

第 55 回

トポロジーシンポジウム

講演集

2008年8月6日～8月9日

於 金 沢 市 文 化 ホ ー ル

平成2008年度科学研究費基盤研究（A）

課題番号 19204007

第五十五回

トポロジーション
ポジウム

講演集

二〇〇八年八月

於
金沢市文化ホール

は し が き

この講演集は2008年8月6日から8月9日までの間、金沢市文化ホールにおいて開催される第55回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこの講演集は、

平成20年度科学研究費

研究種目 基盤研究 (A)

研究代表者 柘田 幹也

研究課題名 トポロジーの総合的研究

課題番号 19204007

により作成されたものである。

世話人： 岩瀬 順一 (金沢大理工)
牛島 顕 (金沢大理工)
川越 謙一 (金沢大理工)
新國 亮 (金沢大人間社会)
中西 康剛 (神戸大理)
河澄 響矢 (東大数理)

第55回トポロジーシンポジウム

プログラム

8月6日 (水)

15:20 ~ 16:20

大槻 知忠 (京大数理研) バッチ数が1の3次元多様体に対する LMO 不変量の精密化と摂動的な不変量..... 1

16:40 ~ 17:40

飯田 修一 (東大数理) Meyer's functions, eta-invariants and eta-forms 13

8月7日 (木)

10:00 ~ 11:00

矢ヶ崎 達彦 (京都工繊大) Groups of measure-preserving homeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends 19

11:20 ~ 12:20

渡邊 忠之 (東大数理) Kontsevich のグラフ複体による高次元球面バンドルの特性類について..... 29

14:00 ~ 15:00

松岡 隆 (鳴門教育大) 穴あき円板上の同相写像の一般レフシェッツ数について... 35

15:20 ~ 16:20

松田 能文 (東大数理) 円周の同相群の部分群に対する二者択一性について..... 47

16:40 ~ 17:40

金 英子 (東工大情報) 擬アノソフ写像類のエントロピーと体積, 及びそれらの関係について (高沢光彦 (東京工業大学) との共同研究) 57

8月8日 (金)

10:00 ~ 11:00

石井 敦 (京大数理研) ハンドル体の3次元球面への埋め込みとカンドルコサイクル 67
不変量

11:20 ~ 12:20

蒲谷 祐一 (東工大理工) Finding ideal points from an ideal triangulation..... 77

14:00 ~ 15:00

鳥居 猛 (岡山大自然) Structured ring spectrum について..... 89

15:20 ~ 16:20

中川 征樹 (高松高専) Schubert calculus in the cohomology rings of flag varieties 101

16:40 ~ 17:40

北田 泰彦 (横国大工) Kervaire 不変量と位相変換群論..... 117

8月9日 (土)

9:30 ~ 10:30

木田 良才 (東北大理) Orbit equivalence rigidity for mapping class groups..... 133

10:45 ~ 11:45

小池 敏司 (兵庫教育大) 実解析的特異点のブロー解析理論における最近の進展..... 145

ベッチ数が1の3次元多様体に対する LMO 不変量の精密化と摂動的な不変量

大槻 知忠 (京大 数理研)

3次元多様体の摂動的な不変量は、ホモロジー球面に対しては、量子不変量の(数論的な)摂動展開をもちいて定式化できることが知られている。さらに、すべての摂動的な不変量を統一する不変量としてLMO不変量という不変量が知られており、LMO不変量は、整ホモロジー球面を分類することが期待されるくらいに強力な不変量であることが知られている。一方、first Betti数が正の3次元多様体に対して、従来の手法では量子不変量を摂動展開することができなかった。また、first Betti数が正の3次元多様体のLMO不変量は、Alexander多項式等の「古典的な」不変量で表示されるような比較的弱い不変量であることが知られている。

この講演では、first Betti数が1の3次元多様体に対して、LMO不変量を精密化する方法を解説する。また、このクラスの3次元多様体に対して、摂動的な不変量を定式化する方法を解説し、量子 $SO(3)$ 不変量の(数論的な)摂動展開はその摂動的な不変量をもちいて記述されることを述べる。さらに、この精密化はこのクラスの3次元多様体に対して「古典的な」不変量よりもはるかに強い不変量であることを述べる。

記号について 以下では、 K は S^3 内の結び目とし、 M は K にそって S^3 を 0 surgery して得られる3次元多様体とし、 $\Delta(t)$ は K の Alexander 多項式 (M の Alexander 多項式に等しい) とする。一般に、first Betti数が1の3次元多様体はそのような M であるとは限らないが、以下では簡単のため、そのような M について解説をする。

1 結び目の Kontsevich 不変量の loop 展開

次節でLMO不変量の精密化を定式化する準備として、この節ではKontsevich不変量のloop展開について述べる。

いくつかの頂点を辺でつないだ図形を**グラフ**といい、とくに、各頂点にはいる辺の本数が1本か3本のグラフを**1,3価グラフ**という。向きづけられた1次

元多様体 X について、1,3 価グラフで、1 価頂点は X 上にあり、各 3 価頂点のまわりの 3 つの辺に巡回順序が指定されているものを X 上の **Jacobi 図** という。 X 上の Jacobi 図がはるベクトル空間を次の 3 つの関係式 (**AS**, **IHX**, **STU 関係式**) でわってできる商ベクトル空間を $\mathcal{A}(X)$ とかく。

$$\text{loop} = - \text{cusp}, \quad \text{trivalent} = \text{Y-junction} - \text{X-junction}, \quad \text{edge} = \text{parallel} - \text{cross}.$$

図では X を太線で、1,3 価グラフを細線でかいている。 Jacobi 図の 1 価頂点と 3 価頂点の個数の和の $\frac{1}{2}$ 倍をその Jacobi 図の**次数**という。 1,3 価グラフで、各 3 価頂点のまわりの 3 つの辺に巡回順序が指定されているものを **open Jacobi 図** という。 open Jacobi 図がはるベクトル空間を AS, IHX 関係式でわってできる商ベクトル空間を \mathcal{B} とかく。 次で与えられる線型写像は同型写像になり、これを **Poincare-Birkhoff-Witt 同型 (PBW 同型)** とよぶ。

$$\chi: \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}(\downarrow) (\cong \mathcal{A}(S^1)), \quad \text{Diagram} \xrightarrow{\chi} \text{Diagram}$$

ここで、長方形は symmetrizer で、 n 本の線にかかる長方形は左の n 点と右の n 点をつなげる $n!$ 通りの平均を表す。

結び目の Kontsevich 不変量は次のように定義される。 \mathbb{R}^3 を $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ とみなし、結び目 K を高さに関する臨界点が有限個しかないようにその中におく (図 1)。 高さのパラメータ t_1, t_2, \dots, t_m をとり、各 t_i についてその高さにある K の点を 2 つえらび $z_i(t_i), z'_i(t_i)$ とおく。 このようなえらび方のことを**配置**という。 配置 P において各 t_i でえらんだ 2 点を K に対応する S^1 上で考えてこれを点線でむすぶと次数 m の S^1 上の chord 図 (3 価頂点を含まない Jacobi 図) がえられるが、それを D_P とかく。 このとき、反復積分をもちいて

$$Z(K) = (\text{正規化定数}) \cdot \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^m} \int_{t_1 \leq \dots \leq t_m} \sum_P (-1)^{\#P_1} D_P \prod_{i=1}^m \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i}$$

により **Kontsevich 不変量** $Z(K) \in \mathcal{A}(S^1)$ が定義される ([Ko])。 定義より、 $Z(K)$ は chord 図の \mathbb{C} 係数無限線型和であるが、実際の値は \mathbb{Q} 係数になることが知られている。

べき級数 $f(\hbar) = c_0 + c_1\hbar + c_2\hbar^2 + c_3\hbar^3 + \dots$ に対して、 $f(\hbar)$ が edge につけられた Jacobi 図は次の線型和を意味する。

$$\left. \right)^{f(\hbar) = c_0} + c_1 \left. \right)^{\hbar} + c_2 \left. \right)^{\hbar} + c_3 \left. \right)^{\hbar} + \dots$$

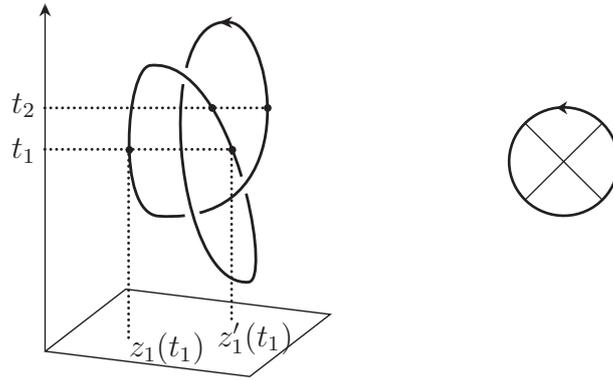


図 1: 配置の例とこれに対応する chord 図

first Betti 数が l である 1,3 価グラフからなる open Jacobi 図を l -loop であるという。結び目 K の Kontsevich 不変量 $Z(K)$ は多項式 $p_{i,j}(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ (ただし、 $t = e^h$) を用いて \mathcal{B} の元として次のように展開され、これを Kontsevich 不変量の **loop 展開** という [Ro2, Kr, GK]。

$$\log \left(\frac{\chi^{-1} Z(K)}{\chi^{-1} Z(O)} \right) = \underbrace{\left(\text{loop} \right)}_{-\frac{1}{2} \log \Delta(t)} + \sum_{i \text{ 有限個}} \left(\frac{p_{i,1}(t)/\Delta(t)}{p_{i,3}(t)/\Delta(t)} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{同様に表示される} \\ \text{3-loop 以上の項} \end{array} \right)$$

ただし、 \mathcal{B} の積構造を Jacobi 図の排反和により定め、 \log はその積に関する \log である。

2 LMO 不変量の精密化

この節では、LMO 不変量の精密化 $Z(M)$ とその \log である $z(M)$ を定式化する。さらに、 M の Alexander 多項式が定数のとき、 $z(M)$ の l -loop の部分 ($l \leq 5$) から l 変数多項式不変量が導かれることを述べる。

t の有理式が edge につけられた marking つきの Jacobi 図を次のように定義する。まず、簡単な場合として、 t の単項式が edge につけられた Jacobi 図の場合は、marking の端点を各 t の右側につけて得られる Jacobi 図の和として marking つきの Jacobi 図を定義する。

$$\begin{array}{c} t \quad t^2 \\ \text{---} \end{array}^* = \begin{array}{c} t \quad t^2 \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} t \quad t \quad t \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} t \quad t^2 \\ \text{---} \end{array}$$

一般に、 t の有理式が edge につけられた Jacobi 図の場合は、各有理式に marking をつけて得られる Jacobi 図の和として定義する。

$$\begin{array}{c} \varphi \quad \psi \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}^* = \begin{array}{c} \varphi \quad \psi \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}^* + \begin{array}{c} \varphi \quad \psi \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \end{array}^*$$

ここで、有理式につけられた marking の定義は、その有理式が t の単項式の場合は前述のように定義し、それ以外の場合は次式をみたすように前述の定義を自然に拡張することにより定義する。

$$\underbrace{fg}^* = \underbrace{f \quad g}^* + \underbrace{f \quad g}^*$$

定理 2.1 ([O8]). 次の $Z(M)$ は first Betti 数が 1 の 3次元多様体 M の位相不変量である。

$$Z(M) = \frac{\chi^{-1}Z(K)}{\chi^{-1}Z(O)} \sqcup \exp \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \log \Delta(t) \\ \text{---} \end{array} \right) \\ \in \frac{\text{span} \left\{ \frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \text{ の元が edge につけられた 3 価グラフの Jacobi 図} \right\}}{\text{span} \left\{ -\frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} + \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array}^* \right\}}$$

ここで、空間の分母は、 $\frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}]$ の元が edge につけられた 3 価グラフで marking をもつ Jacobi 図 D に対して表記の式で span される。

定理 2.2 ([O8]). 次の $z(M)$ は first Betti 数が 1 の 3次元多様体 M の位相不変量である。

$$z(M) = \log Z(M) \in \text{span} \left\{ \frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \text{ の元が edge につけられた } \right\} / \approx$$

連結な 3 価グラフの Jacobi 図

ここで、 \approx は

$$\alpha \approx \alpha + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \frac{t+1}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \frac{t+1}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D^{(1)} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \frac{1}{4} \begin{array}{c} t \frac{d}{dt} \left(\frac{t+1}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)} \right) \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} D \\ D \end{array} \\ + \begin{array}{c} \alpha^{(1)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \begin{array}{c} \alpha^{(1)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D^{(1)} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} D + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \alpha^{(2)} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \end{array} \begin{array}{c} D \\ D \end{array} + \dots$$

のような式で生成される同値関係である $(D^{(n)}, \alpha^{(n)})$ は D, α の「 n 階微分」で定義される。定義の詳細は [O8] 参照)。

2-loop の部分について 2-loop の部分空間は次の写像により多項式がはるベクトル空間に帰着される。

$$I : \text{span} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Delta(t)} \mathbb{Q}[t^{\pm 1}] \text{ の元が edge につけられた} \\ \text{2-loop の 3 個グラフの Jacobi 図} \end{array} \right\} \longrightarrow \left(\frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}, t_3^{\pm 1}]}{(t_1 t_2 t_3 - 1)} \right)^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$$

$$I \left(\begin{array}{c} \textcircled{\frac{p_1(t)/\Delta(t)}{p_2(t)/\Delta(t)}} \\ \textcircled{\frac{p_3(t)/\Delta(t)}{p_2(t)/\Delta(t)}} \end{array} \right) = \sum_{\substack{\varepsilon = \pm 1 \\ \{i,j,k\} = \{1,2,3\}}} p_1(t_i^\varepsilon) p_2(t_j^\varepsilon) p_3(t_k^\varepsilon)$$

ここで、対称群 \mathfrak{S}_3 は $\{t_1, t_2, t_3\}$ に置換で作用し、 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ の非自明な元は (t_1, t_2, t_3) を $(t_1^{-1}, t_2^{-1}, t_3^{-1})$ にうつすことで作用し、 $(\dots)^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}$ はこの作用による不変部分空間を表す。とくに、

$$S_n = I \left(\begin{array}{c} \textcircled{t^n/\Delta(t)} \\ \textcircled{\frac{t^{n+1}}{t-1} - \frac{t\Delta'(t)}{\Delta(t)}} \end{array} \right) = -2 \sum_{\{i,j,k\} = \{1,2,3\}} \left(\frac{t_i + 1}{t_i - 1} \Delta(t_i) - t_i \Delta'(t_i) \right) (t_j^n - t_j^{-n}) \Delta(t_k)$$

とおき、また、 $t_3 = t_1^{-1} t_2^{-1}$ において t_3 を消去する。すると、 $z(M)$ の 2-loop の部分は

$$L_2(M) = I(z(M) \text{ の 2-loop の部分}) \in \frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}}{\text{span}\{S_n \mid n = 1, 2, \dots\}}$$

のように多項式で表示され、これを M の **2-loop 多項式** ということにする。

とくに、 M の Alexander 多項式が定数のとき、この商空間の表示は以下のようにしてさらに簡明になる。 $\hat{S}_n = (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)S_n$ において、

$$\hat{L}_2(M) = (t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1)L_2(M) \in \frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}}{\text{span}\{\hat{S}_n \mid n = 1, 2, \dots\}}$$

とおく。射影

$$p_{\mathcal{R}} : \mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}] \longrightarrow \mathcal{R} = \text{span}\{t_1^n t_2^m \mid 0 \leq 2m \leq n\}$$

は、ベクトル空間の同型 $\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})} \cong \mathcal{R}$ を与える。さらに、 \mathcal{R} は

$$\mathcal{R}_1 = \text{span}\{t_1^n t_2^m \mid 0 < 2m \leq n\}, \quad \mathcal{R}_2 = \text{span}\{t_1^n \mid n > 0\}$$

の直和に分解し、 $p_{\mathcal{R}}(\hat{S}_n) \in \mathcal{R}_2$ となることに注意して若干の計算をすると、次の同型が得られる。

$$\psi : \frac{\mathbb{Q}[t_1^{\pm 1}, t_2^{\pm 1}]^{\mathfrak{S}_3 \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})}}{\text{span}\{\hat{S}_n\}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_1 \oplus \frac{\mathcal{R}_2}{\text{span}\{p_{\mathcal{R}}(\hat{S}_n)\}} \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}_1 \oplus \mathbb{Q}$$

命題 2.3 ([O8]). $\psi(\hat{L}_2(M)) \in \mathcal{R}_1 \oplus \mathbb{Q}$ は、first Betti 数が 1 で Alexander 多項式が定数であるような 3 次元多様体 M の位相不変量である。

l -loop の部分 ($l \leq 5$) について 上の命題は、 $z(M)$ の l -loop の部分 ($l \leq 5$) に対して、次のように拡張される。Jacobi 図の空間の l -loop 部分空間から

$$\mathcal{R}^{(l)} = \text{span}\{s_0^{n_0} \cdots s_\ell^{n_\ell} \mid n_0 + \cdots + n_\ell = \ell(\ell+1)/2, n_0 > \cdots > n_\ell\} / \sim$$

(\sim は、 $s_0^{n_0} \cdots s_\ell^{n_\ell} \sim (-1)^{\ell(\ell+1)/2} s_0^{\ell-n_\ell} \cdots s_\ell^{\ell-n_0}$ で定められる)

に写像を適切に定義することができ、さらに、その部分空間を

$$\mathcal{R}_1^{(l)} = \text{span}\{s_0^{n_0} \cdots s_\ell^{n_\ell} \in \mathcal{R}^{(l)} \mid (n_i \leq 0 \text{ or } \ell \leq n_i) \text{ for all } i\}$$

のように定める。

命題 2.4 ([O8]). first Betti 数が 1 で Alexander 多項式が定数であるような 3 次元多様体 M に対して、 $z(M)$ の l -loop の部分 ($l \leq 5$) から、 $\mathcal{R}_1^{(l)} \oplus \mathbb{Q}$ に値をもつ M の位相不変量 (l 変数多項式不変量) を定義することができる。

予想として、「 $l \leq 5$ 」という仮定は不要かもしれない。この l 変数多項式不変量の各係数の値は M を適切に clasper surgery することにより任意に変えることができる。よって、「古典的な」不変量に比べて $z(M)$ ははるかに強力な不変量であることがわかる。

3 摂動的不変量

この節では、LMO 不変量の精密化 $Z(M)$ から weight system により導出される摂動的な不変量を colored Jones 多項式から定式化し、量子 $SO(3)$ 不変量の数論的な摂動展開はこの摂動的な不変量もちいて記述されることを述べる。

結び目 K の colored Jones 多項式 $J_n(K; q) \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ は Kontsevich 不変量 $Z(K)$ から (\mathfrak{sl}_2, V_n) weight system により導出される (図 2)。ここで、 V_n は Lie 環 \mathfrak{sl}_2 の n 次元既約表現で、 (\mathfrak{sl}_2, V_n) を Jacobi 図に「代入」することにより Jacobi 図に数を対応させる写像を (\mathfrak{sl}_2, V_n) **weight system** という。

Kontsevich 不変量の loop 展開に (\mathfrak{sl}_2, V_n) weight system を適用することにより、結び目 K の colored Jones 多項式は、多項式 $P_\ell(t) \in \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ を用いて次

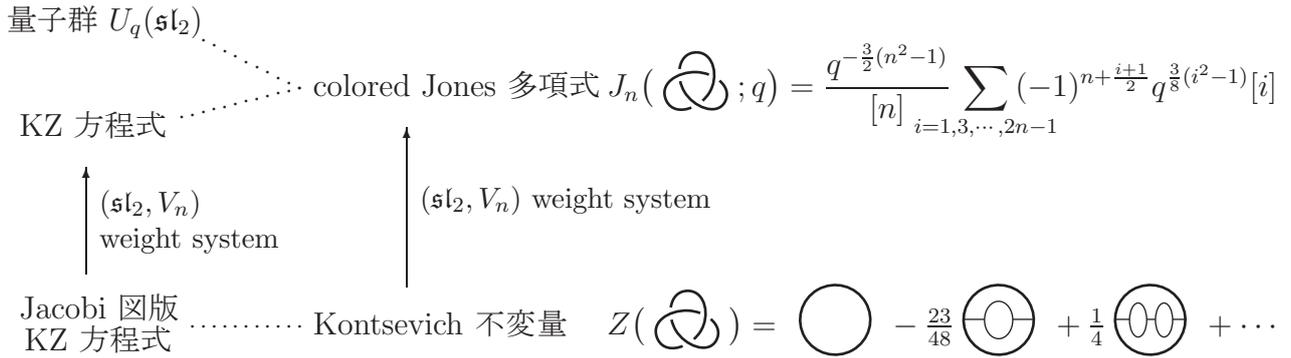


図 2: colored Jones 多項式 と Kontsevich 不変量

のように展開されることがわかり¹、この展開を colored Jones 多項式の **loop 展開** という [Ro1]。

$$J_n(K; q) = \frac{1}{\Delta(q^n)} + \frac{P_1(q^n)}{\Delta(q^n)^3}(q-1) + \frac{P_2(q^n)}{\Delta(q^n)^5}(q-1)^2 + \dots$$

p を奇素数として、 $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ 、 $[n] = (\zeta^{n/2} - \zeta^{-n/2})/(\zeta^{1/2} - \zeta^{-1/2})$ とおく。 M の量子不変量 $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の値は $(\zeta - 1)$ のべき級数に次のように展開される。

$$\begin{aligned} \tau_p^{SO(3)}(M) &= (\text{正規化定数}) \cdot \sum_{\substack{1 \leq n < p \\ n \text{ は奇数}}} [n]^2 J_n(K; \zeta) \\ &\equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{\substack{1 \leq n < p \\ n \text{ は奇数}}} (\zeta^n + \zeta^{-n} - 2) \left(\frac{1}{\Delta(\zeta^n)} + \frac{P_1(\zeta^n)}{\Delta(\zeta^n)^3}(\zeta-1) + \frac{P_2(\zeta^n)}{\Delta(\zeta^n)^5}(\zeta-1)^2 + \dots \right) \\ &\equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{\ell} \left(\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \frac{(\zeta^n + \zeta^{-n} - 2) P_{\ell}(\zeta^n)}{\Delta(\zeta^n)^{2\ell+1}} \right) (\zeta - 1)^{\ell} \\ &\equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{\ell} \left(\sum_{c=0, c_1, \dots, c_n} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^p \text{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2) P_{\ell}(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \right) (\zeta - 1)^{\ell} \end{aligned}$$

ここで、 $c_1, c_1^{-1}, \dots, c_n, c_n^{-1}$ は $\Delta(t)$ の零点で、合同式は $(\zeta - 1)^{p-1}$ を modulo とする合同で、最後の合同式は次のことから導かれる（有限個を除く素数について成立する）。有理式 $\varphi(t) = f(t)/\Delta(t)^m$ ($f(t)$ は $f(t) = f(t^{-1})$ をみたす $t^{\pm 1}$

¹歴史的には、colored Jones 多項式の loop 展開 ([Ro1]) が先で、これをふまえて、Rozansky は Kontsevich 不変量の loop 展開を定式化した ([Ro2])。

の多項式) と素数 $p > \deg f(t) - m \deg \Delta(t)$ について、

$$\frac{1}{p} \sum_{n \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}} \varphi(\zeta^n) \equiv \sum_{c=0, c_1, \dots, c_n} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^p \operatorname{Res}_{t=c} \frac{\varphi(t)}{t} \pmod{(\zeta-1)^{p-1}}.$$

上の展開の係数部分の形をふまえて、 c における M の摂動的不変量 (c は 0 または $\Delta(t)$ の零点) を

$$\tau(M; c) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+c}{1-c} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\operatorname{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2) P_{\ell}(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \right) (q-1)^{\ell} \in \mathbb{C}[[q-1]]$$

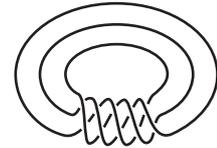
で定め、その係数を $\lambda_{\ell}(M; c)$ とおく。すなわち $\tau(M; c) = \sum_{\ell=0}^{\infty} \lambda_{\ell}(M; c) (q-1)^{\ell}$.

定理 3.1 ([O7]). $\tau(M; c)$ は、first Betti 数が 1 の 3 次元多様体 M の位相不変量である。

例 3.2. (a, b) トーラス結び目にそって S^3 を 0 surgery して得られる 3 次元多様体 M について、

$$\tau(M; 0) = \begin{cases} -\frac{1}{2}q & \text{if } (a, b) = (2, 3), \\ 0 & \text{その他,} \end{cases}$$

$$\tau(M; c) = -\frac{(1-c^{-1})^2}{2\Delta'(c)} q^{(a-a^{-1})(b-b^{-1})/4}.$$



(5, 3) トーラス結び目

ここで、 c は $\Delta(t) = \frac{(t^{ab/2} - t^{-ab/2})(t^{1/2} - t^{-1/2})}{(t^{a/2} - t^{-a/2})(t^{b/2} - t^{-b/2})}$ の零点である。

注意 3.3. M の Alexander 多項式が 1 のとき、葉廣和夫氏と Thang Le 氏は、筆者と独立に、異なる方法で、 M の摂動的不変量を構成している。

摂動的不変量 $\tau(M; c)$ の性質

命題 3.4. $\Delta(t)$ の零点 c について、 $\tau(M; c) = \tau(M; c^{-1})$.

命題 3.5. 有理ホモロジー球面 N について

$$\tau(M \# N; c) = \tau(M; c) \tau(N) |H_1(N; \mathbb{Z})|.$$

ここで、 $\tau(N) \in \mathbb{Q}[[q-1]]$ は N の摂動的 $SO(3)$ 不変量 ([O1]) である。

命題 3.6.

$$\lambda_0(M; 0) = \begin{cases} 1 & \text{if } \deg \Delta(t) = 0, \\ -\frac{\Delta(1)}{\Delta''(1)} & \text{if } \deg \Delta(t) = 1, \\ 0 & \text{if } \deg \Delta(t) > 1. \end{cases}$$

c が $\Delta(t) = 0$ の重複度 $m (\leq 2)$ の根であるとき、

$$\lambda_0(M; c) = \begin{cases} \frac{(1-c^{-2})\Delta(1)}{2\Delta'(c)} & \text{if } m = 1, \\ \left(\frac{2(c+1)}{c^3} + \frac{(c^{-2}-1)\Delta'''(c)}{3\Delta''(c)} \right) \frac{\Delta(1)}{\Delta''(c)} & \text{if } m = 2. \end{cases}$$

命題 3.7 (clasper surgery formula). 結び目 K にそって S^3 を 0 surgery してできる 3次元多様体を M とし、 M をある種の graph clasper C にそって surgery してできる 3次元多様体を M_C とするとき、

$$\lambda_\ell(M_C; c) - \lambda_\ell(M; c) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1+c}{1-c} \operatorname{Res}_{t=c} \frac{2^{\ell+2}(t^{1/2}-t^{-1/2})^3}{t \Delta(t)} e_x^T (t^{1/2}V - t^{-1/2}V^T)^{-1} e_y,$$

$$\lambda_k(M_C; c) = \lambda_k(M; c) \quad \text{for any } k < \ell.$$

ここで、 V は K の Seifert matrix で、 e_x, e_y は K の Seifert surface と C からきまるベクトルである。

とくに、命題 3.5, 3.7 より、 $\tau(M; c)$ は「古典的な」不変量よりはるかに強力な不変量であることがわかる。

量子 $SO(3)$ 不変量の (数論的な) 摂動展開

まず、有理ホモロジー球面 N に対する量子 $SO(3)$ 不変量 $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の数論的な摂動展開 ([O1]) について復習する。 p を奇素数とし、 $\zeta = \exp(2\pi\sqrt{-1}/p)$ とおく。 $\tau_p^{SO(3)}(N) \in \mathbb{Z}[\zeta]$ であること ([M]) が知られており、

$$\tau_p^{SO(3)}(N) = a_{p,0}(N) + a_{p,1}(N)(\zeta - 1) + a_{p,2}(N)(\zeta - 1)^2 + \cdots$$

のように整数 $a_{p,\ell}(N)$ を用いて $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の値を展開することができる。この展開は unique ではないが、

$$T(q) = \frac{q^p - 1}{q - 1} = \binom{p}{1} + \binom{p}{2}(q - 1) + \binom{p}{3}(q - 1)^2 + \cdots + \binom{p}{p}(q - 1)^{p-1}$$

とおくと $\mathbb{Z}[\zeta]$ は $\mathbb{Z}[q]/T(q)$ と同型であることより、 $(a_{p,\ell}(N) \bmod p) \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ は $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の値から unique に定まる。任意の素数 $p \geq \max\{2\ell+3, |H_1(N; \mathbb{Z})|\}$ について

$$a_{p,\ell}(N) \equiv \left(\frac{|H_1(N; \mathbb{Z})|}{p} \right) \lambda_\ell(N) \pmod{p}$$

をみたすような $\lambda_\ell(N) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{m}]$ (ここで $m = \max\{2\ell+1, |H_1(N; \mathbb{Z})|\}$) が存在することを以前に筆者 [O1] は示し、 N の摂動的不変量を

$$\tau(N) = \lambda_0(N) + \lambda_1(N)(q-1) + \lambda_2(N)(q-1)^2 + \dots \in \mathbb{Q}[[q-1]]$$

で定義した。とくに、その最初の2つの係数は

$$\lambda_0(N) = \frac{1}{|H_1(N; \mathbb{Z})|}, \quad \lambda_1(N) = \frac{6\lambda(N)}{|H_1(N; \mathbb{Z})|} \quad (\lambda(N) \text{ は Casson-Walker 不変量})$$

のように表示されることが、[M] の結果を用いることにより、わかる。量子不変量 $\tau_p^{SO(3)}(N)$ の値を $(\zeta-1)$ で展開したときの係数 $(\bmod p)$ を p によらない不変量でかくことができる、ということがポイントである。

first Betti 数が 1 の 3次元多様体 M に対する量子 $SO(3)$ 不変量の値について、同様の展開を考えてみよう。技術的な理由により、次の仮定をおく。

仮定 (1) M は S^3 から結び目 K にそった 0 surgery で得られる。²

(2) M の Alexander 多項式 $\Delta(t)$ は多重零点をもたない。

先と同様に $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の値を $(\zeta-1)$ で展開しその係数を $a_{p,\ell}(M)$ とおくと、 $(a_{p,\ell}(M) \bmod p)$ は $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の値から unique にきまるので、 $a_{p,\ell}(M) \in \mathbb{F}_p$ とみなすことにする (\mathbb{F}_p は位数 p の体)。さらに、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p: \text{素数}}$ を

$$\mathbb{F} = \prod_{\text{素数 } p} \mathbb{F}_p / \bigoplus_{\text{素数 } p} \mathbb{F}_p$$

の元とみなす。すなわち、有限個を除く素数 p について $b_p = b'_p$ であるとき $(b_p) \sim (b'_p)$ であるとする同値関係のもとで、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p: \text{素数}} \in \prod_{\text{素数 } p} \mathbb{F}_p$ の同値類を考える。 \mathbb{F} は \mathbb{Q} 上のベクトル空間になることに注意する。定理 3.1 の前に $\tau_p^{SO(3)}(M)$ を計算した式により

$$a_{p,\ell}(M) \equiv (\text{定数}) \cdot \sum_{c=0, c_1, \dots, c_n} \left(\frac{1+c}{1-c} \right)^p \operatorname{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2) P_\ell(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \pmod{p}$$

²そもそもこの原稿では「説明を簡単にするために」この仮定をおいていたが、とくにここ以下の部分では「技術的な理由により」この仮定が必要である。その「理由」とは、 $P_\ell(t)$ が整数係数であることが現時点ではこの場合にしか示されていないことによる。

とかくことができるが、 $\Delta(t) = \prod_i (1 - \alpha_i z)$ (where $z = t + t^{-1} - 2$) とおいて $\text{Res} \dots$ の部分を展開すると、

$$a_{p,\ell}(M) \equiv (\text{定数}) + \sum_i \left(\frac{1+c_i}{1-c_i} \right)^{p-1} (\alpha_i \text{の多項式}) \pmod{p}$$

となることがわかる。さらに、 $\epsilon_i = \frac{1+c_i}{1-c_i}$ とおくと (このとき $4\alpha_i + 1 = \epsilon_i^2$)、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p:\text{素数}} \in \mathbb{F}$ は

$$1, \quad \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{p+1} \right)_{p:\text{素数}}, \quad \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{p+3} \right)_{p:\text{素数}}, \quad \dots, \quad \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{p+2n-1} \right)_{p:\text{素数}}$$

の線型和になっていることがわかる。

この形の数列 $(\in \mathbb{F})$ は次の “Tamagawa map”

$$\left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{ap+b} \right)_{p:\text{素数}} \longmapsto \sum_{i=1}^n \epsilon_i^a \otimes \epsilon_i^b \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

を用いて identify することができ、とくに、この map は次のベクトル空間の同型を与える (この map の構成と同型は玉川安騎男氏による)。

$$\text{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \left(\sum_{i=1}^n \epsilon_i^{ap+b} \right)_p \mid a+b \text{ は偶数} \right\} \Big|_{\mathbb{F}} \xrightarrow{\cong} \text{span}_{\mathbb{Q}} \left\{ \sum_{i=1}^n \epsilon_i^a \otimes \epsilon_i^b \mid a+b \text{ は偶数} \right\} \Big|_{\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}}$$

よって、数列 $(a_{p,\ell}(M))_{p:\text{素数}}$ は Tamagawa map により

$$-\frac{1}{2} \sum_{c=0,c_1,\dots,c_n} \frac{1+c}{1-c} \otimes \text{Res}_{t=c} \frac{(t+t^{-1}-2)P_{\ell}(t)}{t \cdot \Delta(t)^{2\ell+1}} \in \mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C}$$

にうつされる。すなわち、Tamagawa map を経由して、

$$\tau(M) = \sum_{c=0,c_1,\dots,c_n} \frac{1+c}{1-c} \otimes \frac{1-c}{1+c} \tau(M; c) \in (\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{C})[[q-1]]$$

が量子不変量 $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の数論的な摂動展開を記述しているとみなすことができる。(とくに、 $\tau(M)$ が M の位相不変量であることは $\tau_p^{SO(3)}(M)$ の位相不変性より (定理 3.1 を使わなくても) わかる。)

参考文献

- [GK] Garoufalidis, S., Kricker, A., *A rational noncommutative invariant of boundary links*, *Geom. Topol.* **8** (2004) 115–204.
- [Ko] Kontsevich, M., *Vassiliev’s knot invariants*, *Adv. in Sov. Math* **16(2)** (1993) 137–150.
- [Kr] Kricker, A., *The lines of the Kontsevich integral and Rozansky’s rationality conjecture*, math.GT/0005284.
- [LMO] Le, T.T.Q., Murakami, J., Ohtsuki, T., *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, *Topology* **37** (1998) 539–574.
- [Les] Lescop, C., *Global surgery formula for the Casson-Walker invariant*, *Annals of Math. Studies* **140**, Princeton University Press, 1996.
- [M] Murakami, H., *Quantum $SO(3)$ -invariants dominate the $SU(2)$ -invariant of Casson and Walker*, *Math. Proc Camb. Phil. Soc.* **117** (1995) 237–249.
- [O1] Ohtsuki, T., *A polynomial invariant of rational homology 3-spheres*, *Invent. Math.* **123** (1996) 241–257.
- [O2] ———, *The perturbative $SO(3)$ invariant of rational homology 3-spheres recovers from the universal perturbative invariant*, *Topology* **39** (2000) 1103–1135.
- [O3] ———, *Quantum invariants, — A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, *Series on Knots and Everything* **29**. World Scientific Publishing Co., Inc., 2002.
- [O4] ———, *Equivariant quantum invariants of the infinite cyclic covers of knot complements*, “Intelligence of Low Dimensional Topology 2006”, *Series on Knots and Everything* **40**, World Scientific Publishing Co., Inc.
- [O5] ———, *Invariants of knots derived from equivariant linking matrices of their surgery presentations*, preprint, 2006.
- [O6] ———, *On the 2-loop polynomial of knots*, *Geometry and Topology* **11** (2007) 1357–1475.
- [O7] ———, *Perturbative invariants of 3-manifolds with the first Betti number 1*, preprint, 2007. RIMS-1630, <http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/~tomotada/papers.html>
- [O8] ———, *A refinement of the LMO invariant for 3-manifolds with the first Betti number 1*, in preparation.
- [O+] T. Ohtsuki (ed.), *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, *Invariants of knots and 3-manifolds (Kyoto 2001)*, 377–572, *Geom. Topol. Monogr.* **4**, *Geom. Topol. Publ.*, Coventry, 2004.
- [Ro1] Rozansky, L., *The universal R -matrix, Burau representation, and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones polynomial*, *Adv. Math.* **134** (1998) 1–31.
- [Ro2] ———, *A rational structure of generating functions for Vassiliev invariants*, Notes accompanying lectures at the summer school on quantum invariants of knots and three-manifolds, Joseph Fourier Institute, University of Grenoble, org. C. Lescop, June, 1999.

〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町 京都大学数理解析研究所
E-mail: tomotada@kurims.kyoto-u.ac.jp

MEYER'S FUNCTION, ETA-INVARIANTS AND ETA-FORMS

SHUICHI HIDA

1. INTRODUCTION

Let \mathcal{M}_g be the mapping class group of a closed orientable surface Σ_g of genus g . In [Me], Meyer introduced a 2-cocycle $\tau_g : \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{Z}$, called the signature cocycle or the Meyer cocycle. By using the Meyer cocycle τ_g , he gave the formula for the signatures of surface bundles over surfaces. Since $\mathcal{M}_1 = SL_2(\mathbb{Z})$, $H^1(SL_2(\mathbb{Z}), \mathbb{Z}) = 0$ and $3[\tau_1] = 0$ in $H^2(\mathcal{M}_1, \mathbb{Z})$, there exists a unique 1-cocycle $\phi_1 : SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow \frac{1}{3}\mathbb{Z}$ that cobounds τ_1 . The function ϕ_1 is called the Meyer function of genus one, which has the following property: Let $\pi : Z \rightarrow X$ be a Σ_1 -bundle over a compact oriented surface with boundary $\partial X = c_1 \amalg \cdots \amalg c_k$. Let A_1, \dots, A_k be the monodromies around each component of the boundary. Since the Picard-Lefschetz transformation along c_i is an automorphism of $H^1(\Sigma_1, \mathbb{Z})$ preserving the intersection form, one has $A_i \in SL_2(\mathbb{Z})$ by fixing a symplectic basis of $H^1(\Sigma_1, \mathbb{Z})$. Then the signature of Z , which is defined as the signature of the cup-product pairing on $H^2(Z, \partial Z, \mathbb{R})$, satisfies

$$(1) \quad \text{Sign}(Z) = - \sum_i^k \phi_1(A_i).$$

The explicit formula for ϕ_1 was obtained by Meyer [Me].

In [A2], Atiyah investigated the Meyer function ϕ_1 from several view points. For an odd dimensional closed oriented Riemannian manifold M , let $\eta(M)$ be the η -invariant of M with respect to the signature operator of M [APS]. For $\sigma \in SL_2(\mathbb{Z})$, let $\pi : M_\sigma \rightarrow S^1$ be the mapping torus associated with σ , i.e., the Σ_1 -bundle over S^1 with monodromy σ . Then Atiyah showed the following identity, when M_σ is equipped with a certain metric:

$$(2) \quad \phi_1(\sigma) = \eta(M_\sigma).$$

Moreover, he gave several interpretations of ϕ_1 in terms of the following quantities: (i) Hirzebruch's signature defect; (ii) the transformation law of the logarithm of the Dedekind η -function; (iii) the logarithm of the monodromy of the determinant line bundle; (iv) the value of the Shimizu L -function at the origin.

After Meyer and Atiyah, generalizations of their results to the cases of curves of higher genus or the case of higher dimensional complex tori were studied by many authors.

When $g = 2$ there exists a unique 1-cocycle $\phi_2 : \mathcal{M}_2 \rightarrow \frac{1}{5}\mathbb{Z}$ satisfying (1) for every Σ_2 -bundles over compact oriented surfaces. The function ϕ_2 is called the Meyer function of genus two. While $[\tau_g] \in H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z})$ is not a torsion element for $g > 2$, the restriction of $[\tau_g]$ to the hyperelliptic mapping class group is known to be a torsion element. Therefore the *Meyer function for hyperelliptic curves* can be defined [Mo], [E]. The relations between η -invariants and the Meyer function for hyperelliptic curves were studied in [Mo].

A natural extension of Equation (2) to mapping torus of higher dimensional torus follows from the same idea as in Atiyah [A2]. The coincidence of the η -invariants of

torus fibrations and the special values of the corresponding L -functions was established by Bismut and Cheeger [BC2]. In their results, automorphic forms seem to play no role.

The purpose of this paper is to give a generalization of Eq.(2) in which an automorphic form of higher dimension plays a role similar to the role of Dedekind η -function in Atiyah's study. For this reason, we shall consider the signature cocycle of *smooth theta divisors* as a higher dimensional analogue of curves of genus two and we shall prove that the cohomology class of this cocycle vanishes rationally by constructing the *Meyer function for smooth theta divisors* explicitly.

2. STATEMENT OF THE RESULTS

Let \mathfrak{S}_g be the Siegel upper half-space of degree g and let Γ_g be the Siegel modular group of degree g . Let $f : \mathbb{A}_g \rightarrow \mathfrak{S}_g$ be the universal family of principally polarized Abelian varieties. Then Γ_g acts on \mathbb{A}_g and \mathfrak{S}_g , so that f is Γ_g -equivariant. Consider the universal family of theta divisors:

$$p : \Theta \rightarrow \mathfrak{S}_g, \quad \Theta \subset \mathbb{A}_g, \quad p = f|_{\Theta}.$$

Here the fiber $\Theta_\tau = p^{-1}(\tau)$ is the theta divisor of $\mathbb{A}_\tau := f^{-1}(\tau)$ for any $\tau \in \mathfrak{S}_g$, i.e., the zero divisor of the Riemann theta function. Let $\mathcal{N}_g := \{\tau \in \mathfrak{S}_g \mid \text{Sing}\Theta_\tau \neq \emptyset\}$ be the Andreotti-Mayer locus. Then there is a Siegel modular form $\Delta_g(\tau)$ of weight $\frac{(g+3) \cdot g!}{2}$ with zero divisor \mathcal{N}_g by [Mu], [Y2]. We put $\mathfrak{S}_g^\circ = \mathfrak{S}_g - \mathcal{N}_g$, $\Theta^\circ = \Theta|_{\mathfrak{S}_g^\circ}$. After a slight modification of the Γ_g -action on \mathbb{A}_g , we construct a Γ_g -action on Θ° and a specific Γ_g -invariant Kähler metric g^{Θ° on Θ° such that $p : \Theta^\circ \rightarrow \mathfrak{S}_g^\circ$ is Γ_g -equivariant. (See Sections 4 and 5 for the construction of g^{Θ° .) The quotient space $\Gamma_g \backslash \mathfrak{S}_g^\circ$ is regarded as the coarse moduli space of *smooth theta divisors*. Let us consider the orbifold fundamental group of $\Gamma_g \backslash \mathfrak{S}_g^\circ$, which will be one of the main objects in this paper:

$$\mathcal{S}_g := \pi_1^{\text{orb}}(\Gamma_g \backslash \mathfrak{S}_g^\circ).$$

Since $\mathcal{S}_1 = \mathcal{M}_1 = SL_2(\mathbb{Z})$ and $\mathcal{S}_2 = \mathcal{M}_2$, \mathcal{S}_g is an analogue of the mapping class group.

Following Atiyah [A2], we define a 2-cocycle $c_g \in Z^2(\mathcal{S}_g, \mathbb{Z})$ as follows. Let $\mathcal{B} := S^2 \setminus \coprod_{i=1}^3 D_i$ be a sphere with three holes and let $\coprod_{i=1}^3 \gamma_i = \partial\mathcal{B} \subset \mathcal{B}$ be the boundary. For given $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_g$, let $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \Gamma_g \backslash \mathfrak{S}_g^\circ$ be a C^∞ -map in the sense of orbifolds such that its restrictions on γ_1 and γ_2 are representatives of σ_1 and σ_2 , respectively. Let $X_{(\sigma_1, \sigma_2)} := \mathcal{B} \times_\alpha \Theta^\circ$ be the family of smooth theta divisors on \mathcal{B} induced from $p : \Theta^\circ \rightarrow \mathfrak{S}_g^\circ$ via α . Then $X_{(\sigma_1, \sigma_2)}$ is a compact $2g$ -dimensional oriented manifolds with non-empty boundary. Define the map $c_g : \mathcal{S}_g \times \mathcal{S}_g \rightarrow \mathbb{Z}$ by

$$c_g(\sigma_1, \sigma_2) := \text{Sign}(X_{(\sigma_1, \sigma_2)}).$$

By the Novikov additivity for signature, c_g is a 2-cocycle of \mathcal{S}_g . We call c_g the signature cocycle of smooth theta divisors. By construction, $c_2 = \tau_2$. When g is odd, c_g is trivial, i.e., $c_g \equiv 0$.

For $\sigma \in \mathcal{S}_g$, we choose a map $\alpha : S^1 \rightarrow \Gamma_g \backslash \mathfrak{S}_g^\circ$ in the sense of orbifolds, which is a representative of σ . Let $\pi : M_\sigma \rightarrow S^1$ be the mapping torus of a smooth theta divisor induced by α . Let g^{M_σ/S^1} be the metric on the relative tangent bundle TM_σ/S^1 induced from the metric g^{Θ° . Using the connection induced from the Levi-Civita connection on $T\mathbb{A}_g$, we define a family of metrics on M_σ by

$$g_\varepsilon^{M_\sigma} = g^{M_\sigma/S^1} \oplus \varepsilon^{-1} \pi^* dt^2, \quad \varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}.$$

By Bismut-Cheeger [BC1], the limit $\eta^0(M_\sigma) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \eta(M_\sigma, g_\varepsilon^{M_\sigma})$ exists and is called the adiabatic limit of the η -invariants $\eta(M_\sigma, g_\varepsilon^{M_\sigma})$. Set

$$(3) \quad \Phi_g(\sigma) := \eta^0(M_\sigma) + \frac{(-1)^{g/2} 2^{g+3} (2^{g+2} - 1)}{(g+3)!} B_{\frac{g}{2}+1} \int_{S^1} \alpha^* d^c \log \|\Delta_g(\tau)\|^2,$$

where $d^c = \frac{1}{4\pi\sqrt{-1}}(\partial - \bar{\partial})$ and $\|\Delta_{2g}(\tau)\|^2 := (\det \text{Im} \tau)^{\frac{(g+3) \cdot (g)!}{2}} |\Delta_g(\tau)|^2$ denotes the Petersson norm of the Siegel modular form $\Delta_g(\tau)$. Here B_k is the k -th Bernoulli number when $k \in \mathbb{Z}$ and $B_k = 0$ when $k \in \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$. The main results of this paper are stated as follows.

Theorem 2.1. *The value $\Phi_g(\sigma)$ is independent of the choice of α , and Φ_g descends to a real-valued function on \mathcal{S}_g cobounding the signature cocycle $-c_g$, i.e.,*

$$-c_g(\sigma_1, \sigma_2) = \Phi_g(\sigma_1) + \Phi_g(\sigma_2) - \Phi_g(\sigma_1 \sigma_2), \quad \sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_g.$$

In particular, $[c_g] \otimes \mathbb{Q} = 0 \in H^2(\mathcal{S}_g, \mathbb{Q})$.

We call Φ_g the Meyer function for smooth theta divisors. When g is odd, Φ_g vanishes identically. When g is even, Φ_g is non-trivial by Theorem 2.4 below. From the uniqueness of the Meyer function of genus 2, it follows that $\phi_2 = \Phi_2$.

In the case of torus fibration, we can easily construct the "Meyer function" because of the vanishing of the second cohomology $H^2(SL_n \mathbb{Z}, \mathbb{Z})$ for large n .

Remark 2.2. In the genus two case, the differential form in the equation (3) can be interpreted by a view point of *eta-forms*.

We next consider the uniqueness of a function on \mathcal{S}_g cobounding c_g , which is equivalent to the vanishing of $H^1(\mathcal{S}_g, \mathbb{Z})$. In general, the uniqueness no longer holds.

Theorem 2.3. *The following equality holds:*

$$H^1(\mathcal{S}_g, \mathbb{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 \leq g \leq 3, \\ \mathbb{Z} & \text{if } g \geq 4. \end{cases}$$

To prove the non-triviality of Φ_g , we compute the value of Φ_g for the Dehn twists. The subgroup $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$ of \mathcal{S}_g is regarded as an analogue of the Torelli group by the exact sequence

$$1 \rightarrow \pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ) \rightarrow \mathcal{S}_g \rightarrow \Gamma_g \rightarrow 1.$$

Then $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$ is generated by lassoes surrounding the irreducible components of \mathcal{N}_g . By Debarre [D], \mathcal{N}_g consists of two Γ_g -invariant components θ_g and \mathcal{J}_g such that $\Gamma_g \setminus \theta_g$ and $\Gamma_g \setminus \mathcal{J}_g$ are irreducible divisors on the Siegel modular variety $\Gamma_g \setminus \mathfrak{S}_g$. Let $\sum_\lambda \theta_{g,\lambda}$ and $\sum_\mu \mathcal{J}_{g,\mu}$ be the irreducible decompositions of θ_g and \mathcal{J}_g , respectively. Consider lassoes surrounding $\theta_{g,\lambda}$ and $\mathcal{J}_{g,\mu}$, and denote their homotopy classes by Π_λ^1 and Π_μ^2 , respectively. Then Π_λ^1 and Π_μ^2 are elements of $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ) \subset \mathcal{S}_g$ such that $\{\Pi_\lambda^1, \Pi_\mu^2\}_{\lambda,\mu}$ generates $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$.

Theorem 2.4. *The following equalities hold:*

$$\begin{aligned} \Phi_g(\Pi_\lambda^1) &= \begin{cases} -\frac{4}{5} & \text{if } g = 2, \\ (-1)^{\frac{g}{2}+1} \frac{(g+1)2^{g+2}(2^{g+2}-1)}{(g+3)!} B_{\frac{g}{2}+1} & \text{if } g \geq 3. \end{cases} \\ \Phi_g(\Pi_\mu^2) &= (-1)^{\frac{g}{2}+1} \frac{(g+1)2^{g+3}(2^{g+2}-1)}{(g+3)!} B_{\frac{g}{2}+1} \quad \text{if } g \geq 4. \end{aligned}$$

As a corollary, it turns out that the Meyer function Φ_g is a rational-valued function.

When $g = 2$, the monodromy Π_λ^1 is the Dehn twist along a separating simple closed curve on a Riemann surface of genus two. In this case, the formula $\Phi_2(\Pi_\lambda^1) = \phi_2(\Pi_\lambda^1) = -\frac{4}{5}$ confirms a result of Matsumoto [Ma, Proposition 3.6]. We conjecture that the function Φ_g is a homomorphism on $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$. If this conjecture is affirmative, then the value of Φ_g on $\pi_1(\mathfrak{S}_g^\circ)$ will be determined by Theorem 2.4. When $g = 2$, this conjecture is affirmative since the cocycle $\tau_2 = c_2$ is the pull-back of a cocycle of Γ_2 .

3. SKETCH OF THE PROOF

We explain the strategy of the proof of Theorem 2.1 briefly.

(Step 1) For $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathcal{S}_g$, consider the family $\pi : X_{(\sigma_1, \sigma_2)} \rightarrow \mathcal{B}$ as defined above. For simplicity, set $X = X_{(\sigma_1, \sigma_2)}$. Endow X with the metric $g^{X/\mathcal{B}}$ on the relative tangent bundle TX/\mathcal{B} induced by g^{Θ° via the classifying map $\alpha : \mathcal{B} \rightarrow \Gamma_g \setminus \mathfrak{S}_g^\circ$. Let $g^\mathcal{B}$ be a metric on $T\mathcal{B}$ that is a product metric on a color neighborhood of the boundary. By using the connection induced from the Levi-Civita connection on $T\mathbb{A}_g$, define a family of metrics by $g_\varepsilon^X := g^{X/\mathcal{B}} \oplus \varepsilon^{-1} \pi^* g^\mathcal{B}$, $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. The Atiyah-Patodi-Singer index theorem applied to (X, g_ε^X) yields that

$$(4) \quad \text{Sign}(X) = \int_{\mathcal{B}} \pi_* L(TX, g_\varepsilon^X) - \sum_{i=1}^3 \eta(M_{\sigma_i}, g_\varepsilon^X|_{M_{\sigma_i}}), \quad \sigma_3 = (\sigma_1 \sigma_2)^{-1}.$$

(Step 2) Let $\nabla^{X/\mathcal{B}}$ be the connection on the relative tangent bundle TX/\mathcal{B} induced from the metric $g^{X/\mathcal{B}}$ and the connection on the fiber bundle $\pi : X \rightarrow \mathcal{B}$. Since $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(TX, g_\varepsilon^X) = L(TX/\mathcal{B}, \nabla^{X/\mathcal{B}})$ and since the signature is independent of the choice of a metric, we take the limit $\varepsilon \rightarrow 0$ in (4) to get

$$(5) \quad c_g(\sigma_1, \sigma_2) = \int_{\mathcal{B}} \pi_* L(TX/\mathcal{B}, \nabla^{X/\mathcal{B}}) - \sum_{i=1}^3 \eta^0(M_{\sigma_i}).$$

(Step 3) Let ∇^H be the holomorphic Hermitian connection on the holomorphic relative tangent bundle $T^{1,0}\Theta^\circ/\mathfrak{S}_g^\circ$. In Section 5, we shall prove that

$$(6) \quad (p_* \mathbf{L}(T^{1,0}\Theta^\circ/\mathfrak{S}_g^\circ, \nabla^H))^{(2)} = k(g) dd^c \log \|\Delta_g(\tau)\|^2,$$

where \mathbf{L} denotes the multiplicative genus of Chern forms corresponding to the power series $x/\tanh(x)$, $\omega^{(p)}$ denotes the p -form component of a differential form ω and $k(g)$ is a certain rational number containing the Bernoulli number $B_{\frac{g}{2}+1}$. By the functoriality of the connection $\nabla^{X/\mathcal{B}}$ and by the Kählerness of the metric g^{Θ° , we get

$$(7) \quad (\pi_* L(TX/\mathcal{B}, \nabla^{X/\mathcal{B}}))^{(2)} = \alpha^* (p_* \mathbf{L}(T^{1,0}\Theta^\circ/\mathfrak{S}_g^\circ, \nabla^H))^{(2)} = d(k(g) \alpha^* d^c \log \|\Delta_g(\tau)\|^2).$$

The assertion follows from (5), (6), (7) and the Stokes Theorem.

REFERENCES

- [A1] M. F. Atiyah, *The signature of fiber bundles*, Global Analysis, Tokyo, Princeton; University Press (1969) 73-84
- [A2] M. F. Atiyah, *Logarithm of the Dedekind η -funktion*, Math. Ann. **278** (1987) 335-380
- [APS] M. F. Atiyah, V. K. Patodi, I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry I, II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975) 43-69, **78** (1975) 405-432
- [AS] M. F. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators III*, Ann. Math. **87** (1968) 546-604
- [BG] J. Barge, E. Ghys, *Cocycle d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. **294** (1992) 235-265
- [B] J.-M. Bismut, *Local index theory and higher analytic torsion*, Proc. Int. Math. Cong. (1990) 143-162

- [BB] J.-M. Bismut, J.-B. Bost, *Fiberés déterminants, métriques de Quillen et dégénérescence des courbes*, Acta Math. **165** (1990) 1-103
- [BC1] J.-M. Bismut, J. Cheeger, *η -invariants and their adiabatic limits*, J. Am. Math. Soc. **2** (1989) 33-70
- [BC2] J.-M. Bismut, J. Cheeger, *Transgressed of Euler class of $SL(2n, \mathbb{Z})$ vector bundles, adiabatic limits of eta invariants and special values of L-functions*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **25** (1992) 335-391
- [BF] J.-M. Bismut, D. S. Freed, *The analysis of elliptic families I: Metrics and connections on determinant bundles, II: Dirac operators, eta invariants, and the holonomy theorem of Witten*, Comm. Math. Phys. **106** (1986) 159-176, **107** (1986) 103-163
- [BGS] J.-M. Bismut, H. Gillet, C. Soulé, *Analytic torsion and holomorphic determinant bundles I, II, III*, Comm. Math. Phys. **115** (1988) 49-78, 79-126, 301-356
- [BoC] R. Bott, S. S. Chern, *Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections*, Acta Math. **114** (1968) 71-112
- [BGV] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Springer-Verlag, Berlin (1992)
- [Bo] A. Borel, *Stable real cohomology of arithmetic groups II* Manifolds and Lie groups, Birkhauser-Boston, (1981).
- [Br] K. S. Brown, *Cohomology of groups* Springer, GTM **87** (1982)
- [CHS] S. S. Chern, F. Hirzebruch, J. P. Serre, *On the index of a fibered manifold* Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957) 587-596
- [Da] X. Dai, *Adiabatic limits, nonmultiplicativity of signatures, and Leray spectral sequence* J. Amer. Math. **4** (1991) 265-321
- [D] O. Debarre, *Le lieu des variétés abéliennes dont le diviseur thêta est singulier a deux composantes*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **25** (1992) 687-708
- [E] H. Endo, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, Math. Ann. **316** (2000) 237-257
- [FS] A. Fujiki, G. Schumacher, *The moduli space of extremal compact kähler manifolds and generalized Weil-Petersson metrics*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **26** (1990) 101-83
- [Ig] J. Igusa, *Theta functions*, Springer, Berlin (1972)
- [Ii] S. Iida, *Adiabatic limits of η -invariants and the Meyer function of genus two*, Master's thesis, The University of Tokyo, 2005
- [Ka] A. Kas, *On the handle body decomposition associated to a Lefschetz fibration*, Pac. J. Math **89** (1980) 89-104
- [Ko] S. Kobayashi, *Differential geometry of complex vector bundles*, Iwanami Shoten Publishers, Tokyo (1987)
- [L] K. Lamotke, *The topology of complex projective varieties after S. Lefschetz*, Topology **20** (1981) 15-51
- [LW] R. Lee, S. H. Weintraub, *Cohomology of $Sp_4(\mathbb{Z})$ and related groups and spaces*, Topology **24** (1985) 391-410
- [Ma] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibration of genus two - a topological approach -*, Proceedings of the 37th Taniguchi Symposium on Topology and Teichmüller Spaces held in Finland, ed. S. Kojima et al., World Scientific Publ., (1996) 123-148
- [Mc] G. W. Mackey, *Les ensembles Borélien et les extensions des groupes*, J. Math. Pure. Appl. **36** (1957) 171-178
- [Me] W. Meyer, *Die Signature von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973) 239-264
- [Mi] J. Milnor, *Introduction to algebraic K-theory*, Ann. Math. Stud, Princeton University Press **72** (1971)
- [Mo] T. Morifuji, *Meyer's function, η -invariants and the signature cocycle*, thesis, University of Tokyo (1998)
- [Mu] D. Mumford *On the Kodaira dimension of the Siegel modular variety*, Lecture Note in Math. **993** (1983) 348-375
- [OS] S. Ogata, M-H. Saito, *Signature defects and eta functions of degenerations of Abelian varieties*, Japan. J. Math. **23** (1997) 319-364
- [Sm] I. Smith, *Lefschetz fibrations and the Hodge bundle*, Geometry & Topology **3** (1999) 211-233
- [Sp] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Springer, New York (1966)
- [Tu] V. Turaev, *First symplectic Chern class and Maslov indices*, Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. **143** (1985) 110-129
- [Y1] K. Yoshikawa, *Smoothing of isolated hypersurface singularities and Quillen metrics*, Asian J. Math. **2** (1998) 325-344
- [Y2] K. Yoshikawa, *Discriminant of Theta divisors and Quillen metrics*, J. Diff. Geom. **52** (1999) 73-115
- [YY] A. Yoshikawa, K. Yoshikawa, *Isolated critical points and adiabatic limits of Chern forms*, Singularité Franco-Japonaises, Sémin. Congr. **10** (2005) 443-460
- E-mail address: shuichi@ms.u-tokyo.ac.jp*

GROUPS OF MEASURE-PRESERVING HOMEOMORPHISMS OF NONCOMPACT MANIFOLDS AND MASS FLOW TOWARD ENDS

TATSUHIKO YAGASAKI

本論説の目的は、多様体上の測度を保つ同相写像の成す群の位相的な性質に関して、現在までにどのような事が明らかにされているかを概説することである。第1節では、Radon測度の空間や測度保存同相群に関する基本事項を述べ、第2節では、コンパクト多様体の場合の A. Fathi の仕事 [8] を紹介し、第3節では、非コンパクト多様体の場合の R. Berlanga の仕事 [2, 3, 4] 及び筆者の結果 [15, 16] を説明する。

1. RADON 測度の空間 と 測度保存同相群

M を連結 n 次元多様体とする (境界を持っていても良い)。

1.1. Radon 測度の空間. [1, 4, 8]

M の Borel 集合の成す σ -加法族を $\mathcal{B}(M)$ で表す。 M 上の局所有限 Borel 測度を Radon 測度と呼ぶ。 M 上の Radon 測度全体に弱位相を入れた空間を $\mathcal{M}(M)$ で表す。この位相は、次の条件を満たす最も弱い位相として定義される：任意のコンパクト台を持つ連続関数 $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、次の関数は連続：

$$\Phi_f : \mathcal{M}(M) \rightarrow \mathbb{R} : \quad \Phi_f(\mu) = \int_M f d\mu.$$

さらに、閉集合 $A \subset M$ に対して $\mathcal{M}^A(M) = \{\mu \in \mathcal{M}(M) \mid \mu(A) = 0\}$ と置く。

空間 $\mathcal{M}(M)$ 上で、測度の制限や測度の値を取るといった基本操作の連続性を保証するには、境界に関して測度 = 0 という制約が必要となる。例えば、 M のコンパクト n 次元部分多様体 N に対して、次の写像は連続になる：

$$\mathcal{M}^{\text{Fr}N}(M) \rightarrow \mathcal{M}(N) : \mu \mapsto \mu|_N, \quad \mathcal{M}^{\text{Fr}N}(M) \rightarrow \mathbb{R} : \mu \mapsto \mu(N).$$

Radon 測度の代表例は \mathbb{R}^n 上の Lebesgue 測度である。この測度の持つ位相不変な性質として、次の2点が挙げられる： (i) 各点の測度が 0, (ii) 空でない開集合の測度は正一般に、Radon 測度が性質 (i), (ii) を持つとき good であると言う。

$$\mathcal{M}_g(M) = \{\mu \in \mathcal{M}(M) \mid \mu : \text{good}\}, \quad \mathcal{M}_g^A(M) = \mathcal{M}_g(M) \cap \mathcal{M}^A(M) \quad \text{と置く.}$$

$\omega \in \mathcal{M}_g^A(M)$ とする。

定義 1.1. $\mu \in \mathcal{M}_g^A(M)$ が ω -regular $\iff \mu$ と ω は 同じ null sets を持つ
($\mu(B) = 0 \iff \omega(B) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(M)$).

$$\mathcal{M}_g^A(M; \omega\text{-reg}) = \{\mu \in \mathcal{M}_g^A(M) \mid \mu : \omega\text{-regular}\},$$

$$\mathcal{M}_g^A(M; \omega) = \{\mu \in \mathcal{M}_g^A(M; \omega\text{-reg}) \mid \mu(M) = \omega(M)\}.$$

$\mathcal{M}(M)$ は affine 変形 $\varphi_t(\mu) = (1-t)\mu + t\omega$ ($t \in [0, 1]$) で一点 ω に縮む。この変形は、部分空間 $\mathcal{M}_g^A(M)$ や $\mathcal{M}_g^A(M; \omega)$ を保つ。

1.2. 測度保存同相群.

M の同相写像全体の成す群 $\mathcal{H}(M)$ は コンパクト - 開位相の下で位相群になる. $\mathcal{H}(M)$ の部分群 G に対して, 次の記号を用いる:

G_0, G_1 は G における id_M の連結成分, 弧状連結成分を表す.

$G_A := \{h \in G \mid h|_A = id_A\}$ ($A \subset M$), $G^c := \{h \in G \mid h: \text{コンパクト台を持つ}\}$

$h \in \mathcal{H}(M)$ と $\omega \in \mathcal{M}(M)$ に対して $h_*\omega \in \mathcal{M}(M)$ が次で定義される:

$$(h_*\omega)(B) = \omega(h^{-1}(B)) \quad (B \in \mathcal{B}(M)).$$

定義 1.2. (1) $h \in \mathcal{H}(M)$ とする.

(i) h が ω を保存する $\iff h_*\omega = \omega$ ($\omega(h(B)) = \omega(B) \quad \forall B \in \mathcal{B}(M)$).

(ii) h が ω -regular $\iff h_*\omega: \omega$ -regular $\iff h$ は ω -null sets を保つ

$$(\omega(h(B)) = 0 \iff \omega(B) = 0 \quad \forall B \in \mathcal{B}(M)).$$

(2) (i) $\mathcal{H}(M; \omega) = \{h \in \mathcal{H}(M) \mid h: \omega\text{-保存}\},$

(ii) $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg}) = \{h \in \mathcal{H}(M) \mid h: \omega\text{-regular}\}.$

群 $\mathcal{H}(M)$ は $h \cdot \omega = h_*\omega$ により空間 $\mathcal{M}(M)$ に連続に作用する. $\mathcal{H}(M; \omega)$ はこの作用における ω の stabilizer と一致する. 結局, 次のような同相群と部分群の列が得られる:

$$\mathcal{H}(M) \supset \mathcal{H}(M; \omega\text{-reg}) \supset \mathcal{H}(M; \omega) \supset \mathcal{H}^c(M; \omega)$$

問題 1. 群 $\mathcal{H}(M; \omega)$ の位相的な性質 (ホモトピー型, 無限次元多様体としての位相型) 及び上記の群の間の位相的な関係を明らかにせよ.

1.3. 位相的 l_2 -多様体.

問題 1 に関連して, 無限次元位相多様体の理論 [10] を振り返っておく. l_2 は可分 Hilbert 空間 $\{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty \mid \sum_n x_n^2 < \infty\}$ を表す.

定義 1.3. 位相的 l_2 -多様体とは, 局所的に l_2 と同相な可分距離化可能空間のことである.

l_2 -多様体の位相的特徴付けが知られており, 例えば, X が局所有限多面体ならば $X \times l_2$ は l_2 -多様体になる. また, 2つの l_2 -多様体はホモトピー同値ならば同相になる事が知られている.

T. Dobrowolski - H. Toruńczyk [7, 12] により, 位相群に対する位相的 l_2 -多様体の簡明な特徴付けが与えられている.

定理 1.1. 位相群 G について,

G が位相的 l_2 -多様体 $\iff G$ は可分, 非局所コンパクト, 完備距離化可能 ANR

ここで, ANR (Absolute Neighborhood Retract) 条件は写像に対する次の拡張条件である:

定義 1.4. 距離空間 X が ANR \iff 任意の “距離空間 Y の閉集合 B からの連続写像 $f: B \rightarrow X$ ” が B の近傍への拡張を持つ.

同相群予想. M^n がコンパクト多様体のとき, 同相群 $\mathcal{H}(M)$ は位相的 l_2 -多様体になる.

定理 1.1 より, この予想は “ $\mathcal{H}(M)$ は ANR” という主張と同等であり, [9] より $n = 1, 2$ のときは肯定的に解決されているが, $n \geq 3$ では, 以前として未解決である.

次の概念は, 空間とその部分空間の間の位相的關係を調べる上で役立つ.

定義 1.5. 距離空間 Y の部分空間 B が

(1) homotopy dense (HD) \iff ホモトピー $f_t : Y \rightarrow Y$ ($0 \leq t \leq 1$) で $f_0 = id_Y$,
 $f_t(Y) \subset B$ ($0 < t \leq 1$) を満たすものが存在する

(2) weak homotopy dense (WHD)

\iff 有限次元距離空間からの任意の写像 $f : X \rightarrow Y$ に対して, ホモトピー
 $f_t : X \rightarrow Y$ で $f_0 = f$, $f_t(X) \subset B$ ($0 < t \leq 1$) を満たすものが存在する.

Y が ANR のとき, 2 条件 HD と WHD は同値になる. B が Y において (W)HD のとき, 包含写像 $B \subset Y$ は評価付き (弱) ホモトピー同値写像であり, B と Y の間には強い幾何的なつながりがある. 例えば, B が Y において HD のとき, Y が ANR $\iff B$ が ANR.

2. コンパクト多様体の場合

この節では, M をコンパクト連結 n 次元多様体とする. 同相群 $\mathcal{H}(M)$ は空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M)$ に連続に作用する. von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理 [11] は, この作用が本質的に推移的である事を述べている.

定理 2.1. $\mu, \nu \in \mathcal{M}_g^\partial(M)$ かつ $\mu(M) = \nu(M)$ ならば, $h \in \mathcal{H}_\partial(M)_1$ で $h_*\mu = \nu$ となるものが存在する.

注意 2.1. この定理は, 多様体上の good Radon 測度の (同相写像に関する) 局所的一意性を意味している. すなわち, $\omega \in \mathcal{M}_g^\partial(M)$ とし, 任意の点 $p \in M$ の n 次元円板近傍 D で $\omega(\partial D) = 0$ となるものを選べば, $\omega|_D$ は \mathbb{R}^n の Lebesgue 測度 m の n 次元単位円板 \mathbb{B}^n への制限 $m|_{\mathbb{B}^n}$ の定数倍と位相同値になる.

この定理のパラメータ版は A. Fathi [8] によって得られている. $\omega \in \mathcal{M}_g^\partial(M)$ とし, 部分空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-reg})$ 上に制限して考える. P は任意の位相空間を表す.

定理 2.2. $\mu, \nu : P \rightarrow \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-reg})$ は連続写像で $\mu_p(M) = \nu_p(M)$ ($\forall p \in P$) とする. このとき, 連続写像 $h : P \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ が存在して, 各 $p \in P$ に対して次が成り立つ:

(1) $(h_p)_*\mu_p = \nu_p$, (2) $\mu_p = \nu_p$ ならば $h_p = id_M$.

群 $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg})$ は部分空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega)$ 上作用し, 次の写像を定める:

$$\pi_\omega : \mathcal{H}(M; \omega\text{-reg}) \rightarrow \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega), \quad \pi_\omega(h) = h_*\omega$$

系 2.1. 写像 π_ω の切断 $\sigma : \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega) \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ で $\sigma(\omega) = id_M$ となるものが存在する.

この系から, 群 $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg}) \supset \mathcal{H}(M; \omega)$ に関する次の結論が導かれる.

系 2.2. (1) $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg}) \cong \mathcal{H}(M; \omega) \times \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega)$.

(2) $\mathcal{H}(M; \omega)$ は $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg})$ の強変形レトラクト.

A. Fathi [8] は, さらに ω -regular 埋め込み に関する 変形定理 を証明し, 次の結果を得ている.

定理 2.3. (1) $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg})$ は 局所可縮 であり, $\mathcal{H}(M)$ において WHD.

(2) $\mathcal{H}(M; \omega)$ は 局所可縮 で, 包含写像 $\mathcal{H}(M; \omega) \subset \mathcal{H}(M)$ は 弱ホモトピー同値.

$n = 2$ のとき, $\mathcal{H}(M)$ は ANR になるので, 次の最終的な結論を得る [8] cf. [15].

系 2.3. $n = 2$ のとき

(1) $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg})$ は ANR であり, $\mathcal{H}(M)$ において HD.

(2) $\mathcal{H}(M; \omega)$ は 位相的 ℓ_2 -多様体 であり, $\mathcal{H}(M)$ の 強変形レトラクト になる.

◦ $\mathcal{H}(M)_0$ が コンパクト多面体 P の ホモトピー型 を持てば $\mathcal{H}(M; \omega)_0 \cong P \times \ell_2$.

同相群予想 が 肯定的に解決されれば, 系 2.3 は $n \geq 3$ でも成立することになる.

3. 非コンパクト多様体の場合

この節では, M を 非コンパクト連結 n 次元多様体 とする.

3.1. End コンパクト化. (cf. [1, 4])

M が 非コンパクトの場合には, M の end における 測度の振る舞いを考慮する必要がある. この小節では, M の end コンパクト化 に関する基本事項を説明する. 一般に, 空間 X に対して, $\mathcal{K}(X)$ は X の コンパクト部分集合 全体の族 を表し, また, $\mathcal{C}(X)$ は X の 連結成分全体の集合 を表す.

定義 3.1. M の end e は, 各 $K \in \mathcal{K}(M)$ にある連結成分 $e(K) \in \mathcal{C}(M - K)$ を 対応させる写像 e で, $K_1 \subset K_2$ ならば $e(K_1) \supset e(K_2)$ を満たすものとして定義される.

M の end 全体の集合 を E_M で表す. M の end コンパクト化 とは 集合 $\overline{M} = M \cup E_M$ に次の条件で定義される位相を与えた空間である:

(i) M は \overline{M} の 開部分空間である.

(ii) end $e \in E_M$ の 基本開近傍系は次で与えられる:

$$N(e, K) = e(K) \cup \{e' \in E_M \mid e'(K) = e(K)\} \quad (K \in \mathcal{K}(M)).$$

\overline{M} は 連結, 局所連結, コンパクト, 距離化可能 空間であり, M は \overline{M} の 稠密開集合, E_M は \overline{M} の コンパクト 0 次元 部分空間 である.

各 $h \in \mathcal{H}(M)$ は 自然な拡張 $\bar{h} \in \mathcal{H}(\overline{M})$ を持つ. 各 $e \in E_M$ に対して $\bar{h}(e) \in E_M$ は 次で定まる: $\bar{h}(e)(K) = h(e(h^{-1}(K)))$ ($K \in \mathcal{K}(M)$).

写像 $\mathcal{H}(M) \rightarrow \mathcal{H}(\overline{M}) : h \mapsto \bar{h}$ は連続な群準同型となる. $\mathcal{H}(M)$ の部分群 G に対して

$$G_{E_M} = \{h \in G \mid \bar{h}|_{E_M} = id_{E_M}\}$$

と定義する. E_M は 0 次元だから, $G_0 = (G_{E_M})_0$ となる.

$\mathcal{B}_c(M) = \{C \in \mathcal{B}(M) \mid \text{Fr}_M C : \text{コンパクト}\}$ とする. 各 $C \in \mathcal{B}_c(M)$ に対して

$$E_C = \{e \in E_M \mid e(K) \subset C \ (\exists K \in \mathcal{K}(M))\}, \quad \overline{C} = cl_M C \cup E_C \subset \overline{M} \quad \text{と置く.}$$

このとき (a) E_C は E_M の開かつ閉集合であり, (b) \overline{C} は $cl_M C$ の end コンパクト化と同一視される. さらに, (c) $C, D \in \mathcal{B}_c(M)$ に対して

$$E_C = E_D \iff C \Delta D = (C - D) \cup (D - C) \text{ が } M \text{ において 相対コンパクト.}$$

$\omega \in \mathcal{M}(M)$ とする.

定義 3.2. (1) $e \in E_M$ が ω -有限 \iff ある $K \in \mathcal{K}(M)$ に対して $\omega(e(K)) < \infty$.

$$(2) E_M^\omega = \{e \in E_M \mid e : \omega\text{-有限}\} \quad \overline{M}^\omega = M \cup E_M^\omega \subset \overline{M}$$

E_M^ω は E_M の開集合であり, $C \in \mathcal{B}_c(M)$ に対して $E_C \subset E_M^\omega \iff \omega(C) < \infty$ である.

3.2. A. Fathi の結果の 非コンパクト多様体 への拡張.

R. Berlanga [2, 3, 4] は, 第 2 節で述べた von Neumann-Oxtoby-Ulam の定理 及び A. Fathi の結果 を 非コンパクト多様体の場合に拡張している. まず, 同相群の作用の推移性 に関しては次が成り立つ [2]:

定理 3.1. $\mu, \nu \in \mathcal{M}_g^\partial(M)$ かつ $\mu(M) = \nu(M)$, $E_M^\mu = E_M^\nu$ ならば $h \in \mathcal{H}_\partial(M)_1$ で $h_*\mu = \nu$ となるものが存在する.

このパラメータ版を定式化するためには, さらに記号を導入する必要がある. $\omega \in \mathcal{M}_g^\partial(M)$ とする.

定義 3.3. (1) $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg}) = \{\mu \in \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-reg}) \mid E_M^\mu = E_M^\omega\}$

$$\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega) = \{\mu \in \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg}) \mid \mu(M) = \omega(M)\}$$

$$(2) \mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg}) = \{h \in \mathcal{H}(M; \omega\text{-reg}) \mid \bar{h}(E_M^\omega) = E_M^\omega\}$$

空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg})$ 上の位相に関する考察も必要である. $C \in \mathcal{B}_c(M)$ で $\omega(\text{Fr}_M C) = 0$, $E_C \subset E_M^\omega$ のとき, 次の関数が定義される:

$$\Phi_C : \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg}) \longrightarrow \mathbb{R} : \Phi_C(\mu) = \mu(C).$$

弱位相の下では, C が 非コンパクト のとき, この関数は連続にならない. R. Berlanga [4] は, この問題を克服するために, finite-ends 弱位相 と呼ぶ より強い位相を導入している.

定義 3.4. (1) $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg})$ 上の finite-ends 弱位相 ew とは, コンパクト台を持つ 任意の連続関数 $f : \overline{M}^\omega \rightarrow \mathbb{R}$ に対して 次の関数が連続になるような 最も弱い位相である:

$$\Phi_f : \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg}) \longrightarrow \mathbb{R} : \Phi_f(\mu) = \int_M f d\mu.$$

(2) 位相 ew を与えた 空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg})$ を $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg})_{ew}$ で表す.

群 $\mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg})$ は 空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg})_{ew}$ 及び 部分空間 $\mathcal{M}_g^\partial(M, \omega)_{ew}$ に $h \cdot \mu = h_*\mu$ により連続に作用する.

定理 3.2. $\mu, \nu : P \rightarrow \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-e-reg})_{ew}$ は 連続写像 で $\mu_p(M) = \nu_p(M)$ ($\forall p \in P$) とする. このとき, 連続写像 $h : P \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ が存在して, 各 $p \in P$ に対して次が成り立つ:

$$(1) (h_p)_*\mu_p = \nu_p, \quad (2) \mu_p = \nu_p \text{ ならば } h_p = id_M.$$

この定理は、写像 $\pi_\omega : \mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg}) \rightarrow \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega)_{ew}$, $\pi_\omega(h) = h_*\omega$ に関して次の帰結を持つ。

系 3.1. 写像 π_ω の切断 $\sigma : \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega)_{ew} \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ で $\sigma(\omega) = id_M$ となるものが存在する。

この系から、群 $\mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg}) \supset \mathcal{H}(M; \omega)$ に関して、次の結論が得られる。

系 3.2. (1) $\mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg}) \cong \mathcal{H}(M; \omega) \times \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega)_{ew}$.

(2) $\mathcal{H}(M; \omega)$ は $\mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg})$ の強変形レトラクト。

$n \geq 3$ では、群 $\mathcal{H}(M) \supset \mathcal{H}(M; \omega\text{-e-reg})$ 及び $\mathcal{H}(M) \supset \mathcal{H}(M; \omega)$ の関係について、定理 2.3 の様な一般的な結果は得られていない。しかし、 $n = 2$ では、筆者の結果 [13, 14] を用いて、系 2.3 の非コンパクト多様体への拡張が得られる [15]。

定理 3.3. $n = 2$ のとき

(1) $\mathcal{H}(M; \omega\text{-reg})_0$ は ANR であり、 $\mathcal{H}(M)_0$ において HD.

(2) $\mathcal{H}(M; \omega)_0$ は位相的 l_2 -多様体であり、 $\mathcal{H}(M)_0$ の強変形レトラクトになる。

$\mathcal{H}(M)_0$ のホモトピー型は [13] によって分類されており、 $\mathcal{H}(M; \omega)_0$ は 1 点 or \mathbb{S}^1 のホモトピー型を持つことになる。従って、 $\mathcal{H}(M; \omega)_0 \cong l_2$ or $\mathbb{S}^1 \times l_2$ となる。

補足 3.1. 順極限位相の下での群 $\mathcal{H}^c(M; \omega)$ の位相的性質は [4, 5] で考察されている。

3.3. End charge 準同型.

S. R. Alpern - V. S. Prasad [1] は、非コンパクト多様体上で測度保存同相写像の ergodicity を議論するために、end charge 準同型を導入した。

多様体 M の end 空間 E_M の開かつ閉部分集合全体の成す有限加法族を記号 $\mathcal{Q}(E_M)$ で表す。

定義 3.5. M の end charge とは、有限加法族 $\mathcal{Q}(E_M)$ 上の有限加法的な符号付き測度 c , すなわち、次の条件を満たす関数 $c : \mathcal{Q}(E_M) \rightarrow \mathbb{R}$ のことである:

$$c(F \cup G) = c(F) + c(G) \text{ for } F, G \in \mathcal{Q}(E_M) \text{ with } F \cap G = \emptyset.$$

M の end charge 全体の集合 $\mathcal{S}(M)$ は弱位相 (or 積位相) の下で自然に実位相線形空間になる。ここで、弱位相は次の条件を満たす最も弱い位相である:

任意の $F \in \mathcal{Q}(E_M)$ に対して次の関数は連続: $\Psi_F : \mathcal{S}(M) \rightarrow \mathbb{R} : \Psi_F(c) = c(F)$.

$\omega \in \mathcal{M}_g^\partial(M)$ とする。 $\mathcal{S}(M)$ の線形部分空間

$$\mathcal{S}(M, \omega) = \{c \in \mathcal{S}(M) \mid \text{(i) } c(F) = 0 \text{ } (\forall F \in \mathcal{Q}(E_M) \text{ with } F \subset E_M^\omega), \text{ (ii) } c(E_M) = 0\}$$

が定まる。

定義 3.6. 各 $h \in \mathcal{H}_{E_M}(M; \omega)$ に対して end charge $c_h^\omega \in \mathcal{S}(M, \omega)$ を次で定義する:

(i) 任意の $F \in \mathcal{Q}(E_M)$ に対して、 $C \in \mathcal{B}_c(M)$ で $E_C = F$ となるものが存在する。

- (ii) $\bar{h}|_{E_M} = id$ だから, $E_C = E_{h(C)}$ で $C\Delta h(C)$ は M において相対コンパクトである. 従って, $\omega(C - h(C)), \omega(h(C) - C) < \infty$ であり, 次の量を考えることが出来る:

$$c_h^\omega(F) = \omega(C - h(C)) - \omega(h(C) - C) \in \mathbb{R}.$$

- (iii) h は ω を保存するから, この定義は C の選び方に依らない.

命題 3.1. 写像 $c^\omega : \mathcal{H}_{E_M}(M, \omega) \longrightarrow \mathcal{S}(M, \omega)$ は連続な 群準同型 になる [1].

量 $c_h^\omega(F)$ は h によって C の中に, 最終的には $\text{end } F = E_C$ に流れ込む (符号付き) 全 ω -体積 である. 従って, $\text{end charge } c_h^\omega$ は h によって定まる 各 end に向かう体積移動を測っている. $\mathcal{S}(M, \omega)$ は end に向かう体積移動 をパラメータ付ける空間 であり, 写像 c^ω は 各 $h \in \mathcal{H}_{E_M}(M; \omega)$ から end に向かう体積移動 のデータ を取り出している.

筆者は [16] において, この end に向かう体積移動のデータ が 測度保存同相写像 で 連続的に実現できる事を示した.

定理 3.4. $\mu : P \rightarrow \mathcal{M}_g^\partial(M; \omega\text{-reg}), a : P \rightarrow \mathcal{S}(M)$ は連続写像で $a_p \in \mathcal{S}(M, \mu_p) (\forall p \in P)$ を満たすとする. このとき 連続写像 $h : P \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ が存在して, 各 $p \in P$ に対して 次の条件を満たす:

$$(1) h_p \in \mathcal{H}_\partial(M; \mu_p)_1, \quad (2) c_{h_p}^{\mu_p} = a_p, \quad (3) a_p = 0 \text{ ならば } h_p = id_M.$$

系 3.3. 写像 c^ω の連続な切断 $s : \mathcal{S}(M, \omega) \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega)_1$ で $s(0) = id_M$ となるものが存在する.

群 $\mathcal{H}(M; \omega)$ の研究の観点からは, 特に, 準同型 c^ω の核 $\text{Ker } c^\omega$ に関心が置かれる. 条件 $c_h^\omega = 0$ は, h の コンパクト部分を残りの部分と分離できる事を意味する重要な条件であり, 次の包含関係を得る:

$$\mathcal{H}_{E_M}(M; \omega) \supset \text{Ker } c^\omega \supset \mathcal{H}^c(M; \omega).$$

切断 s と 底空間 $\mathcal{S}(M, \omega)$ の可縮性 を用いて, 群 $\mathcal{H}_{E_M}(M; \omega) \supset \text{Ker } c^\omega$ の間の関係について, 次の結論が得られる.

系 3.4. (1) $\mathcal{H}_{E_M}(M; \omega) \cong \text{Ker } c^\omega \times \mathcal{S}(M, \omega)$.
(2) $\text{Ker } c^\omega$ は $\mathcal{H}_{E_M}(M; \omega)$ の強変形レトラクトになる.

問題 2. 群 $\text{Ker } c^\omega \supset \mathcal{H}^c(M; \omega)$ の間の関係を明らかにせよ.

[1] における議論から, 部分群 $\mathcal{H}^c(M; \omega)_1$ は $(\text{Ker } c^\omega)_1$ において稠密であることがわかる. 筆者は $n = 2$ の場合に, この問題を考察している (cf. T. Yagasaki, Bundle Theorem for measure preserving homeomorphisms in 2-Manifolds, 数理解析研, 講究録 1569 (Sep. 2007), pp 116–122).

3.4. 定理 3.4 の証明について.

同相写像による 体積の移動量 を測るために 次の量を用いる.

記号 3.1. $\omega \in \mathcal{M}(M)$ と $A, B \in \mathcal{B}(M)$ が $\omega(A\Delta B) < \infty$ を満たすとき, 次の量が定まる:

$$J^\omega(A, B) = \omega(A - B) - \omega(B - A) \in \mathbb{R}.$$

定理 3.4 の証明の概略.

- (1) 写像定理 [3, 6] により, 定理 3.4 の証明は 次の場合に帰着される:

$$M^n = [0, 1]^n - E \quad (E \text{ は } \partial[0, 1]^n \text{ の } 0 \text{ 次元 コンパクト 部分集合})$$

- (2) M の コンパクト連結 n 次元 部分多様体 の列 $K_1 \subset L_1 \subset \cdots \subset K_i \subset L_i \subset \cdots$
写像の列 $f^i, g^i : P \rightarrow \mathcal{H}_\partial^c(M; \omega\text{-reg})_1$

で, 適当な収束条件 及び 次の条件 を満たすものを 帰納的に構成する:

- (i) $f_*^i \mu = g_*^{i-1} \mu$ on K_i , $g_*^i \mu = f_*^i \mu$ on L_i .
(ii) $J^\mu((f^i)^{-1}(A), (g^{i-1})^{-1}(A)) = a(E_A)$ ($A \in \mathcal{C}(cl_M(M - K_i))$).
 $J^\mu((f^i)^{-1}(B), (g^i)^{-1}(B)) = a(E_B)$ ($B \in \mathcal{C}(cl_M(M - L_i))$).

- (3) 列 f^i, g^i は ある写像 $f, g : P \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ に収束し, 次の条件を満たす:

- (i) $f_* \mu = g_* \mu$
(ii) $f^{-1}(A) = (f^i)^{-1}(A)$, $g^{-1}(A) = (g^{i-1})^{-1}(A)$ ($A \in \mathcal{C}(cl_M(M - K_i))$).

- (4) 写像 $h = g^{-1}f : P \rightarrow \mathcal{H}_\partial(M; \omega\text{-reg})_1$ は 定理の条件 を満たす.

注意 3.1. 上の証明で 2 つの列 f^i, g^i を用いるのは, 収束を保証するためである. 1 つの列 h^i で 一方的に体積を移動すると, 極限 $h = \lim_{i \rightarrow \infty} h^i$ の存在が保証されない.

3.5. 最後に.

筆者は [17] において, 体積保存微分同相写像に関して 定理 3.2, 3.4 に対応する結果を得ている. この論文では, end に向かう体積移動を実現する一般的な命題が示され, 2 つの定理は, その系として導かれている.

問題 3. シンプレクティック微分同相写像に関して類似の議論は可能か ?

REFERENCES

- [1] S. R. Alpern and V.S.Prasad, *Typical dynamics of volume-preserving homeomorphisms*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, (2001).
[2] R. Berlanga and D.B.A.Epstein, Measures on sigma-compact manifolds and their equivalence under homeomorphism, *J. London Math. Soc. (2)*, 27 (1983) 63 - 74.
[3] R. Berlanga, A mapping theorem for topological sigma-compact manifolds, *Compositio Math.*, 63 (1987) 209 - 216.
[4] R. Berlanga, Groups of measure-preserving homeomorphisms as deformation retracts, *J. London Math. Soc. (2)*, 68 (2003) 241 - 254.
[5] R. Berlanga, Homotopy equivalence and groups of measure-preserving homeomorphisms, *Canad. Math. Bull.*, 49 no. 3 (2006) 337 - 346.
[6] M. Brown, A mapping theorem for untriangulated manifolds, *Topology of 3-manifolds and related topics* (ed. M.K.Fort), Prentice Hall, Englewood Cliffs (1963) pp.92 - 94.
[7] T. Dobrowolski and H. Toruńczyk, Separable complete ANR's admitting a group structure are Hilbert manifolds, *Topology and its Applications*, **12** (1981) 229-235.

- [8] A. Fathi, Structures of the group of homeomorphisms preserving a good measure on a compact manifold, *Ann. scient. Éc. Norm. Sup. (4)*, 13 (1980) 45 - 93.
- [9] R. Luke and W. K. Mason, The space of homeomorphisms on a compact two - manifold is an absolute neighborhood retract, *Trans. Amer. Math. Soc.* **164** (1972) 275–285.
- [10] J. van Mill, *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland, Math. Library **43** Elsevier Sci. Publ. B.V., Amsterdam, 1989.
- [11] J. Oxtoby and S. Ulam, Measure preserving homeomorphisms and metrical transitivity, *Ann. of Math.*, 42 (1941) 874 - 920.
- [12] H. Toruńczyk, Characterizing Hilbert space topology, *Fund. Math.* **111** (1981), 247–262.
- [13] T. Yagasaki, Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds, *Topology and its Applications*, **108** (2000) 123–136.
- [14] T. Yagasaki, The groups of PL and Lipschitz homeomorphisms of noncompact 2-manifolds, *Bulletin of the Polish Academy of Sciences, Math.* **51(4)** (2003) 445–466.
- [15] T. Yagasaki, Groups of measure-preserving homeomorphisms of noncompact 2-manifolds, *Topology and its Applications*, 154 (2007) 1521 - 1531.
- [16] T. Yagasaki, Measure-preserving homeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends, *Fund. Math.*, 197 (2007) 271 - 287.
- [17] T. Yagasaki, Groups of volume-preserving diffeomorphisms of noncompact manifolds and mass flow toward ends, preprint (arXiv math.GT: 0805.3552).

DIVISION OF MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE AND TECHNOLOGY,
KYOTO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, KYOTO, 606-8585, JAPAN
E-mail address: yagasaki@kit.ac.jp

Kontsevich のグラフ複体による高次元球面バンドルの特性類

渡邊 忠之*

$\text{Diff}(M)$ で可微分多様体 M の自己微分同相の群を表すこととし、これに Whitney 位相を入れて位相群と思う。本研究ですることは、有理ホモトピー群 $\pi_i(\text{BDiff}(S^d)) \otimes \mathbb{Q} = \pi_{i-1}(\text{Diff}(S^d)) \otimes \mathbb{Q}$ の構造を、Kontsevich の特性類というものを使って調べることである。Kontsevich の特性類とは、3次元における Chern–Simons 摂動理論の高次元への一般化として構成された、(ホモロジー)球面をファイバーとするファイバーバンドルの特性類である。([K]) Kontsevich の特性類の構成には、「グラフ複体」と、「配置空間積分」の2つの概念を用いる。ファイバー上にたくさん点を配置して、それらへの $\text{Diff}(M)$ の作用を調べるのである。

本研究では、multilinear construction という方法により $\pi_i(\text{BDiff}(S^d)) \otimes \mathbb{Q}$ の元を組織的に構成する。そのようにして構成された元を Kontsevich の特性類で評価することにより、 $\pi_i(\text{BDiff}(S^d)) \otimes \mathbb{Q}$ の中に非自明な部分空間が豊富に存在していることを発見した、というのが主結果である。本稿ではその statement と、構成法の概略を与える。

*東京大学大学院数理科学研究科

1 Kontsevich's characteristic classes for smooth S^d -bundles

初めに、Kontsevich による特性類の構成法を概観する。

1.1 Characteristic cycles in the graph complex

Graph complex

グラフ複体 $(\mathcal{G}_\bullet = \bigoplus_{n,m} \mathcal{G}_{n,m}, d : \mathcal{G}_{n,m} \rightarrow \mathcal{G}_{n-1,m-1})$ は、次のように定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{n,m} &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{Q}\{(\Gamma, \text{ori}); \\ &\Gamma : \text{finite connected graph with valence} \geq 3, \\ &\quad n \text{ vertices, } m \text{ edges,} \\ &\quad \text{vertices labeled,} \\ &\text{ori} : \text{ori of } \mathbb{R}^{\{\text{edges of } \Gamma\}} \oplus H^1(\Gamma; \mathbb{R})\} / (\Gamma, -\text{ori}) \sim -(\Gamma, \text{ori}) \end{aligned}$$

$$d(\Gamma, \text{ori}) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{e: \text{edge of } \Gamma} (\Gamma/e, \text{induced ori})$$

ここで、 $\mathbb{Q}X$ は集合 X が生成する \mathbb{Q} 上のベクトル空間、 Γ/e は Γ の辺 e を縮約したものを表し、その上に誘導される向きは、 $i(\partial/\partial e)(de_1 \wedge \cdots \wedge de_m) \wedge (\text{ori of } H^1(\Gamma; \mathbb{R}) = H^1(\Gamma/e; \mathbb{R}))$ であるとする。等式 $i(X)i(Y) + i(Y)i(X) = 0$ により $d \circ d = 0$ が言えて、したがって (\mathcal{G}_\bullet, d) は実際に複体をなす。

(Characteristic) cycles in $\mathcal{G}_{n,m}$

$\mathcal{G}_{n,m}$ の (d) -サイクル、すなわち、 $\gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ であって、サイクル条件

$$d\gamma = 0$$

を満たすものが、特性類の構成のために必要になる。条件 $d\gamma = 0$ をもう少し具体的に書くならば、 $\gamma = \sum_{\Gamma=(\Gamma, \text{ori}) \in \mathcal{G}_{n,m}} a_\Gamma \Gamma$, $a_\Gamma \in \mathbb{Q}$ と書くとき、 $d\gamma = 0 \Leftrightarrow \sum_{\Gamma=(\Gamma, \text{ori}) \in \mathcal{G}_{n,m}} a_\Gamma d\Gamma = 0$ である。これを d の定義に基づいて書き換えると、係数 a_Γ の間の線形関係式の系列 **(*)-関係式** と呼ぶことにする) が得られる。

Example 1.1. 3-valent graph の場合、すなわち、 $(n, m) = (2p, 3p)$ のとき、**(*)-関係式** は (適当に向きを入れると) 次の形となる。

$$a_{\curvearrowright} - a_{\curvearrowleft} + a_{\times} = 0.$$

これはブラケットを樹状の図で表す対応により、Lie 代数における **Jacobi identity** が対応する。4-valent 以上の頂点を持つ場合は、 A_∞ 代数における **higher associativity relation** が出てくる。

1.2 Configuration space integral

次に、グラフ複体のサイクルに球面バンドルの情報を代入して、「枠付」球面バンドルの特性類が定義される。ここで枠付というのは、ファイバー上の固定点 ∞ の外部 $S^d \setminus \{\infty\}$ 上の接枠が与えられている、ということである。構造群は、 ∞ を含む小さいディスク $U_\infty \subset S^d$ に関して、 $\text{Diff}(S^d, U_\infty)$ であるとする。次のよく知られたホモトピー同値 $\text{Diff}(S^d) \simeq O_{d+1} \times \text{Diff}(S^d, U_\infty)$ により、これは真に非線形な成分への制限とみなせる。

Compactification of configuration spaces and family of them

ファイバー上の配置空間

$$C_n(S^d, \infty) = \{(x_1, \dots, x_n) \in (S^d \setminus \infty)^{\times n}; x_i \neq x_j, (i \neq j)\} = (S^d)^{\times n} - \Sigma$$

は、 $(S^d)^{\times n}$ の non-compact な部分多様体である。後の都合のため (積分の収束性等) に、 $C_n(S^d, \infty)$ を、Fulton–MacPherson–Kontsevich の方法でコンパクト化する ([K]) :

$$\overline{C}_n(S^d, \infty) = \text{Bl}_\Sigma((S^d)^{\times n})$$

このコンパクト化は、 Σ の stratification の構造に沿って、 Σ を「極限の配置」の集合で置換えることを繰り返して得られる。そうすると、新たに付加した極限の集合を境界に持つ多様体になる。

次にこれの族を考える。すなわち、 S^d -バンドル $\pi : E \rightarrow B$ に対し、構造群 $\text{Diff}(S^d, U_\infty)$ に関する同伴 $\overline{C}_n(S^d, \infty)$ -バンドルを、

$$\overline{C}_n(\pi) : E\overline{C}_n(\pi) \rightarrow B$$

とする。 $E\overline{C}_2(\pi)$ の中には、その境界の近く (特異集合の近く) では枠によって標準的に決まる振る舞いをする、ある閉微分 $(d-1)$ -形式 ω が存在し (propagator と呼ばれる)、一点の周りをもう一点が何回回っているか (S^{d-1} 分) を測る形式となるようにできる。ただし、 ω のとり方は一意的でない。

Map from graph complex to de Rham complex

グラフの頂点の labeling は、頂点の集合と S^d 上に配置された点との間の全単射を定める。この全単射とグラフの向きにより、グラフの各辺 e は射影 $p_e : E\overline{C}_n(\pi) \rightarrow E\overline{C}_2(\pi)$ を定める。 $\omega_e \stackrel{\text{def}}{=} p_e^* \omega$ とすると、線形写像

$$\Phi : \mathcal{G}_{n,m} \rightarrow \Omega_{\text{dR}}^{m(d-1)}(E\overline{C}_n(\pi))$$

が $\Phi(\Gamma) \stackrel{\text{def}}{=} \bigwedge_e \omega_e$ により定義される。さらに Φ とファイバー積分 $\int_{\text{Fiber}(\overline{C}_n(\pi))} : \Omega_{\text{dR}}^*(E\overline{C}_n(\pi)) \rightarrow \Omega_{\text{dR}}^{*-nd}(B)$ の合成により、線形写像

$$I : \mathcal{G}_{n,m} \rightarrow \Omega_{\text{dR}}^{m(d-1)-nd}(B)$$

が定義される。ここで、ファイバーの向きは、グラフの向きを使って標準的に定まる。

Theorem 1.2 (Kontsevich). (i) I は複体の射である。すなわち、 $dI = Id$ を満たす。特に、もし $\gamma \in \mathcal{G}_{n,m}$ が $d\gamma = 0$ を満たせば、 $dI(\gamma) = 0$ である。

(ii) $d\gamma = 0$ の時、 $[I(\gamma)] \in H^{m(d-1)-nd}(B; \mathbb{R})$ は *well defined* である。すなわち、 ω のとり方によらない (境界における振舞いは固定したままで)。また、 $[I(\gamma)]$ は枠付バンドルの写像に関して自然である。

証明のスケッチ. (i) のみ解説する。(ii) も類似の議論で示せる。

族の Stokes 公式 : $d \int_{\text{Fiber}} \alpha = \int_{\text{Fiber}} d\alpha \pm \int_{\partial \text{Fiber}} \alpha$ により、

$$dI(\Gamma) = \pm \int_{\partial \text{Fiber}(\overline{C}_n(\pi))} \Phi(\Gamma)$$

となる。ファイバーの境界は、特異集合 Σ の stratification に対応する stratification を持ち、上の積分に寄与する部分のうちで、3 点以上が 1 点に一致する特異点の集合に対応する部分上には、ある involutive な対称性があり、その対称性によりその上での積分がキャンセルする。したがって、2 点の一致の特異集合に対応する部分のみが寄与し、上の積分は、グラフの一辺を縮約したものの積分の和になる。それらを向きに注意して書き下すと、ちょうど $I(d\Gamma)$ になる。 \square

2 Multilinear construction of smooth bundles

M をコンパクトな可微分多様体、 $A_1, \dots, A_k \subset M$ を余次元 1 の disjoint な部分多様体で、法バンドルが自明なものとする。Emb'(A_1 \cup \dots \cup A_k, M) をそのような条件を満たす埋込みの空間とすると、多重線形写像

$$\begin{aligned} S : \pi_0(\text{Emb}'(A_1 \cup \dots \cup A_k, M)) \times H_{i_1}(\text{Diff}_0(A_1)) \times \dots \times H_{i_k}(\text{Diff}_0(A_k)) \\ \rightarrow H_{i_1 + \dots + i_k}(\text{BDiff}(M)) \end{aligned}$$

を定義する：

1. 各 $\text{Diff}_0(A_j)$ はある CW 複体 X_j にホモトピー同値であり、 $f_j : X_j \rightarrow \text{Diff}_0(A_j)$ をホモトピー同値とする。 $c_j : D^{i_j} \xrightarrow{\cong} e_j^{i_j} \subset X_j$ を i_j -次元セルとすると、 $f_j \circ c_j : D^{i_j} \rightarrow \text{Diff}_0(A_j)$ により微分同相の i_j -パラメータ族を得る。
2. $A_j \subset M$ の法バンドルが自明なのであるから、 A_j に沿って M を切り開いて、 A_j の近傍を二つの部分に分けられる。切り口の 2 枚の境界を、identity で貼り合わせると元の M になるところを、別の微分同相写像 $\varphi \in \text{Diff}_0(A_j)$ によって貼り合わせると、 M に微分同相な多様体を得られる。 i_j -パラメータ族 $\varphi_j = f_j \circ c_j : D^{i_j} \rightarrow \text{Diff}_0(A_j)$ によって貼り合わせれば M と微分同相な多様体の i_j -パラメータ族 (ファイバーバンドル) が対応する。
3. これを全ての j に関して実行すると、 $D^{i_1} \times \dots \times D^{i_k}$ 上の M -バンドルを得る。

この対応は、ホモロークなサイクルの組をホモロークなサイクルに移し、well-defined である。

Example 2.1. $M = \Sigma_g$, $\gamma : A_1 = S^1 \hookrightarrow \Sigma_g$ 単純閉曲線とする。このとき、上の構成により準同型写像 $S(\gamma, \cdot) : \pi_1(\text{Diff}_0(A_1)) \rightarrow \pi_1(\text{BDiff}(\Sigma_g))$ を得る。 $\pi_1(\text{Diff}_0(A_1)) \cong \pi_1(SO_2) \cong \mathbb{Z}$ の生成元の像は、 γ に沿った Dehn twist である。

Example 2.2. $M = S^9$, $A_1 \cong A_2 \cong S^4 \times S^4$, $\gamma : A_1 \cup A_2 \hookrightarrow S^9$ を、その像が Hopf link $S^4 \cup S^4 \hookrightarrow S^9$ の管状近傍の境界に一致するようにとる。 $S^4 \times S^4$ を、直積から決まる S^4 上の自明な線形 S^4 -バンドルとみなし、そのバンドル自己同型を考えると、それらは部分群 $\Omega^4 SO_5 \subset \text{Diff}_0(S^4 \times S^4)$ に属する。そのような微分同相の 3-パラメータ族を考えることにより、双線形写像

$$S(\gamma, \cdot, \cdot) : \pi_3(\Omega^4 SO_5) \times \pi_3(\Omega^4 SO_5) \rightarrow \pi_6(\text{BDiff}(S^9))$$

を得る。ここで、 SO_5 が作用するのは、Hopf link の各成分の normal sphere の方である。これは Antonelli–Burghelca–Kahn の構成というものの特別な場合になっている。

Example 2.3. $M = S^7$, $A_1 \cong A_2 \cong (S^3 \times S^3)^{\#3}$ 。このとき、 S は次の形である。

$$S : \pi_0(\text{Emb}'(A_1 \cup A_2, S^7)) \times H_i(\text{Diff}_0(A_1)) \times H_j(\text{Diff}_0(A_2)) \rightarrow H_{i+j}(\text{BDiff}(S^7))$$

葉廣氏のクラスパー手術のファイバーバンドルに対するアナロークを考えることにより、この場合には $\pi_2(\text{Diff}_0(A_j))$ の非自明な元を構成できる。それを用いて、 $H_4(\text{BDiff}(S^7))$

の元を得る。ここは次の定理で必要な重要なところであるが、長くなるので本稿では述べない。

Theorem 2.4. *Multilinear construction* は、 $\pi_{n(8m-4)}(\text{BDiff}(S^{8m-1})) \otimes \mathbb{Q}$ の元を多数構成し、特に、次の不等式が成り立つ：

$$\dim \pi_{n(8m-4)}(\text{BDiff}(S^{8m-1})) \otimes \mathbb{Q} \geq \dim \mathcal{A}_{2n,3n}$$

ここで、 $\mathcal{A}_{2n,3n} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{G}_{2n,3n}/(*\text{-relation, label changes})$ である。

Remark 2.5. 1. 有理ホモトピーを、有理ホモロジーに変えると、 $d = 8m - 1$ という次元の制限は、 $d = 4m - 1$ へ拡げることができる。しかしこれは技術的な問題から来るもので、有理ホモトピーのままでも拡げられる可能性はある。

2. この定理の基となる、対応する結果が3次元多様体論において既に知られており、上の定理はある意味でその高次元への一般化を与えている： $\mathbb{Q}\{\text{homology } S^3\}$ は filtration $\mathbb{Q}\{HS^3\} = \mathcal{M}_0 \supset \mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_2 \supset \dots$ で $\mathcal{M}_d/\mathcal{M}_{d+1}$ が有限次元であるものを持つことが知られている。(大槻 filtration) これに関して、次が成り立つ。

Theorem 2.6 (Kuperberg–Thurston). (a) $Q(\mathcal{M}_{3n}/\mathcal{M}_{3n+1}) \cong \mathcal{A}_{2n,3n}$ (Q : indecomposables)

(b) 上の isomorphism は、Kontsevich の配置空間積分不変量により与えられる。

(c) その inverse は葉廣氏の “graph clasper surgery” により与えられる。

同じ結果 (a) は Kuperberg–Thurston よりも前に、Le–村上–大槻の LMO 不変量を使って Le により示されている。ここでは配置空間を使った構成でその別証明が与えられる、というところがポイントである。

参考文献

- [K] M. Kontsevich, *Feynman Diagrams and Low-Dimensional Topology*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Birkhäuser, 1994, 97–121.
- [W1] T. Watanabe, *On Kontsevich’s characteristic classes for higher dimensional sphere bundles I: The simplest class*, to appear in Math. Zeit.
- [W2] T. Watanabe, *On Kontsevich’s characteristic classes for higher dimensional sphere bundles II*, in preparation.

穴あき円板上の同相写像の一般レフシェッツ数について

鳴門教育大学 松岡 隆
matsuoka@naruto-u.ac.jp

1. はじめに

コンパクト多面体を自分自身に移す連続写像の不動点を調べるために開発された一般 Lefschetz 数の理論と、穴あき円板上の力学系への応用について述べる。

最もよく知られた不動点定理である Lefschetz の不動点定理は、ホモロジーの情報で定まる Lefschetz 数が、不動点集合の近傍における写像の様子を表わすことを主張するものである。1930~1940 年代に、Reidemeister と Wecken[11, 13] は、Nielsen 数の定義に現れるアイデアを用いて、基本群の情報も考え合わせることでより Lefschetz 数の概念を精密化し、一般 Lefschetz 数と呼ばれるホモトピー不変量を構成した。一般 Lefschetz 数は、不動点近傍での写像の様子のみならず、各不動点の大域的な振る舞いの特徴の違いを基本群の元として捉えることができるものである。従って理論的には、一般 Lefschetz 数は Lefschetz 数よりもはるかに深い情報を含んでいるが、その計算は難しく、現実には不動点や周期点を調べるために応用することは容易なことではない。実際、誕生以来約 70 年経った今でも、ほとんど組織的な計算はなされていない状況にある。

本講演では、穴あき曲面上の同相写像の場合に、一般 Lefschetz 数の計算を行った結果と、それを用いて得た Thurston 標準写像の周期点の構造、および写像の Nielsen-Thurston 分類に関する結果を紹介する。

1. Lefschetz 数と不動点指数

X をコンパクト連結多面体とし、 $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする。ホモロジー群は \mathbb{Q} 係数とする。Lefschetz 数 $L(f) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr} [f_{*q}: H_q(X) \rightarrow H_q(X)]$ が 0 でないなら不動点が存在することを主張するのが Lefschetz の不動点定理である。この Lefschetz 数を一般化した概念として不動点指数がある。Fix(f) を f の不動点集合とする。

定義 1 (不動点指数) S を $f: X \rightarrow X$ の不動点集合の孤立部分集合とする。十分大きな自然数 n をとると、 X は \mathbb{R}^n に埋め込むことができ、さらに \mathbb{R}^n におけるある開近傍のレトラクトとなる。Fix(f) $\cap V = S$ をみたす X 内の開集合 V をとり、 $g = i \circ f \circ r: r^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{R}^n$ とおく。ここに、 $r: r^{-1}(V) \rightarrow V$ はレトラクト写像、 $i: X \rightarrow \mathbb{R}^n$ は自然な埋め込みである。次の準同型の合成による $1 \in \mathbb{Z}$ の像を、 S の不動

点指数とよび, $\text{ind}(S, f)$ とかく.

$$\mathbb{Z} \cong H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - B) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - S) \cong H_n(r^{-1}(V), r^{-1}(V) - S) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \cong \mathbb{Z}.$$

ここに, $H_n(r^{-1}(V), r^{-1}(V) - S) \rightarrow H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ は $\text{id} - g$ が導く準同型, B は S を含む n 次元開球体,

注. X が曲面で, S が 1 点 x_0 のみからなる場合は, 不動点指数をより簡単に定義することができる. $x_0 \in \mathbb{R}^2$ とみなし, x_0 を中心とする十分小さな円周 C をとる. このとき, x_0 の不動点指数 $\text{ind}(x_0, f)$ は, C の点 x が C 上を反時計回りに 1 周するとき, ベクトル $x - f(x) \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ が回転する回数に等しい.

不動点集合は以下の性質をもつ.

1. ホモトピー不変性 (V 開集合, $\cup_{0 \leq t \leq 1} \text{Fix}(f_t) \cap V$ がコンパクトならば, $\text{ind}(\text{Fix}(f_t) \cap V, f_t)$ は constant.)
2. $\text{ind}(\emptyset, f) = 0$
3. S_1, S_2 disjoint $\implies \text{ind}(S_1 \cup S_2, f) = \text{ind}(S_1, f) + \text{ind}(S_2, f)$
4. Lefschetz-Hopf の不動点公式: $\text{ind}(\text{Fix}(f), f) = L(f)$.

ホモトピー不変性は, Nielsen 不動点理論より従う [1, 5]. Lefschetz の不動点定理は性質 2 と 4 の系である.

2. 一般 Lefschetz 数の定義

一般 Lefschetz 数は, f の基本群上の作用を用いて $\text{Fix}(f)$ を分割することにより得られる, Lefschetz 数の精密化である. X から 1 点 x_0 を選び base point とする. また, x_0 をその像 $f(x_0)$ につなぐ道 τ を一つ選び, base path とよぶ.

$$\pi = \pi_1(X, x_0), \quad f_\pi = \tau_*^{-1} \circ f_* : \pi \rightarrow \pi_1(X, f(x_0)) \rightarrow \pi$$

とおく.

定義 2. 準同型 $\psi : \pi \rightarrow \pi$ に対し,

$$\lambda_1, \lambda_2 \in \pi \text{ が } \psi\text{-共役} \iff \exists \lambda \in \pi \text{ s.t. } \lambda_2 = \psi(\lambda)\lambda_1\lambda^{-1}.$$

ψ -共役類全体の集合を π/ψ とかく. ψ -共役は Reidemeister 同値ともよばれる.

注. π/ψ は一般に群構造をもたず, 単なる集合であるが, π が可換の場合には群となる. 実際, $\lambda_1, \lambda_2 \in \pi$ が ψ -共役である条件は, $\lambda_2 - \lambda_1 \in (\psi - \text{id})(\pi)$ となり, 従って, π/ψ は ψ の余核 $\text{Coker}(\psi - \text{id}) = \pi/\text{Im}(\psi - \text{id})$ に等しい.

定義3. x を f の不動点とする. x_0 から x への道 l を任意にとるとき, $[\tau(f \circ l)l^{-1}] \in \pi$ の f_π -共役類は l の取り方によらない. これを $R(x) \in \pi/f_\pi$ と表し, x の Reidemeister 類とよぶ. ($R(x)$ は x_0, τ の選び方に依存する.) $\alpha \in \pi/f_\pi$ に対し, $\text{Fix}_\alpha(f) = \{x \in \text{Fix}(f) \mid R(x) = \alpha\}$ とおき, α に対応する不動点類とよぶ.

X はコンパクトであるから, 有限個の α を除き $\text{Fix}_\alpha(f)$ は空集合である. よって, $\{\text{Fix}_\alpha(f) \mid \alpha \in \pi/f_\pi\}$ は $\text{Fix}(f)$ の有限分割を与える. 以後, 簡単のため $\text{ind}(S, f)$ を $\text{ind}(S)$ と表す.

$$L(f) = \text{ind}\left(\bigcup_{\alpha \in \pi/f_\pi} \text{Fix}_\alpha(f)\right) = \sum_{\alpha \in \pi/f_\pi} \text{ind}(\text{Fix}_\alpha(f))$$

において, 各整数 $\text{ind}(\text{Fix}_\alpha(f))$ はホモトピー不変であることが Nielsen, Wecken によって示されており, 不変量としてそれぞれ独自の意味をもつ. この事実をより明確に表すため以下のように一般 Lefschetz 数を定義する. $\mathbb{Z}[\pi/f_\pi]$ を π/f_π の元全体で生成される自由アーベル群とする.

定義4 (一般 Lefschetz 数) $\mathcal{L}(f) = \sum_{\alpha \in \pi/f_\pi} \text{ind}(\text{Fix}_\alpha(f)) \cdot \alpha \in \mathbb{Z}[\pi/f_\pi].$

特に, $\text{Fix}(f)$ が有限個の不動点からなるときは,

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{x \in \text{Fix}(f)} \text{ind}(x)R(x) \in \mathbb{Z}[\pi/f_\pi].$$

例. X を n 次元トーラス $T^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ とし, $f: T^n \rightarrow T^n$ を $f([v]) = [Av]$ で定義する. ここに, $v \in \mathbb{R}^n$, A は \mathbb{Z} の元を成分とする n 次元正方行列で $A - I$ は正則とする. このとき, $\text{Fix}(f)$ は $(A - I)^{-1}(\mathbb{Z}^n)$ をその部分群 \mathbb{Z}^n で割った集合であり, その元の個数は行列式 $\det(A - I)$ の絶対値に等しい. これを d とすると, $\text{Fix}(f) = \{x_1, \dots, x_d\}$ と表される. $x_i = [v_i]$ とするとき ($v_i \in \mathbb{R}^n$), Reidemeister 類 $R(x_i) \in \text{Coker}(A - I)$ は $Av_i - v_i = (A - I)v_i \in \mathbb{Z}^n$ によって代表される. Reidemeister 類 $R(x_1), \dots, R(x_d)$ はすべて異なる. なぜならば, もし $R(x_i) = R(x_j)$ ならば, $(A - I)(v_i - v_j) \in (A - I)\mathbb{Z}^n$ となり, 従って $[v_i] = [v_j]$ が導かれ矛盾を生じるからである. 不動点指数の定義から $\text{ind}(x_i)$ は i によらず一定で, $\det(A - I)$ の正負に応じ $1, -1$ となる. この値を ϵ とおくと,

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{i=1}^d \epsilon[(A - I)v_i] \in \mathbb{Z}[\text{Coker}(A - I)]$$

となることが分かる. 特に, $n = 2$ で $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ のときは, $\det(A - I) = -4$, $(A - I)\mathbb{Z}^2 =$

$2\mathbb{Z} \oplus 2\mathbb{Z}$, $d = 4$, $\epsilon = -1$ で, $\mathcal{L}(f) = -(0, 0) - (0, 1) - (1, 0) - (1, 1) \in \mathbb{Z}[\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2]$ となる.

一般 Lefschetz 数は次の性質を持つ.

1. ホモトピー不変性: f, g をホモトピック, $\{h_t\}$ をホモトピーとする. g に対する base path として, τ と道 $\{h_t(x_0) \mid 0 \leq t \leq 1\}$ の積をとると, $f_\pi = g_\pi$ より $\pi/f_\pi = \pi/g_\pi$. このとき, $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$ が成り立つ.
2. 自然な全射 $\mathbb{Z}[\pi/f_\pi] \rightarrow \mathbb{Z}$ による $\mathcal{L}(f)$ の像は Lefschetz 数 $L(f)$ に一致する. すなわち, $L(f)$ は $\mathcal{L}(f)$ の係数の和と一致する.
3. 可換性: 連続写像 $u: X \rightarrow Y, v: Y \rightarrow X$ に対し, 適当な base path を取れば, $u_\#(\mathcal{L}(v \circ u)) = \mathcal{L}(u \circ v)$. ここに, $u_\#$ は, $(v \circ u)_{\pi_1(X)}$ -共役類 α を $\alpha \subset \pi_1(X)$ の $u_*: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ による像として定義される $(u \circ v)_{\pi_1(Y)}$ -共役類に送るもの. 特に, $f: X \rightarrow X, g: Y \rightarrow Y$ と同相写像 $h: X \rightarrow Y$ が $f = h^{-1} \circ g \circ h$ をみたせば, $h_\#(\mathcal{L}(f)) = \mathcal{L}(g)$. ($u = h, v = f \circ h^{-1}$ とおけばよい)

$\mathcal{L}(f)$ における係数が 0 でない f_π -共役類 α の個数, すなわち不動点指数が 0 でない不動点類の個数は, Nielsen 数とよばれ $N(f)$ と表される. $\#\text{Fix}(f) \geq N(f)$ が成り立ち, $N(f)$ は不動点の個数を評価するために有効なホモトピー不変量である.

注. 2つの不動点 x, y に対し, それらをつなぐ道 l で, その像 $f \circ l$ に端点をとめてホモトピックなものが存在するとき, x, y は Nielsen 同値という. これは $\text{Fix}(f)$ における同値関係を与え, その同値類は不動点類に等しい.

一般 Lefschetz 数は Lefschetz 数より詳しい情報をもつものであるが, その計算は Lefschetz 数よりはるかに難しい. 一般 Lefschetz 数を定義自体から計算するためには, 不動点集合を把握する必要がある. もちろん, ホモトピー不変性より, f 自身でなくとも, それとホモトピックなものでもよいわけであるが, このような変形を見つけることは一般に無理である. また, f_π -共役類の集合 π/f_π を求めるという代数的問題の解決が必要である. 基本群が有限または可換の場合は実行可能であるが, 基本群が無限非可換の場合は, 極めて困難な作業となる.

以下で紹介する Reidemeister のトレース公式は, π/f_π の決定問題は別におくとして, 一般 Lefschetz 数を計算するために有用である. f を単体写像とするとき, 普遍被覆 \tilde{X} への π の作用は, 鎖群 $C_q(\tilde{X})$ への群環 $\mathbb{Z}[\pi]$ の作用を導く. この作用により, $C_q(\tilde{X})$ は有限生成自由 $\mathbb{Z}[\pi]$ -加群となり, リフト \tilde{f} が導く鎖準同型 $\tilde{f}_{\#q}: C_q(\tilde{X}) \rightarrow C_q(\tilde{X})$ は, $\mathbb{Z}[\pi]$ の元を成分とする行列で表される. 一般に, そのトレースは $C_q(\tilde{X})$ の基の取り方によって変わるが, トレースの $\mathbb{Z}[\pi] \rightarrow \mathbb{Z}[\pi/f_\pi]$ による像は基の取り方によらないことが分かる.

この像を $\text{tr } \tilde{f}_{\#q}$ とかき, Reidemeister トレースという. このとき, 次のトレース公式が成り立つ. これは, 不動点集合にある条件がつく場合に Reidemeister[11] と Wecken[13], 一般の場合に Husseini[3] によって証明されたものである.

Reidemeister のトレース公式

$$\mathcal{L}(f) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr} [\tilde{f}_{\#q} : C_q(\tilde{X}) \rightarrow C_q(\tilde{X})] \in \mathbb{Z}[\pi/f_\pi].$$

この公式は, Lefschetz 数に対する Hopf のトレース公式

$$L(f) = \sum_{q \geq 0} (-1)^q \text{tr} [f_{\#q} : C_q(X) \rightarrow C_q(X)] \in \mathbb{Z}$$

に対応する.

Reidemeister トレース公式は有力な計算手段ではあるが, 基本群が無限非可換である場合には, 一般 Lefschetz 数を具体的に求めることには未だ困難が残る. ある大きなクラスのホモトピー類についてある程度計算された例は, Jiang 条件をみたす空間や infrasolvmanifold などに対する Nielsen 数の計算 (例えば, [4, 5, 9] 参照), ある種の代数的な条件をみたす曲面写像に関する一般 Lefschetz 数の計算アルゴリズム [12] ぐらいしか思い当たるものはない.

3. 曲面での計算方法

ここでは, Fadell と Husseini [2] による曲面の場合の一般 Lefschetz 数の計算方法を説明する. 曲面は境界をもつとする. このとき, 曲面は有限個の S^1 を 1 点でくっつけた空間にホモトピー同値であり, π は階数 n の自由群 F_n に同型である. Reidemeister のトレース公式 $\mathcal{L}(f) = [\text{tr } \tilde{f}_{\#0} - \text{tr } \tilde{f}_{\#1}] \in \mathbb{Z}[F_n/f_\pi]$ において, $\text{tr } \tilde{f}_{\#0} = 1$ である. $\tilde{f}_{\#1} : C_1(\tilde{X}) \rightarrow C_1(\tilde{X})$ は自由群上の Fox 微分を用いて計算できる. Fox 微分作用素 $\partial/\partial a_j : \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n]$ ($j = 1, \dots, n$) は次の 4 条件で定まるものである.

1. $\frac{\partial}{\partial a_j}(u + v) = \frac{\partial u}{\partial a_j} + \frac{\partial v}{\partial a_j}, \quad u, v \in \mathbb{Z}[F_n],$
2. $\frac{\partial}{\partial a_j}(uv) = \frac{\partial u}{\partial a_j} + u \frac{\partial v}{\partial a_j}, \quad u, v \in F_n,$
3. $\frac{\partial a_i}{\partial a_j} = \delta_{i,j}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$
4. $\frac{\partial e}{\partial a_j} = 0.$

Fox 微分に関する f_π の Jacobian 行列 $(\partial f_\pi(a_i)/\partial a_j)$ を $J(f_\pi)$ とかく. このとき,

$$\tilde{f}_{\#1} = J(f_\pi) : C_1(\tilde{X}) \rightarrow C_1(\tilde{X})$$

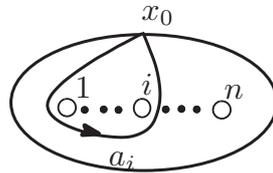
となる. 従って,

$$\mathcal{L}(f) = [1 - \text{tr}J(f_\pi)] \in \mathbb{Z}[F_n/f_\pi]. \quad (1)$$

である.

曲面が穴あき円板で写像が同相写像である場合を考える. この場合には, $f_\pi : F_n \rightarrow F_n$ を, ある組ひもの作用と同一視できる. D を閉円板とし, D_n を D から互いに素な n 個の閉円板の内部を除いた曲面とする. このとき, イソトピー $\{f_t : D \rightarrow D\}$ で $f_0 = \text{id}, f_1|_{D_n} = f$ をみたすものが存在する. n 次の組ひも群を B_n とかく. B_n は F_n に自然に作用する. $D \times [0, 1]$ の部分集合 $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(D - D_n) \times \{t\})$ は n 本のチューブの集まりであるが, これらを n 本のひもとみなすと, 組ひも $\beta(f) \in B_n$ が得られる. f のイソトピー類 (すなわちホモトピー類) は, full-twist θ の冪を除いて, $\beta(f)$ と同一視される. f の base path τ として $\tau(t) = f_t(x_0)$ をとることにすると, $f_\pi = \beta(f) : F_n \rightarrow F_n$ となる. よって, f_π -共役類の集合 F_n/f_π は $F_n/\beta(f)$ に等しくなり, また $\mathcal{L}(f) = [1 - \text{tr}J(\beta(f))]$ である.

F_n の生成元 a_1, \dots, a_n をうまく選べば, 行列 $J(\beta(f))$ のサイズを小さくすることができる. $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ を B_n の標準的な生成元とし, $a_1, \dots, a_n \in F_n$ を次図のものとする.



この生成元を用いれば, B_n の F_n への作用は次のようにかける.

$$\sigma_i : a_j \longrightarrow \begin{cases} a_{i+1}a_i^{-1}a_{i-1} & j = i \\ a_j & j \neq i. \end{cases}$$

$w \in F_n$ の β による像を w^β とかくとき, $a_n^\beta = a_n$ より $\partial a_n^\beta / \partial a_j = \delta_{n,j}$ が分かる. 従って, $J(\beta)$ は $\begin{pmatrix} J_r(\beta) & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の形となる. $J_r : B_n \rightarrow GL_{n-1}(\mathbb{Z}[F_n])$ は群の表現とはならないが, $J_r(\beta\beta') = J_r(\beta)^{\beta'} J_r(\beta')$ をみたす. (1) より,

$$\mathcal{L}(f) = -[\text{tr}J_r(\beta(f))] \in \mathbb{Z}[F_n/\beta(f)]. \quad (2)$$

注 (1) $\mathcal{L}(f)$ は $\{f_t\}$ の取り方に依存するが, a_n の冪を除いて一意的に決まる. これは, $J_r(\theta^\mu\beta) = a_n^\mu J_r(\beta)$ より従う.

(2) D_n 上の同相写像の場合には, 不動点の Reidemeister 類を mapping torus を用いて視覚的に分かりやすく定義することができる ([6, 7]). T を f の mapping torus $\bigcup_{0 \leq t \leq 1} (f_t(D_n) \times \{[t]\})$ ($\subset D \times S^1$) とするとき, $\beta(f)$ -共役類の集合 $F_n/\beta(f)$ は, T 内の閉曲線の自由ホモトピー類全体の集合と同一視できる. $x \in \text{Fix}(f)$ に対し, その Reidemeister 類 $R(x)$ は, 閉曲線 $(f_t(x), [t]) \in T$ のホモトピー類に対応する.

4. Burau 行列の計算

前節で見たように, 穴あき円板上の同相写像 f の一般 Lefschetz 数の計算は, f に対応する組ひも $\beta(f)$ の Jacobian 行列 $J_r(\beta(f))$ のトレースの計算に帰着される. この行列の成分は $\mathbb{Z}[F_n]$ の元であり, n 個の変数 a_1, \dots, a_n で書けるが, これらを 1 つの変数に単純化したものは組ひもの Burau 行列に一致する. Burau 行列のトレースは [10] で計算されているが, 今回行った行列 $J_r(\beta(f))$ の計算は, Burau 行列に関するこの計算結果を元に行われた. そこで, まず [10] の内容を紹介する.

q を不定元とし, $\mathbb{Z} = \{q^i \mid i \in \mathbb{Z}\}$ と考える. $\mathcal{E}(a_i) = q^i$ で決まる準同型 $\mathcal{E} : F_n \rightarrow \mathbb{Z}$ は, 環準同型 $\mathcal{E} : \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[\mathbb{Z}] \cong \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ を導く. $\forall \beta \in B_n, \forall w \in F_n$ に対し $\mathcal{E}(w^\beta) = \mathcal{E}(w)$ であるので, w_1, w_2 が β -共役なら, $\mathcal{E}(w_2) = \mathcal{E}(\eta^\beta w_1 \eta^{-1}) = \mathcal{E}(w_1)$. よって, 群準同型 $\mathcal{E} : \mathbb{Z}[F_n/\beta] \rightarrow \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ が導かれる. このとき, $[J_r(\beta)]$ の \mathcal{E} による像は組ひも β の被約 Burau 行列 $\text{Bur}(\beta)$ と一致し, (2) 式より,

$$\mathcal{E}(\mathcal{L}(f)) = -\text{tr Bur}(\beta(f)).$$

ここで, 組ひもの 1 つの表示法を導入する. $\rho = \sigma_{n-1} \cdots \sigma_2 \sigma_1 \in B_n$ とおく. これは full twist θ の n 乗根である. $i \in \mathbb{N}$ に対し, $\beta(i) = \sigma_1^i \rho$ とおく. さらに, 自然数列 $I = (i_1, \dots, i_d)$ に対し, $\beta(I) = \beta(i_1) \cdots \beta(i_d) = \sigma_1^{i_1} \rho \cdots \sigma_1^{i_d} \rho \in B_n$ とおくと, 任意の組みひもは, $\theta^\mu \beta(I)$ ($\mu \in \mathbb{Z}$) の形の組みひもと共役である [10]. 例えば, $\sigma_1 \sigma_2^{-1} \in B_3$ は $\theta^{-1} \beta(4)$ と共役である.

注. この表示は一意的ではない. 例えば, $\beta(i, \underbrace{1, \dots, 1}_{n-2}, j) = \theta \beta(i + j - 1)$.

そこで, $\beta(f)$ を $\theta^\mu \gamma^{-1} \beta(I) \gamma$ ($\mu \in \mathbb{Z}, \gamma \in B_n$) の形に表すとき,

$$\mathcal{E}(\mathcal{L}(f)) = -q^{n\mu} \text{tr Bur}(\beta(I))$$

となることが分かる. よって, $\mathcal{L}(f)$ の 1 変数化 $\mathcal{E}(\mathcal{L}(f))$ の計算は, $\text{tr Bur}(\beta(I))$ を求めることに帰着される.

まず, 自然数列 I の長さが 1, すなわち $I = (i)$ となる場合を考える.

$$\text{Bur}(\beta(i)) = \begin{pmatrix} -\sum_{\ell=2}^i (-q)^\ell & (-q)^i & \sum_{\ell=0}^{i-1} (-q)^\ell & 0 & \cdots & 0 \\ -q^2 & 0 & 1 & & & \vdots \\ -q^3 & 0 & 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ -q^{n-1} & 0 & 0 & \cdots & & 0 \end{pmatrix}$$

であるので,

$\text{tr Bur}(\beta(i)) = -\sum_{\ell=2}^i (-q)^\ell$ となる. 次に, $\beta(i)^d = \beta(\underbrace{i, \dots, i}_d)$ の場合を考える.

定義 5. 自然数 d に対し, $\mathbb{Z}_d = \mathbb{Z}/d\mathbb{Z} = \{1, \dots, d\}$ とおく. 自然数の組 $1 \leq p, q \leq d$ に対し, 次で定義する \mathbb{Z}_d の元の列 $[p, q]$ を \mathbb{Z}_d 内の block という.

$$[p, q] = \begin{cases} (p, \dots, q) & p \leq q \\ (p, \dots, d, 1, \dots, q) & p > q. \end{cases}$$

定義 6.

(1) \mathbb{Z}_d 内の block の集まり $\{B_1, \dots, B_s\}$ が \mathbb{Z}_d の分割 $\iff \mathbb{Z}_d = \underline{B}_1 \cup \dots \cup \underline{B}_s$ (直和).

ここに, \underline{B}_r は B_r の underlying set.

(2) \mathbb{Z}_d の分割全体の集合を $\mathcal{P}(d)$ と表す.

例. $\mathcal{P}(3) = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_7\}$. ここに, $\mathcal{B}_1 = \{(1), (2), (3)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1, 2), (3)\}$, $\mathcal{B}_3 = \{(2, 3), (1)\}$, $\mathcal{B}_4 = \{(3, 1), (2)\}$, $\mathcal{B}_5 = \{(1, 2, 3)\}$, $\mathcal{B}_6 = \{(2, 3, 1)\}$, $\mathcal{B}_7 = \{(3, 1, 2)\}$.

\mathbb{Z}_d の分割は対称式と関連がある. $x = (x_1, \dots, x_\nu)$ を不定元の組とし, $s_k(x)$ ($1 \leq k \leq \nu$) を x に関する k 次基本対称式 とする. このとき, 任意の自然数 d に対し, $x_1^d + \dots + x_\nu^d$ は s_1, \dots, s_ν の積と和でかける. 実際, 分割 $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_s\} \in \mathcal{P}(d)$ に対し, $s_{\mathcal{B}}(x) = s_{|B_1|}(x) \cdots s_{|B_s|}(x)$ とおくと ($| \cdot |$ はブロックの長さを表す)

$$x_1^d + \dots + x_\nu^d = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} (-1)^{d + \#\mathcal{B}} s_{\mathcal{B}}(x). \quad (3)$$

が成り立つ.

例. $d = 3$ のとき, $s_{\mathcal{B}_1} = s_1^3$, $s_{\mathcal{B}_2} = s_{\mathcal{B}_3} = s_{\mathcal{B}_4} = s_2 s_1$, $s_{\mathcal{B}_5} = s_{\mathcal{B}_6} = s_{\mathcal{B}_7} = s_3$ であるから, $x_1^3 + \dots + x_\nu^3 = s_1^3 - 3s_1 s_2 + 3s_3$.

R を可換環, $\nu \in \mathbb{N}$ とし, $A \in M_\nu(R)$ とする. $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_\nu)$ を A の固有値の組とすると, $k = 1, \dots, \nu$ に対し, $s_k(\lambda) = \text{PM}_k(A)$ となる. ここに,

$$\text{PM}_k(A) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq \nu} \det A \begin{pmatrix} j_1, \dots, j_k \\ j_1, \dots, j_k \end{pmatrix}$$

はすべての k 次主小行列式 (principal minor) の和である. $k > \nu$ に対しは $\text{PM}_k(A) = 0$ とおく. このとき, $\text{tr} A^d = \lambda_1^d + \cdots + \lambda_\nu^d$ であるので, (3) より,

$$\text{tr} A^d = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} (-1)^{d+\#\mathcal{B}} \text{PM}_{|B_1|}(A) \cdots \text{PM}_{|B_s|}(A)$$

ここで, $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$, $\nu = n-1$, $A_i = \text{Bur}(\beta(i))$ とおくと, $\text{tr} \text{Bur}(\beta(\underbrace{i, \dots, i}_d)) = \text{tr}(A_i^d)$ であるので,

$$\text{tr} \text{Bur}(\beta(\underbrace{i, \dots, i}_d)) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} (-1)^{d+\#\mathcal{B}} \text{PM}_{|B_1|}(A_i) \cdots \text{PM}_{|B_s|}(A_i). \quad (4)$$

が分かる.

注. $\text{PM}_k(A_i)$ は具体的に次のようにかける.

$$\text{PM}_k(A_i) = \begin{cases} -\sum_{\ell=k+1}^{i+k-1} (-q)^\ell & \text{if } k < n-1 \\ (-q)^{i+n-1} & \text{if } k = n-1. \end{cases}$$

(4) 式は任意の数列 $I = (i_1, \dots, i_d)$ に対し次のように一般化される ([10]). $\forall I = (i_1, \dots, i_d) \in \mathbb{N}^d$ に対し,

$$\text{tr} \text{Bur}(\beta(I)) = \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} (-1)^{d+\#\mathcal{B}} \text{PM}_{|B_1|}(A_{i_{p_1}}) \cdots \text{PM}_{|B_s|}(A_{i_{p_s}}),$$

ここに, p_r は B_r の最初の元 ($r = 1, \dots, s$).

5. $\mathcal{L}(f)$ の計算

前節でみたように, $\mathcal{L}(f)$ の1変数化は, \mathbb{Z}_d の分割ごとに与えられる多項式の和をして表された. そこで, $\mathcal{L}(f)$ 自身も, \mathbb{Z}_d の分割ごとに与えられる $\mathbb{Z}[F_n]$ の元の和として書けると予想することは自然である. 以下, この予想が正しいことを述べる.

$\beta \in B_n$ に対し, $\Phi_\beta: \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n/\beta]$ を自然な全射とする. ここでは, 一般 Lefschetz 数そのものではなく, $\mathbb{Z}[F_n]$ の元で Φ_β による像が一般 Lefschetz 数に一致するものを求める. $j \geq 0$ に対し, $g_j \in \mathbb{Z}[F_n]$ を

$$g_j = \begin{cases} -a_2^{j/2} & j \text{ even,} \\ a_1 a_2^{(j-1)/2} & j \text{ odd} \end{cases}$$

で定める. $1 \leq \ell \leq d$ に対し, $\beta_\ell(I) = \beta(i_\ell, \dots, i_d)$ とおく. ブロック $B = [p, q]$ に対し, $\alpha(B), \omega(B) \in B_n$ を次で定義する (i_{d+1} は i_1 と解釈する).

$$\alpha(B) = \beta_p(I), \quad \omega(B) = \begin{cases} \beta_q(I) & \text{if } p \leq q, \\ \beta_q(I)\beta(I)^{-1} & \text{if } p > q. \end{cases}$$

$W_I(B) \in \mathbb{Z}[F_n]$ を次で定義する.

$$W_I(B) = \begin{cases} (g_0 + \dots + g_{i_p-2})^{\alpha(B)} a_{|B|+1}^{\omega(B)} & \text{if } |B| < n-1 \\ g_{i_p}^{\alpha(B)} a_{n-1}^{\omega(B)} & \text{if } |B| = n-1 \\ 0 & \text{if } |B| \geq n. \end{cases}$$

最後に, $\mathcal{B} = \{B_1, \dots, B_s\} \in \mathcal{P}(d)$ (ここに $1 \leq p_1 < \dots < p_s \leq d$) に対し

$$W_I(\mathcal{B}) = W_I(B_1) \cdots W_I(B_s) \in \mathbb{Z}[F_n]$$

とおく.

定理 1. $\beta(f) = \theta^\mu \gamma^{-1} \beta(I) \gamma$ と表す. ここに, $\mu \in \mathbb{Z}, \gamma \in B_n, I$ は長さ d の自然数列. このとき,

$$\mathcal{L}(f) = -\Phi_{\beta(f)} \left(a_n^\mu \sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} W_I(\mathcal{B})^\gamma \right) \in \mathbb{Z}[F_n / \beta(f)].$$

例: $\beta(f) = \beta(i), i \geq 2$ のとき, $\mu = 0, \gamma = e, I = (i), d = 1, \mathcal{P}(d) = \{(1)\}, \alpha((1)) = \omega((1)) = \beta(i)$ より,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f) &= -\Phi_{\beta(f)}(W_{(i)}((1))) = -\Phi_{\beta(i)}((g_0 + \dots + g_{i-2})^{\beta(i)} a_2^{\beta(i)}) \\ &= -\Phi_{\beta(i)}(g_2 + \dots + g_i). \end{aligned}$$

ここで, $\forall w \in F_n, \forall \beta \in B_n$ に対し $\Phi_\beta(w^\beta) = \Phi_\beta(w)$ が成り立つことを用いている.

定理 1 の証明は, $J_r(\beta(I))$ を, 次式を用いて計算することにより得られる.

$$a_k^{\beta(i)} = \begin{cases} (a_3 a_1^{-1})^{\frac{i-1}{2}} a_3 a_2^{-1} (a_3 a_1^{-1})^{-\frac{i-1}{2}} & (k = 1, i \text{ odd}) \\ (a_3 a_1^{-1})^{\frac{i}{2}} a_2 a_1^{-1} (a_3 a_1^{-1})^{-\frac{i}{2}} & (k = 1, i \text{ even}) \\ a_{k+1} a_1^{-1} & (2 \leq k \leq n-1) \\ a_n & (k = n) \end{cases}.$$

Jiang と Zheng[8] は, 不動点に対する一般 Lefschetz 数の概念を拡張し, 周期点に対する一般 Lefschetz 数を定義した. この Lefschetz 数を求めることにより, 周期点の存在とそれらの大域的な振る舞いが把握できる. また, Zheng[14] の結果から, 周期 2 の場合の

一般 Lefschetz 数の可換化は、組ひも群の Lawrence-Krammer 表現のトレースと一致することが分かり、低次元トポロジーの見地からも興味深いものである。周期点に対する一般 Lefschetz 数を計算することは、今後の大きな課題であろう。

6. 曲面同相写像の分類への応用

曲面同相写像の Nielsen-Thurston 分類理論における、有限位数写像、擬アノソフ写像、および reducible 写像を合わせて標準写像とよぶ。標準写像 φ はそのイソトピー類の中で最も簡単な力学系的複雑さをもつことから、2次元力学系理論における重要な研究対象の一つとなっている。ここでは、 D_n 上の標準写像 φ で向きと外部境界成分 ∂D を保つものに対し、 ∂D 上の周期点について考える。これら周期点の最小周期を $m(\varphi)$ とおく。また、それらの Reidemeister 類は a_n の冪で代表されるが、この冪を $a_n^{\nu(\varphi)}$ とかく。 $m(\varphi), \nu(\varphi)$ を決定する問題を考える。

補題 整数 $m > 0, \nu$ が互いに素で、 $\mathcal{L}(\varphi^m)$ における $\Phi_{\beta(\varphi^m)}(a_n^\nu)$ の係数が 0 でないなら、 $m(\varphi) = m, \nu(\varphi) = \nu$ 。

この補題は、 $m(\varphi), \nu(\varphi)$ を求めるために、一般 Lefschetz 数の計算結果が利用できる可能性があることを示している。実際、定理 1 を応用して、次が導かれる。

命題 1. $\beta(\varphi)$ は $\beta(I)$ と共役とする。 $n \geq 4, i_1, \dots, i_d \geq 2$ または $n = 3, i_1, \dots, i_d \geq 3$ とするとき、

$$m(\varphi) = \frac{\text{LCM}\{d, n-2\}}{d}, \quad \nu(\varphi) = \frac{\text{LCM}\{d, n-2\}}{n-2}.$$

この命題における n と i_1, \dots, i_d に関する条件は、 $\sum_{\mathcal{B} \in \mathcal{P}(d)} W_I(\mathcal{B})$ に $\Phi_{\beta(I)} : \mathbb{Z}[F_n] \rightarrow \mathbb{Z}[F_n/\beta(I)]$ を作用させるとき、元同士のキャンセルが起こらないことを保障する十分条件である。

f が与えられたとき、そのイソトピー類に属する標準写像を決定する問題に関しては、Bestvina-Handel によるものなど幾つかのアルゴリズムが知られているが、実際にアルゴリズムを実行することは容易なことではない。[10] において、 $n \geq 4, i_1, \dots, i_d \geq 2, (i_1, \dots, i_d) \neq (2, \dots, 2)$ ならば、 φ は擬アノソフ成分をもつことが示されている。命題 1 を用いて次が分かる。

命題 2. $\beta(\varphi)$ は $\beta(I)$ と共役とする。 $n \geq 5$ で I の項はすべて奇数か、すべて偶数とするとき、 φ は擬アノソフ写像であり、対応する foliation は内部特異点をもたない。

参考文献

- [1] R. F. Brown, *The Lefschetz Fixed Point Theorem*, Scott-Foresman, Glenview, 1971.
- [2] E. Fadell and S. Husseini, The Nielsen number on surfaces, *Topological Methods in Nonlinear Functional Analysis* (S. P. Singh et al., eds.), Contemp. Math. Vol. 21, Amer. Math. Soc., (1983), pp. 59–98.
- [3] S. Husseini, Generalized Lefschetz numbers, *Trans. Amer. Math. Soc.* 272 (1982), 247–274.
- [4] J. Jezierski and W. Marzantowicz, *Homotopy Methods in Topological Fixed and Periodic Points Theory*, Springer, 2006.
- [5] B. Jiang, *Lectures on Nielsen Fixed Point Theory*, Contemp. Math. Vol. 14, Amer. Math. Soc., Providence, 1983.
- [6] B. Jiang, A characterization of fixed point classes, *Fixed Point Theory and Its Applications*, Contemp. Math. Vol. 72, Amer. Math. Soc, 1988, pp. 157–160.
- [7] B. Jiang, A primer of Nielsen fixed point theory, *Handbook of Topological Fixed Point Theory* (R.F. Brown, M. Furi, L. Górniewicz and B. Jiang eds.), Springer, 2005, pp. 617–645.
- [8] B. Jiang and H. Zheng, A trace formula for the forcing relation of braids, *Topology* 47 (2008), 51–70.
- [9] C. McCord, Computing Nielsen numbers, *Nielsen Theory and Dynamical Systems* (C. McCord, ed.), Contemp. Math. Vol. 152, Amer. Math. Soc., 1993, pp. 249–267.
- [10] T. Matsuoka, The Burau representation of the braid group and the Nielsen-Thurston classification, *Nielsen Theory and Dynamical Systems* (C. McCord, ed.), Contemp. Math. Vol. 152, Amer. Math. Soc., 1993, pp. 229–248.
- [11] K. Reidemeister, Automorphismen von Homotopiekettenringen, *Math. Ann.* 112 (1936), 586–593.
- [12] J. Wagner, An algorithm for calculating the Nielsen number on surfaces with boundary, *Trans. Amer. Math. Soc.* 351 (1999), 41–62.
- [13] F. Wecken, Fixpunktklassen II, *Math. Ann.* 118 (1942), 216–234.
- [14] H. Zheng, A reflexive representation of braid groups, *J. Knot Theory Ramifications* 14 (2005), 467–477.

円周の同相群の部分群に対する 二者択一性について

松田 能文

(東京大学大学院数理科学研究科・学振特別研究員 (P D))

1 はじめに

多様体の(微分)同相群の研究には, この群が持つ, 位相群, ファイバー束の構造群などのいくつかの顔のいずれに注目するかにより様々な方法がある.

本研究では, (微分)同相群を“無限次元リー群”と見なして有限次元リー群と性質を比較するという方法を最も基本的な場合である円周の同相群に対して適用する. (以下では, 向きを保つ同相写像のみを考える.)

2 円周の同相群とその部分群

2.1 円周の同相群

同相群の研究において興味深い現象の一つは, どの程度の滑らかさの微分同相のなす群を考えるかによって状況が変化するることである.

本稿で主に扱う円周の同相群は, 実解析的微分同相のなす群 $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ と C^∞ 級微分同相のなす群 $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ である. 前者は後者の部分群であることに注意しておく.

これら二つの群の違いとしてすぐに思いつくのは、力学系的性質の相違である。例えば、前者の恒等写像でない元の固定点は高々有限個であるが、後者には無限個の固定点を持つ恒等写像でない元が存在する。本研究の目的の一つは、このような滑らかさや力学系的性質の相違からどのような代数的性質の相違が生じるかを調べることである。

2.2 回転数関数

Poincaréは、円周の同相写像 f に対して、その回転数 $\rho(f) \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ を定義した。回転数は、同相写像の引き起こす力学系の情報を多く含んでいて、特に、次の命題が成り立つ。

命題 1 (回転数の有理性と有限軌道) 円周の同相写像 f が n 点からなる有限軌道を持つことは、 n と互いに素なある整数 m が存在して $\rho(f) = \frac{m}{n} \pmod{\mathbf{Z}}$ が成り立つことと同値である。

円周の同相群 $\text{Homeo}_+(S^1)$ の各元に対してその回転数を対応させることにより定義される $\text{Homeo}_+(S^1)$ から \mathbf{R}/\mathbf{Z} への写像を回転数関数と呼び、 $\rho : \text{Homeo}_+(S^1) \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ と表す。この写像は類関数であるが準同型写像ではなく、その挙動については未知の部分が多い。

2.3 フックス群の円周への作用

射影変換群 $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ は、一次分数変換により上半平面 \mathbf{H}^2 に向きを保ち等長的に作用する。この作用は理想境界 $\partial\mathbf{H}^2 = \mathbf{R} \cup \{\infty\} \cong S^1$ への忠実な実解析的作用を誘導する。従って、 $\text{PSL}(2, \mathbf{R})$ は $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群と見なせる。

$\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ の離散部分群であるフックス群は, 円周の同相群の重要な部分群である. フックス群は, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ の部分群のうちで上半平面に固有不連続に作用するものとして特徴づけられる. その一方で, $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ の理想境界, すなわち円周への作用を用いて, 以下のような特徴づけを与えることができる.

命題 2 (フックス群の理想境界への作用による特徴づけ) Γ を $\mathrm{PSL}(2, \mathbf{R})$ の部分群であって, 理想境界への作用が有限軌道を持たないものとする. このとき, Γ がフックス群であることと回転数関数 ρ による Γ の像が有限集合であることは同値である.

そこで本研究では, $\mathrm{Homeo}_+(S^1)$ の部分群 Γ のうち以下の (条件 F) を満たすものとフックス群の性質を比較する.

(条件 F) Γ は有限軌道を持たず, 回転数関数による像が有限集合である.

この比較に用いる性質として, 群の二者択一性と呼ばれる性質に着目する.

3 種々の群に対する二者択一性

群 G に対する二者択一性とは, G の部分群が, それぞれ“大きいか小さいか”のいずれかであるという性質のことである. ここで, 大きいとは非可換自由部分群を持つということであり, 小さいということは, 状況に応じて様々な条件を考える.

3.1 線形リー群に対する Tits の二者択一性

群の二者択一性についての最も代表的な結果は、線形リー群に対する Tits の二者択一性についての以下の定理である。

定理 3 (Tits alternative, [7]) Γ を $GL(n, \mathbf{R})$ の部分群とするとき、以下の 1, 2 のいずれかが成り立つ。

1. Γ は指数有限の可解部分群を持つ。
2. Γ は非可換自由部分群を持つ。

3.2 双曲群に対する二者択一性

フックス群に対する二者択一性は、Tits の二者択一性より強いものである。それは、フックス群などの双曲多様体の基本群を一般化した双曲群に対して成り立つもので、以下のような形で述べられる。

定理 4 ([1]) Γ を双曲群とするとき、 Γ の任意の部分群 Γ' に対して、以下の 1, 2 のいずれか一方が成り立つ。

1. Γ' は指数有限の巡回部分群を持つ。
2. Γ' は非可換自由部分群を持つ。

この定理から、双曲群の部分群には強い代数的制約が課されていることが分かる。例えば、階数 2 の自由可換群 $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ は双曲群の部分群になりえないことがこの定理から直ちに従う。

3.3 円周の同相群の部分群に対する Margulis の二者択一性

Tits の二者択一性は $\text{Homeo}_+(S^1)$ については成立しないが, Margulis により以下のような二者択一性が成り立つことが証明されている.

定理 5 (Margulis, [2]) Γ を $\text{Homeo}_+(S^1)$ の部分群とすると, 以下の 1, 2 の少なくとも一方が成り立つ.

1. Γ は円周上のある確率測度を不変にする.
2. Γ は非可換自由部分群を持つ.

ここで, Γ が (条件 F) を満たすと仮定したときにより強い結論が得られないかと考えてみると, その結果は Γ の元の滑らかさにより変わってくる.

3.4 主結果

本稿の主結果は, $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群に対して (条件 F) を課すと双曲群と同様の二者択一性が従うことを主張する以下の定理である.

定理 6 (M, [3]) Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって, (条件 F) を満たすものとする. このとき, Γ の任意の部分群 Γ' に対して, 以下の 1, 2 のいずれか一方が成り立つ.

1. Γ は指数有限の巡回部分群を持つ.
2. Γ は非可換自由部分群を持つ.

この定理は, $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって (条件 F) を満たすものは何らかの“双曲性”を持っていることを示唆している.

注 1 定理6において $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ を $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ に置き換えた命題は成立しない. 実際, $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ の部分群であって, (条件F) を満たしなおかつ $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ と同型な部分群を持つようなものが以下のようにして構成できる.

Γ_1 を非初等的な有限生成フックス群であってコントロール集合 C を極小集合として持つものとする. C の補集合の連結成分である开区間を一つ選び固定する. さらに, この开区間の外で恒等的に0になる非自明な C^∞ 級ベクトル場を X とする. このとき, X により生成される流れに含まれる $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ と同型な $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ の部分群を Γ_2 とすると, Γ_1 と Γ_2 により生成される $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ の部分群 Γ が求めるものであることが分かる.

4 主結果の証明の概要

条件 (F) を満たす Γ の部分群が円周上のある確率測度を不変にするならば Γ は有限軌道を持つことが比較的容易に分かる. 従って, 主結果の証明は次の命題の証明に帰着される.

命題 7 ((条件F) を満たす群の固定部分群) Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって, (条件F) を満たすものとする. このとき, 円周上の任意の点 x の固定部分群 Γ_x は自明であるか無限巡回群であるかのいずれかである.

命題7は, 以下の二つの命題の帰結である.

命題 8 (固定部分群と離散性) Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって, ある点の固定部分群が自明群でも無限巡回群でもないとする. このとき, Γ の恒等写像でない元の列であって, 円周内のある开区間の上で C^1 位相に関して恒等写像に収束するものが存在する.

命題 9 ((条件 F) と離散性) Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって、(条件 F) を満たすものとする。このとき、 Γ は C^1 位相に関して離散的である。さらに、 Γ の恒等写像でない元の列であって、円周内のある開区間の上で C^1 位相に関して恒等写像に収束するものは存在しない。

命題 8 は、中居 [4] や Szekeres [6] の結果を組み合わせたものである。

命題 9 は、フックス群に対する命題 2 の類似といえるもので、それ自身興味深い。この命題の証明で重要な役割を果たすのが、局所的に非離散的な部分群に対応する局所ベクトル場の存在を保証する次の命題である。この命題は、本質的には Rebelo [5] の結果である。

命題 10 (非離散性と局所ベクトル場) Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって、円周上のいかなる確率測度をも不変にしないものとする。さらに、 Γ の恒等写像でない元の列であって、円周内のある開区間の上で C^1 位相に関して恒等写像に収束するものが存在すると仮定する。

このとき、ある開区間 I 上の C^0 ベクトル場 X であって、以下の性質を持つものが存在する： I に含まれる閉区間 I' の上で X により生成される局所流 $\{\phi^t\}$ が $0 \leq t \leq t_0$ に対して定義されているとき、 $\phi^t (0 \leq t \leq t_0)$ は Γ の元の I' 上への制限からなるある列により近似される。

5 残された問題

最後に、今後解決すべき問題を二つ挙げる。

問 1 Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の部分群であって (条件 F) を満たすものとする. このとき, 以下の問に答えよ.

1. Γ が有限生成であると仮定すると, Γ は双曲群であるか.
2. Γ はあるフックス群と位相共役であるか.

問 2 Γ を $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ の有限生成部分群であって, 有限軌道を持たないものとする. このとき, Γ の回転数関数による像が \mathbf{Q}/\mathbf{Z} に含まれるならば, Γ は (条件 F) を満たすか.

なお, 問 2 において $\text{Diff}_+^\omega(S^1)$ を $\text{Diff}_+^\infty(S^1)$ に置き換えると, その答は否定的である.

参考文献

- [1] E. Ghys and P. de la Harpe *Sur les groupes hyperboliques d'après Mikhael Gromov*, Progress in Mathematics, 83, Birkhäuser, Boston, 1990.
- [2] G. Margulis, *Free subgroups of the homeomorphism groups of the circle*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 331 (2000), 669-674.
- [3] Y. Matsuda, *Groups of real analytic diffeomorphisms of the circle with a finite image under the rotation number function*, preprint, The University of Tokyo. UTMS 2008-14 (2008).
- [4] I. Nakai, *Separatrices for non solvable dynamics on $(\mathbf{C}, 0)$* , Ann. Inst. Fourier 44 (1994), 569-599.

- [5] , J. Rebelo, *Ergodicity and rigidity for certain subgroups of $\text{Diff}^\omega(S^1)$* , Ann. Sci. École Norm. Sup. 32 (1999), 433-453.
- [6] G. Szekeres, *Regular iteration of real and complex functions*, Acta Math. 100 (1958), 203-258.
- [7] J. Tits, *Free subgroups in linear groups*, J. Algebra 20 (1972), 250-270.

擬アノソフ写像類のエントロピーと体積, 及びそれらの関係について

金 英子・高沢 光彦 (東京工業大学大学院情報理工学研究科)

平成 20 年 7 月 2 日

1 はじめに

1.1 研究の目標と内容

向き付けられた曲面を Σ とする. Σ 上の自己同相写像のイソトピー類の成す群 $\mathcal{M}(\Sigma)$ を Σ の写像類群とよぶ. 写像類は周期的, 可約, 擬アノソフの 3 種類に分類できる. この中で最も一般的な写像類は擬アノソフである. 例えば写像類 ϕ の写像トーラス

$$\mathbb{T}(\phi) = \Sigma \times [0, 1] / (x, 0) \sim (f(x), 1)$$

(ここで $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ は ϕ の代表元) が双曲多様体となる必要十分条件は ϕ が擬アノソフである. ここでは擬アノソフ写像類 ϕ の代表的な 2 つの不変量について考察する. 1 つは ϕ の写像トーラスの体積 $\text{vol}(\phi)$ である. もう 1 つは ϕ の dilatation $\lambda(\phi) > 1$ の対数をとったエントロピー $\text{ent}(\phi) = \log(\lambda(\phi)) > 0$ である. 両者はいずれも ϕ の複雑さを知っていると考えられる. これら 2 つの不変量の相互関係を理解することが我々の目標である.

我々はエントロピーと体積の比 $\frac{\text{ent}(\cdot)}{\text{vol}(\cdot)}$ に注目する. [1, 5] の結果を用いると次が示せる.

命題 1.1 ([4]). Σ のみによる定数 $C = C(\Sigma) > 0$ が存在し, 任意の擬アノソフ写像類 $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ について

$$\frac{\text{ent}(\phi)}{\text{vol}(\phi)} > C$$

が成立する.

一方, どのような Σ についても $\frac{\text{ent}(\cdot)}{\text{vol}(\cdot)}$ は上に有界でない. これまでのところ命題 1.1 の定数 C は具体的に計算されていなかったが, 我々は曲面が 1 点穴あきトーラス $\Sigma_{1,1}$ の場合にその定数を計算した.

定理 1.2 ([4]). 任意の擬アノソフ写像類 $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma_{1,1})$ について

$$\frac{\text{ent}(\phi)}{\text{vol}(\phi)} > \frac{\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{2v_8} \approx 0.1313$$

が成立する. ここで v_8 は理想正 8 面体の体積である.

定理 1.2 における定数は最良ではないが, *block length* が 1 である写像類に制限すると最良の定数 $\frac{\log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)}{2v_3} \approx 0.4741$ (v_3 は理想正四面体の体積) が得られる [4]. これは計算機の援用により示される.

2 章では計算機実験の結果をもとに $\frac{\text{ent}(\cdot)}{\text{vol}(\cdot)}$ についていくつかの性質を考察する.

3 章では 3 次元双曲多様体を固定したときに, その多様体が許容するエントロピーの性質について考察する. 具体的には, 無限個のファイバーを許容するような円周上の曲面束において各ファイバー上に

定義されるモノドロミーのエントロピー集合の性質に関する Fried[2], Long-Oertel[6], Matsumoto[7], Oertel[8], Thurston[10] による結果を述べる.

4章では3成分鎖絡み目補空間のファイバー構造を考察し, 各ファイバーのモノドロミーによるエントロピーを統一的に求める多項式を与える. ファイバーが穴あき円板である場合にはモノドロミーはブレイドで表すことができるが, ここではあるファイバーのモノドロミーを表すブレイドの族は Hironaka-Kin[3] が考察した小さなエントロピーを持つ馬蹄ブレイドの族と一致することを示す. 最後に3成分鎖絡み目補空間におけるエントロピー関数の漸近的な挙動を考察する.

1.2 擬アノソフ写像類

写像類 $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ を3つのタイプに分類する. $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ が可約とは, ϕ の代表元である同相写像 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ と Σ 上の互いに交わらない本質的単純閉曲線から成る有限集合 $S = \{S_1, \dots, S_n\}$ が存在し $f(S) = S$ を満たすこととする. 単純閉曲線が本質的とは $\Sigma \setminus S$ の各連結成分のオイラー数が負であることである. ϕ が有限位数をもつとき, ϕ を周期的という. 可約でなく周期的でない $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ を擬アノソフという.

擬アノソフ ϕ の代表元として次の性質を持つ同相写像 $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ がとれる. 互いに横断的である測度付き特異葉層の組 $\mathcal{F}^s, \mathcal{F}^u$ と1より大きな定数 $\lambda > 1$ が存在し

$$\Phi(\mathcal{F}^s) = \lambda^{-1}\mathcal{F}^s, \quad \Phi(\mathcal{F}^u) = \lambda\mathcal{F}^u$$

が成立する. このような $\Phi: \Sigma \rightarrow \Sigma$ を擬アノソフ写像という. 定数 $\lambda > 1$ を Φ の dilatation とよび, $\log \lambda$ を Φ のエントロピーとよぶ. 擬アノソフ写像は ϕ に対して唯一つではないが dilatation は唯一つに定まり, 従って λ を ϕ の dilatation, $\log \lambda$ を ϕ のエントロピーという.

dilatation は代数的整数であることが知られている. Σ を固定すると, 擬アノソフ $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ の dilatation $\lambda(\phi)$ に対する最小多項式の次数が Σ に依存する定数で押さえられる. よって dilatation $\lambda(\phi)$ 全体は離散集合であり, 特に最小値 $\lambda(\Sigma)$ が存在する.

一方, 3次元双曲多様体の体積全体は順序型 ω^ω の \mathbb{R} の整列閉集合を成すことが Thurston によって示されている. 特に Σ を固定すると, 擬アノソフ $\phi \in \mathcal{M}(\Sigma)$ による写像トーラスの体積 $\text{vol}(\phi)$ 全体は最小値 $\text{vol}(\Sigma)$ をもつ. 次の問題が考えられる.

問題 1.3. $\lambda(\Sigma)$ や $\text{vol}(\Sigma)$ の値を求めよ. その値を実現する写像類を決定せよ.

いくつかの曲面では $\lambda(\Sigma)$ や $\text{vol}(\Sigma)$ を同時に実現する写像類が存在することが数値実験によって観察されている(2章).

2 エントロピー vs 体積

$\mathcal{M}(\Sigma)$ の擬アノソフ写像類全体を $\mathcal{M}^{\text{PA}}(\Sigma)$ とおく.

$$\mathcal{E}(\Sigma) = \{(\text{vol}(\phi), \text{ent}(\phi)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \phi \in \mathcal{M}^{\text{PA}}(\Sigma)\}$$

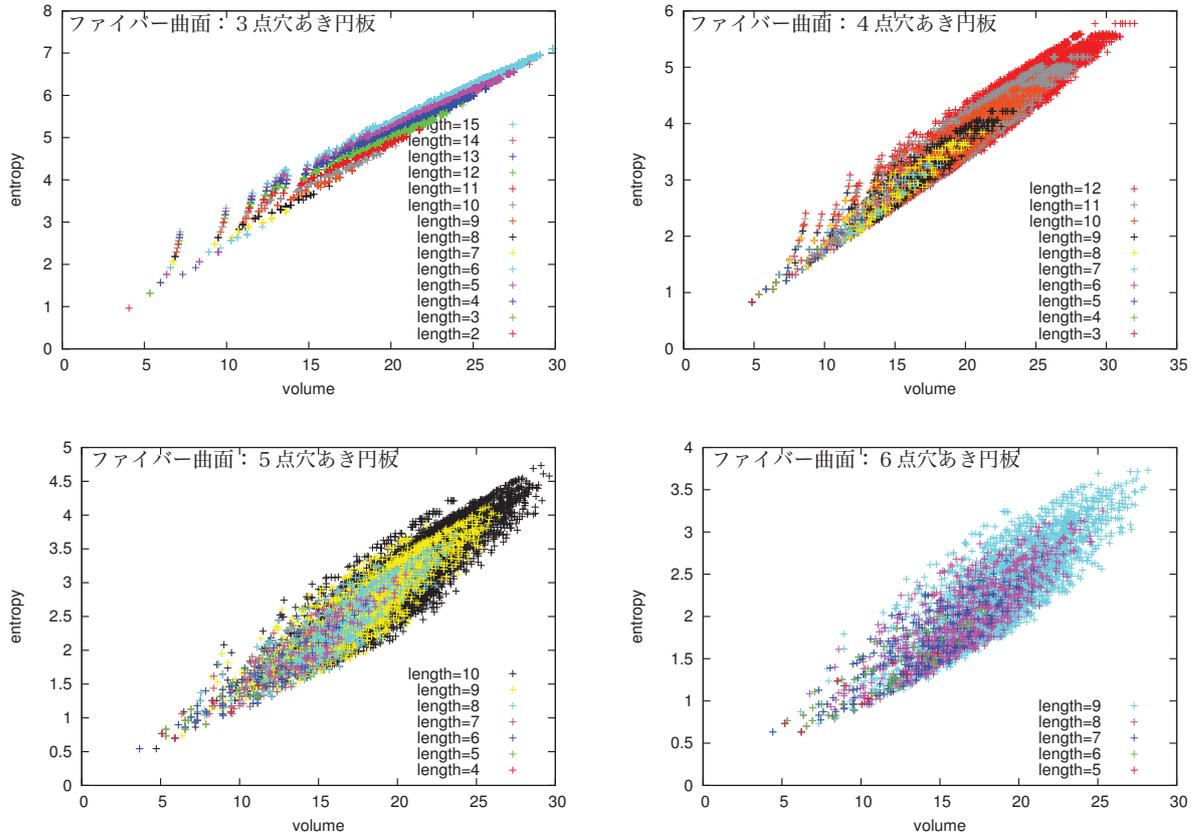
によって $\mathcal{E}(\Sigma)$ を定める. $(\text{vol}(\phi^m), \text{ent}(\phi^m)) = (m \cdot \text{vol}(\phi), m \cdot \text{ent}(\phi))$ に注意する. 平面上に $\mathcal{E}(\Sigma)$ の点はどのように分布しているかについて考えたい. $\mathcal{M}(\Sigma)$ の生成集合を固定し $\mathcal{E}_k(\Sigma)$ を次で定める.

$$\mathcal{E}_k(\Sigma) = \{(\text{vol}(\phi), \text{ent}(\phi)) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \mid \phi \in \mathcal{M}^{\text{PA}}(\Sigma) \text{ の語の長さは } k \text{ 以下}\}.$$

n 点穴あき円板 D_n について, 我々は $\mathcal{E}_{15}(D_3)$, $\mathcal{E}_{12}(D_4)$, $\mathcal{E}_{10}(D_5)$, $\mathcal{E}_9(D_6)$ の計算機実験¹ を行った. 曲面が D_n の場合は写像類はブレイドで表されるが, この計算では $\mathcal{M}(D_n)$ の生成集合としてブレイド

¹ブレイドのエントロピーは Toby Hall によるソフトウェア trains を用い, 絡み目補空間の体積は Jeff Weeks によるソフトウェア SnapPea を用いて計算した.

の Artin 生成元を用いている. この計算結果からは読み取れないが, $\frac{\text{ent}(\cdot)}{\text{vol}(\cdot)}$ は上に有界でない [4] ことに注意しておく.



$M(D_n)$ の写像類 ϕ による写像トラスは, ϕ を表すブレイド $b = b_\phi$ の braided link \bar{b} の補空間 $S^3 \setminus \bar{b}$ と同相である. ここで braided link \bar{b} とはブレイド b の軸と b の閉ブレイドの和集合として得られる絡み目である (図1(左)).

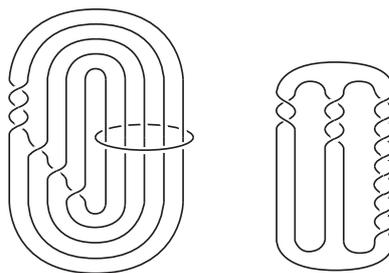


図1: (左) $\beta_5 = \sigma_1^3 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4$ の braided link $\bar{\beta}_5$, (右) $(-2, 3, 8)$ -プレツェル絡み目. これは $\bar{\beta}_5$ と同じ絡み目型を持つ.

計算機実験から, ある写像類がエントロピーの最小値 $\log(\lambda(\Sigma))$ や体積の最小値 $\text{vol}(\Sigma)$ を同時に実現していることが観察される. 曲面が $\Sigma_{1,1}, D_3, D_5$ の場合にはそれは理論的に正しい.

3成分鎖絡み目 C_3 (図2(右)) の補空間はカスプを3個もつ向き付け可能な3次元多様体の中で最小の体積 $\text{vol}(S^3 \setminus C_3) \approx 5.33348$ を持つだろうと予想されている. 上の計算機実験を行った後, 我々は braided link の補空間が C_3 の補空間と同相になるような, エントロピーが比較的小さいあるブレイドの族を発見した. これは双曲多様体 $S^3 \setminus C_3$ が n 点穴あき円板をファイバーとして許容し, その上のモノドロミーはエントロピーが比較的小さいということを言っている. 命題 1.1 から, 小さなエント

ロピーを持つ写像類はあまり大きな体積を持つことは出来ない. これらの考察から, 我々は3成分鎖絡み目の補空間に入るファイバー上のモノドロミーの族が定めるエントロピー集合に興味を持った. エントロピー集合に関して詳しくは4章で述べる.

3 円周上の曲面束

以降, M を境界をもつ3次元双曲多様体とする.

3.1 Thurston ノルムとファイバー曲面

Thurston が [10] で与えたノルム $X_T : H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ を以下で導入する. これは原点から延びる半直線に関して線形な連続関数である. 連結な曲面 F について $\chi_-(F)$ を

$$\chi_-(F) = \max\{0, -\chi(F)\} \quad (\chi(F) \text{ は } F \text{ のオイラー数})$$

と定める. F が連結でないとき F_1, F_2, \dots, F_n を F の連結成分とすると

$$\chi_-(F) = \sum_{i=1}^n \chi_-(F_i)$$

によって $\chi_-(F)$ を定める. integral class $a \in H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ について

$$X_T(a) = \min\{\chi_-(F) \mid [F] = a, F \text{ は } M \text{ に埋め込まれた曲面}\}$$

によって $X_T(a)$ を定める. このとき次が成り立つ.

(a) $k \in \mathbb{Z}$ について $X_T(ka) = |k|X_T(a)$.

(b) $X_T(a+b) \leq X_T(a) + X_T(b)$.

rational class $a \in H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ については ra が integral class となるような $r \in \mathbb{Q}$ をとり $X_T(a) = \frac{1}{|r|}X_T(ra)$ と定める. (a),(b) から $X_T(\cdot)$ は凸関数であり, rational class の集合上で定義された $X_T(\cdot)$ を原点から延びる半直線に関して線形な連続関数 $X_T : H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ に一通りに拡張できる.

Thurston は [10] の中で $X_T(\cdot)$ に関する $H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ の単位球体

$$U = \{a \in H_2(M, \partial M; \mathbb{R}) \mid X_T(a) \leq 1\}$$

は凸多面体であることを示している. ここで記号を導入する.

- ∂U の最高次の面の1つを Δ とし, 原点を基点とする Δ 上の錘 (cone) を C_Δ とする. さらに原点を基点とする open face $\text{int}(\Delta)$ 上の錘から原点を除いたものを $\text{int}(C_\Delta)$ とする.
- $\text{int}(C_\Delta)$ の中の integral class 全体を $\text{int}(C_\Delta(\mathbb{Z}))$, rational class 全体を $\text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ と表す.

F が $a \in H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ の最小ノルム曲面であるとは, $[F] = a$ かつ $X_T(a) = \chi_-(F)$ を満たすこととする. 次の定理より単位球体 U は M のファイバー構造の情報を持つことがわかる.

定理 3.1 (Thurston[10]). M を S^1 上の曲面束とし, F を M のファイバーとする. このときある面 Δ が存在し次を満たす.

(1) $[F] \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Z}))$.

(2) 任意の $a \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Z}))$ について, a の最小ノルム曲面 E が連結ならば E は M のファイバーである.

あるファイバー F について $[F] \in \text{int}(C_\Delta)$ であるとき Δ を fiber face という。

例 3.2. 3成分鎖絡み目 C_3 の補空間 $S^3 \setminus C_3$ に埋め込まれた曲面 $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$ を図 2(右) のようにとる。これらは2点穴あき円板であり $\alpha = [F_\alpha], \beta = [F_\beta], \gamma = [F_\gamma]$ の最小ノルム曲面になっている。このときノルム $X_T(\cdot)$ に関する単位球体は $\pm\alpha, \pm\beta, \pm\gamma, \pm(\alpha + \beta + \gamma)$ を頂点とする平行6面体である(図 2(左))。

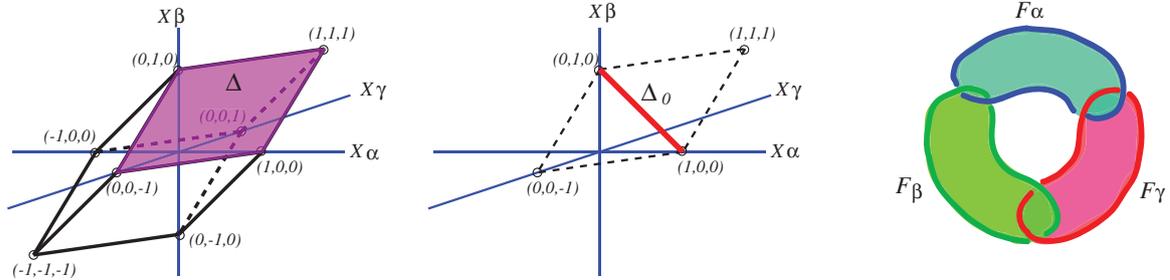


図 2: (左) $M = S^3 \setminus C_3$ における単位球体 (陰を付けた部分は面 Δ), (中央) $\Delta_0 \subset \Delta$, (右) 3成分鎖絡み目 C_3 とその補空間に埋め込まれた曲面 $F_\alpha, F_\beta, F_\gamma$.

補足 3.3. M に埋め込まれた曲面 F が M のファイバーであり, $a = [F] \in H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ とする. M に埋め込まれた非圧縮曲面 E について $a = [E]$ ならば E と F は M 内でイソトピックであることが知られている. 特にファイバー F は a の最小ノルム曲面である.

補足 3.4. 定理 3.1(2) より a の最小ノルム曲面 E が連結ならば E は M のファイバー曲面だが, そのモノドロミー $f_E : E \rightarrow E$ を写像類群の生成元を使って具体的に表示することは一般には難しい.

3.2 エントロピー関数

Δ を fiber face とする. エントロピー関数 $\text{ent}(\cdot) : \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q})) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ を次で定める. $a \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Z}))$ の最小ノルム曲面 E が連結であるとき, E は M のファイバーであることからモノドロミー $f_E : E \rightarrow E$ が定まる. M は双曲多様体なので f_E は擬アノソフ写像 (とイソトピック) である. これより a のエントロピー $\text{ent}(a) = \text{ent}([E])$ を擬アノソフ写像 f_E のエントロピー $\text{ent}(f_E)$ によって定める. $r \in \mathbb{Q}$ について $ra \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ のエントロピー $\text{ent}(ra)$ を

$$\text{ent}(ra) = \text{ent}(r[E]) = \frac{1}{|r|} \text{ent}([E]) = \frac{1}{|r|} \text{ent}(a)$$

によって定める. 擬アノソフ f_E の dilatation を用いることで dilatation 関数 $\lambda(\cdot) : \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q})) \rightarrow \mathbb{R}_{>1}$ を同様に定義することができる. このとき $\log(\lambda(\cdot)) = \text{ent}(\cdot)$ が成り立つ. ノルムとエントロピーの積 $X_T(\cdot)\text{ent}(\cdot) : \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q})) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は原点から延びる半直線上で定数になることに注意する.

Fried は $\frac{1}{\text{ent}(\cdot)} : \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q})) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は凹関数であり, 従って $\text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ 上で定義されていた $\text{ent}(\cdot)$ は $\text{int}(C_\Delta)$ 上に連続関数として一通りに拡張されることを示した [2]. 後に Matsumoto は次を示している.

定理 3.5 (Matsumoto[7]).

$$\frac{1}{\text{ent}(\cdot)} : \text{int}(C_\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$$

は狭義凹関数である.

この定理から連続関数 $X_T(\cdot)\text{ent}(\cdot) : \text{int}(C_\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ は原点から延びるある唯一の半直線上で最小値を持つことが従う. よって次の問題が考えられる.

問題 3.6. 関数 $X_T(\cdot)\text{ent}(\cdot) : \text{int}(C_\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ の最小値を実現するのはどの半直線か?

擬アノソフ写像の dilatation を求める 1 つの方法として train track を用いたものがある. 擬アノソフ写像は track map とよばれる滑らかなグラフ上の写像を定義するが, そのグラフ写像の遷移行列の最大固有値が dilatation を与える. fiber face Δ の $\text{int}(C_\Delta)$ 上の dilatation については, 個々の train track map の遷移行列を求める手続きは必要なく, 実は統一的に dilatation を求める方法があることを Fried, Oertel は示している.

定理 3.7 (Fried[2], Oertel[8]). M を S^1 上の曲面束とする. M に埋め込まれた連結な曲面 F_1, \dots, F_k について $[F_1], \dots, [F_k]$ は $H_2(M, \partial M; \mathbb{R})$ を生成すると仮定する. このとき M の fiber face Δ に対してある多項式 $P = P_\Delta \in \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_k]$ が存在し, $a = x_1[F_1] + \dots + x_k[F_k] \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ の dilatation $\lambda = \lambda(a)$ は $P(\lambda^{x_1}, \dots, \lambda^{x_k}) = 0$ を満たす.

定理 3.7 において dilatation λ は $P(\lambda^{x_1}, \dots, \lambda^{x_k})$ の最大の零点であることが期待されるが, それについては我々にはまだよくわからない.

4 3成分鎖絡み目補空間のファイバー構造

C_3 はファイバー絡み目であり, 従って少なくとも 1 つの面は fiber face であるが, C_3 の対称性より全ての面が fiber face になる. 図 2(左) で陰をつけた面を Δ とすると $\text{int}(\Delta)$ は次のように表せる.

$$\text{int}(\Delta) = \{x\alpha + y\beta + z\gamma \mid x + y - z = 1, x > 0, y > 0, x > z, y > z\}.$$

$x\alpha + y\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta)$ の最小ノルム曲面の位相的なタイプを次の (1), (2) を使って求めることができる.

- (1) $X_T(x\alpha + y\beta + z\gamma) = x + y - z$.
- (2) C_3 の補空間に埋め込まれた (最小ノルム曲面とは限らない) 曲面 F について $[F] = x\alpha + y\beta + z\gamma$ ならば, F の境界成分の個数は $(x, y + z) + (y, z + x) + (z, x + y)$. ((p, q) は p, q の最大公約数)

4.1 3成分鎖絡み目補空間のエントロピー関数

Oertel によるレシピを用いて, 我々は 3成分鎖絡み目補空間における定理 3.7 の多項式を求めた.

定理 4.1. $P(t_1, t_2, t_3) = -t_1 - t_2 + t_3 + t_1 t_2 - t_1 t_3 - t_2 t_3$ とする. このとき $x\alpha + y\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ の dilatation は $P(\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z) = 0$ を満たす.

$x\alpha + y\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ の dilatation は $P(\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z)$ の最大の零点であるという仮定のもと, 我々は C_3 の補空間について問題 3.6 を考察した.

命題 4.2. $x\alpha + y\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta(\mathbb{Q}))$ の dilatation は $P(\lambda^x, \lambda^y, \lambda^z)$ の最大の零点であると仮定する. このとき $X_T(\cdot)\text{ent}(\cdot) : \text{int}(C_\Delta) \rightarrow \mathbb{R}_{>0}$ の最小値を実現するのは原点 0 と $\alpha + \beta$ を通る半直線である.

証明. $x\alpha + y\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta)$ とすると $y\alpha + x\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta)$ であって, さらにこれら 2 つのホモロジー類に対するエントロピーと Thurston ノルムは等しいことがわかる. よって $\mathcal{P}(\cdot) = X_T(\cdot)\text{ent}(\cdot)$ の $x\alpha + y\beta + z\gamma$ における値と $y\alpha + x\beta + z\gamma$ における値は等しい. 従って $X_T(\cdot)\text{ent}(\cdot)$ の最小値を実現する直線が $x\alpha + y\beta + z\gamma$ を通るとすると $x = y$ でなければならない.

一方 $x\alpha + x\beta + \gamma$ と $(x-1)\alpha + (x-1)\beta - \gamma$ のエントロピーと Thurston ノルムの値は等しいことがわかる. $\mathcal{P}(\cdot)$ は原点を通る半直線上で一定であるから

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x\alpha + x\beta + \gamma) &= \mathcal{P}(\alpha + \beta + x^{-1}\gamma), \\ \mathcal{P}((x-1)\alpha + (x-1)\beta - \gamma) &= \mathcal{P}(\alpha + \beta - (x-1)^{-1}\gamma) \end{aligned}$$

が成立する. よって $\mathcal{P}(\cdot)$ の最小値を実現する直線は $\alpha + \beta + x^{-1}\gamma$ や $\alpha + \beta - (x-1)^{-1}\gamma$ を通らない. この事実と Matsumoto の定理より最小値を実現する直線は γ の係数が 0 でないホモロジー類を通らない. 従って最小値を実現するのは原点 0 と $\alpha + \beta$ を通る半直線である. \diamond

4.2 3成分鎖絡み目補空間に住んでいる擬アノソフブレイドの族

$x\alpha + y\beta + z\gamma \in \text{int}(C_\Delta)$ の γ の係数 z が 0 となる Δ の要素全体を Δ_0 とする (図 2(中央)). このとき

$$\text{int}(\Delta_0) = \{x\alpha + y\beta \mid x + y = 1, x > 0, y > 0\}.$$

$x\alpha + y\beta \in \text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ の最小ノルム曲面は $(x + y + 2)$ 点穴あき球面になることがわかり, 従ってモノドロミーは球面ブレイドで表せる. ここではモノドロミーをブレイドの生成元を用いて具体的に表すことを考える (cf. 補足 3.4). さらに馬蹄写像から得られるブレイドとの関係について述べる.

4.2.1 馬蹄ブレイド

円板上の長方形 R を図 3 のように移す円板上の微分同相写像 H を馬蹄写像という. 正確には R の横と縦の長さを一定の率で伸縮して出来上がった細長い長方形を折り畳み, R と重ねることによって H は定義される. 図 3(1) で陰をつけた部分は, H による像が R に属している点の集合を表している. 任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $H^n(x) \in R$ を満たす点 $x \in R$ 全体を Λ とする. H の Λ への制限は以下で考察するように記号力学系で記述される. いま S を 0 と 1 からなる両側無限列 $s = (\dots s_{-1}s_0|s_1\dots)$ の全体とする. ここでは s の各 i 成分 s_i を明示するために, $i = 0$ での成分の後ろに記号 $|$ を入れて表す. S に次のような距離を導入する.

$$d(s, t) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}, \quad \text{ここで}$$

$$s = (\dots s_0|s_1\dots), \quad t = (\dots t_0|t_1\dots).$$

各 $s = (\dots s_0|s_1\dots)$ の記号 $|$ を 1 つ右にずらす写像を $\sigma : S \rightarrow S$ と表す. 写像 $i : \Lambda \rightarrow S$ を次で定める. $i(x) = (\dots i_0|i_1\dots)$ とおくと

$$i_n = \begin{cases} 1 & (H^n(x) \in R_T \text{ のとき}), \\ 0 & (H^n(x) \in R_B \text{ のとき}). \end{cases}$$

ここで R_T, R_B はそれぞれ長方形 R の上半分, 下半分を表す. このとき $i : \Lambda \rightarrow S$ は同相写像であり, さらに $i \circ H|_\Lambda = \sigma \circ i$ が成り立つ. これより $\sigma : S \rightarrow S$ の性質は $H_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$ に翻訳され, $H|_\Lambda$ の周期点全体は Λ で稠密であることがわかる. $H_\Lambda : \Lambda \rightarrow \Lambda$ の周期点全体は $\sigma : S \rightarrow S$ の周期点全体, 即ち S の周期的な両側無限列全体と同一視できる.

H の周期軌道から成る有限集合を Q とする. 円板上の恒等写像と H を結ぶイソトピー $\{H_t\}_{t \in I=[0,1]}$ ($H_0 = id, H_1 = H$) をとると $b(Q; \{H_t\}_{t \in I}) = \bigcup_{t \in I} H_t(Q) \times \{t\}$ はブレイドである. これはイソトピー $\{H_t\}$ の取り方に依存するが, ブレイドのフルツイストの中を法とすると唯一つに定まる. フルツイストの中を法として, ブレイド $b(Q; \{H_t\}_{t \in I})$ と共役なブレイドを馬蹄ブレイドとよぶことにする.

4.2.2 $\text{int}(\Delta_0(\mathbb{Z}))$ に付随するブレイドの族

図 4(左) は 3 成分鎖絡み目のダイアグラムである. 同じ図の補空間に埋め込まれた曲面 F_α, F_β はホモロジー類 α, β の最小ノルム曲面である. これを用いて $x\alpha + y\beta \in \text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ のモノドロミーを具体的に与える操作 1, 2 を導入する (図 4(中央, 右)).

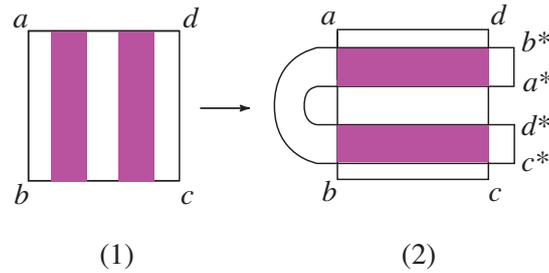


図 3: 馬蹄写像 (頂点 a の移った先を a^* などと表す).

操作 1 穴あき円板 F_β で補空間 $S^3 \setminus C_3$ を切り開き, その結果得られる 2つの円板のうち片方を時計方向に 360 度回転させ, もう片方の円板と張り合わせる.

操作 2 穴あき円板 F_α で補空間 $S^3 \setminus C_3$ を切り開き, その結果得られる 2つの円板のうち片方の円板を時計方向に 360 度回転させ, もう片方の円板と張り合わせる.

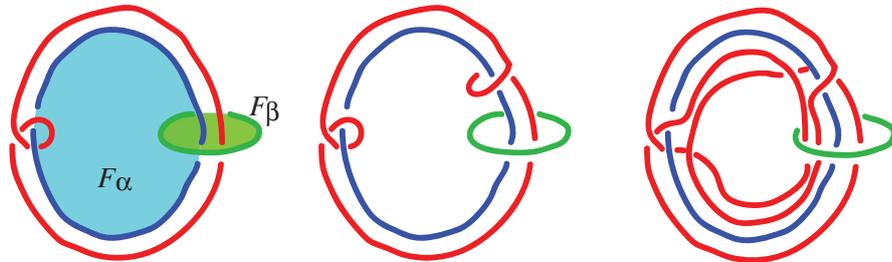


図 4: (左) 2つの円板 F_β, F_α , (中央) 操作 1 を 1 回行う, (右) 操作 1 を 1 回行った後, 操作 2 を 1 回行う.

操作 1,2 を有限回施して出来上がる多様体は $S^3 \setminus C_3$ と同相であるが, 特にあるブレイド b の braided link \bar{b} の補空間 $S^3 \setminus \bar{b}$ と同相である. 従って $S^3 \setminus C_3$ はある穴あき円板 F_b をファイバーとして許容し, その上のモノドロミーが b で表せる.

命題 4.3. 互いに素な自然数 x, y について $x\alpha + y\beta \in \text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ の最小ノルム曲面である $(x+y+2)$ 点穴あき球面上のモノドロミーは 1つの穴を固定する. つまりモノドロミーは指数 $x+y+1$ の (平面) ブレイド $b_{x,y}$ で表せる. さらに $b_{x,y}$ は上の操作 1,2 を有限回行うことによって得られる.

特に任意の $n \geq 3$ について, ファイバーが n 点穴あき円板となるホモロジー類 $v \in \text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ が存在する. 例えば $n = 8$ の場合は $6\alpha + \beta, 5\alpha + 2\beta, 4\alpha + 3\beta, 3\alpha + 4\beta, 2\alpha + 5\beta, \alpha + 6\beta$ を実現するファイバーはいずれも 8 点穴あき円板である.

操作 1 を k 回行い, その後に操作 2 を ℓ 回行うことによって得られるブレイドを $\mathcal{B}_{\ell, k\ell+1}$ と表す. その指数は $m = \ell(k+1) + 2$ であり, ブレイドの軸が張る m 点穴あき円板 $F_{\ell, k\ell+1}$ は $S^3 \setminus C_3$ のファイバーを与える.

命題 4.4. (1) $[F_{\ell, k\ell+1}] = \ell\alpha + (k\ell+1)\beta$ が成り立つ. 従って $\ell\alpha + (k\ell+1)\beta$ のモノドロミーは $\mathcal{B}_{\ell, k\ell+1}$ で表される.

(2) ブレイド b について $\langle b \rangle$ は b の共役類を表すことにすると

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{B}_{\ell, 1} \rangle &= \langle \sigma_2 \sigma_1^{-1} \sigma_2 \cdots \sigma_{\ell+1} \rangle \quad (k, \ell) = (0, \ell) \text{ のとき,} \\ \langle \mathcal{B}_{\ell, k\ell+1} \rangle &= \langle (\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{m-1})^k (\sigma_1^2 \sigma_2 \sigma_3 \cdots \sigma_{m-3}) \rangle \quad (k, \ell) \neq (0, \ell) \text{ のとき.} \end{aligned}$$

さらに $(k, \ell) \neq (0, \ell), (k, 1)$ ならば $\mathcal{B}_{\ell, k\ell+1}$ は馬蹄ブレイドである.

例 4.5. $(k, \ell) = (1, 1)$ のとき $\mathcal{B}_{1,2} = \sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_3\sigma_2\sigma_1\sigma_2\sigma_3$ (図 4(右)). このブレイドと $\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3\sigma_1^2$ は共役である.

自然数 ℓ を固定し, $x + y = 2\ell + 1$ を満たす $x\alpha + y\beta \in \text{int}(C_{\Delta_0})$ のモノドロミーのエントロピーは, Matsumoto の定理によって唯一つの最小値を持つ. この場合, 最小値は $\frac{2\ell+1}{2}\alpha + \frac{2\ell+1}{2}\beta$ が実現する. $x + y = 2\ell + 1$ かつ $(x, y) = 1$ を満たす $x\alpha + y\beta \in \text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ に制限するとモノドロミーを表すブレイド $b_{x,y}$ の共役類 $\langle b_{x,y} \rangle$ 全体の中で最小のエントロピーを持つブレイドは

$$\langle b_{\ell, \ell+1} \rangle = \langle \mathcal{B}_{\ell, 1 \cdot \ell+1} \rangle = \langle (\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell+1})(\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell-1}) \rangle$$

であることがわかる. $(\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell+1})(\sigma_1^2\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell-1})$ は 1 本の紐を “忘れる” ことによって指数が 1 つ減った $(2\ell + 1)$ -ブレイド $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell})(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell-2})$ を誘導する. 一般にブレイド b から何本かの紐を忘れることによって得られるブレイド b' のエントロピーには不等号 $\text{ent}(b) \geq \text{ent}(b')$ が成立するが, 今の状況ではブレイドのエントロピーは変化しないことがわかる. Hironaka-Kin は小さなエントロピーを持つ馬蹄ブレイドの族を発見したが [3], そこで考察したブレイドは指数が奇数の場合には $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell})(\sigma_1\sigma_2\sigma_3 \cdots \sigma_{2\ell-2})$ と一致する. このブレイドは知られている $(2\ell + 1)$ -ブレイドの中では最も小さいエントロピーを持つ. 以上の考察から我々は次を予想する.

予想 4.6. 任意の $m \geq 4$ について, 3 成分鎖絡み目補空間に埋め込まれたファイバーとなる m 点穴あき円板 D_m があり, その上のモノドロミーを表す m -ブレイドは 1 本の紐を忘れることによって最小の dilatation $\lambda(D_{m-1})$ を実現する $(m - 1)$ -ブレイドを誘導する.

この予想は $m = 4, 5, 6$ については正しい. m が偶数の場合には Hironaka-Kin が与えた奇数の指数を持つブレイドの族が最小の dilatation を持つ族であるならばこの予想は正しい.

4.3 3 成分鎖絡み目補空間のエントロピー関数の漸近的挙動

$\text{int}(C_{\Delta_0})$ 上のエントロピー関数の漸近的挙動を調べる. $x\alpha + y\beta \in \text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ の dilatation λ は多項式

$$P(\lambda^x, \lambda^y, 1) = \lambda^{x+y} - 2\lambda^x - 2\lambda^y + 1 = \lambda^y(\lambda^x - 2) - 2\lambda^x + 1$$

の零点である. $R(x) = \lambda^x - 2$ とおくと reciprocal polynomial $R_*(x) = 1 - 2\lambda^x$ を使って

$$P(\lambda^x, \lambda^y, 1) = \lambda^y R(x) + R_*(x)$$

と表される. このような形の多項式は $y \rightarrow \infty$ ($y \in \mathbb{N}$) のとき, 絶対値が 1 よりも大きい $P(\lambda^x, \lambda^y, 1)$ の零点の集合は (重複をこめて) $R(x)$ の零点の集合に収束するという著しい性質を持っている. この場合 $R(x)$ の実の零点は $2^{1/x}$ のみであり, 従って $P(\lambda^x, \lambda^y, 1)$ の実の零点は $y \rightarrow \infty$ ($y \in \mathbb{N}$) のとき $2^{1/x}$ に収束する. 従って $\text{int}(C_{\Delta_0}(\mathbb{Z}))$ 上で定義されたエントロピー関数は $\text{int}(C_{\Delta_0})$ 上に一通りに拡張されることから次が得られる.

定理 4.7. x, y を正の実数とする.

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \text{ent}(x\alpha + y\beta) = \frac{\log 2}{x}.$$

一方 $\lim_{x, y \rightarrow \infty} \text{ent}(x\alpha + y\beta) = 0$ が成り立つ. これは $\text{ent}(x\alpha + x\beta) = \frac{1}{x}\text{ent}(\alpha + \beta)$ であることと, $y \geq x$ ならば $\text{ent}(x\alpha + x\beta) \geq \text{ent}(x\alpha + y\beta)$ であること [6] より示される. 以上より $\text{int}(C_{\Delta_0})$ 上のエントロピー関数が漸近的にどのように振る舞うかについて完全にわかった.

参考文献

- [1] J. Brock, Weil-Petersson translation distance and volumes of mapping tori, *Communication in Analysis and Geometry* 11 (2003) 987-999.
- [2] D. Fried, Flow equivalence, hyperbolic systems and a new zeta function for flows, *Commentarii Mathematici Helvetici*. 57 (1982) 237-259.
- [3] E. Hironaka and E. Kin, A family of pseudo-Anosov braids with small dilatation, *Algebraic and geometric topology* 6 (2006) 699-738.
- [4] E. Kin and M. Takasawa, Two invariants of pseudo-Anosov mapping classes: entropy vs hyperbolic volume, in preparation.
- [5] M. Linch, A comparison of metrics on Teichmüller space, *Proceedings of the American Mathematical Society* 43, 2 (1974) 349-352.
- [6] D. Long and U. Oertel, Hyperbolic surface bundles over the circle, *Progress in knot theory and related topics, Travaux en Course* 56, Hermann, Paris (1997) 121-142.
- [7] S. Matsumoto, Topological entropy and Thurston's norm of atoroidal surface bundles over the circle, *Journal of the Faculty of Science, University of Tokyo, Section IA. Mathematics* 34 (1987) 763-778.
- [8] U. Oertel, Affine laminations and their stretch factors, *Pacific Journal of Mathematics* 182, no. 2 (1998) 303-328.
- [9] H. Royden, Invariant Metric on Teichmüller space, *Contributions to analysis : a collection of papers dedicated to Lipman Bers* (Ed. L. V. Ahlfors), Academic Press, New York (1974).
- [10] W. P. Thurston, A norm of the homology of 3-manifolds, *Memoirs of the American Mathematical Society* 339 (1986) 99-130.

ハンドル体の3次元球面への埋め込みと カンドルコサイクル不変量

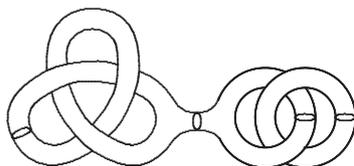
石井敦（京都大学数理解析研究所）

1 はじめに

ハンドル体とは向き付け可能閉曲面を境界に持つ、次の図のような3次元多様体のことであり、いくつかの1ハンドル ($D^2 \times [0, 1]$, $D^2 \times \{0, 1\}$) を向きを逆にする同相写像を用いて3次元球体 B^3 に貼り合わせることで得られます。



3次元球面 S^3 へ埋め込まれたハンドル体を**ハンドル体結び目** (handlebody-knot) と呼びます。またいくつかのハンドル体結び目の非交和を**ハンドル体絡み目** (handlebody-link) と呼びます。



ハンドル体絡み目の例

二つのハンドル体絡み目は S^3 のイソトピーによって移りあうときに同値であると定義します。本稿では、ハンドル体絡み目に対して基本変形を与え、岩切雅英氏との共同研究によって得られたカンドルコサイクル不変量を紹介します。

2 ハンドル体絡み目と空間グラフ

空間グラフとは S^3 へ埋め込まれたグラフのことです。二つの空間グラフは S^3 のイソトピーによって移りあうときに同値であると定義します。

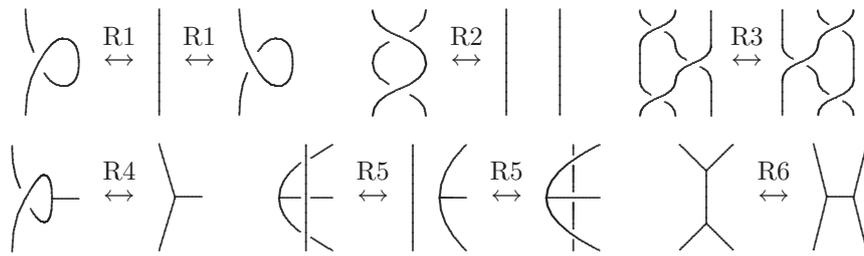
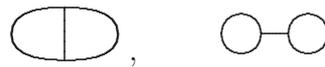


図 1: ライデマイスター変形 (ハンドル体絡み目)

任意のハンドル体絡み目はある空間グラフの正則近傍として得られるので、ハンドル体絡み目を表すために空間グラフを用いることができます。ただし、ハンドル体絡み目を表す空間グラフの選び方は一意ではありません。たとえば、次の二つの空間グラフは同値なハンドル体絡み目を表します。



(二つの空間グラフはハンドル体絡み目として同値な正則近傍を持つとき、近傍同値 [5] であると呼ばれます。) 空間グラフを用いてハンドル体絡み目を研究するためには、二つの空間グラフが同値なハンドル体絡み目を表すための必要十分条件を明らかにする必要があります。

3 価グラフといくつかの円周の S^3 への埋め込みを空間スパイン (spatial spine) と呼びます。空間スパインは空間グラフの特別なものであることができます。任意のハンドル体絡み目はある空間スパインによって表されます。空間スパインに IH 変形を行っても、空間スパインの表すハンドル体絡み目は変化しません。ここで IH 変形とは図 1 の R6 変形を S^3 に埋め込まれた円板において行う変形です。次の定理では、二つの空間スパインが同値なハンドル体絡み目を表すための必要十分条件を与えます。

定理 ([2]) 次の三つの条件は同値である。

- 二つの空間スパインが同値なハンドル体絡み目を表す。
- 二つの空間スパインが S^3 のイソトピーと IH 変形を有限回用いることで移りあう。
- 二つの空間スパインのダイアグラムが図 1 の変形を有限回用いることで移りあう。

以下の節では、ダイアグラムにカンドル彩色を定義し、ハンドル体絡み目のカンドルコサイクル不変量を導入します。

3 カンドル

この節では、ダイアグラムの弧の彩色に用いられる代数であるカンドル X と、ダイアグラムの領域の彩色に用いられる代数である X -集合を定義します。

三つの公理 Q_1, Q_2, Q_3 を満たす空でない集合 X と二項演算 $*$: $X \times X \rightarrow X$ の組 $(X, *)$ をカンドル[3, 4] と呼びます。

$$Q_1. a * a = a \quad (\forall a \in X).$$

$$Q_2. S_a : X \rightarrow X \text{ を } S_a(x) = x * a \text{ で定義すると, } S_a \text{ は全単射 } (\forall a \in X).$$

$$Q_3. (a * b) * c = (a * c) * (b * c) \quad (\forall a, b, c \in X).$$

よく知られているカンドルの例を紹介します。

- X を空でない集合とし、二項演算を $a * b := a$ で定義すると、 $(X, *)$ はカンドルになります。このカンドルは自明カンドルと呼ばれています。
- $X := \mathbb{Z}_p (= \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ とし、二項演算を $a * b := 2b - a$ で定義すると、 $(X, *)$ はカンドルになります。このカンドルは二面体カンドルと呼ばれています。
- $X := \mathbb{Z}_2[t, t^{-1}]/(t^2 + t + 1)$ とし、二項演算を $a * b := ta + (1 - t)b$ で定義すると、 $(X, *)$ はカンドルになります。このカンドルは四面体カンドルと呼ばれています。
- $X := G$ を群とし、二項演算を $a * b := b^{-1}ab$ で定義すると、 $(X, *)$ はカンドルになります。このカンドルは共役カンドルと呼ばれています。

次に X -集合を定義し、例を紹介します。カンドル X の付随群 $\text{As}(X)$ は次で定義されます。

$$\text{As}(X) = \langle x \in X \mid x * y = y^{-1}xy \ (x, y \in X) \rangle.$$

空でない集合 Y に $\text{As}(X)$ の右作用が与えられているとき、 Y を X -集合と呼びます。 $y \in Y$ に $g \in X$ を作用させることで得られる Y の元を $y \tilde{*} g$ で表します。このとき、次が成り立ちます。

$$\tilde{Q}_2. \tilde{S}_a : Y \rightarrow Y \text{ を } \tilde{S}_a(y) = y \tilde{*} a \text{ で定義すると, } \tilde{S}_a \text{ は全単射 } (\forall a \in X).$$

$$\tilde{Q}_3. (y \tilde{*} a) \tilde{*} b = (y \tilde{*} b) \tilde{*} (a * b) \quad (\forall y \in Y, \forall a, b \in X).$$

よく知られている X -集合の例を紹介します。

- $Y := X$ とし、右作用を $y \tilde{*} a := y * a$ によって定義すると、 $(Y, \tilde{*})$ は X -集合になります。
- $Y := \{y\}$ とし、右作用を $y \tilde{*} a := y$ によって定義すると、 $(Y, \tilde{*})$ は X -集合になります。

カンドル X 及び X -集合 Y のタイプを次で定義します。

$$\text{type}(X) := \min\{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid S_a^i = \text{id}_X \ (\forall a \in X)\},$$

$$\text{type}(Y) := \min\{i \in \mathbb{Z}_{>0} \mid \tilde{S}_a^i = \text{id}_Y \ (\forall a \in X)\}.$$

ここで $S_a^i \in \text{Aut}(X)$ 及び $\tilde{S}_a^i \in \text{Aut}(Y)$ は写像の合成によって定まります。また $\#X < \infty$ ならば $\text{type}(X) < \infty$ 、 $\#Y < \infty$ ならば $\text{type}(Y) < \infty$ が成り立ちます。そこで本稿ではカンドル及び X -集合は有限集合であると仮定します。 $\text{type}(X, Y)$ を $\text{type}(X)$ と $\text{type}(Y)$ の最小公倍数とすると次が成り立ちます。

$$\text{type}(X, Y) = \min\{i > 0 \mid S_a^i = \text{id}_X, \tilde{S}_a^i = \text{id}_Y \ (\forall a \in X)\}.$$

4 カンドル彩色

\mathcal{S} を向き付けられた空間グラフ全体の集合、 $\mathcal{S}_m \subset \mathcal{S}$ を各頂点で入ってくる辺の本数と出て行く辺の本数が m を法として等しい空間グラフの全体の集合とします。この節では、前節に導入したカンドル X 及び X -集合 Y を用いて、 \mathcal{S}_m に属する空間グラフに対しダイアグラムの彩色を定義します。

向き付けられた空間グラフのダイアグラムにおいて、通常、辺の向きは辺に沿った矢印で表します。本稿では、辺の向きを表示するために、通常の向きを半時計回りに $\pi/2$ 回転して表すことがあります。

空間グラフのダイアグラム D は頂点の近傍を取り除くことでいくつかの曲線の非交和として表されます。これらの曲線のことを D の弧と呼び、 D の弧全体の集合を $\mathcal{A}(D)$ で表します。また、空間グラフのダイアグラム D において交点の上下情報を無視することで（交点を4個の頂点に置き換えることで）平面に埋め込まれたグラフを得ることができます。このグラフの補空間の連結成分のことを D の領域と呼び、 D の領域全体の集合を $\mathcal{R}(D)$ で表します。

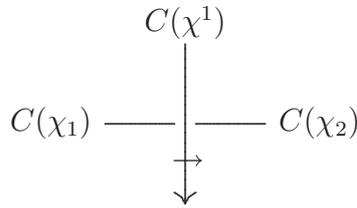
X をカンドル、 Y を X -集合とします。 D を $L \in \mathcal{S}_{\text{type}(X,Y)}$ のダイアグラムとします。各交点 χ 、頂点 ω 、弧 α において三つの条件 C_1, C_2, C_3 を満たす写像

$$C : \mathcal{A}(D) \cup \mathcal{R}(D) \rightarrow X \cup Y \quad (C(\mathcal{A}(D)) \subset X, C(\mathcal{R}(D)) \subset Y)$$

を D の X_Y -彩色と呼びます。

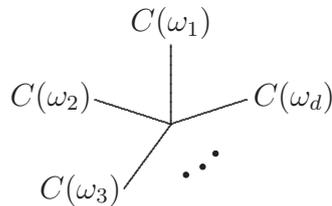
C_1 . 交点 χ において、上の弧を χ^1 、下の弧を χ_1, χ_2 とします。ただし χ_1, χ_2 は χ^1 の向きが χ_2 を指すように選びます。このとき

$$C(\chi_1) * C(\chi^1) = C(\chi_2).$$



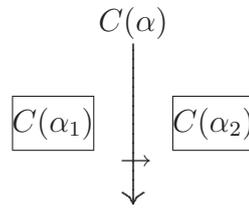
C_2 . 頂点 ω において、頂点に接続する弧を $\omega_1, \dots, \omega_d$ とします。このとき

$$C(\omega_1) = \dots = C(\omega_d).$$



C_3 . 弧 α において、弧 α を境に接する領域を α_1, α_2 とします。ただし α_1, α_2 は α の向きが α_2 を指すように選びます。このとき

$$C(\alpha_1) \tilde{*} C(\alpha) = C(\alpha_2).$$



D の X_Y -彩色全体の集合を $Col_X(D)_Y$ で表します. 局所的に異なる二つのダイアグラム D, E に対して, 共通する弧の集合を $A(D, E)$ で, 共通する領域の集合を $\mathcal{R}(D, E)$ で表します.

定理 X をカンドル, Y を X -集合とします. D を $L \in \mathcal{S}_{\text{type}(X, Y)}$ のダイアグラムとします. 図2のいずれかの変形を D に一度だけ行って得られるダイアグラムを E とします. このとき D の X_Y -彩色 $C \in Col_X(D)_Y$ に対して $C|_{A(D, E)} = C_{D, E}|_{A(D, E)}$ と $C|_{\mathcal{R}(D, E)} = C_{D, E}|_{\mathcal{R}(D, E)}$ を満たす E の X_Y -彩色 $C_{D, E} \in Col_X(E)_Y$ が唯一つ存在します.

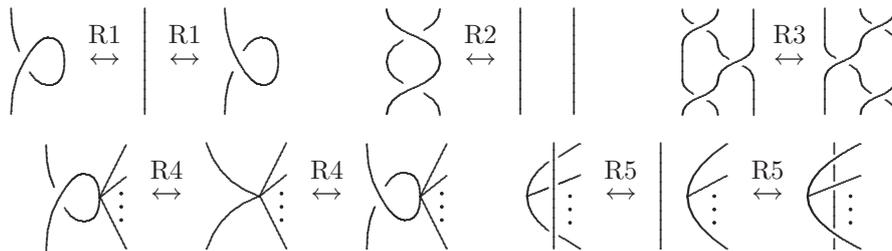


図 2:

二つの空間グラフのダイアグラムが同値な空間グラフを表すための必要十分条件は, 二つのダイアグラムが図2の変形を有限回用いることで移りあうことです. したがって $\#Col_X(D)_Y$ は L の不変量であることが分かります.

5 カンドルホモロジー

Carter, Jelsovsky, Kamada, Langford, Saito [1] は, カンドル X に対してカンドルホモロジー群及びカンドルコホモロジー群を定義しました. 本節では, カンドル X と X -集合 Y に対して, タイプに関連した新しいホモロジーを導入します.

カンドル X と X -集合 Y に対して鎖複体 $C_*^R(X)_Y = \{C_n^R(X)_Y, \partial_n\}$ を次のように定義します.

$$C_n^R(X)_Y := \mathbb{Z}\{(y, x_1, \dots, x_n) \mid y \in Y, x_1, \dots, x_n \in X\},$$

$$\partial_n(y, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^i ((y, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, x_n) - (y * x_i, x_1 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, x_n)).$$

この鎖複体に対して $D_n^Q(X)_Y, D_n^N(X)_Y \subset C_n^R(X)_Y$ を次で定義します.

$$D_n^Q(X)_Y := \mathbb{Z}\{(y, x_1, \dots, x_n) \mid x_i = x_{i+1} \text{ for some } i\},$$

$$D_n^N(X)_Y := \mathbb{Z} \left\{ \sum_{j=0}^{\text{type}(X,Y)-1} (y, x_1, \dots, x_n)_{i+}^j \mid i = 1, \dots, n \right\}.$$

ここで

$$(y, x_1, \dots, x_n)_{i+}^j := (y \tilde{*}^j x_i, x_1 *^j x_i, \dots, x_{i-1} *^j x_i, x_i, \dots, x_n).$$

次の補題より, $D_n^Q(X)_Y$ と $D_n^N(X)_Y$ は $C_n^R(X)_Y$ の部分複体です.

補題 $\partial_n(D_n^Q(X)_Y) \subset D_{n-1}^Q(X)_Y, \partial_n(D_n^N(X)_Y) \subset D_{n-1}^N(X)_Y.$

したがって $C_n^N(X)_Y := C_n^R(X)_Y / (D_n^Q(X)_Y + D_n^N(X)_Y)$ と定義すると, $(C_n^N(X)_Y, \partial_n)$ は鎖複体となります. ここでは $\partial_n : C_n^R(X)_Y \rightarrow C_{n-1}^R(X)_Y$ から誘導された境界作用素を同じ記号 ∂_n で表しています. A をアーベル群とすると, A 係数のホモロジー群 $H_*^N(X; A)_Y$ とコホモロジー群 $H_N^*(X; A)_Y$ が次の複体から得られます.

$$C_*^N(X; A)_Y = C_*^R(X)_Y \otimes A, \quad \partial = \partial \otimes \text{id};$$

$$C_N^*(X; A)_Y = \text{Hom}(C_*^R(X)_Y, A), \quad \delta = \text{Hom}(\partial, \text{id}).$$

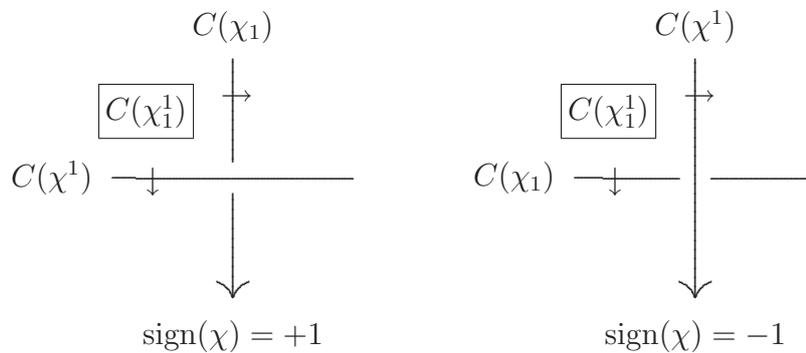
6 カンドルコサイクル不変量

X をカンドル, Y を X -集合とします. D を $L \in \mathcal{S}_{\text{type}(X,Y)}$ のダイアグラムとします. f を $C_N^*(X; A)_Y$ の 2-コサイクルとします. X_Y -彩色 $C \in$

$Col_X(D)_Y$ に対して, D の交点 χ でのボルツマン重み $B(\chi; C)$ は次で定義されます.

$$B(\chi; C) = \text{sign}(\chi) f(C(\chi_1^1), C(\chi_1), C(\chi^1)).$$

この等式における記号の説明をします. $\text{sign}(\chi)$ は交点 χ の符号 ± 1 を表します. χ_1^1, χ_1, χ^1 は, それぞれ交点 χ における領域, 下の弧, 上の弧を表します. ただし χ^1 の向きは χ_1 とは反対の方向を指し, χ^1 と χ_1 の向きは χ_1^1 から出て行く方向を指すとします.



各交点でのボルツマン重みを足し合わせることで $B(C)$ を定義します.

$$B(C) := \sum_{\chi: D \text{ の交点}} B(\chi, C).$$

このとき, 次の定理が成り立ちます.

定理 X をカンドル, Y を X -集合とします. D を $L \in \mathcal{S}_{\text{type}(X,Y)}$ のダイアグラムとします. f を $C_N^*(X; A)_Y$ の 2-コサイクルとします. このとき

$$\Phi_f(D) := \{B(C) \mid C \in Col_X(D)\}.$$

は L の不変量になります.

この定理より, $\Phi_f(L) := \Phi_f(D)$ と定義します.

7 ハンドル体絡み目の不変量

L を空間スパインとします. 辺 e の二つの向きから成る集合を \mathcal{O}_e で表します. 辺 e に対して, $\varphi_e(-o) = -\varphi_e(o)$ を満たす写像 $\varphi_e: \mathcal{O}_e \rightarrow \mathbb{Z}_m$ を

e の \mathbb{Z}_m -フローと呼びます. L の各辺 e に \mathbb{Z}_m -フロー φ_e を与える写像 φ は, 任意に与えた L の向きに対して次の等式を各頂点 v でみたすとき, L の \mathbb{Z}_m -フローと呼ばれます.

$$\sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{in}}(v)} \varphi_e(o_e) = \sum_{e \in \mathcal{E}_{\text{out}}(v)} \varphi_e(o_e).$$

ここで o_e は e の向きであり,

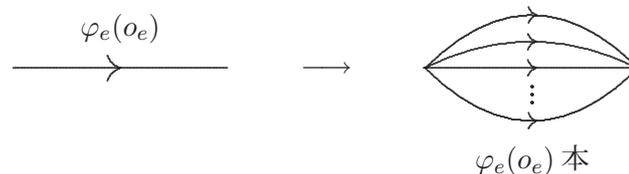
$\mathcal{E}_{\text{in}}(v) := \{e \mid \text{向き } o_e \text{ に関して, } e \text{ は頂点 } v \text{ に入ってくる辺}\},$

$\mathcal{E}_{\text{out}}(v) := \{e \mid \text{向き } o_e \text{ に関して, } e \text{ は頂点 } v \text{ から出ていく辺}\}.$

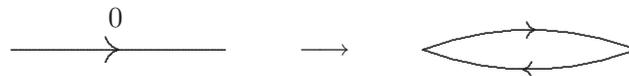
L の \mathbb{Z}_m -フロー全体の集合を $\text{Flow}(L; \mathbb{Z}_m)$ で表します. $\varphi, \varphi' \in \text{Flow}(L; \mathbb{Z}_m)$ に対して $\varphi + \varphi' \in \text{Flow}(L; \mathbb{Z}_m)$ を $(\varphi + \varphi')_e = \varphi_e + \varphi'_e$ で定義すると群を成し, $\text{Flow}(L; \mathbb{Z}_m) \cong H_1(L; \mathbb{Z}_m)$ が成り立ちます.

L の各辺 e に向き o_e を与えて得られる向き付けられた空間スパインを (L, o) で表します. $\varphi \in \text{Flow}(L; \mathbb{Z}_m)$ に対して, $(L, o)^{(\varphi)}$ を (L, o) の各辺 e を次のように取り替えることによって得られる \mathcal{S}_m の元とします.

- $\varphi_e(o_e) \in \{1, 2, \dots, m-1\}$ の場合, 辺 e を $\varphi_e(o_e)$ 本の平行な辺に取り替え, これらの辺に o_e に同調する向きを与えます.



- $\varphi_e(o_e) = 0$ の場合, 辺 e を 2 本の平行な辺に取り替え, これらの辺に互いに逆向きになるように向きを与えます.



ただし, ここで円周成分は一つの辺と一つの頂点によって構成されると仮定します. $(L, o)^{(\varphi)}$ は (L, o) と φ から一意的に定まることに注意します.

補題 X をカンドル, Y を X -集合とします. f を $C_N^*(X; A)_Y$ の 2-コサイクルとします. L を空間スパイン, φ を L の $\mathbb{Z}_{\text{type}(X, Y)}$ -フローとします.

このとき $\Phi_f((L, o)^{(\varphi)})$ は o の選び方に寄らずに定まります. つまり o と o' を空間スパイン L の向きとすると次の等式が成り立ちます.

$$\Phi_f((L, o)^{(\varphi)}) = \Phi_f((L, o')^{(\varphi)}).$$

この補題より $\Phi_f^\Sigma(L) := \{\Phi_f((L, o)^{(\varphi)}) \mid \varphi \in \text{Flow}(L; \mathbb{Z}_{\text{type}(X, Y)})\}$ は矛盾なく定義され, 次の定理が成り立ちます.

定理 ハンドル体絡み目 H が空間スパイン L によって表されるとき, $\Phi_f^\Sigma(L)$ はハンドル体絡み目 H の不変量になります.

参考文献

- [1] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003) 3947–3989.
- [2] A. Ishii, *Moves and invariants for knotted handlebodies*, Algebr. Geom. Topol. (to appear).
- [3] D. Joyce, *A classifying invariants of knots, the knot quandle*, J. Pure Appl. Alg. **23** (1982) 37–65.
- [4] S. Matveev, *Distributive groupoids in knot theory*, (in Russian), Math. USSR-Sbornik **47** (1982) 73–83.
- [5] S. Suzuki, *On linear graphs in 3-sphere*, Osaka J. Math. **7** (1970) 375–396.

606-8502

京都府京都市左京区北白川追分町

京都大学数理解析研究所

aishii@kurims.kyoto-u.ac.jp

Finding ideal points from an ideal triangulation

蒲谷祐一

(東京工業大学理工学研究科数学専攻)

1 序

3次元多様体の基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現 (または $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現) の共役類のなす空間は character variety と呼ばれている. Culler-Shalen は character variety の ideal point に対応して incompressible surface が存在する事を示した [Cu-Sh]. この理論の応用として cyclic surgery theorem などの重要な定理が得られている [CGLS].

Culler-Shalen の理論は非常に強力である一方, 具体的な3次元多様体に対してその理論を適用して incompressible surface を見つけるのは難しい. 本稿では3次元多様体の理想四面体分割 (ideal triangulation) を用いて ideal point を発見する方法について解説する. 応用として結び目の補空間の boundary slope の計算例をあげる.

2 Character variety

N をコンパクトで向き付け可能な3次元多様体とする. $R(N)$ を $\pi_1(N)$ の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現全体の空間とする. (Culler-Shalen 理論においては $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ 表現を考えることが多いが本稿では $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の空間を考える. Culler-Shalen の理論は $\mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$ の場合と同様に成り立つ [Bo-Za].) $R(N)$ には共役 $\rho \mapsto g^{-1}\rho g$ をとることにより $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ が作用する. $R(N)$ の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 作用による商空間 $X(N)$ は character variety と呼ばれている. この空間は $\mathbb{C}[R(N)]^{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})}$ ($R(N)$ の座標環の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ で不変な元) の定める代数的集合として実現される. $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して character の2乗 $\rho \mapsto (\mathrm{tr}(\rho(\gamma)))^2$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ による共役で不変なので $\mathbb{C}[R(N)]^{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})}$ の元である. これを τ_γ と書く. $\mathbb{C}[R(N)]^{\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})}$ は τ_γ によって生成されることが知られている [Cu-Sh], [He-Po] (故に character variety と呼ばれる). 3次元双曲空間 \mathbb{H}^3 の向きを保つ isometry は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ と同形である. そのため N が双曲多様体であるときには $X(N)$ は離散忠実表現 $[\rho_0]$ を含む. $[\rho_0]$ を含む component はアファイン代数曲線になることが知られている.

3 Ideal points

C をアファイン代数曲線とする. C をコンパクト化して smooth にしたものを \tilde{C} とかく. $\phi: \tilde{C} \rightarrow C$ を双有理写像とすると $\tilde{C} - \phi(C)$ を ideal point と呼ぶ. 直感的には ideal point とは C の極限の点である. $\mathbb{C}[C]$ を C の関数環, $\mathbb{C}(C)$ をその商体とする. \tilde{C} の点 x に対して x における order をはかることによって discrete valuation $v: \mathbb{C}(C) \rightarrow \mathbb{Z}$ が対応することが分かる. v は $v(x_1 x_2) = v(x_1) + v(x_2)$, $v(x_1 + x_2) \geq \min(v(x_1), v(x_2))$ をみたす. とくに ideal point に対応する valuation はある $f \in \mathbb{C}[C]$ について $v(f) < 0$ をみたす.

以下 character variety の ideal point について述べる. このとき ideal point は基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現の“極限”と解釈できる. ideal point に対応する valuation を v とすると, ある $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して $v(\tau_\gamma) < 0$ が成立する. $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現が双曲構造からくる場合には $(\mathrm{tr}(\gamma))^2$ は γ の長さに関係することを考えると, $v(\tau_\gamma)$ は $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現が ideal point に近づくときの γ の長さの発散の order を測っていると解釈できる. Culler-Shalen は ideal point に対応して $\pi_1(N)$ の tree への作用を構成しその dual として N の incompressible surface が存在することが示した [Cu-Sh]. ideal point に対応する valuation を v とすると $v(\tau_\gamma) \geq 0$ となる基本群の元 γ は対応する incompressible surface と交わらないことがわかる.

ある $\gamma \in \pi_1(\partial N)$ について $v(\tau_\gamma) < 0$ であるとする. このとき対応する incompressible surface は境界を持つことがわかる. このときある δ で $v(\tau_\delta) = 0$ となるものが存在し, δ は incompressible surface の boundary slope となる.

3.1 A-polynomial

一般に ideal point を求めることは難しい. 理由の一つとして $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現を扱いやすい形でパラメトライズする方法がないからである. しかしながら A 多項式という 2 変数多項式から ideal point を求める方法が存在する. $\partial N \rightarrow N$ は表現の間の写像 $X(N) \rightarrow X(\partial N)$ を定める. 境界はトーラスであるため境界の基本群の表現は生成元の固有値の値によって記述できる. そのため $X(N)$ はほぼ $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ と同一視できる. $X(N)$ の $\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ での像は一般に 1 次元であり 2 変数多項式 $A_M(L, M)$ を定める. これは A 多項式と呼ばれている [CCGLS]. $A_M(M, L) = \sum a_{ij} M^i L^j$ としたとき $\{(i, j) | a_{ij} \neq 0\}$ の \mathbb{R}^2 での凸集合をとったものは Newton 多角形と呼ばれている. この Newton 多角形の各辺に対応して ideal point が存在する [CCGLS]. さらに対応する incompressible surface の boundary slope は Newton 多角形の辺の傾きに等しいことも示されている.

このように A 多項式が分かっただけでは character variety の ideal point は簡単に見つけることができる。しかしながら A 多項式の計算は非常に難しい。また character variety の情報を境界の表現に制限していることから一般には character variety より情報が減ってしまうことがありうる。

4 Ideal triangulation

$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) | t > 0\}$ を 3次元双曲空間とする。 $\mathbb{C}P^1$ は \mathbb{H}^3 の無限遠点と見なせる。 $\mathbb{C}P^1$ の異なる 4 点の \mathbb{H}^3 での凸包を**理想四面体** (ideal tetrahedron) と呼ぶ。以下、理想四面体には向きが指定されているものとする。 (z_1, z_2, z_3, z_4) ($z_i \in \mathbb{C}P^1, z_i \neq z_j (i \neq j)$) を理想四面体の頂点とする。理想四面体の辺 (z_1, z_2) に対して $[z_1 : z_2 : z_3 : z_4] = \frac{(z_3 - z_2)(z_4 - z_1)}{(z_3 - z_1)(z_4 - z_2)}$ と定めることで理想四面体をパラメトライズする事ができる。ここで $(1, 2, 3, 4)$ は理想四面体の向きと一致する順にとる。 $z_i \neq z_j (i \neq j)$ よりこのパラメータは 0, 1 にはならない。また $g \in \text{PSL}(2, \mathbb{C})$ に対して $[gz_1 : gz_2 : gz_3 : gz_4] = [z_1 : z_2 : z_3 : z_4]$ が成立する。定義から (z_1, z_2) と (z_3, z_4) のパラメータは一致することがわかる。 (z_1, z_2) のパラメータを z とすると (z_1, z_4) , (z_2, z_3) のパラメータは $\frac{1}{1-z}$, (z_1, z_3) , (z_2, z_4) のパラメータは $1 - \frac{1}{z}$ になる。

K を 3 単体の有限集合を各 3 単体の境界の 2 単体をペアで張り合わせたものとする。 $K^{(i)}$ を K の i -skeleton, $N(K^{(0)})$ を 0-skeleton の近傍とする。 $K - N(K^{(0)})$ が M に同相であるとき、 K は N の (位相的) **理想四面体分割** (ideal triangulation) であると言う。理想四面体分割とは N の境界で cone をとり、cone の頂点が K の唯一つの頂点になるように 3 角形分割を与えたものとも言い換えられる。

n を K の 3 単体の個数とする。 K の各 3 単体に理想四面体の構造を入れる。各理想四面体のパラメータを z_k とし、各理想四面体を $\Delta(z_k)$ で表す。(実際には z_k は理想四面体の辺の選び方に依存するが簡単のため省略する。) e_i を K の辺とする。 N の Euler 数は 0 であるので辺は n 本ある事が分かる。 e_i を共有する理想四面体の辺のパラメータは $z_k, \frac{1}{1-z_k}, 1 - \frac{1}{z_k}$ のいずれかである。そこで e_i を共有する辺の複素パラメータをすべて掛け合わせると、

$$R_i = \prod_{k=1}^n z_k^{p_{i,k}} \left(\frac{1}{1-z_k} \right)^{p'_{i,k}} \left(1 - \frac{1}{z_k} \right)^{p''_{i,k}} = \prod_{k=1}^n (-1)^{p''_{i,k}} z_k^{r'_{i,k}} (1-z_k)^{r''_{i,k}}$$

$$(r'_{i,k} = p_{i,k} - p'_{i,k}, \quad r''_{i,k} = p''_{i,k} - p'_{i,k} \quad (i = 1, \dots, n))$$

(4.1)

とかける。これらの方程式は gluing equation と呼ばれる。各理想四面

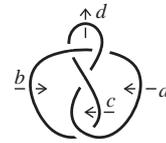
体のパラメータは対辺で同じであることと $z_k(\frac{1}{1-z_k})(1-\frac{1}{z_k}) = -1$ より $R_1 R_2 \dots R_n = 1$ が成立する. よって本質的に $n-1$ 個の gluing equation のみを考えればよい. K に対して *deformation variety* を次のように定義する.

$$\mathcal{D}(N, K) = \{(z_1, \dots, z_n) \in (\mathbb{C} - \{0, 1\})^n \mid R_1(z) = 1, \dots, R_{n-1}(z) = 1\}. \quad (4.2)$$

以下 $\mathcal{D}(N, K)$ を $\mathcal{D}(N)$ と略す. $(z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{D}(N)$ とする. $\Delta(z_1)$ を \mathbb{H}^3 に実現し $D(\Delta(z_1)) \subset \mathbb{H}^3$ とする. 次に $\Delta(z_1)$ と隣り合っている理想四面体を \mathbb{H}^3 に $D(\Delta(z_1))$ に隣り合うように置く. これを繰り返すことにより developing map $D: \tilde{N} \rightarrow \mathbb{H}^3$ が構成できる. $\gamma \in \pi_1(N)$ に対し, $D(\gamma(\Delta(z_1))) = \rho(\gamma)D(\Delta(z_1))$ と ρ を定義すると ρ は基本群の $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ 表現を与える. 初めの $D(\Delta(z_1))$ の置き方を変えると ρ は共役で変わるだけなので, $\phi: \mathcal{D}(N) \rightarrow X(N)$ が well-defined に定まる. さらにこの写像は代数的である事がわかる.

$R_i = 1$ は z_ν と $1-z_\nu$ の積という簡明な表示を持っている. そこで $\mathcal{D}(N)$ の ideal point を調べることにより $X(N)$ の ideal point を見つける事にする.

例 4.1 N を 8 の字結び目の補空間とする. a, b, c, d を Wirtinger 表示の生成元とする. N は 2 つの理想四面体に分割できる. 各理想四面体のパラメータを x, y とおくと, gluing equation は



$$xy(1-x)(1-y) = 1$$

で与えられる. N の基本群は

$$\begin{aligned} \pi_1(S^3 - 4_1) &\cong \langle a, b, c, d \mid bcb^{-1}d^{-1} = 1, cac^{-1}d^{-1} = 1, aca^{-1}b^{-1} = 1 \rangle \\ &\cong \langle b, c \mid (c^{-1}bcb^{-1})c = b(c^{-1}bcb^{-1}) \rangle. \end{aligned}$$

という表示を持つ. $D(\Delta(x))$ を $(0, \infty, 1, x)$ の 4 点の凸包として \mathbb{H}^3 に置くと,

$$\rho(b) = \frac{\pm 1}{\sqrt{y(1-x)}} \begin{pmatrix} y(1-x) & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \rho(c) = \frac{\pm 1}{\sqrt{x(1-y)}} \begin{pmatrix} x(1-y) & xy \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$(x, y \in \mathbb{C} - \{0, 1\})$ は $xy(1-x)(1-y) = 1$ を満たす

という表現が得られる.

$\pi_1(\partial N)$ の生成元 \mathcal{M} , \mathcal{L} をとる. K の各理想四面体から頂点を切り取ることにより ∂N には 3 角形分割の構造が入る. そこで \mathcal{M} , \mathcal{L} を ∂N の辺に横断的に交わるように選んでおく. \mathcal{M} が ∂N の辺を反時計回りに  回る時 z , 時計回りに  回るときに $1/z$ をかけたものを M と書く. 同様に L も定める. R_i のときと同様にこれらは z_k , $\frac{1}{1-z_k}$, $1 - \frac{1}{k}$ の積で書けるので

$$M = \pm \prod_{k=1}^n z_k^{m'_k} (1-z_k)^{m''_k}, \quad L = \pm \prod_{k=1}^n z_k^{l'_k} (1-z_k)^{l''_k} \quad (4.3)$$

と表すことができる. このとき ρ は適当に共役をとることにより

$$\rho(\mathcal{M}) = \begin{pmatrix} \sqrt{M} & * \\ 0 & \sqrt{M}^{-1} \end{pmatrix}, \quad \rho(\mathcal{L}) = \begin{pmatrix} \sqrt{L} & * \\ 0 & \sqrt{L}^{-1} \end{pmatrix}.$$

となるようにとれる. 特に $\tau_{\mathcal{M}} = M + M^{-1} + 2$ と $\tau_{\mathcal{L}} = L + L^{-1} + 2$ が成立する. 結び目の補空間のときには \mathcal{M} , \mathcal{L} としてメリディアンとロンジチュードをとる事にする.

$\mathcal{D}(N)$ は n 変数の $n-1$ 個の方程式の表す代数的集合より $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{D}(N) \geq 1$ である. とくに $\mathcal{D}(N)$ は代数曲線を含むので Culler-Shalen 理論が適用可能である.

5 主結果

この節では $\mathcal{D}(N)$ の ideal point の発見法を示す. $\mathcal{D}(N)$ の ideal point では, ある理想四面体のパラメータ z_k が $1, 0, \infty$ のいずれかに収束する. v を $\mathcal{D}(N)$ の ideal point に対応した valuation とする. z_1, \dots, z_n は $\mathcal{D}(N)$ 上の関数だから $v(z_k)$ はある整数になる. $z_k \rightarrow 0$ のとき $v(z_k) > 0$, $z_k \rightarrow 1$ のとき $v(1-z_k)$, $z_k \rightarrow \infty$ のとき $v(z_k) = v(1-z_k) < 0$ となる. また z_1, \dots, z_n は gluing equation を満たすので

$$0 = v(1) = v(R_i) = v\left(\prod z_k^{r'_{i,k}} (1-z_k)^{r''_{i,k}}\right) = \sum_{k=1}^n (r'_{i,k} v(z_k) + r''_{i,k} v(1-z_k))$$

を満たす. $\mathbf{v} = (-v(1-z_1), v(z_1), \dots, -v(1-z_n), v(z_n))$ とおくと

$$(r'_{i,1}, r''_{i,k}, \dots, r'_{i,n}, r''_{i,n}) \wedge \mathbf{v} = 0 \quad (i = 1, \dots, n-1)$$

を満たす. ここで $x = (x'_1, x''_1, \dots, x'_n, x''_n)$, $y = (y'_1, y''_1, \dots, y'_n, y''_n)$ に対して $x \wedge y = \sum_{k=1}^n (x'_k y''_k - x''_k y'_k)$ とした. (wedge 積を使うのは [Ne-Za] の

公式にあわせるため.) $\rho_1 = (1, 0), \rho_0 = (0, -1), \rho_\infty = (-1, 1)$ と置くと $\mathbf{v} = (a_1 \rho_{i_1}, \dots, a_n \rho_{i_n})$ ($i_k = 1, 0, \infty, a_k \geq 0$) と書ける. $\rho_1, \rho_0, \rho_\infty$ はそれぞれ $z_k \rightarrow 0, z_k \rightarrow 1, z_k \rightarrow \infty$ の場合に対応する. valuation がこれらの式を満たす事は [Yo] で調べられている. そして実際に ideal point があるときの, 対応する incompressible surface の構成法が示されている. しかしこれらの式を満たすものが本当に ideal point から得られるかどうかは解っていなかった.

I を $I = (i_1, \dots, i_n) \in \{1, 0, \infty\}^n$ で定義し *degeneration index* と呼ぶ. 前述したように degeneration index は各理想四面体の退化の仕方を表している. I に対し,

$$r(I)_{i,k} = \begin{cases} r''_{i,k} & (i_k = 1) \\ r'_{i,k} & (i_k = 0) \\ -r'_{i,k} - r''_{i,k} & (i_k = \infty). \end{cases}$$

と定義する. $r(I)_{i,k}$ は $z_k \rightarrow 1, 0$ または ∞ のときに, $R_i = \prod z_k^{r'_{i,k}} (1 - z_k)^{r''_{i,k}}$ に寄与する部分を取り出したものである. 次に

$$R(I) = \begin{pmatrix} r(I)_{1,1} & \dots & r(I)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ r(I)_{n-1,1} & \dots & r(I)_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

とし, さらに

$$d(I)_k = (-1)^{k+1} \det \begin{pmatrix} r(I)_{1,1} & \dots & \widehat{r(I)_{1,k}} & \dots & r(I)_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ r(I)_{n-1,1} & \dots & \widehat{r(I)_{n-1,k}} & \dots & r(I)_{n-1,n} \end{pmatrix}$$

と定義する. このとき *degeneration vector* を次のように定義する.

$$d(I) = (d(I)_1, d(I)_2, \dots, d(I)_n) \quad (\in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n).$$

このとき $d(I)$ は

$$(r'_{i,1}, r''_{i,k}, \dots, r'_{i,n}, r''_{i,n}) \wedge (d(I)_1 \rho_{i_1}, \dots, d(I)_n \rho_{i_n}) = 0$$

を満たすことが簡単な計算により解る. よって $d(I)_k \geq 0$ がすべての k に対して成立すれば $(d(I)_1 \rho_{i_1}, \dots, d(I)_n \rho_{i_n})$ は valuation の満たすべき性質を満たしている事になる. ここで次の定理が成立する:

定理 5.1 ([Ka]) すべての $k = 1, \dots, n$ に対して $d(I)_k > 0$ (または, すべての $k = 1, \dots, n$ に対して $d(I)_k < 0$) ならば対応する ideal point は存在する. このとき $c = \gcd(d(I)_1, d(I)_2, \dots, d(I)_n)$ とすると $d(I)$ に対応する ideal point は c 個ある.

この定理で見つかる ideal point の valuation を v とすると, $v(z_k) = d(I)_k/c$ が成立する. z_k は $\mathcal{D}(N)$ 上の有理関数なので写像 $z_k : \mathcal{D}(N) \rightarrow \mathbb{C}P^1$ と見なせる. このとき ideal point は z_k によって $i_k (= 0, 1, \infty)$ にうつされる. $d(I)_k/c = v(z_k)$ は ideal point における z_k の分岐の数と一致する.

定理の証明は $d(I)$ に対応した weighted projective space に $\mathcal{D}(N)$ を埋め込む事によって与えられる. このとき無限遠の divisor と $\mathcal{D}(N)$ を weighted projective space でコンパクト化したものとの交点が容易に計算でき, 実際に ideal point を構成できる.

最後に $\mathcal{D}(N)$ の ideal point と $X(N)$ の ideal point の関係について述べる. x を $\mathcal{D}(N)$ の ideal point とする. $\phi : \mathcal{D}(N) \rightarrow X(N)$ により $\phi(x)$ は $X(N)$ の点を与える事がわかる. これが $X(N)$ の ideal point に対応している事を確かめるのには, ある $\gamma \in \pi_1(N)$ に対して $v(\tau_\gamma) < 0$ である事を示せばよい (v は x に対応する valuation). そこで境界での基本群の元 M, L の τ_M, τ_L について調べてみる. まず $\mathcal{D}(N)$ 上の関数 M, L について, v をとると (4.3) より

$$v(M) = \sum_{k=1}^n (m'_k v(z_k) + m''_k v(1 - z_k))$$

が成立する. 定理の注により $v(z_k), v(1 - z_k)$ の値がすべて計算できるので $v(M)$ の値も計算できる ($v(L)$ も同様). ここで $v(M) \neq 0$ ならば $\tau_M = M + M^{-1} + 2$ から $v(\tau_M) < 0$ がわかる. よって $v(M) \neq 0$ または $v(L) \neq 0$ ならば $\phi(x)$ は $X(M)$ の ideal point であることがわかる. さらに [CCGLS] により $-v(L)/v(M)$ が対応する incompressible surface の boundary slope を与えている事がわかる.

6 例

この節では $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目に対して定理を適用する. 結び目の補空間の理想四面体分割は SnapPea[We] を用いて与える事ができる. また snap[Go] を用いると gluing equation を表示することができる. $(-2, 3, 7)$ -pretzel 結び目の場合, 3つの理想四面体に分割できて gluing equation は

$$(1 - z_0)^{-2} z_1^{-1} z_2^{-1} = 1, \quad z_0(1 - z_1)(1 - z_2) = 1$$

で与えられる. また境界では

$$M = (1 - z_1)^{-1}(1 - z_2), \quad L = (1 - z_0)^{-2}(1 - z_1)^{18} z_2^{-2}(1 - z_2)^{-18}$$

となる. ここで定理の条件を満たす degeneration index を求めると図 1 になる.

degeneration indices	degeneration vectors	$(v(M), v(L))$	boundary slopes
$(\infty, 1, 0)$	$(1, 1, 2)$	$(1, -16)$	16
$(\infty, 0, 1)$	$-(1, 2, 1)$	$(-1, 16)$	16
$(1, \infty, 1)$	$(1, 2, 2)$	$(-4, 74)$	$37/2$
$(1, 1, \infty)$	$-(1, 2, 2)$	$(4, -74)$	$37/2$
$(0, \infty, 0)$	$-(1, 1, 1)$	$(-1, 20)$	20
$(0, 0, \infty)$	$(1, 1, 1)$	$(1, -20)$	20

図 1: $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot の ideal point.

7 応用

この節では主定理を用いて boundary slope を計算する. 結び目の補空間の boundary slope に関しては多くの研究がなされている. boundary slope 全体の集合は有限集合であることが知られている [Ha]. さらに Hatcher-Oertel により Montesinos 結び目の boundary slope を求めるアルゴリズムが知られている [Ha-Oe]. 特に 10 交点以下の結び目に対しては Dunfield により実際に boundary slope と incompressible surface の表が得られている [Du]. 一方 Montesinos 結び目でない結び目の boundary slope はほとんど知られていない. そこでここでは 10 交点以下の結び目のうち Dunfield の表 [Du] に載っていない結び目の boundary slope を計算する.

主定理により各 degeneration index ごとに degeneration vector を計算して定理を満たしているかどうかを確認すればよい. 基本的に行列式の計算だけなので簡単にプログラムを書くことができる. なんの工夫もせず計算すると 3^n 個の degeneration index に対してそれぞれ degeneration vector を計算し, 定理の条件を満たすものを探せば良い. 現在の標準的なコンピュータであれば理想四面体の数が 15 個程度なら計算可能である. だいたい理想四面体の数が 10 個までなら数秒以内, 13 個なら 1 時間程度, 15 個なら半日くらいで計算できる. 結果を図 2 に示す. これらの結び目に対して A 多項式を求める事は相当困難である事を注意しておく. snap[Go] には 17 交点以下の結び目のデータが入っているのでそれを利用した. 10 交点以下の結び目のうち補空間が 15 個以下の理想四面体に分割可能な場合のみ計算した. この表に載っている boundary slope は boundary slope の一部であり全部を求めたものではないことを注意しておく. またどの結び目の補空間も Seifert 曲面による 0-slope をもつことも注意しておく.

トーラス上の単純閉曲線の集合は $\mathbb{Q} \cup 1/0$ と同一視できる. 結び目の補空間の boundary slope の間の差の最大値は diameter と呼ばれている. 交代結び目の場合 2 つの checker board 曲面が incompressible surface であることが知られていて, それらの boundary slope の間の距離は交点数の 2 倍に等しい. 交代 Montesinos 結び目の場合はこれらの checker board

曲面の間の距離が diameter を与える [Ic-Mi]. またすべての Montesinos 結び目の diameter は交点数の 2 倍以下である事も知られている [Ic-Mi]. 一方, 図 2 を見ると diameter が交点数の 2 倍以上あるものが多く存在することがわかる. このような例はこれまでに発見されていなかったようである.

また交代結び目の boundary slope でこれまでに知られているものは偶数となるものだけであった.(すべての有理数に対してある結び目が存在して boundary slope として与えられることは知られている.) 交代 Montesinos 結び目に関しては boundary slope は偶数であることがわかる. 一方, 図 2 を見ると交代結び目でも有理数の boundary slope を持つものがあるとわかる.

参考文献

- [Bo-Za] S. Boyer, X. Zhang, On Culler-Shalen seminorms and Dehn filling, *Ann. of Math. (2)* 148 (1998), no. 3, 737–801.
- [CCGLS] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D. Long, P. Shalen, *Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds*, *Invent. Math.* 118 (1994), no. 1, 47–84.
- [CGLS] M. Culler, C. Gordon, J. Luecke, P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, *Ann. of Math. (2)* 125 (1987), no. 2, 237–300.
- [Cu-Sh] M. Culler, P. Shalen, *Varieties of group representations and splittings of 3-manifolds*, *Ann. of Math. (2)* 117 (1983), no. 1, 109–146.
- [Du] N. Dunfield, *A table of boundary slopes of Montesinos knots*, *Topology* 40 (2001), no. 2, 309–315.
- [Go] O. Goodman, *Snap*, computer program.
- [Ha] A. Hatcher, *On the boundary curves of incompressible surfaces*, *Pacific J. Math.* 99 (1982), no. 2, 373–377.
- [Ha-Oe] A. Hatcher, U. Oertel, *Boundary slopes for Montesinos knots*, *Topology* 28 (1989), no. 4, 453–480.
- [He-Po] M. Heusener, J. Porti, *The variety of characters in $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$* , *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)* 10 (2004), Special Issue, 221–237.

Alternating knots Non-alternating knots

knot	boundary slopes	knot	boundary slopes
8 ₁₆	2, 6, 16	9 ₄₇	16
8 ₁₇	-14, 2, 14	9 ₄₉	15
8 ₁₈	-14, 14	10 ₁₄₈	-8/3, 8
9 ₃₂	8, 14, 18, 24	10 ₁₄₉	-22, -12, -14/3, 1
9 ₃₃	-22	10 ₁₅₀	2, 7, 18
9 ₃₄	-22, -16	10 ₁₅₁	-12, -4, 5
9 ₃₉	-10, 20	10 ₁₅₂	-22
9 ₄₁	-4, -2, 8	10 ₁₅₃	-12, -10, 10
10 ₇₉	-10/3, 0, 10/3, 6	10 ₁₅₄	-2, 10, 15/2
10 ₈₀	-13, -8, -20/3, -2	10 ₁₅₅	-10, -9/2, -1
10 ₈₂	-13, -12, 2, 6, 14	10 ₁₅₆	-16, -32/3, -7, 12
10 ₈₃	30	10 ₁₅₇	3, 12, 22
10 ₈₅	-20, -15, -14, -2	10 ₁₅₈	-14, -6, 5, 9
10 ₈₆	32	10 ₁₅₉	-20, -1, 8/3, 8
10 ₉₀	-7, 12, 18	10 ₁₆₀	26/3, 12, 18
10 ₉₁	-26, 2, 6, 10, 16	10 ₁₆₂	-2, 18, 20
10 ₉₂	-2, 38	10 ₁₆₃	-7, 5
10 ₉₃	2	10 ₁₆₄	-12, 16, 18, 24
10 ₉₄	6, 28	10 ₁₆₅	-22, 6, 14
10 ₉₅	-28, 16, 20	10 ₁₆₆	8
10 ₉₈	-4		
10 ₁₀₀	-12, -6		
10 ₁₀₂	-1, 12, 18		
10 ₁₀₃	-20, -12, -14, -6		
10 ₁₀₄	6, 10, 14, 16		
10 ₁₀₆	-14, -8, -6, -4/3, 6		
10 ₁₀₈	-2, 0, 11		

⊠ 2: Boundary slopes of non-Montesinos knots

- [Ic-Mi] K. Ichihara, S. Mizushima *Crossing number and diameter of boundary slope set of Montesinos knot*, arXiv:math/0510370.
- [Ka] Y. Kabaya, *A method to find ideal points from ideal triangulations* arXiv:GT0706.0971.
- [Ne-Za] W.D. Neumann, D. Zagier, *Volumes of hyperbolic 3-manifolds*, Topology 24 (1985), 307-332.
- [Yo] T. Yoshida, *On ideal points of deformation curves of hyperbolic 3-manifolds with one cusp*, Topology 30 (1991), no. 2, 155-170.
- [We] J. Weeks, *SnapPea*, computer program.

Structured ring spectrum について

鳥居 猛

(岡山大学大学院自然科学研究科)

1 Introduction

1990年代にスペクトラムの(ホモトピー圏をとる前の)圏で非常に良い性質をもつものが構成された。特にこの圏においてはスマッシュ積が(up to homotopyではなく厳密に)結合的かつ可換になる。この圏における(可換)モノイド対象が(可換) S 代数(structured ring spectrum)である。スペクトラムの圏を加群の(チェイン複体の)圏の類似と考えれば、これらは(可換)環の類似となる。本講演ではこの類似性の紹介をします。

- 2 S 加群の圏
- 3 S 代数の森田理論
- 4 可換 S 代数の Galois 理論
- 5 THH と TAQ
- 6 大域化(Brave New Algebraic Geometry)
- 7 応用(Higher Real K -theory)
- 8 一般 Chern 指標と Galois 理論

2 S 加群の圏

スペクトラムは安定写像や Spanier-Whitehead category の定式化、(特異)コホモロジーの Eilenberg-Mac Lane 空間による表現、(コ)ボルディズム理論との関連などから導入された。素朴な意味でのスペクトラムは基点付きの空間の列 A_0, A_1, A_2, \dots と基点を保つ連続写像の列 $A_i \rightarrow \Omega A_{i+1}$ ($i \geq 0$) の組として定義される。

この素朴な意味でのスペクトラムの定義ではいくつかの問題点がある。

- (1) スペクトラムの射をどう定義するか?
- (2) 基点付き空間で定義されるスマッシュ積の拡張をうまく定義できるか?

これらの問題点に対して Boardman はホモトピーをとった後ならばうまくいくことを示し、安定ホモトピー圏 \mathcal{B} を構成した。特に、 \mathcal{B} は closed symmetric monoidal category かつ triangulated category であり、これらは適当な compatibility condition を満たす。

安定ホモトピー圏の(可換)モノイド対象が(可換)環スペクトラムであり、一般コホモロジー論の積構造を考える上ではこれらで十分である。しかしながら、環スペクトラムやその上の加群スペクトラムの圏を考えると、これらは良い性質を持っていない。例えば、環スペクトラム R 上の加群スペクトラムの間の射に対して、その cofibre は一般に R 加群スペクトラムになっているかどうか分からない。

1990年代にスペクトラムのホモトピー圏をとる前の段階で、これらの問題を解決する良いスペクトラムの圏が構成された。現在ではこの良い性質をもつスペクトラムの圏の構成の方法がいくつか知られている。例えば、

1. S 加群の圏 (Elmendorf-Kriz-Mandell-May)[2]
2. symmetric spectrum の圏 (Hovey-Shi-pley-Smith)[4]
3. orthogonal spectrum の圏 (Mandell-May-Schwede-Shi-pley)[6, 5]

などである。これらの圏がもっている共通の性質は

- (1) closed symmetric monoidal category である。
- (2) topological(simplicial) model category であり、そのホモトピー圏は \mathcal{B} と同値である。
- (3) (1),(2) から誘導されるホモトピー圏におけるスマッシュ積と triangulation は (2) における同値を通して \mathcal{B} にもともと与えられている構造と一致する。

以下では EKMM[2] による S 加群の圏で議論する。ここで S は球面スペクトラム $S = \Sigma^\infty S^0$ である。 \mathcal{M}_S で S 加群の圏を表す。

Definition 2.1. (可換) S 代数とは \mathcal{M}_S における (可換)モノイド対象である。より具体的には、 $A \in \mathcal{M}_S$ が S 代数とは

$$m : A \wedge A \rightarrow A, \quad i : S \rightarrow A$$

が与えられていて、次の図式が可換になるものである。

$$\begin{array}{ccccc}
 A \wedge A \wedge A & \xrightarrow{m \wedge 1} & A \wedge A & & A \wedge S & \xrightarrow{1 \wedge i} & A \wedge A & \xleftarrow{i \wedge 1} & S \wedge A \\
 1 \wedge m \downarrow & & \downarrow m & & \cong \downarrow & & \downarrow m & & \downarrow \cong \\
 A \wedge A & \xrightarrow{m} & A & & A & \xrightarrow{=} & A & \xleftarrow{=} & A
 \end{array}$$

また、可換 S 代数とは S 代数 A であり、さらに次の図式が可換になるものである。

$$\begin{array}{ccc}
 A \wedge A & \xrightarrow{t} & A \wedge A \\
 m \downarrow & & \downarrow m \\
 A & \xrightarrow{=} & A,
 \end{array}$$

ここで t はスマッシュ積の成分を入れ換える射である。

Remark 2.2. S 代数、可換 S 代数は古典的には A_∞ 環スペクトラム、 E_∞ 環スペクトラム ([7]) と呼ばれていたものと本質的に同値になる。

同様の考え方により可換 S 代数上の代数や S 代数上の加群が定義される。

Notation 2.3. R を可換 S 代数、 A を R 代数とする。このとき、 \mathcal{A}_R を R 代数の圏、 \mathcal{C}_R を可換 R 代数の圏、 \mathcal{M}_A を (右) A 加群の圏とする。

Remark 2.4. これらの圏は topological model category の構造をもっている。そのホモトピー圏をそれぞれ $\bar{h}\mathcal{A}_R, \bar{h}\mathcal{C}_R, \bar{h}\mathcal{M}_A$ で表す。

通常の間と S 代数との関係は次で与えられる。通常の間 R に対して、 HR を Eilenberg-Mac Lane spectrum とすると、 HR は S 代数の構造をもつ。さらに、 M を (右) R 加群とすると、 HM は (右) HR 加群となる。よって関手

$$H(-) : \text{Mod}_R \longrightarrow \mathcal{M}_{HR}$$

が得られ、この関手は三角圏の同値

$$\mathcal{D}_R \xrightarrow{\cong} \bar{h}\mathcal{M}_{HR}$$

に拡張する。ここで、 \mathcal{D}_R は R 加群の unbounded chain complex の導来圏である。実際には、 R 加群の unbounded chain complex の圏 $\text{Ch}(R)$ と \mathcal{M}_{HR} をつなぐ model category の同値の列が存在し、それが上の三角圏の同値を導く。

	トポロジー	代数
モデル圏	S 加群の圏	\mathbb{Z} 加群の (チェイン複体の) 圏
局所化	(weak-equivalences) ⁻¹	(quasi-isomorphisms) ⁻¹
ホモトピー圏	安定ホモトピー圏	導来圏 $D(\mathbb{Z})$
積構造	スマッシュ積 \wedge	テンソル積 \otimes
モノイド対象	S 代数 (= A_∞ 環スペクトラム)	結合代数 (A_∞ 代数)
可換モノイド対象	可換 S 代数 (= E_∞ 環スペクトラム)	可換環 (E_∞ 代数)

3 S 代数の森田理論

R, T を通常の変域とする。森田理論では加群の圏 Mod_R と Mod_T がいつ同値になるかということの問題にする。そこで同様な問題として、 S 代数 R, T に対して加群の圏 \mathcal{M}_R と \mathcal{M}_T がいつ model category として同値になるかという問題が考えられる。

Definition 3.1. \mathcal{A} を任意の直和が存在するアーベル圏とする。 \mathcal{A} の対象 M に対して、 $\mathcal{A}(M, -)$ が直和を保つとき、 M を small という。また、任意の \mathcal{A} の対象 N に対して、 M の直和から N への epimorphism $f : \bigoplus_{\Lambda} M \rightarrow N$ が存在するとき、 M を generator という。

通常の変域の場合の森田理論は次の形になる。

Theorem 3.2. 以下の (1),(2),(3) は同値。

- (1) 圏 Mod_R と Mod_T は同値。
- (2) ある small projective generator $X \in \text{Mod}_T$ が存在して、 $\text{End}_T(X) \cong R$ 。
- (3) ある R - T -bimodule M が存在して、

$$(-) \otimes_R M : \text{Mod}_R \longrightarrow \text{Mod}_T$$

が圏の同値を与える。

S 代数上の加群の森田理論は Schwede-Shipley により得られた。

Definition 3.3. \mathcal{M}_R の対象 M に対して、 M が三角圏 $\bar{h}\mathcal{M}_R$ で small (または generator) のとき small (または generator) という。

Theorem 3.4 (Schwede-Shipley[11, 10]). S 代数 R, T に対して、次の条件を考える。

- (1) \mathcal{M}_R と \mathcal{M}_T をつなぐ \mathcal{M}_S -model category の同値の列が存在する。
- (2) ある small, cofibrant, fibrant, generator $X \in \mathcal{M}_T$ が存在して、 $\text{End}_T(X) \simeq R$ 。
- (3) ある R - T -bimodule M が存在して、

$$(-) \underset{R}{\overset{L}{\wedge}} M : \bar{h}\mathcal{M}_R \longrightarrow \bar{h}\mathcal{M}_T$$

は圏の同値を与える。

このとき、(1) と (2) は同値であり、(3) は (1),(2) を導く。さらに、 $(-) \wedge R$ または $(-) \wedge T$ が weak equivalence を保つならば、(1),(2),(3) は同値。

4 可換 S 代数の Galois 理論

可換環の Galois 理論を可換 S 代数の Galois 理論に一般化した Rognes の理論について述べる。

まず通常の可換環の Galois 理論について復習する。 $R \rightarrow T$ を可換環の環準同型とし、有限群 G が T に R 代数準同型として作用していると仮定する。このとき、次の2つの準同型について考える。

$$(i) \ i : R \longrightarrow T^G.$$

$$(ii) \ h : T \otimes_R T \longrightarrow \text{Map}(G, T); \quad t_1 \otimes t_2 \mapsto (g \mapsto t_1 \cdot g(t_2)).$$

Definition 4.1. 2つの準同型 i と h が同型るとき $R \rightarrow T$ を G -Galois 拡大という。

以下、簡単のため T は connected (nontrivial idempotent をもたない) と仮定する。 $R \rightarrow T$ を G -Galois 拡大としたとき、次の Galois 対応が成り立つ。

$$\begin{array}{ccc} \{R \text{ 上 separable な } T \text{ の部分環} \} & \longleftrightarrow & \{G \text{ の部分群} \} \\ U & \longleftrightarrow & \text{Aut}_U(T) \\ T^H & \longleftrightarrow & H \end{array}$$

この可換環の Galois 理論の可換 S 代数における類似について考える。 E を (cell) S 加群、 R を cofibrant な E -local 可換 S 代数、 T を cofibrant な E -local 可換 R 代数とし、有限群 G が T に R 代数の準同型として作用しているとする。このとき、

$$T^{hG} = F(EG_+, T)^G \simeq \text{holim}_G T$$

を T の G -homotopy fixed point spectrum とすると、可換 R 代数としての射

$$i : R \longrightarrow T^{hG}$$

が定まる。また、

$$h : T \wedge_R T \longrightarrow F(G_+, T)$$

をその adjoint が

$$T \wedge_R T \wedge G_+ \xrightarrow{1 \wedge \text{action}} T \wedge_R T \xrightarrow{\text{multiplication}} T$$

で与えられるものとする。

Definition 4.2. i と h が E -local equivalence すなわち $E_*(i)$ と $E_*(h)$ が同型るとき、 $R \rightarrow T$ を E -local G -Galois 拡大という。

Example 4.3. (i) $R \rightarrow T$ を通常の可換環の G -Galois 拡大とすると、 $HR \rightarrow HT$ は可換 S 代数の global(= S -local) G -Galois 拡大。

- (ii) KO, KU をそれぞれ実および複素の (周期的) K 理論とし、 $c: KO \rightarrow KU$ を複素化とする。 KO, KU は可換 S 代数、 c は可換 S 代数の射とすることができ、複素共役 $t: KU \rightarrow KU$ は KO 代数としての $\mathbb{Z}/2$ 作用を定める。このとき、 $c: KO \rightarrow KU$ は global $\mathbb{Z}/2$ -Galois 拡大である。
- (iii) 有限次 Galois 拡大を無限次 Galois 拡大に適当に拡張することができ、 $L_{K(n)}S^0 \rightarrow E_n$ は $K(n)$ -local \mathbb{G}_n -Galois 拡大である。ここで $K(n)$ は Morava K 理論、 E_n は Morava E 理論、 \mathbb{G}_n は (extended) Morava stabilizer group である。

Theorem 4.4 (Rognes [9]). $R \rightarrow G$ を faithful な E -local G -Galois 拡大とする。ここで、 G は有限群、 T は connected ($\pi_0(T)$ が connected) と仮定する。このとき、次の Galois 対応が成り立つ。

$$\left\{ \begin{array}{l} E\text{-local separable 可換 } R \text{ 代数 } U \text{ と} \\ \text{faithful map } U \rightarrow T \text{ の同値類} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \{G \text{ の部分群}\}$$

$$\begin{array}{ccc} U & \longleftrightarrow & \pi_0(\mathcal{C}_U(T, T)) \\ T^{hH} & \longleftrightarrow & H \end{array}$$

5 THH と TAQ

Hochschild (co)homology, André-Quillen (co)homology は結合代数あるいは可換環の (co)homology theory であり、変形理論において重要な役割を果たす。

R を通常可換環、 A を R 代数、 M を A - A -bimodule とする。このとき、 $\mathbb{L}A^e = A \otimes_R^{\mathbb{L}} A^{\text{op}}$ を derived enveloping algebra とする。Hochschild (co)homology は次で定義される。

$$\begin{aligned} HH_k^R(A; M) &:= \text{Tor}_k^{\mathbb{L}A^e}(A, M) \\ HH_R^k(A; M) &:= \text{Ext}_{\mathbb{L}A^e}^k(A, M) \end{aligned}$$

この定義の類似として topological Hochschild (co)homology を定義する。 R を (cofibrant) 可換 S 代数、 A を R 代数、 M を A - A -bimodule とする。このとき、 A の (derived) enveloping algebra を $\mathbb{L}A^e = A \wedge_R^{\mathbb{L}} A^{\text{op}}$ とおく。

Definition 5.1 (EKMM[2]). Topological Hochschild (co)homology を次で定義する。

$$\begin{aligned} THH_k^R(A; M) &:= \text{Tor}_k^{\mathbb{L}A^e}(A, M) = \pi_k(A \wedge_{\mathbb{L}A^e}^{\mathbb{L}} M) \\ THH_R^k(A; M) &:= \text{Ext}_{\mathbb{L}A^e}^k(A, M) = \pi_{-k} \mathbb{R}F_{\mathbb{L}A^e}(A, M) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbb{R}F_{\mathbb{L}A^e}(-, -)$ は (right) $\mathbb{L}A^e$ 加群の圏における derived mapping spectrum である。

また通常可換環の代数的状況にもどって、 R を可換環、 A を可換 R 代数、 M を A 加群とする。ここで、微分について復習する。 d が A の M に値をもつ R 微分であるとは、 R 加群の準同型 $d: A \rightarrow M$ であって、 $d(ab) = bd(a) + ad(b)$ を満たすものであった。

$\mathrm{Der}_R(A, M)$ を M に値をもつ A の R 微分全体のなす A 加群とする。 $\mathrm{Der}_R(A, M)$ を A 加群 M の関手とみなすと、この関手は表現可能である。

$$\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(\Omega_{A|R}, M)$$

ここで、 $\Omega_{A|R}$ は Kähler 微分のなす A 加群である。 $T \rightarrow A$ を可換 R 代数としての simplicial resolution とする。このとき、cotangent complex $\mathbb{L}\Omega_{A|R}$ を $\mathbb{L}\Omega_{A|R} = \Omega_{T|R} \otimes_T A$ とする。André-Quillen (co)homology は次で定義される。

$$\begin{aligned} AQ_k(A|R; M) &:= H_k(\mathbb{L}\Omega_{A|R} \otimes_A M) && \cong \mathrm{Tor}_k^A(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M) \\ AQ^k(A|R; M) &:= H^k(\mathrm{Hom}_A(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M)) && \cong \mathrm{Ext}_A^k(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathrm{Der}_R(A, M) \cong \mathrm{Hom}_A(A, A \oplus M)$ に注意して、cotangent complex $\mathbb{L}\Omega_{A|R}$ の structured module の世界での対応物について考える。 R を cofibrant 可換 S 代数、 A を cofibrant 可換 R 代数、 M を A 加群とする。これらに対して、 A の M に値をとる R 微分の空間を次で定義する。

$$\mathrm{Der}_R(A, M) := (\mathcal{C}_R/A)(A, A \vee M)$$

ここで、右辺は augmentation $T \rightarrow A$ をもつ可換 R 代数 T のなす圏 \mathcal{C}_R/A における derived mapping space とする。このとき、Basterra [1] により A 加群 $\mathbb{L}\Omega_{A|R} \in \mathcal{M}_A$ で

$$\mathrm{Der}_R(A, M) \simeq \mathcal{M}_A(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M)$$

を満たすものが存在する。

Definition 5.2 (Basterra[1]). Topological André-Quillen (co)homology を次で定義する。

$$\begin{aligned} TAQ_k(A|R; M) &:= \mathrm{Tor}_k^A(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M) \cong \pi_k(\mathbb{L}\Omega_{A|R} \overset{\mathbb{L}}{\wedge}_A M) \\ TAQ^k(A|R; M) &:= \mathrm{Ext}_A^k(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M) \cong \pi_{-k}\mathbb{R}F_A(\mathbb{L}\Omega_{A|R}, M) \end{aligned}$$

$\mathbb{L}\Omega_{A|R}$ を A の R 上の topological cotangent spectrum という。

6 大域化 (Brave New Algebraic Geometry)

Homotopical Algebraic Geometry(HAG) とは、適当な symmetric monoidal structure をもつ model category における commutative monoid object を局所的な affine object とみて、それらを適当な Grothendieck topology (の model category 的一般化) により貼り合わせてできる対象を幾何学的対象とみなし研究するものである ([12, 13, 14])。通常の代数幾何では、 \mathbb{Z} 加群の圏にテンソル積による symmetric monoidal structure (と自明な model category structure) を入れると、その commutative monoid object は可換環となり、それを局所的な affine object とみなして、Zariski 位相 (や étale 位相、...) により貼り合わせたものを幾何学的対象とみなして研究するものと考えられる。したがって、

HAG は通常の代数幾何の一般化とみなせる。HAG を考える上で素となる symmetric monoidal model category としては様々なものをとることができるが、ここでは S 加群の圏 \mathcal{M}_S を素にした HAG について考える。この場合には Waldhausen に従い、Brave New Algebraic Geometry と呼ばれる。ここでは、Toën-Vezzosi [12, 13, 14] による Brave New Algebraic Geometry の定式化について述べる。

Definition 6.1. $f : A \rightarrow B$ を可換 S 代数の射とする。可換 A 代数の任意の filtered system $\{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して、自然な位相空間の射

$$\text{hocolim}_{\rightarrow} \mathcal{C}_A(B, C_\lambda) \longrightarrow \mathcal{C}_A(B, \text{hocolim}_{\rightarrow} C_\lambda)$$

が weak equivalence のとき、 f を finitely presented という。

可換 S 代数の射 $f : A \rightarrow B$ に対して、係数拡大 $f^* = (-) \wedge_A B : \mathcal{M}_A \rightarrow \mathcal{M}_B$ と forgetful functor $f_* : \mathcal{M}_B \rightarrow \mathcal{M}_A$ は Quillen adjunction

$$f^* : \mathcal{M}_A \rightleftarrows \mathcal{M}_B : f_*$$

をなし、total left(right) derived functor がホモトピー圏における adjunction を誘導する。

$$\mathbb{L}f^* : \bar{h}\mathcal{M}_A \rightleftarrows \bar{h}\mathcal{M}_B : \mathbb{R}f_*$$

さらに f が weak equivalence のときには、 (f^*, f_*) は Quillen equivalence になる。

Definition 6.2. $f : A \rightarrow B$ を可換 S 代数の finitely presented な射とする。

1. $\mathbb{R}f_* : \bar{h}\mathcal{M}_B \rightarrow \bar{h}\mathcal{M}_A$ が fully faithful のとき、 f を Zariski open immersion という。
2. topological cotangent spectrum $\mathbb{L}\Omega_{B|A}$ が contractible のとき、 f を étale morphism という。
3. topological Hochschild homology spectrum への自然な射 $B \rightarrow THH^A(B)$ が weak equivalence のとき、 f を thh-étale morphism という。

Remark 6.3. Zariski open immersion \implies thh-étale morphism \implies étale morphism.
また、Galois extension \implies separable morphism \implies thh-étale morphism.

Definition 6.4. $\{f_i : A \rightarrow A_i\}_{i \in I}$ を可換 S 代数の射の family とする。 $\{f_i\}$ が次の 2 つの条件を満たすとき、 $\{f_i\}$ を Zariski open (resp. thh-étale, resp. étale) covering という。

1. 任意の $i \in I$ について f_i が Zariski open immersion (resp. thh-étale morphism, resp. étale morphism)
2. 有限部分集合 $J \subset I$ が存在して、 $\bar{h}\mathcal{M}_A$ の任意の射 φ に関して φ が同型射であることと、任意の $j \in J$ について $\mathbb{L}f_j^*(\varphi)$ が $\bar{h}\mathcal{M}_{A_j}$ における同型射になることが同値

$\text{Aff}_S = \mathcal{C}_S^{\text{op}}$ とおく。model category Aff_S と Grothendieck topology の一般化 $\tau = \text{zar, thh-étale, étale}$ の組 (Aff_S, τ) に対して、 Aff_S 上の stack の model category Aff_S^τ を定義することができる。 Aff_S^τ は Aff_S 上の simplicial presheaf の model category の left Bousfield localization として得られる。その local object は fibrant simplicial presheaf であって、weak equivalence を保ち、 τ に関する descent condition を満たすものである。

7 応用 (Higher Real K -theory)

ここでは素数 p をひとつ固定する。 KU を complex K -theory とする。 KU は chromatic height 1 に局所化した安定ホモトピー圏を調べるのに有用である。特に、素数 p が 3 以上の場合に対しては非常に強力であることが知られている。一方、素数 p が 2 の場合には K だけでは不十分であり、少なくとも real K -theory KO も同時に考えないといけないことが知られている。これは complex K -theory の p -adic completion である Morava E -theory E_1 の stabilizer group \mathbb{S}_1 が有限 p 部分群をもつことに関係していると考えられる。stabilizer group \mathbb{S}_1 は cohomology 理論 E_1 の multiplicative operation 全体のなす群 (と同型) であり、いまの場合 Adams operation ψ^r ($r \in \mathbb{Z}_p^\times$) 全体となる。したがって、 $\mathbb{S}_1 \cong \mathbb{Z}_p^\times$ である。 \mathbb{Z}_p^\times の構造は

$$\mathbb{Z}_p^\times = \begin{cases} \langle \pm 1 \rangle \times (1 + 4\mathbb{Z}_2) & \cong \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}_2 & (p = 2) \\ \langle \zeta_{p-1} \rangle \times (1 + p\mathbb{Z}_p) & \cong \mathbb{Z}/(p-1) \times \mathbb{Z}_p & (p > 2) \end{cases}$$

で与えられる。ここで、 -1 は complex conjugation $t = \psi^{-1}$ に対応し、 ζ_{p-1} は 1 の原始 $(p-1)$ 乗根である。 KU には $\mathbb{Z}/2$ が複素共役 t で作用し、複素化 $c: KO \rightarrow KU$ は $\mathbb{Z}/2$ -Galois 拡大であった。特に、 KO は KU の homotopy fixed point spectrum $KU^{h\mathbb{Z}/2}$ と可換 S 代数として同値になる。このことから、2-adic completion に関しても、

$$(KU_2^\wedge)^{h\mathbb{Z}/2} \simeq KO_2^\wedge$$

が成り立つ。奇素数 p に対しては

$$(KU_p^\wedge)^{h\mathbb{Z}/(p-1)} \simeq L_p^\wedge$$

が成り立つ。ここで L は $KU_{(p)}$ の Adams summand である。

同様のことが higher chromatic stratum においても起こっていると考えられる。chromatic height n に局所化した安定ホモトピー圏を調べるためには complex oriented な cohomology 理論である Morava E -theory E_n が有用であるが、stabilizer group \mathbb{S}_n が有限 p 部分群をもつ場合には E_n だけでは不十分であると考えられる。そこで real K -theory KO の higher chromatic analogue を考える。

Morava stabilizer group $\mathbb{S}_n (= \text{Aut}(E_n))$ の有限 p 部分群に関しては次が知られている。

$$\mathbb{S}_n \text{ が有限 } p \text{ 部分群をもつ} \iff (p-1) | n$$

\mathbb{S}_n が有限 p 部分群をもつ自然数 n と素数 p の組に対して、 G を extended Morava stabilizer group $\mathbb{G}_n = \text{Gal}(\mathbb{F}_{p^n}/\mathbb{F}_p) \times \mathbb{S}_n$ の maximal finite subgroup とし、homotopy fixed point spectrum

$$EO_n := (E_n)^{hG} = F(EG_+, E_n)^G$$

を higher real K -theory という。

この定義には一つ問題点がある。homotopy fixed point spectrum E_n^{hG} は G が up to homotopy ではなく、スペクトラムの圏で E_n に作用していなければ定義できない。この問題を解決するために、Hopkins-Miller-Goerss は Morava E -theory E_n の S 代数構造あるいは可換 S 代数構造について研究し、次の定理を得た。

Theorem 7.1 (Goerss-Hopkins-Miller[8, 3]). Morava E -theory E_n には (可換) S 代数構造が up to homotopy で一意的に入る。さらに extended Morava stabilizer group \mathbb{G}_n が (可換) S 代数の圏で作用するようにできる。

実際には Goerss-Hopkins-Miller はさらに強いことを示している。 \mathcal{H}_n を標数 p の完全体 k とその上の height n formal group law F の組 (F, k) のなす圏とする。このとき、 \mathcal{H}_n から可換 S 代数の圏 \mathcal{C}_S への反変関手

$$\Theta : \mathcal{H}_n^{\text{op}} \longrightarrow \mathcal{C}_S$$

で次の条件を満たすものが up to homotopy で一意的に存在する。

1. $\pi_{\text{odd}}\Theta(F, k) = 0$
2. ある $u \in \pi_2\Theta(F, k)$ が存在して、 u は graded ring $\pi_*\Theta(F, k)$ の可逆元
3. $\pi_0\Theta(F, k)$ 上の formal group は (F, k) の universal deformation

特に、 $(F, k) = (H_n, \mathbb{F}_{p^n})$ ととると、 $\Theta(H_n, \mathbb{F}_{p^n}) = E_n$ となり、定理が得られる。これより higher real K -theory $EO_n = E_n^{hG}$ が定義される。

8 Chern 指標の一般化と Galois 理論

Morava E -theory E_{n+1} に対して X を $\pi_0(E_{n+1})/I_n$ の affine (formal) scheme とし、 o をその closed point とする。 $X - o$ の geometric point x をとると、その上の formal group law は Morava K -theory $K(n)$ に対応する formal group law H_n と同型となる。そこで、モノドロミー表現

$$\pi_1(X - o, x) \longrightarrow \text{Aut}(H_n) = \mathbb{S}_n$$

を考える。このモノドロミー表現は全射となることが知られており、その kernel に対応する Galois 被覆 $Y \rightarrow X - o$ が得られる。 $\mathbb{A} = L_{K(n)}E_{n+1}$ とおくと、 \mathbb{A} は even-periodic な $K(n)$ -local 環スペクトラムで、 $\pi_0(\mathbb{A})$ が $X - o$ の関数環の標数 0 へのリフトとなる。

そこで \mathbb{B} を $\pi_0(\mathbb{B})$ が Y の標数 0 へのリフトとなる even periodic な $K(n)$ -local 環スペクトラムとする。このとき、環スペクトラムの射

$$ch : E_{n+1} \longrightarrow \mathbb{B}$$

が得られ、この環スペクトラムの射 ch は Chern 指標の一般化と考えることができる。

Chern 指標は K -theory から有理コホモロジーへの積を保つ自然変換である。Chromatic の視点から Chern 指標を解釈すると、Chern 指標とは height 1 のコホモロジー理論 (K -theory) から height 0 のコホモロジー理論 (有理コホモロジー) への自然変換であるといえる。すると、 ch は height $(n+1)$ の理論 (Morava E -theory E_{n+1}) から height n の理論 (\mathbb{B} は Morava E -theory E_n の拡大) への積を保つ自然変換であり、Chern 指標の一般化であると考えることができる。さらに、 \mathbb{B} には群 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p) \times (\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1})$ が安定ホモトピー圏において作用し、 ch は $\mathbb{G}_{n+1} = \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p) \times \mathbb{S}_{n+1}$ の作用に関して同変である。

ここで Chern 指標の一般化 ch の可換 S 代数への持ち上げについて考える。このとき、Rognes による可換 S 代数の Galois 理論を通して ch を眺めてみると見通しがよくなり、次の結果が得られた。

Theorem 8.1 (T[15]). \mathbb{B} の可換 S 代数におけるモデルとして

$$L_{K(n)}(L_{K(n)}E_{n+1} \mathop{\bigwedge}\limits_R^{\mathbb{L}} E_n)$$

がとれる。ここで $R = L_{K(n)}S^0[\zeta]$ は $K(n)$ -local sphere $L_{K(n)}S^0$ にある 1 のべき根 ζ を付け加えた可換 S 代数である。

Corollary 8.2. 可換 S 代数の圏において群 $\text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p) \times (\mathbb{S}_n \times \mathbb{S}_{n+1})$ が \mathbb{B} に作用するようである。

Corollary 8.3. $ch : E_{n+1} \rightarrow \mathbb{B}$ は可換 S 代数の射に持ち上がり、 $\mathbb{G}_{n+1} = \text{Gal}(\mathbb{F}/\mathbb{F}_p) \times \mathbb{S}_{n+1}$ の作用に関して同変であるようである。

References

- [1] M. Basterra, André-Quillen cohomology of commutative S -algebras. J. Pure Appl. Algebra 144 (1999), no. 2, 111–143.
- [2] A.D. Elmendorf, I. Kriz, M.A. Mandell, J.P. May, Rings, modules, and algebras in stable homotopy theory. Mathematical Surveys and Monographs, 47. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
- [3] P.G. Goerss, M.J. Hopkins, Moduli spaces of commutative ring spectra. Structured ring spectra, 151–200, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 315, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.

- [4] M. Hovey, B. Shipley, J. Smith, Symmetric spectra. *J. Amer. Math. Soc.* 13 (2000), no. 1, 149–208.
- [5] M.A. Mandell, J.P. May, Equivariant orthogonal spectra and S -modules. *Mem. Amer. Math. Soc.* 159 (2002), no. 755.
- [6] M.A. Mandell, J.P. May, S. Schwede, B. Shipley, Model categories of diagram spectra. *Proc. London Math. Soc.* (3) 82 (2001), no. 2, 441–512.
- [7] J.P. May, E_∞ ring spaces and E_∞ ring spectra. *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 577. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1977.
- [8] C. Rezk, Notes on the Hopkins-Miller theorem. *Homotopy theory via algebraic geometry and group representations* (Evanston, IL, 1997), 313–366, *Contemp. Math.*, 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [9] J. Rognes, Galois extensions of structured ring spectra. *Stably dualizable groups*. *Mem. Amer. Math. Soc.* 192 (2008), no. 898.
- [10] S. Schwede, Morita theory in abelian, derived and stable model categories. *Structured ring spectra*, 33–86, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 315, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [11] S. Schwede, B. Shipley, Stable model categories are categories of modules. *Topology* 42 (2003), no. 1, 103–153.
- [12] B. Toën, G. Vezzosi, Homotopical algebraic geometry. I. Topos theory. *Adv. Math.* 193 (2005), no. 2, 257–372.
- [13] B. Toën, G. Vezzosi, Brave new algebraic geometry and global derived moduli spaces of ring spectra. *Elliptic cohomology*, 325–359, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.*, 342, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2007.
- [14] B. Toën, G. Vezzosi, Homotopical algebraic geometry. II. Geometric stacks and applications. *Mem. Amer. Math. Soc.* 193 (2008), no. 902.
- [15] T. Torii, E_∞ -structure on the generalized Chern character, in preparation.

Schubert calculus in the cohomology rings of flag varieties

中川 征樹 (高松工業高等専門学校・一般教育科)

1 はじめに

G を連結な複素半単純 Lie 群, B をその Borel 部分群とすると, 等質空間 G/B は (完全) 旗多様体と呼ばれ, 射影的代数多様体の構造をもち, トポロジー, 代数幾何, 表現論等現代数学の様々な分野で重要な役割を演じる. 本稿では, 旗多様体上の Schubert calculus および 代数的トポロジーの諸概念を主要な道具として, コホモロジー (および Chow 環) を中心とする旗多様体の位相的な構造を考察し, 合わせて, 複素代数群の Chow 環の決定等へのこれらの応用について解説したい.

よく知られているように, 旗多様体の位相的性質の研究には, 大きく分けて二通りの方法がある. 一つは, A. Borel の学位論文 ([4]) により確立されたもので, これは旗多様体 G/B のコホモロジー環を, G の Weyl 群 W の, Cartan 部分環 (G の極大トーラス H の Lie 環) への作用に関する不変式環を用いて記述する方法であり, 「Borel 表示」と呼ばれる. もう一つは, G の Bruhat 分解に由来する旗多様体の胞体分割を用いたコホモロジーの記述であり, 長年未刊であった C. Chevalley の有名な草稿 ([11]) により本格的に考察され, 今日では「Schubert 表示」と呼ばれることが多い (厳密には, [11] では G/B の Chow 環 $A(G/B)$ が考察されている. G/B の整係数コホモロジー環は Chow 環と同型であることが知られているが, これについては §4 で言及する). 前者は旗多様体のコホモロジーの代数的な表示, 後者は幾何的な表示と言え, 両者の関係を明らかにすることが Bernstein-Gelfand-Gelfand [2] の主題の一つであり, ここで言う旗多様体上の Schubert calculus (BGG calculus と称する場合もある) の意味するところである ([2], [12], [22] 参照). この極めて自然な要求を達成するために導入された「作用素」(BGG 作用素もしくは差分商作用素と呼称される) は, 本研究においても重要な役割を演じるとともに, その後の Lascoux-Schützenberger [36] による「Schubert 多項式」を産み出す基となり, 旗多様体のコホモロジー

環が組合せ論的にも非常に豊かな構造を持っていることを我々に教えてくれる ([36], [3], [18] など参照).

いわゆる「Schubert calculus」は、H. Schubert により 19 世紀に創始された「数え上げ幾何」をその起源として、代数幾何の一分野として発展してきたものである。その発展の歴史を語る資格は門外漢である筆者にはないが、「旗多様体上の Schubert calculus」に限っても、この 20 年程の間に急激に進展してきているように筆者には思える。本稿では、最も基本的な場合である完全旗多様体の通常のコホモロジーのみを扱っているが、その他にも、複素グラスマン多様体やラグランジアン・グラスマン多様体など一般化旗多様体のトーラス同変コホモロジー環の記述 ([32], [23], [24] など参照), 量子コホモロジー環の記述 ([1], [34], [35]), Kac-Moody 群に対応する旗多様体への応用 ([29], [33], [21]), K-理論など、代数幾何、トポロジー、表現論、組合せ論、数理物理を巻き込んだ大きな流れとなっている。Schubert calculus は古くて新しい、そして、まだまだ終わらない、そんな風に筆者には思える。

2 旗多様体のコホモロジー環

2.1 Borel 表示

K を G の極大コンパクト部分群, $T = K \cap H$ を K の極大トーラスとする。このとき、岩澤分解により、微分同相 $K/T \cong G/B$ が存在する。Borel によると、次のファイブレーションが存在する:

$$K/T \xrightarrow{\iota} BT \xrightarrow{\rho} BK.$$

ここで、 BT および BK はそれぞれ T および K の分類空間である。整係数コホモロジーへの誘導準同型

$$c = \iota^* : H^*(BT; \mathbb{Z}) \longrightarrow H^*(K/T; \mathbb{Z}) \quad (1)$$

は、Borel の特性準同型と呼ばれる。また、 K の Weyl 群 W が自然に極大トーラス T に作用し、この作用は $H^*(BT; \mathbb{Z})$ および $H^*(BT; \mathbb{F}) = H^*(BT; \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}$ (ここで \mathbb{F} は任意の体) への作用を引き起こす。このとき、Borel の結果の一つは次のように述べられる:

定理 2.1 \mathbb{F} を標数 0 の体とする. このとき, Borel の特性準同型は次の同型を誘導する:

$$\bar{c}: H^*(BT; \mathbb{F}) / (H^+(BT; \mathbb{F})^W) \longrightarrow H^*(K/T; \mathbb{F}).$$

ここで, $(H^+(BT; \mathbb{F})^W)$ は次数が正の W -不変式により生成される $H^*(BT; \mathbb{F})$ のイデアルである.

特に, \mathbb{Q} 上では c は常に全射であり, 旗多様体 K/T の有理コホモロジー環 $H^*(K/T; \mathbb{Q})$ は $H^2(K/T; \mathbb{Q})$ により生成され, その計算は不変式環 $H^*(BT; \mathbb{Q})^W$ という純代数的なものの計算に帰着されるが, これは E_8 を含む全ての単純 Lie 群に対して計算されている ([39]). これに対して, \mathbb{Z} 上では c は必ずしも全射にならず, 一般には 2 次以上の生成元が現れる. c の全射性からの隔たりを測ることは, A. Grothendieck による「ねじれ指数」 ([19]) と関連する大変微妙な問題であり, \mathbb{Z} 上で, この問題を考察することの難しさを反映している ([50], [51] 参照). 整係数コホモロジー環 $H^*(K/T; \mathbb{Z})$ を決定するという問題は, R. Bott と H. Samelson によって考察され, 彼らは有名な Bott-Samelson K -サイクル (Bott-Samelson-Demazure-Hansen 多様体) を導入して, $H^*(K/T; \mathbb{Z})$ を計算する一般的なアルゴリズムを確立し, K が例外群 G_2 の場合に具体的に計算してみせた ([6], [7]). しかしながら, この方法は階数の低い Lie 群に対しては有効であったが, 特に, 残された例外群に対しては実用的ではなかった. その後, 70 年代に入り, それまでに知られていたコンパクト Lie 群の $\text{mod } p$ コホモロジー環 $H^*(K; \mathbb{F}_p)$ の構造を利用して, $H^*(K/T; \mathbb{Z})$ の生成元の最小系と関係式による一般的な記述が, 戸田宏氏によって与えられた ([48]). その後, この方法に沿って, 残る旗多様体についても計算が進められ, 今日までに, E_8 を含む全ての単連結単純 Lie 群に対して, その旗多様体の整係数コホモロジー環が決定されている ([4], [6], [7], [47], [37], [38], [41], [42], [16]).

例えば, $K = E_7$ の場合は以下のようなものである. まず, [8] にしたがって, 単純ルート系 $\{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq 7}$ を取り, 対応する基本ウェイトを $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq 7}$ とする. s_i ($1 \leq i \leq 7$) を単純ルート α_i ($1 \leq i \leq 7$) に対応する鏡映 (単純鏡映) とする. このとき, E_7 の Weyl 群 $W(E_7)$ は, s_i ($1 \leq i \leq 7$) により生成される有限群である. ここでは, ルートやウェイトを $H^2(BT; \mathbb{Z})$ の元と見なすことにする.

[52, §1] に従って, $H^2(BT; \mathbb{Z})$ の生成元を次のように定義する :

$$\begin{aligned} t_1 &= -\omega_1 + \omega_2, \quad t_2 = \omega_1 + \omega_2 - \omega_3, \quad t_3 = \omega_2 + \omega_3 - \omega_4, \\ t_4 &= \omega_4 - \omega_5, \quad t_5 = \omega_5 - \omega_6, \quad t_6 = \omega_6 - \omega_7, \quad t_7 = \omega_7, \quad t = \omega_2, \\ c_i &= e_i(t_1, \dots, t_7) \quad (1 \leq i \leq 7). \end{aligned} \quad (2)$$

ここで, $e_i(t_1, \dots, t_7)$ は t_1, \dots, t_7 に関する i 次基本対称多項式である. このとき,

$$H^*(BT; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_7] = \mathbb{Z}[t_1, t_2, \dots, t_7, t]/(c_1 - 3t)$$

が成り立つ. 特性準同型 c による t_i, c_i ($1 \leq i \leq 7$) および t の像も同じ記号で表すことにすると,

例 2.2 ([41]) E_7/T の整係数コホモロジー環は

$$\begin{aligned} H^*(E_7/T; \mathbb{Z}) &= \mathbb{Z}[t_1, \dots, t_7, t, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_9] \\ &\quad /(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_8, \rho_9, \rho_{10}, \rho_{12}, \rho_{14}, \rho_{18}), \end{aligned}$$

関係式は

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c_1 - 3t, \quad \rho_2 = c_2 - 4t^2, \quad \rho_3 = c_3 - 2\gamma_3, \quad \rho_4 = c_4 + 2t^4 - 3\gamma_4, \\ \rho_5 &= c_5 - 3t\gamma_4 + 2t^2\gamma_3 - 2\gamma_5, \quad \rho_6 = \gamma_3^2 + 2c_6 - 2t\gamma_5 - 3t^2\gamma_4 + t^6, \\ \rho_8 &= 3\gamma_4^2 - 2\gamma_3\gamma_5 + t(2c_7 - 6\gamma_3\gamma_4) - 9t^2c_6 + 12t^3\gamma_5 + 15t^4\gamma_4 - 6t^5\gamma_3 - t^8, \\ \rho_9 &= 2c_6\gamma_3 + t^2c_7 - 3t^3c_6 - 2\gamma_9, \quad \rho_{10} = \gamma_5^2 - 2c_7\gamma_3 + 3t^3c_7, \\ \rho_{12} &= -6t_0^8u + 2t_0^6v + 9t_0^4u^2 - 12t_0^2uv + u^3 + 3v^2, \\ \rho_{14} &= t_0^{14} - 6t_0^{10}u + 4t_0^8v - 3t_0^6u^2 - 6t_0^4uv + 3t_0^2v^2 - 3u^2v, \\ \rho_{18} &= -2t_0^{14}u - 2t_0^8uv + 6t_0^6u^3 - t_0^6v^2 - 12t_0^4u^2v + 6t_0^2uv^2 - 3u^3v - 2v^3 + 9w^2, \end{aligned}$$

である. ただし,

$$\begin{aligned} t_0 &= t - t_1, \quad u = \gamma_4 + (-2t_1 - t_0)\gamma_3 + 2t_1^4 + 6t_1^3t_0 + 7t_1^2t_0^2 + 3t_1t_0^3, \\ v &= c_6 + (-2t_1 - t_0)\gamma_5 - 3t_1t_0\gamma_4 + (4t_1^2t_0 + 2t_1t_0^2)\gamma_3 - 3t_1^5t_0 - 8t_1^4t_0^2 - 8t_1^3t_0^3 \\ &\quad - 2t_1^2t_0^4 - t_0^6, \\ w &= \gamma_9 - c_6\gamma_3 + t_0\gamma_3\gamma_5 - t_0\gamma_4^2 + (t_1t_0 + 2t_0^2)\gamma_3\gamma_4 + (t_1^3 + 3t_1^2t_0 + 8t_1t_0^2 + 5t_0^3)c_6 \\ &\quad + (t_1^4 + 2t_1^3t_0 - 7t_1^2t_0^2 - 13t_1t_0^3 - 5t_0^4)\gamma_5 + (2t_1^4t_0 - 14t_1^2t_0^3 - 18t_1t_0^4 - 6t_0^5)\gamma_4 \\ &\quad + (-3t_1^5t_0 - 8t_1^4t_0^2 + 14t_1^2t_0^4 + 12t_1t_0^5 + 3t_0^6)\gamma_3 + 2t_1^8t_0 + 12t_1^7t_0^2 + 28t_1^6t_0^3 \\ &\quad + 32t_1^5t_0^4 + 16t_1^4t_0^5 - 3t_1^2t_0^7 - t_1t_0^8. \end{aligned}$$

ここで, Borel 表示に基づいた $H^*(K/T; \mathbb{Z})$ の記述は, Weyl 群の不変式を利用した代数的な表示であり, したがって, その環構造は比較的容易に決定できるが, その一方で, 環としての生成元の幾何学的な意味は薄い.

2.2 Schubert 表示

次に Schubert 表示について簡単に述べておく. G の Bruhat 分解

$$G = \coprod_{w \in W} B\dot{w}B$$

(ここで, \dot{w} は $w \in W$ の任意の代表元) は, 次の胞体分割を誘導する:

$$G/B = \coprod_{w \in W} B\dot{w}B/B.$$

ここで, $X_w^\circ := B\dot{w}B/B \cong \mathbb{C}^{l(w)}$ は, Schubert 胞体と呼ばれる. また, $l(w)$ は W の元 w の長さである. このとき, Schubert 多様体 X_w が, X_w° の閉包として定義される. 包含写像 $X_w \hookrightarrow G/B$ がホモロジーに誘導する準同型による基本ホモロジー類 $[X_w] \in H_{2l(w)}(X_w; \mathbb{Z})$ の像を同じく $[X_w] \in H_{2l(w)}(G/B; \mathbb{Z})$ で表すことにする. そこで, コホモロジー類 $\sigma_w \in H^{2l(w)}(G/B; \mathbb{Z})$ を, $[X_{w_0w}]$ の Poincaré 双対により定義する. ここで, w_0 は W の最長元である. σ_w のことを Schubert 類という. Schubert 胞体が全て偶数次元であることから, 次の基本的な事実が得られる:

事実 2.3 ([11], [5]) $H^*(G/B; \mathbb{Z})$ は, Schubert 類の集合 $\{\sigma_w\}_{w \in W}$ を基底とする自由加群である. $\{\sigma_w\}_{w \in W}$ は Schubert 基底と呼ばれる.

したがって, Schubert 表示では, $H^*(G/B; \mathbb{Z})$ の加法的な構造は完全に決まる. 乗法構造に関しては, まず, 任意の $u, v \in W$ に対して,

$$\sigma_u \cdot \sigma_v = \sum_{\substack{w \in W, \\ l(u) + l(v) = l(w)}} c_{u,v}^w \sigma_w$$

とおける. ここで, 整数 $c_{u,v}^w$ は構造定数と呼ばれ, これらを与える一般的な公式を見出すことが, 古典的な Schubert calculus の中心問題であり, 今日までに膨大な研究がある. 複素グラスマン多様体の場合には, Littlewood-Richardson

規則として、つとに知られているところである。このように、Schubert 表示では、各 Schubert 類は、Schubert 多様体で表されるという幾何学的な意味合いをもっているものの、その乗法構造は大変複雑である。

特別な場合として、 u, v のいずれか一方が長さ 1 であるときは、次に述べる Chevalley の公式として知られている。まず、 H の Lie 環を \mathfrak{h} とし、 $(\cdot | \cdot)$ を \mathfrak{h} 上の W -不変な内積として、 G のルート系を Δ 、正ルート系を Δ^+ 、単純ルート系を Π 、ルート $\alpha \in \Delta$ に対応するコルートを $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{(\alpha|\alpha)}$ 、 s_α をルート $\alpha \in \Delta$ に対応する鏡映とする。このとき、

定理 2.4 (Chevalley formula [11]) W の元 w と単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して、次の公式が成り立つ：

$$\sigma_{s_\alpha} \cdot \sigma_w = \sum_{\substack{\beta \in \Delta^+, \\ l(ws_\beta) = l(w) + 1}} (\beta^\vee | \omega_\alpha) \sigma_{ws_\beta}.$$

任意の u, v に対して、対応する構造定数を求める問題は、最近になって、段海豹 (Haibao Duan) 氏により、次に述べる形でようやく解決された。ここでは、Bott-Samelson の K -サイクルの整係数コホモロジー環の構造、および、 K -サイクルが Schubert 多様体の特異点解消になっているという事実が有効に使われており、大変興味深い。まず、 $w \in W$ に対して、その簡約分解を $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k}$ ($\alpha_i \in \Pi$) とするとき、 k 次の厳密に上三角な行列 $A_w = (a_{ij})$ を次の式により定義する：

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \geq j \text{ のとき,} \\ -(\alpha_i | \alpha_j^\vee) & i < j \text{ のとき.} \end{cases}$$

これを、 w の Cartan 行列と呼ぶ。次に、 k 次の厳密に上三角な行列 $A = (a_{ij})$ が与えられたとき、これに付随して、 k 変数の多項式環 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]$ に作用する「三角作用素」と呼ばれる作用素 $T_A : \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]^{(k)} \rightarrow \mathbb{Z}$ が帰納的に定義される (ここで、 $\mathbb{Z}[x_1, \dots, x_k]^{(k)}$ は k 次の斉次部分である)。紙数の関係により詳しい定義はここでは述べられないが、幾何学的には、コンパクトな向き付けられた多様体 M に対して、de Rham 理論における「 M に沿った積分」 \int_M を、 M が K -サイクルの場合に代数的に与えるものである。以上の準備の下に、今、Weyl 群の元 w に対して、その簡約分解を $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k}$ ($\alpha_i \in \Pi$)

とする. 部分集合 $L = \{i_1, i_2, \dots, i_r\} \subset \{1, 2, \dots, k\}$ に対して, $|L| = r$, $s_L = s_{\alpha_{i_1}} s_{\alpha_{i_2}} \cdots s_{\alpha_{i_r}}$, $x_L = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r}$ と表すことにする. このとき,

定理 2.5 (Duan [13]) W の元 u, v ($l(u) + l(v) = k$) に対して, 構造定数 $c_{u,v}^w$ は次の式により与えられる:

$$c_{u,v}^w = T_{A_w} \left[\left(\sum_{\substack{|L|=l(u), \\ s_L=u}} x_L \right) \left(\sum_{\substack{|K|=l(v), \\ s_K=v}} x_K \right) \right].$$

ここで, $L, K \subset \{1, 2, \dots, k\}$ である.

その後, H. Duan と X. Zhao は, この公式に基づいて Schubert 類の積を計算するアルゴリズムを与え ([15]), その結果を用いて, 特に G が例外群の場合に, 旗多様体のコホモロジー環を計算している ([16]). 例えば, $G = E_7$ (この稿では, 複素 Lie 群を E_7 , その極大コンパクト部分群を E_7 のように表すことにする) の場合は以下のようなものである. ここで, $w \in W(E_7)$ に対して, その簡約分解を $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ ($1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq 7$) とするとき, 対応する Schubert 類を $\sigma_{i_1 i_2 \cdots i_k}$ と略記することにする. また, ここでは, $c(\omega_i)$ ($1 \leq i \leq 7$) も同じく ω_i ($1 \leq i \leq 7$) と表記している.

例 2.6 (Duan-Zhao [16]) $y_3 = \sigma_{542}$, $y_4 = \sigma_{6542}$, $y_5 = \sigma_{76542}$, $y_9 = \sigma_{154376542}$ とする. このとき, E_7/B の整係数コホモロジー環は

$$H^*(E_7/B; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[\omega_1, \dots, \omega_7, y_3, y_4, y_5, y_9] / (r_2, r_3, r_4, r_5, r_6, r_8, r_9, r_{10}, r_{12}, r_{14}, r_{18}),$$

関係式は

$$\begin{aligned} r_2 &= 4\omega_2^2 - c_2, \quad r_3 = 2y_3 + 2\omega_2^3 - c_3, \quad r_4 = 3y_4 + \omega_2^4 - c_4, \\ r_5 &= 2y_5 - 2\omega_2^2 y_3 + \omega_2 c_4 - c_5, \quad r_6 = y_3^2 - \omega_2 c_5 + 2c_6, \\ r_8 &= 3y_4^2 + 2y_3 y_5 - 2y_3 c_5 + 2\omega_2 c_7 - \omega_2^2 c_6 + \omega_2^3 c_5, \\ r_9 &= 2y_9 + 2y_4 y_5 - 2y_3 c_6 - \omega_2^2 c_7 + \omega_2^3 c_6, \quad r_{10} = y_5^2 - 2y_3 c_7 + \omega_2^3 c_7, \\ r_{12} &= y_4^3 - 4y_5 c_7 - c_6^2 - 2y_3 y_9 - 2y_3 y_4 y_5 + 2\omega_2 y_5 c_6 + 3\omega_2 y_4 c_7 + c_5 c_7, \\ r_{14} &= c_7^2 - 2y_5 y_9 + 2y_3 y_4 c_7 - \omega_2^3 y_4 c_7, \\ r_{18} &= y_9^2 + 2y_5 c_6 c_7 - y_4 c_7^2 - 2y_4 y_5 y_9 + 2y_3 y_5^3 - 5\omega_2 y_5^2 c_7. \end{aligned}$$

3 差分商作用素

ここでは、次の問題を考える。

問題 3.1 Borel 表示と Schubert 表示の間の関係を確立せよ。

より詳しくは、有理数体 \mathbb{Q} 上の Borel 表示により、 $H^*(K/T; \mathbb{Q})$ は多項式環 $H^*(BT; \mathbb{Q})$ の商として与えられる。そこで、各 Schubert 類 σ_w ($w \in W$) に対して、それを代表する多項式を求めよ、という問題が考えられる。主要な道具は、Bernstein-Gelfand-Gelfand [2] および Demazure [12] により独立に導入された差分商作用素である。定義を述べよう。

定義 3.2 (i) 各ルート $\alpha \in \Delta$ に対して、作用素 $\Delta_\alpha : H^*(BT; \mathbb{Z}) \rightarrow H^*(BT; \mathbb{Z})$ を次の式により定義する： $u \in H^*(BT; \mathbb{Z})$ に対して、

$$\Delta_\alpha(u) = \frac{u - s_\alpha(u)}{\alpha}.$$

(ii) W の元 w に対して、作用素 Δ_w を次の式により定義する：

$$\Delta_w = \Delta_{\alpha_1} \circ \Delta_{\alpha_2} \circ \cdots \circ \Delta_{\alpha_k}.$$

ここで、 $w = s_{\alpha_1} s_{\alpha_2} \cdots s_{\alpha_k}$ ($\alpha_i \in \Pi$) は、 w の任意の簡約分解とする。

このとき、上の定義は、 w の簡約分解の取り方によらないことが示される。差分商作用素を用いると、Borel の特性準同型 (1) は次のように記述される。

定理 3.3 (Bernstein-Gelfand-Gelfand [2], Demazure [12]) 齊次多項式 $f \in H^{2k}(BT; \mathbb{Z})$ に対して、次が成り立つ：

$$c(f) = \sum_{w \in W, l(w)=k} \Delta_w(f) \sigma_w.$$

特に、単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対して、 $c(\omega_\alpha) = \sigma_{s_\alpha}$ が成り立つ。ただし、 ω_α は、単純ルート $\alpha \in \Pi$ に対応する基本ウェイトである。

以上の準備の下に、Borel 表示と Schubert 表示との関係を調べよう。以下の結果は、鍛冶静雄氏 (福岡大学) との共同研究により得られたものである。例えば、 E_7 の場合、これは次の問題を考えることを意味する：

問題 3.4 $H^*(E_7/T; \mathbb{Z})$ の Borel 表示 (例 2.2) における生成元 $\{t_1, \dots, t_7, t, \gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_9\}$ と Schubert 類 $\{\sigma_w\}_{w \in W(E_7)}$ の関係を明らかにせよ.

定理 3.3 より, $c(\omega_i) = \sigma_i$ であるから, 2 次の生成元の間関係は (2) より直ちに従う.

$$\begin{aligned} t_1 &= -\sigma_1 + \sigma_2, & t_2 &= \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3, & t_3 &= \sigma_2 + \sigma_3 - \sigma_4, \\ t_4 &= \sigma_4 - \sigma_5, & t_5 &= \sigma_5 - \sigma_6, & t_6 &= \sigma_6 - \sigma_7, & t_7 &= \sigma_7, & t &= \sigma_2. \end{aligned} \quad (3)$$

$i = 3, 4, 5, 9$ に対しては,

$$\gamma_i = \sum_{l(w)=i} a_w \sigma_w \quad (a_w \in \mathbb{Z})$$

とおける. 係数 a_w を決定しよう. 例 2.2 より, γ_i ($i = 3, 4, 5, 9$) は次の式により定義されている:

$$\begin{aligned} 2\gamma_3 &= c_3, & 3\gamma_4 &= c_4 + 2t^4, & 2\gamma_5 &= c_5 - tc_4 + t^2c_3 - 2t^5, \\ 2\gamma_9 &= c_3c_6 + t^2c_7 - 3t^3c_6. \end{aligned} \quad (4)$$

したがって, $2\gamma_3, 3\gamma_4, 2\gamma_5, 2\gamma_9$ は特性準同型 c の像に含まれている. そこで, $H^*(BT; \mathbb{Z})$ の多項式を

$$\begin{aligned} \delta_3 &= c_3, & \delta_4 &= c_4 + 2t^4, & \delta_5 &= c_5 - tc_4 + t^2c_3 - 2t^5, \\ \delta_9 &= c_3c_6 + t^2c_7 - 3t^3c_6 \end{aligned}$$

と定義し, これらに差分商作用素を作用させることにより, 次を得る:

$$\begin{aligned} c_3 &= 2(\sigma_{342} + 2\sigma_{542}), \\ c_4 + 2t^4 &= 3(\sigma_{1342} + 2\sigma_{3542} + 2\sigma_{6542}), \\ c_5 - tc_4 + t^2c_3 - 2t^5 &= 2\sigma_{76542}, \\ c_3c_6 + t^2c_7 - 3t^3c_6 &= 2(\sigma_{654376542} + 2\sigma_{154376542}). \end{aligned} \quad (5)$$

$H^*(E_7/T; \mathbb{Z})$ がねじれ元をもたないことから, (4) と (5) より, γ_i ($i = 3, 4, 5, 9$) を Schubert 類を用いて表すことができ, 結果は以下の通り:

$$\begin{aligned}
\gamma_3 &= \sigma_{342} + 2\sigma_{542}, \\
\gamma_4 &= \sigma_{1342} + 2\sigma_{3542} + 2\sigma_{6542}, \\
\gamma_5 &= \sigma_{76542}, \\
\gamma_9 &= \sigma_{654376542} + 2\sigma_{154376542}.
\end{aligned} \tag{6}$$

逆に, (6) の右辺に現れる Schubert 類を表す多項式を求めることもできる:

$$\begin{aligned}
\sigma_{342} &= -\gamma_3 + 2t^3, \quad \sigma_{542} = \gamma_3 - t^3, \\
\sigma_{1342} &= \gamma_4 - 2t\gamma_3 + 2t^4, \quad \sigma_{3542} = -\gamma_4 + t\gamma_3, \quad \sigma_{6542} = \gamma_4 - t^4, \\
\sigma_{76542} &= \gamma_5, \\
\sigma_{154376542} &= \gamma_9 - \gamma_4\gamma_5 + t^4\gamma_5, \quad \sigma_{654376542} = -\gamma_9 + 2\gamma_4\gamma_5 - 2t^4\gamma_5.
\end{aligned} \tag{7}$$

このようにして, 差分商作用素を通して, Borel 表示と Schubert 表示との対応関係を明らかにすることができ, 例えば, 例 2.2 と例 2.6 が完全に一致することを確かめることができる (計算の詳細については [30] を参照).

4 複素代数群 G の Chow 環 $A(G)$

これまでに得られた旗多様体 G/B のコホモロジー環の結果を, 複素代数群 G の Chow 環の計算に応用しよう. G を連結, 半単純な複素代数群, B をその Borel 部分群, H を B に含まれる極大トーラス, \hat{H} を H の指標群とする. 各指標 χ に対して, χ に付随する, 旗多様体 G/B 上の等質直線束 L_χ の第一 Chern 類 $c_1(L_\chi)$ を対応させることにより, 特性準同型

$$c_G : S(\hat{H}) \longrightarrow A(G/B) \tag{8}$$

が定義される. ここで, $S(\hat{H})$ は \hat{H} の \mathbb{Z} 上の対称代数, $A(G/B) = \bigoplus_{i \geq 0} A^i(G/B)$ は旗多様体 G/B の Chow 環である. Grothendieck の remark ([19], p.21, REMARQUES 2°) によると, G の Chow 環 $A(G)$ は, $A(G/B)$ を, c_G による \hat{H} の像で生成されるイデアルで割って得られる (証明は [9, §3] 参照). したがって, $A(G)$ の計算は $A(G/B)$ の計算に帰着される. この remark にしたがって, 代数群 $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{Spin}(n)$, G_2 および F_4 の Chow 環が R. Marlin

により計算されている ([37], [38]). ($\text{mod } p$ Chow 環 $A(G; \mathbb{F}_p) = A(G) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{F}_p$ については, V. Kac による結果 [28] を参照.) ここで, 旗多様体 G/B の Chow 環を計算するため, Marlin は Demazure の結果 [12] に依拠しているが, これは, $A(G/B)$ を「ルート系のコホモロジー」として記述するものであり, Chow 環 $A(G/B)$ の Schubert 表示そのものであるため, 環構造の計算が大変複雑である. ここで, 我々は次の重要な事実を利用する. まず, 各 Schubert 多様体 $X_{w_0 w}$ の定める有理同値類 $\in A^{l(w)}(G/B)$ に, その基本コホモロジー類 $\in H^{2l(w)}(G/B; \mathbb{Z})$ を対応させることにより, サイクル写像 $cl : A(G/B) \rightarrow H^*(G/B; \mathbb{Z})$ が定義されるが, これについて, 次が成り立つ:

事実 4.1 ([19], LEMME 10) サイクル写像を通じて, Chow 環 $A(G/B)$ は整数係数コホモロジー環 $H^*(G/B; \mathbb{Z})$ と環として同型である.

さらに, この同型を通じて, Borel の特性準同型 (1) と上記の特性準同型 (8) は同一視される. したがって, $A(G)$ の計算は $H^*(G/B; \mathbb{Z}) \cong H^*(K/T; \mathbb{Z})$ の計算に帰着されるが, これは既に見たように, 多くの数学者 (特にトポロジストによる貢献を強調しておく) により確立されている. したがって, K が単連結ならば, $H^*(K/T; \mathbb{Z})$ を $H^2(K/T; \mathbb{Z})$ により生成されるイデアルによって割って得られる商環を計算すればよい. 例えば, E_7 の場合, 例 2.2 より,

$$\begin{aligned} H^*(E_7/T; \mathbb{Z}) / (t_1, \dots, t_7, t) \\ = \mathbb{Z}[\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_9] / (2\gamma_3, 3\gamma_4, 2\gamma_5, \gamma_3^2, 2\gamma_9, \gamma_5^2, \gamma_4^3, \gamma_9^2). \end{aligned}$$

ここで, (7) より, $\gamma_3, \gamma_4, \gamma_5, \gamma_9$ はそれぞれ単独の Schubert 類 $\sigma_{542}, \sigma_{6542}, \sigma_{76542}, \sigma_{654376542}$ により置き換えることができ, 結果は以下の通り (ここで, 自然な写像を $T_G : A(G/B) \rightarrow A(G)$ とする):

定理 4.2 ([30]) 複素代数群 E_7 の Chow 環は

$$A(E_7) = \mathbb{Z}[X_3, X_4, X_5, X_9] / (2X_3, 3X_4, 2X_5, X_3^2, 2X_9, X_5^2, X_4^3, X_9^2),$$

$$\begin{aligned} X_3 &= T_{E_7}(X_{w_0 s_5 s_4 s_2}), \quad X_4 = T_{E_7}(X_{w_0 s_6 s_5 s_4 s_2}), \quad X_5 = T_{E_7}(X_{w_0 s_7 s_6 s_5 s_4 s_2}), \\ X_9 &= T_{E_7}(X_{w_0 s_6 s_5 s_4 s_3 s_7 s_6 s_5 s_4 s_2}). \end{aligned}$$

このようにして, 残された例外型の複素代数群 E_6, E_7, E_8 の Chow 環を決定することができる. また, 旗多様体のコホモロジーの Borel 表示を利用すること

により、環構造の計算が容易となり、Marlin の計算も大幅に省略化される。これらの結果については、[43], [30], [16] を参照していただきたい。

5 おわりに

この稿を終えるにあたり、本研究のその後の展開や考察すべき問題について簡単に述べておきたいと思う。

5.1 一般化旗多様体 G/P

本稿では、完全旗多様体のみを扱ったが、一連の結果を一般化旗多様体 (例えば、複素グラスマン多様体やラグランジアン・グラスマン多様体) へ拡張することが可能である ([2, §5]). すなわち、 G を連結な半単純複素 Lie 群、 P を放物型部分群とすると、等質空間 G/P もまた射影的代数多様体の構造をもち、その整係数コホモロジー $H^*(G/P; \mathbb{Z})$ は、Borel 表示および Schubert 表示により記述される。近年、計算機の発達と相俟って、特に、例外型 Lie 群の等質空間について、そのコホモロジー環や Chow 環の Schubert 表示を追求する試みが盛んに行われている ([14], [10], [25], [44]). 一方で、こうした等質空間のコホモロジー環の多くは、Borel 表示を用いて、特に日本のトポロジストによって 30 年以上も前に計算されている ([52], [27], [26], [41] など). [31] では、差分商作用素をこれらの等質空間にも適用して、両者の表示の関係を明らかにしている。

5.2 生成元の特徴づけ

§2.2 で触れたように、旗多様体のコホモロジーの Schubert 表示において、加法的な構造は Schubert 類を用いて完全に記述されるが、その乗法構造は大変複雑である。特に、数多存在する Schubert 類の中から、コホモロジー環の生成元になり得るものを特定する一般論は知られていないようである ([14] や [16] では、ファイブレーション $P/B \rightarrow G/B \rightarrow G/P$ や P が極大放物型部分群であるという事実などを利用して、生成元を特定している)。旗多様体のコホモロジー環が Schubert 類で生成される自由加群であることと構造定数に関する情報のみから、環としての生成元を特定することは可能であろうか？

5.3 分類空間の Chow 環との関係

90年代後半に、線型代数群 G の分類空間 BG の Chow 環 CH^*BG が、B. Totaro によって定義され ([49]), 群の分類空間を代数幾何の枠内で扱うことが可能になり、これを受けて、様々な代数群の分類空間の Chow 環が計算されている ([45], [17], [20], [40]). 通常のコホモロジーの場合、Lie 群 G のコホモロジーとその分類空間 BG のコホモロジーは、スペクトル系列により結ばれている ([46]). では、代数群 G の Chow 環 (この稿では、 $A(G)$ と書いている) と、その分類空間 BG の Chow 環 (ここでは、 CH^*BG と書いている) の間には、どのような関係があるのだろうか?

参考文献

- [1] A. Bertram, *Quantum Schubert calculus*, Adv. Math. **128** (1997), 289–305.
- [2] I. N. Bernstein, I. M. Gelfand and S. I. Gelfand, *Schubert cells and the cohomology of the spaces G/P* , London Math. Soc. Lecture Note Ser., **69** Cambridge Univ. Press, 1982, 115–140.
- [3] S. Billey and M. Haiman, *Schubert polynomials for the classical groups*, J. Amer. Math. Soc. **8** (1995), 443–482.
- [4] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), 115–207.
- [5] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semisimple Lie groups*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **40** (1954), 1147–1151.
- [6] R. Bott and H. Samelson, *The cohomology ring of G/T* , Proc. Nat. Acad. Sci. USA **41** (1955), 490–493.
- [7] R. Bott and H. Samelson, *Application of the theory of Morse to the symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964–1029.
- [8] N. Bourbaki, *Groupes et Algèbre de Lie IV – VI*, Masson, Paris, 1968.
- [9] M. Brion, *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory*,

- arXiv:math.AG/9802063.
- [10] P. E. Chaput, L. Manivel, and N. Perrin, *Quantum cohomology of minuscule homogeneous spaces*, arXiv:math. AG/0607492.
 - [11] C. Chevalley, *Sur les décomposition cellulaires des espaces G/B* , Algebraic Groups and their Generalizations: Classical Methods (W. Haboush, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., **56**, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994, 1–23.
 - [12] M. Demazure, *Invariants symétriques entiers des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287–301.
 - [13] H. Duan, *Multiplicative rule of Schubert classes*, Invent. Math. **159** (2005), 407–436.
 - [14] H. Duan and X. Zhao, *The Chow rings of generalized Grassmannians*, arXiv:math.AG/0511332.
 - [15] H. Duan and X. Zhao, *Algorithm for multiplying Schubert classes*, Internat. J. Algebra Comput. **16** (2006), 1197–1210.
 - [16] H. Duan and X. Zhao, *The integral cohomology of complete flag manifolds*, arXiv:math.AT/08012444.
 - [17] R. Field, *The Chow ring of the classifying space $BSO(2n, \mathbb{C})$* , arXiv:math. AG/0411424.
 - [18] S. Fomin and A. Kirillov, *Combinatorial B_n -analogues of Schubert polynomials*, Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 3591–3620.
 - [19] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Exposé 5 in Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, 1958, Multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris.
 - [20] P. Guillot, *The Chow rings of G_2 and $Spin(7)$* , J. Reine Angew. Math. **604** (2007), 137–158.
 - [21] E. Gutkin, *Schubert calculus on flag varieties of Kac-Moody groups*, Algebras Groups Geom. **3** (1986), 27–59.
 - [22] H. Hiller, *Schubert calculus of a Coxeter group*, Enseign. Math. **27** (1981), 57–84.
 - [23] T. Ikeda, *Schubert classes in the equivariant cohomology of the La-*

- grangian Grassmannian*, Adv. Math. **215** (2007), 1–23.
- [24] T. Ikeda and H. Naruse, *Excited Young diagrams and equivariant Schubert calculus*, arXiv:math.AG/0703637.
- [25] A. Iliev and L. Manivel, *The Chow ring of the Cayley plane*, Compos. Math. **141** (2005), 146–160.
- [26] K. Ishitoya, *Integral cohomology ring of the symmetric space $EIII$* , J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 375–397.
- [27] K. Ishitoya and H. Toda, *On the cohomology of irreducible symmetric spaces of exceptional type*, J. Math. Kyoto Univ. **17** (1977), 225–243.
- [28] V. Kac, *Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups*, Invent. Math. **80** (1985), 69–79.
- [29] V. Kac, *Constructing groups associated to infinite-dimensional Lie algebras*, Infinite-dimensional groups with applications (Berkeley, Calif., 1984), 167–216, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 4, Springer, New York, 1985.
- [30] S. Kaji and M. Nakagawa, *The Chow rings of the algebraic groups E_6 and E_7* , arXiv:math.AT/07093702.
- [31] S. Kaji and M. Nakagawa, *Multiplicative structure of the Chow rings of projective homogeneous varieties*, preprint.
- [32] A. Knutson and T. Tao, *Puzzles and (equivariant) cohomology of Grassmannians*, Duke Math. J. **119** (2003), 221–260.
- [33] B. Kostant and S. Kumar, *The nil Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac-Moody group G* , Adv. Math. **62** (1986), 187–237.
- [34] A. Kresch and H. Tamvakis, *Quantum cohomology of the Lagrangian Grassmannians*, J. Algebraic Geom. **12** (2003), 777–810.
- [35] A. Kresch and H. Tamvakis, *Quantum cohomology of orthogonal Grassmannians*, Compos. Math. **140** (2004), 482–500.
- [36] A. Lascoux and M. Schützenberger, *Polynômes de Schubert*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér I Math., **294** (1982), 447–450.
- [37] R. Marlin, *Anneaux de Chow des groupes algébriques $SU(n)$, $Sp(n)$, $SO(n)$, $Spin(n)$, G_2 , F_4 ; torsion*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A **279**

- (1974), 119–122.
- [38] R. Marlin, *Anneaux de Chow des groupes algébriques* $SO(n)$, $Spin(n)$, G_2 et F_4 , Publications Math. d’Orsay, 95-7419 (1974).
- [39] M. L. Mehta, *Basic sets of invariant polynomials for finite reflection groups*, Comm. Algebra **16** (1988), 1083–1098.
- [40] A. Molina and A. Vistoli, *On the Chow rings of classifying spaces for classical groups*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **116** (2006), 271–298.
- [41] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_7/T* , J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 303–321.
- [42] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_8/T* , preprint.
- [43] M. Nakagawa, *A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds*, Fund. Math. **199** (2008), 273–293.
- [44] S. Nikolenko and N. Semenov, *Chow ring structure made simple*, arXiv:math. AG/0606335.
- [45] R. Pandharipande, *Equivariant Chow rings of $O(k)$, $SO(2k + 1)$, and $SO(4)$* , J. Reine Angew. Math. **496** (1998), 131–148.
- [46] M. Rothenberg and N. E. Steenrod, *The cohomology of classifying spaces of H -spaces*, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 872–875.
- [47] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T* , J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 257–286.
- [48] H. Toda, *On the cohomology ring of some homogeneous spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 185–199.
- [49] B. Totaro, *The Chow ring of a classifying space*, Algebraic K-theory (Seattle, WA, 1997), 249–281, Proc. Sympos. Pure Math., 67, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [50] B. Totaro, *The torsion index of E_8 and other groups*, Duke Math. J. **129** (2005), 219–248.
- [51] B. Totaro, *The torsion index of the spin groups*, Duke Math. J. **129** (2005), 249–290.
- [52] T. Watanabe, *The integral cohomology ring of the symmetric space $EVII$* , J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 363–385.

Kervaire 不変量と位相変換群論

北田 泰彦

(横浜国立大学大学院)

1 Kervaire 不変量とは

1960 年, Kervaire は 10 次元の多様体で微分構造を持たないものを次のように構成した ([42])。\$M_0^{10}\$ は平行可能な微分可能な多様体で, その境界は球面とホモトピー同値であり, Kervaire 不変量が 1 のものとする。境界は \$S^9\$ と同相なので, 境界に円板 \$D^{10}\$ を貼り合わせて 10 次元の位相 (あるいは PL) 閉多様体 \$M^{10}\$ を作る。もしこの多様体が微分構造を持つならば, 安定平行可能となり, 10 次元の安定枠付き閉多様体で Kervaire 不変量 1 のもの (Kervaire 多様体) が存在することになる。しかし, 18 次元以下では 2, 6, 14 次元しか Kervaire 不変量 1 の安定枠付き多様体 (= 球面の安定ホモトピー群の要素) が存在しないことが示されるので, \$M^{10}\$ は微分構造を持たない。

(安定) 枠付き閉 (もしくは境界がホモトピー球面の) 多様体 \$M^{2q}\$ (\$q\$: 奇数) に対して, Kervaire 不変量は次のように定められる。まず, \$M\$ に対して枠付き手術を行い, \$M\$ が \$(q-1)\$ 連結となるようにする。\$H_q(M; \mathbb{Z}/2)\$ 上の 2 次形式 \$\phi : H_q(M; \mathbb{Z}/2) \to \mathbb{Z}/2\$ を次のように定める。\$x \in H_q(M; \mathbb{Z}/2)\$ を球面からの埋め込み (またははめ込み) \$S^q \to M\$ で表す。\$q = 1, 3, 7\$ 以外では, \$x\$ を表すその埋め込みの法バンドルが非自明 (\$S^q\$ の接バンドルと一致) のとき \$\phi(x) = 1\$, 自明のとき \$\phi(x) = 0\$ と定める。このとき,

$$\phi(x+y) = \phi(x) + \phi(y) + x \cdot y$$

が成り立つ。ここで \$x \cdot y\$ は 2 つのホモロジー類の交わり数を表すが, この交わりに関する \$H_q(M; \mathbb{Z}/2)\$ の symplectic base \$x_i, y_i\$, すなわち, \$x_i \cdot y_i = \delta_{ij}, x_i \cdot x_j = 0, y_i \cdot y_j = 0\$ なるものをとり, \$M\$ の Kervaire 不変量を \$c(M) = \sum_i \phi(x_i)\phi(y_i)\$ で定義する。\$q = 1, 3, 7\$ のときを含む一般的な定義では, Steenrod 作用素 \$Sq^{q+1}\$ と Pontrjagin-Thom 写像を用いた関数的コホモロジー作用素によって 2 次形式を定義する ([15])。

\$q\$ を奇数とするとき, \$2q\$ 次元の平行可能な多様体でその境界がホモトピー球面であり, Kervaire 不変量が 1 となるものが次のように構成できる。その方法を 2 つ述べる ([38])。

Brieskorn 多様体 \$d\$ を奇数, \$\epsilon\$ を小さな正の実数として, \$\mathbb{C}^{q+1}\$ で

$$\begin{aligned} z_1^d + z_2^2 + \cdots + z_{q+1}^2 &= \epsilon, \\ |z_1|^2 + |z_2|^2 + \cdots + |z_{q+1}|^2 &\leq 1 \end{aligned}$$

を満たす多様体を \$W_d^{2q}\$ とすると \$W_d\$ は平行可能かつ境界はホモトピー球面であり, \$W_d\$ の Kervaire 不変量は \$d \equiv \pm 1 \pmod{8}\$ のとき 0, \$d \equiv \pm 3 \pmod{8}\$ のときに 1 となることが知られている。前者のとき, 境界は標準的球面 \$S^{2q-1}\$ に微分同相である。後者のときには, その境界は Kervaire 球面と呼ばれる。ここではそれを \$\Sigma_K^{2q-1}\$ と表すことにする。後に見るように \$q \neq 2^j - 1\$ なら \$\Sigma_K^{2q-1}\$ は \$S^{2q-1}\$ と微分同相でない。また, Kervaire 球面が標準的な球面と微分同相の時には, \$W_d\$ の境界に \$D^{2q}\$ を張り合わせて Kervaire 多様体が構成できる。

Plumbing 法 A_{2m} を $2m$ 個の頂点を一列につないで得られるグラフとする。 A_{2m} の各頂点に S^q の接バンドルに随伴した単位円板バンドルを置いて、グラフの辺によりバンドルを plumb して得られる $2q$ 次元多様体 M_{2m}^{2q} を考える。このとき、 M_{2m} は平行可能多様体で、その境界はホモトピー球面であり、Kervaire 不変量 $c(M_{2m})$ は $2m+1 \equiv \pm 1 \pmod{8}$ のとき 0, $2m+1 \equiv \pm 3 \pmod{8}$ のとき 1 となる。

2 ホモトピー理論における Kervaire 不変量

枠付きコボルディズム群 Ω_n^{fr} は球面の安定ホモトピー群 π_n^S と同一でき、ホモトピー論における中心的な研究対象であり続けてきた。Kervaire 不変量は準同型写像 $c: \Omega_{2q}^{\text{fr}} = \pi_{2q}^S \rightarrow \mathbb{Z}/2$ であり、多くの研究と結果が知られている。

1960 Kervaire $c \neq 0$ ($q = 1, 3, 7$), および $c = 0$ ($q = 5, 9$)。

1966 Brown-Peterson ([19]) $2q = 8k + 2$ のとき, 関係式

$$Sq^2 Sq^{4k} + Sq^1 (Sq^2 Sq^{4k-1}) = 0$$

から 2 次形式を定義し、Kervaire 不変量写像を SU および Spin コボルディズムに構成し、

$$c: \Omega_{2q}^{\text{fr}} \longrightarrow \Omega_{2q}^{SU} (\text{または } \Omega_{2q}^{\text{Spin}}) \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

と分解することにより、 $c = 0$ を証明した。

1969 Browder ([7]) 一般の多様体 M^{2q} に v_{q+1} 向き付けの構造が入ることから、拡張された Kervaire 不変量 $\Omega_{2q}^{B(v_{q+1})} \rightarrow \mathbb{Z}/2$ を定義し、枠付け多様体の Kervaire 不変量写像 c は $q \neq 2^j - 1$ のときには常に 0 となること、また $q = 2^j - 1$ の時には、Adams スペクトル系列の E_2 に現れる h_j^2 が E_∞ まで残ることが $c \neq 0$ となるための必要十分条件であることを示した。このことは $Sq^{2^j} Sq^{2^j}$ を含む Adem 関係式が detect できる安定ホモトピー群の要素の存在と同値である。

1972 E.H. Brown Jr ([17]) $\mathbb{Z}/4$ 値をもつ 2 次形式と、ガウス和を用いて、 $\text{mod } 8$ の指数写像 $\Omega_{2q}^{\text{fr}} \rightarrow \Omega_{2q}(\xi \langle v_{q+1} \rangle) \rightarrow \mathbb{Z}/8$ を用いて、Browder の議論をわかりやすいものとした。

1984 Barratt-Jones-Mahowald ([4]) それまで $2q = 2, 6, 14, 30$ で枠付け閉多様体で Kervaire 不変量 1 の存在がわかっていたが、 $2q = 62$ でも存在することを示した。

その他 Kervaire 不変量は余次元 1 のはめ込みに関連して解釈できることは知れていた ([30] など)。この方法を進める試みが近年なされている様子である。その方法を用いて、昨年から今年にかけて $2^{j+1} - 2$ 次元で Kervaire 不変量がゼロとなる次元の存在が示されたとの主張が Archive で見られるが、詳細はまだ不明である。

3 手術理論における Kervaire 不変量

3.1 Kervaire-Milnor のホモトピー球面

n 次元球面とホモトピー同値な向き付けられた微分可能閉多様体の h コボルディズム類の集合は多様体の連結和に関して可換群をなす。この群を Θ_n で表す。Kervaire-Milnor は完全系列

$$0 \longrightarrow bP_{n+1} \longrightarrow \Theta_n \xrightarrow{p'} \text{Cok}(J_n : \pi_n(SO) \rightarrow \pi_n^S)$$

を与えた。 bP_{n+1} は平行可能な $(n+1)$ 次元多様体の境界となるホモトピー球面のつくる部分群であり、 n が偶数の時には $bP_{n+1} = 0$ である。 $n \equiv 3 \pmod{4}$ の時には、 bP_{n+1} はいわゆる Milnor 球面で生成される有限巡回群である。 $n \equiv 1 \pmod{4}$ のとき bP_{n+1} は Kervaire 球面で生成される。さらに、 $n \equiv 1 \pmod{4}$ で $n \neq 2^* - 3$ のときには、Browder の結果から、 $bP_{n+1} \cong \mathbb{Z}/2$ である。また、Kervaire-Milnor は $n \not\equiv 2 \pmod{4}$ では、 p' が全射であることを示した ([43])。 $n \equiv 2 \pmod{4}$ の時には、 $\text{Im}(p') = \text{Ker}(c : \text{Cok}(J_n) \rightarrow \mathbb{Z}/2)$ であるが、前に述べたように、 $n \neq 2^* - 2$ の時には $c = 0$ なので、 p' は全射である。

3.2 手術の完全系列

X^n を n 次元 Poincaré 複体とする。 X への手術データ (法写像ともいう) とは可換図式

$$\begin{array}{ccc} \nu_M & \xrightarrow{b} & \xi \\ \downarrow & & \downarrow \\ M^n & \xrightarrow{f} & X^n \end{array}$$

ただし、 ξ は X^n 上の安定ベクトル束、 ν_M は M の安定法束、 f は写像度 1 の写像で、 b は f をカバーするベクトル束写像である。このとき、 ξ は X の Spivak 球面法ファイブレーションのベクトル束への reduction になっている。 X へのすべての手術データをコボルディズム関係で同値類別した集合を $\mathcal{N}(X)$ で表す。その要素を法写像とよぶこともある。同様の概念は微分可能カテゴリーだけでなく、PL, TOP でも定義できる。 X が単連結のとき、多様体 M^n とホモトピー同値写像 $f : M^n \rightarrow X^n$ 全体の h コボルディズムクラス全体を $\mathcal{S}(X)$ で表す。単連結でない場合には、simple ホモトピー同値と s コボルディズムを用いる。このとき $n \geq 5$ で完全系列

$$\mathcal{S}(X \times I \text{ rel } \partial) \xrightarrow{\eta'} \mathcal{N}(X \times I/\partial) \xrightarrow{s'} L_{n+1}(\pi) \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} \mathcal{N}(X) \xrightarrow{s} L_n(\pi)$$

が成り立つ ([82])。 $L_{n+1}(\pi)$, $L_n(\pi)$ は $\pi = \pi_1(X)$ とする Wall の手術障害群である。Wall 群は自明な群の Wall 群を直和にもち $L_n(\pi) = L_n(1) \oplus \tilde{L}_n(\pi)$ と書ける。このことから、 $n \equiv 2 \pmod{4}$ の時には $\mathcal{N}(X)$, $n+1 \equiv 2 \pmod{4}$ の時には $\mathcal{N}(X \times I/\partial)$ の手術障害は Kervaire 障害を含む。前者は与えられた手術データを満たす X とホモトピー同値な多様体が存在するための条件であり、後者は Kervaire 球面との連結和が微分構造を変えるかという分類問題に関わる。

BSO , BSF をそれぞれ安定ベクトル束、安定球面ファイブレーションの分類空間とし、分類空間の J 写像 $J : BSO \rightarrow BSF$ のホモトピーファイバーを F/O で表す。 F/O はファイバーホモトピー自明化をもつ安定ベクトル束の分類空間である ([59])。 $F/O \rightarrow BSO \rightarrow BSF$

は無限ループ空間の無限ループ写像であることが知っている。\$X\$ とホモトピー同値な多様体が存在するとき、\$\mathcal{N}(X)\$, \$\mathcal{N}(X \times I/\partial)\$ はそれぞれホモトピー集合 \$[X, F/O]\$, \$[\Sigma X_+, F/O]\$ と解釈できる。ここで \$\Sigma X_+\$ は \$X_+ = X \cup \{pt\}\$ の簡約懸垂であり、\$X \times I/X \times \{0, 1\}\$ の略記である。このとき、手術の完全系列は

$$\mathcal{S}(X \times I \text{ rel } \partial) \xrightarrow{\eta'} [\Sigma X_+, F/O] \xrightarrow{s'} L_{n+1}(\pi) \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} [X, F/O] \xrightarrow{s} L_n(\pi)$$

となる。\$X = S^n\$ の場合には

$$\Theta_{n+1} \xrightarrow{\eta'} \pi_{n+1}(F/O) \xrightarrow{s'} L_{n+1}(1) \xrightarrow{\omega} \Theta \xrightarrow{\eta} \pi_n(F/O) \xrightarrow{s} L_n(1)$$

であり、これはファイブレーション \$PL/O \to F/O \to F/PL\$ のホモトピー群の完全系列

$$\pi_{n+1}(PL/O) \to \pi_{n+1}(F/O) \to \pi_{n+1}(F/PL) \to \pi_n(PL/O) \to \pi_n(F/O) \to \pi_n(F/PL)$$

と同一視できる ([52])。

4 手術の分類空間と普遍 Kervaire 類

4.1 分類空間のホモロジー特性類

\$q\$ を奇数とするとき、多様体構造を持つ Poincaré 複体 \$X^{2q}\$ の手術問題に対する Kervaire 不変量 (Kervaire 障害) を求めるには、Kervaire 障害 \$c : [X, F/O] \to \mathbb{Z}/2\$ を計算する必要がある。PL 多様体のカテゴリーでも同様な問題が考えられるが、この場合手術の分類空間 \$F/PL\$ の 2 局所的性質は Sullivan ([79]) により

$$F/PL \simeq (K(\mathbb{Z}/2, 2) \times_{\delta Sq^2} K(\mathbb{Z}, 4)) \times \prod_{i>1} (K(\mathbb{Z}/2, 4i-2) \times K(\mathbb{Z}/2, 4i))$$

と知っているので、扱いは難しくない。法写像 (手術データ) を \$\varphi : X \to F/PL\$ とするとき、Kervaire 不変量 (障害) が

$$c(\varphi) = \langle V(X)^2 \sum_i \varphi^*(K_{4i+2}^{PL}), [X]_2 \rangle$$

で与えられるように、PL 普遍 Kervaire 類 \$K_{4i+2}^{PL} \in H^{4i+2}(F/PL)\$ (\$\mathbb{Z}/2\$ 係数) を定義できる ([77],[26],[59])。ここで、\$V(X)\$ は \$X\$ の全 Wu 類、\$[X]_2 \in H_n(X)\$ は mod 2 のホモロジー基本類である。このように定められた普遍 Kervaire 類 \$K_{4i+2}^{PL}\$ は primitive であることが知られている。すなわち余積は、

$$\psi(K_{4i+2}^{PL}) = K_{4i+2}^{PL} \otimes 1 + 1 \otimes K_{4i+2}^{PL}$$

となる。微分可能カテゴリーの分類空間 \$F/O\$ は \$F/PL\$ のような簡単な記述はないが、自然な写像 \$F/O \to F/PL\$ は 6 連結であるので、低い次元ではホモトピー同値である。また、PL 普遍 Kervaire 類 \$K_{4i+2}^{PL}\$ の \$F/O\$ への引き戻しは \$4i+2 = 2^{j+1} - 2\$ のときのみ 0 とならない。この類を \$K_{2^{j+1}-2}\$ で表し、微分可能カテゴリーの普遍 Kervaire 類とよぶ。当然ながら、これらも primitive である。

$\mathbb{Z}/2$ 係数の微分可能カテゴリーの手術分類空間 F/O のコホモロジー群を直接計算することは難しい。Milgram はホモロジー作用素を用いて無限ループ空間としての Pontrjagin 環 $H_*(SF; \mathbb{Z}/2)$, $H_*(F/O; \mathbb{Z}/2)$ などを計算した。

Milgram([64])

$$H_*(F/O; \mathbb{Z}/2) = P\{u(i, i) = Q^i Q^i [1] * [-3] | i \geq 1\} \\ \otimes P\{u(I) = Q^I [1] * [1 - 2^n] | I = (i_1, \dots, i_n) : \text{allowable}, n \geq 2, e(I) \geq 1, i_n \geq 1\}$$

ここで, I が allowable とは $2i_{j+1} \geq i_j \geq i_{j+1}$, ($j = 1, \dots, n-1$) を意味し, $e(I) = i_1 - i_2 - \dots - i_n$, 生成元の次数は $\deg u(i, i) = 2i$, $\deg u(i_1, \dots, i_n) = \sum_j i_j$ である。

コホモロジー特性類である普遍 Kervaire 類との関係については, Madsen らによる次の結果がある。

$$\text{Madsen}([56] \text{ など}) \quad I = (i_1, i_2, \dots, i_n) \quad (\text{必ずしも allowable でない}) \text{ としたとき,} \\ \langle K_{2^{j+1}-2}, u(i_1, i_2, \dots, i_n) \rangle \neq 0 \\ \iff n = 2, \quad i_1 + i_2 = 2^{j+1} - 2, \quad \text{かつ} \quad \exists k, 0 < k \leq j, \quad i_2 = 2^k - 1$$

微分可能な枠付き $2q$ 次元 Kervaire 多様体が存在するとき, それの

$$h : \Omega_{2q}^{\text{fr}} = \pi_{2q}(F) \xrightarrow{\text{Hurewicz}} H_{2q}(F; \mathbb{Z}/2) \longrightarrow H_{2q}(F/O; \mathbb{Z}/2)$$

による像は $u(q, q) + \text{decomposables}$ で primitive かつ, すべての双対 Steenrod 作用で消える。たとえば, 2次元, 6次元では, $h(\eta^2) = u(1, 1)$, $h(\nu^2) = u(3, 3) + u(2, 2)u(1, 1) + u(2, 1)^2$ である。逆に, $u(q, q) + \text{decomposables}$ なるホモロジー類が spherical なら, Kervaire 多様体は存在する。

4.2 Kervaire 類の関係

Gitler-Stasheff([35]) は $H^3(BF; \mathbb{Z}/2)$ は w_3 と exotic 特性類 e_1 で生成されることを示した。後に McClendon の高次 twisted コホモロジー作用素 ([63]) を用いて, Peterson [71] は球面ファイブレーションに対する 2次特性類 (exotic 特性類) e_s を定義した。これは Gitler-Stasheff の e_1 を一般化するものである。Peterson の exotic 特性類の indeterminacy はかなり大きかったが, Ravenel [75] はこれを大幅に小さくする工夫を行った。さらに, Hegenbarth-Heil([36]) はそのコホモロジー懸垂が $H^*(SF; \mathbb{Z}/2)$ の普遍 Kervaire 類に一致することを示した。この事実を利用すると, Steenrod 代数の (コ) ホモロジー群の計算を通じて, 2次コホモロジー作用素 $\psi_{i,j}$ たちの間の関係式から, 普遍 Kervaire 類の間の関係式を導くことができる。実際, 複素射影空間, 実射影空間, 偶數位数のレンズ空間の手術問題に現れる tangential な手術問題での Kervaire 障害を調べることが行われてきた ([78], [46])。しかし, 個々のケースに応じた「2次コホモロジー作用素たちの間に成り立つ関係式」を発見することは必ずしも容易でなく, いわば, ad hoc な手段といえる。また, 2次作用素にはつきものの不確定性 (indeterminacy) の扱いもわずらわしいものであった。これとは別な方法で, 直接普遍 Kervaire 類たちの間の関係式を得ることができることがわかった。それは, 前節で述べた Milgram-Madsen の結果に加え, Nishida の公式 ([70]) を用いて, $H^*(F/O; \mathbb{Z}/2)$ の普遍 Kervaire 類の関係式を求める方法である。この方法で発見された公式には次の 2系列のものがある。

A 系列 : $A(a, b, c)$ ($a > b > c \geq 0$) :

$$Sq^{2^a} Sq^{2^b} Sq^{2^c} K_{2^a-2} + Sq^{2^b} Sq^{2^c} K_{2^{a+1}-2} = 0$$

B 系列 : $B(a, b)$ ($a > b > 0$) :

$$Sq^{2^{a+1}} Sq^{2^a} Sq^{2^b} K_{2^a-2} + (Sq^{2^{a+1}} Sq^{2^b} + Sq^{2^{b+1}+2^b} Sq^{2^{a+1}-2^{b+1}}) K_{2^{a+1}-2} = 0$$

前者の詳細な証明は [47] にある。後者の証明も同様なものであり、その方針は [49] に述べてある。

5 位相変換群における Kervaire 不変量

ここで扱うのは、ホモトピー球面に作用する位数が偶数 m の有限巡回群 C_m を主とし、最後に S^1 作用を少し扱う。

5.1 Desuspension 問題における Kervaire 障害

ホモトピー球面 Σ^n が自由な C_2 作用 (involution) を持つとき、その球面が C_2 不変な余次元 1 の球面を持つかという問題 (desuspension の問題) がある ([11],[54],[55])。高次元 ($n \geq 6$) では、 n が偶数のとき、常に不変な余次元 1 の球面は存在する。 n が奇数の時には、 $n \equiv 1 \pmod{4}$ の時には $\mathbb{Z}/2$ に、 $n \equiv 3 \pmod{4}$ の時には \mathbb{Z} に値をもつ Browder-Livesay 障害 (BL 障害) が定義でき、これが 0 となることが、不変な余次元 1 の球面が存在するための必要十分条件となる。BL 障害は、 Σ の中で余次元 1 の部分多様体の手術を行うための障害と見なせるが、 $n \equiv 1 \pmod{4}$ の場合には余次元 1 の部分多様体を取り出したときの $(n-1)$ 次元の障害と一致し、さらに $(n-3)$ 次元での Kervaire 障害とも一致することがわかる。自由な involution の商空間は実射影空間とホモトピー同値であり、これらの事実は下の図式の可換性として理解できる。

$$\begin{array}{ccc}
 S(\mathbb{R}P^{4k+1}) & \xrightarrow{\text{BL}} & \mathbb{Z}/2 \\
 \downarrow & & \parallel \\
 [\mathbb{R}P^{4k+1}, F/O] & & \\
 \downarrow & & \parallel \\
 [\mathbb{R}P^{4k}, F/O] & \xrightarrow{c} & \mathbb{Z}/2 \\
 \downarrow & & \parallel \\
 [\mathbb{R}P^{4k-1}, F/O] & \xrightarrow{\bar{c}} & \mathbb{Z}/2 \\
 \downarrow & & \parallel \\
 [\mathbb{R}P^{4k-2}, F/O] & \xrightarrow{c} & \mathbb{Z}/2
 \end{array}$$

Brieskorn 球面 ∂W_d 上で

$$T_d(z_1, z_2, \dots, z_{2k+2}) = (z_1, -z_2, \dots, -z_{2k+2})$$

で与えられる involution を考える。この作用の BL 障害は、 $d \equiv \pm 1 \pmod{8}$ のとき 0 で、 $d \equiv \pm 3 \pmod{8}$ のとき 1 となる ([32])。また、Browder([13]) は別の方法で involution の例を構成したが、その例でももすべての次元で障害が一致してしまう。これを Sullivan の Kervaire 障害の公式に適用すると、実射影空間の法写像 $\varphi: \mathbb{R}P^n \rightarrow F/O$ についての $\varphi^*(K_{2^{j+1}-2})$ のゼロ/非ゼロがはすべての j について一致する例しか構成できていないことがわかる。類似の現象は Morita[69] や Masuda[62] にも見られる。Morita では次数で Kervaire 不変量が定まる。Masuda は Petrie のファイバーホモトピー同値写像から構成した手術障害を計算しているが、その例でも異なる次元の Kervaire 類が同時に 0 または 1 となっている。これは、特定の多様体に限った現象ではなく、異なる次元の普遍 Kervaire 類たちの間に関係があることを強く示唆するものであった。実際、手術データ $\varphi: \mathbb{R}P^N \rightarrow F/O$ が与えられたとき、 $\kappa_j(\varphi) \in \mathbb{Z}/2$ を

$$\kappa_j(\varphi) = \begin{cases} 0, & (\varphi^*(K_{2^{j+1}-2}) = 0 \text{ のとき}) \\ 1, & (\varphi^*(K_{2^{j+1}-2}) \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定める。B 系列の公式 $B(j, 1)$ に φ^* を施すと、

$$\kappa_{j-1}(\varphi) = \kappa_j(\varphi)$$

が $2^{j+1} - 2 \leq N/2 - 2$ で成り立つことがわかる。つまり、

実射影空間の手術データ $\varphi: \mathbb{R}P^N \rightarrow F/O$ について、 $(2^{j+1} - 2 \leq N/2 - 2)$ なる Kervaire 類 $\varphi^*(K_{2^{j+1}-2})$ は同時にゼロ/非ゼロとなる

一方、Sullivan の公式より、 $N = 2n$ のときの Kervaire 障害 $c(\varphi)$ は $j = \nu_2(n(n+1))$ (ν_2 は 2-order を表す) として、 $c(f) = \kappa_j(\varphi)$ で与えられることがわかる。このことから、以下のことがいえる。

1. $n = 2^*$ または $n = 2^* - 1$ 以外のとき $\varphi: \mathbb{R}P^{2n} \rightarrow F/O$ について $c(\varphi) = \kappa_1(\varphi)$ が成り立つ。
また、 $k, k+1$ が 2 のべきでないとき、手術データ $\varphi: \mathbb{R}P^{4k+2} \rightarrow F/O$ について、 $c(\varphi)$ と BL 障害が一致することから、
2. $k, k+1$ が 2 べきでないとき、標準的球面 S^{4k+1} 上の自由な involution は常に desuspend し、 $(4k+1)$ 次元の Kervaire 球面上の自由な involution は決して desuspend しない。
3. $L^{2n+1}(m)$ を位数偶数のレンズ空間とし、自然な射影 $\mathbb{R}P^{2n+1} \rightarrow L^{2n+1}(m) \rightarrow \mathbb{C}P(n)$ は $\mathbb{Z}/2$ 係数の偶数次元のコホモロジー群の同型を引き起こすので、実射影空間についての Kervaire 類の同時消滅/非消滅はこれらの $L^{2n+1}(m), \mathbb{C}P(n)$ についても成り立つ。
4. 2 次コホモロジー作用素の関係式の方法を用いると、多様体の次元の約 $2/3$ 次元までの Kervaire 類が同時消滅することがわかり、次元の約 $1/2$ 以下の同時消滅を示す B 系列の公式よりもやや強い結果が得られるが、手術障害の計算に際してはいずれを用いてもほぼ同等の情報が得られる。
5. $(4k+1)$ 次元球面に自由な S^1 作用が与えられているとき、 S^1 多様体として余次元 2 の不変な球面を持つための障害と、 C_2 多様体として desuspend するための障害は

一致し、いずれも $4k - 2$ 次元の Kervaire 障害で与えられる ([68])。 m が偶数のとき、 C_m 作用についても同様である。

5.2 bP_{4k+2} の作用

bP_{4k+2} は $\Theta_{4k+1}(\partial\pi)$ と書き、 $(4k+1)$ 次元ホモトピー球面で、平行可能な $(4k+2)$ 次元多様体の境界となり得るものからなるホモトピー球面の群 Θ_{4k+1} の部分群である。この群は閉 Kervaire 多様体が存在しないときには $\mathbb{Z}/2$ で Kervaire 球面を生成元とし、閉 Kervaire 多様体が存在するときには自明な部分群となる。この節では、Kervaire 球面 Σ_K^{4k+1} が連結和により他の多様体の (詳しくは、写像のホモトピー類もこめて) 微分構造を変えるかどうかを問題にする。 X^{4k+1} を単連結もしくは $\pi_1 = C_m$ の多様体として、手術の完全系列

$$[\Sigma X_+, F/O] \xrightarrow{s'} L_{4k+2}(C_m) \xrightarrow{\omega} \mathcal{S}(X) \xrightarrow{\eta} [X, F/O] \xrightarrow{s} 0$$

を考える。Wall 群 $L_{4k+2}(C_m) = L_{4k+2}(1) \oplus \tilde{L}_{4k+2}(C_m)$ は X とホモトピー同値な多様体 M^{4k+1} たちの集合 $\mathcal{S}(X)$ に変換群として作用する。その退化部分群は 1 次元高い障害写像 s' の像であり、 $\text{Cok}(s')$ は $\mathcal{S}(X)$ に自由に作用して、その商空間は法写像のホモトピー類 (手術データ) の集合 $\mathcal{N}(X) \approx [X, F/O]$ と同型になる。 $(k+1)$ が 2 のべきとはならない場合に $bP_{4k+2} = \mathbb{Z}/2$ の作用を考える。単連結多様体については、Brown-Steer([21]) が Stiefel 多様体 $X = V_2(\mathbb{R}^{2k+2})$ の場合に作用が自明である ($X \# \Sigma_K = X$) ことを幾何学的に示している。文献では、 bP_{4k} の作用に比して、 bP_{4k+2} の作用はあまり扱われていないようである。

5.3 $X = \mathbb{RP}^{4k+1}$ の場合

$(4k+2)$ 次元の Kervaire 手術障害写像 $s' = c : [\Sigma\mathbb{RP}_+^{4k+1}, F/O] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ については、手術データ $\varphi : \Sigma\mathbb{RP}_+^{4k+1} \rightarrow F/O$ に対しても、

$$\kappa_j(\varphi) = \begin{cases} 0, & (\varphi^*(K_{2j+1-2}) = 0 \text{ のとき}) \\ 1, & (\varphi^*(K_{2j+1-2}) \neq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定めると、Sullivan の公式から

$$c(\varphi) = \sum_{j \geq 1} \binom{k + 2^{j-1} - 1}{2j - 2} \kappa_j(\varphi)$$

を得る。この値は、 $e = \nu_2(k(k+1)) + 1$ とおくと、 $\kappa_1 + \kappa_e$ に等しい。一方、普遍 Kervaire 類の関係式 $A(a, a-1, a-2)$ は

$$Sq^{2^a} Sq^{2^{a-1}} Sq^{2^{a-2}} K_{2^a-2} + Sq^{2^{a-1}} Sq^{2^{a-2}} K_{2^{a+1}-2} = 0$$

となる。この式に φ^* を施すことにより、少なくとも中間次元以下で $\kappa_{a-1}(\varphi) + \kappa_a(\varphi) = 0$ を得るので、中間次元以下の $\kappa_i(\varphi)$ はすべて等しい。 k および $k+1$ が共に 2 のべきでない場合には $\kappa_1(\varphi)$ 、 $\kappa_e(\varphi)$ がすべてこの域に入るので、値は等しくそれらの和は 0 となる。以上で、

$k, k+1 \neq 2^*$ のとき、Kervaire 障害写像 $[\Sigma\mathbb{RP}_+^{4k+1}, F/O] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ はゼロである

ことがわかった。関連して、以下のことが言える。

1. $L_{4k+2}(C_2)$ が $S(\mathbb{R}P^{4k+1})$ に非自明に作用する, すなわち,

$$\mathbb{R}P^{4k+1} \# \Sigma_K^{4k+1} \longrightarrow \mathbb{R}P^{4k+1} \# S^{4k+1} = \mathbb{R}P^{4k+1}$$

は“恒等写像”にホモトピックでない。ところで, $\mathbb{R}P^{4k+1}$ の向きを保つホモトピー同値写像は恒等写像にホモトピックなので, このことは $\mathbb{R}P^{4k+1} \# \Sigma_K^{4k+1}$ が $\mathbb{R}P^{4k+1}$ と微分同相でないことも意味する ([44])。

2. この障害写像が 0 であることは,

Kervaire 球面 Σ_K^{4k+1} が 2 点を固定点集合とする involution を持たない

とも解釈できる。すなわち, $(4k+2)$ 次元の平行可能多様体 W^{4k+2} でその境界がホモトピー球面であって, 境界上に 2 点を固定点とする involution があるならば, 「Kervaire 障害写像 = 0」より, W の Kervaire 不変量が 0 とならなければならないからである。

3. 同様にして $t \leq 2k$ のとき, Kervaire 障害写像

$$c : [\Sigma^{2t+1}\mathbb{R}P_+^{4k-2t+1}, F/O] \longrightarrow \mathbb{Z}/2$$

は 0 写像であることが示される。これは前項の流儀で解釈すると, 「Kervaire 球面 Σ_K^{4k+1} は固定点集合 S^{2t} をもつ S^{4k+1} 上の線形な involution $S(\mathbb{R}^{2t+1} \oplus \mathbb{R}_a^{4k-2t+1})$ と isovariant な involution を持たない」と言い換えられる。ここで \mathbb{R}_a は antipodal 表現を表す。

4. 位数 m のレンズ空間 $L^{4k+1}(m; q_1, q_2, \dots, q_{2k+1})$ ($(m, q_i) = 1, (i = 1, 2, \dots, 2k+1)$) を考える。この空間を略して $L^{4k+1}(m)$ で表す。 m が 4 の倍数でない偶数のとき, $\mathbb{R}P^{4k+1}$ の場合と同様に, Kervaire 障害の写像 $c : [\Sigma L^{4k+1}(m), F/O] \rightarrow \mathbb{Z}/2$ は 0 写像である。Petrie は Wall 群 $L_{4k+2}(C_m)$ の作用について, その部分群 $\tilde{L}_{4k+2}(C_m) \cong \mathbb{Z}^{m/2-1}$ が自由に作用することを示していた ([72])。これまでの議論の結果から, 残されていた $L_{4k+2}(1) \cong \mathbb{Z}/2$ も自由に作用することがわかる。
5. 一般に Kervaire 球面上に向き付け不可能な作用があるとき, その固定点の次元はどのようなものが可能となるであろうか。 $(2q-1)$ 次元 Brieskorn 球面上の複素共役写像は S^{q-1} を固定点集合とする。この作用は線形な involution とは isovariant ホモトピー同値ではない。(equivariant ホモトピー同値ではある)。この例より次元の小さいものは知らない。

5.4 位数が 4 の倍数 m のレンズ空間の場合

m が 4 の倍数の時には, 逆に $\varphi : \Sigma L^{4k+1}(m) \rightarrow F/O$ で Kervaire 障害が 1 のものが構成できる。以下にその概要を述べる。

- Sullivan によるとファイブレーション $\text{Cok} J \rightarrow F/O \xrightarrow{\beta} BSO$ は (2 局所的に) 分解し,

$$\beta_* : [\Sigma \mathbb{R}P^{4k+1}, F/O] \longrightarrow [\Sigma \mathbb{R}P^{4k+1}, BSO] \cong \mathbb{Z}/2 \quad ([31])$$

は全射なので, $\beta_*(g) \neq 0$ なる写像 $g : \Sigma \mathbb{R}P^{4k+1} \rightarrow F/O$ が存在する。 $\text{Cok} J$ は 5 連結で, $\beta^*(w_2) = K_2$ となり, $g^*(K_2) \neq 0$ が成り立つ。

- 写像 $\rho : L^{4k+1}(m) \rightarrow \mathbb{R}P^{4k+1}$ は π_1 の全射を引き起こす写像とすると、この写像が引き起こす $\mathbb{Z}/2$ 係数のコホモロジー群の写像は 1 次元で同型、2 次元以上では 0 となる。合成写像

$$\varphi : \Sigma L^{4k+1}(m) \xrightarrow{\Sigma\rho} \Sigma\mathbb{R}P^{4k+1} \xrightarrow{g} F/O$$

を考えると、 $\varphi^*(K_2) \neq 0$ であるが、 $j > 1$ のとき、 $\varphi^*(K_{2j+1-2}) = 0$ であることがわかる。これを Sullivan の Kervaire 障害の公式に適用すると $c(\varphi) = 1$ を得る。

すなわち

$$m \text{ が } 4 \text{ の倍数のとき, } c : [\Sigma L^{4k+1}(m), F/O] \rightarrow \mathbb{Z}/2 \text{ は全射である。}$$

すなわち、 $L^{4k+1}(m) \# \Sigma_K^{4k+1} = L^{4k+1}(m)$ が成り立つ。

5.5 Kervaire 球面上の自由な S^1 作用の非存在問題

Brieskorn 多様体を利用した Kervaire 球面の表示から容易にわかるように、Kervaire 球面 (広くはすべての $\Theta_n(\partial\pi)$ の球面) は任意の位数の有限巡回群の自由な作用を持つ。1971 年に Brumfiel は Σ_K^9 が自由な S^1 作用を持たないことを示した ([25])。その後、Igarashi は計算機による計算を実行し $k+1$ が 2 のべきでないとき、130 次元以下の Kervaire 球面は自由な S^1 作用を持たないことを検証した。

この問題に対する 2007 年の状況は

$$k \text{ が } 8 \text{ の倍数でない条件の下で, } (4k+1) \text{ 次元の Kervaire 球面は自由な } S^1 \text{ 作用を持たない。}$$

ことがわかっている ([50])。そこでの議論の方法は、1986 年に Dovermann-Masuda-Schultz [28] が行った計算の方法に似ており μ 不変量に着目する。また指数不変量と Kervaire 不変量の 4 次元での関係を利用している。

参考文献

- [1] Anderson, D.W. and Brown, E.H., Jr., SU-cobordism, KO-characteristic numbers, and the Kervaire invariant, Ann. of Math. 83 (1966), 54-67.
- [2] Araki, S. and Kudo, T., Topology of H_n -spaces and H-squaring operations, Mem. Fac. Sci., Kyushu Univ., Ser. A, 10 (1956), 85-120.
- [3] Barratt, M.G., Jones, J.D.S. and Mahowald, M.E., The Kervaire invariant problem, Contemp. Math., vol.19 (1983), 9-22.
- [4] Barratt, M.G., Jones, J.D.S. and Mahowald, M.E., Relations amongst Toda brackets and the Kervaire invariant in dimension 62, J. London Math. Soc. (2), 30 (1984), 533-550.
- [5] Berstein, I., Involutions with nonzero Arf invariant, Bull. A.M.S. 74 (1968), 678-682.
- [6] Browder, W., On the action of $\Theta^n(\partial\pi)$, in "Differential and Combinatorial Topology", Princeton Univ. Press (1965), 23-36.

- [7] Browder, W., The Kervaire invariant of framed manifolds and its generalization, *Ann. of Math.* 90 (1969), 157-186.
- [8] Browder, W., Manifolds and homotopy theory, "Manifolds - Amsterdam 1970", *Lecture Notes in Math.* no. 197, 17-35.
- [9] Browder, W. and Hirsch, W., Surgery on piecewise linear manifolds and applications, *Bull. AMS* 72 (1966), 959-964.
- [10] Browder, W., Liulevicius, A. and Peterson, F.P., Cobordism theories, *Ann. of Math.* 84 (1966), 91-101.
- [11] Browder, W. and Livesay, G.R., Fixed point free involutions on homotopy spheres, *Bull. A.M.S.* 73 (1967), 242-245.
- [12] Browder, W., Surgery and the theory of differentiable transformation groups, *Proceedings of the Conference on Transformation Groups, New Orleans 1967*, 1-45, Springer-Verlag 1968.
- [13] Browder, W., Cobordism invariants, the Kervaire invariant and fixed point free involutions, *Trans. A.M.S.* 178 (1973), 193-225.
- [14] Browder, W. Petrie, T. and Wall, C.T.C., The classification of free actions of cyclic groups of odd order on homotopy spheres, *Bull. A.M.S.* 77 (1971), 455-459.
- [15] Browder, W., Surgery on simply-connected manifolds, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*, vol.65, Springer-Verlag, 1972.
- [16] Browder, W., Differential topology of higher dimensional manifolds, *Annals of Math. Studies* no.145, *Surveys on Surgery Theory* Vol.1, 41-71, Princeton Univ. Press 2000.
- [17] Brown, E.H., Jr., Generalizations of the Kervaire invariant, *Ann. of Math.* 95 (1972), 368-383.
- [18] Brown, E.H., Jr., The Kervaire invariant of a manifold, in "Algebraic Topology", *Proc. 17th annual summer research institute of AMS* (1971), 65-71.
- [19] Brown, E.H., Jr. and Peterson, F.P., The Kervaire invariant of $(8k+2)$ -manifolds, *Amer. J. Math.* 88 (1966), 815-826.
- [20] Brown, E.H., Jr., The Kervaire invariant and surgery theory, *Annals of Math. Studies* no.145, *Surveys on Surgery Theory* Vol.1, 105-120, Princeton Univ. Press 2000.
- [21] Brown, E.H., Jr. and Steer, B., A note on Stiefel manifolds, *Amer. J. Math.* 87 (1965), 215-217.
- [22] Brumfiel, G., On the homotopy groups of BPL and PL/O, *Ann. of Math.* 88 (1968), 291-311.
- [23] Brumfiel, G., On the homotopy groups of BPL and PL/O II, *Topology* 8 (1969), 305-311.

- [24] Brumfiel, G., The homotopy groups of BPL and PL/O. III, *Mich. Math. J.* 17 (1970), 217-224.
- [25] Brumfiel, G., Homotopy equivalences of almost smooth manifolds, *Comm. Math. Helv.* 46 (1971), 381-407.
- [26] Brumfiel, G., Madsen, I. and Milgram, R.J., PL characteristic classes and cobordism, *Ann. of Math.* 97 (1973), 82-159.
- [27] Brumfiel, G.W. and Morgan, J.W., Quadratic functions, the index modulo 8, and a $\mathbb{Z}/4$ -Hirzebruch formula, *Topology* 12 (1973), 105-122.
- [28] Dovermann, K.H., Masuda, M. and Schultz, R., Conjugation involutions on homotopy complex projective spaces, *Japan J. Math.* 12 (1986), 1-35.
- [29] Dyer, E. and Lashof, R.K., Homology of iterated loop spaces, *Amer. J. Math.* 84 (1962), 35-88.
- [30] Eccles, P.J., Codimension one immersions and Kervaire invariant one problem, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* 90 (1981), 483-493.
- [31] Fujii, M., KO-groups of projective spaces, *Osaka J. Math.* 4 (1967), 141-149.
- [32] Giffen, C.H., Desuspendability of free involutions on Brieskorn spheres, *Bull. A.M.S.* 75 (1969), 426-429.
- [33] Giffen, C.H., Smooth homotopy projective spaces, *Bull. A.M.S.* 75 (1969), 509-513.
- [34] Giffen, C.H., Weakly complex involutions and cobordism of projective spaces, *Ann. of Math.* 90 (1969), 418-432.
- [35] Gitler, S. and Stasheff, D.S., The first exotic class of BF, *Topology* 4 (1965), 257-266.
- [36] Hegenbarth, F. and Heil, A., Exotic characteristic classes and their relation to universal surgery classes, *Math. Z.* 186 (1984), 211-221.
- [37] Hirsch, M.W., On tangential equivalence of manifolds, *Ann. of Math.* 83 (1966), 211-217.
- [38] Hirzebruch, F. and Mayer, K.H., $O(n)$ -Mannigfaltigkeiten exotische Sphären und Singularitäten, *Lecture Notes in Math.* 57, 1968, Springer.
- [39] Igarashi, Y. and Kitada, Y., Non-existence of free S^1 -actions on Kervaire spheres in dimensions less than 130, *数理解析研究所講究録* 1393 (2004), 82-87.
- [40] Jones, J. and Rees, E., Kervaire's invariant for framed manifolds, *Proc. Symposia in Pure Math.* 32 (1978), 141-147.
- [41] Jones, J.D.S., The Kervaire invariant of extended power manifolds, *Topology* 17 (1978), 249-266.

- [42] Kervaire, M.A., A manifold which does not admit any differentiable structure, *Comm. Math. Helv.* 34 (1960), 257–270.
- [43] Kervaire, M.A. and Milnor, J.W., Groups of homotopy spheres : I, *Annals of Math.* 77 (1963), 504-537.
- [44] Relations among smooth Kervaire classes and smooth involutions on homotopy spheres, *Kodai Math. J.* 11 (1988), 387-402.
- [45] Kitada, Y., On the Kervaire classes of homotopy real projective spaces, *J. Math. Soc. Japan* 43(1991), 219-227.
- [46] Kitada, Y., On the Kervaire classes of tangential normal maps of Lens spaces, *Yokohama Math. J.* 44 (1997), 55-59.
- [47] Kitada, Y., Relations of smooth Kervaire classes over the mod2 Steenrod algebra, *Topology and its Appl.* 121 (2002), 183-205.
- [48] Kitada, Y., Surgery and homotopy theory in study of the transformation groups, in “Current Trends in Transformation Groups”, *K-monographs in Math.*, 105-115, Springer-Verlag 2002.
- [49] Kitada, Y., Kervaire’s obstructions of free actions of finite cyclic groups on homotopy spheres, in “Current Trends in Transformation Groups”, *K-monographs in Math.*, 117-128, Springer-Verlag 2002.
- [50] Kitada, Y., Non-existence of free S^1 -actions on Kervaire spheres II, *数理解析研究所講究録* 1569 (2007), 153-161.
- [51] Kochman, S.O., Stable homotopy groups of spheres, *Lecture Notes in Math.*, vol.1423, Springer, 1990.
- [52] Levine, J.P., Lectures on groups of homotopy spheres, *Lecture note*, Brandeis Univ. 1969. Reprinted in *Lecture Notes in Math.* no.1126 (1985), 62-95.
- [53] Lin, W-H., A remark on the Kervaire invariant problem, “Algebraic Topology Aarhus 1982”, *Lecture Notes in Math.* no.1051, 393-400, Springer.
- [54] Lopez de Medrano, S., Some results on involutions of homotopy spheres, *Proceedings of the Conference on Transformation Groups*, New Orleans 1967, 167-174, Springer-Verlag, 1968.
- [55] Lopez de Medrano, S., *Involutions on manifolds*, Springer, 1971.
- [56] Madsen, I., On the action of the Dyer-Lashof algebra on $H_*(G)$, *Pac. J. Math.* 60 (1975), 235-275.
- [57] Madsen, I., Homology operations in G/TOP , *Invent. Math.* 70 (1983), 341-367.
- [58] Madsen, I. and Milgram, R.J., The universal smooth surgery class, *Comment. Math. Helv.* 50 (1975), 281-310.

- [59] Madsen, I. and Milgram, R.J., The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds, *Ann. of Math. Studies*, No.92, Princeton Univ. Press, 1979.
- [60] Mahowald, M.E., Some remarks on the Kervaire invariant problem from the homotopy point of view, *Proc. Symposia in Pure Math*, 32 (1971), 165-169.
- [61] Mahowald, M.E. and Tangora, M., Some differentials in the Adams spectral sequence, *Topolog* 6 (1967), 349-369.
- [62] Masuda, M., The Kervaire invariant of some fiber homotopy equivalences, *Advanced Studies in Pure Math.* 9 (1986), 57-74.
- [63] McClendon, J.F., Higher order twisted cohomology operations, *Invent. Math.* 7 (1969), 183-214.
- [64] Milgram, R.J., The mod 2 spherical characteristic classes, *Ann. of Math.* 92 (1970), 238-261.
- [65] Milgram, R.J., Problems presented to the 1970 AMS summer colloquium in algebraic topology, in "Algebraic Topology", *Proc. 17th annual summer research institute of AMS* (1971), 187-201.
- [66] Milnor, J., Differentiable structures on spheres, *Amer. J. Math.* 81 (1959), 962-972.
- [67] Milnor, J. and Kervaire, A., Bernoulli numbers, homotopy groups, and a theorem of Rohlin, *Proc. Internat. Math. Congress 1958*, 454-458.
- [68] Montgomery, D. and Yang, C.T., Free differentiable actions on homotopy spheres, *Proceedings of the Conference on Transformation Groups, New Orleans 1967*, 175-192, Springer-Verlag, 1968.
- [69] Morita, S., The Kervaire invariant of hypersurfaces in complex projective spaces, *Comment. Math. Helv.* 50(1975), 403-419.
- [70] Nishida, G., Cohomology operations in iterated loop spaces, *Proc. Japan Acad.*, 44 (1968), 104-109.
- [71] Peterson, F.P., Twisted cohomology operations and exotic characteristic classes, *Advances in Math.* 4 (1970), 81-90.
- [72] Petrie, T., The Atiyah-Singer invariant, the Wall group $L_n(\pi, 1)$, and the function $(te^x + 1)/(te^x - 1)$, *Ann. of Math.* 92 (1970), 174-187.
- [73] Priddy, S., Homotopy splittings involving G and G/O , *Comment. Math. Helv.* 53 (1978), 470-484.
- [74] Quillen, D., The Adams conjecture, *Topology* 10 (1971), 67-80.
- [75] Ravenel, D.C., A definition of exotic characteristic classes of spherical fibrations, *Comment. Math. Helv.* 47 (1972), 421-436.

- [76] Ray, N., A geometrical observation on the Arf invariant of a framed manifold, Bull. London Math. Soc., 4 (1972), 163-164.
- [77] Rourke, C.P. and Sullivan, D.P., On the Kervaire obstruction, Ann. of Math. 94 (1971), 397-413.
- [78] Stolz, S., A note on conjugation involutions on homotopy complex projective spaces, Japanese J. Math. 12 (1986), no.1, 69-73.
- [79] Sullivan, D., Triangulating homotopy equivalences, Thesis, Princeton Univ., 1965.
- [80] Sullivan, D., Triangulating and smoothing homotopy equivalences and homeomorphisms, Geometric Topology Seminar Notes, Princeton Univ. 1967. Reprinted in "The Hauptvermuting book, K-monogr. Math., vol.1, Kluwer Acad.Publ., Dordrecht, 1996, pp.69-103.
- [81] Wells, R., Cobordism group of immersions, Topology 5 (1966), 281-294.
- [82] Wall, C.T.C., Surgery on compact manifolds, Academic Press, 1970.
- [83] Yasuo, M., On the KO-cohomology of the lens space $L^n(q)$ for q even, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ., Ser.A, 2 (1978), 153-163.

北田泰彦 (KITADA, Yasuhiko)
 横浜国立大学大学院 工学研究院
 E-mail : ykitada@ynu.ac.jp
 Office Phone: 045-339-4179
 240-8501 横浜市保土ヶ谷区常盤台 79-5

ORBIT EQUIVALENCE RIGIDITY FOR MAPPING CLASS GROUPS

木田 良才 (東北大学大学院理学研究科数学専攻)

1. 序

本講演で扱う対象は、可算離散群による、測度を保存するような確率測度空間上の作用で、エルゴード的で本質的自由なものである。2つのそのような作用が与えられたとき、それらの作用による軌道が保存されるような測度空間の間の同型が得られるならば、その2つの作用は軌道同値であるという。本講演では特に、曲面の写像類群の作用に関して、軌道同値の観点から得られた結果 [Ki2], [Ki3] を紹介する。軌道同値やそれに関連する話題については、[S] を参照せよ。

2. 軌道同値

2.1. 定義. この予稿では、 Γ, Λ, \dots 等は可算で離散な群 (ほとんどの場合、無限群) を表す。可算で離散な群を単に離散群ともいう。また、 $(X, \mu), (Y, \nu), \dots$ 等は有限正測度をもつ標準 Borel 空間を表す。特に、確率測度をもつ標準 Borel 空間を標準確率空間という。ここで、標準 Borel 空間とは、可分で完備な距離空間からできる Borel 空間を意味する。基本的な事実として、濃度が等しい標準 Borel 空間は全て Borel 空間として同型であることが知られている。特に、連続濃度をもつ標準 Borel 空間は Borel 空間として単位区間に同型である。標準 Borel 空間の基本性質に関する文献としては [Ke] がある。以下では、離散群による標準 Borel 空間上の様々な作用について論じるが、作用は全て Borel 可測とする。さらに、断らない限り、標準 Borel 空間の部分集合としては Borel 可測なものしか考えない。

定義 2.1. Borel 可測な作用 $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ に対し、

- (i) ξ が**保測 (measure-preserving)** であるとは、任意の $\gamma \in \Gamma$ と $A \subset X$ に対し、 $\mu(\gamma A) = \mu(A)$ となることをいう。
- (ii) ξ が**本質的に自由 (essentially free)** であるとは、a.e. $x \in X$ に対し、その stabilizer $\{\gamma \in \Gamma : \gamma x = x\}$ が単位元のみからなることをいう。
- (iii) ξ が**エルゴード的 (ergodic)** であるとは、可測部分集合 $A \subset X$ が Γ -不変、すなわち、 $\gamma A = A$ が任意の $\gamma \in \Gamma$ について成り立つならば、 $\mu(A) = 0$ または、 $\mu(A) = \mu(X)$ が成り立つことをいう。
- (iv) ξ が**e.f.m.p.** であるとは、 ξ がエルゴード的、本質的に自由かつ、保測であるときをいう。

例 2.2. Γ を無限離散群とし、 (X_0, μ_0) を標準確率空間とする。ここで、 X_0 の濃度は連続とは限らないが、 $\mu_0(\{x\}) = 1$ となる $x \in X_0$ は存在しないと仮定する。このとき、積空間 $(X_0, \mu_0)^\Gamma = \prod_\Gamma (X_0, \mu_0)$ は標準確率空間となり、この上の Γ の作用が次のように定義される:

$$\gamma(x_g)_{g \in \Gamma} = (x_{\gamma^{-1}g})_{g \in \Gamma}, \quad \gamma \in \Gamma, (x_g)_{g \in \Gamma} \in X_0^\Gamma.$$

この作用 $\Gamma \curvearrowright (X_0, \mu_0)^\Gamma$ は e.f.m.p. である. このような作用を **Bernoulli 作用** と呼ぶ. このことから特に, 任意の無限離散群は e.f.m.p. 作用をもつことがわかる.

2つの保測作用 $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が与えられたとき, それらの間の, 以下のような2つの同値関係を考えたい. (X, μ) と (Y, ν) が測度空間として同型であるとは, 可測部分集合 $X' \subset X, Y' \subset Y$ で補集合が測度0になるものと, X' と Y' の間の Borel 同型写像 f で測度を保つものがあるときをいう. そのような f を測度空間の間の同型写像という. 以下の2つの同値関係は測度0の集合を無視して定義されるものだから, 以後, 至る所で測度0の集合を除くといった類いの注意書きが必要になるが, 逐一述べることはしない.

定義 2.3. 2つの保測作用 $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が **共役 (conjugate)** であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f: (X, \mu) \xrightarrow{\cong} (Y, \nu)$ と同型 $F: \Gamma \xrightarrow{\cong} \Lambda$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\gamma x) = F(\gamma)f(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma, \text{ a.e. } x \in X.$$

定義 2.4. 2つの保測作用 $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ と $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が **軌道同値 (orbit equivalent, OE)** であるとは, 測度空間の間の同型写像 $f: (X, \mu) \xrightarrow{\cong} (Y, \nu)$ で次を満たすものがあるときをいう:

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x) \quad \text{a.e. } x \in X.$$

$A \subset X, B \subset Y$ とその間の測度のクラスを保つ Borel 同型写像 $g: A \rightarrow B$ で, $\Gamma A = X, \Lambda B = Y$ かつ,

$$g(\Gamma x \cap A) = \Lambda g(x) \cap B \quad \text{a.e. } x \in A$$

が成り立つようなものが存在するとき, ξ, ζ は **弱軌道同値 (weakly orbit equivalent, WOE)** であるという.

定義から明らかに, 共役な作用は OE である. 注意として, 無限離散群による e.f.m.p. 作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が与えられたとき, その基本領域で可測なものは取れない. つまり, 可測部分集合 $F \subset X$ で,

- $\mu(\bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma F) = \mu(X)$,
- 任意の相異なる $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma$ に対し, $\mu(\gamma_1 F \Delta \gamma_2 F) = 0$

が成り立つようなものは存在しない. 基本領域が取れない故, 2つの作用による軌道の空間が同型であるかどうかを判定するのは, 一般には容易ではない. 共役とは限らない, (W)OE の例としては次がある:

命題 2.5 ([F2, Lemma 3.2]). G を局所コンパクトで第二可算公理を満たす位相群とし, Γ, Λ を G の格子部分群とする. 作用 $\Gamma \times \Lambda \curvearrowright G$ を

$$(\gamma, \lambda)g = \gamma g \lambda^{-1}$$

で定める. このとき, 2つの作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda, \Gamma \backslash G \curvearrowright \Lambda$ は WOE である.

$X, Y \subset G$ をそれぞれ $G \curvearrowright \Lambda, \Gamma \curvearrowright G$ に関する基本領域とすると, 2つの写像

$$\begin{aligned} p: X &\rightarrow Y, & p(x) &= \Gamma x \cap Y, \\ q: Y &\rightarrow X, & q(x) &= y \Lambda \cap X \end{aligned}$$

は共に各点のファイバーが高々可算個の元から成り、その上で単射になるような正測度をもつ Borel 部分集合に制限すると、その制限は 2 つの作用 $\Gamma \curvearrowright G/\Lambda$, $\Gamma \backslash G \curvearrowright \Lambda$ の間の WOE を与える。

2.2. 従順群の作用. 軌道同値の研究は、 \mathbb{Z} の作用に対する研究から始まり、現在ではより一般に、従順群 (amenable groups) の作用に関して、次のような結果が最終的が得られている。これにより、従順群の e.f.m.p. 作用の OE による分類は完了したことになる。

定理 2.6. $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ を e.f.m.p. 作用とする。

- (i) $\xi \sim_{\text{OE}} \zeta$ であって、 Γ が従順ならば、 Λ も従順である ([Z, 4.3.3]).
- (ii) Γ と Λ が無限で従順ならば、 $\xi \sim_{\text{OE}} \zeta$ である ([OW]).

(i) は、群の従順性が OE によって保たれることを主張しており、(ii) は無限従順群の e.f.m.p. 作用は全て互いに OE であることを主張している。従順性は、群だけでなく色々な対象に対しても定義することができ、例えば、e.f.m.p. 作用が従順であるということも定義できる。このような従順性は、非従順群の作用の研究においても重要な役割を果たす。

2.3. 写像類群の作用. M をコンパクト、向き付け可能な連結な曲面とする (境界があってもよい)。以下、曲面と言え、これらの条件を満たすものを指す。 M の種数が g で、境界の連結成分の個数が p のとき、 M を $M_{g,p}$ と書くこともある。このとき、 $\kappa(M) = 3g + p - 4$ とおく。 M の写像類群 $\Gamma(M)^\circ$ を M の自己微分同相写像の (境界上動かしてもよい) アイソトピー類全体からなる群で定義する。写像類群の基本的な性質については、[11], [12] が詳しい。以下では、常に $\kappa(M) > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ を仮定する。

注意 2.7. $\kappa(M) \leq 0$ となる曲面 M については次が知られている。 M が $M_{0,4}, M_{1,0}, M_{1,1}$ のいずれでもないとき、 $\Gamma(M)^\circ$ は有限である。 M が $M_{0,4}, M_{1,0}, M_{1,1}$ のうちのいずれかならば、 $\Gamma(M)^\circ$ は $SL(2, \mathbb{Z})$ とほとんど同型となる。また、 $M_{1,2}$ と $M_{0,5}$ の写像類群、 $M_{2,0}$ と $M_{0,6}$ の写像類群はそれぞれほとんど同型である。

定理 2.8 ([Ki2], [Ki3]). $\Gamma = \Gamma(M)^\circ$ とし、2 つの e.f.m.p. 作用 $\xi_1: \Gamma \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\xi_2: \Gamma \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を考える。このとき、 $\xi_1 \sim_{\text{OE}} \xi_2$ ならば、 ξ_1 と ξ_2 は共役である。

この定理は、 ξ_1 と ξ_2 が WOE であるという仮定の下でも正しい。次の節でこの定理の証明の粗筋を述べる。

3. 定理 2.8 の証明

写像類群の作用について考える前に、軌道同値の研究で重要な概念をいくつか紹介する。なお、この節の内容は著者による概説 [Ki4] でも詳しく説明されている。

3.1. (測度論的) 同値関係. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を保測作用とする。このとき、

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X) = \{(\gamma x, x) \in X \times X : \gamma \in \Gamma, x \in X\}$$

は、底空間 (X, μ) 上の擬群 (groupoid) の構造をもつ:

- range map $(x, y) \mapsto x$
- source map $(x, y) \mapsto y$

- 積 $(x, y) \cdot (y, z) = (x, z)$
- 逆元 $(x, y)^{-1} = (y, x)$

この擬群構造をもった \mathcal{R} を作用 $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ からできる (測度論的) 同値関係という。この \mathcal{R} は次の3つの性質を満たす:

- (反射律) 任意の $x \in X$ に対し, $(x, x) \in \mathcal{R}$;
- (対称律) 任意の $(x, y) \in \mathcal{R}$ に対し, $(y, x) \in \mathcal{R}$;
- (推移律) 任意の $(x, y), (y, z) \in \mathcal{R}$ に対し, $(x, z) \in \mathcal{R}$.

一般に, $X \times X$ の Borel 可測部分集合で上の3つの性質を満たし, かつ, 各同値類が高々可算個の元から成るようなものを X 上の (測度論的) 同値関係といい, それが同値関係 \mathcal{R} の Borel 部分集合であるならば, \mathcal{R} の部分同値関係であるという。

2つの e.f.m.p. 作用 $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ に対し, ξ と ζ が OE であることとそれらからできる同値関係 $\mathcal{R}(\xi)$ と $\mathcal{R}(\zeta)$ が (擬群として) 同型であることは同値である。実際, 同型 $f: (X, \mu) \xrightarrow{\cong} (Y, \nu)$ が $\xi \sim_{\text{OE}} \zeta$ を与えるとすると,

$$f: \mathcal{R}(\xi) \rightarrow \mathcal{R}(\zeta), \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$$

は同型を与える。逆に同値関係の間の同型が得られれば, 底空間の間の同型が2つの作用の間の OE を与える。

3.2. コサイクル. 一般に, $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, それらが OE であるとする, すなわち, 同型写像 $f: (X, \mu) \xrightarrow{\cong} (Y, \nu)$ で

$$f(\Gamma x) = \Lambda f(x) \quad \text{a.e. } x \in X$$

が成り立つようなものが存在するとする。このとき, $\Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ が本質的に自由であることを使うと, Borel 写像 $\rho: \Gamma \times X \rightarrow \Lambda$ で,

$$f(\gamma x) = \rho(\gamma, x)f(x) \quad \forall \gamma \in \Gamma \text{ a.e. } x \in X$$

となるものが構成される。このような ρ を (f による) (OE) コサイクルといい, ρ は次のコサイクル恒等式を満たす:

$$(*) \quad \rho(\gamma_1, \gamma_2 x)\rho(\gamma_2, x) = \rho(\gamma_1\gamma_2, x) \quad \forall \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \text{ a.e. } x \in X.$$

証明は以下のように定義より容易に従う:

$$\rho(\gamma_1\gamma_2, x)f(x) = f(\gamma_1\gamma_2 x) = \rho(\gamma_1, \gamma_2 x)f(\gamma_2 x) = \rho(\gamma_1, \gamma_2 x)\rho(\gamma_2, x)f(x).$$

一般に, Γ, Λ を離散群とし, Γ が (X, μ) 上に保測で作用しているとき, Borel 写像 $\rho: \Gamma \times X \rightarrow \Lambda$ が上記のコサイクル恒等式 (*) を満たすとき, ρ をコサイクルという。

注意 3.1. 2つの e.f.m.p. 作用 $\xi_1: \Gamma \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\xi_2: \Gamma \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ が測度空間の間の同型 $f: (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\cong} (X_2, \mu_2)$ により OE であるとし, $\rho: \Gamma \times X_1 \rightarrow \Gamma$ を OE コサイクルとする。もし, Borel 写像 $\varphi: X_1 \rightarrow \Gamma$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x)\gamma\varphi(x)^{-1} \quad \forall \gamma \in \Gamma, \text{ a.e. } x \in X_1$$

となるものが存在するならば, $f_\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ を $f_\varphi(x) = \varphi(x)^{-1}f(x)$, $x \in X_1$ で定める。このとき, $\gamma \in \Gamma$, $x \in X_1$ に対し,

$$f_\varphi(\gamma x) = \varphi(\gamma x)^{-1}f(\gamma x) = \varphi(\gamma x)^{-1}\rho(\gamma, x)f(x) = \gamma\varphi(x)^{-1}f(x) = \gamma f_\varphi(x).$$

ゆえに, f_φ は Γ の作用に関して同変となる. このことから, f_φ が測度空間の間の同型を定めることを見るのは易しいので, 結果として, 2つの作用 ξ_1, ξ_2 は f_φ を通して共役であることがわかる.

3.3. コサイクル剛性. M を $\kappa(M) = 3g + p - 4 > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ となる曲面とする. $\Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma(M)^\circ$ とする. 注意 3.1 より, 写像類群の作用に関する定理 2.8 は次のコサイクルに関する定理から証明される:

定理 3.2 ([Ki2]). $\xi_1: \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\xi_2: \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を e.f.m.p. 作用とし, 同型 $f: (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\cong} (X_2, \mu_2)$ は $\xi_1 \sim_{\text{OE}} \xi_2$ を与えるとする. $\rho: \Gamma_1 \times X_1 \rightarrow \Gamma_2$ を f による OE コサイクルとする. このとき, Borel 写像 $\varphi: X_1 \rightarrow X_2$ で,

$$\rho(\gamma, x) = \varphi(\gamma x) \gamma \varphi(x)^{-1} \quad \forall \gamma \in \Gamma, \text{ a.e. } x \in X_1$$

が成り立つようなものが存在する.

以下では, この φ の構成の仕方について述べる. $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2$ をそれぞれ作用 ξ_1, ξ_2 からできる同値関係とする. f は $\xi_1 \sim_{\text{OE}} \xi_2$ を与えるから, 同値関係の間の同型

$$f: \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}^2, \quad (x, y) \mapsto (f(x), f(y))$$

を与える. 定理 3.2 の証明で最も重要なことは, この f がある特別な部分同値関係を保存することを見ることなのだが, そのことを定式化するために記号を準備する.

定義 3.3. $V(M)$ を M 上の, 境界成分にも一点にもアイソトピックでない単純閉曲線のアイソトピー類全体とする. $S(M)$ を $V(M)$ の空でない有限部分集合 F で, F の元の代表となる曲線たちを M 上互いに交わらないように実現できるようなもの全体とする. $C = C(M)$ を, $V(M)$ を頂点集合, $S(M)$ を単体の集合とするような単体複体とする. この C は M の**カーブ複体**と呼ばれている.

C の次元は $\kappa(M) = 3g + p - 4$ に一致する. M の写像類群は, C 上単体複体の自己同型として作用する. C の単体複体としての自己同型群について次のことが知られている.

定理 3.4 ([I2, Section 8]). M を $\kappa(M) > 0$, $M \neq M_{1,2}, M_{2,0}$ となる曲面とする. 自然な準同型 $\pi: \Gamma(M)^\circ \rightarrow \text{Aut}(C)$ は同型である.

各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $t_\alpha \in \Gamma(M)^\circ$ を α に関する Dehn twist とし, $\langle t_\alpha \rangle$ で, t_α で生成される無限巡回部分群を表す. $i = 1, 2$ と $\alpha \in V(M)$ に対し,

$$\mathcal{R}_\alpha^i = \{(\gamma x, x) \in \mathcal{R}^i : \gamma \in \langle t_\alpha \rangle, x \in X_i\}$$

で $\langle t_\alpha \rangle$ で生成される \mathcal{R}^i の部分同値関係を表す. \mathcal{R}^i の部分同値関係 \mathcal{S} と Borel 部分集合 $A \subset X_i$ に対し,

$$(\mathcal{S})_A = \mathcal{S} \cap (A \times A)$$

で, \mathcal{S} の A への制限を表す. $(\mathcal{S})_A$ は A 上の同値関係となる. 次の定理は, $f: \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}^2$ が Dehn twist で生成される部分同値関係を (底空間の可算個の Borel 部分集合による分解を除いて) 保存するというを示している.

定理 3.5. 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, X_1 の可算個の Borel 部分集合による分割 $X_1 = \bigsqcup_n A_n$ と $\beta_n \in V(M)$ が存在して, 任意の n に対し,

$$f \left((\mathcal{R}_\alpha^1)_{A_n} \right) = (\mathcal{R}_{\beta_n}^2)_{f(A_n)}$$

が成り立つ.

この定理を仮定して, 定理 3.2 における φ を構成する. 写像 $\Phi: X_1 \times V(M) \rightarrow V(M)$ を次のように定義する: $\alpha \in V(M)$ に対し, 上の定理における X_1 の分割と $\beta_n \in V(M)$ をとり, $x \in A_n$ のとき $\Phi(x, \alpha) = \beta_n$ と定める. Φ の定義は X_1 の分割によらない. これは, 異なる $\alpha, \beta \in V(M)$ に対し, $\langle t_\alpha \rangle \cap \langle t_\beta \rangle = \{e\}$ となることから示せる.

補題 3.6. $\alpha, \beta \in V(M)$ に対し,

$$i(\alpha, \beta) = 0 \iff i(\Phi(x, \alpha), \Phi(x, \beta)) = 0 \quad \text{for a.e. } x \in X_1.$$

ここで, $i: V(M) \times V(M) \rightarrow \mathbb{N}$ は幾何学的交叉数である.

これは, 同値関係の従順性が同型 $f: \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}^2$ により保存されることと次の同値性から従う: $\alpha, \beta \in V(M)$ に対し,

$$i(\alpha, \beta) = 0 \iff \langle t_\alpha \rangle \vee \langle t_\beta \rangle \text{ は従順群.}$$

補題 3.6 は a.e. $x \in X_1$ に対し, $\Phi(x, \cdot): V(M) \rightarrow V(M)$ が $\text{Aut}(C)$ の元を定めることを意味する. (全単射であることは, f が同型であることから従う.) よって, a.e. $x \in X_1$ に対し, $\varphi(x) = \Phi(x, \cdot) \in \text{Aut}(C) \simeq \Gamma(M)^\circ$ を定めることができる. これで $\varphi: X_1 \rightarrow \Gamma_2 = \Gamma(M)^\circ$ が構成された. この φ が定理 3.2 の等式を満たすことを見るのは難しくない.

これで定理 2.8 は, 定理 3.5 から従うことがわかった. 次の小節で定理 3.5 の証明について述べる.

注意 3.7. 以上の議論は, Ivanov による, 写像類群の自己同型に関する次の定理の証明に従っている.

定理 3.8 ([I2]). Γ_1, Γ_2 を $\Gamma(M)^\circ$ の有限指数部分群とする. $f: \Gamma_1 \xrightarrow{\cong} \Gamma_2$ を同型とすると, $g \in \Gamma(M)^\circ$ で

$$f(\gamma) = g\gamma g^{-1} \quad \forall \gamma \in \Gamma_1$$

が成り立つようなものが存在する.

この定理の証明の粗筋は次の通りである:

- (1) $\langle t_\alpha \rangle \cap \Gamma_i$ の元を, Γ_i の元として代数的に特徴付ける. このことより, f は次を満たす: 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $\beta \in V(M)$ で $f(T_\alpha^1) = T_\beta^2$ となるようなものが (唯一) 存在する. ここで, $T_\gamma^i = \langle t_\gamma \rangle \cap \Gamma_i$ ($\gamma \in V(M)$, $i = 1, 2$) とおいた.
 - (2) $\varphi: V(M) \rightarrow V(M)$ を (1) の記号で, $\varphi(\alpha) = \beta$ と定義すると, φ は $\text{Aut}(C)$ の元を定める.
 - (3) $\varphi \in \text{Aut}(C)$ に対応する $\Gamma(M)^\circ$ の元を g とすると, g は求める元である.
- (3) については次のようにして示される: $\gamma \in \Gamma_1$, $\alpha \in V(M)$ をとる. このとき,

$$f(\gamma T_\alpha^1 \gamma^{-1}) = f(\gamma) T_{g(\alpha)}^2 f(\gamma)^{-1} = T_{f(\gamma)g(\alpha)}^2$$

が成り立つ. 一方,

$$f(\gamma T_\alpha^1 \gamma^{-1}) = f(T_{\gamma(\alpha)}^1) = T_{g\gamma(\alpha)}^2$$

より, $f(\gamma)g(\alpha) = g\gamma(\alpha)$. このことより, $f(\gamma)g = g\gamma$, すなわち, $f(\gamma) = g\gamma g^{-1}$ が従う.

3.4. **同値関係の従順性.** 定理 3.5 の証明を述べる前に, 同値関係の従順性を紹介する. しかし, その定義を正確に述べるためには多くの概念を導入しなければいけないため, ここでは従順性の基本的な性質を述べるだけにする. 正確な定義については, [ADR] を参照してほしい. 同値関係の従順性は, 群の従順性の類似として定義されるので, まず後者について述べる. 群の従順性は同値な条件が数多く知られているが, その中でも次の性質を考えることにする.

定義 3.9. 離散群 Γ が **従順 (amenable)** であるとは, 次が満たされるときをいう: E を可分な Banach 空間とし, Γ は E 上等長同型として作用しているとする. E の双対空間の単位閉球 E_1^* 上の位相として weak*-位相を考える. $A \subset E_1^*$ を, Γ の作用に関して不変な空でない閉凸集合とする. このとき, A 内に Γ の作用に関する不動点が存在する. すなわち, $a \in A$ で $\gamma a = a, \forall \gamma \in \Gamma$ となるものが存在する.

同値関係は擬群の構造をもつことを述べたが, 擬群は群の一般化である. 同値関係の従順性は, 上の定義の類似として定義される. そのためには, 擬群が作用する, 底空間上の Banach 束やその作用に関する不動点等の概念を導入する必要がある. 同値関係の従順性の基本性質を次の命題でまとめておく.

命題 3.10. (i) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を保測作用とし, \mathcal{R} をその作用からできる同値関係とする. Γ が従順ならば, \mathcal{R} は従順である. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ が本質的自由ならば, 逆も成り立つ.
(ii) 従順な同値関係の部分同値関係は従順である.

命題 3.11. $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を本質的自由な保測作用とし, \mathcal{R} をその作用からできる同値関係とする. 写像 $\rho: \mathcal{R} \rightarrow \Gamma$ を $(\gamma x, x) \mapsto \gamma$ で定義する. (この ρ は擬群の準同型を定める.) Γ は可分コンパクト Hausdorff 空間 K 上連続に作用しているとする. $M(K)$ で K 上の確率測度全体の空間を表す. \mathcal{S} を \mathcal{R} の従順な部分同値関係とする. このとき, $\varphi: X \rightarrow M(K)$ で,

$$\rho(x, y)\varphi(y) = \varphi(x) \quad \text{for a.e. } (x, y) \in \mathcal{S}$$

となるものが存在する.

この命題で, $M(K)$ は K 上の連続関数から成る Banach 空間の双対空間の単位球面になることに注意せよ. \mathcal{R} は ρ を通して K 上に作用していると見ていて, φ はその作用に関する \mathcal{S} の不動点である.

3.5. **Dehn twist で生成される部分同値関係の特徴付け.** 注意 3.7 でも述べたように, Ivanov の定理 3.8 の証明では, Dehn twist で生成される巡回群の元を代数的に特徴付けていることにより, 写像類群の任意の自己同型がそのような元を保存することを示していた. 同値関係の同型写像に関する定理 3.5 も, Dehn twist で生成される部分同値関係を代数的に特徴付けることにより証明される. (ただ, その特徴付けは Ivanov のそれと異なる.) まず, 写像類群の作用からできる同値関係の部分同値関係に対し, その可約性という概念を導入したい. そして, その性質を代数的に特徴付けることから始めたい. 写像類群 $\Gamma(M)^\circ$ の部分群 Λ が **可約 (reducible)** であるとは, $\sigma \in S(M)$ で $\lambda\sigma = \sigma, \forall \lambda \in \Lambda$ が成り立つものが存在するときをいう. これを同値関係で定式化したい.

$\Gamma = \Gamma(M)^\circ$ とし, $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を e.f.m.p. 作用とする. \mathcal{R} をその作用からできる同値関係とする. 写像 $\rho: \mathcal{R} \rightarrow \Gamma$ を $\rho(\gamma x, x) = \gamma$ で定義する. \mathcal{PMF} を $(M$ に対す

る) Thurston 境界とする. \mathcal{PMF} は M の Teichmüller 空間 \mathcal{T} の理想境界と見なすことができ, Γ が連続に作用するコンパクト空間である. \mathcal{PMF} は写像類群の部分群の分類において重要な役割を果たす. \mathcal{T} や \mathcal{PMF} のどのような点を不動点としてもつかによって, 部分群が分類される. また, \mathcal{PMF} は M 上の measured foliation の projective class 全体の空間と見なすこともできる. \mathcal{MIN} を M 上の minimal measured foliation の projective class 全体とする. \mathcal{MIN} は \mathcal{PMF} の Borel 部分集合で, Γ の作用に関して不変である. $S(M)$ は自然に $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ の部分集合と見なすことができる. 一方で, Γ の作用に関して同変な写像

$$H: \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN} \rightarrow S(M)$$

が Ivanov により構成されている ([I1, Corollary 2.15] または [Ki1] の 4.2 節を参照せよ). 自然な埋め込み $S(M) \hookrightarrow \mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ は, H に対する切断になっている. これを用いると, Γ の可約部分群の特徴付けが次のようにして得られる: $M(\mathcal{PMF})$ で, \mathcal{PMF} 上の確率測度全体の空間を表す. Γ の部分群 Λ に対し, Λ が可約であるためには, $\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}$ に台をもつ $M(\mathcal{PMF})$ の元で, Λ の各元により固定されるようなものが存在することが必要十分である.

さて, \mathcal{R} の recurrent な部分同値関係について次の性質を示すことができる. (同値関係が recurrent とは, その各同値類が無限個の元から成ることを意味する.)

命題 3.12 ([Ki1, Theorem 4.41]). $A \subset X$ を正測度をもつ Borel 部分集合とし, \mathcal{S} を $(\mathcal{R})_A$ の recurrent な部分同値関係とする. Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow M(\mathcal{PMF})$ で

$$\rho(x, y)\varphi(y) = \varphi(x) \quad \text{for a.e. } (x, y) \in \mathcal{S}$$

となるものが存在するとする. (このような φ は \mathcal{S} に関して ρ -不変であるという.) このとき A の分割 $A = A_1 \sqcup A_2$ で,

$$\begin{aligned} \varphi(x)(\mathcal{MIN}) &= 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_1, \\ \varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN}) &= 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_2 \end{aligned}$$

となるものが本質的に唯一存在する.

これはある種の dichotomy を主張している. つまり, $\varphi(x) \in M(\mathcal{PMF})$ の台は \mathcal{MIN} またはその補集合のどちらか一方に含まれる. また, Γ の無限部分群 Λ が \mathcal{PMF} 上の不変確率測度 ν をもつとき, ν の台は \mathcal{MIN} またはその補集合に含まれることが示すことができる. 上記の可約部分群の特徴付けを考慮して, 可約部分同値関係の定義を次のように与える:

定義 3.13. $A \subset X$ を正測度をもつ部分集合とし, \mathcal{S} を $(\mathcal{R})_A$ の recurrent な部分同値関係とする.

- (i) \mathcal{S} に関して ρ -不変な Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow M(\mathcal{PMF} \setminus \mathcal{MIN})$ が存在するとき, \mathcal{S} は可約であるという.
- (ii) \mathcal{S} に関して ρ -不変な Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow M(\mathcal{MIN})$ が存在するとき, \mathcal{S} は IA (irreducible and amenable) であるという.

ここで, \mathcal{PMF} の Borel 部分集合 S に対し, $M(S) = \{\nu \in M(\mathcal{PMF}) : \nu(S) = 1\}$ とかく.

命題 3.12 はこの 2 つの部分同値関係は互いに排他的であることを主張している. ちなみに, IA 部分同値関係は, 1 つの pseudo-Anosov 元で生成される巡回群を有限

指数部分群して含むような Γ の部分群に対応している. (そのような部分群は MIN 上にちょうど2つの不動点をもち, $PMF \setminus MIN$ 上には不動点はない.)

以下では, これらの特別な部分同値関係の基本性質を述べる. その前に, 正規部分同値関係について言及しておく. これは, 群論における正規部分群の類似であり, 同値関係の同型で保存される代数的な性質である. ここでは, その正確な定義を述べないが, その基本性質だけを述べておく. 詳しくは [Ki1] の 6.1 節を参照せよ. \mathcal{R} を (X, μ) 上の同値関係とし, \mathcal{S} が \mathcal{R} の正規部分同値関係であるとき, $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{R}$ とかくことにする.

命題 3.14. 次が成り立つ:

- (i) $\Gamma \curvearrowright (X, \mu)$ を保測作用とし, N を Γ の正規部分群とする. このとき, $\mathcal{R}(N \curvearrowright X) \triangleleft \mathcal{R}(\Gamma \curvearrowright X)$.
- (ii) \mathcal{R} を (X, μ) 上の同値関係, \mathcal{S} を \mathcal{R} の正規部分同値関係とする. このとき, 正測度をもつ Borel 部分集合 $A \subset X$ に対し, $(\mathcal{S})_A \triangleleft (\mathcal{R})_A$.

IA, 可約部分同値関係の基本性質を以下に記す.

命題 3.15. 定義 3.13 の記号を用いる. 次が成り立つ:

- (i) IA 部分同値関係は従順である ([Ki1, Proposition 4.33]).
- (ii) $\mathcal{S} (< (\mathcal{R})_A)$ を IA (resp. 可約) 部分同値関係とする. \mathcal{T} を $(\mathcal{R})_A$ の部分同値関係で, $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{T}$ となるようなものとする. このとき \mathcal{T} も IA (resp. 可約) となる.

(i) は, 次の2つの重要な事実を用いて示される:

- (a) カーブ複体 C の (Gromov 双曲的距離空間としての) 理想境界 ∂C 上の $\Gamma = \Gamma(M)^\circ$ による作用は (測度論的な意味で) 従順である ([Ki1, Theorem 3.29]).
- (b) Γ の作用に関して同変な連続写像 $\pi: MIN \rightarrow \partial C$ が構成される. (これは, Klarreich [Kl] による.)

(a) は C の距離空間としての双曲性等の幾何的な性質を用いることで証明される. (ここでは, 作用の従順性については詳述しない.) (b) についていうと, ∂C の点は曲面 M 上の (transverse measure 無しの) minimal foliation に対応しており, π は transverse measure を忘れるという対応である. IA 部分同値関係 $\mathcal{S} (< (\mathcal{R})_A)$ に対し, $\varphi: A \rightarrow M(MIN)$ を \mathcal{S} に関する ρ -不変 Borel 写像とすると, φ と π は ρ -不変 Borel 写像 $A \rightarrow M(\partial C)$ を誘導する. この写像の像は ∂C 上の確率測度で台が高々2点から成るもの全体に含まれることがわかり, このことと (a) を用いると, \mathcal{S} の従順性が従う.

(ii) は, \mathcal{S} に関する ρ -不変写像の中で, ある特別な性質をもつものは唯一であることが証明されるので, その唯一の写像が \mathcal{T} に関しても ρ -不変であることより従う. 詳しくは [Ki1] の 6.2 節を参照せよ.

命題 3.16. $\mathcal{S} (< (\mathcal{R})_A)$ を recurrent で従順な部分同値関係とする. \mathcal{T} を $(\mathcal{R})_A$ の至る所非従順な部分同値関係で, $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{T}$ となるものとする. このとき \mathcal{T} は可約である.

(Y, ν) 上の同値関係 \mathcal{U} が至る所非従順であるとは, 正測度をもつ任意の Borel 部分集合 $B \subset Y$ に対し, $(\mathcal{U})_B$ が従順でないときをいう.

命題 3.16 の証明. S は従順なので, ρ -不変 Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow M(\mathcal{PMF})$ が存在する. 命題 3.12 より, A の分割 $A = A_1 \sqcup A_2$ で,

$$\begin{aligned}\varphi(x)(MLN) &= 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_1, \\ \varphi(x)(\mathcal{PMF} \setminus MLN) &= 1 \quad \text{for a.e. } x \in A_2\end{aligned}$$

となるものが存在する. もし, A_1 が正測度をもつならば, $(S)_{A_1} \triangleleft (T)_{A_1}$ かつ $(S)_{A_1}$ は IA 故, $(T)_{A_1}$ も IA となり, 特に従順である. これは, T が至る所非従順であることに反する. ゆえに, $A = A_2$ となり, S は可約である. \square

この命題で大切な点は, 同値関係の代数的な性質だけから, 可約という幾何的な性質を導いていることである. このことが可約部分同値関係の代数的な特徴付けをする上で重要な役割を果たす. この代数的な特徴付けについての正確な主張は複雑になるので, ここでは述べないが, その帰結として次を得る:

定理 3.17. $\xi_1: \Gamma_1 \curvearrowright (X_1, \mu_1)$, $\xi_2: \Gamma_2 \curvearrowright (X_2, \mu_2)$ を e.f.m.p. 作用とし, $f: (X_1, \mu_1) \xrightarrow{\cong} (X_2, \mu_2)$ は $\xi_1 \sim_{\text{OE}} \xi_2$ を与えるとする. $\mathcal{R}^1, \mathcal{R}^2$ をそれぞれ作用 ξ_1, ξ_2 からできる同値関係とする. このとき, 同型

$$f: \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}^2$$

は次を満たす: $A \subset X$ を正測度の Borel 部分集合, $\mathcal{S} < (\mathcal{R}^1)_A$ を可約部分同値関係とすると, $f(\mathcal{S}) < (\mathcal{R}^2)_{f(A)}$ も可約である.

これを用いて, Dehn twist で生成される部分同値関係が同型 $f: \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}^2$ によって保存されることを見る. 方針は次のようになる:

- (A) f は可約部分同値関係を保存するから, そのようなもので (包含関係の意味で) 極大なものも保存する.
- (B) 極大な可約部分同値関係は次のようにして特徴付けられる: 定義 3.13 の記号で, $(\mathcal{R})_A$ の極大な可約部分同値関係 \mathcal{S} は, ある Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow V(M)$ の “stabilizer” \mathcal{S}_φ にだいたい一致する. (正確にはそうならない場合もある.) ここで,

$$\mathcal{S}_\varphi = \{(x, y) \in (\mathcal{R})_A : \rho(x, y)\varphi(y) = \varphi(x)\}$$

が成り立つ. 逆に, 任意の Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow V(M)$ に対し, \mathcal{S}_φ は $(\mathcal{R})_A$ の極大な可約部分同値関係である.

- (C) (B) の記号で, Borel 写像 $\varphi: A \rightarrow V(M)$ に対し, $\mathcal{S} \triangleleft \mathcal{S}_\varphi$ となる recurrent で従順な部分同値関係 \mathcal{S} は次を満たす: 各 $\alpha \in V(M)$ に対し, $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$ の測度が正ならば,

$$(\mathcal{S})_{A_\alpha} < (\mathcal{R}_\alpha)_{A_\alpha}.$$

ここで,

$$\mathcal{R}_\alpha = \{(\gamma x, x) \in \mathcal{R} : \gamma \in \langle t_\alpha \rangle, x \in X\}.$$

逆に, $A_\alpha = \varphi^{-1}(\alpha)$ の測度が正ならば, $(\mathcal{R}_\alpha)_{A_\alpha} \triangleleft (\mathcal{S}_\varphi)_{A_\alpha}$ であって, \mathcal{R}_α は recurrent で従順な同値関係である.

- (D) (C) により, \mathcal{R}_α が代数的に特徴付けられたことになり, 同型 $f: \mathcal{R}^1 \xrightarrow{\cong} \mathcal{R}^2$ は \mathcal{R}_α の形の部分同値関係を保存する.

以上が定理 3.5 の証明の方針である.

注意 3.18. 上の議論は Ivanov の定理 3.8 の証明 (注意 3.7) における, (1) の証明の方針にもなる.

4. 超剛性定理

定理 2.8 は同じ群 $\Gamma = \Gamma(M)^\circ$ の作用の間の軌道同値を考えているが, それでは, Γ の作用と軌道同値になる作用をもつ離散群 Λ はどのような群だろうか? この問いに対しては以下のような答えが得られている:

定理 4.1 ([Ki2], [Ki3]). $\Gamma = \Gamma(M)^\circ$ とし, Λ を離散群とする. $\xi: \Gamma \curvearrowright (X, \mu)$, $\zeta: \Lambda \curvearrowright (Y, \nu)$ を e.f.m.p. 作用とし, $\xi \sim_{\text{WOE}} \zeta$ とする. このとき, ξ と ζ はほとんど共役 (virtually conjugate) である. 特に, Γ と Λ はほとんど同型である.

2つの離散群 Γ と Λ が**ほとんど同型 (virtually isomorphic)** であるとは, 群の短完全列

$$1 \rightarrow N \rightarrow \Gamma \rightarrow \Gamma_1 \rightarrow 1, \quad 1 \rightarrow M \rightarrow \Lambda \rightarrow \Lambda_1 \rightarrow 1$$

で N, M が有限なもの, 有限指数部分群 $\Gamma_2 < \Gamma_1, \Lambda_2 < \Lambda_1$ で $\Gamma_2 \simeq \Lambda_2$ となるものが存在するときをいう. ほとんど同型な2つの離散群が WOE となる作用をもつことを見るのは易しい. よって, 定理 4.1 は $\Gamma(M)^\circ$ の作用と WOE になる作用をもつ離散群を特徴付けている.

定理 4.1 の証明は, コサイクル剛性定理 3.2 と, Furman [F1] による手法を用いる. この Furman による手法は, 同じ Γ の2つの作用の間の考察から, Γ と別の離散群 Λ の作用の間の WOE から Λ の Γ (または Γ より少し大きい群) への表現を構成する方法であり, 非常に一般的なものである. (Furman はこれを, \mathbb{R} -階数が 2 以上の中心が自明な連結単純 Lie 群の格子部分群による作用の研究に応用した. 結果として, Zimmer によるコサイクル超剛性定理 [Z] を用いて, そのような格子部分群の作用について OE に関する剛性を示している. [F1], [F2] を参照のこと.) 定理 3.2 から定理 4.1 を導くプロセスについては [Ki2] または [Ki4] を参照してほしい.

REFERENCES

- [ADR] C. Anantharaman-Delaroche and J. Renault, *Amenable groupoids*, Monogr. Enseign. Math., 36. Enseignement Math., Geneva, 2000.
- [F1] A. Furman, Gromov's measure equivalence and rigidity of higher rank lattices, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1059–1081.
- [F2] A. Furman, Orbit equivalence rigidity, *Ann. of Math. (2)* **150** (1999), 1083–1108.
- [I1] N. V. Ivanov, *Subgroups of Teichmüller modular groups*, Transl. of Math. Monogr., 115. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992.
- [I2] N. V. Ivanov, Mapping class groups, in *Handbook of geometric topology*, 523–633, North-Holland, Amsterdam, 2002.
- [Ke] A. S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Grad. Texts in Math., 156. Springer-Verlag, New York, 1995.
- [Ki1] Y. Kida, The mapping class group from the viewpoint of measure equivalence theory, preprint, to appear in *Mem. Amer. Math. Soc.*
- [Ki2] Y. Kida, Measure equivalence rigidity of the mapping class groups, preprint, to appear in *Ann. of Math.*
- [Ki3] Y. Kida, Orbit equivalence rigidity for ergodic actions of the mapping class group, *Geom. Dedicata* **131** (2008), 99–109.
- [Ki4] Y. Kida, Introduction to measurable rigidity of mapping class groups, preprint, to appear in *Handbook of Teichmüller theory* (A. Papadopoulos, ed.), Volume II.

- [Kl] E. Klarreich, The boundary at infinity of the curve complex and the relative Teichmüller space, preprint, available at <http://nasw.org/users/klarreich>.
- [OW] D. S. Ornstein and B. Weiss, Ergodic theory of amenable group actions. I. The Rohlin lemma, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **2** (1980), 161–164.
- [S] Y. Shalom, Measurable group theory, in *European Congress of Mathematics*, 391–423, Eur. Math. Soc., Zürich, 2005.
- [Z] R. J. Zimmer, *Ergodic theory and semisimple groups*, Monogr. Math., 81. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

MATHEMATICAL INSTITUTE, TOHOKU UNIVERSITY, 980-8578 SENDAI, JAPAN
E-mail address: `kida@math.tohoku.ac.jp`

実解析的特異点のブロー解析理論における最近の進展

小池敏司 (兵庫教育大学)

ブロー解析性 (blow-analyticity) とは、実解析的特異点に対する自然で望ましい同程度特異性 (equisingularity) として、シドニー大学の Tzee-Char Kuo によって導入された概念である。これは、Oscar Zariski ([42, 43, 44]) に始まり、現在も活発に続いている、複素解析的特異点に対する同程度特異性問題の一連の多くの研究を、代数的閉体でない実の場合にも展開できないかという試みから始められたものである。

同程度特異性問題とは、文字通り、与えられた特異点または特異点族がいつ同じであるかを研究する問題である。そこでは、導入した同値関係や自明性が望ましいものであるか (つまり、モデュライが現れないか)、与えられた特異点とその同値関係に関して同じであることを示す自明性定理の確立、異なることを示す不変量の導入、それらを用いた特異点の分類、また、考えている同値関係の異なる視点からの特徴付けなどが問題になる。

1978 年頃に始まるブロー解析性の研究の中で、現在、実解析的特異点の分野で広く行き渡っているブロー解析同値の概念は、最初から導入されていたわけではなく、多くの模索的な研究 (T.C. Kuo [27, 28, 29, 31, 32, 33]、T.C. Kuo - J.N. Ward [30]) を通して、漸く、論文 [35] の中で導入されたものである。ここで、そのブロー解析同値の概念を述べよう。

同相写像芽 $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ がブロー解析同相写像 (blow-analytic homeomorphism) であるとは、実改変 (real modification) $\mu : (M, \mu^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ と $\tilde{\mu} : (\tilde{M}, \tilde{\mu}^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ 、実解析同型写像 $\Phi : (M, \mu^{-1}(0)) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\mu}^{-1}(0))$ が存在して、次の図式が可換になるときにいう：

$$\begin{array}{ccc} (M, \mu^{-1}(0)) & \xrightarrow{\mu} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ \Phi \downarrow & & h \downarrow \\ (\tilde{M}, \tilde{\mu}^{-1}(0)) & \xrightarrow{\tilde{\mu}} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

従って、解析同型写像より誘導されるということで、ブロー解析同相写像は同相写像よりも強い概念である。二つの実解析関数芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ がブロー解析同値 (blow-analytically equivalent) であるとは、ブロー解析同相写像 $h : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在して、 $f = g \circ h$ になるときいう。ブロー解析同値に関しては、同相写像では保存されないが、ブロー解析同相写像で保存されるある種の量が知られている。例えば、2 節のブロー解析不変量を参照して下さい。

ブロー解析理論全般についての概説については、福井 - 小池 - Kuo [11]、福井 - L. Paunescu [13] が詳しい。ここでは、それらのなかで扱われているブロー解析自明性定理、ブロー解析不変量について触れた後、それらの概説以降にごく最近に示された 2 変数実解析関数芽のブロー解析同値の完全な特徴付けとそこから得られる結果を紹介する。

1. 局所有限性定理とブロー解析自明性定理

この節では、主として、ブロー解析自明性定理のうちで重要なものを簡単に述べることにする。節を通して、 $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ 、 $t \in I$ 、を実解析関数芽の解析的な族とする。但し、 I は広中先生 ([16]) の意味での部分解析的集合 (subanalytic set) とする。

先に述べたように、Kuo は論文 [35] において現在用いられているブロー解析同値の概念を導入した。更に、それが望ましいものであることを保証するために、少なくとも孤立特異点を持つ実解析関数芽の族にはブロー解析モデュライが現れないことを示した。

定理 1.1 (T.C. Kuo [35]) $\{f_t\}_{t \in I}$ を孤立特異点を持つ族とする。このとき、連結な解析多様体への I の局所有限分割が存在し、各連結成分上、 f_t のブロー解析的なタイプは同じである。

以下、 $I = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_m, b_m]$ とする。ブロー解析性に関する最初の結果は、次の自明性定理である。

定理 1.2 (T.C. Kuo [27]) $\{f_t\}_{t \in I}$ を初期同次形式の次数が同じで、かつ、それらが孤立特異点を持つ族とする。このとき、 $\{f_t\}_{t \in I}$ はブロー解析自明である。

この結果は、埼玉大学の福井敏純氏と故吉永悦男氏によって、次のように拡張された。

定理 1.3 (福井 - 吉永 [9]) $\{f_t\}_{t \in I}$ をニュートン境界が不変で、かつ、 f_t のニュートン境界のコンパクトな面への制限が非退化な族とする。このとき、 $\{f_t\}_{t \in I}$ はブロー解析自明である。

実は、 $f_t : (\mathbb{C}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ 、 $t \in I$ 、を正則関数芽の族とするとき、上の定理と同じ条件のもと、 $\{(\mathbb{C}^n, f_t^{-1}(0))\}_{t \in I}$ が位相自明であるという、特異点の分野では非常に有名な結果が、A.G. Kouchnirenko ([25]) によって知られていた。従って、福井 - 吉永の仕事以降、実特異点のブロー解析的性質は、複素特異点の位相的性質に非常にとまでは言えないが、かなり似ているのではないかということが、関連する日本人特異点関係者を中心に認識されるようになった。

類似性と非類似性を一つ見ておこう。

例 1.4 (1) $f(x, y) = x^3 - y^4$ 、 $g(x, y) = x^3 - y^{2k}$ ($k > 2$) とする。実の場合にはそれらは位相同値だが、複素の場合は位相同値でない。一方、次節で見るように、実の場合、期待通り、それらはブロー解析同値でない。

(2) $f(x, y) = x^2 - y^2$ 、 $g(x, y) = x^2 + y^2$ とすると、 f 、 g は実の場合は位相同値でもないが、複素の場合は線形同値である。

もう一つ、重要なブロー解析自明性定理についても触れておく。

定理 1.5 (福井 - L. Paunescu [12]) $\{f_t\}_{t \in I}$ を同じ重みの組に関する初期擬斉次形式の次数が同じで、かつ、それらが孤立特異点を持つ族とする。このとき、 $\{f_t\}_{t \in I}$ はブロー解析自明である。

この結果についても、対応する複素の場合の位相自明性定理が既に知られており (V.I. Arnol'd [1], H. King [18] + A. Parusiński [39], J. Damon - T. Gaffney [3]), 期待された結果が実の場合に示されたと言ってよい。他にも多くのブロー解析自明性定理が知られているが、ここでは触れない。

2. ブロー解析不変量

この節以降では、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または \mathbb{C} とする。

(1) 福井不変量

解析関数芽 $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ に対し、

$$A(f) := \{\text{ord}(f(\gamma(t))) \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}; \gamma : (\mathbb{K}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}^n, 0) C^\omega\}$$

とおく。但し、 $\text{ord}(f(\gamma(t)))$ は、解析関数 $f \circ \gamma : (\mathbb{K}, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ の t に関する位数を表す。この $A(f)$ を f の**福井不変量** (Fukui invariant) という。

実の場合には、符号も考慮した量を考えることができる。 $\lambda : U \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\lambda(0) = 0$, を解析写像とする。ただし、 U は $0 \in \mathbb{R}$ の近傍である。このとき、 λ が f に対する**非負解析弧** (nonnegative arc) (または、**非正解析弧** (nonpositive arc)) であるとは、ある正数 $\delta > 0$ が存在して、任意の $t \in [0, \delta) \subset U$ に対し

$$(f \circ \lambda)(t) \geq 0 \quad (\text{または、} (f \circ \lambda)(t) \leq 0)$$

が成り立つときにいう。ここで、

$$A_+(f) := \{\text{ord}(f(\lambda(t))); \lambda \text{ は } f \text{ に対する非負解析弧}\}$$

$$A_-(f) := \{\text{ord}(f(\lambda(t))); \lambda \text{ は } f \text{ に対する非正解析弧}\}$$

とおく。 $A_\pm(f)$ を**符号付き福井不変量** (Fukui invariants with sign) とよぶ。このとき、次の定理が成り立つ。

定理 2.1 (福井 [10]) 実解析関数芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ がブロー解析同値ならば、 $A(f) = A(g)$ 、 $A_\pm(f) = A_\pm(g)$ である。

この定理を用いると、先の例 1.4(1) において、 $4 \in A(f)$ だが $4 \notin A(g)$ より、 f と g はブロー解析同値でないことがわかる。福井不変量については、実解析的不変量に関する概説 [20] のなかで多くの具体的な計算例を与えているので、関心のある方は見てください。また、複素関数については、次が成り立つ。

定理 2.2 (小池 - A. Parusiński [23]) 正則関数芽 $f, g : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ が位相同値ならば、 $A(f) = A(g)$ である。

(2) モチーフ型不変量

小節 2(1) で述べた福井不変量は、2変数関数に対してはいい不変量であるが、3変数以上の場合には必ずしもそうではない。そのことを示す例を与える。

例 2.3 $f(x, y, z) = x^3 - 3xy^5 + z^3$ 、 $g(x, y, z) = x^3 + y^7 + z^3$ とする。これらの関数の福井不変量を計算すると、実、複素の場合とも

$$A(f) = A(g) = \{3, 4, 5, \dots\} \cup \{\infty\}$$

で一致する。ちなみに、実の符号付き福井不変量も同じで一致する。これらの福井不変量は2変数 x, z のみの $x^3 + z^3$ の部分だけで定まってしまっている。

上記の関数において、実関数としては大域的に位相同値、より強く半代数的同値であることが見て取れるが、一方、複素関数としては局所的にも位相同値でない。これらの関数には、特に実固有の性質が現れる項を含んでいないので、我々の類似性からいうと、実関数としてブロー解析同値でないことが期待される。しかし、福井不変量では区別できない。そこで、新しい不変量導入が必要になる。

我々は、J. Denef - F. Loeser ([4, 5, 6, 7, 8]) によって複素特異点に対して導入されたモチヴィック・ゼータ関数 (motivic zeta function) に対応するモチーフ型ゼータ関数を実の場合にも考える。E. Artal Bartolo 達によって、Denef - Loeser のゼータ関数は複素特異点の位相不変量でないことが示されていた ([2])。従って、我々の類似性には反するのだが、ブロー解析同値は解析弧を解析弧に写す性質を持っているので、実の場合には同様のゼータ関数がブロー解析不変量になるだろうとの予測を持って導入した。

$$\mathcal{L} := \{ \gamma : (\mathbb{R}, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0); \gamma \text{ 解析的} \}$$

を $0 \in \mathbb{R}^n$ での解析弧全体の集合とし、その m 次での切断弧の集合を

$$\mathcal{L}_m := \{ \gamma \in \mathcal{L}; \gamma(t) = \mathbf{a}_1 t + \mathbf{a}_2 t^2 + \dots + \mathbf{a}_m t^m, \mathbf{a}_i \in \mathbb{R}^n \}$$

とおく。 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を実解析関数芽とする。 $m \geq 1$ に対し、

$$\begin{aligned} \mathcal{X}_{m,+}(f) &:= \{ \gamma \in \mathcal{L}_m; f \circ \gamma = ct^m + \dots, c > 0 \} \\ \mathcal{X}_{m,-}(f) &:= \{ \gamma \in \mathcal{L}_m; f \circ \gamma = ct^m + \dots, c < 0 \} \\ \mathcal{X}_m(f) &:= \{ \gamma \in \mathcal{L}_m; f \circ \gamma = ct^m + \dots, c \neq 0 \} \end{aligned}$$

とし、 f に対する**正ゼータ関数** (positive zeta function)、**負ゼータ関数** (negative zeta function)、**全ゼータ関数** (total zeta function) を、それぞれ、

$$\begin{aligned} Z_{f,+}(T) &:= \sum_{m \geq 1} (-1)^{-md} \chi^c(\mathcal{X}_{m,+}) T^m \\ Z_{f,-}(T) &:= \sum_{m \geq 1} (-1)^{-md} \chi^c(\mathcal{X}_{m,-}) T^m \\ Z_f(T) &:= \sum_{m \geq 1} (-1)^{-md} \chi^c(\mathcal{X}_m) T^m = Z_{f,+}(T) + Z_{f,-}(T) \end{aligned}$$

と定義する。ここで、 χ^c はコンパクトな台を持つオイラー標数を表す。

このとき、順序が後先になるが、次小節で与える計算公式を用いて、我々のモチーフ型ゼータ関数がブロー解析不変量であることを示すことができる。

定理 2.4 (小池 - Parusiński [19]) 実解析関数芽 $f, g : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ がブロー解析同値ならば、 $Z_f = Z_g$ 、 $Z_{f,\pm} = Z_{g,\pm}$ である。

正ゼータ関数を用いて、例 2.3 の f, g がブロー解析同値でないことが示される。

(3) 福井不変量、モチーフ型不変量の計算公式

解析関数芽 $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ に対し、 $\sigma : M \rightarrow \mathbb{K}^n$ を $f^{-1}(0)$ の簡約化 (simplification) とする。即ち、 σ は有限個のブローアップの合成で、 M は滑らか、 $f \circ \sigma$ は $\sigma^{-1}(0)$ の近傍で正規交叉になるものとする。 $E_i, i \in J$ 、を $\sigma^{-1}(B_\varepsilon)$ における $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$ の既約成分、ただし、 B_ε は $0 \in \mathbb{K}^n$ を中心とする ε -開球とする。各 $i \in J$ に対し、

$$N_i := \text{mult}_{E_i} f \circ \sigma, \quad \nu_i := \text{mult}_{E_i} \text{jac} \sigma + 1$$

とおく。ここで、 mult_{E_i} は E_i に沿った重複度を表し、 jac はヤコビアンを表す。次に、 $I \subset J$ に対し、 $E_I = \bigcap_{i \in I} E_i$ 、 $\mathring{E}_I = E_I \setminus \bigcup_{j \in J \setminus I} E_j$ とし、

$$\mathcal{C} := \{I; \mathring{E}_I \cap \sigma^{-1}(0) \neq \emptyset\}$$

とおく。

集合 $A, B \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ に対し、

$$A + B := \{a + b \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}; a \in A, b \in B\}$$

と定義する。ただし、 $a = \infty$ または $b = \infty$ のときは、 $a + b = \infty$ とおく。この記法を用いて、 $I = (i_1, \dots, i_p) \in \mathcal{C}$ に対し、

$$\Omega_I(f) := (N_{i_1} \mathbb{N} + \dots + N_{i_p} \mathbb{N}) \cup \{\infty\}$$

とおく。そのとき、福井不変量は次のように与えられる。

定理 2.5 (泉 - 小池 - Kuo [17]) $f : (\mathbb{K}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ 、 $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ または \mathbb{C} 、を解析関数芽とし、 σ を $f^{-1}(0)$ の簡約化とする。このとき、

$$A(f) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}} \Omega_I(f).$$

次に、実の場合の符号付き福井不変量の計算公式を与えるために、以下の記号を準備する。

$$\begin{aligned} \mathcal{C}^+ &:= \{I \in \mathcal{C}; \mathring{E}_I \cap \sigma^{-1}(0) \cap \overline{P(f)} \neq \emptyset\}, & P(f) &:= \{x \in M; f \circ \sigma(x) > 0\} \\ \mathcal{C}^- &:= \{I \in \mathcal{C}; \mathring{E}_I \cap \sigma^{-1}(0) \cap \overline{N(f)} \neq \emptyset\}, & N(f) &:= \{x \in M; f \circ \sigma(x) < 0\} \end{aligned}$$

ここで、上のバーは M における閉包を表す。これらの記号と最初に述べた記号を用いて、符号付き福井不変量は以下のように表すことができる。

定理 2.6 (泉 - 小池 - Kuo [17]) $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を実解析関数芽とする。このとき、

$$A_+(f) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}^+} \Omega_I(f), \quad A_-(f) = \bigcup_{I \in \mathcal{C}^-} \Omega_I(f)$$

一方、実解析関数芽 $f : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対する全ゼータ関数については、M. Kontsevich [24] や Denef - Loeser のモチヴィック積分の変数変換公式 (change of variables formula) を用いて次の計算公式を得る。

定理 2.7 (小池 - Parusiński [19])

$$Z(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (-2)^{|I|} \chi^c(\dot{E}_I \cap \sigma^{-1}(0)) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}{1 - (-1)^{\nu_i} T^{N_i}}.$$

$\dot{E}_{I,k}$ を \dot{E}_I の連結成分とし、 $x \in \dot{E}_{I,k}$ とする。このとき、 x の近くでは、 $f \circ \sigma \neq 0$ の領域は、 $(f \circ \sigma)^{-1}(0)$ によって $2^{|I|}$ 個の部分に区切られる。 $\alpha_+(\dot{E}_{I,k})$ (または、 $\alpha_-(\dot{E}_{I,k})$) で、 $f \circ \sigma$ が正 (または、負) の部分の個数を表そう。符号付きゼータ関数の公式は次である。

定理 2.8 (小池 - Parusiński [19])

$$Z_{\pm}(T) = \sum_{I \neq \emptyset} (-1)^{|I|} \left(\sum_k \alpha_{\pm}(\dot{E}_{I,k}) \chi^c(\dot{E}_{I,k} \cap \sigma^{-1}(0)) \right) \prod_{i \in I} \frac{(-1)^{\nu_i} T^{N_i}}{1 - (-1)^{\nu_i} T^{N_i}}$$

3. 2変数実解析関数に関するブロー解析理論の最近の進展

$f : (\mathbb{K}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{K}, 0)$ を重複度が m の解析関数芽とする。このとき、 $f(x, y)$ が x に関してミニ正則 (mini-regular in x) であるとは、 f の初期形式 f_m に対し、 $f_m(1, 0) \neq 0$ となるときにいう。

(1) ツリーモデル

この小節では、我々の実の場合の結果のための準備として、[26] のなかで T.C. Kuo、Y.C. Lu によって 2 変数複素解析関数芽に対して導入されたツリーモデルの概念を述べる。重複度が m の複素解析関数芽 $f : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}, 0)$ が x に関してミニ正則とすると、

$$f(x, y) = u(x, y) \left(x^m + \sum_{i=1}^m a_i(y) x^{m-i} \right)$$

と表される。ただし、 u, a_i は解析的で、 $u(0, 0) \neq 0$ である。

$x = \lambda_i(y)$ 、 $i = 1, \dots, m$ 、を f の複素 Newton-Puiseux 根とする。このとき、 λ_i と λ_j の接触位数 (contact order) を

$$O(\lambda_i, \lambda_j) := \text{ord}_0(\lambda_i - \lambda_j)(y)$$

と定義する。 $h \in \mathbb{Q}$ としたとき、 $O(\lambda_i, \lambda_j) > h$ が成り立つとき、 λ_i と λ_j は h^+ を法として合同という。

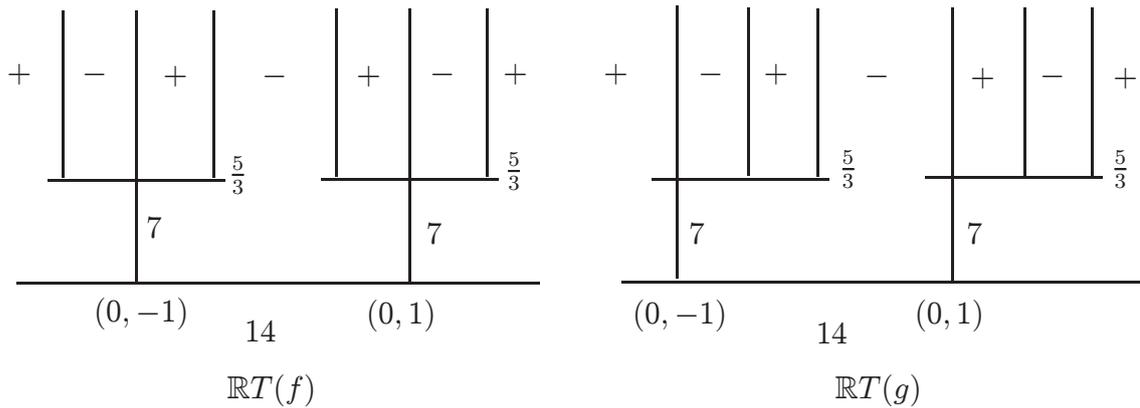
f のツリーモデル (tree model) を次のように定義する：

- 最初に主幹 (main trunk) と呼ばれる鉛直線分を引く。
- $m := \text{mult}_0 f(x, y)$ を主幹の右横にマークする。
- $h_0 := \min\{O(\lambda_i, \lambda_j) \mid 1 \leq i, j \leq m\}$ とおく。主幹の上に横バー B_0 を描く。 $h(B_0) := h_0$ を B_0 を高さ (height) と言ひ、 B_0 の右横にマークする。
- 根 $x = \lambda_i(y)$ 、 $i = 1, \dots, m$ 、は、 h_0^+ を法とする同値類に分けられる。このとき、各同値類を鉛直線分として、 B_0 の上に描く。それらの各線分を、単に幹 (trunk) と呼ぶ。もし、幹が s 個の根からなるときは、その重複度は s と呼び、その幹の右横に s をマークする。

• v_1, v_2 を $\mathbb{R}T_v(f)$ が非自明な二つの隣り合う単位ベクトルとするとき、 $\mathbb{R}T(f)$ の v_1 と v_2 の間に f の符号をマークする。(一箇所の符号が決まれば、残りも順次定まる。)

二つの実ツリーモデル $\mathbb{R}T(f), \mathbb{R}T(g)$ が同型とは、それらの間の同相写像で、グラウンド・バーをグラウンド・バーに写し、幹の重複度、バーの高さ、Puiseux 特性指数の符号を保つものがあるときにいう。

例 3.4 $f(x, y) = x(x^3 - y^5)(x^3 + y^5), g(x, y) = x(x^3 - y^5)(x^3 - 2y^5)$ とする。このとき、 f, g の実ツリーモデル $\mathbb{R}T(f), \mathbb{R}T(g)$ は以下のように描かれ、同型でない。



(3) 2 変数実解析関数芽のブロー解析同値の特徴付け

この小節では、論文 [21] で与えたブロー解析同値の特徴付けを紹介する。

実解析関数芽 $f(x, y), g(x, y)$ が弱同型な特異点解消空間 (weakly isomorphic resolution space) を持つとは、以下の性質を持つ、それぞれ、 $f(x, y), g(x, y)$ の特異点解消 $\mu : M \rightarrow \mathbb{R}^2, \tilde{\mu} : \tilde{M} \rightarrow \mathbb{R}^2$ と解析同型 $\Phi : M \rightarrow \tilde{M}$ が存在するときをいう：

- (1) Φ は例外集合 (exceptional set) と零点の強変換 (strict transform) を保つ：

$$\Phi(\mu^{-1}(0)) = \tilde{\mu}^{-1}(0), \quad \Phi((f \circ \mu)^{-1}(0)) = (g \circ \tilde{\mu})^{-1}(0)$$

- (2) Φ は重複度を保つ： C が $(f \circ \mu)^{-1}(0)$ の成分ならば、

$$\text{mult}_C f \circ \mu = \text{mult}_{\Phi(C)} g \circ \tilde{\mu}$$

- (3) Φ は符号を保つ： $f \circ \mu(p) > 0 \Leftrightarrow g \circ \tilde{\mu}(\Phi(p)) > 0$

同相写像芽 $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ がカスケード・ブロー解析同相写像 (cascade blow-analytic homeomorphism) であるとは、一点ブローアップの合成 $\mu : (M, \mu^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ と $\tilde{\mu} : (\tilde{M}, \tilde{\mu}^{-1}(0)) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ 、実解析同型写像 $\Phi : (M, \mu^{-1}(0)) \rightarrow (\tilde{M}, \tilde{\mu}^{-1}(0))$ が存在して、次の図式が可換になるときにいう：

$$\begin{array}{ccccccc} (M_k, E_k) & \xrightarrow{b_k} & (M_{k-1}, E_{k-1}) & \xrightarrow{b_{k-1}} & \cdots & \xrightarrow{b_2} & (M_1, E_1) & \xrightarrow{b_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow h_{k-1} & & & & \downarrow h_1 & & \downarrow h \\ (\tilde{M}_k, \tilde{E}_k) & \xrightarrow{\tilde{b}_k} & (\tilde{M}_{k-1}, \tilde{E}_{k-1}) & \xrightarrow{\tilde{b}_{k-1}} & \cdots & \xrightarrow{\tilde{b}_2} & (\tilde{M}_1, \tilde{E}_1) & \xrightarrow{\tilde{b}_1} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

二つの実解析関数芽 $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ と $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ がカスケード・ブロー解析同値 (cascade blow-analytically equivalent) であるとは、カスケード・ブロー解析同相写像 $h : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^2, 0)$ が存在して、 $f = g \circ h$ になるときいう。

以上の概念を用いて、次のような2変数実解析関数芽のブロー解析同値の特徴付けを与えることができる。

定理 3.5 (小池 - Parusiński [21]) 実解析関数芽 $f : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ 、 $g : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ に対し、次の条件は同値である。

- (1) f, g はブロー解析同値である。
- (2) f, g は弱同型な最小特異点解消空間を持つ。
- (3) f, g の実ツリーモデルは同型である。
- (4) f, g はカスケード・ブロー解析同値である。

例 3.4 の f, g の符号付きも込めた福井不変量、ゼータ関数は一致するのだが、この定理より、ブロー解析同値でないことがわかる。

(4) ブロー解析同値と他の同値関係の相互関係

この小節では、定理 3.5 のブロー解析同値の特徴付けを用いて示した、他の同値関係との相互関係について、論文 [22] の結果を紹介する。

二つの実解析関数芽の同値関係を考えると、一般に最初に思い付くものは座標変換や位相同値などであるが、それらの間には次の相互関係がある：

$$C^0\text{-eq.} \Leftarrow \text{bi-Lipschitz eq.} \Leftarrow C^1\text{-eq.} \Leftarrow C^2\text{-eq.} \Leftarrow \cdots \Leftarrow C^\infty\text{-eq.} \Leftrightarrow C^\omega\text{-eq.}$$

ここで、 \Leftarrow は逆が成り立たない例が存在していることも意味している。

ブロー解析同値は、位相同値と解析同値の間に位置し、一般に、 C^r -同値、 $r = 1, 2, \dots$ 、と無関係に見える。実際、T.C. Kuo は次の確信を述べた。

予想 3.6 (Kuo [34]) ブロー解析同値と C^r -同値、 $r = 1, 2, \dots$ 、は独立な概念である。

我々は2変数の場合に、この Kuo の確信が間違っていることを示した。

定理 3.7 (小池 - Parusiński [22]) 二つの2変数実解析関数芽に対し、次が成り立つ。

- (1) それらが C^1 -同値ならば、ブロー解析同値である。
- (2) ブロー解析同値でないが、リップシッツ同値のものが存在する。

(1) については、2変数実解析関数芽が C^1 -同値なら、同型な実ツリーモデルが構成できることが示され、定理 3.5 よりブロー解析同値が従うことが言える。また、(2) については、定理 3.5 より例 3.4 の関数がブロー解析同値でないことが示されたが、それらがリップシッツ同値であることを示すことができる。定理 1.1 で述べたように、孤立特異点を持つ実解析関数芽の族にはブロー解析モデュライは現れないが、J.P. Henry, A. Parusiński はリップシッツモデュライが現れる孤立特異点を持つ2変数多項式関数の族を構成している ([14])。このことから、(2) の結果も意味があることがわかる。

REFERENCES

- [1] V. I. Arnol'd, *Normal forms of functions in a neighbourhood of a degenerate critical point*, Uspekhi Mat. Nauk **29-2** (1974), 11–49, = Russian Math. Surveys **29-2** (1974), 10–50.
- [2] E. Artal Bartolo, P. Cassou-Noguès, I. Luengo and A. Melle Hernández, *The Denef-Loeser zeta function is not a topological invariant*, J. London Math. Soc. (2) **65** (2002), 45–64.
- [3] J. Damon and T. Gaffney, *Topological triviality of deformations of functions and Newton filtrations*, Invent. math. **72** (1983), 335–358.
- [4] J. Denef, F. Loeser, *Motivic Igusa zeta functions*, J. Algebraic Geom. **7** (1998), 505–537.
- [5] J. Denef, F. Loeser, *Germes of arcs on singular algebraic varieties and motivic integration*, Invent. math. **135** (1999), 201–232.
- [6] J. Denef, F. Loeser, *Motivic exponential integrals and a motivic Thom-Sebastiani Theorem*, Duke Math. J. **99** (1999), 289–309.
- [7] J. Denef, F. Loeser, *Geometry of arc spaces of algebraic varieties*, European Congress of Math. (Barcelona, July 10-14, 2000) **1** (2001), 325–348.
- [8] J. Denef, F. Loeser, *Lefschetz numbers of iterates of the monodromy and truncated arcs*, Topology **41** (2002), 1031–1040.
- [9] T. Fukui and E. Yoshinaga, *The modified analytic trivialization of family of real analytic functions*, Invent. math. **82** (1985), 467–477.
- [10] T. Fukui, *Seeking invariants for blow-analytic equivalence*, Compositio Math. **105** (1997), 95–107.
- [11] T. Fukui, S. Koike and T.-C. Kuo, *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, Real Analytic and Algebraic Singularities (T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, ed), Pitman Research Notes in Mathematics Series, **381** (1998), pp. 8–29.
- [12] T. Fukui and L. Paunescu, *Modified analytic trivialization for weighted homogeneous function-germs*, J. Math. Soc. Japan **52** (2000), 433–446.
- [13] T. Fukui and L. Paunescu, *On blow-analytic equivalence*, in “Arc-Spaces and Additive Invariants in Real Algebraic Geometry”, Proceedings of Winter School “Real Algebraic and Analytic Geometry and Motivic Integration”, Aussoie 2003, M. Coste, K. Kurdyka and A. Parusiński eds, Panoramas et Synthèses **24** (2008), SMF, pp. 87–125.
- [14] J.P. Henry, A. Parusiński : *Invariants of bi-Lipschitz equivalence of real analytic functions*, Banach Center Publications **65** (2004), 67–75.
- [15] H. Hironaka : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II*, Ann. of Math. **79** (1964), 109–302.
- [16] H. Hironaka : *Subanalytic set*, Number Theory, Algebraic Geometry and Commutative Algebra, volume in honour of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo, 1973, pp. 453–493.
- [17] S. Izumi, S. Koike and T.-C. Kuo, *Computations and Stability of the Fukui Invariant*, Compositio Math. **130** (2002), 49–73.
- [18] H. King, *Topological types in families of germs*, Invent. math. **62** (1980), 1–13.
- [19] S. Koike and A. Parusiński, *Motivic-type invariants of blow-analytic equivalence*, Ann. Inst. Fourier **53** (2003), 2061–2104.
- [20] 小池敏司, 実解析的特異点の不変量, 特異点の世界 : その広さと豊かさ, 数学の楽しみ 2005 秋, 日本評論社, pp. 80–93.
- [21] S. Koike and A. Parusiński, *Blow-analytic equivalence of two variable real analytic function germs*, arXiv:0710.1046.
- [22] S. Koike and A. Parusiński, *Equivalence relations for two variable real analytic function germs*, arXiv:0801.2650.
- [23] S. Koike and A. Parusiński, *Some questions on the Fukui numerical set for complex function germs*, preprint.
- [24] M. Kontsevich, Lecture at Orsay (December 7, 1995).

- [25] A.G. Kouchnirenko, *Polyèdres de Newton et nombres de Milnor*, Invent. math. **32** (1976), 1–31.
- [26] T.-C. Kuo and Y.C. Lu, *On analytic function germs of complex variables*, Topology **16** (1977), 299–310.
- [27] T.-C. Kuo, *The modified analytic trivialization of singularities*, J. Math. Soc. Japan **32** (1980), 605–614.
- [28] T.-C. Kuo : *Une classification des singularités réelles*, C.R. Acad. Sci. Paris **288** (1979), 809–812.
- [29] T.-C. Kuo : *On an O.D.E. problem in equisingularities*, Annales Polonici Math. **XXXVIII** (1980), 219–226.
- [30] T.-C. Kuo, J. Ward : *A theorem on almost analytic equisingularities*, J. Math. Soc. Japan **33** (1981), 471–484.
- [31] T.-C. Kuo : *Some viewpoints on algebraic geometry and singularity theorem*, Math. Chronicle **11** (1982), 67–80.
- [32] T.-C. Kuo : *Equivalence of isolated complex singularities*, Bull. of Inst. Math. Acad. Sinica **11** (1983), 415–432.
- [33] T.-C. Kuo : *Sur le problème de l'équisingularité*, Séminaire sur la Géométrie Algébrique Réelle, Publ. Math. de l'Université de Paris, **VII** (1984), pp. 119–122.
- [34] T.-C. Kuo : *Blow-analytic equisingularities*, Invited Address at Annual Convention of the Mathematical Society of Japan, Autumn 1984, Tokyo University.
- [35] T.-C. Kuo, *On classification of real singularities*, Invent. math. **82** (1985), 257–262.
- [36] T.-C. Kuo, A. Parusiński : *Newton polygon relative to an arc*, Real and Complex Singularities (São Carlos, 1998), Chapman & Hall Res. Notes Math. **412** (2000), pp. 76–93.
- [37] T.-C. Kuo, A. Parusiński : *Newton-Puiseux roots of Jacobian determinants*, J. Algebraic Geometry **13** (2004), 579–601.
- [38] K. Kurdyka and L. Paunescu, *Arc-analytic roots of analytic functions are Lipschitz*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 1693–1702.
- [39] A. Parusiński, *Topological triviality of μ -constant deformations of type $f(x) + tg(x)$* , Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 686–692.
- [40] A. Parusiński, *A criterion for the topological equivalence of two variable complex analytic function germs*, ArXiv:0804.0142.
- [41] O. Zariski, *On the topology of algebroid singularities*, Amer. Jour. Math. **54** (1932), 453–465.
- [42] O. Zariski : *Studies in Equisingularity.I. equivalent singularities of plane algebroid curves.* , Amer. J. Math. **87** (1965), 507–536.
- [43] O. Zariski : *Studies in equisingularity.II. Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero)*, Amer. J. Math. **87** (1965), 952–1006.
- [44] O. Zariski : *Studies in equisingularity.III. Saturation of local rings and equisingularity* , Amer. J. Math. **90** (1968), 961–1032.