph admits a block sum decomposition in which the blocks are connected at the type II circles. Block sum for the graphs corresponds to the Murasugi sum of the knot diagrams that the blocks represent.

Alternating oriented link diagrams are characterized by the property that on each side of each Seifert circle, the crossings have a uniform sign, and on the two sides of each type II circle, the signs are opposite. A special alternating diagram is an alternating link diagram that has no type II Seifert circles and thus its Seifert graph has a single block. Such a diagram contains either only positive or only negative crossings. In the alternating case, the blocks in the decomposition mentioned above represent special alternating diagrams. By a result of Quach Hongler and Weber [8], the multiset of these special alternating components is an invariant of the alternating link.

Conjecture 7. *Given an alternating oriented link diagram, the top contour of the associated Homfly polynomial is determined by the reduced Seifert graph of the diagram.*

The multiple edges of the unreduced Seifert graph appear only to “make the Homfly polynomial taller,” a phenomenon also noted by Przytycki [7].

The main ingredient in the proof of Conjecture 7 would be to show that the said top contour is invariant under a simple local move: the changing of the order in an adjacent pair of a positive and a negative crossing along a type II Seifert circle (see Figure 1). But this is not obvious; in particular, examples show that such invariance may only hold in alternating diagrams.

Conjecture 7 implies (by repeated application of the move mentioned above) that the top contour in the Homfly polynomial of an alternating link is the same as that for the connected sum of its special alternating components. (Murasugi sum is an ambiguous operation but according to the conjecture, for the top contour it does not matter how we carry it out. Thus we may choose connected sum, which is a special case of the Murasugi sum.)

Finally, let us turn to the question of how exactly the reduced Seifert graph determines the top contour of the Homfly polynomial. Unfortunately, we only have a clear answer for the top edge, and even that is a conjecture.

Under connected sums, the entire Homfly polynomial behaves multiplicatively. With Conjecture 7, this implies simple multiplicative formulas for the top edge and both slant edges in Homfly polynomials of Murasugi sums of alternating links. (For the top edge this was noticed before, and not just for

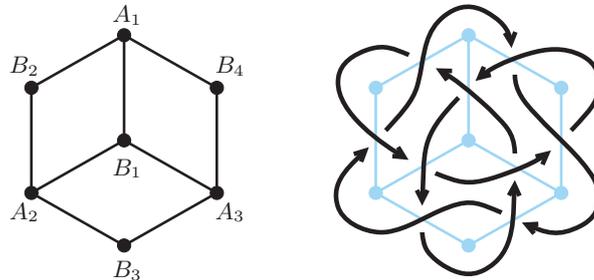


Figure 2: A bipartite graph and the corresponding oriented link.

alternating links, by Murasugi and Przytycki [6].) This reduces the problem of finding formulas for the top contour to the special alternating case. As mirroring hardly changes the Homfly polynomial (v is replaced by $-v^{-1}$), we may also assume that our diagram is positive.

Conjecture 8. *Let D be a positive (hence, special) alternating diagram, with associated Seifert graph G and Homfly polynomial $P(v, z)$. Then, the left slant edge of P contains a single term, with coefficient 1; this term maximizes the exponent of z and minimizes the exponent of v . The coefficients along the top edge of P are the same as those of the interior polynomial $\mathfrak{J}(G)$, listed starting from the constant term 1. This is true without regard to the choice between the two ways that G can be viewed as a hypergraph.*

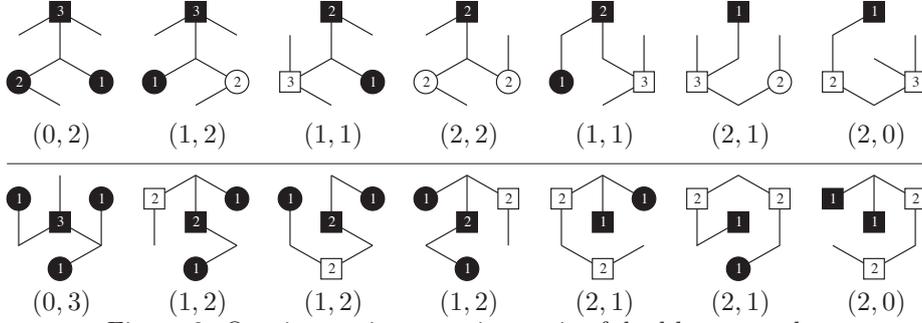
Conjecture 8 implies Conjecture 5 for planar hypergraphs. Proposition 3 yields a corollary that may be interesting in its own right.

Notice that the right slant edge, unfortunately, is not addressed. Conjecture 8 is a (partial) generalization of a result of Jaeger [1]. He found a formula for the Homfly polynomial (not just the extremal coefficients) of special alternating diagrams that correspond to hypergraphs derived from ordinary planar graphs. The formula is in terms of the Tutte polynomials of the original planar graphs. Thus, in Jaeger's case, the right slant edge is also a function of the Tutte polynomial: it is the flow polynomial or (essentially) the chromatic polynomial of the dual graph. I do not yet know how to generalize this to right slant edges in the Homfly polynomial of other special alternating diagrams. This may also hold the key to finding expressions, à la Jaeger, not just for top contours but for entire Homfly polynomials.

An example

The (planar) graph G of Figure 2 is bipartite with color classes A and B , as shown. Its 'conventional' Tutte polynomial is

$$T_G(x, y) = \begin{array}{ccccccc} +y^3 & & & & & & \\ +3y^2 & +3xy^2 & & & & & \\ +2y & +7xy & +6x^2y & +3x^3y & & & \\ & +2x & +6x^2 & +7x^3 & +6x^4 & +3x^5 & +x^6. \end{array} \quad (2)$$



The graph G has $T_G(1, 1) = 50$ spanning trees but those give rise to only 7 quasi-spanning trees. (This holds for the hypergraph (B, A) , as well as for its (abstract) dual (A, B) ; cf. Conjecture 6.) These are depicted in Figure 3 (with one actual spanning tree realization for each). For the particular orders $A_1 < A_2 < A_3$ and $B_1 < B_2 < B_3 < B_4$, respectively, we also indicated the unstable and attractive hyperedges for each quasi-spanning tree, as well as the resulting (u, a) values. (Hollow dots are unstable and full ones are stable; circular dots are attractive while squares are unattractive.) Thus, we find that

$$\mathcal{J}(B, A) = 1 + 3\xi + 3\xi^2 \text{ and } \mathcal{E}(B, A) = 1 + 3\eta + 3\eta^2 \quad (3)$$

(as (B, A) is planar self-dual, this coincidence is an illustration of Proposition 4), whereas

$$\mathcal{J}(A, B) = 1 + 3\xi + 3\xi^2 \text{ and } \mathcal{E}(A, B) = 1 + 2\eta + 3\eta^2 + \eta^3. \quad (4)$$

This is in line with Conjecture 5, as well as with Proposition 3.

The left side of Figure 4 is a diagram of the alternating knot $16a_{2008}$. There is only one type II Seifert circle; it appears as the cut vertex in the Seifert graph next to the knot. The special alternating components corresponding to the two negative blocks are negative Hopf links and the positive block represents the knot $12a_{432}$. The Homfly polynomial of $16a_{2008}$ is

$$\begin{array}{rcccccc} & & +v^4z^8 & +3v^6z^8 & +3v^8z^8 & & \\ & -2v^2z^6 & -2v^4z^6 & +4v^6z^6 & +9v^8z^6 & -4v^{10}z^6 & \\ +z^4 & -3v^2z^4 & -6v^4z^4 & -4v^6z^4 & +17v^8z^4 & -10v^{10}z^4 & +v^{12}z^4 \\ +2z^2 & -v^2z^2 & & -10v^6z^2 & +21v^8z^2 & -11v^{10}z^2 & +2v^{12}z^2 \\ +1 & -v^2 & +3v^4 & -7v^6 & +10v^8 & -6v^{10} & +v^{12}. \end{array} \quad (5)$$

The right side of Figure 4 shows the connected sum that is represented by the

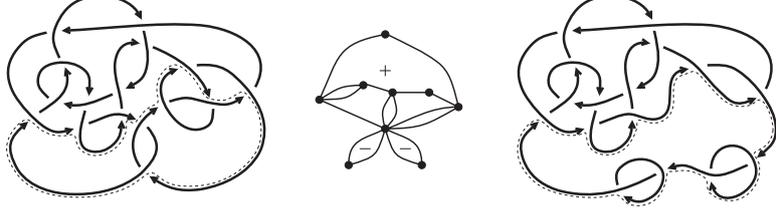


Figure 4: Two oriented alternating links with the same Seifert graph.

same Seifert graph. The Homfly polynomial of the latter is a product, namely

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} & -v^{-1}z \\ +v^{-3}z^{-1} & -v^{-1}z^{-1} \end{pmatrix}^2 \cdot \begin{pmatrix} +v^6z^6 & +3v^8z^6 & +3v^{10}z^6 & & & & \\ +3v^6z^4 & +9v^8z^4 & +9v^{10}z^4 & -4v^{12}z^4 & & & \\ +3v^6z^2 & +7v^8z^2 & +8v^{10}z^2 & -10v^{12}z^2 & +v^{14}z^2 & & \\ +v^6 & +v^8 & +3v^{10} & -6v^{12} & +2v^{14} & & \end{pmatrix} \\
 = & \begin{matrix} & +v^4z^8 & +3v^6z^8 & +3v^8z^8 & & & \\ & -2v^2z^6 & -v^4z^6 & +9v^6z^6 & +15v^8z^6 & -4v^{10}z^6 & \\ +z^4 & -5v^2z^4 & -11v^4z^4 & +4v^6z^4 & +37v^8z^4 & -18v^{10}z^4 & +v^{12}z^4 \\ +3z^2 & -3v^2z^2 & -13v^4z^2 & -14v^6z^2 & +56v^8z^2 & -32v^{10}z^2 & +4v^{12}z^2 \\ +1 & -v^2 & -3v^4 & -23v^6 & +47v^8 & -28v^{10} & +5v^{12} \\ +z^{-2} & -v^2z^{-2} & +2v^4z^{-2} & -11v^6z^{-2} & +17v^8z^{-2} & -10v^{10}z^{-2} & +2v^{12}z^{-2}. \end{matrix} \quad (6)
 \end{aligned}$$

Note that, just as predicted by Conjecture 7, the top contours in both (5) and (6) consist of the same seven terms.

The Seifert graph representing $12a_{432}$, after eliminating the three double edges, reduces to G of Figure 2. Thus it is in line with Conjecture 8 that we find the internal polynomials from (3) and (4) along the top edge of the Homfly polynomial of $12a_{432}$, i.e., the second term in the top row of (6). (The same coefficients are repeated for the 16-crossing links because the top edge in the Homfly polynomial of the Hopf link is trivial.)

We perform one more check. The smallest oriented alternating diagram represented by G , depicted in the right side of Figure 2, is that of the link $L9a_{32}$. The corresponding Homfly polynomial is

$$\begin{matrix} v^3z^3 & +3v^5z^3 & +3v^7z^3 & & & & \\ & +3v^5z & +4v^7z & -4v^9z & & & \\ & & +2v^7z^{-1} & -3v^9z^{-1} & +v^{11}z^{-1}, & & \end{matrix}$$

which features the same top contour as in the case of $12a_{432}$.

Finally, the median graph construction that was used in the right side of Figure 2 is such that the chessboard graph of the resulting link diagram is also G . Let us take this opportunity to present an example of Thistlethwaite's result

in [9]. The Kauffman polynomial of $L9a_{32}$ is

$$\begin{array}{cccccc}
& & & +2v^8z^8 & & +2v^{10}z^8 \\
& & & +6v^7z^7 & +9v^9z^7 & +3v^{11}z^7 \\
& & +7v^6z^6 & +5v^8z^6 & -v^{10}z^6 & +v^{12}z^6 \\
+6v^5z^5 & -10v^7z^5 & -26v^9z^5 & -10v^{11}z^5 & & \\
+3v^4z^4 & -9v^6z^4 & -21v^8z^4 & -12v^{10}z^4 & -3v^{12}z^4 & \\
+v^3z^3 & -6v^5z^3 & +6v^7z^3 & +22v^9z^3 & +9v^{11}z^3 & \\
& +3v^6z^2 & +14v^8z^2 & +14v^{10}z^2 & +3v^{12}z^2 & \\
+3v^5z & -6v^7z & -11v^9z & -2v^{11}z & & \\
& & -3v^8 & -3v^{10} & -v^{12} & \\
& & +2v^7z^{-1} & +3v^9z^{-1} & +v^{11}z^{-1} &
\end{array}$$

Note that the coefficients along its top contour agree with those along the bottom and left sides of (2).

Further questions

The coefficients of the interior polynomial are non-negative by definition. As they also occur in the Homfly polynomial, it is natural to wonder if they are counts of some geometric objects related to the knot. Because of Morton's theorem that the z -degree of the Homfly polynomial is a lower bound for the canonical genus, one may suspect that the numbers in question are counts of certain spanning surfaces. The existence of such a connection could also allow to extend our results to non-alternating oriented links.

On the graph theory side, we note that the interior and exterior polynomials show some similarities to the Ehrhart polynomial of the polytope described in Theorem 1: all three have constant term 1 and the sum of the coefficients is the same in each as well. It could be interesting to pursue this point further.

References

- [1] F. Jaeger: *Tutte polynomials and link polynomials*, Proc. Amer. Math. Soc. 103 (1988), no. 2, 647–654.
- [2] V. Jones: *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. 126 (1987), 335–388.
- [3] L. Kauffman: *On knots*, Annals of Mathematics Studies 115, Princeton University Press (1987).
- [4] M. Khovanov and L. Rozansky: *Matrix factorizations and link homology*, Fundam. Math. 199 (2008), 1–91.
- [5] W. B. R. Lickorish, *Polynomials for links*, Bull. London Math. Soc. 20 (1988), 558–588.
- [6] K. Murasugi and J. Przytycki, *The skein polynomial of a planar star product of two links*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 106 (1989), 273–276.

- [7] J. Przytycki: *t_k moves on links*, in ‘Braids’, ed. J. S. Birman and A. Libgober, Contemp. Math. 78 (1988), 615–656.
- [8] C. V. Quach Hongler and C. Weber, *On the topological invariance of Murasugi special components of an alternating link*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 137 (2004), 95–108.
- [9] M. Thistlethwaite: *Kauffman’s polynomial and alternating links*, Topology 27 (1988), no. 3, 311–318.
- [10] M. Thistlethwaite: *On the Kauffman polynomial of an adequate link*, Invent. Math. 93 (1988), 285–296.

Geometric method in virtual knot theory

門上晃久

大連理工大学応用数学系博士后

大阪市立大学兼任研究所員

2009年8月

トポロジーシンポジウム (於: 北海道大学クラーク会館)

Abstract

1996年にKauffmanにより創始されたとされる virtual knot theory のうち、geometric な手法に重きを置いて概説する。そしてその応用の可能性を探る。

1 Introduction

今講演の目的は virtual knot theory の、ある種の手法に重きを置いた入門的解説である。1章で歴史や現状を述べ、2章で手法をいくつか説明し、3章で今後の課題を述べる。

1.1 vitrual link の定義

(n -component) virtual link diagram は、 n 個 ($n \in \mathbb{N}$) の S^1 から S^2 (や \mathbb{R}^2) への immersion $f : \coprod_{i=1}^n S^1 \rightarrow S^2$ の像と S^2 (や \mathbb{R}^2) の対 $(S^2, \text{Im } f)$ (や $(\mathbb{R}^2, \text{Im } f)$) で、(i) 多重点は横断的な 2 重点のみで、(ii) 各 2 重点に real crossing または virtual crossing の情報を与えたものをいう。 $n = 1$ のときは、‘link’ を ‘knot’ に換える。virtual crossing を持たない場合、classical link diagram と強調して呼ぶ。

各 crossing の局所的な状況は通常 Figure 1 のように図示される。矢印は向きを意味し、2 種類の real crossing の違いは local arc の上下関係の違いで、それらは sign として区別され、前者を positive crossing、後者を negative crossing とする。この上下関係は 3 次元多様体内で実現化したときに意味を持つ。向きを考えない場合でも、一旦向きを入れてその後忘れる過程を必要とする場合がある。real crossing の上下の情報を忘れたものを flat crossing といい、上の (ii) で、“real crossing” を “flat crossing” に変えた場合、flat virtual link diagram という。Figure 1 にそれぞれの例を挙げる。記号としては、 $D = \text{Im } f$ のように置く。以下、diagram は S^2 上で考える。 \mathbb{R}^2 上で考えるのと本質的な違いはない。

(n -component) classical link は、 n 個 ($n \in \mathbb{N}$) の S^1 から S^3 (や \mathbb{R}^3) への embedding $g : \coprod_{i=1}^n S^1 \rightarrow S^3$ の像と S^3 (や \mathbb{R}^3) の対 $(S^3, \text{Im } g)$ (や $(\mathbb{R}^3, \text{Im } g)$) の ambient isotopy class のことをいう。記号としては、 $L = \text{Im } g$ のように置く。以下、classical link は S^3 内で考える。標準的な射影 $p : S^3 \rightarrow S^2$ を経由すると、generic に $p \circ g$ は classical link diagram となる。real crossing の上下は、 p によりつぶされる parameter の大小で決まる。1 つの link からいくつでも異なる diagram が得られるが、それらは Reidemeister move という crossing の近傍での局所変形の有限列で移り合う。Figure 2 で (R1), (R2), (R3) が Reidemeister move である。

$$\{n\text{-component classical link diagram}\} / \langle (R1), (R2), (R3) \rangle \xrightarrow{1:1} \{n\text{-component classical link}\}$$

容易に観察されるように、classical link は、いきなり S^3 内の link として定義しても違和感がない。diagram を、“link に付随した 1 つの表示方法に過ぎないもの” とした扱いができる。ところが、virtual link の通常の見方はいきなり何らかの 3 次元多様体内の link として与えられず、virtual link diagram に依存した定義が為される。

(n -component) *virtual link* は、(n -component) virtual link diagram において、Figure 2 にある局所変形の有限列で移り合うものを同値と見なした同値類のことである。Figure 2 にある局所変形の全てを *virtual Reidemeister move* という。さらに (n -component) *flat virtual link* は real crossing を flat crossing に変えることにより同様に定義される。

$$\{n\text{-component virtual link diagram}\} / \langle (R1), (R2), (R3), (V1), (V2), (V3), (V4) \rangle \xrightarrow{1:1} \{n\text{-component virtual link}\}$$

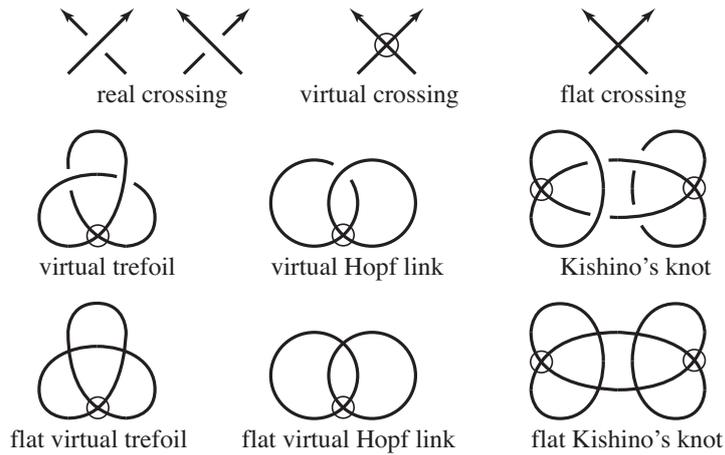


Figure 1: real crossing と virtual crossing と flat crossing

以上でめでたく virtual link は定義されたが、これを直ちに新たな対象として受け入れて研究を開始できるだろうか？今講演ではこの問いに否定的態度を取り、以下の問題を提起する。

Question virtual link の実体は何なのか？またその実体に見合った研究手法は何か？

『実体に見合った研究手法』の意味合いは徐々に説明していく。

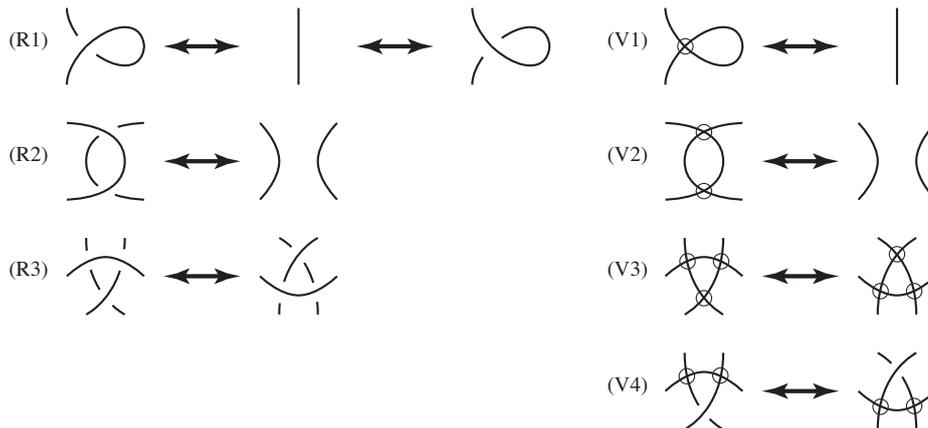


Figure 2: virtual Reidemeister moves

1.2 virtual knot theory 誕生前後

virtual knot theory は、1996 年に L. Kauffman がある研究集会において新しい観点の knot theory として講演したことから始まる、というのがよく通る言われ方で、筆者も自らの論文中ではそのように書いている。論文としては [Kau] がそれに当たる。ただ Kauffman 以前にも萌芽的研究があったことも指摘しておくべきであろう。例を挙げる前に、上記 Question の 1 つの答えとして、

『virtual link は (oriented closed surface) $\times I$ 内の link』

と見なすことができることを言うておく。後にこれがより精密な形で正当化される。この観点は [Kau] においても指摘されている。さて萌芽的研究の代表例として、井上-金戸 [IK] が torus 上の link diagram の Jones polynomial を定義していて、鎌田直 [KN] が曲面上の alternating link diagram を扱っていて、酒井 [Sak] が *formal Wirtinger presentation* を定義して、実質 virtual link の Kauffman polynomial の計算をしている。論文の出版年は様々だが、いずれの研究も開始は 1996 年以前である。M. Goussarov-M. Polyak-O. Viro [GPV] は Kauffman により virtual knot theory が創始されたことを指摘した後、classical link に対する量子不変量が virtual link にも自然に定義できることを示している。尤も Kauffman 自身 1996 年以前から研究しているだろうから、誰が最初か? は厳密に決められるものではない。注目すべきは、Kauffman による virtual knot theory の定着のさせ方である。

virtual knot theory の動機付けとしては、Gauss word (Gauss code) の実現問題が挙げられる。*Gauss word* とは、 n 種類の文字を丁度 2 回登場させるよう 1 列に並べたもののことをいい、向きの付いた knot diagram と始点を決めると実質一意的に定まるものである。例えば、trefoil (の projection) は Figure 3 (a) のように $(1, 2, 3, 1, 2, 3)$ で実現する。逆に Gauss word から knot diagram を定めるためには、各 crossing の情報が必要で、その情報も付けたものを *signed Gauss word* という。Gauss word の発想は C. F. Gauss [Gau] によるもので、classical knot を交点数の小さいものから数え上げる手段として用いられた。C. H. Dowker-M. B. Thistlethwaite [DT] はそれをプログラム化した。当初は classical knot を表す Gauss word のみを拾うのが当たり前で、Figure 3 (b) の $(1, 2, 1, 2)$ のようなものは classical knot では実現されないで除外されていた。一般に、Gauss word が classical knot で実現されるかどうか? の問題は *planarity problem* と言われる (cf. G. Cairns-D. M. Elton [CE])。virtual knot は全ての Gauss word を実体のあるものとして導入されたもので、Figure 3 (b) は virtual trefoil (Figure 1) で実現される。

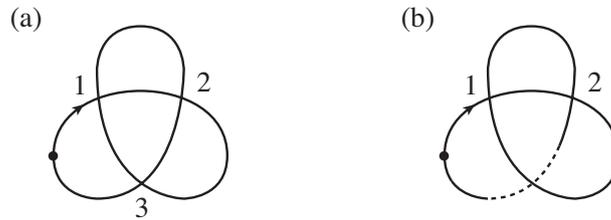


Figure 3: Gauss word $(1, 2, 3, 1, 2, 3)$ と $(1, 2, 1, 2)$ の実現

1.3 algebraic method と geometric method

Kauffman [Kau] は、基本群や quandle や Jones polynomial (Kauffman bracket polynomial と同値) を virtual link に対し定義した。不変量で virtual link を調べる流れはこの時期からしっかり固まったもので、前述の Goussarov-Polyak-Viro [GPV]、J. Sawollek [Sw] による Alexander polynomial の拡張である *Sawollek polynomial*、宮澤 [Miy] による virtual crossing の情報を有効に捉える *Miyazawa polynomial*、V. Manturov [Man] による virtual knot に対する Khovanov homology、そして V. G. Turaev [Tur1, Tur2, Tur3, Tur4, Tur5, Tur6] による一連の *nanoword* (多成分は *nanophrase*) 特に *virtual string* (flat virtual knot と同値) の不変量の理論へと繋がっていく。これらを algebraic method と呼ぶことにする。

一方 geometric に virtual link を捉える手法として、Kauffman [Kau] において既に virtual link diagram が oriented closed surface 上の “virtual crossing のない” link diagram として実現できることが指摘されている。この場合の oriented closed surface は diagram により不定である。鎌田直-鎌田聖 [KK] が virtual link diagram を oriented surface 上に乗せたもの間の基本変形を明確にしたことにより、surface 上の diagram としての virtual link の実体が確定した (cf. J. S. Carter-S. Kamada-M. Saito [CKS] も要参照)。G. Kuperberg [Kup] が virtual link を (oriented closed surface) $\times I$ 内の link として確定させる定理を示したことにより、Question の前半に答えた形となっている。筆者は [Kad1] において flat virtual link に対して [KK] と同様の指摘をしている。前段の Turaev の理論はこのような geometric な実現も足場となっている。この段の内容のいくつかは 2 章で詳述する。

algebraic method と geometric method の中間的なものとして diagrammatic method が挙げられる。例えば Figure 4 左にある (F1), (F2) の局所変形を合わせた *forbidden move* の影響を調べる研究がある。virtual knot に対しては trivial にまで変形でき (金信 [Kan], S. Nelson [Nel])、virtual link に対しては 2 成分 sublink の (real) linking number と *virtual linking number* の組で分類される (及川 [Oi], 岡林 [Ok])。一方の move のみを認める立場では話は別で、(F1) は基本群を保ち、(F2) は一般に基本群を変化させる。Figure 4 右の diagram で、上の 2 つは (F1) で trivial に変形できるが、下は不可能である。またこれら diagram からついでに指摘しておくが、virtual link においては Wirtinger presentation の上方表示と下方表示は一般に同型ではない。さらに鏡像も一意に定まるものではなく、対称面を明示しないと確定しない (Kishino’s knot sisters)。また 3 つの diagram の Jones polynomial は全て自明である。このことより、Figure 4 右上の diagram は、基本群と Jones polynomial からは非自明性が判定できない。岸野-佐藤 [KS] は Kishino’s knot の非自明性を、3 重化したものの Jones polynomial を計算機で計算することにより示した。今稿の 1 つの主題は、非自明性の判定を計算機に頼らずにすることである。

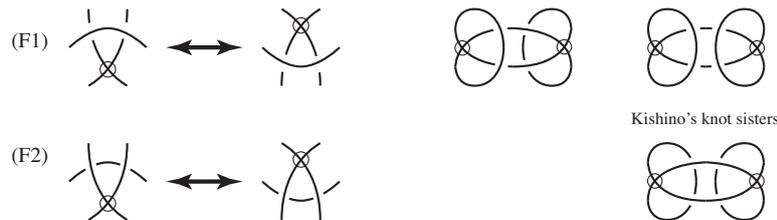


Figure 4: forbidden moves

1.4 virtual knot theory と nanoword theory

nanoword theory は前節に書いた通り Turaev [Tur1, Tur2, Tur3, Tur4, Tur5, Tur6] により創始された、geometric な応用の広がりを目指した不変量の理論、と見受けられる。Gauss word は有限種類の文字が丁度 2 度現れる数列なのに対し、nanoword はそういう制限を排除した word である。そのため単なる link diagram だけでなく、多重点や尖点を持つ場合も包含して扱おうとする意欲的な対象である。nanoword theory においては、Reidemeister move を word の move に翻訳し、*homotopy* と呼んでいる。その homotopy が Figure 2 の virtual Reidemeister move に由来する限りにおいては本質的に virtual link を扱っていることになる。nanoword theory の冒険的課題としては、homotopy を全く別の種類のものに取り替えて不変量を定義することであろう。伊藤 [It] において V. I. Arnold [Arn] による plane curve の不変量を nanoword theory の観点で調べている。ただ nanoword theory の現状は virtual link の近傍 (比喩的な意味) にしか応用されていなく、nanoword に対してもやはり冒頭の Question に答えなければならない段階にあるであろう。本質を知るための初期的作業として、table を作成し、不変量の強さを観察するのは必要である。virtual strings としての nanoword, nanophrase の分類は福永, A. Gibson [Fuk, Gib1]、nanoword theory の手法での Khovanov homology の定義は福永-伊藤 [F1] を参照されたい

2 virtual knot theory における geometric method

1.3 節 2 段落目の内容を、筆者の結果 [Kad1, Kad2, Kad3, Kad4, Kad5] を中心として解説する。

2.1 surface realization と flat virtual link の reduced diagram

virtual link diagram D の正則近傍を取り、virtual crossing の近傍のみ Figure 5 のように取り直した compact surface を $N(\tilde{D})$ とし、その上に自然に D を乗せ直したものを \tilde{D} としたとき、対 $(N(\tilde{D}), \tilde{D})$ を *abstract link diagram* という (cf. [KK])。もはや初めに乗っていた S^2 とは無関係な抽象的な空間対と見なす。 D に対して $(N(\tilde{D}), \tilde{D})$ は一意に決まる。flat virtual link version も同様に定義する。

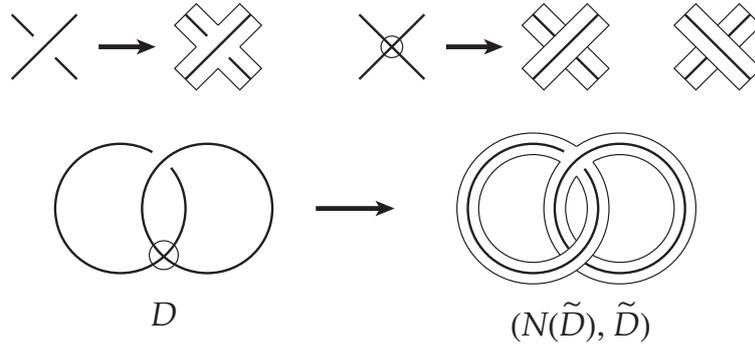


Figure 5: abstract link diagram

virtual link L の diagram を D とする。 D の abstract link diagram $(N(\tilde{D}), \tilde{D})$ の surface の境界 $\partial N(\tilde{D})$ に他のいくつかの oriented compact surface を接着することにより closed surface F にしたとき、対 (F, \tilde{D}) を D の、或は L の *surface realization* という。接着する surface を disk に限定したときの surface realization を D の *canonical realization* という。canonical realization は D に対して一意に決まる。flat virtual link version も同様に定義する。Figure 6 はいずれも canonical realization の例である。また、surface realization (F, \tilde{D}) を $F \times I$ 内の link として実現したものを *space realization* という。

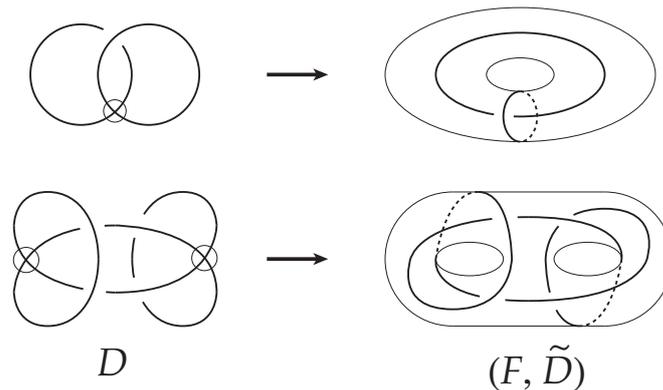


Figure 6: surface realization

surface realization 全体に以下の変換を定義する。基本となる surface realization を (F, \tilde{D}) とする。(S0): F の orientation preserving autohomeomorphism φ に対し、 (F, \tilde{D}) を $(F, \varphi(\tilde{D}))$ に移すもの。

(S1): F 上の Reidemeister move で \tilde{D} を移動した結果を \tilde{D}' としたとき、 (F, \tilde{D}) を (F, \tilde{D}') に移すもの。

(S2): $F \setminus \tilde{D}$ に handle を接着した結果の surface を F' としたとき、 (F, \tilde{D}) を (F', \tilde{D}) に移すもの。

(S0), (S1), (S2) で生成する surface realization 間の同値関係を *stable equivalence* という。flat virtual link version も同様に定義する。

Theorem 2.1 ([KK, CKS]; flat virtual link version [Kad1]) surface realization 全体の stable equivalence による同値類は、(flat) virtual link 全体の集合と自然に 1 対 1 に対応する。

virtual link の numerical invariant をいくつか定義する。virtual link L の diagram を D 、 (F, \tilde{D}) を D の canonical realization とする。まず D に対して、 $sg(D)$ (F の genus) を D の *supporting genus*、 $cr(D)$ (D の real crossing 数) を D の (*real*) *crossing number*、 $c(D)$ (F の連結成分数) を D の *splitting number*、 $d(D) = (\partial N(\tilde{D}))$ の連結成分数) を D の *disk number* と定義する。 L に対して、 $sg(L) = \min\{sg(D) \mid D \text{ は } L \text{ の diagram}\}$ を L の *supporting genus*、 $cr(L) = \min\{cr(D) \mid D \text{ は } L \text{ の diagram}\}$ を L の (*real*) *crossing number*、 $c(L) = \max\{c(D) \mid D \text{ は } L \text{ の diagram}\}$ を L の *splitting number*、 $d(L) = \min\{d(D) \mid D \text{ は } L \text{ の diagram}\}$ を L の *disk number* と定義する。flat virtual link version も同様に定義する。 $sg(L) = 0$ であることと、 L が classical link であることが同値である。

Lemma 2.2 ([Kad2]) $2c(D) - 2sg(D) = d(D) - cr(D)$.

さらに flat virtual link に限定して、[Kad2] では以下を示している。

Statement 1 ([Kad2, Theorem 2.6]) L が flat virtual link のとき、 $2c(L) - 2sg(L) = d(L) - cr(L)$.

Statement 1 と名付けた理由は後述する。

virtual link L の diagram を D 、 (F, \tilde{D}) を D の canonical realization とする。 $sg(L) = sg(D)$ 、 $c(L) = c(D)$ が成立するとき、 D を *minimal diagram*、 (F, \tilde{D}) を *minimal realization* と定義する。flat virtual link version も同様に定義する。以下が virtual knot theory の geometric method における基本定理である。証明は、space realization を cut & paste して為される。

Theorem 2.3 (Kuperberg [Kup]) virtual link L に対し、minimal realization は存在し、2 つの minimal realization が (S0), (S1) の有限列で移り合う意味において一意的である。

筆者が [Kad1] で “示した” Theorem 2.3 の flat virtual link version を述べるための準備をする。 L を flat virtual link、 D を diagram、 (F, \tilde{D}) を D の surface realization とする。 D が F 上で Reidemeister move できる箇所には Figure 7 のような disk を張ることができる。各 move (R1), (R2), (R3) に対応する disk をそれぞれ 1-disk、2-disk、3-disk といい、それらを総称して *Reidemeister disk* という。

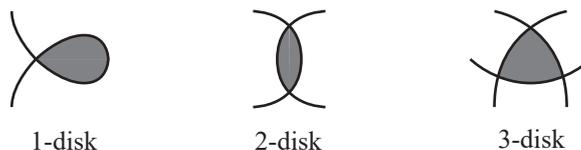


Figure 7: Reidemeister disk

この考えを拡張して、大域的な意味での 1-disk や 2-disk を *global 1-disk*、*global 2-disk* といい、総称して *global disk* という (Figure 8)。Reidemeister disk が disk の embedding で実現され、内部が diagram と交わらないのに対し、global disk は自己交叉領域や blow down された部分も許し、内部が diagram と交わるのを許すものである。細かい条件は [Kad1] 参照のこと。Figure 8 において、 x を *reducible point*、 $\{p, q\}$ を *reducible pair* という。そしてこれらは Reidemeister move の列で消滅させることができる。virtual link diagram D が reducible point も reducible pair も持たないとき、*reduced diagram* という。



Figure 8: global disk

Theorem 2.4 ([Kad1, Theorem 3.7], J. Hass-P. Scott [HS]) flat virtual link L は reduced diagram を持つ。

そしてこのことから以下を示している。

Statement 2 ([Kad1, Theorem 3.8, Corollary 3.10]) flat virtual link の reduced diagram 同士は (R3) の有限列で移り合う。さらに reduced diagram は minimal diagram である。

Statement 2 から Statement 1 を導くのは難しくはない。ところが足場となる Statement 2 に対して、A. Gibson [Gib1] が以下の反例を提示した。以下の 5 成分 virtual link で、 K_2 と K_3 の交換が (R3) の列のみで実現しない。“Statement” としたのはこの反例のせいで、少なくとも Statement 2 は修正を要する。

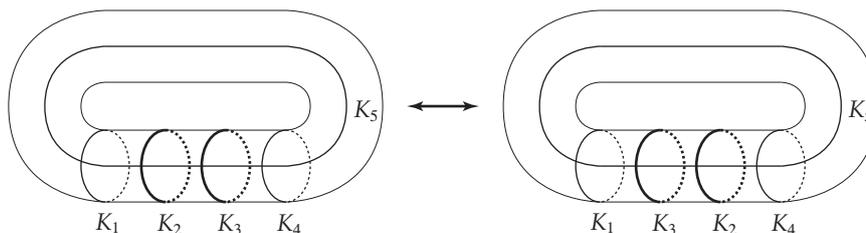


Figure 9: counterexample by Andrew Gibson

反例が生じた原因は、[Kad1] Fig. 20 (5) (ii) の考察が甘かったせいで、これがまさに成分交換に当たる所である。virtual link の 2 つの成分 K_i, K_j が、それぞれある loop (*primitive loop* という) の何重かの cabling [Gib2] になっていて、それら primitive loop 同士が parallel (i.e. surface realization で annulus を張る) のとき、 K_i, K_j を交換する move を *interchanging* という。このとき、修正された Statement は以下である。

Theorem 2.5 ([Kad5]) flat virtual link の reduced diagram 同士は (R3) と interchanging の有限列で移り合う。さらに reduced diagram は minimal diagram である。

この結果は、Statement 1 の主張を保つ。Theorem 2.4 の証明は、[HS] のように surface に計量を入れると直ちにわかることであるが、Statement 2 (正しくは Theorem 2.5) の証明の前段階として、以下の *standard reducing process* という global disk を消していくアルゴリズムにより示した。Statement 2 においては、アルゴリズムの各段階で主張の成立を確認している。

(P1): canonical realization から reducible point を全て消す。

(P2): (P1) の後、canonical realization に取り直す。

(P3): (P2) の後、reducible pair を全て消す。

(P4): (P3) の後、canonical realization に取り直す。

(P5): (P4) の後、reducible point があれば (P1) に戻り、なければ終了。

この手法で、flat Kishino's knot (Figure 1) の supporting genus が 2 であることを示した。4 交点なので確認が容易である。

2.2 Dye-Kauffman polynomial と virtual 2-braid の分類

H. A. Dye-L. H. Kauffman [DK] は、surface realization における bracket polynomial を定義し、*surface bracket polynomial* と名付けた。ここでは [Kad4] に従って *Dye-Kauffman polynomial* と呼ぶ。 A を不定元として、 $\Lambda = \mathbb{Z}[A, A^{-1}]$ と置く。 \mathcal{C} を oriented closed surface F 内の unoriented disjoint loop の有限集合でどの loop も F で disk を張らないもの全体、とするとき、J. H. Przytycki [Prz] による $F \times I$ の Kauffman bracket skein module の結果により、Dye-Kauffman polynomial は $\Lambda[\mathcal{C}]$ に値を取る。これを用いても Kishino's knot の非自明性が割と容易な計算で示される。

virtual 2-braid とは、Figure 10 にあるような virtual link B_{p_1, \dots, p_m} のことで、各長方形内の $p_i \neq 0$ ($i = 1, \dots, m$) は half-twist の数で、正なら righthand、負なら lefthand のものである。ここでは $m \geq 1$ としておく。virtual link の交点数の小さい table において頻繁に現れ、不変量の強さを確かめるのによく用いられる。virtual Hopf link は B_1 、virtual trefoil は B_2 に当たる。

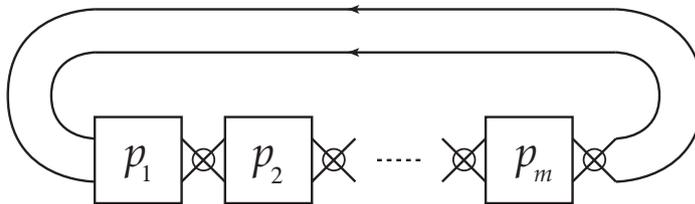


Figure 10: virtual 2-braid B_{p_1, \dots, p_m}

筆者は Dye-Kauffman polynomial からの情報を用いて、以下の分類定理を示した。

Theorem 2.6 ([Kad4]) 2 つの oriented virtual 2-braid $B_{p_1, \dots, p_m}, B_{q_1, \dots, q_n}$ が同値な oriented virtual link である必要十分条件は、(i) $m = n$ で、(ii) ある k が存在し、 $p_i = q_j, j \equiv i + k \pmod{m}$ が成り立つことである。

金信-辻 [KT] において、virtual 2-braid の基本群が 2-knot の基本群と深い関連があることが示されている。

3 今後の課題

virtual link に対しても、classical knot theory が辿ってきたような cut & paste などの素朴な手法を通過させたい。一般の oriented compact 3-manifold M 内の link を Heegaard surface に集めることにより、 M での knot theory を virtual link で記述する話に繋げていき、“virtual link で Dehn surgery”などの言葉を正当化したい。M. Scharlemann-A. Thompson [ST] は $\text{surface} \times I$ 内の knot の Dehn surgery に関する結果を示していて、この主旨に合っている。virtual knot theory や nanoword theory の手法が Dehn surgery の問題に生かされると面白いであろう。3-manifold 内の link の表示については、S. Lambropoulou [Lam] も参照されたい。

1.4 節で述べたように、nanoword の実体を探ることも挙げられる。どうやら nanoword そのものに確定した実体がある訳ではなく、様々なものに変化し得る所に意味があり、現段階ではその例示に乏しい印象がある。門上-桐生 [KaKi] でもその辺りの指摘をしている。筆者の印象では、まずグラフ理論への応用の定式化はし易そうである。山田 [Yam] でグラフの Reidemeister move が確定しているのがその理由である。T. Fleming-B. Mellor [FM] においてグラフの virtual knot theory が展開されている。

2-knot に関しては、word 化と、D. Roseman [Ros] による *Roseman move* の word への翻訳が成功すればうまくいくのだが、これはかなりの困難を伴うに違いない。2-knot の virtual knot theory は武田 [Tak] を参照されたい。他にも低次元トポロジーでは、word 化と相性のよい対象が多くあるので、その同値関係の翻訳、そして不変量を探すことで nanoword theory が深まることであろう。2009 年 2 月 5 日～7 日に東京工業大学で開催された研究集会「nanowords と virtual knots」は nanoword theory にとっても virtual knot theory にとっても、各理論を主題とする研究集会としては国内で初のものとなった。その最終日に行われた討論会の内容 [FGI] が今後の進展を考察する上で大いに参考になるであろう。

Acknowledgement 講演の機会を与えていただいた主催者に感謝します。また今研究の過程において、助言、激励をいただいた多くの方々にも感謝します。The author is supported by a grant (No. 100771023) of NSFC.

References

- [Arn] V. I. Arnold, *Plane curves, their invariants, perestroikas and classifications*, Adv. Soviet Math., AMS **21** (1994), 33–91.
- [CE] G. Cairns and D. M. Elton, *The planarity problem for signed Gauss words*, J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), 359–367.
- [CKS] J. S. Carter, S. Kamada and M. Saito, *Stable equivalence of knots on surfaces and virtual knot cobordisms*, J. Knot Theory Ramifications **11** (2002), 311–322.
- [DT] C. H. Dowker and M. B. Thistlethwaite, *Classification of knot projections*, Topol. Appl. **16** (1983), 19–31.
- [DK] H. A. Dye and L. H. Kauffman, *Minimal surface representations of virtual knots and links*, Algebr. Geom. and Topol. **5** (2005), 509–535.
- [FM] T. Fleming and B. Mellor, *Virtual spatial graphs*, math.GT/0510158.
- [Fuk] T. Fukunaga, *Homotopy classification of nanophrases in Turaev’s theory of words*, to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [FGI] T. Fukunaga, A. Gibson and N. Ito, 研究集会「nanowords と virtual knots」討論会による問題集, 2009 年 2 月 7 日, <http://www.math.titech.ac.jp/~hitoshi/workshop/nanowords.html>
- [FI] T. Fukunaga and N. Ito, *Khovanov homology and words*, math.GT/0901.3956.
- [Gau] C. F. Gauss, *Werke*, Vol. **VIII**, Teubner, Leipzig, 1900, 272, 282–286.
- [Gib1] A. Gibson, *On tabulating virtual strings*, Acta Math. Viet. **33** (2008), no. 3, 493–518.
- [Gib2] A. Gibson, *Covering, composites and cables of virtual strings*, math.GT/0808.0396.
- [GPV] M. Goussarov, M. Polyak and O. Viro, *Finite-type invariants of classical and virtual knots*, Topology **39** (2000), 1045–1068.
- [HS] J. Hass and P. Scott, *Intersection of curves on surfaces*, Israel J. Math. **51** (1985), 90–120.
- [IK] K. Inoue and T. Kaneto, *A Jones type invariant of links in the product space of a surface and the real line*, J. Knot Theory Ramifications **3** (1993), 141–151.
- [It] N. Ito, *Invariants via word for curves and fronts*, math.GT/0705.0412.
- [Kad1] T. Kadokami, *Detecting non-triviality of virtual links*, J. Knot Theory Ramifications **12** (2003), no.6, 781–803.
- [Kad2] T. Kadokami, *Some numerical invariants of flat virtual links are always realized by reduced diagrams*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), no.3, 289–297.
- [Kad3] T. Kadokami, *The virtual crossing number of 2-component flat virtual links with the supporting genus one*, J. Knot Theory Ramifications **17** (2008), no.5, 633–647.
- [Kad4] T. Kadokami, *Classification of closed virtual 2-braids*, J. Knot Theory Ramifications **17** (2008), no.10, 1223–1239.
- [Kad5] T. Kadokami, *Connected sums and prime decompositions of virtual/flat virtual links*, in preparation.

- [KaKi] T. Kadokami and Y. Kiri, *Geometric abilities of topological Gauss words and symbolic computations*, in preparation.
- [Kan] T. Kanenobu, *Forbidden moves unknot a virtual knot*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), 89–96.
- [KT] T. Kanenobu and K. Tsuji, *Groups of two-braid virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007), 671–697.
- [KN] N. Kamada, *The crossing number of alternating link diagrams on a surface*, Proc. of Knots 96 (1997), 377–382.
- [KK] N. Kamada and S. Kamada, *Abstract link diagrams and virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), 93–106.
- [Kau] L. H. Kauffman, *Virtual knot theory*, European J. Combin. **20** (1999), 663–690.
- [KS] T. Kishino and S. Satoh, *A note on non-classical virtual knots*, J. Knot Theory Ramifications **13** (2004), 845–856.
- [Kup] G. Kuperberg, *What is a virtual link ?*, Algebr. Geom. and Topol. **3** (2003), 587–591.
- [Lam] S. Lambropoulou, *L-moves and Markov theorems*, J. Knot Theory Ramifications **16** (2007), 1459–1468.
- [Man] V. Manturov, *Khovanov homology for virtual knots with arbitrary coefficients*, Izv. Math. **71** (2007), 967–999.
- [Miy] Y. Miyazawa, *Magnetic graphs and an invariant for virtual links*, J. Knot Theory Ramifications **15** (2006), 1319–1334.
- [Nel] S. Nelson, *Unknotting virtual knots with Gauss diagram forbidden moves*, J. Knot Theory Ramifications **10** (2001), 931–935.
- [Oi] T. Oikawa, *On a local move for virtual knots and links*, to appear in J. Knot Theory Ramifications.
- [Ok] T. Okabayashi, *Forbidden moves for virtual links*, Kobe J. Math. **22** (2005), 49–63.
- [PV] M. Polyak and O. Viro, *Gauss diagram formulas for Vassiliev invariants*, Int. Math. Res. Not. (1994), no. 11, 445–453.
- [Prz] J. H. Przytycki, *Fundamentals of Kauffman bracket skein modules*, Kobe J. Math. **16** (1999), 45–66.
- [Ros] D. Roseman, *Reidemeister-type moves for surfaces in four dimensional space*, Banach Center Publications **42** (1998) Knot theory, 347–380.
- [Sak] T. Sakai, *Wirtinger presentations and the Kauffman bracket*, Kobe J. Math. **17** (2000), 83–98.
- [Sw] J. Sawollek, *On Alexander-Conway polynomials for virtual knots and links*, math.GT/9912173.
- [ST] M. Scharlemann and A. Thompson, *Surgery on a knot in surface $\times I$* , math.GT/0807.0405.
- [Tak] Y. Takeda, *Virtual surface knot theory*, preprint.
- [Tur1] V. G. Turaev, *Virtual strings*, Ann. Inst. Fourier **54** (2004), 2455–2525.
- [Tur2] V. G. Turaev, *Knots and words*, Int. Math. Res. Not. (2006), Art. ID 84098, 23pp.
- [Tur3] V. G. Turaev, *Topology of words*, Proc. London Math. Soc. **95** (2007), 360–412.
- [Tur4] V. G. Turaev, *Cobordisms of words*, math.CO/0511513.
- [Tur5] V. G. Turaev, *Lectures on topology of words*, Based on notes by Eri Hatakenaka, Daniel Moskovich, and Tadayuki Watanabe, Jpn. J. Math. **2** (2007), 1–39.
- [Tur6] V. G. Turaev, *Cobordisms of knots on surfaces*, Jour. of Top. **1** (2008), 285–305.
- [Yam] S. Yamada, *An invariant of spatial graphs*, J. Graph Theory **13** (1989), 537–551.

KADOKAMI Teruhisa
 Department of Applied Mathematics,
 Dalian University of Technology
 Dalian-si, Liaoning-sheng, 116024, China
 kadokami@dlut.edu.cn
 kadokami2007@yahoo.co.jp

Geometric quantization of integrable systems

Mark Hamilton

August 10, 2009

1 Introduction

Broadly speaking, “quantization” is a procedure for taking a “classical system” and obtaining from it a “quantum system.” The mathematical model of a classical mechanical system is a symplectic manifold, and that of a quantum system is a Hilbert space. Thus, we view quantization as a procedure that takes a symplectic manifold M and constructs a Hilbert space $\mathcal{Q}(M)$ that is meant to represent the same physical system. There are many different types of quantization, which are all to some extent generalizations of *canonical quantization*, where M the classical mechanical phase space $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$, and $\mathcal{Q}(M) = L^2(\mathbb{R}^n)$.

In the theory of geometric quantization, $\mathcal{Q}(M)$ is constructed from sections of a complex line bundle \mathbb{L} over M . One part of the construction is a *polarization*, one example of which is a *real polarization*, given by a foliation of M into Lagrangian submanifolds.

When using a real polarization to quantize a regular enough manifold, a result of Śniatycki says that the quantization can be found by counting certain objects, called Bohr-Sommerfeld fibres. However, there are many types of systems to which this result does not apply. One such type is the class of completely integrable systems, which are examples coming from mechanics that have many nice properties, but which are nonetheless too singular for Śniatycki’s theorem to apply.

In this talk, we explore one approach to the quantization of integrable systems, and show a Śniatycki-type relationship to Bohr-Sommerfeld fibres. However, some surprising features appear, including infinite-dimensional contributions and strong dependence on the polarization.

The results in §5 are joint with Eva Miranda of Barcelona.

2 Geometric quantization

Let (M, ω) be a symplectic manifold of dimension $2n$. We require the existence of a complex Hermitian line bundle \mathbb{L} over M , with a connection ∇ whose curvature is ω . Such an \mathbb{L} is called a *prequantum line bundle*; in order for it to exist, ω must satisfy an integrality condition: $[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ must lie in the image of $H^2(M, \mathbb{Z})$ (cf. [20], p160). The quantum space $\mathcal{Q}(M)$ will be constructed out of sections of \mathbb{L} . For various reasons, the space of all

sections is “too big” (see [20], §9.1 for more details), and so we work with a subset of only certain sections of \mathbb{L} .

To define this subset, we need a *polarization*. The formal definition of a polarization is an integrable complex Lagrangian distribution. However, most applications use one of two particular types, *real* and *Kähler* polarizations, which can be described more simply (see below). If one manifold admits several different polarizations, it is natural to ask to what extent the resulting quantization depends on the choice of polarization. In this talk we work with real polarizations, defined below, and mention Kähler polarizations for comparison. (See [20] or [18] for more information about polarizations.)

Example. A *Kähler polarization* is determined by a complex structure on M . When \mathbb{L} has the structure of a holomorphic line bundle, the quantum space $\mathcal{Q}(M)$ is constructed from holomorphic sections of \mathbb{L} . (Usually it is just the space of holomorphic sections.)

Definition 1. A *real polarization* is given by a foliation of M by Lagrangian submanifolds,¹ with associated distribution $P \subset TM$.

Given a real polarization, $\mathcal{Q}(M)$ is defined using sections “flat along the leaves.”

Definition 2. Given (M, \mathbb{L}, ∇) as above and a real polarization $P \subset TM$, a section σ of \mathbb{L} is *flat along the leaves* or *leafwise flat* if it is covariant constant along directions in P , i.e. if $\nabla_X \sigma = 0$ for all $X \in P$. Let \mathcal{J} be the sheaf of sections flat along the leaves.

A natural candidate for $\mathcal{Q}(M)$ is the space of leafwise flat sections. However, this is unsuitable: although leafwise flat sections always exist locally (since the curvature of ∇ is zero on the leaves), globally the situation is quite different. In fact, most leaves do not have a nonzero leafwise flat section defined over the entire leaf, because of holonomy. Leaves that do possess a flat section defined on the entire leaf are called *Bohr-Sommerfeld leaves*.

Typically, the set of Bohr-Sommerfeld leaves is discrete. This implies that there are no nonzero leafwise flat sections defined over all of M , since such a section would have to be continuous and supported on a set of codimension greater than zero, and so the space of global leafwise flat sections is zero. Kostant in [13] suggested using higher cohomology groups associated with \mathbb{L} for the quantization.

Definition. The *quantization* of M is the vector space

$$\mathcal{Q}(M) := \bigoplus_{k \geq 0} H^k(M; \mathcal{J})$$

where $H^*(M; \mathcal{J})$ is the sheaf cohomology of M with coefficients in \mathcal{J} .²

¹Recall that a submanifold is *Lagrangian* if it has half the dimension of M , and the symplectic form ω vanishes on it.

²Some authors, particularly those who take an index theory approach to quantization (e.g. [8]) define the quantization as the alternating sum of cohomology groups, rather than the straightforward sum as we do here. However, as we will show, all but one of these groups are zero, and so it does not really matter which definition we take. Guillemin and Sternberg (in [9]) avoid this question altogether and say merely that “the main objects of interest are the cohomology groups $H^k(M; \mathcal{J})$.”

(There are many sources for geometric quantization, for the reader who wishes more than these extremely sketchy details. The books [20] and [18] are classic references, if both rather technical; [16] is perhaps easier as an introduction, though still very complete. John Baez has a good brief introduction on the Web at [3]. There is also a short introduction at the beginning of Chapter 6 of [8], where the authors also mention numerous other sources. There are of course many other references.)

The main result about quantization using real polarizations is the following theorem.

Theorem (Śniatycki [17]). Let M be a compact $2n$ -dimensional symplectic manifold, with a prequantization line bundle \mathbb{L} . Let P be a real polarization such that the projection map $\pi: M \rightarrow M/P$ is a fibration with M/P a manifold. Then $H^k(M; \mathcal{J}) = 0$ for all $k \neq n$. Furthermore,

$$H^n(M; \mathcal{J}) = \bigoplus_{b \in BS} \mathbb{C}_b,$$

where the sum is taken over the set of Bohr-Sommerfeld fibres.

Thus, quantization can be found by counting Bohr-Sommerfeld leaves.

(This theorem actually applies to non-compact manifolds as well, in which case the non-zero cohomology is in degree equal to the rank of a fibre of π . However, in this talk we only consider the compact case.)

However, the hypothesis that B^n be a manifold is quite restrictive. There are many systems (see the next section, for example) which admit a singular fibration where generic fibres are Lagrangian submanifolds, but there may be fibres which have smaller dimension. This is like a real polarization except for the singularities, and so we view it as a singular real polarization and extend the quantization machinery to this case.

3 Integrable systems

Completely integrable systems are a particularly nice class of examples of Hamiltonian systems, coming from mechanics.

Definition. A (completely) integrable system on a symplectic manifold (M^{2n}, ω) is a collection of n functions $f_j: M \rightarrow \mathbb{R}$ which

- pairwise Poisson commute, $\{f_i, f_j\} = 0$, and
- are functionally independent almost everywhere, $df_1 \wedge \cdots \wedge df_n \neq 0$.

The collection of functions $F = (f_1, \dots, f_n): M \rightarrow \mathbb{R}^n$ is often called the *moment map* in the literature of integrable systems.

Integrable systems have particularly nice topology and dynamics. In particular:

Arnol'd-Liouville Theorem. Let F be a completely integrable system on M . Then:

- Regular levels sets $F^{-1}(c)$ are Lagrangian submanifolds. If a regular level set $F^{-1}(c)$ is compact, it is diffeomorphic to a torus. (More generally, they are $T^k \times \mathbb{R}^{n-k}$.)
- Near a regular level $F^{-1}(c)$, there are coordinates $(a_1, \dots, a_n, \phi_1, \dots, \phi_n)$, called *action-angle coordinates*, such that
 - ϕ_1, \dots, ϕ_n are coordinates on the torus fibres
 - The flow of each X_{f_j} is linear in the torus coordinates
 - $\omega = \sum da_j \wedge d\phi_j$
 - F is a function of the a_j only.

(See for example [4], Theorem I.1.8, or [1], §49.)

Some examples of integrable systems include toric manifolds; the simple mechanical pendulum in one dimension; the rigid body moving in free space (sometimes known as the “Euler top”); and the spherical pendulum. (See [5] for a detailed discussion of these last two examples.) Integrable systems form a class of examples that has been much studied, and there is an extensive literature about them. It is impossible to give an even partially complete list of references in this short paper; rather, we refer to reader to [2], which has a lengthy list of references (as well as a long list of examples of integrable systems on page 4).

A particularly simple example is any Morse function on a two-dimensional manifold.

3.1 Classification of singularities

Note that when the manifold M is compact, the moment map F has singularities, which correspond to singularities of the distribution by Hamiltonian vector fields. A classification of the types of non-degenerate singularities that can appear in integrable systems was established by Eliasson and clarified by Miranda in [6], [7], and [15], based on the algebraic classification due to Williamson [19] of Cartan subalgebras of the Lie algebra of the symplectic group. Eliasson and Miranda give a symplectic local model for a neighbourhood of the singularity. In particular, such singularities are isomorphic to the product of three basic types, called *elliptic*, *hyperbolic*, and *focus-focus*.

Theorem 3 (Eliasson, Miranda). Given an integrable system $F = (f_1, \dots, f_n)$ on M , in the neighbourhood of a nondegenerate singular point there exists a symplectic set of coordinates $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ such that in these coordinates, the integrable system is equivalent to one in which each f_j is one of the following:

- $f_j = x_j^2 + y_j^2$ (elliptic)
- $f_j = x_j y_j$ (hyperbolic)
- $\begin{cases} f_j = x_j y_{j+1} - x_{j+1} y_j \\ f_{j+1} = x_j y_j + x_{j+1} y_{j+1} \end{cases}$ (focus-focus)

We call these coordinates *Eliasson coordinates*.

3.2 Quantization?

By the Arnol'd - Liouville theorem, generic fibres of an integrably system F are Lagrangian tori. This looks almost like the leaves of a real polarization, except that some fibres may have smaller dimension, or not be smooth manifolds at all. We wish to construct the quantization of such a system, using this as our polarization.

Extend the definitions in the construction of geometric quantization in the straightforward way. First, let $P = \text{span}\{X_{f_1}, \dots, X_{f_n}\}$. This is a sub-bundle of TM , with generic fibre a Lagrangian subspace, which we view as a *singular* real polarization. (Compare Definition 1.)

A section is *leafwise flat* if $\nabla_X \sigma = 0$ for all $X \in P$, exactly as in Definition 2. Let \mathcal{J} be the sheaf of such sections, and consider $H^k(M; \mathcal{J})$. We wish to find these sheaf cohomology groups for integrable systems.

The classification in Theorem 3 gives a starting point for this computation: go down the list and study each type of singularity separately.

4 Elliptic singularities

First we address the simplest case, that of elliptic singularities, which is studied in [10].

Theorem. [10] Let M be a compact $2n$ -dimensional symplectic manifold, with a prequantization line bundle \mathbb{L} , and with a singular real polarization given by the fibres of a completely integrable system with only elliptic singularities.³ Let \mathcal{J} be the sheaf of leafwise flat sections of \mathbb{L} . Then $H^k(M; \mathcal{J}) = 0$ for all $k \neq n$, and

$$H^n(M; \mathcal{J}) \cong \bigoplus_{b \in BS} \mathbb{C}$$

where the sum is taken over all *non-singular* Bohr-Sommerfeld fibres.

Thus the result for elliptic singularities is similar to Śniatycki's theorem, except that the sum does not include the singular Bohr-Sommerfeld fibres.

This is somewhat surprising. For example, a toric manifold is an integrable system, where the moment map for the integrable system is the same as the moment map coming from the torus action, and has only elliptic singularities. The Bohr-Sommerfeld fibres in this case are the integer points in the moment polytope; the non-singular Bohr-Sommerfeld fibres correspond to integer points in the *interior* of the polytope.

A toric manifold also has a natural complex structure, coming from its construction as a toric variety, which gives it a natural Kähler polarization. If the manifold is quantized using this polarization, the dimension of the quantization is equal to the number of integer lattice points in the moment polytope, *including* points on the boundary. (This is a well-known result; see [11] for a more complete discussion.)

Thus these two different polarizations give different quantizations.

³In [10] the result is stated in terms of "locally toric singular Lagrangian fibrations," which are equivalent to integrable systems with only elliptic singularities.

5 Hyperbolic singularities

The case of hyperbolic singularities is studied in [12].

Consider a system in two dimensions, so the moment map is simply a single real-valued function. By Theorem 3, in a neighbourhood of a hyperbolic singularity, we have Eliasson coordinates (x, y) in which the leaves are given by $xy = \text{const}$, and the singular point is the origin.

Lemma 4. Over any open neighbourhood which does not intersect the singular leaf, a leafwise flat section can be written in Eliasson coordinates as

$$\sigma(x, y) = a(xy) e^{\frac{i}{2}xy \ln(\frac{x}{y})} \quad (1)$$

where a is a smooth complex function of one variable.

“Analytically flat” functions — those with all Taylor coefficients zero — play an important role in the hyperbolic case.

Lemma 5. A leafwise flat section σ that is defined on a neighbourhood of a hyperbolic singular point is analytically flat at the singular point. Furthermore, in the local expression (1) above, the function a must be analytically flat at zero (namely at the singular leaf).

Theorem 6. [12] Let (M, ω, F) be a two-dimensional, compact, completely integrable system, whose moment map has only nondegenerate singularities of elliptic or hyperbolic type.⁴ Suppose M has a prequantum line bundle \mathbb{L} , and let \mathcal{J} be the sheaf of sections of \mathbb{L} flat along the leaves. Then $H^k(M, \mathcal{J}) = 0$ for $k \neq 1$, and

$$H^1(M; \mathcal{J}) \cong \bigoplus_{p \in \mathcal{H}} (\mathbb{C}^{\mathbb{N}} \oplus \mathbb{C}^{\mathbb{N}}) \oplus \bigoplus_{b \in BS} \mathbb{C}_b.$$

Here, the first sum is over the non-singular Bohr-Sommerfeld leaves, while the second is over the set of hyperbolic singular points, and $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ denotes the space of sequences of complex numbers.

Thus, the cohomology $H^1(M, \mathcal{J})$ has two contributions of the form $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ for each hyperbolic singularity.

The space of sequences of complex numbers is the same as the space of complex-valued Taylor series. It arises in this situation as a quotient. Roughly speaking, a leafwise flat section is determined by a smooth function on a transversal to the leaves (the function a in Lemma 4). Near the singular point, by Lemma 5, this function must be analytically flat. Further away from the singular point, there are no such restrictions. In the cohomology calculations (which are carried out in [12] using Čech cohomology), this leads to a quotient of the space of smooth functions by the space of analytically flat functions, which gives a space of Taylor series.

⁴This is actually implied by the hypothesis that M have dimension 2, since the focus-focus system is four-dimensional.

Theorem 6 shows that this quantization is strongly dependent on the polarization, since it is easy to come up with different real polarizations on a surface with different numbers of hyperbolic singularities. One example is given in Figure 1: the first is the height function on a sphere, which has two elliptic singularities; the second comes from the Euler system, and has two hyperbolic singularities and four elliptic. (The second image is taken from [14]. I am grateful to the authors for permitting me to use their beautiful picture.)

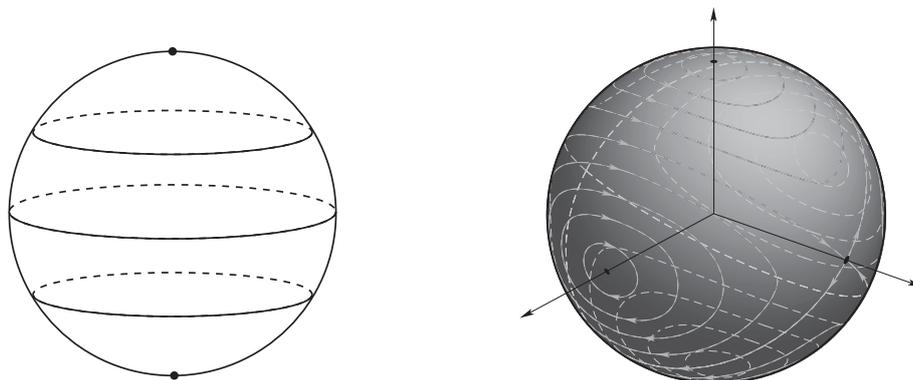


Figure 1: Two different integrable systems on a sphere

References

- [1] V. I. Arnol'd, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1989
- [2] M. Audin, *Spinning tops: a course in integrable systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996
- [3] J. Baez, notes on "Geometric Quantization,"
<http://math.ucr.edu/home/baez/quantization.html>
- [4] A. Cannas da Silva, *Symplectic toric manifolds*, in M. Audin, A. Cannas da Silva, and E. Lerman, *Symplectic geometry of integrable Hamiltonian systems*, Advanced courses in mathematics, CRM Barcelona, Birkhäuser Verlag, Boston, 2003
- [5] R. H. Cushman and L. M. Bates. *Global aspects of classical integrable systems*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.
- [6] L. H. Eliasson, *Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals*, Ph.D. Thesis (1984).
- [7] L. H. Eliasson, "Normal forms for Hamiltonian systems with Poisson commuting integrals—elliptic case," *Comment. Math. Helv.* **65** (1990), no. 1, 4–35.

- [8] V. Ginzburg, V. Guillemin and Y. Karshon, *Moment maps, cobordisms, and Hamiltonian group actions*, AMS Monographs, 2004.
- [9] V. Guillemin and S. Sternberg, "The Gel'fand-Cetlin system and quantization of the complex flag manifolds," *J. Funct. Anal.*, 52(1):106–128, 1983.
- [10] M. Hamilton, "Locally toric manifolds and singular Bohr-Sommerfeld leaves," to appear in *Mem. AMS*, <http://arxiv.org/abs/0709.4058>
- [11] M. Hamilton, "Quantization of a toric manifold is given by the integer lattice points," in *Toric Topology*, Conference Proceedings of the International Conference on Toric Topology, Osaka, May 2006
- [12] M. Hamilton and E. Miranda, "Geometric quantization of integrable systems with hyperbolic singularities," <http://arxiv.org/abs/0808.0338>, to appear in *Annales de l'Institut Fourier*
- [13] B. Kostant, "On the Definition of Quantization," *Géométrie Symplectique et Physique Mathématique*, Coll. CNRS, No. 237, Paris, (1975), 187-210.
- [14] J. Marsden, T. Ratiu, *Introduction to mechanics and symmetry: A basic exposition of classical mechanical systems*, second edition, Texts in Applied Mathematics, 17. Springer-Verlag, New York, 1999.
- [15] E. Miranda, *On symplectic linearization of singular Lagrangian foliations*, Ph.D. Thesis, Univ. de Barcelona, 2003.
- [16] M. Puta, *Hamiltonian Mechanical Systems and Geometric Quantization*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993
- [17] J. Śniatycki, "On Cohomology Groups Appearing in Geometric Quantization", *Differential Geometric Methods in Mathematical Physics* (1975)
- [18] J. Śniatycki, *Geometric quantization and quantum mechanics*. Applied Mathematical Sciences, 30. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980.
- [19] J. Williamson, "On the algebraic problem concerning the normal forms of linear dynamical systems," *Amer. J. Math.* **58:1** (1936), 141-163.
- [20] N.M.J. Woodhouse, *Geometric quantization*, second edition. Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.

「シューベルト多項式」の現在*

池田 岳 岡山理科大学 理学部

Schubert 類という言葉が自然に意味を持つ空間は一般旗多様体 G/P (典型例は Grassmann 多様体) である. この種の空間には, それぞれ個性の際立った多項式族が現れて Schubert 類の「化身」として振る舞う. Schubert 多様体を知りたいという動機と, 現れるべくして現れた多項式の代数的・組合せ論的性質を探求したいという動機は渾然一体となって, 一連の問題群が生ずる.

以上のようなことを概観するのが本講演の目的である. まずはじめに, もっとも基本的な例である Grassmann 多様体と Schur 多項式の詳細を述べる. その後, ヴェリアントの一つとして Q -Schur 多項式が果たす特徴的な役割について解説したい. 最後に「シューベルト多項式」に関する最近の研究の状況を簡単に紹介したい.

1 Schur 多項式, Schubert 類の化身

Grassmann 多様体の Schubert 類に関して, よく知られていることを振り返ってみよう. よい教科書として [5] と [24] がある.

1.1 Grassmann 多様体の Schubert 類

$\mathbb{G}(n, N)$ を \mathbb{C}^N 内の n 次元線形部分空間がなす Grassmann 多様体とする. $m = N - n$ とおく. $\mathbb{G}(n, N)$ は nm 次元の非特異射影的多様体であり, Schubert 胞体による自然な胞体分割

$$\mathbb{G}(n, N) = \bigsqcup_{\lambda} \Omega_{\lambda}^{\circ}$$

を持つ. ここに $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ は

$$m \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

をみたす自然数列全体を走る (縦が n 横が m の長方形に含まれる Young 図形と λ を同一視することが多い). 胞体 Ω_{λ}° を定めるために線形部分空間の列

$$0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \dots \subset F_N = \mathbb{C}^N, \quad \dim F_i = i$$

*第56回 トポロジーシンポジウム 8月8日(土)~11日(火) 於:北海道大学クラーク会館講堂

をひとつ選んでおく. このような列を**旗**と呼ぶ. λ に対して, Schubert 多様体

$$\Omega_\lambda = \{V \in \mathbb{G}(n, N) \mid \dim(V \cap F_{m+i-\lambda_i}) \geq i \ (1 \leq i \leq n)\}$$

および Schubert 胞体

$$\Omega_\lambda^\circ = \Omega_\lambda - \bigcup_{\mu \geq \lambda, \mu \neq \lambda} \Omega_\mu$$

が定まる. ここに $\mu \geq \lambda$ は $\mu_i \geq \lambda_i \ (1 \leq i \leq n)$ を意味する. 名前の通り, Ω_λ° は胞体 $\mathbb{C}^{nm-|\lambda|}$ と一対一に対応する. ここで $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ とした. $\mu \geq \lambda$ ならば $\Omega_\mu \subset \Omega_\lambda$ という包含関係がある. また, Ω_λ° の Zariski 閉包は $\Omega_\lambda = \bigcup_{\mu \geq \lambda} \Omega_\mu^\circ$ である.

Ω_λ が定めるコホモロジー類を $\sigma_\lambda \in H^{2|\lambda|}(\mathbb{G}(n, N), \mathbb{Z})$ で表わし Schubert 類と呼ぶ. これらはコホモロジー環の自然な基底を成す:

$$H^*(\mathbb{G}(n, N), \mathbb{Z}) = \bigoplus_{\lambda: m \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0} \mathbb{Z}\sigma_\lambda.$$

Ω_λ は旗 $F_\bullet = (0 \subset F_1 \subset \dots \subset F_N)$ を用いて定めたが, そのコホモロジー類 σ_λ は F_\bullet の選び方には依存しないことに注意しておく. 積の構造定数 $c_{\lambda\mu}^\nu$ を

$$\sigma_\lambda \cdot \sigma_\mu = \sum_\nu c_{\lambda\mu}^\nu \sigma_\nu$$

によって定める. この係数について知ることが基本問題である (大切な問題はそれだけではないが). 仮に, コホモロジー環 $H^*(\mathbb{G}(n, N), \mathbb{Z})$ そのものの構造がわかったとしても, それが $c_{\lambda\mu}^\nu$ を決めることにすぐにつながるわけではないということは強調しておきたい. $c_{\lambda\mu}^\nu$ は環構造よりもはるかに詳細な情報を含んでいるのである.

Schubert による「**数え上げ幾何**」の典型的な問題は現代風に解釈すると次のように述べられる. $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(r)}$ を $\sum_i |\lambda^{(i)}| = nm$ であるような Young 図形の組とする. このとき, 点の個数

$$\sharp(\Omega_{\lambda^{(1)}}(F_\bullet^{(1)}) \cap \dots \cap \Omega_{\lambda^{(r)}}(F_\bullet^{(r)}))$$

を求めよ. ただし $F_\bullet^{(1)}, \dots, F_\bullet^{(r)}$ は一般の位置にある r 個の旗であるとする. Kleiman [13] によると, r 個の順序づけられた旗の組全体がなす多様体において, ある Zariski 開集合 U があって, すべての $(F_\bullet^{(1)}, \dots, F_\bullet^{(r)}) \in U$ に対して, 交わり $\Omega_{\lambda^{(1)}}(F_\bullet^{(1)}) \cap \dots \cap \Omega_{\lambda^{(r)}}(F_\bullet^{(r)})$ は有限個の点における横断的な交差になっている.

コホモロジー環において $\deg: H^*(\mathbb{G}(n, N), \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ を**次数**を与える写像, すなわちコホモロジー類 $\alpha = \sum_\lambda c_\lambda \sigma_\lambda$ に対して, 唯一の最高次の Schubert 類である $\sigma_{pt} := \sigma_{m, \dots, m}$ (m を n 回) の係数 $\deg(\alpha) := c_{pt} \in \mathbb{Z}$ を対応させる写像とする. Kleiman の定理によれば, 上記の数え上げの問題の答えは, 次数

$$\deg(\sigma_{\lambda^{(1)}} \cdots \sigma_{\lambda^{(r)}})$$

によって与えられることがわかる.

1.2 Pieri の規則と Giambelli の公式

Grassmann 多様体の Schubert 類を計算するための基本的な公式が2つある.

命題 1 (Pieri の規則) $1 \leq k \leq m$ に対して $\sigma_{(k,0,\dots,0)}$ を σ_k と書く. 一般の Schubert 類 σ_λ と σ_k との積は次のように与えられる:

$$\sigma_k \cdot \sigma_\lambda = \sum_{\lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i-1}, |\mu| = |\lambda| + k} \sigma_\mu.$$

μ の Young 図形は λ の Young 図形に k 個の箱を付け加えて得られる. その際に, 新たに付け加える箱は各列に高々 1 個というのが定理の条件である.

例: $\sigma_1 \cdot \sigma_1 = \sigma_2 + \sigma_{1,1}$, $\sigma_3 \cdot \sigma_{2,1} = \sigma_{5,1} + \sigma_{4,2} + \sigma_{3,2,1}$ など. ただし n, m は十分大きいとした.

例題: \mathbb{P}^3 内に 4 本の直線 l_1, l_2, l_3, l_4 が一般の位置に与えられているとせよ. $l \cap l_i \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, 4$) をみたす直線 l は何本有るか?

\mathbb{P}^3 内の直線 l 全体の集合は $G(2, 4)$ とみなせる. $l \cap l_i$ をみたす l は Schubert 多様体 $\Omega_{1,0} = \Omega_{1,0}(l_i)$ をなす. もとめる数は

$$\#\Omega_{1,0}(l_i) \cap \Omega_{1,0}(l_i) \cap \Omega_{1,0}(l_i) \cap \Omega_{1,0}(l_i) = \deg(\sigma_1^4)$$

だが, Pieri 規則を用いて $\sigma_1^4 = 2\sigma_{2,2}$ が計算できる. よって答えは「2本」である.

演習問題: \mathbb{P}^5 内に 4 枚の平面 h_1, h_2, h_3, h_4 が一般の位置に与えられているとせよ. $l \cap h_i \neq \emptyset$ ($i = 1, \dots, 4$) をみたす直線 l は何本有るか?

もうひとつの有名な公式は次のものである:

命題 2 (Giambelli 公式) $\sigma_\lambda = \det(\sigma_{\lambda_i + j - i})_{1 \leq i, j \leq n}$.

特別な Schubert 類 $\sigma_1, \dots, \sigma_m$ を成分とする行列式の形で一般の Schubert 類が表せるといふ公式である. よって, Pieri の規則と Giambelli の公式を組み合わせれば, $c_{\lambda\mu}^\nu$ を求めることは純粋に代数の問題になる. しかし, 実際にその方針で計算を実行することは困難である.

実際, $c_{\lambda\mu}^\nu$ を完全に記述するという問題は, 一見まったく異なる文脈・動機で得られた結果を解釈し直すことによってはじめて与えられた(後述).

1.3 Schur 多項式 と Littlewood-Richardson 規則

$(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ を $\alpha_1 > \dots > \alpha_n \geq 0$ をみたす自然数の列とする. 行列式 $a_\alpha = \det(x_j^{\alpha_i})_{1 \leq i, j \leq n}$ は x_1, \dots, x_n の置換に関して交代式的である. $\rho = (n-1, n-2, \dots, 1, 0)$ とおくと $a_\rho = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$ と書ける. $\lambda = \alpha - \rho$ とおくと

$$\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

となる. $a_{\lambda+\rho}$ は差積 a_ρ で割り切れて, 商 $s_\lambda(x) = s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = a_{\lambda+\rho}/a_\rho$ は対称多項式となる. これを **Schur 多項式** と呼ぶ. 対称多項式がなす環 $\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]^{S_n}$ は Schur 多項式全体の集合 $\{s_\lambda(x)\}_\lambda$ を \mathbb{Z} 自由基底に持つ.

Schur 多項式は $GL(n, \mathbb{C})$ の既約表現の指標として知られている. λ を最高ウェイトとする既約な $GL(n, \mathbb{C})$ の表現を (π_λ, V_λ) とする. $GL(n, \mathbb{C})$ 上の関数 $\text{trace}_{V_\lambda} \pi_\lambda(g)$ を対角行列 $\text{diag}(x_1, \dots, x_n) \in GL(n, \mathbb{C})$ のなす部分群に制限して得られる関数 (π_λ の指標) は $s_\lambda(x)$ と一致する.

Schur 多項式の積 $s_\lambda s_\mu$ の展開係数はテンソル積表現 $V_\lambda \otimes V_\mu$ の分解係数として, 詳しく調べられている. その組合せ論的な記述は Littlewood-Richardson 規則と呼ばれる. いくつかの表現法や証明法が知られているが Stembridge [29] による簡潔な証明をおすすめしておきたい.

1.4 分類空間

N を大きくした極限 $\mathbb{G}(n, \infty) = \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{G}(n, N)$ は分類空間 $BU(n)$ の構成法のひとつとして知られていて

$$H^*(\mathbb{G}(n, \infty), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n]$$

が成り立つ (たとえば [1] を参照). 生成元 $\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_n$ は **普遍 Chern 類** と呼ばれ, 代数的に独立で $\hat{c}_i \in H^{2i}(\mathbb{G}(n, \infty), \mathbb{Z})$ である. 対応

$$\hat{c}_i \mapsto (-1)^i e_i(x_1, \dots, x_n)$$

によって Λ_n を分類空間のコホモロジー $H^*(\mathbb{G}(n, \infty), \mathbb{Z})$ と同一視する. e_i は i 次の基本対称式である. ここで, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$ という列 λ に対して $H^*(\mathbb{G}(n, \infty), \mathbb{Z})$ の元として Schubert 類 σ_λ が定まることに注意しておく. 次が成り立つ:

命題 3 同一視 $\Lambda_n = H^*(\mathbb{G}(n, \infty), \mathbb{Z})$ のもとに Schur 多項式 $s_\lambda(x)$ は Schubert 類 σ_λ に対応する.

(証明の方針) $(-1)^i \hat{c}_i = e_i(x)$ が Schubert 類 $\sigma_{1, \dots, 1}$ (1 を i 回繰り返す) と一致することは Chern 類の (ひとつの) 定義からしたがう. このことと, Schur 多項式に対する

Jacobi-Trudi 公式 $s_\lambda = \det(s_{\lambda_i+j-i})_{1 \leq i, j \leq n}$ (ただし $s_k = s_{(k, 0, \dots, 0)}$) が Giambelli 公式と全く同じ形をしていることを用いて命題が示される。□

疑問：Schur 多項式は、もともと表現論に現れた多項式である。それが、Grassmann 多様体の Schubert 類と完全に一致するということは、たいへん不思議なことである。この一致に関して、もっと深い理解ができないだろうか？

注意：Schur 多項式を経由せずに、幾何的な議論だけを用いて $c_{\lambda\mu}^{\nu}$ をもとめる規則を導くという結果が Vakil [30] によって与えられている。この結果は上記の疑問に答えるヒントを与えるのだろうか？

注意： h_1, h_2, \dots を完全対称多項式、つまり母関数

$$\sum_{k=0}^{\infty} h_k(x) z^k = \prod_{i=1}^n (1 - x_i z)^{-1}$$

により定まる Λ_n の元とすると、 $h_k(x) = s_k(x)$ が成り立つ。

注意： $\mathbb{G}(n, N)$ 上には \mathbb{C}^N をファイバーとする自明束 E およびその部分束 (トートロジカルな部分束) $S = \{(V, \mathbf{v}) \in \mathbb{G}(n, N) \times \mathbb{C}^N \mid \mathbf{v} \in V\}$ がある。商束を $Q = E/S$ とするとき、

$$\sigma_k = c_j(Q) \quad (1 \leq j \leq m), \quad \sigma_{1, \dots, 1} = (-1)^i c_i(S)$$

という関係がある。特に、変数 $-x_1, \dots, -x_n$ は S の Chern roots である。

2 Q -Schur 多項式の場合

ここまで、Grassmann 多様体の Schubert 類を表わす多項式として表現論に由来する多項式である Schur 多項式が現れることを説明した。この事実に対して、概念的な深い理解がなされているとは言えないのが現状なのだが、類似する現象は他にも知られている。Lagrangian Grassmann 多様体と Q -Schur 多項式の関連について紹介したい。 Q -多項式に関して Macdonald の本 [23] には必要なことを簡潔にまとめてある。

2.1 Q -Schur 多項式と Lagrangian Grassmann 多様体

この節で説明したい対照関係を表にすると次のようになる：

$\mathbb{G}(n, \infty)$	Young 図形	Schur 多項式
$LG(\infty)$	Shifted Young 図形	Q -Schur 多項式

\mathbb{C}^{2n} に symplectic form ω を与える。 $L \subset \mathbb{C}^{2n}$ が Lagrangian 部分空間であるとは $\dim L = n$ であって、等法的つまり $u, v \in L$ ならば $\omega(u, v) = 0$ が成り立つことである。

Lagrangian 部分空間がなす多様体を Lagrangian Grassmannian と呼び $LG(n)$ で表わす。真に減少する自然数列

$$n \geq \lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k > 0$$

に対して Schubert 多様体を

$$\Omega_\lambda = \{L \in LG(n) \mid \dim(L \cap F_{n+1-\lambda_i}) \geq i \ (1 \leq i \leq k)\}$$

と定める。ただし、旗 $F_\bullet = (F_i)_{i=1}^{2n}$ は F_n が Lagrangian 部分空間であるとし、また $F_{n+i} = F_{n-i}^\perp$ ($1 \leq i \leq n$) とする。 $LG(n)$ のコホモロジー環の構造はよく知られていて

$$H^*(LG(n), \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[y_1, \dots, y_n]^{S_n} / \langle e_k(y_1^2, \dots, y_n^2) \mid 1 \leq k \leq n \rangle$$

である。 $-y_1, \dots, -y_n$ はトートロジカルな部分束の Chern roots である。 $c_i = e_i(-y_1, \dots, -y_n)$ が Schubert 類 $\sigma_i = [\Omega_{(i,0,\dots,0)}]$ と一致することも同様である。短完全列

$$0 \longrightarrow S \longrightarrow E \longrightarrow S^\perp \longrightarrow 0$$

から導かれる等式 $c(S)c(S^\perp) = c(E)$ を

$$(1 - y_1 z) \cdots (1 - y_n z) \times (1 + y_1 z) \cdots (1 + y_n z) = 1$$

と書けば

$$(1 + c_1 + \cdots + c_n)(1 - c_1 + c_2 - \cdots + (-1)^n c_n) = 1$$

が得られる。次はよく知られている (例えば [26] を参照)。

命題 4 無限変数 c_1, c_2, \dots の多項式環 $\mathbb{Z}[c_1, c_2, \dots]$ を 2 次関係式

$$c_k^2 + 2 \sum_{j=1}^k (-1)^j c_{k+j} c_{k-j} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

で生成されるイデアルによって割って作った剰余環は $H^*(LG(\infty), \mathbb{Z})$ と自然に同型になる。

Chern roots とは別に x_1, x_2, \dots という変数を用意する。母関数

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x_i}{1-x_i} = 1 + Q_1(x) + Q_2(x) + \cdots$$

により $Q_k(x)$ を定義する。

命題 5 $\Gamma := \mathbb{Z}[Q_1, Q_2, \dots]$ は $H^*(LG(\infty), \mathbb{Z})$ と同型になる。

(証明のポイント) 自明な等式

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1+x_i}{1-x_i} \times \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1-x_i}{1+x_i} = 1$$

を展開すれば 2 次関係式

$$Q_k^2 + 2 \sum_{j=1}^k (-1)^j Q_{k+j} Q_{k-j} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

が得られる. \square

[23] 以外に Józefiak の論文 [11] を参照していただきたい.

定理 1 [27][Pragacz] $\Gamma = H^*(LG(\infty), \mathbb{Z})$ の同一視のもとで Schubert 類 σ_λ は Q -Schur 関数 $Q_\lambda(x)$ と一致する.

$Q_\lambda(x)$ は対称群の射影表現の指標を計算するために Schur によって導入された. $Q_\lambda(x)$ は真に減少する自然数列 $\lambda_1 > \dots > \lambda_k > 0$ に対して次のように定まる:

$$Q_\lambda(x) = \text{Pf}(Q_{\lambda_i, \lambda_j}(x))$$

ただし, ここに $a \geq b \geq 0$ に対して

$$Q_{a,b}(x) = Q_a(x)Q_b(x) + 2 \sum_{j=1}^b (-1)^j Q_{a+j}(x)Q_{b-j}(x)$$

と定めた. また, Pf は偶数次交代行列に対して定まる Pfaffian である. 最後の成分に, 必要ならばゼロを許して $\lambda_1 > \dots > \lambda_{2r} \geq 0$ と書く. Q_λ は Hall-Littlewood 多項式のパラメータを $t = -1$ と特殊化したものと一致することが知られている.

定理の証明はやはり概念的なものではない. $Q_\lambda(x)$ は他に super Lie 代数の既約指標という解釈も知られている.

注意: Pragacz はその後, Lascoux, Ratajski [22], [28] らとともに \tilde{Q} -多項式の理論を展開した. Chern roots y_1, \dots, y_n の多項式として Schubert 類を代表する際には, とても自然な候補である. しかし, 多項式そのものの代数的・組合せ論的な性質は Q -Schur 多項式の方が有利な点が多い. A 型以外の古典系列 B, C, D を扱う際に Q -多項式を用いるか \tilde{Q} -多項式を用いるかという点で, その後の発展には大きく二つの流れがある.

3 一般名詞としての Schubert 多項式

空間を拡張する方向とコホモロジーを拡張する方向の拡張が考えられる.

G を半単純複素 Lie 群, P をその放物型部分群とする. Weyl 群を W とするとき等質空間 G/P の Schubert 類は W のある部分集合 W^P でパラメトライズされる. T を極大トーラスとする. G/P の Schubert 多様体に関する一般的なサーヴェイとして Billey と Lakshimibai による本 [4] を挙げておく.

特に, 古典型の一般旗多様体に関して, 一般名詞としての Schubert 多項式がどういう場合にどういう人たちによって導入され調べられているかいくつかの文献を紹介する.

- $H_T^*(G/P)$: T -同変コホモロジー
 $\mathbb{G}(n, N)$: Knutson-Tao [12], Lakshimibai-Raghavan-Sankaran[15]
 Isotropic Grassmannian : Kresch-Tamvakis [14], Ikeda [7], Ikeda-Naruse [8]
 旗多様体 : Lascoux-Schützenberger [19]
 B, C, D 型の旗多様体 : Kresch-Tamvakis [14], Ikeda-Naruse-Mihalcea[10]
- $K(G/P)$: G/P 上の接続層の Grothendieck 群
 $\mathbb{G}(n, N)$: Buch [2]
 旗多様体 : Lascoux-Schützenberger [20],[21]
- $K_T(G/P)$: $K(G/P)$ の T -同変版
 $\mathbb{G}(n, N)$: McNamara [25]
 Isotropic Grassmannian : Ikeda-Naruse [9] (準備中)

量子コホモロジーに関しては省略する.

最近 affine Grassmannian の Schubert calculus が大きく進展している. 文献 [16],[17],[18] を参照されたい.

参考文献

- [1] R. Bott, L. W. Tu, Differential forms in algebraic topology. Graduate Texts in Mathematics, 82. Springer-Verlag, New York-Berlin, 1982.
- [2] A. S. Buch, A Littlewood-Richardson rule for the K -theory of Grassmannians. Acta Math. 189 (2002), no. 1, 37–78.
- [3] S. Billey and M. Haiman, Schubert polynomials for the classical groups, J. Amer. Math. Soc. 8 (1995), no. 2, 443–482.

- [4] S. Billey and V. Lakshmibai, *Singular Loci of Schubert Varieties*, Progress in mathematics, vol. 182, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2000.
- [5] W. Fulton, *Young tableaux, With applications to representation theory and geometry*. London Mathematical Society Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [6] W. Fulton and P. Pragacz, *Schubert varieties and degeneracy loci*, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [7] T. Ikeda, Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian, *Adv. Math.* 215 (2007) 1-23.
- [8] T. Ikeda and H. Naruse, Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus, *Trans. AMS*, vol. 361, No. 10, 2009, 5193-5221.
- [9] T. Ikeda and H. Naruse, K -theoretic analogue of Schur's Q -functions and isotropic Grassmannians (in preparation)
- [10] T. Ikeda, L. Mihalcea, and H. Naruse, Double Schubert polynomials for the classical groups, arXiv:0810.1348
- [11] T. Józefiak, Schur Q -functions and cohomology of isotropic Grassmannians, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* (1991), 109, 471-478.
- [12] A. Knutson and T. Tao, Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians. *Duke Math. J.* 119 (2003), no. 2, 221–260.
- [13] S. L. Kleiman, The transversality of a general translate, *Compos. Math.* 28, 1974, 287-294.
- [14] A. Kresch and H. Tamvakis, Double Schubert polynomials and degeneracy loci for the classical groups, *Annales de l'institut Fourier*, 52 no. 6 (2002), 1681–1727.
- [15] V. Lakshmibai, K. N. Raghavan, and P. Sankaran, Equivariant Giambelli and determinantal restriction formulas for the Grassmannian, in: Special issue: In honor of Robert MacPherson, Part 1 of 3, *Pure Appl. Math. Quart.* 2 (3) (2006) 699-717.
- [16] T. Lam, A. Schilling, M. Shimozono, Schubert Polynomials for the affine Grassmannian of the symplectic group, arXiv:0710.2720
- [17] T. Lam, A. Schilling, M. Shimozono, K -theory Schubert calculus of the affine Grassmannian, arXiv:0901.1506

- [18] T. Lam, Schubert polynomials for the affine Grassmannian. *J. Amer. Math. Soc.* 21 (2008), no. 1, 259–281 (electronic).
- [19] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, Polynômes de Schubert, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 294 (1982), 447–450.
- [20] A. Lascoux, Anneau de Grothendieck de la variété de drapeaux. *The Grothendieck Festschrift*, Vol. III, 1–34, *Progr. Math.*, 88, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.
- [21] A. Lascoux and M.-P. Schützenberger, Structure de Hopf de l’anneau de cohomologie et de l’anneau de Grothendieck d’une variété de drapeaux, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 295 (1982), no. 11, 629–633.
- [22] A. Lascoux, P. Pragacz, Operator calculus for \tilde{Q} -polynomials and Schubert polynomials. *Adv. Math.* 140 (1998), no. 1, 1–43.
- [23] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd edition, Oxford Univ. Press, Oxford 1995.
- [24] L. Manivel, *Symmetric Functions, Schubert polynomials and degeneracy loci*, SMF/AMS Texts and Monographs vol. 6 (1998).
- [25] P. McNamara, Factorial Grothendieck polynomials. (English summary) *Electron. J. Combin.* 13 (2006), no. 1, Research Paper 71, 40 pp. (electronic).
- [26] M. Mimura, H. Toda, *Topology of Lie groups, I and II* (AMS, 1991).
- [27] P. Pragacz, Algebro-geometric applications of Schur S - and Q -polynomials. *Topics in invariant theory* (Paris, 1989/1990), 130–191, *Lecture Notes in Math.*, 1478, Springer, Berlin, 1991.
- [28] P. Pragacz and J. Ratajski, Formulas for Lagrangian and orthogonal degeneracy loci; \tilde{Q} -polynomial approach, *Compositio Math.* 107 (1997), no. 1, 11–87.
- [29] J. Stembridge, A concise proof of the Littlewood-Richardson rule. (English summary) *Electron. J. Combin.* 9 (2002), no. 1, Note 5, 4 pp. (electronic).
- [30] R. Vakil, A geometric Littlewood-Richardson rule. Appendix A written with A. Knutson. *Ann. of Math. (2)* 164 (2006), no. 2, 371–421.

リー群のトポロジーから見るシューベルトカリキュラス

鍛冶 静雄
福岡大学 理学部

1 問題の起源

「3次元ユークリッド空間内に与えられた、一般の位置にある4本の直線全てに交わる直線は何本引けるか？」19世紀後半、Schubertはこの種の問題を数多く考察し、PieriやGiambelliらによって数え上げ幾何 (enumerative geometry) と呼ばれる分野に発展させられた。先にあげた問題に対するSchubertの解法は次の通りである。「まず4本の直線を二つずつ組にして、各々の組が交点を持つ様に平行移動する。この状態においては、4本全てに交わる直線は、その交点同士を結ぶ直線と、各組が張る平面の共通部分としての直線の2本である。平行移動によって解の数は変わらないから、答えはいつでも2本である。」この様に、当時の議論は直感的かつ鮮やかであるが、厳密性には欠ける。それを正当化する基礎付けを与えよというのが、Hilbertの第15問題として提出されたが、今日では旗多様体 (flag variety) と呼ばれる射影多様体の、コホモロジー環の構造の問題として定式化されており^{*1}、主にその計算アルゴリズムを与える事を目的としているのがシューベルトカリキュラス (Schubert calculus) である。(歴史的な経緯については、例えば [19] を参照。)

旗多様体という、豊富な構造を持ちかつある程度“手で扱える”空間を対象としているため、トポロジーのみならず、代数幾何学、表現論、組み合わせ論の各方面から盛んに研究されており、例えば [14], [26], [20] などに目を通すことで、シューベルトカリキュラスという対象が様々な分野の交差点に位置している様子を俯瞰することができる。この講演では、代数トポロジーで古くから扱われてきた、リー群とその等質空間に関する計算結果を、特に例外型というクラスについて、シューベルトカリキュラスの言葉で見直すことを試みる。例外型の旗多様体はその構造が複雑になりすぎる為に、トポロジー以外の分野からは敬遠されている様に思えるが、その分、型によらない性質の発見、実験場所としては優れている。これまでに蓄積されている具体的な計算結果を見やすい形で提示することで、色々な方面から例外型のシューベルトカリキュラスを研究する一助になれば嬉しい。

2 旗多様体

研究の対象となる空間・旗多様体は、リー群の等質空間として現れる。 G を簡約可能連結複素リー群、 B をその極大可解部分群 (Borel subgroup), P を B を含む部分群 (parabolic subgroup) とする時、等質空間 G/P は射影多様体の構造を持ち、旗多様体と呼ばれる。

旗多様体はリー群の型に対応する分類ができ、個別に考察することができる。 \hat{G} を G の普遍被覆群とすると、対応する部分群 \hat{P} が存在して $G/P \cong \hat{G}/\hat{P}$ という同型が成り立ち、また、 $G = G' \times G''$ とすると、 $G/P \cong G'/G' \cap P \times G''/G'' \cap P$ と分解するので、リー群の分類定理より、もともと G は $GL_n(\mathbb{C}), SO_n(\mathbb{C}), Sp_{2n}(\mathbb{C})$ の

^{*1} ただし、未だ Schubert の議論全てをカバーしている訳ではないらしい。

古典群あるいは, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 の5種類の単連結例外群のいずれかであるとして良い. 一方で, P は単純ルートの部分集合でパラメライズされる事が知られている. よって旗多様体は, ディンキン図形とその頂点の部分集合とのペアで (重複はあるが) 分類される.

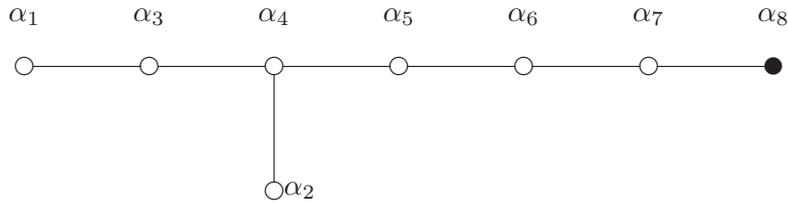


図1 (E_8, P_8)

胞体分割

旗多様体 G/P には, その胞体分割に基づいてシューベルト類と呼ばれるコホモロジー類が定まり, $H^*(G/P; \mathbb{Z})$ は加群としてはその上の自由 \mathbb{Z} 可群になる. T を G の極大トーラスとして, W をワイル群 $N_G(T)/T$, W_P を P のワイル群 $N_P(T)/T$ とする. G はワイル群によってパラメライズされた両側剰余分解 ([6])

$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

を持ち, それはワイル群の左剰余類集合 $W^P = W/W_P$ でパラメライズされた, Bruhat 分解と呼ばれる次の G/P の胞体分割を誘導する.

$$G/P = \coprod_{w \in W^P} BwP/P$$

この時, w に対応する胞体 BwP/P の閉包 $X_w = \overline{BwP/P}$ はシューベルト多様体と呼ばれる (特異) 部分多様体となる.

この分解を通して, ワイル群の組み合わせ論的な性質が, 旗多様体のトポロジーを良く反映しているのを見ることが出来る. $l := \dim T$ を G の階数とすると, ワイル群は単純ルート $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ に対応する単純鏡映 s_1, \dots, s_l で生成される有限群となるから, 任意の元は $w = s_{i_1} \cdots s_{i_k}$ と表示される. これを $w = [i_1, \dots, i_k]$ と書く事にする. この表示が最短である時, その長さ k を $l(w)$ と書く. 最短表示の方法は一通りではないが, $[i_1, \dots, i_k]$ という組に対して辞書式順序を考える事で, 最小の最短表示が一意的に定まる. 左剰余類集合 W^P は, $\{w \in W \mid \forall v \in wW_P, l(v) > l(w)\}$ という最短表示を持つ.

例 2.1 $G = GL_n(\mathbb{C})$ とすると, B は上三角行列となる. この場合, 対応するディンキン図形の部分集合は空集合である. $GL_n(\mathbb{C})$ の元を行列表示し, その列ベクトルで張られる線型空間からなる旗 (flag) $V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n = \mathbb{C}^n$ に対応させると, $GL_n(\mathbb{C})/B$ はその名の通り, 旗全体からなる多様体となる. BwB は本質的には行列の LU(LPU) 分解であり, シューベルト多様体 $X_w = \overline{BwB/B}$ ($w \in W = S_n$) は, 古典的なシューベルト条件

$$\{(V_1 \subsetneq V_2 \subsetneq \cdots \subsetneq V_n) \mid \dim(V_k \cap \mathbb{C}^m) \geq \#\{i \leq k \mid w(i) \leq m\}\}$$

によって定義される.

$G = GL_{n+m}(\mathbb{C})$ として, P_n を

$$\left\{ \left(\begin{array}{c|c} A & * \\ \hline 0 & B \end{array} \right) \mid A \in GL_n(\mathbb{C}), B \in GL_m(\mathbb{C}) \right\}$$

とする. 対応するディンキン図形の部分集合は, n 番目の単純ルートの補集合である. この時, G/P_n は \mathbb{C}^{n+m} の n 次線型部分空間のなすグラスマン多様体 $Gr_{n,n+m}(\mathbb{C})$ となる. G のワイル群 W は対称群 S_{n+m} であり, P_n のワイル群 W_{P_n} は対称群の直積 $S_n \times S_m$ であるから, 剰余類集合 W^{P_n} はグラスマン置換

$$\{w \in S_{n+m} \mid w(1) < w(2) < \cdots < w(n), w(n+1) < \cdots < w(n+m)\}$$

となる. $w \in W^{P_n}$ に非増加整数列 $(w(n) - n, w(n-1) - (n-1), \dots, w(1) - 1)$ を対応させることで, W^{P_n} は $n \times m$ のヤング図形と同一視され, シューベルト多様体 X_w は, シューベルト条件

$$\{V \mid \dim(V \cap \mathbb{C}^{w(j)}) \geq j\}$$

で定義される.

W の最長元を w_0 , W^P の最長元を w_P とすると, $l(w_0 w w_0 w_P) = l(w_P) - l(w) = \dim_{\mathbb{C}} G/P - l(w)$ となるので, $X_{w_0 w w_0 w_P}$ の基本類のポアンカレ双対は $H^{2l(w)}(G/P; \mathbb{Z})$ の元 σ_w を定める. これを w に対応するシューベルト類と呼ぶ. 今, 偶数次元の胞体しか存在しないので, $\{\sigma_w\}_{w \in W^P}$ は $H^*(G/P; \mathbb{Z})$ の \mathbb{Z} 可群としての基底をなす*2.

シューベルトカリキュラスにおける一つの中心問題は, シューベルト類のカップ積についての構造定数 (structure constant) を決定する事である.

問題 2.2 $u, v \in W^P$ に対して,

$$\sigma_u \cdot \sigma_v = \sum_{w \in W^P} c_{u,v}^w \sigma_w$$

なる (非負) 整数 $c_{u,v}^w$ を求めよ.

補足 2.3 射影 $G/B \rightarrow G/P$ はコホモロジー環の間の単射準同型

$$\begin{aligned} H^*(G/P; \mathbb{Z}) &\rightarrow H^*(G/B; \mathbb{Z}) \\ \sigma_w &\mapsto \sigma_w \end{aligned}$$

を引き起こすので, G/B が親玉と考えられる.

例 2.4 グラスマン多様体 $Gr_{n,n+m}(\mathbb{C})$ に対しては, シューベルト類がヤング図形でパラメトライズされることを見たが, その構造定数は, 同じヤング図形に対応するシューア多項式という対称式の積のそれに一致することが知られている. これは, Littlewood-Richardson の公式 ([24]) というアルゴリズムで計算可能である. 例えば $Gr_{2,4}(\mathbb{C})$ においては,

$$\begin{aligned} \sigma_{[2]}^2 &= \sigma_{[3,2]} + \sigma_{[1,2]} \\ \sigma_{[2]}^4 &= (\sigma_{[3,2]} + \sigma_{[1,2]})^2 = 2\sigma_{[2,1,3,2]} \end{aligned}$$

となる. この計算を最初にあげた Schubert の問題に翻訳するには, 各シューベルト類を, 下の表に従って空間内の直線に関する条件と読み替えれば良い. そうすると, $\sigma_{[2]}^4 = 2\sigma_{[2,1,3,2]}$ は, 問題の答えが 2 である事に対応している.

2 $H^(G/P; \mathbb{Z})$ は, 環として G/P の Chow 環 $A^*(G/P)$ と同型であるから, 以下の議論では H^* を A^* と読み替えても良い.

$\sigma_{[2]}$	与えられた直線と交わる
$\sigma_{[3,2]}$	与えられた平面の上にある
$\sigma_{[1,2]}$	与えられた点を通る
$\sigma_{[2,1,3,2]}$	与えられた直線の上にある

より一般に全ての A 型旗多様体について, 最近 Coskun [9] はその構造定数を計算するアルゴリズムを発見した.

3 コホモロジー環の多項式表示

コホモロジーの加群としての基底は, シューベルト類で与えられることを見たが, 目的であるところの環構造を知る為には, コホモロジーを多項式環の剰余環として表すことができれば便利である. シューベルトカリキュラスにおいては Borel 表示と呼ばれるその計算は, 長期にわたってシューベルトカリキュラスとは独立に, 個々の旗多様体に対して具体的に与えられてきた ([4], [5], [33], [28]). 以下では [4], [32] に従って, 旗多様体のコホモロジー環の Borel 表示を紹介する.

K を G の極大コンパクト部分群, T を K の極大トーラス, また $U = P \cap K$ とする. $K \hookrightarrow G$ は微分同相 $K/U \cong G/P$ を誘導する事が知られているから, 特に $H^*(G/P; \mathbb{Z}) \cong H^*(K/U; \mathbb{Z})$ であり, 必要に応じて G/P と K/U のどちらを考えても良い. 例えば, 次の様な対応がある.

type	G	P	K	U
A_l	$SL_{l+1}(\mathbb{C})$	P_m	$SU(l+1)$	$SU(m) \times SU(l+1-m)$
B_l	$SO_{2l+1}(\mathbb{C})$	B	$SO(2l+1)$	T
C_l	$Sp_{2l}(\mathbb{C})$	P_l	$Sp(l)$	$U(l)$
D_l	$SO_{2l}(\mathbb{C})$	P_l	$SO(2l)$	$U(l)$

基本ウェイト $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq l}$ を $H^2(BT; \mathbb{Z})$ の元とみなすと, $H^*(BT; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_1, \dots, \omega_l]$ である. 主 T 束 $T \hookrightarrow K \rightarrow K/T$ の分類写像 $K/T \xrightarrow{L} BT$ がコホモロジーに誘導する準同型 $\iota^* : H^*(BT; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(K/T; \mathbb{Z})$ は特性写像と呼ばれ, この写像を通して $H^*(K/T; \mathbb{Z})$ を多項式環と関連づけて調べられる. より詳しく, K/U のコホモロジー環の Borel 表示は, ファイバー束 $K/U \hookrightarrow BU \rightarrow BK$ 及び $U/T \hookrightarrow K/T \rightarrow K/U$ の Serre スペクトル系列を考察することで得られ, その最も基本的な形は, 次の様に述べる事ができる. 係数環 R を \mathbb{Z} または素数位数の有限体 \mathbb{F}_p として, $H^*(\iota; R)$ が全射^{*3}であれば,

定理 3.1 ([4])

$$H^*(G/P; R) \cong H^*(K/U; R) \cong \frac{H^*(BT; R)^{W_P}}{(H^+(BT; R)^W)}$$

ここで, $(H^+(BT; R)^W)$ は正次数の W 不変多項式で生成されるイデアルである.

例 3.2 $H^*(SU(n)/T; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[t_1, \dots, t_n]}{(c_1, \dots, c_n)}$ となり, 右辺は n 次対称群の余不変式環である. この余不変式環におけるシューベルト類 σ_w の代表元としては, Lascoux-Schützenberger [23] による非常に綺麗な多項式 (A 型シューベルト多項式) が知られている.

^{*3} $H_*(G; \mathbb{Z})$ が p -torsion を持たないことと同値である

[4] の方法を押し進めることで, Toda [32] は $H^*(K/U; \mathbb{Z})$ を多項式環の剰余環として与える方法を開発した. それは例外型に対しても有効であり, 実際に具体的な計算がなされているが, シューベルト類との対応は顧みられず, シューベルトカリキュラスの観点からは, ほとんど注目されることは無かった. (最近ではシューベルトカリキュラスの立場からも [11], [31] など例外型のケースが扱われている.)

シューベルト類の代表元

例 2.4 において, グラスマン多様体のシューベルトカリキュラスがシューア多項式の議論に還元された様に, 各シューベルト類を代表する多項式族が見つかり, 構造定数の問題は多項式のそれに帰着する. この様な多項式族は, イdealを法として多様な取り方ができるが, そのうち組み合わせ論的に性質の良いものをシューベルト多項式 (Schubert polynomial) と呼ぶ. 古典型に対しては, (A 型を除いては一長一短はあっても) かなり良い性質を持つシューベルト多項式が知られている ([23], [2], [12], [25]) が, 例外型に関してはほとんど手をつけられていない.

コホモロジー類の多項式表示とシューベルト類との対応を与えるものとして, 次に紹介する差分商作用素 (divided difference operator) がある.

定義 3.3 ([10], [3]) 正ルート α に対しては, 差分商作用素 $\Delta_\alpha : H^*(BT; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*-2}(BT; \mathbb{Z})$ は次式で定義される.

$$\Delta_\alpha(f) = \frac{f - s_\alpha(f)}{\alpha}, \quad f \in H^*(BT; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_1, \dots, \omega_l]$$

ただしここでは, ルートを $H^2(BT; \mathbb{Z})$ の元とみなしている. 任意のワイル群の元に対しては, その単純鏡映の積による最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ を一つ選ぶと, 対応する差分商作用素 $\Delta_w : H^*(BT; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*-2l(w)}(BT; \mathbb{Z})$ は次式で定義される.

$$\Delta_w = \Delta_{\alpha_{i_1}} \circ \Delta_{\alpha_{i_2}} \circ \cdots \circ \Delta_{\alpha_{i_k}}$$

一般にワイル群の元に対してその最短表示は一意的ではないが, 上の定義が well-defined であることは保証されている.

定理 3.4 ([10], [3]) $\mathfrak{S}_w \in H^*(BT; \mathbb{Q})$ を σ_w の多項式表示, 即ち, $\iota^*(\mathfrak{S}_w) = \sigma_w$ なる多項式とする.

- (1) $\{\Delta_{\alpha_i}\}_{1 \leq i \leq l}$ はワイル群で成り立つべき関係式 (Coxeter relation) を満たす.
- (2) $l(ws_i) = l(w) + 1$ ならば, $\Delta_{\alpha_i} \mathfrak{S}_{ws_i} = \mathfrak{S}_w$
- (3) $\Delta_{\alpha_i}(fg) = \Delta_{\alpha_i}(f)g + s_{\alpha_i}(f)\Delta_{\alpha_i}(g)$

(1) より well-definedness が, (2) より多項式 $f \in H^{2k}(BT; \mathbb{Z})$ がシューベルト類の線形和 $\sum_{l(w)=k} \Delta_w(f) \sigma_w$ の代表元となっていることが分かる. また, (3) はこの作用素が再帰的に計算可能であることを示している.

補足 3.5 幾何学的には, 差分商作用素 Δ_α は符号を除いて次の様に定義される. α に対応する極小放物部分群 P_α に対して, $K_\alpha = K \cap P_\alpha$ と定め, 下の S^2 束を考える.

$$S^2 = K_\alpha/T \hookrightarrow BT \xrightarrow{p} BK_\alpha$$

ここで, $p^* : H^*(BK_\alpha; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z})$ を p の誘導写像, $p_* : H^*(BT; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*-2}(BK_\alpha; \mathbb{Z})$ をファイバー積分 (push-forward) とすると,

$$\Delta_\alpha = \pm p^* \circ p_* : H^*(BT; \mathbb{Z}) \rightarrow H^{*-2}(BT; \mathbb{Z})$$

が成り立つ.

例 3.6 A 型の場合, 古典的な Newton の差分商作用素

$$\Delta_{(i,j)}f = \frac{f(t_1, \dots, t_i, \dots, t_j, \dots, t_l) - f(t_1, \dots, t_j, \dots, t_i, \dots, t_l)}{t_j - t_i}$$

と一致している.

ここからは, 差分商作用素と Borel 表示を主な道具立てとし, 計算機を援用して得られた, 高松高専の中川征樹氏との共同研究の結果について紹介したい. 特に, 例外型の中の例外型である E 型旗多様体について述べる.

補題 3.7 G が E 型例外群 E_l ($l = 6, 7, 8$) の時,

$$W_{II} := \{w \in W \mid w \text{ の全ての最短表示は } [\dots, 2] \text{ という形をしている}\}$$

と置くと, $H^*(E_l/B; \mathbb{Z})$ は, $\mathbb{Z}[\omega_1, \omega_3, \omega_4, \dots, \omega_l]$ ($\cong H^*(SU(l-1)/T; \mathbb{Z})$) 上の加群として, $\{\sigma_w\}_{w \in W_{II}}$ で生成される.

この事実から, 最短表示が $[\dots, 2]$ である様な長さ 2 以上の元 w_1, \dots, w_k が存在して, 次の様な形に表示できる事が分かる.

$$H^*(E_l/B; \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{Z}[\sigma_{[1]}, \sigma_{[3]}, \sigma_{[4]}, \dots, \sigma_{[l]}, \sigma_{[2]}, \sigma_{w_1}, \dots, \sigma_{w_k}]}{(\rho_1, \dots, \rho_j)}$$

一方で, $W_{II} = W^{P_2}$ となることから, $H^*(E_l/B; \mathbb{Z})$ の部分加群 $\bigoplus_{w \in W_{II}} \mathbb{Z}\sigma_w$ は, $H^*(E_l/P_2; \mathbb{Z})$ と同型な部分代数となっている. $\bigoplus_{w \in W_{II}} \mathbb{Z}\sigma_w$ については, その構造定数を計算するアルゴリズムが存在し, また $\sigma_{[i]} = \omega_i$ との積に関しては次の Chevalley の公式 ([8])

$$\sigma_w \cdot \omega_i = \sum_{\alpha: \text{正ルート s.t. } l(ws_\alpha) = l(w) + 1} \Delta_\alpha(\omega_i) \sigma_{ws_\alpha}$$

が適用できることを考え合わせると, $H^*(E_l/B; \mathbb{Z})$ のシューベルト類による環構造は, 非常に限定された意味ではあるが決定されていると言える.

ここでうまくいったのは, 巨大な環 $H^*(E_l/B; \mathbb{Z})$ を, 2 次の元で生成される多項式環 $\mathbb{Z}[\sigma_{[1]}, \sigma_{[3]}, \sigma_{[4]}, \dots, \sigma_{[l]}]$ と $\bigoplus_{w \in W_{II}} \mathbb{Z}\sigma_w$ という二つの比較的小さな部分に分割できたことが本質的である.

例 3.8 $H^*(E_8/B; \mathbb{Z})$ において,

$$\begin{aligned} \sigma_{[5,4,2]} \sigma_{[1,3,6,5,4,2]} &= \sigma_{[3,1,5,4,3,6,5,4,2]} + \sigma_{[2,3,1,4,3,6,5,4,2]} + 2\sigma_{[1,2,4,3,7,6,5,4,2]} \\ &\quad + \sigma_{[1,2,5,4,3,6,5,4,2]} + \sigma_{[3,1,4,3,7,6,5,4,2]} + 2\sigma_{[1,4,3,8,7,6,5,4,2]} + 2\sigma_{[1,5,4,3,7,6,5,4,2]} \end{aligned}$$

(一般に, 幾何学的な意味付けから, 右辺の係数は全て正になることが知られている.)

同様の手法で, P が B またはいくつかの極大部分群の場合に, 次のリストを得た. (E_l/B は長くなるため省略している.) 生成元や関係式 ρ_i の多項式表示も具体的に与えることができる.

旗多様体	生成元	関係式 ρ_i の次数
G_2/B	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2]}, \sigma_{[1,2,1]}$	(4, 6, 12)
G_2/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[1,2,1]}$	(6)
G_2/P_2	$\sigma_{[2]}, \sigma_{[1,2]}, \sigma_{[2,1,2]}$	(4, 6)
F_4/B	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2]}, \sigma_{[3]}, \sigma_{[4]}, \sigma_{[1,2,3]}, \sigma_{[1,2,3,4]}$	(4, 6, 8, 12, 16, 24)
F_4/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[3,2,1]}, \sigma_{[4,3,2,1]}, \sigma_{[3,2,4,3,2,1]}$	(6, 12, 16, 24)
F_4/P_4	$\sigma_{[4]}, \sigma_{[3,2,3,4]}$	(16, 24)
E_6/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2,4,3,1]}$	(18, 24)
E_6/P_2	$\sigma_{[2]}, \sigma_{[5,4,2]}, \sigma_{[1,3,4,2]}, \sigma_{[1,3,6,5,4,2]}$	(12, 16, 18, 24)
E_7/P_1	$\sigma_{[1]}, \sigma_{[2,4,3,1]}, \sigma_{[2,6,5,4,3,1]}, \sigma_{[3,4,2,7,6,5,4,3,1]}$	(18, 24, 28, 36)
E_7/P_7	$\sigma_{[7]}, \sigma_{[2,4,5,6,7]}, \sigma_{[6,5,4,2,3,4,5,6,7]}$	(20, 28, 36)
E_8/P_8	$\sigma_{[8]}, \sigma_{[2,4,5,6,7,8]}, \sigma_{[3,1,4,2,3,4,5,6,7,8]}, \sigma_{[5,4,3,1,7,6,5,4,2,3,4,5,6,7,8]}$	(30, 40, 48, 60)

ここでは、ルートの番号付けは [7] に従っている。

4 応用

4.1 不変式環

旗多様体のコホモロジー環は、不変式環 (余不変式環) と関わりが深い事を見たが、その関連をより詳しく述べる。

ワイル群の不変式環 $\mathbb{I}_p := \mathbb{F}_p[t_1, \dots, t_l]^W$ は、 p が torsion prime であるとき、非常に複雑になる。その近似として、[30] では次の p -stable invariants J_p^l が導入された。

$$(0) = J_p^0 \subset (\mathbb{F}_p^+[t_1, \dots, t_l]^W) = J_p^1 \subset J_p^2 \subset \dots \subset J_p^l = J_p^{l+1} = \dots, \\ J_p^m := (\{f \in \mathbb{F}_p^+[t_1, \dots, t_l] \mid \forall w \in W, w(f) - f \in J_p^{m-1}\})$$

このイデアルは旗多様体のコホモロジーと密接に関係があり、実際次の定理が証明されている。

定理 4.1 ([30]) $\iota_p^* : H^*(BT; \mathbb{F}_p) \longrightarrow H^*(K/T; \mathbb{F}_p)$ を \mathbb{F}_p 係数の特性写像とする時、

$$\ker \iota_p^* \cong J_p^l$$

また、 J_p^l は正規列で生成されるイデアルである。

これより、次の結果を得る。

(G, p)	J_p^l の生成元の次数	(G, p)	J_p^l の生成元の次数
$(Spin(2n+1), 2)$	$(2, 3, 4, \dots, n, 2^{\lceil \log_2 n \rceil + 1})$	$(E_6, 3)$	$(2, 4, 5, 6, 8, 9)$
$(Spin(2n+2), 2)$	$(2, 3, 4, \dots, n, 2^{\lceil \log_2(2n-1) \rceil})$	$(E_7, 2)$	$(2, 3, 5, 8, 9, 12, 14)$
$(G_2, 2)$	$(2, 3)$	$(E_7, 3)$	$(2, 4, 6, 8, 10, 14, 18)$
$(F_4, 2)$	$(2, 3, 8, 12)$	$(E_8, 2)$	$(2, 3, 5, 8, 9, 12, 14, 15)$
$(F_4, 3)$	$(2, 4, 6, 8)$	$(E_8, 3)$	$(2, 4, 8, 10, 14, 18, 20, 24)$
$(E_6, 2)$	$(2, 3, 5, 8, 9, 12)$	$(E_8, 5)$	$(2, 6, 8, 12, 14, 18, 20, 24)$

この表は既に Kac [17] によって得られているが、ここではさらに、その生成元の具体的な表示を与える事ができる。

例 4.2 G_2 のワイル群は二面体群 D_6 である. $p = 2$ に対して, 次が成り立つ.

$$J_2^2 = (t_2^2 + t_1^2 + t_1 t_2, t_1^2 t_2 + t_1 t_2^2) \subset \mathbb{F}_2[t_1, t_2]$$

4.2 G の Chow 環

旗多様体のコホモロジー $H^*(G/B; \mathbb{Z})$ は Chow 環 $A^*(G/B)$ と同型であり ([13, Example 19.1.11]), さらに, G の Chow 環 $A^*(G)$ との次の様な関係も知られている.

定理 4.3 ([16]) 射影 $p: G \rightarrow G/B$ による引き戻し $p^*: A^*(G/B) \rightarrow A^*(G)$ は同型

$$\frac{A^*(G/B)}{(A^1(G/B))} \cong A^*(G)$$

を誘導する.

これらを用いて, [29] と [18](改訂中) において, 全ての単連結群 G に対して $A^*(G)$ が決定された.

5 今後の課題

5.1 シューベルト類の分解可能性

次数付き環 A の元 a に対して, a が a の次数未満の元たち $A^{<|a|}$ で生成される部分環に属している時, 分解可能 (decomposable) であるという. シューベルト類の分解可能性は, 特性写像の像や不変式と関連しており, これをワイル群の組み合わせ論から判定できれば面白い.

例 5.1 $H^*(E_8/B; \mathbb{Z})$ において,

$$\begin{aligned} \sigma_{[1,3,4,2,7,6,5,4,3,8,7,6,5,4,2]} & \text{ は分解可能でない.} \\ \sigma_{[1,5,4,2,7,6,5,4,3,8,7,6,5,4,2]} & = -\sigma_{[5,4,2]} \sigma_{[8,7,6,5,4,2]}^2 + \sigma_{[6,5,4,2]} \sigma_{[7,6,5,4,2]} \sigma_{[8,7,6,5,4,2]} \\ & \quad - \sigma_{[7,6,5,4,2]} \sigma_{[1,5,4,3,8,7,6,5,4,2]} - \sigma_{[8,7,6,5,4,2]} \sigma_{[6,5,4,3,7,6,5,4,2]} \\ & \text{ は分解可能.} \end{aligned}$$

シューベルト多項式を整数係数の多項式として定義する為には, まずそのすみかとなるべき多項式環を見つけてやる必要がある. 分解可能性の判定は, その一歩目にある問題と言える.

5.2 同変コホモロジー

極大トーラスに関する同変コホモロジー環 $H_T^*(G/P)$ の研究は, 不動点への局所化が非常に綺麗な構造を持つ事 (GKM 理論 [15]) から, 盛んに行われている ([21],[1],[22]). しかし上で見た様な計算, すなわち, 多項式環の剰余環としての表示はまだ無く, 今回紹介した方法を適用することはできない. そこでまず, Toda 流の計算法を確立し, 具体的に実行することが求められる. 常コホモロジーの場合には, $K/T \hookrightarrow BT \rightarrow BK$ というファイバー列に対する Serre スペクトル系列を用いたが, 同変コホモロジーの場合には, 次の様なファイバー列の引き戻し図式に

対する Eilenberg-Moore スペクトル系列 ([27]) が有用である様に思われる.

$$\begin{array}{ccc}
 K/T & \xlongequal{\quad} & K/T \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 ET \times_T K/T & \longrightarrow & BT \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 BT & \longrightarrow & BK
 \end{array}$$

参考文献

- [1] S. Billey, *Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B* , Duke Math. J. **96** (1999), no. 1, 205–224.
- [2] S. Billey and M. Haiman, *Schubert polynomials for the classical groups*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), no. 2, 443–482.
- [3] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Schubert cells and the cohomology of the spaces G/P* , L.M.S. Lecture Notes vol.69 Cambridge Univ. Press, 1982, 115-140.
- [4] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), 115-207.
- [5] R. Bott and H. Samelson, *Application of the theory of Morse to the symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964-1029.
- [6] A. Borel, *A. Borel, Linear Algebraic Groups, second ed.*, Grad. Texts in Math., vol. **126**, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [7] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbre de Lie IV – VI*, Masson, Paris, 1968.
- [8] C. Chevalley, *Sur les décomposition cellulaires des espaces G/B* , Algebraic Groups and their Generalizations: Classical Methods (W. Haboush, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 56, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994, 1-23.
- [9] I. Coskun, *A Littlewood-Richardson rule for partial flag varieties*, preprint available at: <http://www.math.uic.edu/~coskun/>
- [10] M. Demazure, *Invariants symétriques des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287-301.
- [11] H. Duan and X. Zhao, *The Chow rings of generalized Grassmannians*, preprint, arXiv:math.AG/0511332v8
- [12] S. Fomin and A.N. Kirillov, *Combinatorial B_n -analogues of Schubert polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **348**(1996), no. 9, 3591–3620.
- [13] W. Fulton, *Intersection theory*, volume 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, second edition, **1998**.
- [14] W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

- [15] M. Goresky, R. Kottwitz, and R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. Math. **131** (1998), no. 1, 25–83.
- [16] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Exposé 5 in Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, 1958, Multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris.
- [17] V. Kac, *Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups*, Invent. Math. **80** (1985), 69–79.
- [18] S. Kaji and M. Nakagawa, *The Chow rings of the algebraic groups E_6 and E_7* , preprint, arXiv:math.AT/07093702
- [19] S. Kleiman, *Intersection theory and enumerative geometry: A decade in review*, Algebraic Geometry, Bowdoin 1985 (Spencer Bloch, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. **46**, Part 2, Amer. Math. Soc., 1987, 321 – 370.
- [20] S. Kleiman and D. Laksov, *Schubert calculus*, American Mathematical Monthly, **79** (1972), 1061–1082.
- [21] A. Knutson and T. Tao, *Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians*, Duke Math. J. **119** (2003), no. 2, 221–260.
- [22] T. Ikeda, *Schubert classes in the equivariant cohomology of the Lagrangian Grassmannian*, Adv. Math. **215** (2007), no. 1, 1–23.
- [23] A. Lascoux and M. Schützenberger, *Polynômes de Schubert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **294** (1982), no. 13, 447–450.
- [24] D. E. Littlewood and A. R. Richardson, *Group characters and algebra*, Philos. Trans. Roy. Soc. London. **233** (1934), 99–141.
- [25] I. G. Macdonald, *Schubert polynomials* Surveys in combinatorics, 1991 (Guildford, 1991), 73–99, London Math. Soc. Lecture Note Ser. **166**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1991.
- [26] L. Manivel, *Symmetric Functions, Schubert Polynomials and Degeneracy Loci*, SMF/AMS Texts Monogr., vol. **6**. 2001.
- [27] J. McCleary, *A user’s guide to spectral sequences*. Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, **58**. Cambridge University Press, Cambridge, 2001. xvi+561 pp.
- [28] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_7/T* , J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 303–321.
- [29] M. Nakagawa, *A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds*, Fund. Math. **199** (2008), 273–293.
- [30] F. Neumann, M. D. Neusel and L. Smith, *Rings of generalized and stable invariants of pseudoreflections and pseudoreflexion groups*, J. Algebra **182** (1996), no. 1, 85–122.
- [31] S. Nikolenko and N. Semenov, *Chow ring structure made simple*, preprint, arXiv:math.AG/0606335.
- [32] H. Toda, *On the cohomology ring of some homogeneous spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 185–199.
- [33] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T* , J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 257–286.

レベル 2 写像類群のアーベル化

佐藤正寿（東京大学大学院数理科学研究科）

1 はじめに

本稿では, 曲面の写像類群の指数有限部分群の中で基本的な, レベルつき写像類群のアーベル化, 同義として, 整係数 1 次元ホモロジー群について述べる. 一般に写像類群の部分群のホモロジー群は低次のものでもほとんど知られていない. 特に写像類群自体のアーベル化は自明であるが, その部分群のアーベル化は一般には非自明であり, 指数有限部分群についてこれを計算しようというのが本稿の内容である. 写像類群の曲面の整係数 1 次ホモロジー群への作用において, 自明に作用する元全体のなす部分群を Torelli 群と呼ぶ. 写像類群の指数有限正規部分群であり Torelli 群を含むものは, ある d についてレベル d 写像類群を含むことが知られている. このように, レベル d 写像類群は指数有限部分群の中で基本的な対象である.

写像類群の部分群は, スピン構造など曲面の幾何構造が群の構造として現れることがあり, その意味で興味深い対象である. 特にレベル 2 写像類群のアーベル化は, 整ホモロジー 3 球面の Rochlin 不変量を用いて定義される Torelli 群上の準同型を拡張することにより得られた.

また, 写像類群は閉曲面上の複素構造の isotopy 類全体のなす空間である Teichmüller 空間 \mathcal{T}_g に自然に作用し, その商空間は, 代数幾何, 複素解析においても重要な空間である Riemann 面のモジュライ空間である. 写像類群の指数有限部分群はこのモジュライ空間の有限被覆の orbifold 基本群としても捉えられる. 特に d が 3 以上においては, レベル d 写像類群は有限被覆の通常の意味での基本群となり, レベル d 写像類群のアーベル化はこの有限被覆の整係数 1 次ホモロジー群と一致する.

現在までに知られているレベルつき写像類群のホモロジー群の結果について述べる. まず, レベル d 写像類群の 1 次ホモロジー群は, McCarthy[8], Hain[4] によって独立に, 有理係数では自明であることが示された. そのため, Farb[3] により写像類群の未解決問題の一つとして, レベル d 写像類群のアーベル化の決定が挙げられている. なお, その有理係数 2 次ホモロジー群の決定も未解決問題に挙げられたが, 最近 Putman[11] により解決され, 写像類群の 2 次ホモロジー群と同様に, 階数が 1 であることが判明した.

筆者はレベル d 写像類群のアーベル化を, d が奇数もしくは 2 について完全に決定し, 一般の偶数 d についてもほぼ決定することができたので, 本稿ではこれについて紹介する. 特に symplectic 群のレベル d 主合同部分群のアーベル化も決定し

¹This research is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

ている. また, $d = 2$ においては, Birman-Craggs[2] によって定義された Torelli 群上の準同型を, レベル 2 写像類群上へ拡張した準同型により, そのアーベル化が与えられることがわかったので, これについても紹介したい.

2 レベルつき写像類群の定義と群の完全列

以下では, すべて $g \geq 1, r = 0, 1$ とする. 種数 g で境界の連結成分を 1 つもつコンパクト有向曲面を $\Sigma_{g,1}$, 種数 g の有向閉曲面を Σ_g とする. 曲面の写像類群とは, 曲面の向きを保つ微分同相全体を isotopy による同値関係で割った群

$$\mathcal{M}_g := \text{Diff}_+(\Sigma_g) / \text{isotopy}$$

である. 特に曲面が境界をもつ場合には, 微分同相として境界上の各点を止めるものを取り, 同値関係も境界上の各点を止める isotopy を考え,

$$\mathcal{M}_{g,1} := \text{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1}) / \text{isotopy rel } \partial\Sigma_{g,1}$$

と表す.

まず, レベル d 写像類群に関連する完全列を 1 つ構成する. 無限巡回群, 位数 d の巡回群を \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_d とし, $M = \mathbf{Z}, \mathbf{Z}_d$ とする. また, $I : H_1(\Sigma_{g,r}; M) \times H_1(\Sigma_{g,r}; M) \rightarrow M$ を交点形式とし, $H_1(\Sigma_{g,r}; M)$ の交点形式 I を保つ自己同型全体のなす群を $\text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,r}; M), I)$ と表す.

写像類群は曲面の 1 次ホモロジー群 $H_1(\Sigma_{g,r}; M)$ へ作用し, 交点形式 I を保つので準同型 $\mathcal{M}_{g,r} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,r}; M), I)$ が定義できる. これは全射準同型であることが知られている. 前述したように, レベル d 写像類群は $M = \mathbf{Z}_d$ としたときの作用の核 $\mathcal{M}_{g,r}[d] := \text{Ker}(\mathcal{M}_{g,r} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z}_d), I))$ として定義される. 同様に $M = \mathbf{Z}$ として作用を考え, $\mathcal{I}_{g,r} := \text{Ker}(\mathcal{M}_{g,r} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z}), I))$ で定義される部分群を Torelli 群と呼ぶ.

$H_1(\Sigma_{g,r}; M)$ の基底として symplectic 基底を 1 つ固定すると, 同型

$$\text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,r}; M), I) \cong \text{Sp}(2g; M) := \{A \in \text{GL}(2g; M) \mid {}^t A J A = J\}$$

が成り立つ. ただしここで, g 次単位行列, 零行列を I_g, O_g とし $J = \begin{pmatrix} O_g & I_g \\ -I_g & O_g \end{pmatrix}$

である.

準同型 $\iota : \mathcal{M}_{g,r} \rightarrow \text{Aut}(H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z}), I) \cong \text{Sp}(2g; \mathbf{Z})$ について, $\iota(\mathcal{M}_{g,r}[d])$ は Symplectic 群のレベル d 主合同部分群 $\Gamma_g[d] := \text{Ker}(\text{Sp}(2g; \mathbf{Z}) \rightarrow \text{Sp}(2g; \mathbf{Z}_d))$ に一致する. 以上の準備の下で完全列

$$1 \longrightarrow \mathcal{I}_{g,r} \longrightarrow \mathcal{M}_{g,r}[d] \xrightarrow{\iota} \Gamma_g[d] \longrightarrow 1$$

が得られる. 特にこの群の完全列はホモロジー群に次の完全列を誘導する.

$$H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_d \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

したがって, レベル d 写像類群のアーベル化について述べる前に, 第3節において Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}$, Symplectic 群の主合同部分群 $\Gamma_g[d]$ のアーベル化について述べておく.

3 Torelli 群, Symplectic 群のレベル d 主合同部分群のアーベル化

3.1 Torelli 群のアーベル化

Torelli 群のアーベル化は既に Johnson により得られており, 整ホモロジー 3 球面の Rochlin 不変量を用いて幾何的に定義される Birman-Craggs 準同型と, 曲面の基本群への作用から代数的に定義される Johnson 準同型により決定される. これら 2 つの準同型のうち, Birman-Craggs 準同型について述べる.

$h: \Sigma_g \rightarrow S^3$ を種数 g の Heegaard 埋め込みとする. つまり, S^3 内に 2 つの種数 g の handlebody $A, B \subset S^3$ があって, $\partial A = \partial B = h(\Sigma_g) \subset S^3$, $A \cup B = S^3$ を満たすとする.

$\varphi = [f] \in \mathcal{I}_g$ について, A, B の貼り合わせ写像を φ を用いてひねることを考える. つまり, $x \in \partial A$ を $hfh^{-1}(x) \in \partial B$ へ貼り合わせ, 新しい閉 3 次元多様体を $M_\varphi := A \cup_{hfh^{-1}} B$ と定める. これは特に整ホモロジー 3 球面であり, その Rochlin 不変量が定まる. つまり, M_φ を境界にもつコンパクトスピンの 4 次元多様体 V_φ の符号数が mod 16 で well-defined に定まる. 特にこれは 8 の倍数になり, 写像

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_g &\rightarrow \mathbf{Z}_2 \\ \varphi &\mapsto \frac{\text{Sign } V_\varphi}{8} \pmod{2} \end{aligned}$$

が定まる.

Theorem 3.1 (Birman-Craggs[2]). 上の写像 $\mathcal{I}_g \rightarrow \mathbf{Z}_2$ は全射準同型である.

同様にして, 境界つき曲面の Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,1}$ 上にも準同型が構成できる. また, S^3 の Heegaard 埋め込みの取り方により, この準同型は複数個構成できる. Johnson は $B_{g,1}^3$ という \mathbf{Z}_2 加群を考え, これらの準同型を整理して, 全射準同型 $\mathcal{I}_{g,1} \rightarrow B_{g,1}^3$ を構成した.

次に Johnson 準同型について簡単に触れておく. $H := H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z})$ とし, その n 次交代テンソルを $\Lambda^n H$ と表す. Johnson により Torelli 群上に全射準同型

$$\mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \Lambda^3 H$$

が定義された. 以下では用いないので定義は省略する. 部分空間 $B_{g,1}^2 \subset B_{g,1}^3$ を用いて, Torelli 群のアーベル化は次のように表される.

Theorem 3.2 (Johnson[6]).

$g \geq 3$ のとき,

$$H_1(\mathcal{I}_{g,1}; \mathbf{Z}) = \Lambda^3 H \oplus B_{g,1}^2.$$

つまり, Torelli 群のアーベル化は, Birman-Craggs 準同型, Johnson 準同型により決定される. 閉曲面の Torelli 群のアーベル化も同様に Johnson により決定されているが, ここでは省略する.

3.2 Symplectic 群のレベル d 主合同部分群のアーベル化

次に Symplectic 群のレベル d 主合同部分群のアーベル化について述べる. $d \geq 2$, n を正の整数とし, trace が 0 の \mathbf{Z}_d 係数 n 次正方行列全体のなす加群を $\mathfrak{sl}(n; \mathbf{Z}_d)$ と表す. まず, 特殊線形群のレベル d 主合同部分群 $\Gamma'_n[d] = \text{Ker}(\text{SL}(n; \mathbf{Z}) \rightarrow \text{SL}(n; \mathbf{Z}_d))$ において, Lee-Szczarba[7] により準同型が定義され, 特に 3 以上の素数 p について次を示した. 整数係数 n 次正方行列 A を用いて, $\Gamma'_n[d]$ の任意の元は $I_n + dA$ と表せることに注意する.

Theorem 3.3 (Lee-Szczarba[7]). $n \geq 3$, 素数 $p \geq 3$ について,

$$\begin{aligned} \Gamma'_n[p] &\rightarrow \mathfrak{sl}(n; \mathbf{Z}_p) \\ I_n + pA &\mapsto A \end{aligned}$$

は同型 $H_1(\Gamma'_n[p]; \mathbf{Z}) \cong \mathfrak{sl}(n; \mathbf{Z}_p)$ を与える.

上の定理は, 主に Bass-Milnor-Serre[1] による線形群の合同部分群における結果による. 奇数 d については, この準同型を Symplectic 群のレベル d 主合同部分群 $\Gamma_g[d]$ に制限することにより, $\Gamma_g[d]$ のアーベル化が与えられることが, Putman[10], Perron, 筆者 [12] により独立に示された. \mathbf{Z}_d 係数 n 次正方行列全体を $M(n; \mathbf{Z}_d)$ とし, $\mathfrak{sp}(2g; \mathbf{Z}_d) := \{A \in M(2g; \mathbf{Z}_d) \mid {}^tAJ + JA = 0\}$ と定める. 同様に Bass-Milnor-Serre[1], もしくは, Mennicke[9] の結果を利用して, 次が得られる.

Proposition 3.4. $g \geq 2$ とする. $d \geq 3$ が奇数のとき,

$$\begin{aligned} \Gamma_g[d] &\rightarrow \mathfrak{sp}(2g; \mathbf{Z}_d) \\ I_n + dA &\mapsto A \end{aligned}$$

は同型 $H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \cong \mathfrak{sp}(2g; \mathbf{Z}_d) \cong \mathbf{Z}_d^{2g^2+g}$ を与える.

さらに, 偶数 d については次が得られた.

Proposition 3.5. $g \geq 2$ とする. $d \geq 2$ が偶数のとき,

$$H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}_d^{2g^2-g} \oplus \mathbf{Z}_{2d}^{2g}.$$

4 得られた結果

d が奇数のときのレベル d 写像類群のアーベル化は, Putman[10], Perron, 筆者 [12] により独立に得られた.

Theorem 4.1. $g \geq 3$ とする. $d \geq 3$ が奇数のとき,

$$H_1(\mathcal{M}_{g,1}[d]; \mathbf{Z}) = \mathfrak{sp}(2g; \mathbf{Z}_d) \oplus (\Lambda^3 H \otimes \mathbf{Z}_d).$$

筆者はさらにレベル 2 写像類群のアーベル化を決定した. レベル 2 写像類群のアーベル化は, Birman-Craggs 準同型で表される Torelli 群のアーベル化の幾何的な 2-torsion が影響し, 奇数の場合に比べ複雑である.

Theorem 4.2. $g \geq 3$ のとき,

$$H_1(\mathcal{M}_{g,1}[2]; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}_2^{\binom{2g}{3}} \oplus \mathbf{Z}_4^{\binom{2g}{2}} \oplus \mathbf{Z}_8^{\binom{2g}{1}}.$$

閉曲面のレベル 2 写像類群のアーベル化も同様に計算できるが, ここでは省略する. 以上の結果を完全列

$$H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_d \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

の観点からまとめると, 次のようになる.

Corollary 4.3. $g \geq 3$ とする. d が奇数のとき,

$$0 \longrightarrow H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_d \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

は *split* する完全列である. $d = 2$ のとき,

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}_2 \longrightarrow H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_2 \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[2]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[2]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

は完全列である. $d \geq 4$ のとき,

$$\mathbf{Z}_2 \longrightarrow H_1(\mathcal{I}_{g,r}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}_d \longrightarrow H_1(\mathcal{M}_{g,r}[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow H_1(\Gamma_g[d]; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0$$

は完全列である.

特に偶数 $d \geq 4$ についても, レベル d 写像類群のアーベル化は位数 2 の巡回群拡大を除いて決定されている.

5 Heap の構成した Torelli 群上の準同型

Heap[5] は Torelli 群の元をモノドロミーにもつ mapping torus (とスピノルダントな空間) の表すスピノルディズム群の元を用いて, 準同型を構成した. 特にこれは Johnson 準同型の情報を完全に含んでおり, Birman-Craggs 準同型の情報も部分的に含む. 後ほど述べるように, Heap の構成した Torelli 群上の準同型に類似した準同型がレベル 2 写像類群上に構成できる. その準同型を用いてレベル 2 写像類群のアーベル化が決定される.

5.1 スピンボルディズム群

Heap による準同型はスピンボルディズム群に値をもつ. そのため, まずスピンボルディズム群の定義を復習しておく. 以下では第 2 Stiefel-Whitney 類が自明であるコンパクト有向 n 次元多様体 M について, そのスピン構造全体を $\text{spin}(M)$ と表す.

X を位相空間とする. $i = 1, 2$ について M_i をスピン構造 σ_i をもつスピン閉有向 n 次元多様体, $f_i : M_i \rightarrow X$ を連続写像とする. スピンコンパクト $n + 1$ 次元多様体 V と連続写像 $F : V \rightarrow X$ が存在し,

$$\partial V = M_1 \amalg (-M_2), \quad F|_{\partial V} = f_1 \amalg f_2$$

を満たし, さらに V のスピン構造が境界の連結成分 M_i に誘導するスピン構造が $\sigma_i \in \text{spin}(M_i)$ と一致するとする. 以上の条件を満たすとき, (M_1, f_1, σ_1) と (M_2, f_2, σ_2) はスピンボルダントであるとよぶ.

このような組 (M, f, σ) 全体にスピンボルダントによる同値関係を定め, その同値類全体を考える. 同値類には非連結和により加法が定まり, 位相空間 X の n 次元スピンボルディズム群とよばれる. 以下では, これを $\Omega_n^{\text{spin}}(X)$ と表すこととする. また, 通常のボルディズム群を $\Omega_n(X)$ と表す.

5.2 Heap による準同型

以上の準備の下, Heap の準同型について述べる.

Σ_g に含まれる円板 $D \subset \Sigma_g$ を 1 つ固定し, $\Sigma_g = \Sigma_{g,1} \cup D$ とみなす. $\mathcal{M}_{g,1}$ の各写像類を D 上恒等写像により拡張することにより, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ は Σ_g の円板 D を固定する写像類群

$$\text{Diff}_+(\Sigma_g, D) / \text{isotopy rel } D$$

と同一視できる. 以下では, 写像類群 $\mathcal{M}_{g,1}$ の部分群についても, この同一視の下で Σ_g の円板 D を保つ写像類群の部分群と見なす.

写像類 $\varphi = [h] \in \mathcal{I}_{g,1}$ に対し, mapping torus $T_\varphi := \Sigma_g \times [0, 1] / (h(x), 0) \sim (x, 1)$ を考える. 円板に h は自明に作用するので, 部分空間 $D \times S^1 = D \times [0, 1] / (x, 0) \sim (x, 1) \subset T_\varphi$ が考えられる. この部分空間について surgery を行うと, 閉 3 次元多様体

$$T'_\varphi := (T_\varphi - D \times S^1) \cup \partial D \times D^2,$$

を得る. 上の閉 3 次元多様体について, 特に mapping torus のファイバーの包含写像から誘導される自然な同型

$$H_1(T'_\varphi; \mathbf{Z}) \cong H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$$

がある. Hurewicz 準同型 $\pi_1(T'_\varphi) \rightarrow H_1(T'_\varphi; \mathbf{Z})$ と, 同型 $H_1(T'_\varphi; \mathbf{Z}) \cong H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z})$ の合成は Eilenberg-MacLane 空間への連続写像

$$f : T'_\varphi \rightarrow K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)$$

を up to homotopy で一意に定める. また, 自然な全単射

$$\text{spin}(T'_\varphi) = \text{spin}(\Sigma_{g,1})$$

があり, 2つの空間のスピン構造は同一視される. したがって $\sigma \in \text{spin}(\Sigma_{g,1})$ について, 次の写像が定義できる.

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{g,1} &\rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) \\ \varphi &\mapsto [T'_\varphi, f, \sigma] \end{aligned}$$

このとき, Heap により次が示された.

Theorem 5.1 (Heap[5]). 上の写像

$$\mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1))$$

は準同型である.

また, コホモロジー類 $c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$ は Eilenberg-MacLane 空間に連続写像 $K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1) \rightarrow K(\mathbf{Z}, 1)$ を up to homotopy で一意に定める. スピンボルディズム類にこの連続写像を合成することにより, 準同型

$$c_* : \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}, 1))$$

が誘導される. これを用いて次が示された.

Theorem 5.2 (Heap[5]). コホモロジー類 $c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) \cong \text{Hom}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$ の誘導する準同型との合成

$$\mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}, 1)) \cong \mathbf{Z}_2$$

は *Birman-Craggs* 準同型に一致する.

スピン構造を忘れることにより定まる準同型

$$\mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) \rightarrow \Omega_3(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) \cong \Lambda^3 H$$

は *Johnson* 準同型に一致する.

6 レベル 2 写像類群上の準同型

6.1 準同型の構成

Heap により構成された Torelli 群上の準同型とほぼ同様にして, レベル 2 写像類群上に準同型が構成される.

写像類 $\varphi = [h] \in \mathcal{M}_{g,1}[2]$ に対し, mapping torus $T_\varphi := \Sigma_g \times [0, 1]/(h(x), 0) \sim (x, 1)$ に手術を行い, 同様に閉 3 次元多様体 $T'_\varphi := (T_\varphi - D \times S^1) \cup \partial D \times D^2$ を得る. 特に $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}[2]$ より \mathbf{Z}_2 係数 1 次ホモロジー群の間に自然な同型

$$H_1(T'_\varphi; \mathbf{Z}_2) \cong H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2)$$

があるため, 連続写像 $f_2 : T'_\varphi \rightarrow K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1)$ が定まる. 同様に, 自然な全単射 $\text{spin}(T'_\varphi) = \text{spin}(\Sigma_{g,1})$ によりスピン構造を同一視すると, 次が定義される.

$$\begin{aligned} \eta_\sigma : \mathcal{M}_{g,1}[2] &\rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1)) \\ \varphi &\mapsto [T'_\varphi, f_2, \sigma] \end{aligned}$$

Heap[5] による証明とほぼ同様の手順で, 次が得られる.

Theorem 6.1. η_σ は準同型である.

6.2 準同型 $\eta_\sigma : \mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1))$ の性質

Heap による Torelli 群上の準同型と, 上で構成したレベル 2 写像類群上の準同型の関係について述べる. $c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}) = \text{Hom}(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), \mathbf{Z})$ とすると, 準同型 $c_* : \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}, 1))$ が誘導される. 同様にこれを mod 2 で考え, $(c \bmod 2)_* : \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1)) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}_2, 1))$ が定まる. η_σ は Heap によって構成された準同型と以下のように可換であることがわかる.

Remark 6.2. 次は可換である. 特に, 下段の準同型は *Birman-Craggs* 準同型のレベル 2 写像類群上への拡張である.

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{I}_{g,1} & \longrightarrow & \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}), 1)) & \xrightarrow{c_*} & \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}, 1)) \cong \mathbf{Z}_2 \\ \text{inc} \downarrow & & & & \text{(mod } 2)_* \downarrow \\ \mathcal{M}_{g,1}[2] & \xrightarrow{\eta_\sigma} & \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1)) & \xrightarrow{(c \bmod 2)_*} & \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}_2, 1)) \cong \mathbf{Z}_8. \end{array}$$

ここで, $\mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1}[2]$ は自然な包含写像である. $\Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}, 1)) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}_2, 1))$ は mod 2 reduction $\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}_2$ が誘導する単射準同型である.

Heap の定義した準同型はスピノルディズム群に値をもち, 具体的に計算することが困難であった. 本研究において, レベル 2 写像類群に拡張した準同型を, 同型

$$\Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}_2, 1)) \cong \mathbf{Z}_8$$

を調べることによりその値を計算することができた. 実際の計算には T'_φ に埋め込まれた曲面の pin^- 構造, および, その Brown 不変量を調べることにより計算される. これらの詳細についてはここでは省き, 得られた結果のみについて述べる.

曲面のスピン構造は, quadratic function と呼ばれる関数と 1 対 1 に対応していることが知られている.

Definition 6.3. 曲面 $\Sigma_{g,r}$ の quadratic function とは, 関数 $q : H_1(\Sigma_{g,r}; \mathbf{Z}_2) \rightarrow \mathbf{Z}_2$ であり,

$$q(x + y) = q(x) + q(y) + I(x, y)$$

を満たすものである.

単純閉曲線 $K \subset \Sigma_{g,r}$ であり, 曲面を分割しないもの, つまり, $\Sigma_{g,r} - K$ が弧状連結となる曲線を考える. これらの曲線に沿う Dehn twist の 2 乗により, $\mathcal{M}_{g,1}[2]$ は生成されることが知られている. $c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2)$ について準同型

$$c_*\eta_\sigma : \mathcal{M}_{g,1}[2] \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1)) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(\mathbf{Z}_2, 1)) \cong \mathbf{Z}_8$$

の生成元における値は次のように表される.

Theorem 6.4. $c \in H^1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2)$, $\sigma \in \text{spin}(\Sigma_{g,1})$ とし, 対応する quadratic function を q_σ と表す. 曲面を分割しない単純閉曲線 $K \subset \text{Int } \Sigma_{g,1}$ に沿う Dehn twist を t_K と表すとき,

$$c_*\eta_\sigma(t_K^2) = \begin{cases} (-1)^{q_\sigma([K])} & \text{if } c([K]) = 1, \\ 0 & \text{if } c([K]) = 0. \end{cases}$$

これにより, 準同型 η_σ の像が計算され, 次が得られる.

Corollary 6.5. $\sigma \in \text{spin}(\Sigma_{g,1})$ とする. このとき, 準同型

$$(\eta_\sigma)_* : H_1(\mathcal{M}_{g,1}[2]; \mathbf{Z}) \rightarrow \Omega_3^{\text{spin}}(K(H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbf{Z}_2), 1))$$

は単射である.

これよりレベル 2 写像類群のアーベル化が決定される.

また, Turaev[13] の結果によって, この準同型は mapping torus の Rochlin 関数を用いて表せることがわかる. 最後にこれについて述べる.

M を第 2 Stiefel-Whitney 類が自明な有向閉 3 次元多様体とする. M のスピン構造 σ を 1 つ定めると, M をスピン多様体として境界にもつコンパクトスピン 4 次元多様体 V_σ が存在する. これをもちいて, Rochlin 関数を

$$\begin{aligned} R_M : \text{spin}(M) &\rightarrow \mathbf{Z}_{16} \\ \sigma &\mapsto \text{Sign } V_\sigma \end{aligned}$$

と定める. このとき, $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}[2]$ から定まる mapping torus $M = T_\varphi$ について, 準同型 $c_*\eta_\sigma$ は Rochlin 関数 $R_{T_\varphi} : \text{spin}(T_\varphi) \rightarrow \mathbf{Z}_{16}$ を用いて,

$$c_*\eta_\sigma(\varphi) = \frac{R_{T_\varphi}(\sigma) - R_{T_\varphi}(\sigma + c)}{2}$$

と表される.

参考文献

- [1] H. Bass, J. Milnor, and J.P. Serre. The congruence subgroup property for SL_n ($n \geq 3$) and SP_{2n} ($n \geq 2$). *Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math*, Vol. 33, pp. 59–137, 1967.
- [2] J.S. Birman and R. Craggs. The μ -Invariant of 3-Manifolds and Certain Structural Properties of the Group of Homeomorphisms of a Closed, Oriented 2-Manifold. *Transactions of the American Mathematical Society*, Vol. 237, pp. 283–309, 1978.
- [3] B. Farb. Some problems on mapping class groups and moduli space, Problems on mapping class groups and related topics. In *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, Vol. 74, pp. 11–55, 2006.
- [4] R. Hain. Torelli groups and Geometry of Moduli Spaces of Curves. *Current Topics in Complex Algebraic Geometry (CH Clemens and J. Kollar, eds.) MSRI publications*, Vol. 28, pp. 97–143, 1995.
- [5] A. Heap. Bordism Invariants of the Mapping Class Group. *Topology*, Vol. 45, No. 5, pp. 83–124, 2006.
- [6] D. Johnson. The structure of the Torelli Group III: The abelianization of \mathcal{I}_g . *Topology*, Vol. 24, No. 2, pp. 127–144, 1985.
- [7] R. Lee and R.H. Szczarba. On the homology and cohomology of congruence subgroups. *Inventiones Mathematicae*, Vol. 33, No. 1, pp. 15–53, 1976.
- [8] J.D. McCarthy. On the first cohomology group of cofinite subgroups in surface mapping class groups. *Topology*, Vol. 40, No. 2, pp. 401–418, 2000.
- [9] J. Mennicke. Zur Theorie der Siegelschen Modulgruppe. *Mathematische Annalen*, Vol. 159, No. 2, pp. 115–129, 1965.
- [10] A. Putman. The abelianization of the level L mapping class group. *arXiv:0803.0539*, 2008.
- [11] A. Putman. The second rational homology group of the moduli space of curves with level structures. *arXiv:0809.4477v1*, 2008.
- [12] M. Sato. The abelianization of the level 2 mapping class group. *arXiv:0804.4789*, 2008.
- [13] V.G. Turaev. Cohomology rings, linking forms and invariants of spin structures of three-dimensional manifolds. *Sbornik: Mathematics*, Vol. 48, No. 1, pp. 65–79, 1984.

結び目の交差交換とバンド手術について

安部 哲哉

大阪市立大学理学研究科
日本学術振興会特別研究員 (DC2)

概要

結び目のバンド手術を用いてバンド結び目解消数を定義する。結び目の交差交換を用いて定義される結び目解消数を用いて、バンド結び目解消数を上から評価する。後半は、結び目の交差交換を用いて定義される交代化数について、関連する話題を含め現状を報告する。

1 イントロダクション

この節では、バンド手術とバンド結び目解消数の定義を与え、主定理（バンド結び目解消数の上からの評価）を述べる。

L を絡み目とし、 $b: I \times I \rightarrow S^3$ を $b(I \times I) \cap L = b(I \times \partial I)$ となる埋め込みとする。ここで I は単位区間を表すとする。 L' を $(L - b(I \times \partial I)) \cup b(\partial I \times I)$ とする。この L' を L からバンド b に沿ったバンド手術で得られた絡み目という。結び目 K のバンド結び目解消数 $u_b(K)$ とは、結び目にバンドをつけて自明な結び目にするために必要なバンド手術の最小回数のことである。バンド結び目解消数の定義に関して注意すべきは

- バンドを同時につけるのではなく、バンドを一回一回つける、
 - 結び目 K を自明な結び目に変える過程で絡み目ができることを許す、
- という2点である。

定理 1. ([3]) K を結び目とする。このとき

$$u_b(K) \leq c(K)/2,$$

が成り立つ。等号成立は K が自明な結び目か八の字結び目の時に限る。ここで $c(K)$ は K の交点数とする。

上の定理の証明の概略は3節で与える。次節は結び目解消数について述べる。

2 結び目解消数

交差交換とは、図1のような結び目の局所変形である。結び目 K の結び目解消数 $u(K)$ とは K を自明な結び目にするために必要な交差交換の最小回数のことである。つまり、結び目が何回の交差交換でほどけるかを表す不変量である。結び目解消数の定義は非常に簡単であるが、決定することは一般的に難しい。

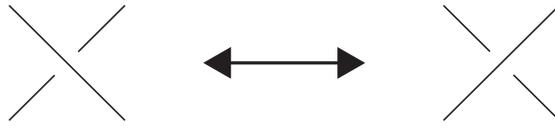


図 1: 交差交換

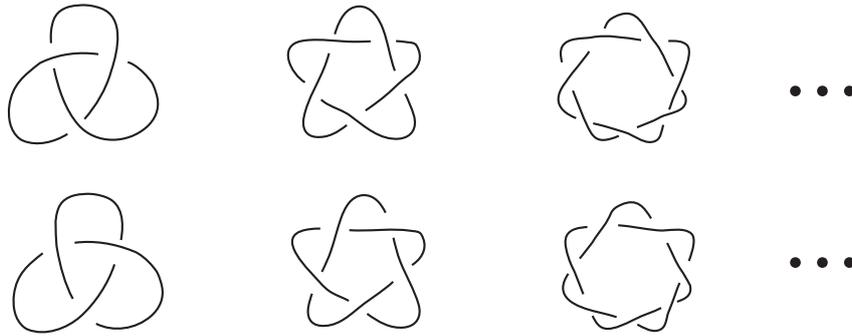


図 2:

2.1 結び目解消数と交点数

結び目解消数同様，結び目の交点数は定義が簡単だが決定することが難しい結び目不変量の一つである．結び目の結び目解消数とその交点数の一般的な関係

$$u(K) \leq \frac{c(K) - 1}{2}$$

は古くから知られている．最近，この不等式に関して Taniyama は次を示した．

定理 2. ([18]) K を等式

$$u(K) = \frac{c(K) - 1}{2}$$

を満たす結び目とする．このとき K は $(2, q)$ -トーラス結び目となる．ここで q は 1 でないある奇数である．

筆者と Higa は，バンド結び目解消数を上から評価する過程で次を得た．

定理 3. ([3]) K を等式

$$u(K) = \frac{c(K) - 2}{2} \tag{1}$$

を満たす結び目とし， D を K の最小交点数を実現する図式とする．もし K が八の字結び目でないならば， D の交点 p が存在し， D を p で向きに沿ってスムージングして得られた図式の一方の成分は，図式としては図 2 中のいずれかとなり，もう一方の成分は自己交差をもたない．

上の定理は具体的な図で見るとわかりやすい．図 3 の左側の図式は 10_{152} の最小交点数を実現するものである．例えば，図 3 中の交点 p は定理の仮定を満たす．実際， p で向きに沿ってスムージングして得られた図式（図 3 の右側）の，一方の成分は図式としては $(2, 3)$ -トーラス結び目の標準図式であり，もう一方の成分は自己交差をもたない．同様に，図 4 の左側の図式は $12n_{725}$ の最小交点数を実現するものである．例えば，図 4 中の交点 p は定理の仮定を満たす．実際， p で向きに沿ってスムージングして得られた図式（図 4 の右側）の，



図 3: 10_{152}



図 4: $12n_{725}$

一方の成分は図式としては $(2, 5)$ -トーラス結び目の標準図式であり, もう一方の成分は自己交差をもたない.

注. K を八の字結び目すると等式 (1) を満たす. しかし, 図 5 からわかるように, K の最小交点数を実現する図式 D に対して, D の任意の交点で向きに沿ってスムージングしてできる 2 成分絡み目は, 一方の成分が図式としては 1 交点の図式であり, もう一方の成分は自己交差をもたない. よって定理 3 は八の字結び目に対しては成り立たない.

注. Taniyama [18] は絡み目に対しても定理 2 と同様のことが成り立つことを示した. また Hanaki-Kanadome [5] は絡み目に対して定理 3 と同様のことが成り立つことを示した.

3 バンド結び目解消数と交点数

バンド結び目解消数が 1 と 2 になる結び目の例を述べる.

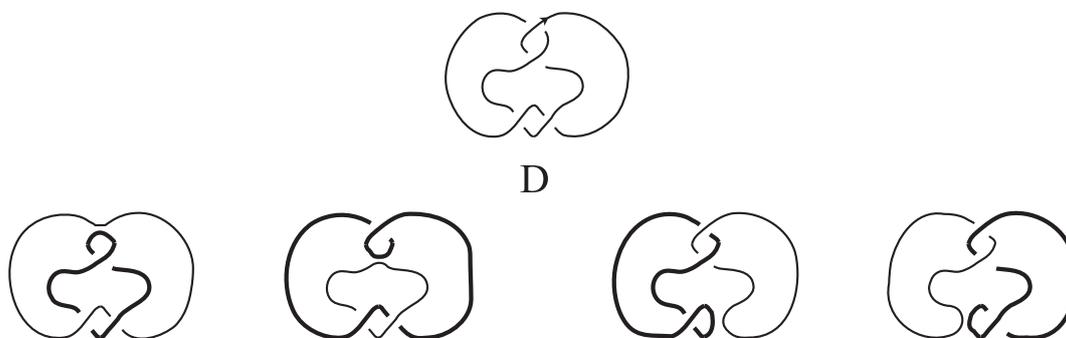


図 5: 八の字結び目

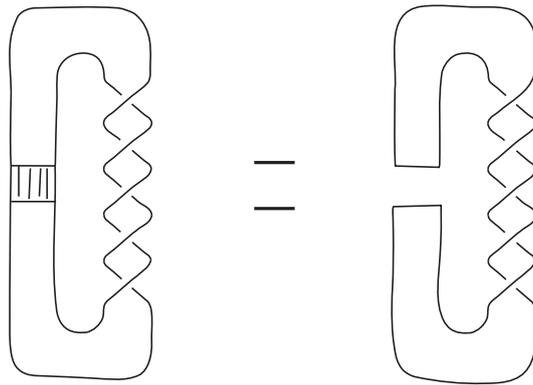


図 6: (2, 5)-トーラス結び目

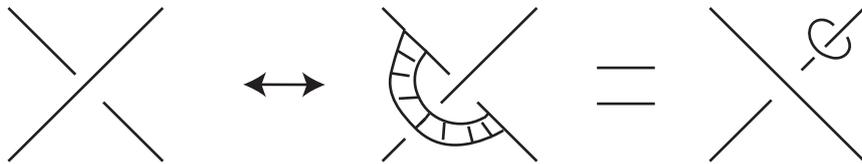


図 7: タイプ 1 のバンド手術

例 1. q を 1 でない奇数とし K を $(2, q)$ -トーラス結び目とする. このとき $u_b(K) = 1 (< c(K)/2)$ となる. 図 6 は $q = 5$ の場合を説明している.

例 2. K を八の字結び目とする. Lickorish は $u_b(K) = 2 (= c(K)/2)$ となること (つまり, $u_b(K) = 1$ ではないこと) を K の 2 重分岐被覆の first homology 上の linking form を用いて示した.

バンド手術で図 7 と図 8 のものを, それぞれタイプ 1 とタイプ 2 と呼ぶ. 次の補題の (3) は, バンド結び目解消数と結び目解消数の関係を示すものであり, Kanenobu-Miyazawa の結果である.

補題 4. ([3], [8]) K を結び目とする. このとき

- (1) K における 1 回の交差交換は 2 回のバンド手術で実現される.
- (2) K における 2 回の交差交換は 2 回のバンド手術で実現される.

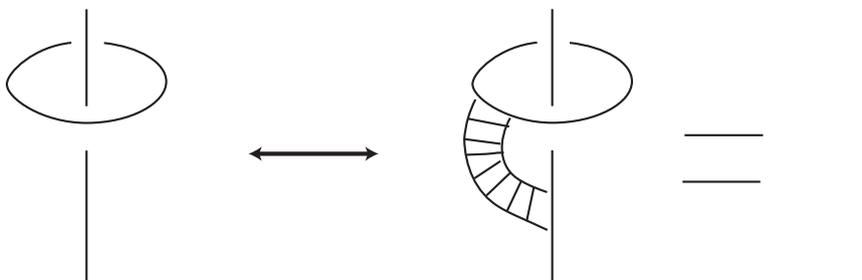


図 8: タイプ 2 のバンド手術

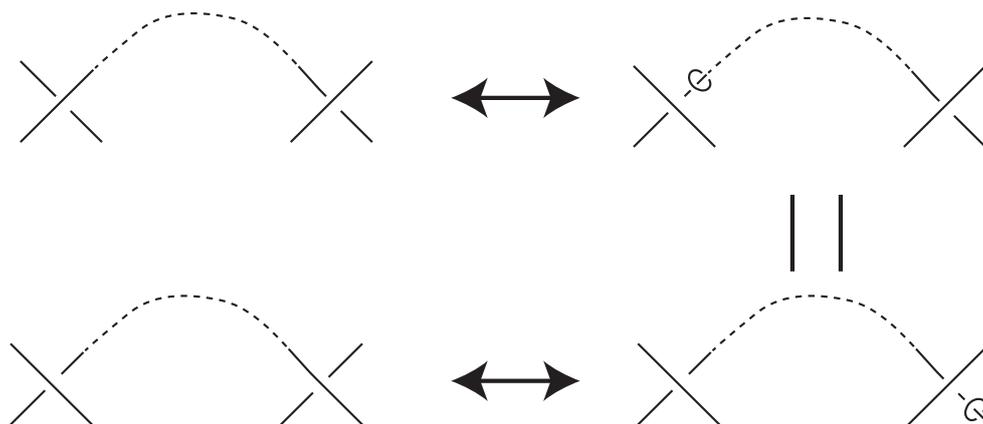


図 9: 2 回のバンド手術

(3) 次が成り立つ.

$$u_b(K) \leq u(K) + 1.$$

証明の概要. (1) 交点の周りでタイプ 1 のバンド手術をした後にタイプ 2 のバンド手術をすればよい.

(2) 図 9 のように, ある交点の周りでタイプ 1 のバンド手術をする. すると, K に交差交換を施した結び目と (小さな) ループからなる絡み目 (図 9 の右上) ができる. 次に, 交差交換したい部分の近くにループを滑らせる. そして, タイプ 2 のバンド手術をすればよい.

(3) (1) と (2) から直ちに得られる.

いよいよ定理 1 の証明の概略を述べる. 証明のポイントは, 八の字結び目でない結び目 K で等式 $u(K) = (c(K) - 2)/2$ を満たすものに対して, 定理 3 を用いて実際に $u_b(K) < c(K)/2$ となることを示すことである.

定理 1 の証明の概略. もし K が自明な結び目ならば $u_b(K) = c(K)/2$ となるので, 以後 K は非自明な結び目と仮定する. まず, 不等式を示す. もし K が $(2, q)$ -トーラス結び目ならば例 1 より $u_b(K) < c(K)/2$ となる. そうでなければ, 定理 2 より

$$u(K) \leq \frac{c(K) - 2}{2}$$

となる. 補題 4 の (3) と合わせて

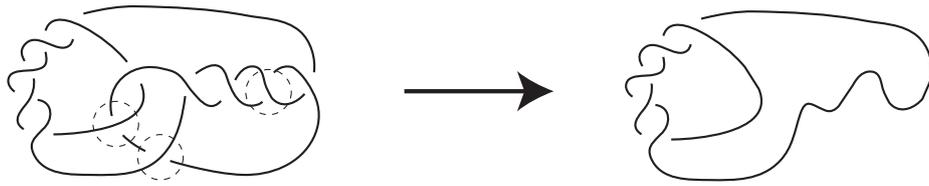
$$u_2(K) \leq u(K) + 1 \leq \frac{c(K)}{2}$$

となる. 以上で, 不等式が示せた. 次は, 題意の等式が K が自明な結び目か八の字結び目となるときにのみ成立することを示す. 上で示したことより, もし等号が成立したならば

$$u(K) = \frac{c(K) - 2}{2}$$

となる. もし, K が八の字結び目ならば例 2 より等号が成立する. そうでない場合は, 定理 3 より, K の最小交点数を実現する図式 D をとると, D の交点 p が存在し, D を p で向きに沿ってスムージングして得られた図式の一方の成分は, 図式としては $(2, q)$ -トーラス結び目 ($|q| \geq 3$) の標準図式となり, もう一方の成分は自己交差をもたない. 示すべきは

$$u_2(K) < \frac{c(K)}{2}$$

図 10: 10_{152} と 4 回のバンド手術図 11: $12n_{725}$ と 3 回のバンド手術

である。以後、 $|q| \geq 5$ の場合と $|q| = 3$ の場合に分けて証明する。ここでは、それぞれの場合の例を示すにとどめる。 $|q| \geq 5$ の場合。たとえば K を図 10 の左側の結び目とする。このとき図 10 の左側でしめされた交点をバンド手術を用いて交差交換をする。交点の選び方は、図 4 の右側で対応する交点で交差交換すると自己交差を持たない成分がもう一方の成分より「上」になるように選んだ。補題 4 の (1) と (2) より、4 回のバンド手術で $(2, 5)$ トーラス結び目が得られる (図 10 の右側を参照)。これより

$$u_2(K) \leq 4 + 1 < c(K)/2$$

が分かる。 $|q| = 3$ の場合。この場合は少し工夫が必要である。 K を図 11 の左側の結び目とする。このとき図 11 の左側でしめされた交点をバンド手術を用いて交差交換をする。今回は、図 11 の手順でバンド手術をする。交点の選び方は、上の場合と同様に、図 3 の右側で対応する交点で交差交換すると自己交差を持たない成分がもう一方の成分より「上」になるように選んだ。結果として、3 回のバンド手術で $(2, 3)$ -トーラス結び目と小さなループからなる絡み目が得られる。この絡み目は一回のバンド手術で自明な結び目に変えられるので、

$$u_2(K) \leq 3 + 1 < c(K)/2$$

が得られる。

4 トーラス結び目の結び目解消数

この節ではトーラス結び目の結び目解消数と関連する不変量について述べる。これ以降の話題は、バンド結び目解消数と直接的には関係がないことを注意しておく。

結び目解消数は 4 次元トポロジーとも密接に関係があることが知られている。特に、次の予想は多くの研究者を刺激した。

予想. ([15]) p と q を互いに素な $2 \leq p < q$ となる自然数¹とし $T_{p,q}$ を (p,q) -トーラス結び目とする. このとき次が成り立つ.

$$u(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2}. \quad (2)$$

これは Milnor 予想と呼ばれていたものであり, Kronheimer-Mrowka [11] のゲージ理論の研究の系として解決された.

4.1 結び目の符号数

ゲージ理論が登場するまで, Milnor 予想にアプローチできる有力な不変量は結び目の符号数であった. 結び目 K の符号数は以下のように定義される. F をザイフェルト曲面とし, ϕ をザイフェルト形式

$$\phi : H_1(F, \mathbb{Z}) \times H_1(F, \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

とする. ϕ の符号数を $\sigma(K)$ と表し, K の符号数という.

事実 5. ([16]) 次が成り立つ.

- (1) σ は $\text{Con}(S^3)$ から \mathbb{Z} への写像を誘導する,
- (2) 任意の結び目 K に対して, $|\sigma(K)| \leq 2g_4(K)$ となる,
- (3) $\sigma(T_{2,3}) = 2$.

ただし, $\text{Con}(S^3)$ は S^3 内の結び目のなす Concordance group を表し $g_4(K)$ は K の 4 次元種数を表す.

注. K を結び目とすると,

$$g_4(K) \leq u(K)$$

が成り立つ. 結び目解消数が 4 次元トポロジーと関係があるというのは, 主にこの意味においてである. Kronheimer-Mrowka が実際にやったこと (の系) はトーラス結び目の 4 次元種数の決定である. つまり

$$g_4(T_{p,q}) = \frac{(p-1)(q-1)}{2} \quad (3)$$

である. ほとんどの p と q に対して $2g_4(T_{p,q}) - \sigma(T_{p,q})$ は正になる (つまり, 符号数だけでトーラス結び目の 4 次元種数や結び目解消数を決定はできない) ことはよく知られているが, 筆者は, [1] において $2g_4(T_{p,q}) - \sigma(T_{p,q})$ は必ず 4 の倍数になることを具体的に計算することより示した. この幾何学的な意味を筆者は知らない.

4.2 結び目の Rasmussen 不変量

Khovanov は論文 [10] において, 結び目 K に対して, 次数つき Euler 標数が Jones 多項式となる double graded な homology 群を定義した. Bar-Natan は論文 [4] において, Khovanov homology の計算プログラムをつくった. また, その計算結果から結び目の符号数の類似物の存在をほのめかした. Lee は論文 [13] において, 結び目 K に対して filter 付き homology 群を定義した. その homology 群を用いて, 結び目の符号数の類似物は, 交代結び目に対して符号数そのものと一致することを示した. Rasmussen[17] は, その filter をもちいて **Rasmussen 不変量** を定義した. 結び目 K の Rasmussen 不変量を $s(K)$ で表すことにする.

¹以後, 本稿を通して p と q は $2 \leq p < q$ となる自然数と仮定する.

事実 6. ([17]) 次が成り立つ.

- (1) s は $\text{Con}(S^3)$ から \mathbb{Z} への写像を誘導する,
- (2) 任意の結び目 K に対して, $|s(K)| \leq 2g_4(K)$ となる,
- (3) $s(T_{2,3}) = 2$.

さらに

$$s(T_{p,q}) = (p-1)(q-1) \quad (4)$$

が成り立つ. この結果は直ちに Milnor 予想の別証明を与える. これは, ゲージ理論のようなハードな解析を使わず, 組み合わせ的に定義された不変量だけで Milnor 予想が解けるという意味で衝撃的である. また, 最近では非常に交点数の高い結び目の Rasmussen 不変量を計算することにより, 滑らかな 4 次元 Poincare 予想を反証しようという動きがある [12].

5 交代化数

この節では, 結び目の交差交換を用いて交代化数を定義し, それを取り巻く現状を報告する.

結び目 K の交代化数 $\text{alt}(K)$ とは, K を交代結び目にするために必要な交差交換の最小回数である. 結び目解消数の下からの評価として有用であった Rasmussen 不変量と符号数の差をとると交代化数を評価²できる.

定理 7. ([1]) 任意の結び目 K に対して以下が成り立つ.

$$\left| \frac{s(K) - \sigma(K)}{2} \right| \leq \text{alt}(K). \quad (5)$$

証明の概要. 定理 5 と 6 を用いて

$$-2 \leq (s(K_+) - \sigma(K_+)) - (s(K_-) - \sigma(K_-)) \leq 2.$$

を示す. ここで, K_+ と K_- はある交差交換で移り合う結び目である. また, K を交代結び目とすると

$$s(K) - \sigma(K) = 0 \quad (6)$$

となる ([13]). この二つの事実より定理が従う.

5.1 トーラス結び目の交代化数

いつトーラス結び目が, 交代結び目になるかは昔からよく知られたことである. しかし, 非交代トーラス結び目がどれくらい交代結び目からは離れているかということは研究はされてこなかった. ここでは, トーラス結び目の交代化数を考察する. 筆者はトーラス結び目がいつ交代化数 1 になるかを決定した.

定理 8. ([1]) 次が成り立つ.

- (1) $\text{alt}(T_{p,q}) = 0 \iff p = 2$.
- (2) $\text{alt}(T_{p,q}) = 1 \iff (p, q) = (3, 4)$ 又は $(3, 5)$.
- (3) $\text{alt}(T_{p,q}) \geq 2 \iff$ その他.

²Kawauchi は論文 [9] で別の手法で交代化数の下からの評価を与えた.

さらに Kanenobu [7] は $\text{alt}(T_{3,7}) = \text{alt}(T_{3,8}) = \text{alt}(T_{4,5}) = 2$ を示した ([2] も参照).

問. $\text{alt}(T_{p,q}) = 2$ ならば, $(p, q) = (3, 7), (3, 8)$ または $(4, 5)$ か?

注. 上の問に答えるためには, 交代化数の更なる下からの評価が必要である. 一つの候補は, Khovanov homological width である. 実際, 12 交点の結び目までは, 交代化数を下から評価するが, Greene と Khovanov と Lowrance により一般的には Khovanov homological width は交代化数を評価しないことが指摘された.

下の定理は, 交代化数がトーラス結び目の複雑度をうまく捉えていることを示している.

定理 9. ([A]) 任意の正の数 n に対して, $n = \text{alt}(T_{p,q})$ となる (p, q) の組は有限個である.

Kanenobu の結果 $\text{alt}(T_{4,5}) = 2 (< c(T_{4,5})/4)$ が示唆するように, トーラス結び目の交代化数は交点数に対して比較的小さい. Nakanishi は結び目の交代化数と交点数の関係を次のように予想した.

$$\text{alt}(K) \leq c(K)/4.$$

実際, 多くの結び目に対してこの不等式は成り立つ. 今後の課題の一つは, 上の予想がトーラス結び目に対して正しいことを示すことである.

5.2 結び目の交代化数の応用

Jones 多項式の span と結び目の最小交点数を比較することにより, 与えられた結び目が交代かどうかは原理的に判定できる. しかし, 最小交点数を求めることは多くの場合, 現実的に困難である. また, 結び目の族に対して最小交点数を求めることは, 一般的に不可能である.

これに対し, もしも結び目 K に対して $s(K) - \sigma(K) \neq 0$ が示せれば, K が非交代結び目であることが示せる. 同様に, $|s(K) - \sigma(K)| \geq 4$ が示せれば K は交代化数 2 以上であることが示せる. 特に, K は Montesinos 結び目ではない³ことが示せる. Ichihara-Jong-Mizushima は, この手法を Montesinos 結び目の例外手術の決定問題に応用した. 特に, 長さ 3 の Montesinos 結び目の例外手術の決定問題の部分的解決という, 既存の方法では得られなかった新しい結果が得られているということは注目すべき点である.

5.3 おわりに

本稿の後半では, トーラス結び目の結び目解消数や交代化数を考えた. トーラス結び目の交代化数の研究はまだまだ発展途上である. またトーラス結び目のバンド結び目解消数の研究もほとんど手付かずで残っている. これらの更なる研究は今後の課題である.

参考文献

- [1] T. Abe, *An estimation of the alternation number of a torus knot*, J. Knot Theory Ramifications **18** (2009), no. 3, 363–379.

³筆者と Jong と Kishimoto は論文 [2] の Appendix において, Montesinos 結び目の交代化数が 1 以下であることを示した.

- [2] T. Abe and K. Kishimoto, *The dealternating number and the alternation number of a closed 3-braid*, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.
- [3] T. Abe and R. Higa, *An upper bound for the band-unknotted number of a knot*, preprint.
- [4] D. Bar-Natan, *On Khovanov's categorification of the Jones polynomial*, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002), 337–370.
- [5] R. Hanaki and J. Kanadome, *On an inequality between unknotting number and crossing number of links*, to appear.
- [6] K. Ichihara, I. D. Jong and S. Mizushima, *Seifert fibered surgeries on alternating Montesinos knots*, in preparation.
- [7] T. Kanenobu, *Upper bound for the alternation number of a torus knot*, to appear in *Topology Appl.*
- [8] T. Kanenobu and Y. Miyazawa, *$H(2)$ -unknotting number of a knot*, to appear.
- [9] A. Kawauchi, *On alternation numbers of links*, to appear in *Topology Appl.*
- [10] M. Khovanov, *A categorification of the Jones polynomial*, *Duke Math. J.* **101** (2000), no. 3, 359–426.
- [11] P. Kronheimer, T. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces. I*, *Topology* **32** (1993), no. 4, 773–826.
- [12] M. Freedman, R. Gompf, S. Morrison and K. Walker, *Man and machine thinking about the smooth 4-dimensional Poincare conjecture*, arXiv:0906.5177.
- [13] E. S. Lee, *An endomorphism of the Khovanov invariant*, *Adv. Math.* **197** (2005), no. 2, 554–586.
- [14] W. B. R. Lickorish, *Unknotting by adding a twisted band*, *Bull. London Math. Soc.* **18** (1986), no. 6, 613–615.
- [15] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, *Annals of Mathematics Studies*, No. 61.
- [16] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link types*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **117** 1965 387–422.
- [17] J. Rasmussen, *Khovanov homology and the slice genus*, to appear in *Invent. Math.*
- [18] K. Taniyama, *Unknotting numbers of diagrams of a given nontrivial knot are unbounded*, to appear in *J. Knot Theory Ramifications*.

射影多様体に対する Meyer 関数とその応用

久野 雄介* (東京大学大学院数理科学研究科)

第56回トポロジーシンポジウム

1 はじめに

Σ_g を向き付けられた種数 g の C^∞ -級の閉曲面とする. Σ_g の向きを保つ微分同相全体を, アイストピーという同値関係で割って得られる離散群を写像類群と呼び, Γ_g とかく. この群は, Riemann 面のモジュライ空間と密接に関係する, 基本的で重要な研究対象であって, 低次元トポロジーの色々なところで現れるが, ここでは写像類群の群コホモロジー, 特に2次元の部分扱う. 写像類群のコホモロジーは, 向き付けられた Σ_g 束の特性類の役割を持つ. ここには MMM 類 (Mumford-Morita-Miller class) と呼ばれる類の系列があり, その最初には第1MMM類 $e_1 \in H^2(\Gamma_g)$ がある. この講演の目的は, e_1 (正確には, $-3e_1$) を表す, 符号数コサイクルと呼ばれるコサイクルに付随する, Meyer 関数と呼ばれている二次不変量の新しい例を提示することである.

ここで紹介する二次不変量は, 非特異射影多様体 $X \subset \mathbb{P}_N$ に対して決まり, ϕ_X とかかれる. ものとしては, X から構成される, ある開代数多様体 U^X の基本群の上の \mathbb{Q} -値1コチェインであり, U^X の上に乗っている Riemann 面の族の, e_1 が消滅することに付随する二次不変量である (U^X およびその上の Riemann 面の族の定義は4節で行う). ここで言う e_1 の消滅の証明は, トポロジカルなものである.

この研究の第一の動機は, 詳しくは3節および8節に譲るが, ファイバー構造を持つ4次元多様体の符号数の局所化への応用である. 3節の公式(3.1)を高種数の場合に適用する際の問題点およびその一つの解決法について説明することが, この講演および本予稿の一つの目標である.

第二の動機として, U^X の上にある Riemann 面の族をモノドロミーの観点から研究したいということがある. U^X は, k -双対多様体の補空間というものになっていて, 基本群 $\pi_1(U^X)$ は, 一般には (写像類群に負けるとも劣らない?) 組み合わせ群論的に非常に複雑な対象であり, 現在でも多くのことが分かっている状況ではない (I. Dolgachev-A. Libgober 両氏による [3] および, 最近の, 島田伊知朗氏のプレプリント [13] を参照). モ

*筆者は日本学術振興会から援助を受けています (特別研究員 DC1 課題番号 19・5472).

ノドロミーの観点からの研究とは、モノドロミーにより $\pi_1(U^X)$ と写像類群 Γ_g を比較するということである。

以下、断りのない限り、多様体は C^∞ -級で、向き付けられているとし、多様体間の写像は C^∞ -級のものとする。また、曲面束は常に向き付けられたものを考える。

2 符号数コサイクル, Meyer の定理, Meyer 関数

まず符号数コサイクルを導入する。 $P := S^2 \setminus \bigcup_{k=1}^3 \text{Int}D_k$ とおき、パンツと呼ぶ。ここで、 D_k たちは互いに交わらない S^2 内の 2次元閉円板で、 $\text{Int}D_k$ は D_k の内部を表す。

$E \rightarrow B$ をコンパクト曲面 (境界はあってもよいとする) B 上の Σ_g 束とする。 E の符号数 $\text{Sign}(E)$ を求めることを考えよう。ここで、符号数とは、交叉形式

$$H_2(E; \mathbb{Q}) \times H_2(E; \mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Q}$$

の符号数、つまり交叉形式を対称行列と思ったときに、正の固有値の個数から負の固有値の個数を引いた数のことである。

B の Euler 数が負であれば、 B を P と同相な曲面 P_1, \dots, P_m によって分割することができる (パンツ分解)。それに伴って、 E は P 上の Σ_g 束 E_1, \dots, E_m たちを境界で接着されたものとして表される。符号数の Novikov 加法性により、 E の符号数は、これら E_1, \dots, E_m の符号数の和である。

符号数コサイクルは、この分解の最小単位にあたる。 P の境界 $\partial D_1, \partial D_2$ を一周する、基点からのループをそれぞれ ℓ_1, ℓ_2 とする。与えられた写像類群の元 $f_1, f_2 \in \Gamma_g$ に対して、 P 上の Σ_g 束 $E(f_1, f_2) \rightarrow P$ であって、 ℓ_1, ℓ_2 に沿うモノドロミーがそれぞれ f_1, f_2 となるものが存在する ($g \geq 2$ のときは、同型を除き一意)。 $E(f_1, f_2)$ はコンパクトな境界付き 4次元多様体であり、その符号数 $\text{Sign}(E(f_1, f_2))$ が定義される。

定義 2.1 (W. Meyer [12], 1973). $f_1, f_2 \in \Gamma_g$ に対して $E(f_1, f_2)$ を上の様にとり、

$$\tau_g(\alpha_1, \alpha_2) := -\text{Sign}(E(f_1, f_2)) \in \mathbb{Z}$$

とおく。 $\tau_g: \Gamma_g \times \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Z}$ を符号数コサイクルと呼ぶ。

これが実際にコサイクル条件:

$$\tau_g(f_1 f_2, f_3) + \tau_g(f_1, f_2) = \tau_g(f_1, f_2 f_3) + \tau_g(f_2, f_3)$$

を満たすことは、符号数の Novikov 加法性から従う。また、写像類群の Σ_g の第 1 ホモロジー群への作用が誘導する準同型 $\Gamma_g \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z})$ があるが、 τ_g は、この準同型により $Sp(2g; \mathbb{Z})$ のあるコサイクルを引き戻したものとして書ける。 [12] ではこれの具体的な表示も与えられていて、 τ_g の値を計算することができる。

第 1 MMM 類 e_1 とコホモロジー類 $[\tau_g]$ の関係は以下のようなになる。

$$[\tau_g] = -3e_1 \in H^2(\Gamma_g; \mathbb{Z}).$$

次の W. Meyer 氏の定理が、Meyer 関数の起源と見做される。

定理 2.2 (W. Meyer [12], 1973). g が 1 または 2 のとき, τ_g は一意的に定まる, Γ_g 上の \mathbb{Q} -値 1-コチェイン $\phi_g: \Gamma_g \rightarrow \mathbb{Q}$ のコバウンダリとして書ける. また, ϕ_g の値は $g = 1$ のとき, $\frac{1}{3}\mathbb{Z}$ に入っていて, $g = 2$ のときは $\frac{1}{5}\mathbb{Z}$ に入っている.

特に, \mathbb{Q} 係数では, $[\tau_1]$ および $[\tau_2]$ は自明であるが, この定理の意義はそこから生じる ϕ_1, ϕ_2 について述べている所にある (実は, いれものである $H^2(\Gamma_1; \mathbb{Q}), H^2(\Gamma_2; \mathbb{Q})$ が自明である). この様に, 符号数コサイクル (の引き戻し) をコバウンドする様な 1-コチェインのことを Meyer 関数と呼ぶ.

更に, [12] では, $\Gamma_1 \cong SL(2; \mathbb{Z})$ 上での ϕ_1 の明示公式が, Rademacher 関数と呼ばれる Dedkind 和などを含んだ $SL(2; \mathbb{Z})$ 上の関数を用いて与えられている.

3 符号数の局所化

閉 4 次元多様体 M と, 閉曲面 B と写像 $\pi: M \rightarrow B$ であって, 有限個の”特異”ファイバーを持つが, 残りは曲面束となっているものを考える. 例としては, 楕円曲面や, Lefschetz ファイバー空間が挙げられる. また, 標準曲面であって, 不変量がある等式を満たすような代数曲面のクラスもこの様な構造を持つことが知られている.

各点 $b \in B$ に対し, π の b における写像芽 \mathcal{F}_b のみに依存した有理数 $\sigma_{loc}(\mathcal{F}_b)$ が定まり, それが二つの条件

1. σ_{loc} は B の有限集合に台を持つ

$$2. \text{Sign}(M) = \sum_{b \in B} \sigma_{loc}(\mathcal{F}_b)$$

を満たすとき, M の符号数が局所化されるといい, σ_{loc} を局所符号数と呼ぶ. 様々な設定のもとで, この現象が起きることが知られている (足利 正-遠藤久顕両氏による論説 [2] を参照). ”特異”と, 括弧を付けているのは, 位相的には非特異であるが, 代数幾何的な特殊性が高いために特異ファイバーと見做すべきファイバー芽の存在が知られているからである.

位相幾何的なアプローチの一つとして, 松本幸夫氏 [10], [11] による, Meyer 関数を用いたものがある. $\pi: M \rightarrow B$ の一般ファイバーの種数を 1 または 2 としよう. $b \in B$ に対し, b の周りのディスク D をとり, $D \setminus \{b\}$ の上には”特異”ファイバーが無い様にする. $f_b \in \Gamma_g$ を $D \setminus \{b\}$ 上の Σ_g 束のモノドロミーとする.

$$\sigma_{loc}(\mathcal{F}_b) = \phi_g(f_b) + \text{Sign}(\pi^{-1}(D)) \quad (3.1)$$

とおくと, 2 節で述べた, パンツ分解により曲面束の符号数を求める考え方と定理 2.2 を合わせることで, これが実際に局所符号数となることが分かる.

この様に, g が 1 または 2 の場合には Γ_g の上に Meyer 関数があるおかげで, ファイバーに関する条件が全く必要なく, 局所符号数が定義される. しかし $g \geq 3$ のとき, 事

情は全く異なる！それは、次の定理から分かる様に、 Γ_g の上に Meyer 関数が存在しないからである (実は既に、[12] で $g \geq 3$ なら $[\tau_g]$ が無限位数であることは示されている).

定理 3.1 (J. Harer, [7]). $g \geq 3$ のとき、 $H^2(\Gamma_g; \mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}$ で、 $[\tau_g]$ は生成元となる.

$g \geq 3$ のとき、任意の $\pi: M \rightarrow B$ に対して通用する局所符号数の定義の仕方は無いのである. 一方、Riemann 面の族を扱う代数幾何の設定では、一般ファイバーの複素構造に条件を課すことで、局所化が起きることが知られている.

例 3.2. 一般ファイバーに超楕円性を課すと局所化が起きる. 位相幾何的には、この条件はモノドロミーが超楕円的写像類群と呼ばれる、 Γ_g の部分群 Δ_g に簡約することとして捉えられる. Δ_g には Meyer 関数が存在するが、遠藤久顕氏 [4] により、この場合の Meyer 関数を用いて、公式 (3.1) による局所符号数の定義が与えられ、寺杣友秀氏による [4] の Appendix では、これが代数幾何的な定義によるものと一致することも示されている. なお、この場合もいれものである $H^2(\Delta_g; \mathbb{Q})$ が自明である (F. Cohen 氏 [5], 河澄響矢氏 [8] により独立に証明された).

例 3.3. $g = 3$ で、一般ファイバーに非超楕円性を課すと局所化が起きる. この場合、中心ファイバーが非特異な超楕円的曲線であって、局所符号数の観点からは”特異”ファイバーと見做すべきものが存在する. この様な事態は、もはや Γ_g に値をとる位相的なモノドロミーだけでは処理できないものであり、公式 (3.1) を用いた局所符号数の定義の際、本質的な障害となっている.

4 射影多様体に対する Meyer 関数

ここでは、あるトポロジカルな理由で e_1 が消えている Riemann 面の族を構成し、定理 2.2 の ϕ_1, ϕ_2 に対する一つの亜種を与える.

X を n 次元の \mathbb{C} 上の非特異射影多様体とし、射影空間への埋め込み $X \subset \mathbb{P}_N$ を固定する. 以下、 $N > n \geq 2$ を仮定する. $k = N - n + 1$ とおき、 $G_k(\mathbb{P}_N)$ で \mathbb{P}_N の k 次元部分空間全体のなす Grassmann 多様体を表す. X を一般の $G_k(\mathbb{P}_N)$ の元で切ると、切り口はコンパクト Riemann 面になっている.

定義 4.1. X の k -双対多様体 D_X とは、 X との交わりが (スキーム論的に) 特異となるような $W \in G_k(\mathbb{P}_N)$ 全体のなす既約な解析的集合のことである.

なお、 $k = N - n + 1$ でなくとも、 k -双対多様体は全く同様に定義される. 一般には D_X は特異点を多く持つ集合である. $U^X := G_k(\mathbb{P}_N) \setminus D_X$ として、

$$\mathcal{F}^X = \{(x, W) \in X \times U^X; x \in X \cap W\}$$

とおく. すると, 第2成分への射影 $p_X: \mathcal{F}^X \rightarrow U^X$ は W 上のファイバーが $W \cap X$ である様な, Riemann 面の複素解析族である. ファイバーの種数を g として, これを向き付けられた Σ_g 束と見たときのモノドロミー準同型を

$$\rho_X: \pi_1(U^X) \rightarrow \Gamma_g \quad (4.1)$$

とかく. 次が主定理である.

定理 4.2. コバウンダリ条件 $\delta\phi_X = \rho_X^* \tau_g$, すなわち全ての $\ell_1, \ell_2 \in \pi_1(U^X)$ に対し

$$\phi_X(\ell_1) + \phi_X(\ell_2) - \phi_X(\ell_1 \ell_2) = \tau_g(\rho_X(\ell_1), \rho_X(\ell_2)),$$

を満たす 1-コチェイン $\phi_X: \pi_1(U^X) \rightarrow \mathbb{Q}$ が一意的存在する. 特に,

$$\rho_X^*[\tau_g] = 0 \in H^2(\pi_1(U^X); \mathbb{Q}).$$

この ϕ_X を, $X \subset \mathbb{P}_N$ に付随する Meyer 函数と呼ぶことにする. 条件 $\delta\phi_X = \rho_X^* \tau_g$ と τ_g の性質から, 次のことが分かる.

1. ϕ_X は正規化されている, すなわち $e \in \pi_1(U^X)$ を単位元とすると $\phi_X(e) = 0$.
2. 共役不変性, すなわち任意の $\ell_1, \ell_2 \in \pi_1(U^X)$ に対し $\phi_X(\ell_1 \ell_2 \ell_1^{-1}) = \phi_X(\ell_2)$.
3. 任意の $\ell \in \pi_1(U^X)$ に対し $\phi_X(\ell^{-1}) = -\phi_X(\ell)$.

ここで, 群 $\pi_1(U^X)$ と, 準同型 ρ_X についてすぐ分かることを述べておく. まず, $D_X \subset G_k(\mathbb{P}_N)$ の \mathbb{C} 上の余次元が 2 以上の場合, $\pi_1(U^X)$ は自明であり, 我々の観点からは面白くない. しかし, この場合は (乱暴な言い方であるが) 滅多に起こらず, 多くの場合 D_X の余次元は 1 である. このとき, $\pi_1(U^X)$ は常に非自明であり, アーベル化は有限位数の巡回群となっている. また, U^X がアフィン代数多様体となることから, この群は有限表示可能であることが分かる. しかし, 具体的な表示を求めることは非常に困難であり, 有限生成系を与えることも難しい. 一方で, $\pi_1(U^X)$ はたった一つの元 σ_X により正規生成される. これは D_X の既約性から従う. σ_X は, なげなわと呼ばれており, 余次元 1 の D_X の周りを丁度一周しているような元である. 最後に, $\rho_X(\sigma_X)$ は, 曲面上のある単純閉曲線に沿う Dehn ツイストになる.

注 4.3. 少なくとも筆者には, いれものである $H^2(\pi_1(U^X); \mathbb{Q})$ が自明であるかどうかは全く分からない. これは, 定理 2.2 の場合と事情が異なっている.

5 定理 4.2 の証明の概略

D_X の余次元が 2 以上の場合は, 前節で述べたことから主張は自明である.

以下 D_X の余次元は 1 と仮定する. $V = V_{k+1, N+1}$ を \mathbb{C}^{N+1} の $(k+1)$ -枠のなす Stiefel 多様体とする. 自然な射影 $q: V \rightarrow G_k(\mathbb{P}_N)$ がある. $\widetilde{D}_X = q^{-1}(D_X)$, $\widetilde{U}^X = V \setminus \widetilde{D}_X$ とおく. 主 $GL(k+1, \mathbb{C})$ 束 $\widetilde{U}^X \rightarrow U^X$ の Gysin 完全列を見ると, $q_*: \pi_1(\widetilde{U}^X) \rightarrow \pi_1(U^X)$ から単射

$$H^2(\pi_1(U^X); \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(\pi_1(\widetilde{U}^X); \mathbb{Q})$$

が誘導される. ここでは, $G_k(\mathbb{P}_N)$ の 2 次元コホモロジー群が階数 1 であることがポイント. $\tilde{\rho}_X = \rho_X \circ q_*$ とおく. $\tilde{\rho}_X[\tau_g] = 0 \in H^2(\pi_1(\widetilde{U}^X); \mathbb{Q})$ を示せば十分である.

以下, $\pi_1(U^X)$ の上に 1-コチェイン $c: \pi_1(U^X) \rightarrow \mathbb{Z}$ を構成する. ここでは, Stiefel 多様体 V が 2 連結であることがポイントである. まず

$$\widetilde{W} := \{(x, f) \in \mathbb{P}_N \times V; x \in X \cap q(f)\}$$

とおく.

$\ell: S^1 \rightarrow \widetilde{U}^X$ をループとする. V は単連結であるから, ℓ の拡張 $D^2 \rightarrow V$ が存在する. $\tilde{\ell}$ を, ℓ の拡張のうち, "一般"のものとする. この"一般"という条件については詳しく述べないが, D_X と横断的なものと思って頂ければ大丈夫である. 第 2 成分への射影 $\widetilde{W} \rightarrow V$ と $\tilde{\ell}$ とのファイバー積を $\tilde{\ell}^*\widetilde{W}$ とかくと, これは自然に境界を持つコンパクト 4 次元多様体の構造を持つことが分かる. そこで,

$$c([\ell]) := \text{Sign}(\tilde{\ell}^*\widetilde{W}) \in \mathbb{Z}$$

とおく.

補題 5.1. コバウンダリ条件 $\delta c = \tilde{\rho}_X^* \tau_g$ が成り立つ.

証明. ℓ_1, ℓ_2 をループとする. パンツ P から U^X への写像を, ∂D_1 上 ℓ_1 , ∂D_2 上 ℓ_2 となるように定める. この写像の ∂D_3 への制限は, ループの積 $\ell_1 \cdot \ell_2$ にホモトピックである. この写像を, c の構成の様に三つのディスク D_1, D_2, D_3 まで拡張することにより, 球面 S^2 からの写像 $L: S^2 \rightarrow V$ が得られる. V の 2 次元ホモトピー群は消えているから, L は D^3 から V への写像で, "一般"のものに拡張する. このことから, ファイバー積 $L^*\widetilde{W}$ はある 5 次元多様体の境界になっていることが分かる. 特にその符号数は 0 である. 分解 $S^2 = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup P$ に応じて $L^*\widetilde{W}$ を切り, Novikov 加法性を用いると

$$0 = \text{Sign}(L^*\widetilde{W}) = c([\ell_1]) + c([\ell_2]) - c([\ell_3]) - \tau_g(\tilde{\rho}_X([\ell_1]), \tilde{\rho}_X([\ell_2]))$$

を得る. □

補題 5.1 により, $\tilde{\rho}_X^*[\tau_g] = 0 \in H^2(\pi_1(\widetilde{U}^X); \mathbb{Z})$ であるから, 定理 4.2 の ϕ_X の存在に関する部分が示される. 一意性については次の補題 5.2 から分かる.

$G_k(\mathbb{P}_N)$ の直線とは, ある $k-1$ 次元部分空間 N と $k+1$ 次元部分空間 M を用いて

$$P_{NM} = \{W \in G_k(\mathbb{P}_N); N \subset W \subset M\}$$

とかけるような, \mathbb{P}_1 と同型な部分多様体のこととする. D を $G_k(\mathbb{P}_N)$ の超曲面とすると, その次数 $\deg(D)$ とは, $G_k(\mathbb{P}_N)$ の一般の直線と D との交点の個数である.

補題 5.2. $\pi_1(U^X)$ のアーベル化は, 位数 $\deg(D_X)$ の有限巡回群である. 特に,

$$\mathrm{Hom}(\pi_1(U^X), \mathbb{Q}) = 0.$$

6 なげなわの上での値

$\sigma_X \in \pi_1(U^X)$ をなげなわとする (4節参照). $\phi_X(\sigma_X)$ は X の不変量を用いて計算することができる.

命題 6.1. X は複素曲面, すなわち $n = 2$ とする. ある単項イデアル整域 R に対して $H_1(X; R) = 0$ が成り立ち, $g > 0$ と仮定する. D_X の余次元が 1 のとき, 次が成り立つ.

$$\phi_X(\sigma_X) = \frac{\mathrm{Sign} X - \deg X}{\chi(X) + \deg X - 2(2 - 2g)}.$$

ここで $\chi(X)$ は X の Euler 数, $\deg X$ は埋め込み $X \subset \mathbb{P}_N$ の次数.

この証明は, 古典的な Lefschetz ペンシルの方法による. $n \geq 3$ のときは, まず X を一般の $k - 1$ 次元部分射影空間で切り, その切り口に上の命題を適用することによって計算ができる.

例 6.2. $n \geq 2$, $m \geq 0$, $n_1, \dots, n_m \geq 2$, $d \geq 1$ とする. 但し, $m = 0$ のときは $d \geq 2$ と仮定し, $(d, m, n_1) \neq (1, 1, 2)$, $(n, d, m) \neq (2, 2, 0)$ とする. $v_d: \mathbb{P}_{m+n} \hookrightarrow \mathbb{P}_N$ を d 次 Veronese 埋め込みとする. ここで,

$$N = \binom{n + m + d}{d} - 1.$$

X' を \mathbb{P}_{m+n} の (n_1, \dots, n_m) 型の非特異完全交叉とする. つまり, n_i 次の同次式 f_i があり, X' は f_1, \dots, f_m たちの共通零点かつ非特異で n 次元. $X = v_d(X')$ とおく. このとき, D_X の余次元は 1 となり,

$$\phi_X(\sigma_X) = \frac{\alpha_X}{\beta_X}$$

となる. ここで,

$$\alpha_X = \frac{m + n + 1 - \sum_{i=1}^m n_i^2 - (n + 1)d^2}{3},$$

$$\begin{aligned} \beta_X = & \binom{m + n + 1}{2} + \sum_{i=1}^m n_i^2 + \sum_{i < j} n_i n_j - (m + n + 1) \left(\sum_{i=1}^m n_i + nd \right) \\ & + nd \sum_{i=1}^m n_i + \frac{(n^2 + n)d^2}{2}. \end{aligned}$$

7 有界コホモロジー

群 G に対し, 有界なコチェイン $f: G \times \cdots \times G \rightarrow \mathbb{Q}$ から構成されるコチェイン複体のコホモロジーを $H_b^*(G; \mathbb{Q})$ とかき, G の有界コホモロジーと呼ぶ. ある緩い仮定のもと, Meyer 函数を用いて, 群 $\pi_1(U^X)$ についての情報が得られる:

命題 7.1. D_X は余次元 1 で, $\phi_X(\sigma_X) \neq 0, -1$ と仮定する. このとき,

$$H_b^2(\pi_1(U^X); \mathbb{Q}) \neq 0.$$

証明. τ_g は有界なコサイクルであり ($|\tau_g| \leq 4g$ が成り立つ), 従って $\rho_X^* \tau_g$ は有界コホモロジーの類を定める. そこで, $\rho_X^* \tau_g$ の一意的なコバウンダリである, ϕ_X が非有界であることを示せばよい. 仮定を用いると, $n \geq 1$ に対して

$$\phi_X(\sigma_X^n) = n(\phi_X(\sigma_X) + 1) - 1$$

と計算できる. よって ϕ_X は非有界. □

離散群がアメナブルという性質を持つとき, その有界コホモロジーは全て消えることが知られている ([6] 参照). 特に, 命題 7.1 の仮定を満たすような X については, $\pi_1(U^X)$ はアメナブルでないということが分かる. 例えば, 例 6.2 の X については $-1 < \phi_X(\sigma_X) < 0$ を示すことができ, 命題 7.1 の仮定が満たされる.

8 局所符号数への応用: $g = 3, 4, 5$

\mathbb{M}_g を種数 g の Riemann 面のモジュライ空間, \mathcal{A} を \mathbb{M}_g の部分集合とする. 3 節で述べた, $\pi: M \rightarrow B$ の一般ファイバーの複素構造に制限を課すことを, ここでは, 一般ファイバーが \mathcal{A} の元であるという条件により表現する. 正確に言うと, 次の様になる.

定義 8.1. 1. \mathcal{A} -family とは, 位相空間 X 上の Riemann 面の連続族 $f: \mathcal{C} \rightarrow X$ であって, 任意のファイバー $f^{-1}(x)$ が \mathcal{A} の元であるものである.

2. M を 4 次元多様体, B を 2 次元多様体とする. 固有写像 $\pi: M \rightarrow B$ および, 有限集合 $B_s \subset B$, および, π の $B \setminus B_s$ の上への制限に, \mathcal{A} -family の構造が与えられたものを \mathcal{A} -fibration と呼ぶ.

単に写像 π を考えるだけではなく, $B \setminus B_s$ 上のファイバーの複素構造が指定されているところにポイントがある. もし全て複素多様体の圏で考えるならば, ファイバーには自然な複素構造が入ることに注意.

\mathcal{A} -fibration に対して, 3 節で述べた局所符号数を構成することを考える. 勿論, いつもこれができるとは限らない. ここでの一つの解答は, \mathcal{A} -family の普遍族が存在し, かつその底空間の基本群上に Meyer 函数が存在すれば, 公式 (3.1) を少し変えた形で局所

符号数が定義できるということである。Meyer 函数を用いるアプローチの利点の一つは、底空間のパラメータに対しファイバーの複素構造が正則に動くことを要求しなくてもよく、特に局所符号数の定義の射程が広がることにある。但し、現時点では正則写像のカテゴリーに入らない様なファイバー芽の具体的な計算は、全くできていない(10節を参照)。

定義 8.2. \mathcal{A} -family $f_u: C_u \rightarrow X_u$ が普遍族であるとは、CW 複体のホモトピー型を持つ、任意の空間 X に対して次の全単射

$$[X, X_u] \cong \{X \text{ 上の } \mathcal{A}\text{-family}\} / \text{アイソトピー}$$

が存在することとする。ここで、左辺は連続写像のホモトピー類のなす集合、右辺のアイソトピーという関係は、 X 上の二つの \mathcal{A} -family が $X \times [0, 1]$ 上の \mathcal{A} -family で結べることと定義する。左辺から右辺の対応は、族の引き戻しにより誘導される。

さて、 \mathcal{A} -family の普遍族 $f_u: C_u \rightarrow X_u$ が存在し、 $\rho_u: \pi_1(X_u) \rightarrow \Gamma_g$ をそのモノドロミーとして、 $\delta\phi_{\mathcal{A}} = \rho_u^* \tau_g$ を満たす 1-コチェインが存在すると仮定する。

$\pi: M \rightarrow B$ を \mathcal{A} -fibration とし、 $b \in B$ とする。 b を中心とする小円板 D を、 π の $D \setminus \{b\}$ 上への制限が \mathcal{A} -family となるようにとる。普遍性により、左辺に対応する連続写像 $\gamma^b: D \setminus \{b\} \rightarrow X_u$ がホモトピーを除いて一意に存在する。

$$\sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_b) := \phi_{\mathcal{A}}(\gamma_*^b(\partial D)) + \text{Sign}(\pi^{-1}(D)) \quad (8.1)$$

とおくと、 $\sigma_{\mathcal{A}}$ が実際に 3 節の条件を満たし、局所符号数となることが分かる。この式と (3.1) を見比べると、右辺第一項の中身 $\gamma_*^b(\partial D)$ が、 ρ_u による、位相的なモノドロミーのリフトに変わっている。

以上のことと 4 節で述べたことを関連付ける。 \mathcal{A} に対して、適切な X を選ぶことによって、4 節で考察した Riemann 面の族 $\mathcal{F}^X \rightarrow U^X$ から、 \mathcal{A} -family の普遍族を構成できる場合がある。この場合、普遍族に対する Meyer 函数の存在は ϕ_X の存在から容易に帰結される。以下、標準埋め込みの像が一般には完全交叉となる様な種数、すなわち $g = 3, 4, 5$ の場合、ある Zariski 開集合 $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_g$ に対しこれができることを説明しよう。

例 8.3 ($g = 3$). $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_3$ を非超楕円的な Riemann 面のなす集合とする。Riemann 面 C が非超楕円的であるとは、標準束 K_C による写像

$$\Phi_{K_C}: C \rightarrow \mathbb{P}(H^0(C; K_C)^*) \cong \mathbb{P}_{g(C)-1}$$

が埋め込みとなることであった。 $g(C) = 3$ なら、 C の像は \mathbb{P}_2 の非特異平面 4 次曲線と同一視される。 $X \subset \mathbb{P}_{14}$ を \mathbb{P}_2 の 4 次 Veronese 埋め込みの像とする。このとき、 \mathbb{P}_{14} の超平面 W に対し、切り口 $W \cap X$ は \mathbb{P}_2 の 4 次曲線と同一視される。対応する $\mathcal{F}^X \rightarrow U^X$ は、 \mathcal{A} -family である。 $\mathcal{G} = PGL(4)$ とおく。 \mathcal{G} の U^X , \mathcal{F}^X への自然な作用が存在する。Borel 構成 $U_{\mathcal{G}}^X = E\mathcal{G} \times_{\mathcal{G}} U^X$, $\mathcal{F}_{\mathcal{G}}^X$ をとり、 \mathcal{A} -family

$$p_u: \mathcal{F}_{\mathcal{G}}^X \rightarrow U_{\mathcal{G}}^X$$

を得るが、これが普遍族となることが分かる。

包含 $U^X \hookrightarrow U_{\mathcal{G}}^X$ が、単射 $H^2(\pi_1(U_{\mathcal{G}}^X); \mathbb{Q}) \hookrightarrow H^2(\pi_1(U^X); \mathbb{Q})$ を誘導し、さらに $\pi_1(U_{\mathcal{G}}^X)$ のアーベル化が有限群であることが分かるので、定理 4.2 と合わせると、 p_u の位相的モノドロミーを ρ_u とするとき、 $\delta\phi_{\mathcal{A}} = \rho_u^* \tau_3$ を満たす $\phi_{\mathcal{A}}: \pi_1(U_{\mathcal{G}}^X) \rightarrow \mathbb{Q}$ が一意的に存在することが分かる。この場合の \mathcal{A} -fibration に対する局所符号数の具体的な計算、および、他の方法による局所符号数との比較については [9] を参照。

例 8.4 ($g = 4$). C を種数 4 の非超楕円的な Riemann 面とする。このとき、 Φ_{K_C} の像は $(2, 3)$ 完全交叉となる。 C が階数 4 であるとは、 Φ_{K_C} の定義方程式の内、2 次式の方が階数 4 の 2 次曲面となることとする。 $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_4$ を非超楕円的かつ階数 4 の Riemann 面のなす集合とする。

この場合には、 $X \subset \mathbb{P}_{15}$ を、Segre 埋め込み $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \rightarrow \mathbb{P}_3$ と、3 次 Veronese 埋め込み $\mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_{15}$ の合成による、 $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ の像とし、 $\mathcal{G} = \text{Aut}(\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1)$ とおき、例 8.3 と同様の構成を行えばよい。詳細は省略するが、このとき $G_{14}(\mathbb{P}_{15})$ は、 $(X_0, X_1), (Y_0, Y_1)$ に関する $(3, 3)$ -双斉次多項式の空間と自然に同一視されることに注意する。

例 8.5 ($g = 5$). C を種数 5 の非超楕円的な Riemann 面とする。 C が non-trigonal とは、次数 3 の正則写像 $C \rightarrow \mathbb{P}_1$ が存在しないことである。これは、標準写像の像が $(2, 2, 2)$ 完全交叉になることと同値である。 $\mathcal{A} \subset \mathbb{M}_5$ を非超楕円的かつ non-trigonal な Riemann 面のなす集合とする。この場合、 X を 2 次 Veronese 埋め込み $\mathbb{P}_4 \rightarrow \mathbb{P}_{14}$ の像、 $\mathcal{G} = \text{PGL}(5)$ とおき、例 8.3 と同様の構成を行えばよい。詳細は省略する。

注 8.6. これら 3 つの例の場合、 \mathcal{A} はいずれも \mathbb{M}_g の Zariski 開集合である。 $\tilde{\mathcal{A}} \subset \mathcal{T}_g$ を \mathcal{A} の Teichmüller 空間への持ち上げとし、Borel 構成 $\tilde{\mathcal{A}}_{\Gamma_g}$ をとると、これが $U_{\mathcal{G}}^X$ とホモトピー同値になることが普遍性をチェックすることにより分かる。これと、 $\tilde{\mathcal{A}}$ が弧状連結であることを合わせて、普遍族のモノドロミー ρ_u が全射であることが従い、特にこの場合には ρ_X も全射であることが分かる。

9 例の計算: 種数 4 非超楕円的, 階数 4

X を前節例 8.4 で述べたものとする。まず、 D_X と横断的に 1 点で交わる様な正則円板に対し、対応するファイバー芽の局所符号数は (8.1) より、 $\phi_X(\sigma_X)$ に等しいことに注意しておく。今、この値は $-9/17$ になる。

ここではある $\pi_1(U^X)$ の元に対し、対応するファイバー芽を記述し Meyer 関数の値、局所符号数を計算する。なお、ここで出てくるファイバー芽の構成は、東北学院大学の足利正教授に教えて頂いたものである。

φ^0 および φ^3 を一般の 3 次斉次式、 $\alpha \gg 0$ として

$$F(t) = \varphi^0(Y_0, Y_1)X_0^3 + t^\alpha \varphi^1(Y_0, Y_1)X_0^2 X_1 + (Y_0^3 + t^6 Y_1)X_0 X_1^2 + t^9 \varphi^3(Y_0, Y_1)X_1^3$$

とおき、ループ $[0, 1] \rightarrow U^X, t \mapsto F(\varepsilon e^{2\pi\sqrt{-1}t})$ の定める $\pi_1(U^X)$ の元を $l_{3,1}$ とする。

$t \in \mathbb{C} \subset \mathbb{P}_1$ と見做し, $F(t)$ の定義方程式を大域化して, $F(t) = 0$ で与えられる $\mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1 \times \mathbb{P}_1$ 内の特異曲面 S を考える. S の特異点は $(t, (X_0 : X_1), (Y_0 : Y_1)) = (0, (0 : 1), (0 : 1))$ のみであり, 適切なパラメータの取替えによってこの特異点は

$$x^3 + (y^3 + t^6)x + t^9 = 0$$

に見える. これを [1] の方法で特異点解消 $\tilde{S} \rightarrow S$ し, $t = 0$ 上のファイバーにある -1 曲線を縮約することで, \mathcal{A} -fibration $\bar{S} \rightarrow \mathbb{P}_1$ を得る. この $t = 0$ におけるファイバー芽を $\mathcal{F}_{3,1}$ とおく. 中心ファイバーの位相型は可約で, 種数 3 と種数 1 の Riemann 面が 1 点で横断的に交わったものである. 必要ならば φ^0 および φ^3 を取り直すことで, 他の特異ファイバー芽は, D_X を横断するような正則円板に対応するとして良い.

Euler 数寄与を計算すると, 特異ファイバーの本数は

$$\chi(\bar{S}) - 2(2 - 2 \cdot 4) = 34\alpha - 62$$

と計算される. 一方 $\text{Sign}(\bar{S}) = -18\alpha + 34$ であり, 符号数の勘定から

$$-18\alpha + 34 = \sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{3,1}) - \frac{9}{17}(34\alpha - 62 - 1)$$

これより, $\sigma_{\mathcal{A}}(\mathcal{F}_{3,1}) = 11/17$ が分かる. 今, $\mathcal{F}_{3,1}$ のファイバー近傍の符号数は -1 である. 公式 (8.1) から, $\phi_X(\ell_{3,1}) = 28/17$ が分かる.

10 おわりに

8 節で見た例では, \mathcal{A} に属する Riemann 面を完全交叉として一定のやり方で式で書いたことが, 適切な X を見出せた理由になっている. これらの例では標準写像の像が完全交叉としてかける. また, 種数 3 と 4 の場合には, 定義式が一本で済むことが具体例の構成, 計算にあたり大切になっている. 種数 5 のときはそうはなっておらず, 具体例の計算については今後の課題である. 種数を上げていった場合, 一般の Riemann 面をどの様に式で書くかという問題にぶつかる. これは種数ごとに状況が異なるのだが, \mathbb{M}_g の単有理性 (つまり, 射影空間から \mathbb{M}_g への支配的有理写像が存在するかどうか) と関わってくる話であり, $g \gg 0$ のとき \mathbb{M}_g は単有理的でないため, ここで述べた方法で一般の非超楕円的な族に対する普遍族が作られることは期待できない.

一方で, 特別な複素構造を持った Riemann 面の族および退化に対する局所符号数の話ということになれば, X を取り替えることによって色々な話ができると思われる. 例えば [9] では, 例 8.3 の自然な拡張として, 非特異平面曲線の族に対して普遍族が構成されている.

筆者が計算を行った範囲では, 8 節で定義した $\sigma_{\mathcal{A}}$ は, [2] などに触れられている, 知られている局所符号数の値と一致する. この一致性は, D_X に横断的な正則円板に対応するファイバー芽に対して値が一致することを証明してさえおけば, 前節で述べた様な,

「符号数の勘定を合わせる」方法で計算できるようなファイバー芽に対して常に言えることである。しかし、この代数幾何を経由する方法によらず、純位相幾何的に σ_A や ϕ_A を計算することは筆者にはできていない。

参考文献

- [1] T. Ashikaga, Normal two-dimensional hypersurface triple points and the Horikawa type resolution, *Tohoku Math. J.* **44** (1992), 177-200.
- [2] 足利 正-遠藤久顕, リーマン面の退化族の諸相, *数学* 第56巻 第1号, 2004年1月, 49-72.
- [3] I. Dolgachev-A. Libgober, On the fundamental group of the complement to a discriminant variety, in: *Algebraic Geometry, Chicago 1980, Lecture Notes in Mathematics* **862**, Springer-Verlag New York, 1981, 1-25.
- [4] H.Endo, Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations, *Math. Ann.* **316** (2000), 237-257.
- [5] F.R.Cohen, Homology of mapping class groups for surfaces of low genus, *Contemp. Math.* **58** (1987), 21-30.
- [6] M. Gromov, Volume and bounded cohomology, *IHES Publ. Math.* **56** 1982, 5-99.
- [7] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of the mapping class group of an orientable surface, *Inv. Math.* **72**, 1982, 221-229.
- [8] N.Kawazumi, On the homotopy type of the moduli space of n -point sets of \mathbb{P}^1 , *J.Fac.Sci.Univ. Tokyo Ser.IA.* **37** (1990), 263-287.
- [9] Y. Kuno, The mapping class group and the Meyer function for plane curves, *Math. Ann.* **342**, 2008, 923-949.
- [10] Y. Matsumoto, On 4-manifolds fibered by tori, I, *Proc. Japan Acad.* **58** (1982), 298-301; II, *ibid.* **59** (1983), 100-103.
- [11] Y. Matsumoto, Lefschetz fibrations of genus two -a topological approach, In: *Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on "Topology and Teichmüller Spaces"*, World Scientific, Singapore, 1996, 123-148.
- [12] W.Meyer, Die Signatur von Flächenbündeln, *Math. Ann.* **201** (1973), 239-264.
- [13] I. Shimada, Generalized Zariski-van Kampen theorem and its application to Grassmannian dual varieties, preprint, arXiv:0906.1074.

久野雄介(くの ゆうすけ)

東京大学数理科学研究科博士課程3年

E-mail address:kunotti@ms.u-tokyo.ac.jp