

第 51 回
トポロジーシンポジウム
講演集

2004年7月29日～8月1日

於 山形テルサ アプローチ

平成 16 年度科学研究費 基盤研究 (A)

課題番号 15204002

序

この講演集は2004年7月29日から8月1日の間、山形市山形テルサ（アプローズ）において開催される第51回トポロジーシンポジウムに際し、予め講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、参加者が各講演をより良く理解し、活発な研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なお、この講演集は

平成16年度科学研究費 基盤研究(A)
研究代表者 泉屋 周一（北海道大学大学院理学研究科）
研究題目 特異点論からみた様々な幾何学の研究
課題番号 15204002

により作成されたものである。

シンポジウム開催にあたっては、上記科学研究費の他に、山形県および山形市からも補助金を受けた。ここに記し、感謝の意を表する。

世話人：内田 吉昭（山形大学理学部）
皆川 宏之（山形大学教育学部）
作間 誠（大阪大学大学院理学研究科）
稲葉 尚志（千葉大学大学院自然科学研究科）

第51回トポロジーシンポジウム

プログラム

7月29日(木)

15:00-16:00 畠中 英里 (東京工業大学大学院理工学研究科)
Invariants of 3-manifolds derived from their covering presentations

16:30-17:30 Erica Flapan (Pomona College)
Topological Symmetry Groups

7月30日(金)

9:30-10:30 西村 保三 (大阪市立大学数学研究所)
Small Cover のトポロジーと組合せ論

11:00-12:00 古田 幹雄 (東京大学大学院数理科学研究科)
Torsor タイプの不変量について

13:30-14:30 栗屋 隆仁 (九州大学大学院数理学府)
On the LMO invariant

15:00-16:00 皆川 宏之 (山形大学教育学部)
3次元多様体上のアノソフ流のバーコフ切断について

16:30-17:30 高村 茂 (京都大学大学院理学研究科)
特異ファイバーの分裂現象をめぐって

7月31日(土)

9:30-10:30 山崎 薫里 (筑波大学大学院数理物質科学研究科)
1の分割の拡張問題とその周辺

11:00-12:00 Henryk Toruńczyk (Warsaw 大/ポーランド科学アカデミー)
On some theorems of Borsuk-Ulam type and their applications

13:30-14:30 小島 定吉 (東京工業大学大学院情報理工学研究科)
ポアンカレ予想 (特別企画 一般公開講演)

15:00-16:00 戸田 正人 (お茶の水女子大学理学部)
Ricci flow と Perelman の仕事

16:30-17:30 広中 えり子 (Florida 州立大学/大阪大学)
Lehmer's polynomial and Coxeter links

8月1日(日)

9:30-10:30 佐治 健太郎 (広島大学大学院理学研究科)
定径円織面について

11:00-12:00 石川 昌治 (東京工業大学大学院理工学研究科)
Divide の性質とその一般化について

INVARIANTS OF 3-MANIFOLDS DERIVED FROM THEIR COVERING PRESENTATIONS

畠中 英里 (東京工業大学大学院理工学研究科)

1. はじめに

3次元多様体の分類を考えると、不変量を構成することはひとつの手段である。 S を集合として、写像

$$I: \{3\text{次元多様体}\} \rightarrow S$$

が3次元多様体の不変量であるとは、任意の位相同型な3次元多様体 M と M' について $I(M) = I(M')$ となることをいう。古典的な不変量としてホモロジー群や基本群があげられる。1980年代の後半からは、Reshetikhin-Turaev [7] をはじめとして数多くの不変量が、枠つき絡み目による surgery 表示 (例えば [7]), Heegaard 分解 ([4]), 単体分割 ([8]) といった表示方法を用いて構成された。これらは TQFT (topological quantum field theory) の構成法に基づいた、量子不変量と呼ばれるものである。

3次元多様体の表示方法には他に、covering 表示 (covering presentation) と呼ばれるものがある。これは向きづけられた3次元閉多様体から3次元球面 S^3 への simple な3重分岐被覆写像に関し、その分岐集合としてとれる絡み目に被覆の情報を込めたものことである。他の表示方法と比較すると covering 表示を用いて得られる3次元多様体の不変量はまだ発見されておらず、この分野は比較的未開拓である。そこで次の問題を考えた。

問. covering 表示を使って3次元多様体の不変量を構成せよ。

この問題に対し次の結果が得られた。

結果 1. covering 表示を使って得られる不変量の構成方法を与えた。

結果 2. その構成方法を使って Dijkgraaf-Witten 不変量を再構成した。

Dijkgraaf-Witten 不変量 [1] は3次元多様体の単体分割と群の3-cocycle を用いた、状態和として定義される位相不変量である (定義は4章で述べる)。

本稿では2章で covering 表示を紹介する。また結果 1 について3章で、結果 2 については4章で解説する。5章では Dijkgraaf-Witten 不変

量の計算例を与え、6章においては4章の補足として Dijkstra-Witten 不変量を再構成するためのアイデア、特に covering 表示から単体分割を得るアルゴリズムについて解説する。

2. COVERING 表示

3次元多様体 M に対し、上への連続写像 $p: M \rightarrow S^3$ が S^3 内の絡み目 L で分岐する3重分岐被覆写像であるとは、

1. 制限写像 $p: M - p^{-1}(L) \rightarrow S^3 - L$ が通常の3重被覆写像であり、
2. $p^{-1}(L)$ の各点 x に対し、 x と $p(x)$ の近傍で、 B を複素平面上の単位円板として $B \times [-1, 1]$ とそれぞれ同相で、ある $n \in \{1, 2, 3\}$ に対し制限写像が

$$p: B \times [-1, 1] \rightarrow B \times [-1, 1], (z, t) \mapsto (z^n, t)$$

となるものが存在するときをいう；Figure 1 参照。

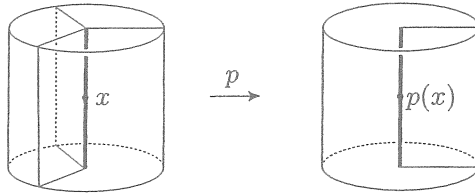


FIGURE 1. 分岐点の近傍の様子 ($n = 3$ の場合)

3重分岐被覆写像 $p: M \rightarrow S^3$ の同値類は、分岐集合である絡み目 L の補空間の基本群から3次対称群 \mathfrak{S}_3 への表現 (群の準同型) $\pi_1(S^3 - L) \rightarrow \mathfrak{S}_3$ の共役類と1対1に対応している。この表現が $\pi_1(S^3 - L)$ の任意の Wirtinger generator を互換に写すとき、3重分岐被覆写像は simple であるという。 p が simple であるときの分岐集合 L の図式を互換つき図式と呼ぶ。互換つき図式の各 arc には、対応する Wirtinger generator の表現による互換を付け加えておく。交点のまわりでの Wirtinger relation により、互換つき図式の交点のタイプは全部で6種類ある。これを Figure 2 に示した。この図で上の3つの交点を同じ互換の交点、下の3つを異なる互換の交点と呼ぶことにする。

1974年 Hilden [3] と Montesinos [5] は、任意の向きづけられた3次元閉多様体に対して絡み目で分岐する simple な3重分岐被覆写像 $p: M \rightarrow S^3$ が存在することを示した。さらに1991年 Piergallini [6] によって、2つの3次元多様体が位相同型であることと、それぞれの互換つき図式が Reidemeister move, 3-move (Figure 3), covering move (Figure

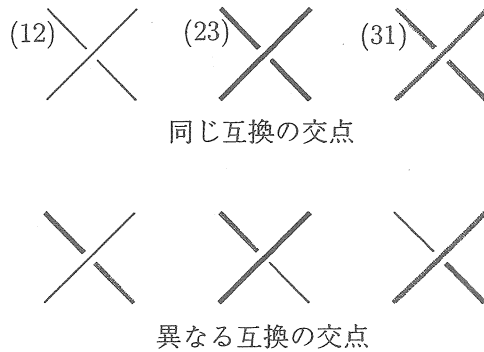


FIGURE 2. 互換つき図式の交点. 細い線で (12), 太い線で (23), グレーの線で (31) を表す

4) の有限回の操作と互換の入れかえで移りあうことが同値であることが示された. すなわち,

$$\begin{aligned} & \{ \text{向きづけられた3次元閉多様体} \} / \text{homeo} \\ &= \{ \text{互換つき図式} \} / \text{各 move, 互換の入れかえ.} \end{aligned}$$

従って互換つき図式を3次元多様体のひとつの表示方法と見なすことができる. これを covering 表示と呼ぶ. Figure 5 に具体例を挙げる.

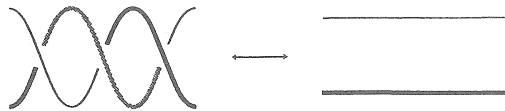


FIGURE 3. 3-move

3. 不変量の構成方法

3次元多様体の基本群から有限群への表現と対応するような, 互換つき図式の有限群による coloring を与える. 互換つき図式上可能な coloring の数はその図式の表す3次元多様体の不変量となる. さらに各 coloring にアーベル群の元を対応させ, より細かい不変量を構成することを考える.

定義 3.1. G を有限群とする. G による互換つき図式の coloring とは, 写像 $\{ \text{図式の arc} \} \rightarrow G$ で, 図式の各交点のまわりで Figure 6 の条件を満たすものとする.

命題 3.2. $\#\{ \text{互換つき図式の coloring} \}$ は, 3次元多様体の不変量である.

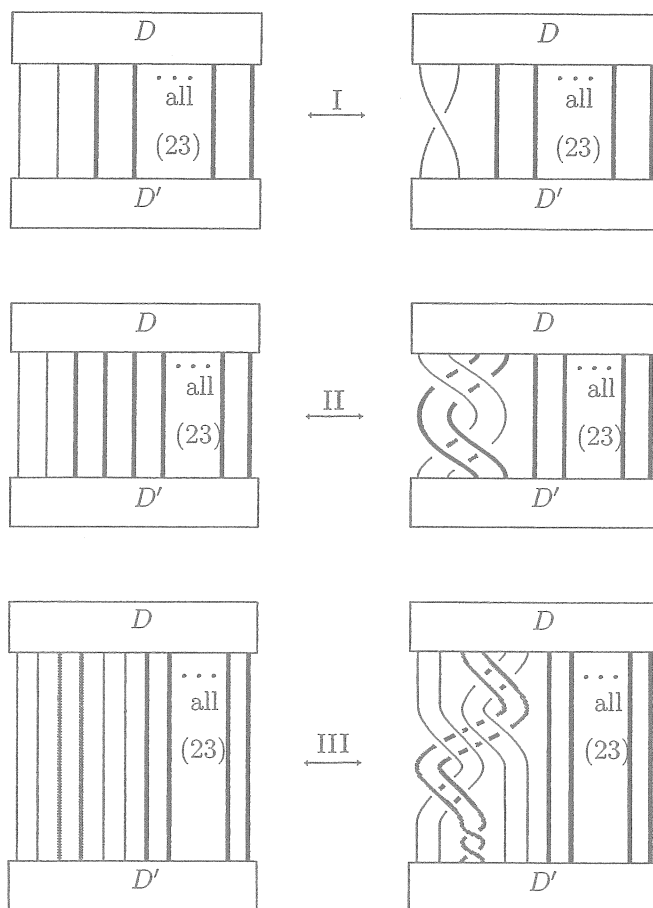


FIGURE 4. covering move. D と D' はそれぞれ図式の一部である

証明の方針. 図式の coloring が与えられると表現 $\pi_1(M) \rightarrow G$ を得る. この表現を使って, coloring の数が Reidemeister move, 3-move, covering move と互換の入れかえで不変となることを示す. \square

命題 3.3. M を向きづけられた 3次元閉多様体, D をその互換つき図式とし, G を有限群とすると,

$$\#\{D \text{ の } G \text{ による coloring}\} = |G|^2 \cdot \#\{\text{表現 } \pi_1(M) \rightarrow G\}.$$

図式の coloring を使ってより細かい不変量を構成したい. A をアーベル群 (乗法) とする. coloring χ が与えられた互換つき図式 D に対して, color つき交点 τ の重み $X(\tau; \chi) \in A$ が以下の条件を満たすとき,

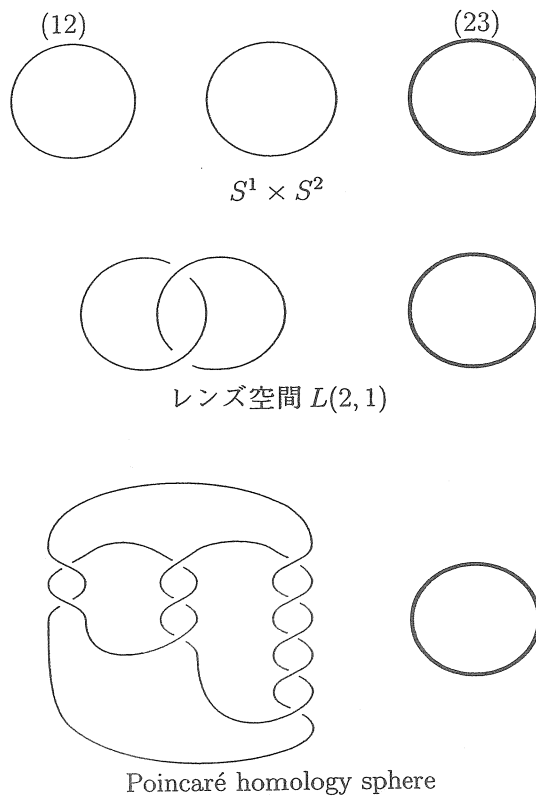


FIGURE 5. covering 表示の例

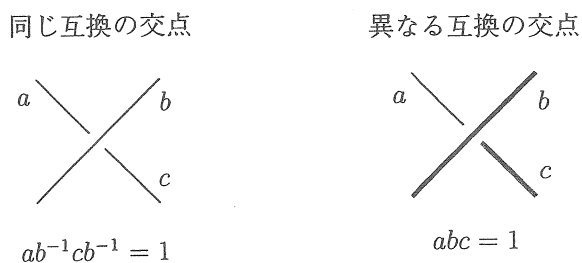


FIGURE 6. 互換つき図式の coloring

条件. 任意の coloring χ について $\prod_{\tau; \text{交点}} X(\tau; \chi)$ が各 move と互換の入れかえで不変となる.

次の状態和の値は 3 次元多様体の不変量である;

$$\sum_{\substack{\chi; \\ \text{coloring}}} \prod_{\substack{\tau; \\ \text{交点}}} X(\tau; \chi) \in \mathbb{Z}[A].$$

この式で積は図式の全ての交点を取り，和は図式において可能な全ての coloring を取る。

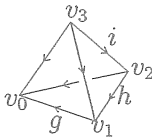
4. DIJKGRAAF-WITTEN 不変量の再構成

前章の条件を満たす color つき交点の重み X で，状態和として定義される不変量が Dijkgraaf-Witten 不変量となるものを与える。

Dijkgraaf-Witten 不変量を復習する。向きづけられた 3 次元閉多様体 M に単体分割 T を与える。 T の頂点の集合に順序を与え，これにより各辺に向きを定める。単体分割 T の有限群 G による coloring とは，写像 $\{T \text{ の向きづけられた辺} \} \rightarrow G$ で，任意の辺 E に対し向きを逆にしたものを $-E$ とすると $((-E) \text{ の color}) = (E \text{ の color})^{-1}$ であり，また Figure 7 の条件を満たすものとする。次に群の 3-cocycle を使って，color つき 4 面体の重みを定義する。 A をアーベル群 (乗法) として，写像 $\theta : G \times G \times G \rightarrow A$ が群の 3-cocycle であるとは，任意の G の元 x, y, z, w について

$$\theta(y, z, w) \cdot \theta(xy, z, w)^{-1} \cdot \theta(x, yz, w) \cdot \theta(x, y, zw)^{-1} \cdot \theta(x, y, z) = 1$$

が成り立つときをいう。 BG を G の分類空間とすると，1 次のユニタリ群 $U(1) (\cong \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ について $\text{Hom}(C_n(BG, \mathbb{Z}), U(1))$ から $C^n(G, U(1))$ への写像が定義され，この写像は $H^n(BG, U(1))$ から $H^n(G, U(1))$ への同型写像を導く。この写像による θ の引き戻しも θ と書くことにする。 $\theta \in Z^3(BG, U(1))$ に関する color つき 4 面体の重み W_θ を，

$$W_\theta \left(\begin{array}{c} v_3 \\ \swarrow \quad \searrow \\ v_0 \quad v_1 \\ \swarrow \quad \searrow \\ v_2 \end{array} \right) = \theta([g|h|i])^\varepsilon, \quad (\text{但し } v_0 < v_1 < v_2 < v_3)$$


と定義する。ここで $g, h, i \in G$ はそれぞれ辺 $\langle v_0, v_1 \rangle, \langle v_1, v_2 \rangle, \langle v_2, v_3 \rangle$ の color であり， $[g|h|i]$ は g, h, i で定義される分類空間 BG の 3-cell である。 $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ は辺の向きによって与えられる 4 面体の向きと M の向きが同調するときは 1，そうでないときは -1 とする。Dijkgraaf-Witten 不変量は次の状態和で定義される [1]；

$$Z_\theta(M) = \frac{1}{|G|^N} \sum_{\text{coloring}} \prod_{\text{4 面体}} W_\theta \left(\begin{array}{c} \text{tetrahedron} \end{array} \right); \text{coloring} \in \mathbb{C}.$$

N は頂点の個数である。積は単体分割 T の全ての 4 面体を取り，和は T において可能な全ての coloring をとる。 $Z_\theta(M)$ は単体分割の頂点の順序のとり方と単体分割の与え方によらず，また $\partial M = \emptyset$ なので θ の

コホモロジー類にのみ依存する [9]. なお $Z_\theta(M)$ は M の基本類 $[M]$ を使って,

$$Z_\theta(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{\text{表現 } \gamma: \pi_1(M) \rightarrow G} \langle \gamma^*[\theta], [M] \rangle$$

とも表せる. ここで $[\theta]$ は $H^3(BG, U(1))$ のコホモロジー類である. また γ^* は, 表現 γ と対応する分類写像 $M \rightarrow BG$ から導かれる写像 $H^3(BG, U(1)) \rightarrow H^3(M, U(1))$ である.

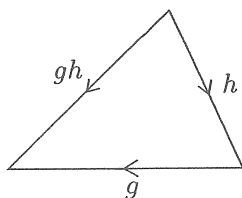


FIGURE 7. 単体分割の coloring

covering 表示を使ってこの不変量を再構成する.

定義 4.1. 互換つき図式に有限群 G による coloring が与えられているとする. このとき図式の coloring から定まる領域の coloring とは, 平面上の図式の補空間の各領域に次の条件を満たすように $G \times G \times G$ の元を与えることである. この coloring は図式の coloring から一意に定まり, 各交点のまわりで矛盾なく定義される.

1. 無限遠点を含む領域は $[1, 1, 1]$.
2. 各 arc でへだてられた 2 つの領域には Figure 8 の関係が成り立つ.

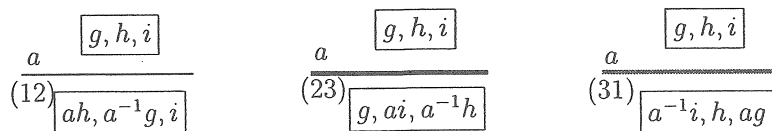


FIGURE 8. 領域の coloring

互換つき図式の coloring と領域の coloring, 群の 3-cocycle θ を使って color つき交点の重み X_θ を定義する;

$$X_\theta \left(\begin{array}{c|c} \boxed{g, h, i} & b \\ \hline a & \text{---} \end{array} \right) = \theta(a, a^{-1}b, b^{-1}g) \cdot \theta(b, b^{-1}a, h) \\ \cdot \theta(ba^{-1}b, b^{-1}a, a^{-1}g) \cdot \theta(b, a^{-1}b, b^{-1}ah),$$

$$X_\theta \left(\begin{array}{c|c} \boxed{g, h, i} & b \\ \hline a & \text{---} \end{array} \right) = \theta(a^{-1}, ab, b^{-1}h) \cdot \theta(a^{-1}, g, g^{-1}ab).$$

定理 4.2. 群の 3-cocycle $\theta \in Z^3(G, U(1))$ が G の任意の元 x, y について,

1. $\theta(1, x, y) = \theta(x, 1, y) = \theta(x, y, 1) = 1$ と
2. $\theta(x, x^{-1}, y) = \theta(x, y, y^{-1}) = 1$

を満たすとき, 図式の任意の coloring χ について $\prod_{\tau; \text{交点}} X_\theta(\tau; \chi)$ が各 move と互換の入れかえで不変となる. 従って 3次元多様体の不変量

$$\sum_{\substack{X_i \\ \text{coloring}}} \prod_{\substack{\tau_i \\ \text{交点}}} X_\theta(\tau; \chi) \in \mathbb{C}$$

を得る.

定理 4.2 の θ の条件 1 は θ を $H^3(G, U(1))$ のコホモロジー類として normalize するものであり, 本質的な条件ではない.

命題 4.3. M の Dijkgraaf-Witten 不変量 $Z_\theta(M)$ について次の式が成り立つ.

$$\sum_X \prod_\tau X_\theta(\tau; \chi) = |G|^3 Z_\theta(M)$$

命題 4.3 により, Dijkgraaf-Witten 不変量が不変量となることの別証明が与えられたことになる.

5. 具体例の計算

3次元多様体の単体分割を用いて定義された Dijkgraaf-Witten 不変量が, 平面上の図式を使って組み合わせ的に計算できるようになった. より簡単になった不変量の計算例をいくつか挙げる.

例 1. レンズ空間 $L(5, 1)$ と $L(5, 2)$. $G = \mathbb{Z}_5 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ (加法) として 3-cocycle $\theta_5 \in Z^3(\mathbb{Z}_5, U(1))$ をとると (詳しくは [2] 参照),

$$Z_{\theta_5}(L(5, 1)) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} e^{\frac{4\pi\sqrt{-1}}{5}} + \frac{2}{5} e^{\frac{6\pi\sqrt{-1}}{5}},$$

$$Z_{\theta_5}(L(5,2)) = \frac{1}{5} + \frac{2}{5}e^{\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}} + \frac{2}{5}e^{\frac{8\pi\sqrt{-1}}{5}}.$$



FIGURE 9. $L(5,1)$ の covering 表示

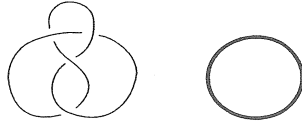


FIGURE 10. $L(5,2)$ の covering 表示

例 2. 一般に Figure 11 のような covering 表示を持つ 3次元多様体 M の場合, $G = \mathbb{Z}_5$ として例 1 と同じ 3-cocycle θ_5 について

$$Z_{\theta_5}(M) = \frac{1}{5} \sum_{(a_1, \dots, a_{n-1}) \in (\mathbb{Z}_5)^{n-1}} \exp\left(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{5}(f(a_1) + \dots + f(a_{n-1}) + f(-a_1 - \dots - a_{n-1}))\right).$$

ここで $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5, f(0) = 0, f(1) = f(4) = 3, f(2) = f(3) = 2$ とする.

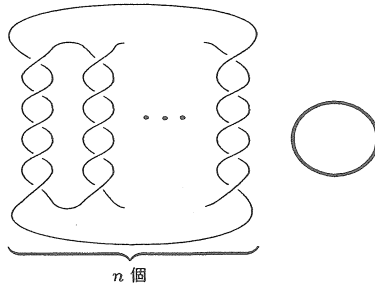


FIGURE 11. $(5, 5, \dots, 5)$ 型の Seifert 多様体の covering 表示

6. X_θ のアイデア

4章で与えた color つき交点の重み X_θ を得るアイデアについて解説する. 方針としては, 互換つき図式から得られる simple な 3重分岐被覆 $p: M \rightarrow S^3$ を経て M を単体分割し, 有限群による coloring を与えて Dijkgraaf-Witten 不変量を計算する. うまく単体分割を与えて図式

の各交点に対しいくつかの4面体を割り当てられるようにする。以下にその方法を述べる。

図式が球面 S^2 上にあるとみて、図式の大対グラフで S^2 を分割する (Figure 12). この球面が S^3 内にあるとみて、球面の外側と内側にできる2つの3次元ボール内にそれぞれ点 P と点 Q をとる。2点 P, Q と大対グラフの各頂点を結び、Figure 13 のようなバナナ型の細長い3次元ボールを得る。これで S^3 のバナナによる分割が与えられた。

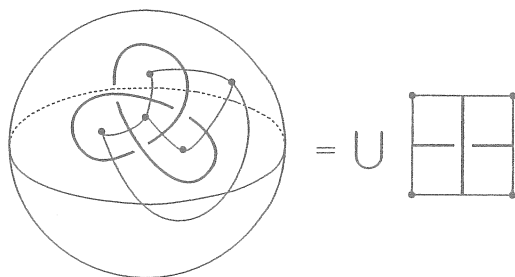


FIGURE 12. S^2 を交点で分割する

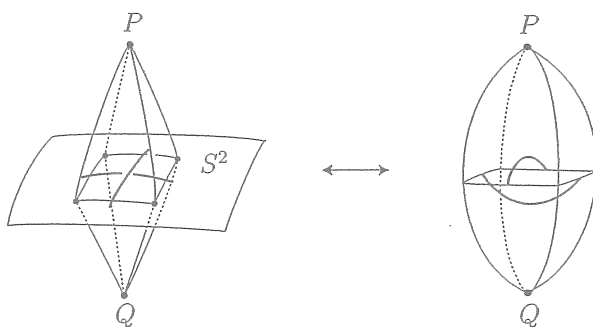
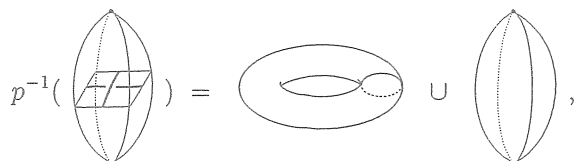


FIGURE 13. S^2 上の各交点に S^3 内のバナナを対応させる

次に各バナナの p による逆像をみる。バナナは図式の交点と対応しており、交点には同じ互換、異なる互換の2種類あった。同じ互換の交点と対応するバナナの逆像は solid torus とバナナが1つずつ、異なる互換の交点と対応するバナナの逆像はひとつの3次元ボールである；



$$p^{-1}\left(\text{図式の交点}\right) = \text{球}$$

従って

$$\begin{aligned} M = p^{-1}(S^3) &= p^{-1}\left(\bigcup_{\text{図式の交点}} \text{図式}\right) = \bigcup_{\text{図式の交点}} p^{-1}(\text{図式}) \\ &= \bigcup_{\text{同じ互換の交点}} (\text{バナナ} \cup \text{球}) \cup \bigcup_{\text{異なる互換の交点}} \text{球} \end{aligned}$$

M の単体分割は、各 solid torus, バナナと 3次元ボールを単体分割することにより与えられるが、交点の張り合わせに従ってそれぞれを張り合わせるときに整合性のある分割を与える必要がある。solid torus の単体分割は、まず分岐集合が辺になるようにバナナを単体分割し (Figure 14), これを 2つ用意して分岐集合のまわりで 2重被覆になるように 4 面体を張り合わせる。バナナとボールについては、Figure 14 のバナナの分割から表面の分割だけを取り出し、これを使ってそれぞれの表面の単体分割を作る (Figure 15)。さらに内点をひとつ頂点に加えて表面上の各頂点とつなぎ、錐状の単体分割を作る。以上で図式の各交点にいくつかの 4 面体が割り当てられるような単体分割が得られた。



FIGURE 14. バナナの単体分割. これを 2つ用意して solid torus の単体分割を得る

この単体分割に coloring を与える。図式の coloring は表現 $\pi_1(M) \rightarrow G$ と対応していたが (命題 3.3), 単体分割の coloring にもこの表現との対応がある。そこで図式の coloring から単体分割の coloring を 1つ作ることを考える。ここで定義 4.1 で与えられた, 図式の coloring から一意に

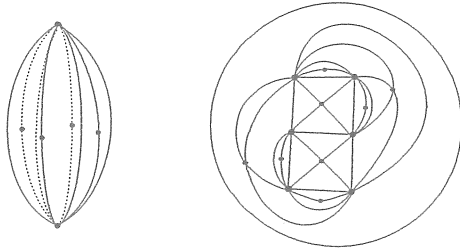


FIGURE 15. バナナ(左)とボール(右)の表面の単体分割. 内点を1つ取り表面上の各頂点とつないで中身の単体分割に拡張する

定まる領域の coloring を使う. 図式の領域は, Figure 13 の P と Q をつなくバナナの辺と対応し, バナナの辺は solid torus, バナナとボールの表面の単体分割の一部となる. 従って領域の coloring から, 整合性のある単体分割の color が定まり (Figure 16,17), この color を内部に拡張することで M の単体分割の coloring を得る. この coloring について交点に割り当てられたいくつかの4面体の Dijkgraaf-Witten 不変量の重みを計算することにより, 図式の color つき交点の重み X_θ を得る.

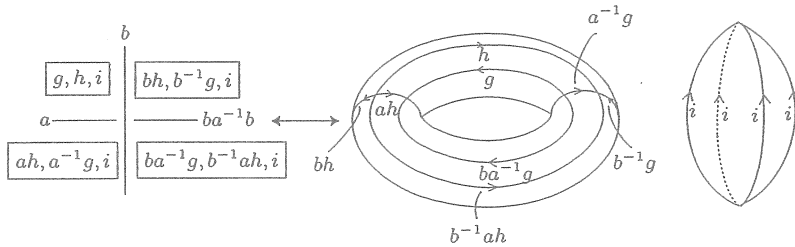


FIGURE 16. 同じ互換の交点と対応する, solid torus とバナナの coloring(一部). 領域の coloring が単体分割の coloring を定める

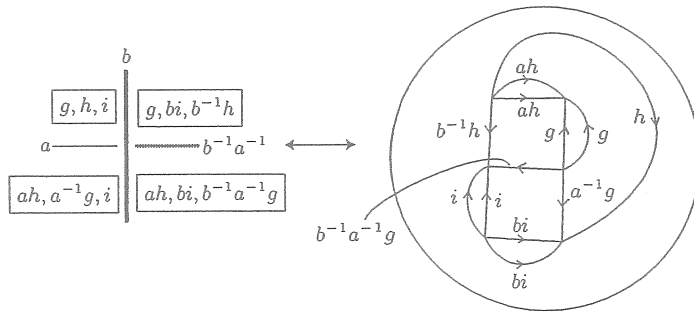


FIGURE 17. 異なる互換の交点と対応する 3次元ボールの coloring(一部)

REFERENCES

- [1] R. Dijkgraaf and E. Witten, Topological gauge theories and group cohomology, *Comm. Math. Phys.* **129** (1990) 393–429.
- [2] E. Hatakenaka, Invariants of 3-manifolds derived from covering presentations, in preparation.
- [3] H. M. Hilden, Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3 , *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974) 1243–1244.
- [4] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I, *Topology* **31** (1992) 203–230.
- [5] J. M. Montesinos, A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3 , *Bull. Amer. Math. Soc.* **80** (1974) 845–846.
- [6] R. Piergallini, Covering moves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **325** (1991) 903–920.
- [7] N. Reshetikhin and V.G. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, *Invent. Math.* **103** (1991) 547–597.
- [8] V.G. Turaev and O.Y. Viro, State sum invariants of 3-manifolds and quantum $6j$ -symbols, *Topology* **31** (1992) 865–902.
- [9] M. Wakui, On Dijkgraaf-Witten invariant for 3-manifolds, *Osaka J. Math.* **29** (1992) 675–696.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, 2-12-1, O-OKAYAMA, MEGURO-KU, TOKYO, 152-8550, JAPAN

E-mail address: hataken0@is.titech.ac.jp

TOPOLOGICAL SYMMETRY GROUPS

ERICA FLAPAN

The motivation for this subject originally came from the problem of how to analyze the symmetries of non-rigid molecules. This is an important problem since the symmetries of a molecule determine many of its chemical properties. Chemists have defined the *point group* of a molecule to be the group of rigid symmetries of its molecular graph in \mathbf{R}^3 . While this is a very useful tool for rigid structures, molecules which are flexible or partially flexible may have symmetries which are not induced by a rigid motion of the molecular graph in space. For example, the molecule illustrated in Figure 1 has a propeller at the top which rotates independently of the rest of the molecule. The rotation of this propeller is a molecular symmetry which cannot be induced by a rigid motion of the molecular graph in space.

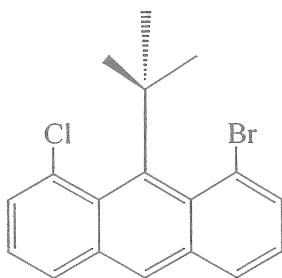


FIGURE 1. A molecule with a non-rigid symmetry

Building on the idea of the point group, Jon Simon [Si] introduced the *topological symmetry group* in order to study the symmetries of non-rigid molecules. This group gives us a way to understand not only the symmetries of molecular graphs, but the symmetries of any graph embedded in \mathbf{R}^3 or S^3 .

Before giving a formal definition of the topological symmetry group, we consider an example. Let Γ denote the embedded graph which is illustrated in Figure 2. If we consider this graph as a rigid object, it has no symmetries. But as a flexible structure, we see that it has 'wheels' with 2, 3, and 4 spokes respectively, which can each spin independently. We want the topological

Date: May 28, 2004.

symmetries of an embedded graph to include such rotations of parts of a graph.

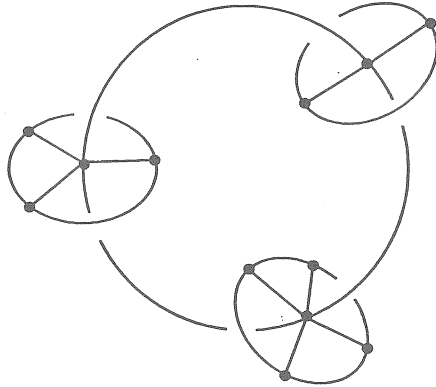


FIGURE 2. The embedded graph Γ has "wheels" which can rotate independently

In order to define the topological symmetry group we begin by recalling the following definition from graph theory.

Definition 1. *An automorphism of an abstract graph γ is a permutation of the vertices which preserves adjacency. We define $\text{Aut}(\gamma)$ as the group of automorphisms of γ .*

For example, let γ denote the abstract graph underlying the embedded graph Γ illustrated in Figure 2. Then there are automorphisms of γ which (abstractly) rotate or reflect each individual wheel. Thus $\text{Aut}(\gamma) = D_2 \times D_3 \times D_4$, where D_n represents the dihedral group with $2n$ elements. However, when we consider the symmetries of the graph Γ embedded in S^3 we only allow those automorphisms which can be induced by a diffeomorphism of the pair (S^3, Γ) (i.e. a diffeomorphism of S^3 which takes Γ to itself). More formally, we make the following definition.

Definition 2. *Let Γ be a graph embedded in S^3 with underlying abstract graph γ . The Topological Symmetry Group of Γ , $\text{TSG}(\Gamma)$, is the subgroup of $\text{Aut}(\gamma)$ consisting of those automorphisms induced on Γ by some diffeomorphism of (S^3, Γ) . Allowing only orientation preserving diffeomorphisms defines $\text{TSG}_+(\Gamma)$.*

It follows from this definition that $\text{TSG}_+(\Gamma)$ consists of those automorphisms of Γ which are induced on Γ by a deformation of S^3 . Observe that for any graph Γ which is embedded in S^3 , either $\text{TSG}_+(\Gamma) = \text{TSG}(\Gamma)$ or $\text{TSG}_+(\Gamma)$ is a normal subgroup of $\text{TSG}(\Gamma)$ with index two. We focus here on $\text{TSG}_+(\Gamma)$.

First we consider the embedded graph Γ which is illustrated in Figure 2. As there is no deformation of Γ which induces a reflection of any of the wheels, $\text{TSG}_+(\Gamma) = \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4$. On the other hand, there is a reflection of S^3 which reflects all three wheels simultaneously. Hence $\text{TSG}(\Gamma)$ is the semi-direct product $(\mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_4) \rtimes \mathbf{Z}_2$.

We see as follows that we can generalize the construction in Figure 2 to obtain embedded graphs which have orientation preserving topological symmetry groups equal to any finite abelian group. Consider a finite abelian group $\mathbf{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{n_k}$. Let Γ be an embedded graph that is analogous to the one in Figure 2, but contains k wheels with n_1, n_2, \dots, n_k spokes respectively. If all the values of the n_i are distinct, then $\text{TSG}_+(\Gamma) = \mathbf{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{n_k}$. Otherwise, we tie knots in the spokes of each wheel so that all of the spokes on a given wheel contain the same knot and the spokes on distinct wheels contain distinct knots. These knots guarantee that no diffeomorphism of S^3 takes one wheel of Γ to another. Hence again $\text{TSG}_+(\Gamma) = \mathbf{Z}_{n_1} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{n_k}$.

Not only can every finite abelian group occur as a topological symmetry group, but every symmetric group can occur as a topological symmetry group as well. In particular, let S_n be a symmetric group and let Θ_n denote the embedded graph illustrated in Figure 3, where each black ellipse represents an identical non-invertible knot. These non-invertible knots prevent $\text{TSG}_+(\Theta_n)$ from containing any automorphism which interchanges the vertices v and w . Since any transposition $(x_i x_j)$ can be achieved by a deformation of Θ_n in S^3 , $\text{TSG}_+(\Theta_n) = S_n$.

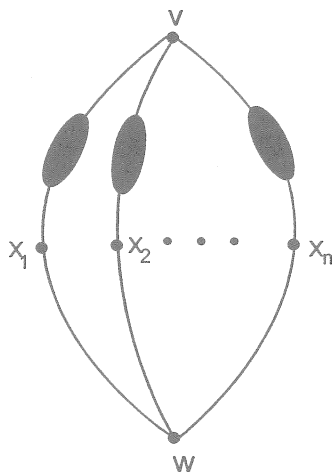


FIGURE 3. $\text{TSG}_+(\Theta_n) = S_n$

We are interested in the general question of what groups can occur as orientation preserving topological symmetry groups of some graph embedded in S^3 . In 1938, Frucht [Fr] proved that for every finite group H , there is a

finite connected graph γ with $\text{Aut}(\gamma) = H$. It is natural to wonder whether the same is true for topological symmetry groups. That is, for every finite group H , is there a graph Γ embedded in S^3 with $\text{TSG}_+(\Gamma) = H$? In [FNPT] we answer this question in the negative. In fact, we prove the following theorem which gives us strong restrictions on what groups can occur as topological symmetry groups.

Theorem 1 ([FNPT]). *Let Γ be a graph embedded in S^3 .*

- a) If $\text{TSG}_+(\Gamma)$ is a simple group, then it is either the alternating group A_5 or a cyclic group of prime order.*
- b) In general, the sequence of quotient groups in any composition series for $\text{TSG}_+(\Gamma)$ contains only alternating groups A_n with $n \geq 5$ and cyclic groups of prime order.*

In particular, it follows from this theorem that no alternating group A_n with $n > 5$ can occur as either $\text{TSG}_+(\Gamma)$ or $\text{TSG}(\Gamma)$ for any graph embedded in S^3 .

It is also natural to consider the relationship between topological symmetry groups and finite groups of orientation preserving diffeomorphisms of S^3 . Let $\text{Diff}_+(S^3)$ denote the group of orientation preserving diffeomorphisms of S^3 . Since not all finite abelian groups and symmetric groups are subgroups of $\text{Diff}_+(S^3)$, the examples illustrated in Figure 2 and Figure 3 show that not all orientation preserving topological symmetry groups are isomorphic to subgroups of $\text{Diff}_+(S^3)$. In particular, we can see that if Γ is one of the graphs in these examples then none of the non-trivial elements of $\text{TSG}_+(\Gamma)$ can be induced by a finite order diffeomorphism of S^3 . However, we will see below that these two embedded graphs are special. We begin with a definition.

Definition 3. *A graph γ is said to be 3-connected if at least three vertices and their incident edges must be removed in order to disconnect γ or reduce γ to a single vertex.*

The examples illustrated in Figure 2 and Figure 3 are not 3-connected since each can be disconnected by removing only 2 vertices. In contrast with Figures 2 and 3, graphs which are 3-connected have the property that no part of the graph can rotate independently of the rest of the graph. It is therefore tempting to think that if Γ is a 3-connected embedded graph then every automorphism in $\text{TSG}_+(\Gamma)$ can be induced by some finite order diffeomorphism of S^3 . However, the example illustrated in Figure 4 shows that this is not the case.

In particular, let Γ be the embedded graph in Figure 4. By examination we see that $\text{TSG}_+(\Gamma) = D_6$ generated by the automorphisms (56)(23) and (153426). The automorphism (56)(23) is induced by turning the graph over, and the automorphism (153426) is induced by slithering the graph along itself and interchanging the two figure eight knots. However, there is no order 6 diffeomorphism of S^3 which takes a figure eight knot to itself (see

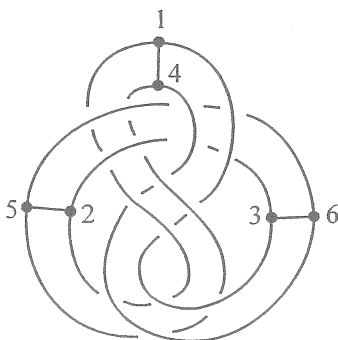


FIGURE 4. Not all elements of $\text{TSG}_+(\Gamma)$ are induced by finite order diffeomorphisms

[Ha] and [Mu] together with the proof of the Smith Conjecture [MB]). Hence (153426) cannot be induced by a finite order diffeomorphism of S^3 . Thus $\text{TSG}_+(\Gamma)$ is not induced by a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$. On the other hand, as an abstract group $\text{TSG}_+(\Gamma) = D_6$ is isomorphic to a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$. In [FNPT], we prove a similar result for all 3-connected graphs.

Theorem 2 ([FNPT]). *Let $H = \text{TSG}_+(\Gamma)$ for some 3-connected graph Γ embedded in S^3 . Then H is isomorphic to a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$. Furthermore, Γ can be re-embedded in S^3 as Δ such that H is a subgroup of $\text{TSG}_+(\Delta)$ and $\text{TSG}_+(\Delta)$ is induced by an isomorphic subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$.*

From this theorem we know that we can re-embed the graph Γ illustrated in Figure 4 so that the group of automorphisms D_6 will now be induced by a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$. The re-embedding Δ is in the form of a cylindrical ladder (see Figure 5). It is not hard to see that both the automorphisms (56)(23) and (153426) are induced on Δ by glide rotations of S^3 . Thus $\text{TSG}_+(\Delta) = D_6$ is induced by an isomorphic subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$.

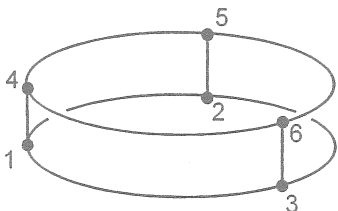


FIGURE 5. $\text{TSG}_+(\Delta)$ is induced by a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$

In [FNPT] we also prove the following converse to Theorem 2.

Theorem 3 ([FNPT]). *For every finite subgroup G of $\text{Diff}_+(S^3)$, there is a 3-connected graph Γ embedded in S^3 such that $G \cong \text{TSG}_+(\Gamma)$. Moreover, Γ can be chosen to be a complete bipartite graph $K_{n,n}$ for some n .*

Recall from graph theory that a *complete bipartite graph*, $K_{n,n}$, consists of two sets of vertices V and W each containing n points, such that every vertex in V is joined to every vertex in W by an edge and there are no other edges in the graph. For example, Figure 6 illustrates the abstract graph $K_{3,3}$.

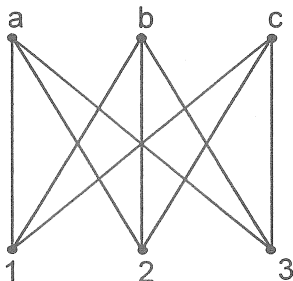


FIGURE 6. $K_{3,3}$

Observe that $K_{1,1}$ is a line segment and hence for any embedding Γ of $K_{1,1}$, $\text{TSG}_+(\Gamma) = \text{Aut}(K_{1,1}) = \mathbf{Z}_2$. Since $K_{2,2}$ is a square, if Γ is an embedding of $K_{2,2}$ containing a non-invertible knot then $\text{TSG}_+(\Gamma) = \mathbf{Z}_4$, and if Γ is any other embedding of $K_{2,2}$ then $\text{TSG}_+(\Gamma) = D_4 = \text{Aut}(K_{2,2})$. For $n \geq 3$, the complete bipartite graph $K_{n,n}$ is 3-connected. Thus it follows from Theorems 2 and 3 that for any finite group G , there is an embedding Γ of some $K_{n,n}$ with $G \cong \text{TSG}_+(\Gamma)$ if and only if G is isomorphic to a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$.

Theorems 2 and 3 imply that the set of orientation preserving topological symmetry groups of 3-connected embedded graphs in S^3 is exactly the set of finite subgroups of $\text{Diff}_+(S^3)$. However, it is not known precisely what all the finite subgroups of $\text{Diff}_+(S^3)$ are. Recall that $SO(4)$ denotes the group of orientation preserving isometries of S^3 . The finite subgroups of $\text{Diff}_+(S^3)$ consist of the finite subgroups of $SO(4)$, possibly together with the Milnor groups $Q(8k, m, n)$, in the case where the subgroup acts freely on S^3 (see [DV] for the finite subgroups of $SO(4)$, and [Mi] and [Zi] for groups that could act freely on S^3). We note that Thurston's geometrization program [Th] would imply that the groups $Q(8k, m, n)$ do not occur, and hence the finite subgroups of $\text{Diff}_+(S^3)$ would be precisely the same as the finite subgroups of $SO(4)$.

The proofs of Theorems 1 and 2 are quite long and technical. The main idea of both proofs is to consider the complement of a neighborhood of a graph Γ embedded in S^3 , and use the Characteristic Submanifold Theorem

of Jaco-Shalen [JS] and Johannson [Jo] for pared manifolds to break the complement into pieces which are simple (i.e. have no incompressible tori or annuli), Seifert fibered (i.e. fibered by circles), or I -fibered. We then analyze the effect of $\text{TSG}_+(\Gamma)$ on each of these pieces, and use this to draw conclusions about the group $\text{TSG}_+(\Gamma)$.

In order to prove Theorem 3 we start with a finite subgroup G of $\text{Diff}_+(S^3)$, and construct a graph in the orbit space S^3/G which we then lift to obtain a graph Γ embedded in S^3 such that $\text{TSG}_+(\Gamma)$ is induced by G and $\text{TSG}_+(\Gamma) \cong G$.

Theorems 2 and 3 characterize orientation preserving topological symmetry groups for embedded 3-connected graphs, and Theorem 1 gives strong restrictions on what groups can occur as the topological symmetry group of an arbitrary embedded graph. We now consider what orientation preserving topological symmetry groups can occur for the special class of complete graphs. A *complete graph on n vertices*, K_n , consists of n vertices and an edge between every pair of vertices. This is an interesting class of graphs to consider because $\text{Aut}(K_n) = S_n$ is the largest possible group of automorphisms of any graph containing exactly n vertices. However, we see as follows that not all subgroups of $\text{Aut}(K_n)$ can occur as topological symmetry groups. In fact, even the group S_n cannot always occur as $\text{TSG}_+(\Gamma)$ for some embedding of K_n in S^3 . For $n = 2, 3$, and 4, we can obtain $\text{TSG}_+(\Gamma) = S_n$ by embedding K_n as a line segment, a triangle, and the 1-skeleton of a tetrahedron, respectively. It is easy to see that the orientation preserving topological symmetry groups of a line segment and a triangle are $S_2 = \mathbb{Z}_2$, and $S_3 = D_3$, respectively. For the tetrahedron, let Γ denote the 1-skeleton of a tetrahedron. Observe that any transposition of the vertices of Γ can be induced by pulling one vertex through the triangle made by the other three vertices and then rotating the tetrahedron back to its original position. In Figure 7 we illustrate the deformation inducing the transposition (23).

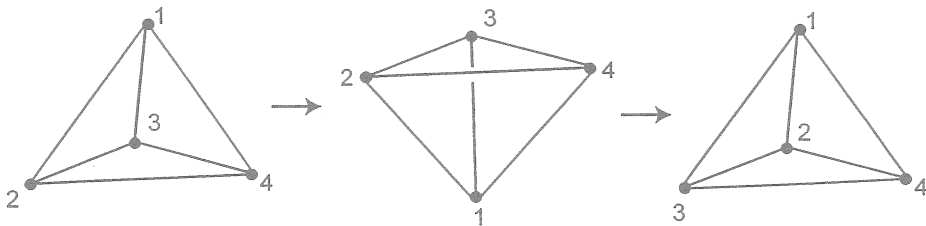


FIGURE 7. To obtain (23) pull vertex 1 down and turn the graph over

In contrast with the above cases, for $n \geq 5$ we can prove as follows that if Γ is any embedding of K_n in S^3 , then $\text{TSG}_+(\Gamma) \neq S_n$. The proof makes use of P. A. Smith's [Sm] characterization of the fixed point sets of finite order homeomorphisms of homology spheres. In particular, Smith showed that

the fixed point set, $\text{fix}(g)$, of any non-trivial orientation preserving finite order homeomorphism g of S^3 is either empty or homeomorphic to S^1 . This result is a useful tool, which we refer to as *Smith theory*.

Lemma 1. *Let $n \geq 5$, and let Γ be an embedding of K_n in S^3 . Then $\text{TSG}_+(\Gamma) \neq S_n$.*

Proof. Suppose $\text{TSG}_+(\Gamma) = S_n$. Since $n \geq 5$, K_n is 3-connected. By Theorem 2 we can re-embed Γ as Δ such that $S_n = \text{TSG}_+(\Delta)$ is induced by a finite subgroup G of $\text{Diff}_+(S^3)$. Now let $\phi \in \text{TSG}_+(\Delta)$ be the transposition (vw) . Since $n \geq 5$, ϕ fixes at least three vertices x_1, x_2 and x_3 . Let $g \in G$ induce ϕ . Since g has finite order, g pointwise fixes the edges between x_1, x_2 and x_3 . Also since g interchanges v and w , g fixes a point on the edge joining v and w . But now g pointwise fixes a simple closed curve together with an additional point. This contradicts Smith theory. Hence $\text{TSG}_+(\Gamma) \neq S_n$. \square

Consider the embedding Γ of K_5 illustrated in Figure 8. We can deform Γ so that it looks like a tetrahedron with any of the vertices in the center. From this observation it is not hard to see that $\text{TSG}_+(\Gamma) = A_5$.

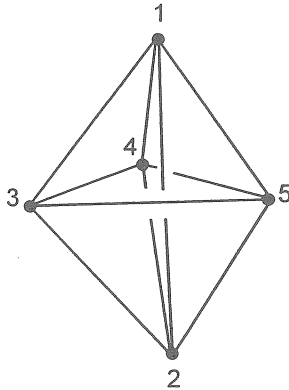


FIGURE 8. $\text{TSG}(\Gamma) = S_5$ and $\text{TSG}_+(\Gamma) = A_5$

It follows from Theorem 1 that for any $n > 5$, if Γ is any embedding of K_n in S^3 , then $\text{TSG}_+(\Gamma) \neq A_n$.

In [FNT], we prove the following characterization of those groups which can be the topological symmetry group of some embedding of a complete graph.

Theorem 4 ([FNT]). *A finite group H is $\text{TSG}_+(\Gamma)$ for an embedding Γ of some K_n in S^3 if and only if H is isomorphic to a finite subgroup of either $SO(3)$ or $D_m \times D_m$ for some odd m .*

Recall that $SO(3)$ is the group of orientation preserving isometries of a 2-sphere; and the finite subgroups of $SO(3)$ are the finite cyclic groups, the

dihedral groups, and the orientation preserving symmetries of the platonic solids (the tetrahedron, the octahedron, and the dodecahedron). The group of orientation preserving symmetries of the tetrahedron, octohedron, and dodecahedron are isomorphic to A_4 , S_4 , and A_5 , respectively. We already saw examples of embedded complete graphs which have orientation preserving topological symmetry groups equal to S_4 and A_5 . In [FNT] we give constructions of embeddings of complete graphs which have orientation preserving topological symmetry groups equal to each of the groups listed in Theorem 4.

The idea of the proof of Theorem 4 is as follows. We begin by using [FNPT] together with Thurston's Orbifold Theorem ([BP] [BLP] [CHK]) to prove that without loss of generality we only need to consider those embeddings Γ of K_n such that $\text{TSG}_+(\Gamma)$ is induced by an isomorphic group of orientation preserving isometries of S^3 . Furthermore, for every such embedding Γ of a complete graph in S^3 , the involutions in $\text{TSG}_+(\Gamma)$ must satisfy a key condition given by the following Lemma.

Lemma 2. *Let Γ be an embedding of K_n with $n \geq 4$, and let G be a finite subgroup of $\text{Diff}_+(S^3)$ which leaves Γ setwise invariant. For every involution $g \in G$, $\text{fix}(g) \cong S^1$, and no $h \in G$ distinct from g satisfies $\text{fix}(h) = \text{fix}(g)$.*

The proof that the groups listed in Theorem 4 are the only ones possible, then proceeds by considering all finite subgroups G of $SO(4)$ that satisfy the condition specified by the conclusion of Lemma 2 and examining two separate cases, according to whether or not G preserves some Seifert fibration of S^3 . If G preserves a Seifert fibration of S^3 , then we can understand the action of G by analyzing it on the fibers and on the base space. If G preserves no Seifert fibration of S^3 , then we use the work of Dunbar [Du] to prove that G is isomorphic to the group of orientation symmetries of one of the platonic solids.

Theorem 4 provides a very specific list of exactly which groups can occur as orientation preserving topological symmetry groups of complete graphs embedded in S^3 . While Theorem 1 puts restrictions on which groups can occur as topological symmetry groups, it is still an open question to find a list of exactly which groups can occur as topological symmetry groups for arbitrary graphs embedded in S^3 .

REFERENCES

- [BLP] M. Boileau, B. Leeb, and J. Porti : *Uniformization of small 3-orbifolds*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **332** (2001), 57–62.
- [BP] M. Boileau and J. Porti : *Geometrization of 3-orbifolds of cyclic type*, Astérisque **272**, SMF Publications, Paris, 2001.
- [CHK] D. Cooper, C. Hodgson, and S. Kerckhoff : *Three-dimensional orbifolds and cone-manifolds*, Mathematical Society of Japan Memoirs **5**, Tokyo, 2000.
- [Du] W. D. Dunbar : *Nonfibering spherical 3-orbifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **341** (1994), 121–142.

- [DV] P. Du Val *Homographies, Quaternions and Rotations*, Oxford Mathematical Monographs, Clarendon Press, Oxford, 1964.
- [FNPT] E. Flapan, R. Naimi, J. Pommersheim, and H. Tamvakis : *Topological symmetry groups of embedded graphs in the 3-sphere*, preprint (2003).
- [FNT] E. Flapan, R. Naimi, and H. Tamvakis : *Topological symmetry groups of complete graphs in the 3-sphere*, preprint (2004).
- [Fr] R. Frucht : *Herstellung von graphen mit vorgegebener abstrakter Gruppe*, Compositio Math. **6** (1938), 239–250.
- [Ha] R. Hartley : *Knots with free period*, Canadian J. Math. **33** (1981), 91–102.
- [JS] W. Jaco and P. Shalen, *Seifert fibred spaces in 3-manifolds*, Memoirs Amer. Math. Soc., **220**, Amer. Math. Soc., Providence, 1979.
- [Jo] K. Johansson *Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Mathematics, **761**, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, 1979.
- [Mi] J. Milnor : *Groups which act on S^n without fixed points*, Amer. J. Math., **79** (1957), 623–630.
- [MB] J. Morgan and H. Bass : *The Smith Conjecture*, Academic Press, Orlando, 1984.
- [Mu] K. Murasugi : *On periodic knots*, Comment. Math. Helv. **46** (1971), 162–174.
- [Si] J. Simon : *A topological approach to the stereochemistry of nonrigid molecules*, Graph theory and topology in chemistry (Athens, GA, 1987), Stud. Phys. Theoret. Chem. **51**, 43–75, Elsevier, Amsterdam, 1987.
- [Sm] P. A. Smith : *Transformations of finite period II*, Annals of Math. **40** (1939), 690–711.
- [Th] W. Thurston : *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982), 357–381.
- [Zi] B. Zimmerman : *On finite simple groups acting on homology 3-spheres*, Topology Appl., **125** (2002) 199–202.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, POMONA COLLEGE, CLAREMONT, CA 91711, USA
 E-mail address: eflapan@pomona.edu

Small Cover のトポロジーと組合せ論

西村 保三

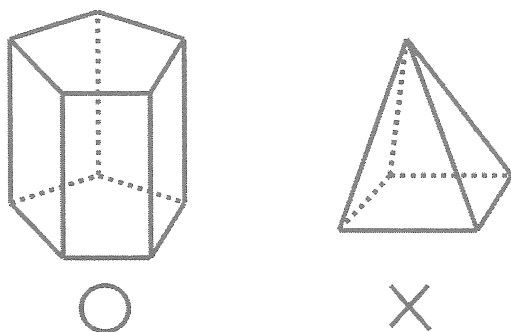
大阪市立大学数学研究所 COE 研究所員

1 はじめに

Davis-Januszkiewicz [4] で定義された Small Cover とは、群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ が作用する n 次元多様体で、軌道空間が単純凸多面体となっているもので、代数幾何におけるトーリック多様体の実部分に相当する概念である。Small Cover やトーリック多様体は、凸多面体、扇、彩色やグラフなど組合せ論の対象物と深く結びついており、多様体の位相的性質と、対応する多面体の組合せ論的性質との間の相互関係が注目されて、活発な研究が進められている。Small Cover については、多くの部分でトーリック多様体のアナロジーが成り立つので、トーリック多様体の研究に付随した形で並列的に扱われることが多いが、Small Cover 特有の問題もあり、トーリック多様体論における小さな一角を成している。本講演では、Small Cover に関する最近の研究の状況を紹介する。文献を挙げると、トーリック多様体論の一般的な教科書として、[6], [18], 特にトーラス作用のトポロジーと組合せ論の関係に焦点を当てて書かれた本として [1] がある。可換代数との関連では [19] を、凸多面体とグラフ理論の教科書として、[3], [7], [21] を挙げておく。

2 Small Cover

n 次元凸多面体 P が単純とは、全ての頂点がちょうど n 個の余次元 1 の面の交わりであるときをいう。言い換えると、 $\partial(P)$ の双対が、 $(n-1)$ 次元球面の単体分割になっていることである。例えば $n=3$ の時、角柱は単純だが、4 角錐は単純でない（下図）。なお本稿では、多面体は組合せ同値なものは同じものとして扱う。



定義 2.1 群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ が作用する n 次元多様体 M が *Small Cover* とは、軌道空間が (角付き多様体として) n 次元単純凸多面体 P と同相で、群作用が局所的に表現であるものをいう。 P 上の二つの *Small Cover* は、 $(\mathbb{Z}_2)^n$ の自己同型 θ が存在して、それらが θ -同変同相のときに同型とする。

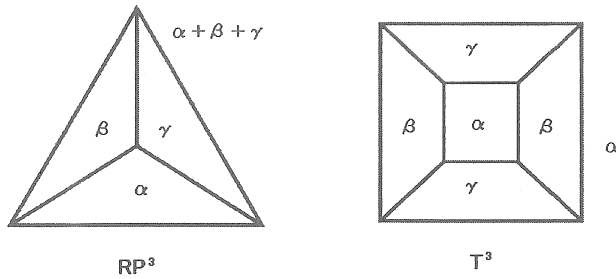
例 1. トーラス T^n は標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用の下で、 n 次元立方体 I^n 上の *Small Cover* である。

例 2. 実射影空間 $\mathbb{R}P^n$ は標準的 $(\mathbb{Z}_2)^n$ 作用の下で n 単体 Δ^n 上の *Small Cover* である。

単純凸多面体 P 上の *Small Cover* M に対して、表現写像と呼ばれる P の余次元 1 の面 (facet) の集合 \mathcal{F} 上の関数 $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ が対応する。 $\lambda(F)$ は、 F の内点の逆像の点の固定部分群の生成元である。表現写像は次の条件を満たし、 P の面彩色の一種になっている。なお P 上の二つの表現写像は、 $(\mathbb{Z}_2)^n$ の自己同型を経て可換の時、同じものとみなす。

(*) $F_1 \cap \dots \cap F_n \neq \emptyset$ ならば $\lambda(F_1), \dots, \lambda(F_n)$ は一次独立

定理 2.2 ([4]) 単純凸多面体 P 上の *Small Cover* は、 P 上の表現写像で分類される。



単純凸多面体 P 上の、表現写像 $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ を持つ *Small Cover* は $P \times (\mathbb{Z}_2)^n / \sim$ で構成される。ここで同値関係は、 $(x, s) \sim (y, t) \Leftrightarrow x = y, s \equiv t \pmod{\lambda(F)} (x \in F)$ で与えられる。

Small Cover の概念は、底空間を凸多面体よりも広い圏に拡張したり、少し違った定義で考えられることもある。凸とは限らない一般の単純多面体を、 n 次元角付き多様体 P で、面分割の双対複体が $\partial(P)$ の単体分割 (ないし単体的セル分割) を与えているものと定義する。このような多面体の上にも、 *Small Cover* の概念を自然に拡張することができる ([15])。また扇で定義されるトーリック多様体の実部分として定義される、実トーリック多様体も、 *Small Cover* と同様の概念であり、特別な場合は両者の概念は一致する。一般に群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ が作用する n 次元多様体で、固定点が孤立固定点のみであるものは、 [9] で定義されているトーラス多様体の mod 2 版として、トーラス多様体と同じ議論で、多重扇に相当する組合せ論的対象物を対応させて、同様の理論を展開することができる ([13])。また [4] では、多様体ではないが、一般の単体複体に対し、その錘を底空間として、群 $(\mathbb{Z}_2)^n$ が作用する空間を定義して *Small Cover* と同様の考察を行っている。

3 ホモロジー群

Small Cover の mod2 ホモロジー群は、トーリック多様体論の Danilov-Jurkiewicz の定理のアナロジーで、対応する多面体の情報から次のように計算されることが知られている。

定理 3.1 ([4]) 単純凸多面体 P 上の Small Cover M の表現写像を $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ とする。

i) 同変コホモロジー環 $H_{(\mathbb{Z}_2)^n}^*(M; \mathbb{Z}_2)$ は P の face ring $\mathbb{Z}_2[F_1, \dots, F_m]/I$ と同型。ここで F_i ($1 \leq i \leq m$) は P の余次元 1 の面で次数 1 の生成元。 I は $\{F_{i_1} \cdots F_{i_k} \mid F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} = \emptyset\}$ で生成されるイデアルである。さらに J を表現写像で誘導される準同型 $\lambda^*: (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^m \cong H_{(\mathbb{Z}_2)^n}^1(M; \mathbb{Z}_2)$ の像で生成されるイデアルとすると $H^*(M; \mathbb{Z}_2)$ は上記の face ring の J による商と同型である。

ii) M の mod2 Betti 数 $b_i(M) = \dim_{\mathbb{Z}_2} H_i(M; \mathbb{Z}_2)$ は P の余次元 $(i+1)$ 面の個数 f_i によって次式で定義される数 h_i と一致する ((h_0, \dots, h_n) は P の h ベクトルとよばれる)。

$$\sum_{i=0}^n h_i t^{n-i} = \sum_{i=-1}^{n-1} f_i (t-1)^{n-1-i}$$

ii) において、ポアンカレ双対定理から $h_i = h_{n-i}$ が導かれる。実はこの式は、 P 上の Small Cover の存在性に関係なく成立する凸多面体固有の性質で、Dehn-Sommerville 恒等式と呼ばれている。また上式で、 P 上 Small Cover M の同変コホモロジーは、表現写像によらず P だけに依存しているが、実は Borel 構成 $B_{(\mathbb{Z}_2)^n} M$ が空間のレベルで、 P だけで決まっていることがわかる。実際、単純凸多面体 P に対し、各面を $(\mathbb{Z}_2)^m$ ($m = \#\mathcal{F}$) の標準基底に対応させて、Small Cover の時と同じ構成で $\mathcal{Z}_P = P \times (\mathbb{Z}_2)^m / \sim$ を定義すると、 P 上の任意の Small Cover M に対し、 $B_{(\mathbb{Z}_2)^m} \mathcal{Z}_P = B_{(\mathbb{Z}_2)^n} M$ が成立する。また M は、その表現写像 λ で決まる部分群 $(\mathbb{Z}_2)^{m-n} \cong \text{Ker} \lambda \subset (\mathbb{Z}_2)^m$ による商空間として $M = \mathcal{Z}_P / (\mathbb{Z}_2)^{m-n}$ とも表される。

[4] ではさらに、一般の単体複体の錘上の $(\mathbb{Z}_2)^n$ 空間を考え、その mod2 ホモロジー群と複体の Cohen-Macaulay 性との関連について研究している。なお Small Cover の整係数ホモロジー群を一般に計算することは難問で、部分的な結果しか知られていない。

4 基本群

Small Cover の基本群は、[4] によって決定されている。単純凸多面体 P に随伴したコクセター群 W を、 P の余次元 1 の面 $F \in \mathcal{F}$ を生成元とし、関係式 $F^2 = 1$ ($F \in \mathcal{F}$)、 $FE = EF$ ($F \cap E \neq \emptyset$) によって定義する。 $P \times W$ 上の同値関係を $(x, s) \sim (y, t) \Leftrightarrow x = y, s^{-1}t \in \langle F \mid x \in F \rangle$ と置く。

命題 4.1 $\tilde{M} = P \times W / \sim$ は P 上任意の Small Cover M の普遍被覆空間である。

P 上の Small Cover M の Borel 構成の基本群はコクセター群 W であり、そのことから M の基本群は次で与えられることがわかる。

定理 4.2 ([4]) P 上の Small Cover M の表現写像から誘導される準同型を $\tilde{\lambda}: W \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ とするとき, $\pi_1(M) \cong \text{Ker}\tilde{\lambda}$ である。

[20] では, (扇が完備とは限らない) 実トーリック多様体について基本群に関する上記と同様の結果を示し, さらに基本群が可換になる必要十分条件を決定している。

5 非正曲率問題

距離空間 X が非正曲率 (nonpositively curved) とは, (a) 任意の 2 点が測地線で結ばれ, (b) 十分小さな任意の三角形が, \mathbb{R}^2 に対応する三角形よりも“細い”ときをいう。このとき, 普遍被覆 \tilde{X} の任意の 2 点は唯一つの測地線で結ばれ, 可縮となるので, X は非球面的 (aspherical) である。単体複体が flag とは, 互いに辺で結ばれる任意の頂点の集合 $\{v_1, \dots, v_k\}$ が常に単体となるときをいう。Davis-Januszkiewicz-Scott [5] は, Small Cover の非球面性を, 対応する多面体の flag 性と関連付けた。

定理 5.1 ([5]) P 上 Small Cover M に対し, 次は同値。

- i) M は非球面的。
- ii) P の双対複体は flag。
- iii) M の自然なセル構造から決まるユークリッド計量は非正曲率。

Uma [20] は (完備とは限らない) 扇で定義された実トーリック多様体についても上と同様の定理が成立することを示した。また扇 Δ に対し, \mathbb{R}^d (d は辺の数) の座標部分空間の配置の補集合 C_Δ が対応し, $M_\Delta = (\mathbb{R}^d \setminus C_\Delta) / (\mathbb{R}^*)^{d-n}$ となるが, [20] では扇が完備な時に C_Δ の基本群を計算し, それが $K(\pi, 1)$ 空間になる必要十分条件も与えている。

6 線形モデル

Small Cover の中でも, 表現写像が n 彩色に対応するものは線形モデル (の引き戻し) と呼ばれる特別なグループを成し, 比較的良好に調べられている。 k 彩色された n 次元単純凸多面体 P に対し ($k \geq n$), 彩色を $(\mathbb{Z}_2)^k$ の標準基底に対応させて Small Cover と同様の方法で, 「彩色多面体から決まる多様体」 $P \times (\mathbb{Z}_2)^k / \sim$ を構成すると, これは一般には Small Cover とは異なるが, $k = n$ の時は線形モデルとなり, この立場からも興味深い対象といえる。また P 上の線形モデルは, 存在するなら唯一つであり, 表現写像を考慮する必要がなく, 多面体だけでその性質が決まる。

命題 6.1 ([4]) 線形モデル M は, 次を満たす。

- i) 安定並行化可能 (stably parallelizable)。
- ii) 整係数コホモロジー $H_i(M; \mathbb{Z})$ は階数 h_i の自由可換群。

Izmestiev は特に 3 次元線形モデルについて詳しく考察し、それが \mathbb{R}^4 へ同変に埋め込めることを証明し、さらに同変手術と連結和による特徴づけを行った ([10])。3 次元単純凸多面体が線形モデルを持つ、すなわち 3 彩色可能である必要十分条件はよく知られており、全ての面が偶数角形であることである。Joswig [11] は、一般の次元の単純凸多面体が、線形モデルを持つ条件を与えている。

7 向き付け可能性

Small Cover の向き付け可能性は、次の定理で判定できる。

定理 7.1 ([16], [15]) $(\mathbb{Z}_2)^n$ の基底 e_1, \dots, e_n に対し、 $\epsilon(e_i) = 1$ によって準同型写像 $\epsilon: (\mathbb{Z}_2)^n \rightarrow \mathbb{Z}_2$ を決める。 P 上の Small Cover M が向き付け可能である必要十分条件は、 $\epsilon\lambda \equiv 1$ となる基底が存在することである。ここで $\lambda: \mathcal{F} \rightarrow (\mathbb{Z}_2)^n$ は M の表現写像を表す。

$n = 3$ の時、Small Cover が向き付け可能であるのは、表現写像の像がある基底 $\{\alpha, \beta, \gamma\} \subset (\mathbb{Z}_2)^n$ を固定したとき $\{\alpha, \beta, \gamma, \alpha + \beta + \gamma\}$ に入ることである。これは P の 4 彩色に他ならず、有名な四色定理より次の系を得る。

系 7.2 任意の 3 次元単純凸多面体上に向き付け可能 Small Cover が存在する。

このように、与えられた多面体上の Small Cover の存在性は、彩色可能性と密接な関係がある。例えば 4 次元以上の場合、単純凸多面体の彩色数に上限が存在しないので、Small Cover が存在しない多面体の存在がわかる。我々は 3 次元多面体の彩色に関して考察を進め、向き付け不可能な Small Cover の存在性を証明した。

定理 7.3 ([15]) 単体以外の任意の 3 次元単純凸多面体上に向き付け不可能 Small Cover が存在する。

この定理は、凸でない多面体上の Small Cover にも拡張される。なお向き付け可能曲面の (十分細かい) 単体分割は 4 彩色可能と予想されている。

定理 7.4 ([15]) P を向き付け可能 3 次元角付き多様体で、双対複体が $\partial(P)$ の単体分割であるものとする。 P が 4 彩色可能で、十分面の数が多ければ、 P 上向き付け不可能 Small Cover が存在する。

向き付け可能曲面の単体分割の彩色問題に関連した命題を挙げる。

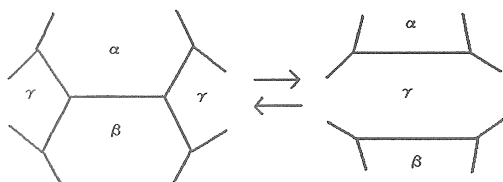
命題 7.5 P を向き付け可能 3 次元角付き多様体で、双対複体が $\partial(P)$ の単体分割であるものとする。 P を十分多い回数重心細分した多面体上には、Small Cover が存在する。

8 同変手術

3次元線形モデルは, [10] で考察され, 同変手術と連結和による特徴づけが与えられている。

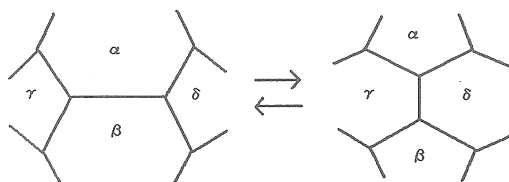
Small Cover の連結和は, それぞれの固定点の近傍で群作用が同変と仮定して, 普通に定義すれば, 彩色多面体の頂点での連結和に対応する。凸多面体の連結和は組合せ的凸多面体となる事実は [2] で証明されている (3次元ではほとんど自明)。

多面体において周りが3色で彩色されている辺 e の逆像の近傍のソリッド・トーラスに関する手術は同変で, 多面体では下図で表される変換に対応する。この変換と逆変換を手術 I と呼ぶことにする。



定理 8.1 ([10]) 任意の3次元線形モデルは, 有限回のトーラス T^3 の連結和と手術 I によって構成できる。

向き付け可能3次元 Small Cover は, 4彩色単純凸多面体に対応する。上の定理を向き付け可能 Small Cover に拡張する。多面体において周りが4色で彩色されている辺 e を下図のように変形する変換は, 単純多面体の bisteller-1 変換と呼ばれる。この変換は Small Cover において有理数 2 で表される同変 Dehn 手術が対応し, これを手術 II と呼ぶことにする。



定理 8.2 ([17]) 任意の向き付け可能3次元 Small Cover は, 有限回の実射影空間 $\mathbb{R}P^3$ とトーラス T^3 の連結和と手術 I II によって構成できる。

9 数え上げ

与えられた多面体の上の Small Cover が何通りあるか数え上げる問題は複雑で, 一般の場合にはほとんど調べられていない。2次元の Small Cover に関しては, 多角形の3彩色の組合せな

ので、容易に計算できる。3次元の Small Cover では、線形モデルは存在すれば唯一であり、向き付け可能なものは4彩色の組合せに対応する。しかし、向き付け不可能な Small Cover の組合せを求める方法については、ほとんどわかっていない。中山 [14] では多面体が角柱など特別な場合に、その組合せを計算している。

与えられた多面体 P 上の Small Cover のコボルディズム類の数え上げに関しては、[13] で言及されている。コボルディズム類の代表元としては、 $\text{mod} 2$ トーラス多様体の圏で考えると、どの固定点の周りも表現が異なるものを選ぶことができ、異なる表現の可能性は高々

$$2^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (2^i - 1)/n!$$

通りであることは容易にわかる。この表現の全てを固定点に1つずつ持つ $\text{mod} 2$ トーラス多様体は、[13] で構成されているが、Small Cover の圏でそのようなものが存在するかどうかは $n \geq 4$ のときは不明である。

参考文献

- [1] V. M. Buchstaber and T. E. Panov, *Torus actions and thier applications in topology and combinatorics*, University Lecture Series **24**, AMS Providence, 2002.
- [2] V. M. Buchstaber and N. Ray, *Tangential structures on toric manifolds and connected sums of polytopes*, UMIST. Manchester **5**, (2000).
- [3] R. Diestel, *Graph Theory*, Springer, New York, 1997.
- [4] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, Duke Math. J. **62** (1991), 417-451.
- [5] M. Davis, T. Januszkiewicz and R. Scott, *Nonpositive curvature of blow-ups*, Sel. Math., new ser. **4** (1998), 491-547.
- [6] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, Annals of Mathematical Studies **131**, Princeton University Press, 1993.
- [7] B. Grünbaum, *Convex Polytopes*, Graduate Texts in Math. **221**, 1967/2002.
- [8] A. Garrison and R. Scott, *Small covers of the dodecahedron and 120-cell*, preprint.
- [9] A. Hattori and M. Masuda, *Theory of Multi-fans*, Osaka J. Math. **40** (2003), 1-68.
- [10] I. V. Izestiev, *Three-dimensional manifolds defined by coloring a simple polytope*, Math. Notes **69** (2001), 340-346.

- [11] M. Joswig, *Projectivities in simplicial complexes and coloring simple polytopes*, preprint (2001), arXiv: math.CO/0102186.
- [12] Z. Lü, $(\mathbb{Z}_2)^k$ -actions with disconnected fixed point set, *Topology Appl.* **114** (2001), 227-233.
- [13] Z. Lü and M. Masuda, $(\mathbb{Z}_2)^k$ -actions, normal matrices, coloring of simple convex polytopes and equivariant classifications of small covers, note.
- [14] 中山央士, 多面体の彩色による 3次元 Small Cover の分類, (2003) 大阪市立大学修士論文.
- [15] H. Nakayama and Y. Nishimura, *The orientability of small covers and coloring simple polytopes*, to appear in *Osaka J. Math.*
- [16] 西村保三, Small Cover と凸多面体の彩色, 京都大学数理解析研究所講究録 1290 (2002), 28-30.
- [17] Y. Nishimura, *The equivariant surgeries of small covers*, preparation.
- [18] T. Oda, *Convex bodies and Algebraic geometry, An introduction to the theory of toric varieties*, Springer-Verlag, New York, 1988.
- [19] R. Stanley, *Combinatorics and Commutative algebra*, Progress in Mathematics **41**, Birkhäuser, Boston 1983.
- [20] V. Uma, *On the fundamental group of real toric varieties*, preprint.
- [21] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*, Graduate Texts in Math., Springer, 1995/98.

Torsor タイプの不変量について

東大数理 古田幹雄

平成 16 年 7 月 1 日

1 序

本講演では、torsor があらわれる、似てはいるが違った状況について、いくつかの observation を説明したい。ある群 G の上の Torsor とは、 G が推移的かつ自由に作用する集合であった。すなわち「一点上の G 主束」に他ならない。

Section 2 では、Turaev によって導入された Euler structure 全体のなす torsor が Becker-Gottlieb の transfer を用いた解釈を許すことを示す。

Section 3 では、 $4k + 2$ 次元有向閉多様体 X に対して Atiyah[1] の中で与えられている準同型 $\pi_0(\text{Diff}^+(X)) \rightarrow \mathbb{Z}$ を考察する。この準同型は恒等的に 0 であると予想される。Torsor を用いることによって、この予想を扱いやすいと思われる形に変形する。(予想の証明にはまだ至っていない。)

Section 4 では、torsor を用いたこれらの考察の動機を述べる。Section 2 を有限次元版、Section 3 を線形版とみなすとき、この本来の動機は無限次元かつ非線形である場合の考察に相当する。

Section 2、3、4 は各々山口祥司、飯田修一、中村信裕の三氏との議論に刺激された考察である。三氏に感謝したい。

2 Euler structure

2.1 Becker-Gottlieb transfer

$X \rightarrow E \rightarrow T$ を構造群がコンパクト Lie 群であり、ファイバー X が連結な閉多様体、底空間 T がコンパクトであるファイバー束とする。(より一般に、各ファイバーの S-dual が T でパラメトライズされる連続族として存在するファイバー束であれば以下の構成は拡張される。しかし以下簡単のためこの仮定をおく。) Becker-Gottlieb の transfer とはこのファイバー束に対して、stable category において一意的に定義されるひとつの切断であった。後で必要のためこの定義を思い出す。

まず、ひとつのファイバー X に制限してその構成を述べる。閉多様体 X が計量のはいった vector space V に埋めこまれていると仮定する。このとき V の各点 v に対して、 v から最短距離にある X の点のひとつを $p(v)$ とおく。 $\epsilon > 0$ を十分小さな正数とすると、 v と X の距離が ϵ 以下なら $|v - x| = |v - p(v)|$ となる $x \in X$ は $p(v)$ に限る。 $U(\epsilon)$ を V 内の 0 を中心とする半径 ϵ の開球とす

る。このとき、写像

$$\bar{\tau}: V \rightarrow X \times V, \quad v \mapsto (p(v), v - p(v))$$

は連続写像

$$\tau: V \cup \{\infty\} \rightarrow (X \times V)/(X \times (V \setminus U(\epsilon)))$$

を誘導する。この τ は X の ϵ 近傍上で滑らかであり、その外では基点につぶれる。

この構成を単独の X の代わりに X の族、すなわち X をファイバーとするファイバー束に対して行ったものが Becker-Gottlieb の transfer である。すなわち、十分大きなベクトル空間 V に対して、ファイバーを保つ埋めこみ $E \subset B \times V$ を固定すると（仮定からその存在が従う）上述の構成を全てのファイバーで一斉に行うことができる。Becker-Gottlieb の transfer は stable category おける射 $T \rightarrow E$ として一意に定まり、代表元は、 V を十分大きな実ベクトル空間として写像 $\tau: T^V \rightarrow E^V$ によって与えられる。ここで E^V 等は自明ベクトル束 $E \times V \rightarrow E$ の Thom space である。

射影から誘導される写像を $\pi: E^V \rightarrow T^V$ とおくと、合成 $\pi\tau$ は、各ファイバーにおいて、球面の自己写像 $V^+ \rightarrow V^+$ となるが、この写像の写像度は Euler 特性数 $\chi(X)$ と一致することが知られている。（ V^+ は V の一点コンパクト化。）

実際、これは次のように容易に見て取れる。 v_0 を V の長さ ϵ 未満の nonzero vector とし、直交射影 $h: X \rightarrow \mathbf{R}v_0$ が X の Morse function になると仮定する。（記号を混用して）射影 $X \times V \rightarrow V$ を π と書くと、 $(\pi\tau)^{-1}(v_0)$ は $h: X \rightarrow \mathbf{R}v_0$ の critical point x によって $x + v_0$ と書くことができる。この点の近傍で τ は滑らかであり、合成 $\pi\tau$ の写像度は Morse index の偶奇に応じてプラスマイナスをとる。すなわち、

$$\pi\tau: V \cup \{\infty\} \rightarrow V/(V \setminus U(\epsilon))$$

の写像度は $\chi(X)$ と一致する。

2.2 Transfer から定義される torsor

ファイバー X の Euler 特性数 $\chi(X)$ が 0 であると仮定する。（たとえば X が奇数次元の閉多様体であるときはそうである。） $\tau^0: B^V \rightarrow E^V$ を、像が基点である写像とする。このとき τ と τ^0 とは各ファイバーに制限するとホモトピックである。そこで次の定義をする。

Definition 1. 各ファイバー X に対して、両者を結ぶホモトピーの可能性（を *up to homotopy* で分類したもの）全体の集合を $Eu^{BG}(X)$ とおく。 $Eu^{BG}(X)$ は 1 次元安定ホモトピー群 $\pi_1(X)$ 上の torsor である。また、

$$Eu^{BG}(E) := \coprod_{t \in T} Eu^{BG}(X_t)$$

とおく。

次の Lemma は後に述べる Theorem 9 の（ひとつの）証明に用いられる。

Lemma 2. *Canonical* な写像

$$\pi_0(\Gamma(X, TX \setminus \{0\})) \rightarrow Eu^{BG}(X)$$

が存在する.

以下, Lemma の写像の構成をあたえる. ここで左側の項は, X 上の nonvanishing vector field の (nonvanishing vector field を動くときの) ホモトピー類全体の集合である. $\chi(X) = 0$ であると仮定したので, 実際 X 上に non vanishing vector field s が存在する. s を用いて τ を perturb して基点への定値写像と連続的に結ぶ道をつくる. s の長さを正規化して 1 としておく. X は V に埋め込まれているので, X 上のベクトルは V の要素と見なされることに注意する. パラメータ $t \in [0, 1]$ に対して写像

$$\tilde{\tau}_t : V \rightarrow X \times V, \quad v \mapsto (p(v), v - p(v) + ts(p(v)))$$

は連続写像

$$\tau_t : V \cup \{\infty\} \rightarrow (X \times V)/(X \times (V \setminus U(\epsilon)))$$

を定義し, $\tau_0 = \tau$ であり τ_1 の像は基点である.

2.3 Euler structure

X を (大きな Euclid 空間に埋め込まれた) コンパクトな多面体とする.

Definition 3. 1. $C(X)$ を, 写像 $f : X \rightarrow \mathbf{Z}$ であって有限個の点以外の値が 0 であるものとする.

$C(X)$ には「可換群 \mathbf{Z} にラベルをもつ配置空間」としての位相をいれる.

2. $C_n(X)$ を, $\sum_x f(x) = n$ となる $C(X)$ の部分集合とする.

3. X のひとつの cell 分割 Δ に対して, A_Δ を $*\mathbf{Z}X$ の部分集合であって, Δ の各 cell e に対して $\sum_{x \in e} f(x) = (-1)^{\dim e}$ をみたすものとする.

ただし, 多面体の cell とは, Euclid 空間において線型な等式と不等式によって定義される部分集合の共通部分であって, ある次元の開閉板と同相であるものとする.

$\chi(X)$ を X の Euler characteristic number とする.

Lemma 4. 1. $A(\Delta)$ は contractible.

2. $A(\Delta) \subset C_{\chi(X)}(X)$

3. Δ' が Δ の細分であるとき, $A_{\Delta'} \subset A_\Delta$ が成立する.

次の Lemma が成立する.

Lemma 5. $\cup_\Delta A_\Delta$ の任意のふたつの要素に対して, それらの属する $A_\Delta, A_{\Delta'}$ を指定すると, それらを結ぶ道の homotopy class をひとつ canonical に指定することができる.

Proof. 共通細分を考えよ. □

この Lemma によって, 包含関係に関して cofinal な族 $\{A_\Delta\}_\Delta$ は $C_{\chi(X)}(X)$ の基点の役割をはたすことができる. たとえば, 任意の Δ, Δ' および任意の $\tilde{x}_0 \in A_\Delta, \tilde{x}'_0 \in A_{\Delta'}$ に対して, これらを基点として定義される基本群の間の canonical な同型

$$\pi_1(C(X), \tilde{x}_0) \cong \pi_1(C(X), \tilde{x}'_0)$$

が存在する。

以下ひとつの $\tilde{x}_0 \in A_\Delta$ を固定するが、上の意味で、基点は”up to homotopy で” canonical に与えられていると考えられる。 $\tilde{x}_0 \in C_{\chi(X)}(X)$ であることに注意する。

$C(X)$ にはもうひとつ、基点とよぶにふさわしい点がある。それは $C_0(X)$ の要素 $f = 0$ である。この要素を \emptyset と書くことにする。

Definition 6. $\chi(X) = 0$ のとき、上の二つの基点 \emptyset, \tilde{x}_0 を結ぶ道の homotopy 類を Euler structure とよぶ。Euler structure 全体の空間を $Eu(X)$ と書くことにする。

Dold-Thom の定理のひとつの version により、

$$\pi_1(C_n(X)) \cong H_1(Z, \mathbf{Z})$$

が成立する。よって、Euler structure 全体は $H_1(X, \mathbf{Z})$ 上の torsor の構造をもつ。

Remark 7. Euler structure は Turaev によって Reidemeister torsion の phase factor の refinement のために導入された。その議論のひとつのポイントを、我々の立場から述べると次のようになる。 L を X 上の複素直線束とする。このとき $C(X)$ 上に複素直線束 \tilde{L} が

$$\tilde{L}_f := \otimes_{x \in X} L^{\otimes f(x)}$$

によって定義される。もし L に flat 構造が与えられていれば、 \tilde{L} も flat 構造を自然にもつ。以下これを仮定する。このときさらに

$$\begin{aligned} \tilde{L}_\emptyset &\cong \mathbf{C} \\ \tilde{L}_{\tilde{x}_0} &\cong (\det H_*(X, L)) \otimes (\det H_*(X, \mathbf{C}))^* \end{aligned}$$

が成立する。したがって、 $\chi(X) = 0$ のとき、Euler structure がひとつ与えられるごとに、 \emptyset と \tilde{x}_0 とを結ぶ道が与えられるので、monodromy を考えることによって同型

$$\det H_*(X, L) \rightarrow \det H_*(X, \mathbf{C})$$

がひとつ与えられる。ただし $\det H_* := \wedge^{\text{top}} H_{\text{even}} \otimes (\wedge^{\text{top}} H_{\text{odd}})^*$ と書いた。

Remark 8. X の cell 分割 Δ に対して A_Δ を定義したが、類似の構成が次の場合に可能である。

1. X の有限開被覆 $\{U_\alpha\}$ であって、有限個の開集合の共通部分が空あるいは可縮であるものが与えられたとき。
2. X が多様体であって、 X 上の滑らかな函数であって臨界点が有限個であるものが与えられたとき。

2.4 ふたつの torsor の関係

閉多様体 X に多面体構造が与えられたとする。Hurewicz 準同型 $\pi_1^S(X) \rightarrow H_1(X, \mathbf{Z})$ を用いると、 $\pi_1^S(X)$ -torsor $Eu^{BG}(X)$ と、 $H_1(X, \mathbf{Z})$ -torsor $Eu(X)$ との関係は次の canonical な写像によって与えられる。

Theorem 9. $Eu(X) = Eu^{BG} \otimes_{\pi_1^S(X)} H_1(X, \mathbf{Z})$

ひとつの証明は、Lemma 2 と次の Lemma 10 との比較によって与えられる。
Turaev によって次が示されている。

Lemma 10. (Turaev) *Canonical* な全射写像

$$\pi_0(\Gamma(X, TX \setminus \{0\})) \rightarrow Eu^{BG}(X)$$

が存在する。

さらに、Turaev は、ふたつの nonvanishing vector field が X 上の有限個の点の補集合において nonvanishing なまま homotopic であるときに同値とする同値関係によってわると、上の全射写像から全単射が導かれることを示した。

ここでは、我々の定式化にしたがって、上の canonical な写像の構成を行う。

X が多様体であるとき、 X 上の nonvanishing vector field V と (X の多様体構造に関して滑らかな) cell 分割 Δ が与えられると、Euler structure を次のように定義することができる。

Δ は (up to homotopy で) ひとつの Morse flow V_Δ を定める。 V_Δ と V とを「generic に」結ぶ。これらの vector field のゼロ集合を重複度をこめて考えたものは、 A_Δ の点と \emptyset とを結ぶ $C(X)$ 内の path を与えている。この path の homotopy class が求める Euler structure である。

Lemma 11. V と Δ から定まる上の Euler structure は Δ のとり方によらない。

Proof. Δ' が Δ の細分であるとき、 V'_Δ と V_Δ とを linear につなぐ。このとき、どの vector field も、 Δ の各 cell に接している。この vector field を Δ の各 cell に接したまま generic に perturb することによって、零点集合が $*ZX$ の path となるようにすることができる。このとき、この path は A_Δ 内の path である。□

3 Signature operator

3.1 Torsor から定義される準同型

X を $4k-2$ 次元の有向閉多様体とする。Atiyah [] において、ある準同型 $\pi_0(Diff^+(X)) \rightarrow \mathbf{Z}$ が定義されている。本節の目標はその道筋を、torsor の導入によって定式化し直すことである。

次の性質をみたとす、TQFT もどきが構成される。

1. 1次元有向閉多様体 Z 上の有向 X 束 Q に対して、ひとつの \mathbf{Z} -torsor \mathbf{Z}_Q が定義されている。
2. $\mathbf{Z}_Q \amalg Q' = \mathbf{Z}_Q \oplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_{Q'}$ が成立する。
3. 境界のあるコンパクト有向曲面 Y 上の有向 X 束 P に対して、 \mathbf{Z} -torsor $\mathbf{Z}_{\partial P}$ の自明化 $\phi_P : \mathbf{Z}_{\partial P} \rightarrow \mathbf{Z}$ が与えられている。

4. $P \rightarrow Y$ と $P' \rightarrow Y'$ が上のような X 束であり、両者の境界のいくつかの連結成分を張り合わせることによって $P \cup P' \rightarrow Y \cup Y'$ が得られたとする。このとき、 $\phi_{P \cap P'}$ は $\phi_P \oplus_{\mathbf{Z}} \phi_{P'}$ を「縮約」したものと一致する。

次に torsor \mathbf{Z}_Q の要素を 2 通りの方法で指定する。すなわち、torsor の 2 通りの自明化の方法を指定する。そしてこれらはいずれも次の条件を満たすことが示される。

1. 1 次元有向閉多様体 Z 上の有向 X 束 Q に対して、 \mathbf{Z} -torsor \mathbf{Z}_Q の 2 通りの自明化 $\rho_Q^k : \mathbf{Z}_Q \rightarrow \mathbf{Z}$ ($k = 0, 1$) が定義されている。
2. 境界のあるコンパクト有向曲面 Y 上の有向 X 束 P に対して、 \mathbf{Z} -torsor $\mathbf{Z}_{\partial P}$ の自明化 $\rho_{\partial P}^k, \phi_P : \mathbf{Z}_{\partial P} \rightarrow \mathbf{Z}$ の「差」は、 $k = 0, 1$ のいずれに対しても $\text{sign}(P)$ と一致する。ここで $\text{sign}(P)$ とは、 P の全空間を境界のある $4k$ 次元多様体とみたときの符号数である。

特に、これから

$$\rho_{\partial P}^0 = \rho_{\partial P}^1$$

が従う。この条件だけからは、任意の Q に対して $\rho_Q^0 = \rho_Q^1$ であることは帰結されない。上の条件から形式的にわかることは次のことにとどまる。

Lemma 12. $\rho_Q^0, \rho_Q^1 : \mathbf{Z}_Q \rightarrow \mathbf{Z}$ の「差」を $f(Q) \in \mathbf{Z}$ とおく。 $\alpha \in \text{Diff}^+(X)$ から定まる S^1 上の X 束を Q_α とおくと、 $f(\alpha) := f(Q_\alpha)$ と定義すると、

$$f : \pi_0(\text{Diff}^+(X)) \rightarrow \mathbf{Z}$$

は準同型である。

Proof. Y がパンツであるとき $\rho_{\partial P}^0 = \rho_{\partial P}^1$ を書き換えると、 $f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$ を得る。 \square
 ρ_Q^0, ρ_Q^1 の定義はこの後の小節で与えられる (Remark 23)。しかし、次の予想をこの段階で述べておく。

Conjecture 13. $\rho_Q^0 = \rho_Q^1$ すなわち $f(Q) = 0$ が常に成立する。

3.2 有限次元版の torsor

有限次元における位相的な命題を確立する。(本当に考察したいのはある意味でその二通りの方向への拡張であるあることを後に説明する。)

1. S^1 上の $U(p, q)$ -bundle E に対して二通りのやり方で \mathbf{Z} -torsor を定義する。それらを $\mathbf{Z}_E^{(\text{operator})}, \mathbf{Z}_E^{(\text{det})}$ と書くことにする。(Definition 14, 15)
2. 境界のある有向コンパクト曲面 Σ の上に $U(p, q)$ -bundle \tilde{E} が与えられたとき、境界の各成分 S_k^1 に制限した $E_k = \tilde{E}|_{S_k^1}$ から得られる \mathbf{Z} -torsor $\mathbf{Z}_{E_k}^{(\text{operator})}$ および $\mathbf{Z}_{E_k}^{(\text{det})}$ のすべてのテンソル積には canonical な自明化が存在する。この自明化は、曲面のはりあわせと compatible である。(Lemma 16)

3. それら二つの \mathbf{Z} -torsor の間の canonical な同型を二通り定義する。これらの同型を $\rho^{(\eta)}, \rho^{(trivialization)}$ と書くことにする。各々の同型は、有向コンパクト曲面上 $U(p, q)$ -bundle に対して存在する canonical な同型と compatible である。(Lemma 18)
4. ふたつの同型の一致を示す (Lemma 17) :

$$\rho_E^{(\eta)} = \rho_E^{(trivialization)} : \mathbf{Z}_E^{(operator)} \rightarrow \mathbf{Z}_E^{(det)}$$

5. この一致する同型を単に ρ_E と書くことにする。また同型 ρ_E によってふたつの \mathbf{Z} -torsor を同一視するとき、この \mathbf{Z} -torsor のことを単に \mathbf{Z}_E と書くことにする。

議論のポイントは Atiyah-Patodi-Singer の境界条件に対する指数定理である。

$\mathbf{Z}_E^{(operator)}, \mathbf{Z}_E^{(det)}$ は次のように定義する。

Definition 14. $U(p, q)$ の部分群 H を $H := \{(g_+, g_-) \in U(p) \times U(q) \subset U(p, q) \mid \det g_+ = \det g_-\}$ によって定義する。このとき $U(p, q)/H$ は $U(1)$ と同じホモトピー型をもつ。 S^1 上の $U(p, q)$ -bundle E に対して、 E/H の切断のホモトピー類全体を $\mathbf{Z}_E^{(det)}$ とおく。

Definition 15. S^1 上の $U(p, q)$ -bundle E に同伴する $\mathbf{C}^{p, q}$ 束を $E(\mathbf{C}^{p, q})$ とおく。 S^1 に計量を任意に固定すると符号数作用素 $D_{S^1} = \sqrt{-1} * d$ が 0 -form 上に定義される。その主表象を $\sigma(D_{S^1})$ とおく。 $\sigma(D_{S^1}) \otimes E(\mathbf{C}^{p, q})$ を主表象とする自己随伴楕円型作用素 D 全体を、次の同値関係で割った集合を $\mathbf{Z}_E^{(operator)}$ とおく：ふたつの作用素 D, D' が同値であるとは、両者を（たとえば線形に）結ぶ 1 パラメータ族のスペクトル流が 0 となることと定義する。

境界のある有向コンパクト曲面 Σ の上に $U(p, q)$ -bundle \tilde{E} が与えられたとする。境界の各成分 S_k^1 に制限を $E_k = \tilde{E}|_{S_k^1}$ とおく。

Lemma 16. 1. \tilde{E}/H の切断のホモトピー類を境界に制限したものを $0 \in \mathbf{Z}$ に対応させることによって、canonical な自明化

$$\oplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_{E_k}^{(det)} \rightarrow \mathbf{Z}$$

が定義される。

2. Σ に計量であって境界の近傍で積の形をしたものを任意に固定する。それから定義される符号数作用素 D_Σ の主表象を $\sigma(D_\Sigma)$ とおく。 $\sigma(D_\Sigma) \otimes \tilde{E}(\mathbf{C}^{p, q})$ を主表象とする楕円型作用素 \tilde{D} であって、 S_k^1 の近傍への制限が $\sigma_k(\partial_t + D_k)$ という形をしているものをとる。このとき $\{D_k\}$ に対して $\text{ind } \tilde{D} \in \mathbf{Z}$ を対応させる写像が well-defined であり、canonical な自明化

$$\oplus_{\mathbf{Z}} \mathbf{Z}_{E_k}^{(operator)} \rightarrow \mathbf{Z}$$

が定義される。ただし、 $\text{ind} \in \tilde{D}$ の定義においては Atiyah-Patodi-Singer の境界条件を用いる。

ρ^η の構成は次のように行う。

1. S^1 上の計量をひとつ固定し、 E の構造群の $U(p) \times U(q)$ への reduction E' および flat $U(p) \times U(q)$ -connection ∇ をひとつ固定する。

2. $\det E' := E/H$ は S^1 上の $U(1)$ -bundle である。($\det E'$ を "determinant line bundle" と呼ぶ。)
また ∇ は $\det E'$ 上の connection $\det \nabla$ を誘導する。
3. ∇ を用いて主表象が $\sigma(D_{S^1}) \otimes E(\mathbb{C}^{p,q})$ である「 ∇ を係数とする符号数作用素」 D_∇ が構成される。
 D_∇ は $\mathbf{Z}_E^{(operator)}$ の要素 $n_\nabla^{(operator)}$ を与える。
4. (Atiyah-Patodi-Singer の定理を $\partial D^2 = S^1$ に適用すると) $\det \nabla$ の S^1 を一回りする holonomy は、 $\exp(2\pi\sqrt{-1}\eta(D_\nabla))$ と等しい。ここで $\eta(D_\nabla)$ は η 不変量である。 $\nabla - \sqrt{-1}\eta(D_\nabla)d\theta$ (θ は S^1 の座標) による平行移動は $\det E'$ の自明化を与える。この自明化は $\mathbf{Z}_E^{(det)}$ の要素 $n_\nabla^{(det)}$ を与える。
5. 同型

$$\rho^\eta : \mathbf{Z}_E^{(operator)} \rightarrow \mathbf{Z}_E^{(det)}$$

が $\rho^\eta(n_\nabla^{(operator)}) = n_\nabla^{(det)}$ によって定義され、well-defined である。

$\rho^{trivialization}$ の構成は次のように行う。

1. $S^1 = \partial D^2$ と考える。 D^2 上の計量を境界の近傍で積の形になるようにひとつ固定する。 $U(p, q)$ -bundle E の D^2 へのひとつの拡張を固定し \tilde{E} とおく。
2. \tilde{E} は D^2 上の bundle なので自明化が up to homotopy で一意に存在する。
3. この自明化は E/H の自明化を与える。その定める $\mathbf{Z}_E^{(det)}$ の要素を $n_\nabla^{(det)}$ とおく。
4. この自明化は \tilde{E} 上の flat connection $\tilde{\nabla}$ を与える。 $\tilde{\nabla}$ を係数とする D^2 上の符号数作用素 $\tilde{D}_{\tilde{\nabla}}$ は S^1 の近傍で $\sigma(\partial_t + D_{\tilde{\nabla}})$ の形に書くことができる。 $\tilde{D}_{\tilde{\nabla}}$ の定める $\mathbf{Z}_{(operator)}(E)$ の要素を $n_{\tilde{\nabla}}^{(operator)}$ とおく。
5. 同型

$$\rho^{trivialization} : \mathbf{Z}_E^{(operator)} \rightarrow \mathbf{Z}_E^{(det)}$$

が $\rho^{trivialization}(n_{\tilde{\nabla}}^{(operator)}) = n_\nabla^{(det)}$ によって定義されることを示すことができる。

Atiyah-Patodi-Singer の定理を D^2 に適用すると次が示される。

Lemma 17. $\rho^\eta = \rho^{trivialization}$.

この等しい同型を以下単に ρ_E と書くことにする。

さらに Atiyah-Patodi-Singer の定理を一般の境界のある有向コンパクト曲面に適用すると次が示される。

Lemma 18. 境界のある有向コンパクト曲面 Σ の上に $U(p, q)$ -bundle \tilde{E} が与えられ、さらに $U(p, q)$ flat connection $\tilde{\nabla}$ が与えられたとする。このとき、境界の各連結成分への制限から定義される $n_{\tilde{\nabla}}^{(operator)}$ たちのテンソル積は、canonical な自明化を用いて \mathbf{Z} の要素と思うと、 $sign(\Sigma, \tilde{\nabla})$ と一致する。ここで $sign(\Sigma, \tilde{\nabla})$ とは、局所系 $(E, \tilde{\nabla})$ を係数とする (D^2, S^1) のホモロジーの交叉形式の符号数である。

3.2.1 (E, δ) に対する構成の拡張

以上の構成を、ペア (E, δ) に対して拡張することが可能である。ここで δ は $\text{End } E(\mathbb{C}^{p,q})$ の切断であり、 $\delta^2 = 0$ かつ $(\delta u, v) = (u, \delta v)$ をみたすものである。 $\delta = 0$ の場合が前章の構成である。(しかし、次小節に述べる無限次元版においては、 δ が存在してはじめて Fredholm 作用素が定義され、構成が意味をもつ。) 概要のみ述べる。族を考えれば、

E 上に $U(p, q)$ flat connection ∇ があたえられ、 δ は ∇ について *paralell* と仮定する。 $\mathbf{Z}_E^{(operator)}$ およびその要素 $n_{\nabla}^{(operator)}$ が次のように定義される。: 符号数作用素の定義にあらわれた外微分 d のかわりに、 $d + \delta$ を用いる。他は同様である。(記号を混用して 0-form 上で $id \otimes \delta$, 1-form 上では $(-id) \otimes \delta$ によって定義される作用素も記号 δ によって表す。)

以下、次の仮定をおく。

Assumption 19. $\text{Ker } \delta / \text{Im } \delta$ の次元が一定であり、 S^1 上の $U(\bar{p}, \bar{q})$ -bundle \bar{E} を定めると仮定する。

∇ から \bar{E} 上には connection $\bar{\nabla}$ が誘導される。 $n_{(\nabla, \delta)}^{(operator)}$ に $n_{(\bar{\nabla})}^{(operator)}$ を対応させることによって次の Lemma が示される。

Lemma 20. $\mathbf{Z}_E^{(operator)}$ と $\mathbf{Z}_{\bar{E}}^{(operator)}$ との間には *canonical* な同型が存在する。

3.3 Atiyah の準同型

3.3.1 無限次元版

前小節の議論では E に補助データ δ を導入した。さらに E の構造群 $U(p, q)$ において形式的に $p, q = +\infty$ と考えられる場合を扱いたい。

1. X を $4k - 2$ 次元の有向閉多様体とする。
2. $\Omega^*(X) \otimes \mathbb{C}$ 上に外積 (を次数ごとに $\sqrt{-1}$ の適当なべきを用いて補正したもの) を用いて非退化対称形式を導入する。形式的に $\mathbb{C}^{\infty, \infty} = \Omega^*(X) \otimes \mathbb{C}$ と書くことにする。
3. コホモロジー $H^*(X, \mathbb{C})$ 上にカップ積 (を補正したもの) によって非退化対称形式を導入したものを $\mathbb{C}^{p, q}$ と書くことにする。
4. $\mathbb{C}^{\infty, \infty} = \Omega^*(X) \otimes \mathbb{C}$ 上の外微分 (を補正したもの) を δ とおく。すると $\text{Ker } \delta / \text{Im } \delta = \mathbb{C}^{p, q}$ となる。
5. Q を S^1 上の X -bundle とする。 Q に同伴し $\mathbb{C}^{\infty, \infty}$ をファイバーとする S^1 上の bundle を $E(\mathbb{C}^{\infty, \infty})$ とおく。また、 $E(\mathbb{C}^{\infty, \infty})$ に同伴する主束を形式的に E と書くことにする。 Q 上の connection ∇_Q を任意に固定する。このとき、 E の connection ∇ であって δ と可換であるものが与えられる。
6. $\mathbf{Z}_{(E, \delta)}^{(operator)}$ は有限次元の場合と平行して定義可能である。
7. $\bar{E} = \text{Ker } \delta / \text{Im } \delta$ 上の connection $\bar{\nabla}$ が与えられ、これはコホモロジー群の族の上に定まる自然な flat 構造から定まる connection と一致する。

8. $\mathbf{Z}_{(E,\delta)}^{(operator)}$ と $\mathbf{Z}_E^{(operator)}$ は canonical に同型であり、この同型において $n_{(\nabla,\delta)}^{(operator)}$ と $n_{\nabla}^{(operator)}$ が対応している。

3.3.2 Atiyah の準同型

Atiyah の定義した準同型について説明する。

Atiyah は Witten によって指摘された「 S^1 上の X 束の全空間 Q に対する η_t (ファイバー方向の計量を t 倍した計量についての η 不変量) の断熱極限 $\lim \eta_t$ は $(2\pi\sqrt{-1}$ 倍して) \exp をとると determinant line bundle のホロノミーを与える」という命題を用いている。我々の立場ではこの命題を次のように用いる。

$n_E^{(det)}$ を定義しようとするなら $\det \bar{\nabla}$ および $\eta(D_{\bar{E}})$ が必要である。ただし、その際 $\bar{\nabla}$ は $U(\bar{p}) \times U(\bar{q})$ 接続であることが必要である。本小節の設定のもとではこの仮定は満たされていない。しかし、 ∇ は形式的には $U(\infty) \times U(\infty)$ 接続である。

Definition 21. $n_E^{(det)}$ の定義式において、 $\det \bar{\nabla}$ および $\eta(D_{\bar{E}})$ のかわりに $\det \nabla$ および $\lim \eta_t$ を用いたものを $n_E^{(det)Atiyah}$ とおく。

Lemma 22. Atiyah の定義した準同型を書き換えると

$$f(Q) = n_{\nabla}^{(operator)} - n_{\nabla}^{(det)Atiyah} \in \mathbf{Z}$$

となる。ただし、同型

$$\mathbf{Z}_{(E,D)}^{(operator)} \cong \mathbf{Z}_E^{(operator)} \cong \mathbf{Z}_E^{(det)}$$

を経由することによって、右辺の二項を同一の \mathbf{Z} -torsor の要素とみなしている。

Remark 23. 前小節において ρ^0, ρ^1 と書いたものは、 $n_{\nabla}^{(operator)}$ および $n_{\nabla}^{(det)Atiyah}$ によって定義される torsor の自明化である。

4 動機

Torsor を用いた考察の動機を述べる。

多様体 B 上にベクトル束 \mathcal{E} とその切断 s が与えられ、零切断との交わり $M = s^{-1}(0)$ が閉部分多様体であったと仮定しよう。零切断との交わりのコンパクト性を保ったまま、 s が動くとき、 M から s によらない情報を不変量としてとりだしたい状況を考える。

このような状況が典型的に現れるのは、偏微分方程式によって定義される moduli space から不変量を取りだすゲージ理論やシンプレクティック幾何である。

ひとつの不変量は M のホモロジー類であり、 B のホモロジー群の中に値をとる。形式的には \mathcal{E} の Euler 類の Poincarè 双対とみなされる。(もっとも普遍的には cohomotopy 理論における Euler 類の双対にあたるものである。)

一方、ホモロジー群の要素 $[M]$ は自明であるが、なおも M に非自明な情報が潜在的に含まれる次のような例を考える。 $B = S^1$ であり、 M がその中の 2 点であり、2 点の向きが異なつたとする。このとき、 $H_0(S^1, \mathbf{Z})$ の要素として $[M] = 0$ である。しかし、その 2 点を境界とする 1 チェインの可能性全体（を 1 バウンダリー全体で割った商空間）は、 $H_1(S^1, \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ 上の torsor になる。 s が連続的に動き、それに伴って M が連続的に動くとき、この torsor は連続的に動く。

1. この torsor は、 s を固定するとき、定義される。
2. torsor の同型類は一意的である。したがって、torsor の「同型類」は不変量としては無意味である。
3. B および s がある空間 T にパラメータをもつ族 B_t および s_t として与えられたとき、 T 上の torsor 束が得られる。この族は自明でない可能性があり、族の不変量として意味をもつ。
4. 上述の族の不変量自体は、torsor を経由せずとも、族 (B_t, s_t) のから大域的に一举に定義することも原理的には可能である。
5. しかし、パラメータ空間 T を分割して局所的な考察を行うためには、torsor を不変量として導入すると扱いやすい。

中村信裕氏による結果 [3] をこの立場から理解しなおすことが可能と思われるが、現在、確定的な結果は得られていない。

最後に、Section 2、3 の内容に対応する問題を述べる。

Problem 24. Becker-Gottlieb transfer は、 $X \rightarrow E \rightarrow T$ に対してファイバーを保つ自己写像が与えられた場合に拡張されている。この場合、Euler 特性数の役割を果たすのは Lefschetz 数である。したがって、もし各ファイバーの Lefschetz 数が 0 であれば、 Eu^{BG} の構成と平行した方法によって torsor を構成することができる。

これは Turaev の Euler structure、さらにはそれによって refine される Reidemeister torsion の言葉に翻訳すると、何を意味するのであろうか。

Problem 25. 予想 13 の証明を、torsor の性質を直接調べることによって与えられまいか。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah, *The logarithm of the Dedekind eta-function* Math. Ann. **278** (1987) 335–380.
- [2] J. C. Becker and D. H. Gottlieb, *Applications of the evaluation map and transfer map theorems*, Tmathematishce Annalen, **211** (1974) 277–288.
- [3] N. Nakamura, *The Seiberg-Witten equations for families and diffeomorphisms of 4-manifolds*, Asian J. Math. **7** (2003), 133–138. ¹

¹ 一部の訂正を投稿中

- [4] V. Turaev, *Euler structures, nonsingular vector fields, and Reidemeister-type torsions*, Math. USSR-Izv. **34** (1990),627–662

ON THE LMO INVARIANT

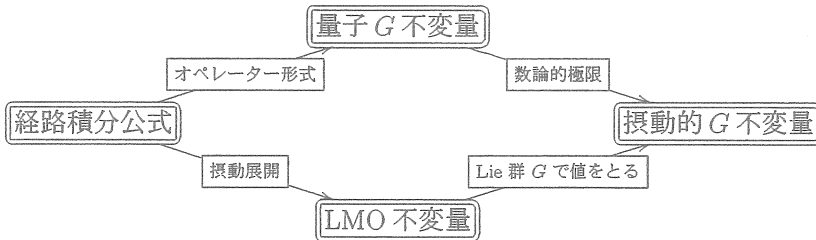
栗屋 隆仁

(九州大学大学院数理学府数理学専攻博士課程一年)

ABSTRACT. 任意の単連結単純 Lie 群 G に対して、有理ホモロジー 3 球面の LMO 不変量 \hat{Z}^{LMO} は摂動的な不変量 τ^{PG} を再現するという予想 (LMO 予想, BGRT or Le の定理) に対して一つの証明を与える。

1. 序

1980年代後半、E. Witten氏は Chern-Simons functional $CS(A)$ をラグランジアンとする場の量子論を考え、経路積分で表示された相関関数が三次元多様体の位相不変量を与えることを主張した。この経路積分公式はまだ数学的に厳密に正当化されていないが、経路積分公式から観測可能な量を取り出すための方法として、オペレーター形式と摂動展開という2つのアプローチが知られている。まず、経路積分の operator formalism を背景として、単純 Lie 群 G に付随した三次元多様体の新しい不変量 (量子 G 不変量) が N. Reshetikhin 氏や V. G. Turaev 氏等により数学的に厳密に構成された。大槻知忠氏は量子 $SO(3)$ 不変量 $\tau_r^{SO(3)}$ に対し、その数論的極限として摂動的な不変量 $\tau^{SO(3)}$ を定義した (一般の単純 Lie 群 G の場合の定義は T.T.Q. Le 氏)。つまり、摂動的な不変量は量子不変量から決まるのであるが、整係数ホモロジー 3 球面上では、逆に摂動的な不変量はすべての量子不変量を決定すると予想され (Lawrence 予想)、葉廣和夫氏と T.T.Q. Le 氏により示された (葉廣-Le の定理)。一方、[13] において、T.T.Q. Le 氏、村上順氏、大槻知忠氏は、経路積分の摂動展開を背景として、任意の有向閉三次元多様体に対し普遍摂動的な不変量 (LMO 不変量) を定義し、任意の単連結単純 Lie 群 G に対して LMO 不変量は摂動的な不変量を再現すると予想した (LMO 予想)。この問題は、経路積分から2つのアプローチにより取り出した量が等価であるか? という問題を背景に持ち、非常に重要かつ興味深い問題である。



さらに、ここでは詳しく述べないが、LMO 不変量は整係数ホモロジー 3 球面の普遍有限型不変量という面も持っており、その観点からも非常に重要な不変量である。[3] において、D. Bar-Natan 氏、S. Garoufalidis 氏、L. Rozansky 氏、D. P. Thurston 氏は有理ホモロジー 3 球面に対して *Århus integral* を定義したが、これは正規化の仕方を除いて、*Århus integral* が定義される時はいつでも、LMO 不変量に一致する。[3] では、LMO 予想の解決が予告 (1997 年) されているのであるが、まだその証明は公表されていない (2004 年現在)。大槻氏によると、この結果は同時期に T.T.Q. Le 氏も得ていたらしいということである。

次の定理が今回の主結果である。

Theorem 1.1 (LMO 予想, BGRT or Le の定理). 任意の単連結単純 Lie 群 G に対して、 \hat{Z}^{LMO} は τ^{PG} を再現する。

本報告集では、LMO 予想の証明のスケッチを与える。葉廣-Le の定理によると、この事実は LMO 不変量が整係数ホモロジー 3 球面の普遍量子不変量であることを意味している。またこの定理の $G = SU(2)$ の場合、すなわち $\tau^{SO(3)}$ の場合は既に、[16] において、大槻知忠氏により証明されていることを強調しておく ($PSU(2) = SO(3)$ に注意)。

謝辞. 今回の結果が完成していない段階で、ほとんど面識の無い一学生の話の快く聞いてくださいました大槻知忠氏、そのセミナーの場において、コメントを頂きました葉廣和夫氏の両氏に感謝いたします。それ以降、何度となく大槻知忠氏には、非常に有益な助言とコメントを頂きました。深く感謝致します。

2. LMO 不変量

framed link とは annuli の disjoint union の \mathbb{R}^3 もしくは S^3 への embedding による像のことである。その framed link の underlying link は annulus $S^1 \times [0, 1]$ をその中心線 $S^1 \times \{\frac{1}{2}\}$ へ制限した物である。1-3 価グラフとはすべての頂点が 1 価または 3 価であるグラフのことである。1-3 価グラフの各 3 価頂点の周りの辺に一つの巡回順序が指定されているとき、vertex-oriented であるという。台 S^1 付き chord diagram とは、 S^1 と、1 価頂点が S^1 上にあるような vertex-oriented 1-3 価グラフを併せたものである。図では S^1 を実線で、グラフを破線で描く。実線に連結していない破線グラフがあっても良いが、 S^1 に同型な破線グラフは無いものとする。すべてのベクトル空間は有理数体 \mathbb{Q} 上で考える。 $A(S^1)$ を台 S^1 付き chord diagram が張るベクトル空間を以下の AS, IHX そして STU 関係式で割った空間とする。

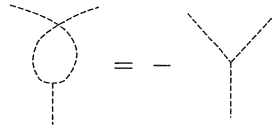


FIGURE 1. AS 関係式:

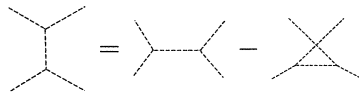


FIGURE 2. IHX 関係式:

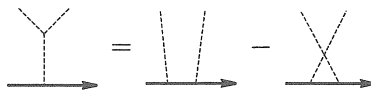


FIGURE 3. STU 関係式

chord diagram の次数は破線グラフの頂点数の半分で定義する。この次数による $A(S^1)$ の完備化もまた $A(S^1)$ で表すこととする。 $A(\emptyset)$ は solid circle がない空間で

ある。このときすべての破線グラフは3価でなければならない。このベクトル空間 $\mathcal{A}(\phi)$ は disjoint union を積とする可換環となる。任意の正整数 m に対して、 $\mathcal{A}(m)$ を $1, 2, \dots, m$ と番号付けられた、ちょうど m 個の1価頂点を持つ vertex-oriented 1-3 価グラフが生成するベクトル空間の AS と IHX 関係式に関する商空間とする。 $\mathcal{A}(S^1)$ は B 、1-3 価グラフの空間 (を AS と IHX 関係式で割った空間) に同型である。この同型 $\sigma : \mathcal{A}(S^1) \rightarrow B$ は $\mathcal{A}(S^1)$ と B の間の形式 PBW 線形同型である。この写像 σ は対称化写像 $\chi : B \rightarrow \mathcal{A}(S^1)$ の逆写像として定義するのが最も簡単である。形式的に、 $B = \prod_{m=0}^{\infty} \mathcal{A}(m)/S_m$ である。ここで対称群 S_m は $\mathcal{A}(m)$ 上に1価頂点の置換として作用する。 B は disjoint union \sqcup を積とする algebra である。

Definition 2.1. $\Omega \in B$ は次で与えられる。

$$\Omega = \exp_{\sqcup} \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m} \omega_{2m}$$

ここで b_{2m} は補正 Bernoulli 数であり以下の巾級数展開により与えられる。

$$\sum_{m=0}^{\infty} b_{2m} x^{2m} = \frac{1}{2} \log \frac{\sinh \frac{1}{2} x}{\frac{x}{2}}$$

また ω_{2m} は $2m$ -wheel、 $2m$ -角形に $2m$ 個の足がついた次数 $2m$ の 1-3 価グラフ、である。

Definition 2.2. 任意の $D \in B$ に対して、写像 $\hat{D} = \partial D : B \rightarrow B$ を、 D のすべての足を D' の足の部分集合に繋げ、その部分集合に関する和を取るにより diagram $D' \in B$ 上に作用するものとして定義する。同様に、 $\langle D, D' \rangle$ を

$$\langle D, D' \rangle := \begin{cases} \hat{D}(D') & (\text{if } \#(\text{legs of } D) = \#(\text{legs of } D')) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

により定める。

Definition 2.3. K は Morse knot、すなわち $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R}_t \times \mathbb{C}_z$ へ埋め込まれた knot で \mathbb{R} 座標への射影が Morse 関数であるものとする。このとき $\mathcal{A}(S^1)/\langle \Theta \rangle$ の要素 $\bar{z}(K)$ を次で定義する。

$$\bar{z}(K) := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2\pi i)^m} \int_{\substack{t_{\min} < t_1 < \dots < t_m < t_{\max} \\ t_j \text{ non-critical}}} \sum_{\substack{\text{pairings} \\ P = \{z_j, z'_j\}}} (-1)^{|P|} D_P \bigwedge_{j=1}^m \frac{dz_j - dz'_j}{z_j - z'_j}$$

ここで対の集合 P は、 $(t_j, z_j), (t_j, z'_j) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}$ が knot 上、同じ水平面上に乗っている別々の点となる非順序対 $\{z_j, z'_j\}$ の集合とする。ここで $\downarrow P$ は P における、向きが下向きである点の個数である。また D_P は knot の preimage と対に対応する点を繋ぐ chord を描くことにより得られる diagram である。 $\Theta \in \mathcal{A}(S^1)$ は "isolated chord" diagram を表す。 $\mathcal{A}(S^1)$ の元とみなすと $\bar{z}(K)$ は Morse knots の不変量を与えるが、 \mathbb{R} -座標に関する極大-極小対の増減に対しては不変とならない。そのため、 $\nu := \bar{z}(U)^{-1} \in \mathcal{A}(S^1)$ で定義される元 ν を導入する必要がある。ここで U は4つの critical points を持つような unknot の Morse embedding である。以上により $c(K)$ 個の critical points を持つ Morse knot K の Kontsevich 積分を次で定義する。

$$Z(K) := \nu^{c(K)/2} \# \bar{z}(K) \in \mathcal{A}(S^1).$$

ここで、 $\#$ は chord diagram の台 S^1 に関する連結和を表す。 STU 関係式により、この操作はどこで連結和を取るかに依存しない。

Definition 2.4. Kontsevich 積分の integer framed 版を以下のように定義する。 K を framing f の integer framed knot とする。

$$\hat{Z}(K) := Z(K) \# \exp_{\#} \left(\frac{f}{2} \Theta \right)$$

ここで、 $\Theta \in \mathcal{A}(S^1)$ は “孤立 chord” diagram である。

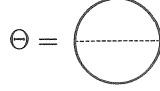


FIGURE 4. Θ graph

また framed knot の Kontsevich 積分の LMMO 版 \check{Z} は次のように定義される。

$$\check{Z}(K) = \nu \# \hat{Z}(K).$$

framing は f なので、(B において)

$$\sigma \check{Z}(K) = \exp_{\sqcup} \left(\frac{f}{2} \omega_1 \right) \sqcup Y$$

と書ける。ここで ω_1 は “dashed interval” (3 価頂点を持たない) であり、 Y はすべての項が少なくとも一つの 3 価頂点を持つグラフである。

Definition 2.5. Kontsevich 積分の形式 Gaussian 積分を次で定義する。

$$\int^{FG} \sigma \check{Z}(K) = \langle \exp_{\sqcup} \left(-\frac{1}{2f} \omega_1 \right), Y \rangle.$$

簡単のため、 M は framed knot S^3 から K に沿って surgery して得られるものとする。link の場合も同様 ([3] 等)。

Definition 2.6. 有理ホモロジー 3 球面 M の LMO 不変量 $\hat{Z}^{LMO}(M)$ は次のように定義される。

$$\hat{Z}^{LMO}(M) := \frac{\int^{FG} \sigma \check{Z}(K)}{\int^{FG} \sigma \check{Z}(\bigcirc^{\text{sign}(f)})}$$

Lemma 2.7. M_K を S^3 を framing f の framed knot K に沿って surgery して得られる有理ホモロジー 3 球面とし、framing 0 の同じ knot を K_0 と書く。このとき、

$$\hat{Z}^{LMO}(M_K) = \langle \Omega, \Omega \rangle \exp \left(\frac{3\text{sign}(f) - f}{48} \theta \right) \int^{FG} (\hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{Z}(K_0)) \exp \frac{f}{2} \omega_1$$

ここで θ は、上の Θ の実線の S^1 を破線に置き換えることで得られる $\mathcal{A}(\phi)$ の元である。

Proof. [3, 6] において、以下の事実が示されている。

$$\begin{aligned} \int^{FG} \hat{\Omega}^{-1} D &= \int^{FG} D \\ \int^{FG} \sigma \check{Z}(\bigcirc^{\text{sign}(f)}) &= \langle \Omega, \Omega \rangle^{-1} \exp \left(-\frac{\text{sign}(f)}{16} \theta \right) \\ \hat{\Omega}^{-1} \sigma \Theta &= \omega_1 - \frac{1}{24} \theta \end{aligned}$$

$\hat{\Omega}^{-1} \sigma$ が algebra isomorphism であることに注意して計算すればよい。 \square

3. 重み系

\mathfrak{g} -weight system の定義を思い出そう。次数付き weight system $\hat{W}_{\mathfrak{g}}$ は以下の二つの写像を組み合わせて構成される。一つ目は、グラフ $D \in \mathcal{A}(S^1)$ (もしくは B) に $h^{\deg(D)}$ を掛ける写像である。二つ目は、以下のような写像である。 \mathfrak{g} を \mathfrak{g} -不変内積 $b: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{C}$ を持つ Lie 環とする。 m 個の 1 価頂点を持つ、各 chord diagram D に対して、テンソル

$$T_{\mathfrak{g},b}(D) \in \mathfrak{g}^{\otimes m}$$

は次のようにして構成される。

Lie 積 $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}$ におけるテンソル とみなせる。内積 b によって \mathfrak{g} -modules \mathfrak{g} と \mathfrak{g}^* を同一視できる。それゆえに、 $[\cdot, \cdot]$ を $f \in (\mathfrak{g}^*)^{\otimes 3}$ のテンソルとみなせ、また b は不変対称テンソル $c \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ を与える。

chord diagram D に対して、 T によりその 3 価頂点の集合を、 U により 1 価頂点の集合を、そして E により辺の集合を表す。テンソル f の $|T|$ 個のコピーをとり、テンソル c の $|E|$ 個のコピーをとることで、新しいテンソル

$$\tilde{T}_{\mathfrak{g}}(D) = \left(\bigotimes_{v \in T} f_v \right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in E} c_{\ell} \right)$$

を考える。これは

$$\mathfrak{g}^D = \left(\bigotimes_{v \in T} (\mathfrak{g}_{v,1}^* \otimes \mathfrak{g}_{v,2}^* \otimes \mathfrak{g}_{v,3}^*) \right) \otimes \left(\bigotimes_{\ell \in E} (\mathfrak{g}_{\ell,1} \otimes \mathfrak{g}_{\ell,2}) \right),$$

の元となる。ここで (v, i) , $i = 1, 2, 3$, を頂点 v で出会う 3 つの辺に付け (これらの辺の巡回順序に合うように)、そして (ℓ, j) , $j = 1, 2$, を edge ℓ の端点に付ける。 c は対称で f は歪対称なのでテンソル $\tilde{T}_{\mathfrak{g}}(D)$ は順序付けの選択によらない。

$(v, i) = \ell$ で $(\ell, j) = v$ である時、自然な縮約写像 $\mathfrak{g}_{v,i}^* \otimes \mathfrak{g}_{\ell,j} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。そのようなすべての縮約を合成すると、写像

$$\mathfrak{g}^D \longrightarrow \bigotimes_{u \in U} \mathfrak{g} = \mathfrak{g}^{\otimes m} \quad (m = |U|).$$

が得られる。 $\tilde{T}_{\mathfrak{g}}(D)$ の $\mathfrak{g}^{\otimes m}$ における像を $T_{\mathfrak{g},b}(D)$ (もしくは普通 $T_{\mathfrak{g}}(D)$) で表す。

$D \in \mathcal{A}(S^1)$ の場合、STU 関係式により $T_{\mathfrak{g}}(D)$ は $W_{\mathfrak{g}}(D) \in \mathcal{U}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ に写される。 $D \in B$ の場合、1 価頂点を対称化することにより $T_{\mathfrak{g}}(D)$ は $W_{\mathfrak{g}}(D) \in S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}$ に写る。STU、AS、IHX 関係式は自動的に満たされる。 $W_{\mathfrak{g}}$ に対して、AS、IHX は Lie 積の歪対称性と Jacobi 恒等式であり、STU は単に \mathfrak{g} のテンソル代数の商空間としての普遍包絡環の定義である。

$$W_{\mathfrak{g}}: \mathcal{A}(S^1) \rightarrow Z(\mathcal{U}(\mathfrak{g}))$$

は \mathfrak{g} に対応する *universal weight system* と呼ばれる。実際、Lie 環 \mathfrak{g} の表現 V を使って得られる、すべての $W_{\mathfrak{g},V}([1])$ を見よ) は $W_{\mathfrak{g}}$ の evaluation :

$$W_{\mathfrak{g},V}(D) = \text{Tr}_V(W_{\mathfrak{g}}(D)).$$

により構成できるという意味で普遍的である。

4. 量子不変量と摂動的な不変量

G を単連結単純 Lie 群 G とし、 \mathfrak{g} をその Lie 環、 V_{λ} を dominant integral weights λ で parametrize された \mathfrak{g} (と generic な q に対する $U_q(\mathfrak{g})$) の有限次元既約表現とする。不変内積 (\cdot, \cdot) を持つ単純複素 Lie 環 \mathfrak{g} が与えられると、前述の様に、写像

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}}: B \rightarrow S(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]]$$

が存在する。写像

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}} \circ \sigma \circ \hat{Z} : \{\text{Knots}\} \rightarrow \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]]$$

を knot の \mathfrak{g} -colored Jones function と呼ぶ。knot の \mathfrak{g} -colored Jones function は knot の量子不変量を生成する function である。 \mathfrak{g} のある既約表現 V_{λ} が与えられると、その dominant weight での evaluation は線形写像

$$\mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]] \rightarrow \mathbb{Q}[[\hbar]]$$

を与える。これらの合成による Kontsevich 積分の像に表現次元を掛け合わせたものは環 $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ (ここで $q = e^{\hbar}$) の一つの元となり、 $(\mathfrak{g}, V_{\lambda})$ を用いて構成した knot K の量子不変量 $J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(K)$ に一致する。 $J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(K) \times J_{\mathfrak{g}, V_{\lambda}}(\bigcirc)$ を $Q_{\mathfrak{g}}(K)(\lambda)$ で表す。

上の evaluation をもう少し詳しく見ておこう。まず、AS 関係式により B において legs は“櫛状”にしか生えない。また、各 edge には \mathfrak{g} の元が指定されているのであるが、 \mathfrak{g} のルート分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha > 0} \mathfrak{g}_{\alpha}$ に対し、テンソルの双線型性から、各 edge に \mathfrak{h} または \mathfrak{g}_{α} の元のみが指定されているような和の形に書くことができる。 λ は \mathfrak{h} の元であることに注意すると、

$$\begin{aligned} [\lambda, y] &= 0 & (y \in \mathfrak{h}) \\ [\lambda, y_{\alpha}] &= (\lambda, \alpha) y_{\alpha} & (y_{\alpha} \in \mathfrak{g}_{\alpha}) \end{aligned}$$

であるから、 λ による (legs の) evaluation の作用は以下のようになることがわかる。

$$= \text{loop with } y_{\alpha} \times (\lambda, \alpha)^3$$

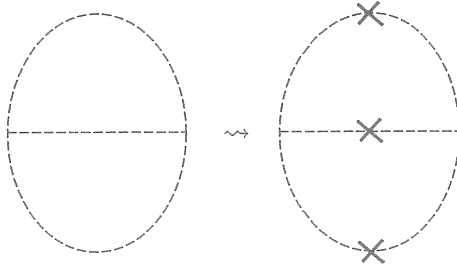
すなわち、各連結成分は、(各辺に (λ によらない) \mathfrak{g}_{α} の元が指定された閉じたグラフ) \times (λ の次数 = legs の本数となる (λ, α) たちの積) という形になる。例えば、

$$W_{\mathfrak{g}} \left(\begin{array}{c} m_1 \text{ legs} \\ m_2 \text{ legs} \\ m_3 \text{ legs} \end{array} \right) (\lambda) = \sum_c W_{\mathfrak{g}}^c \left(\begin{array}{c} y_{\alpha c_1} \\ y_{\alpha c_2} \\ y_{\alpha c_3} \end{array} \right) \times \prod_j (\lambda, \alpha_{c_j})^{m_j}$$

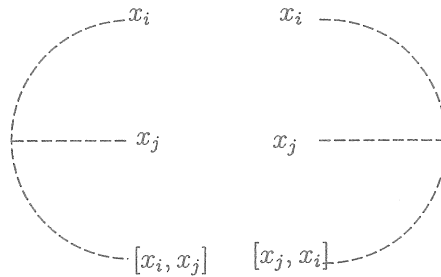
となる。ここで、 c は各辺に α を指定する指定の仕方を表す。 $\alpha^j(\lambda) = (\alpha, \lambda)^j$ という同一視により、これらは \mathfrak{h} 上の (α たちの) 多項式関数とみなせる。このように

多項式とみなしておく、 $(x_i, x_j) = \delta_{i,j} = \partial_{x_i} x_j$ により縮約写像と方向微分を同一視できる。ここで $\{x_k\}$ は $(,)$ に関する正規直交基底である。

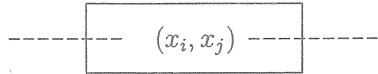
Example 4.1 (θ グラフの値の計算). 以下のように、まずグラフを切り分け Y 字グラフたちに分ける。



次に各辺に $(,)$ に関する正規直交基底を指定する。このとき 3 辺のうち 2 辺に基底たちを指定すると残りの 1 辺にはそれらの Lie 積を取った値が指定される。また、分断前に同一の辺であった 2 つの辺には同じ基底が指定されることに注意する。



最後に、



のように、元々同一辺であった辺上に指定された元たちを内積により評価する。 $(x_i, x_j) = \delta_{i,j} = \partial_{x_i} x_j$ により縮約写像と方向微分を同一視できる。すなわち、左側のグラフで右側のグラフを“微分”していると思えるのである (*Definition 2.2* との対応に注意)。

$$\begin{aligned}
 W_g(\theta) &= \sum_{i,j=1}^{\dim g} (x_i, x_i)(x_j, x_j)([x_i, x_j], [x_j, x_i]) \\
 &= 24(\rho, \rho)
 \end{aligned}$$

2 番目の等号については [12] 参照 (*Freudenthal-de Vries's Strange Formula* などを使う)。

$Q_g(K)$ から有理ホモロジー 3 球面の量子 PG 不変量が構成でき、 $\tau_r^{PG}(M)$ で表す。 $\tau_r^{PG}(M)$ は \mathbb{C} の元であるが、多項式環とか冪級数環の元ではないので、通常の意味で $\tau_r^{PG}(M)$ を r に関して展開できない。 r で展開する代わりに、大槻知忠氏は $\tau_r^{PG}(M)$ に r -進極限を取るにより摂動的不変量 $\tau^{PG}(M) \in \mathbb{Q}[[\hbar]]$ を考えた (例えば [15])。

[14] において、T.T.Q. Le 氏は以下の定理を示している。

Theorem 4.2. M_K を S^3 を framing f の framed knot K に沿って surgery して得られる有理ホモロジー 3 球面とし、framing 0 の同じ knot を K_0 と書く。このとき、

$$\tau^{PG}(M_K) = \frac{1}{|W|} q^{\frac{\text{sign}(f)-f}{2} |\rho|^2} \prod_{\alpha>0} (1-q^{\text{sign}(f)(\rho,\alpha)}) \sum_{\substack{\beta \in Y, n \in \mathbb{Z}_+ \\ 2|\Phi_+| \leq 2j \leq n+2|\Phi_+|}} c_{\beta,2j,n} (2j-1)!! \left(-\frac{|\beta|^2}{f}\right)^j h^{n-j}$$

ここで $(Q_{\mathfrak{g}}(K_0)|_{q=e^h})(\lambda - \rho) = \sum_{\substack{\beta \in Y, n \in \mathbb{Z}_+ \\ 2|\Phi_+| \leq j \leq n+2|\Phi_+|}} c_{\beta,j,n} \beta^j(\lambda) h^n$, $\beta^j(\lambda) = (\beta, \lambda)^j$, $|W|$ は

Weyl 群 W の位数, そして $\rho = \frac{1}{2} \sum_{\alpha>0} \alpha$ である ($\alpha > 0$ は α が正のルートであることを意味する)。

5. LMO 予想の証明の概略

[12] において、筆者は次の事実を示した。

Theorem 5.1. algebraically split framed link から得られる有理ホモロジー 3 球面に対して LMO 予想が正しいことと、任意の有理ホモロジー 3 球面に対して LMO 予想が正しいことは同値である。

[9] の旧版 ([8]) において、S. Garoufalidis 氏は以下を示した。

Theorem 5.2. 下図は可換。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{B} & \xrightarrow{\hat{\Omega}} & \mathcal{B} \\ \hat{W}_{\mathfrak{g}} \downarrow & & \hat{W}_{\mathfrak{g}} \downarrow \\ \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]] & \xrightarrow{D(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}})} & \mathcal{S}(\mathfrak{g})^{\mathfrak{g}}[[\hbar]] \end{array}$$

ここで $D(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}})$ は可換環の Duflou 同型である。

Remark . ここで注意すべきことは $D(j_{\mathfrak{g}}^{\frac{1}{2}})$ は “ ρ だけのずらし” であるということである。

Theorem 1.1 の証明. [8] において、S. Garoufalidis 氏は以下の式を示した。

$$\hat{W}_{\mathfrak{g}}(\langle \Omega, \Omega \rangle) = \prod_{\alpha>0} \frac{\sinh(\frac{\rho,\alpha}{2} h)}{\frac{(\rho,\alpha)}{2} h} \quad (5.1)$$

また、任意の単連結単純 Lie 群 G に対して

$$W_{\mathfrak{g}}(\theta) = 24(\rho, \rho) \quad (5.2)$$

が成り立つ ([12] を見よ)。

$$\begin{aligned} & \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K)) \\ &= \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\langle \Omega, \Omega \rangle \exp\left(\frac{3\text{sign}(f) - f}{48} \theta\right) \int^{FG} (\hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{Z}(K_0)) \exp \frac{f}{2} \omega_1) \\ &= \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\langle \Omega, \Omega \rangle) \exp\left(\frac{3\text{sign}(f) - f}{48} \hat{W}_{\mathfrak{g}}(\theta)\right) \hat{W}_{\mathfrak{g}}\left(\int^{FG} (\hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{Z}(K_0)) \exp \frac{f}{2} \omega_1\right) \end{aligned}$$

次が成り立つことが分かる。

$$\begin{aligned}
W_g(\hat{\Omega}^{-1}\sigma\check{Z}(K_0))(\lambda) &= W_g(\hat{\Omega}^{-1}\sigma\hat{Z}(K_0))(\lambda)W_g(\hat{\Omega}^{-1}\sigma(\chi(\Omega)))(\lambda) \quad (\hat{\Omega}^{-1}\sigma : \text{an alg. iso.}) \\
&= D(j_g^{\frac{1}{2}})^{-1}W_g\sigma\hat{Z}(K_0)(\lambda)D(j_g^{\frac{1}{2}})^{-1}W_g\sigma\chi\Omega(\lambda) \quad (\text{Theorem 5.2}) \\
&= W_g\sigma\hat{Z}(K_0)(\lambda - \rho)W_g\sigma\hat{Z}(\circ)(\lambda - \rho) \quad (\text{by Remark}) \\
&= \frac{\prod_{\alpha>0}(\rho, \alpha)^2}{\prod_{\alpha>0}(\lambda, \alpha)^2} Q_g(K_0)|_{q=e^h}(\lambda - \rho) \quad (\text{section 4}) \\
&= \frac{\prod_{\alpha>0}(\rho, \alpha)^2}{\prod_{\alpha>0}(\lambda, \alpha)^2} \sum_{\substack{\beta \in Y, n \in \mathbb{Z}_+ \\ 2|\Phi_+| \leq j \leq n + 2|\Phi_+|}} c_{\beta, j, n} \beta^j(\lambda) h^n
\end{aligned}$$

次の等式

$$\prod_{\alpha>0} (q^{\frac{\alpha}{2}} - q^{-\frac{\alpha}{2}}) = \sum_{w \in W} \text{sign}(w) q^{w(\rho)}$$

が知られている。このとき、

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{\alpha>0} (q^{\frac{\alpha}{2}} - q^{-\frac{\alpha}{2}}) \right)^2 &= \left(\sum_{w \in W} \text{sign}(w) q^{w(\rho)} \right)^2 \\
&= \sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') q^{w(\rho) + w'(\rho)}
\end{aligned}$$

ベクトル x に対しその方向微分 ∂_x の作用は $\partial_x \lambda = (\lambda, x)$ で与えられる。

$$\sum_{k=1}^{\dim g} (x_k, \lambda)^2 = (\lambda, \lambda)$$

に注意する。ここで $\{x_k\}$ は $(,)$ に関する正規直交基底である。

$$\begin{aligned}
&\exp\left(-\frac{h}{2f} \sum_k \partial_{x_k}^2\right) \left(\sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') q^{w(\rho) + w'(\rho)} \right) \Big|_{\alpha \rightarrow h^{-1}\alpha} \Big|_{x=0} \\
&= \sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{h}{2f}\right)^j \frac{1}{j!} \left(\sum_k \partial_{x_k}^2 \right)^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} (w(\rho) + w'(\rho))^i \right) \Big|_{x=0} \\
&= \sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{h}{2f}\right)^j \frac{1}{j!} \frac{1}{(2j)!} (2j)! (w(\rho) + w'(\rho), w(\rho) + w'(\rho))^j \\
&= \sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{h}{2f}\right)^j \frac{1}{j!} (2|\rho|^2 + 2(w(\rho), w'(\rho)))^j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') \sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{h}{f}\right)^j \frac{1}{j!} (|\rho|^2 + (w(\rho), w'(\rho)))^j \\
&= q^{-\frac{|\rho|^2}{f}} \sum_{w, w' \in W} \text{sign}(ww') q^{(w(\rho), w'(\rho))} \\
&= |W| q^{-\frac{|\rho|^2}{f}} \sum_{w \in W} \text{sign}(w) q^{(\rho, w(\rho))} \\
&= |W| q^{-\frac{|\rho|^2}{f}} \prod_{\alpha > 0} \left(q^{\frac{(\rho, \alpha)}{2f}} - q^{-\frac{(\rho, \alpha)}{2f}} \right) \\
&= |W| \prod_{\alpha > 0} \left(1 - q^{-\frac{(\rho, \alpha)}{f}} \right) \\
&= |W| \left(\left(-\frac{h}{f}\right)^{|\Phi+1|} \prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha) \right) \times (1 + \dots)
\end{aligned}$$

これにより、 $\exp(-\frac{h}{2f} \sum_k \partial_{x_k}^2)$ の $\prod_{\alpha > 0} \alpha^2$ への作用は $|W| \prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha) \left(-\frac{h}{f}\right)^{|\Phi+1|}$ で与えられることがわかる。

$$\begin{aligned}
&\hat{W}_g \left(\int^{FG} (\hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{Z}(K_0)) \exp \frac{f}{2} \omega_1 \right) \\
&= \hat{W}_g \left(\left\langle \exp\left(-\frac{\omega_1}{2f}\right), \hat{\Omega}^{-1} \sigma \check{Z}(K_0) \right\rangle \right) \\
&= \exp\left(-\frac{h}{2f} \sum_k \partial_{x_k}^2\right) \left(\prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha)^2 \sum c_{\beta, i, n} \frac{1}{\prod_{\alpha > 0} (h^{-1} \alpha)^2} h^n (h^{-1} \beta)^i \right) \Big|_{x=0} \\
&= h^{2|\Phi+1|} \prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha)^2 \sum_j \left(-\frac{h}{2f}\right)^j \frac{1}{j!} \left(\sum_k \partial_{x_k}^2 \right)^j \left(\sum c_{\beta, i, n} \frac{1}{\prod_{\alpha > 0} \alpha^2} h^n (h^{-1} \beta)^i \right) \Big|_{x=0} \\
&= h^{2|\Phi+1|} \prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha)^2 \sum c_{\beta, 2j, n} \frac{1}{|W| \prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha)} \left(-\frac{f}{h}\right)^{|\Phi+1|} \left(-\frac{|\beta|^2}{f}\right)^j h^{n-j} \frac{1}{2^j j!} (2j)! \\
&= (-fh)^{|\Phi+1|} \frac{\prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha)}{|W|} \sum c_{\beta, 2j, n} \left(-\frac{|\beta|^2}{f}\right)^j (2j-1)!! h^{n-j}
\end{aligned}$$

2番目の等号において、縮約写像 (section 3 を見よ) と方向微分を同一視している。(5.1) と (5.2) によって、

$$\begin{aligned}
&\hat{W}_g(\langle \Omega, \Omega \rangle) \exp\left(\frac{3\text{sign}(f) - f}{48} \hat{W}_g(\theta)\right) \\
&= \left(\prod_{\alpha > 0} \frac{\sinh\left(\frac{(\rho, \alpha)}{2} h\right)}{\frac{(\rho, \alpha)}{2} h} \right) \left(e^h \right)^{\frac{3\text{sign}(f) - f}{2} |\rho|^2} \\
&= \frac{1}{\prod_{\alpha > 0} (\rho, \alpha)} \left(-\frac{\text{sign}(f)}{h} \right)^{|\Phi+1|} q^{\frac{\text{sign}(f) - f}{2} |\rho|^2} \prod_{\alpha > 0} (1 - q^{\text{sign}(f)(\rho, \alpha)})
\end{aligned}$$

以下の事実を思い出す。

$$|H_1(M_K; \mathbb{Z})| = f \text{sign}(f)$$

すなわち、

$$\hat{W}_g(\hat{Z}^{\text{LMO}}(M_K)) = |H_1(M_K; \mathbb{Z})|^{\Phi+|\tau^{PG}}(M_K)$$

Theorem 5.1 により、一般の場合は L が algebraically split link としてよい。この場合証明は、“偏微分”を使えば、上で示した knot の場合と同様である。□

REFERENCES

- [1] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev invariants*, Topology, **34** (1995), 423–472.
- [2] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D.P. Thurston, *Wheels, wheeling, and the Kontsevich integral of the unknot*, Israel J.Math. **119** (2000), 217–238.
- [3] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D.P. Thurston, *The Århus integral of rational homology 3-spheres. I. A highly non trivial flat connection on S^3* , Selecta Math. (N.S.) **8** (2002), no. 3, 315–339.
- [4] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D.P. Thurston, *The Århus integral of rational homology 3-spheres. II. Invariance and universality*, Selecta Math. (N.S.) **8** (2002), no. 3, 341–371.
- [5] D. Bar-Natan, S. Garoufalidis, L. Rozansky and D.P. Thurston, *The Århus integral of rational homology 3-spheres III: The Relation with the Le-Murakami-Ohtsuki Invariant*, to appear in Selecta Math.
- [6] D. Bar-Natan and R. Lawrence, *A rational surgery formula for the LMO invariant*, preprint, 2000 math.GT/0007045.
- [7] N. Berline, E. Getzler and M. Vergne, *Heat kernels and Dirac operators*, Grundlehren der mathematischen wissenschaften **298**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992.
- [8] S. Garoufalidis, *Rationality: From Lie algebras to Lie groups*, preprint.
- [9] S. Garoufalidis, *Beads: From Lie algebras to Lie groups*, preprint.
- [10] K. Habiro, *Cyclotomic completions of polynomial rings*, preprint, 2002 math.AC/0209324.
- [11] K. Habiro, *On the quantum \mathfrak{sl}_2 invariants of knots and integral homology spheres*, Geometry and Topology Monographs, Vol. 4 (2002), 55–68.
- [12] T. Kuriya, *The LMO invariant and Guadagnini-Pilo’s conjecture for lens spaces*, preprint.
- [13] T.T.Q. Le, J. Murakami and T. Ohtsuki, *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, Topology, **37** (1998), 539–574.
- [14] T.T.Q. Le, *Quantum invariants of 3-manifolds: integrality, splitting, and perturbative expansion*, Topology Appl. **127** (2003), no. 1-2, 125–152.
- [15] T. Ohtsuki, *Quantum invariants, A study of knots, 3-manifolds, and their sets*, Series on Knot and Everything **29**, World Scientific Publishing Co., Inc 2001.
- [16] T. Ohtsuki, *The perturbative $SO(3)$ invariant of rational homology 3-spheres recovers from the universal perturbative invariant*, Topology **39**, (2000) 1103–1135.
- [17] Edited by T. Ohtsuki, *Problems on invariants of knots and 3-manifolds*, <http://www.ms.u-tokyo.ac.jp/tomotada/proj01/>.

- [18] N. Yu. Reshetikhin, V. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math., **103** (1991), 547–598.
- [19] L. Rozansky, *A universal $U(1)$ -RCC invariant of links and rationality conjecture*, preprint, 2002 math.GT/0201139.
- [20] L. Rozansky, *A rationality conjecture about Kontsevich integral of knots and its implications to the structure of the colored Jones polynomial*, Topology Appl. **127** (2003), no. 1-2, 47–76.
- [21] S. Willerton, *The Kontsevich Integral and structures on the space of diagrams*, Knots in Hellas '98 (Delphi), 530–546, Ser. Knots Everything, 24, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 2000.
- [22] A. Vaintrob, *Universal weight systems and the Melvin-Morton expansion of the colored Jones knot invariant*, Algebraic geometry, 5. J. Math. Sci. **82** (1996), no. 1, 3240–3254.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, 6-10-1 HAKOZAKI, HIGASHIKU,
FUKUOKA 812-8581, JAPAN

E-mail address: marron@math.kyushu-u.ac.jp

3次元多様体上のアノソフ流のバーコフ切断について

皆川宏之 (国立大学法人山形大学教育学部)

平成16年6月10日

§1. 問題提議

M を3次元閉多様体とする。 $\phi_t : M \rightarrow M$ が Anosov 流であるとは、接束 TM の $d\phi_t$ -不変かつ連続な分解 $TM = E^0 \oplus E^s \oplus E^u$ が存在し、任意に与えられた M の計量に対して、定数 $C > 0$ 、 $a > 0$ が存在して次の不等式が成り立つときをいう。

$$\begin{aligned} \|d\phi_t(v)\| &\leq Ce^{-at}\|v\| \text{ for } \forall t > 0, \forall v \in E^s \\ \|d\phi_{-t}(v)\| &\leq Ce^{-at}\|v\| \text{ for } \forall t > 0, \forall v \in E^u \end{aligned}$$

ここで、 E^0 は、流れに接する部分ベクトル束、 E^s 、 E^u は、1次元部分ベクトル束である。 E^s 、 E^u が向き付け可能であるとき Anosov 流は、向き付け可能であると言われる。部分束 $E^0 \oplus E^s$ 、 $E^0 \oplus E^u$ は、積分可能であり、 C^1 級の余次元1葉層構造 \mathcal{F}^s 、 \mathcal{F}^u を定める。 \mathcal{F}^s は、安定葉層、 \mathcal{F}^u は、不安定葉層と呼ばれる。一般に、流れは、稠密な軌道をもつとき推移的であると言われる。Anosov 流の場合、それは、次のいずれかが成り立つことと同値である。

- (1) 閉軌道が稠密に存在する。
- (2) 安定葉層の各葉が M で稠密である。
- (3) 不安定葉層の各葉が M で稠密である。

推移的な Anosov 流の例として次のものが典型的である。

(例1) 双曲閉曲面の測地流さらに一般的に、双曲軌道体 (hyperbolic

orbifold) の測地流

(例 2) トーラスの双曲的自己同相写像の懸垂流

測地流と懸垂流は、互いに位相同値ではないが、互いに手術同値になるものが存在することが知られている (§3 Birkhoff の構成法を参照)。ここで、2つの流れの間に、軌道向きを保って軌道に写すような同相写像が存在するとき、その2つの流れは、位相同値であると言われる。また、2つの流れをそれぞれ何本かの閉軌道に沿ってブローアップした流れが互いに位相同値であるとき、それらは手術同値であるという。この現象を受けて、D. Fried、J. Christy は、次の問題を提議している。

問題 1 全ての3次元閉多様体上の Anosov 流は、懸垂流に手術同値であるか?

問題 2 懸垂流どうしは、互いに手術同値であるか?

この講演では、向き付け可能な Anosov 流について、これらの問題に関する研究の状況と得られている結果を報告する。

§2. 流れのブローアップ

ϕ^t を向き付け可能な3次元多様体上の流れ、 γ をその閉軌道とする。この流れを γ の環状近傍に制限した局所的流れを $S^1 \times \mathbb{R}^2$ 上の局所的流れとみなす。このとき、 $S^1 \times \{(0,0)\}$ が γ となるようにしておく。ここで、 \mathbb{R}^2 において極座標を用いると、この局所的流れは、 $S^1 \times [0, \infty) \times S^1$ 上の流れを誘導することが示される ([6] 参照)。従って、 ϕ^t は、閉軌道 γ をトーラスにブローアップしてえられる境界をもつ3次元多様体 M_γ 上の流れ ϕ_γ^t を誘導する。流れ ϕ_γ^t を ϕ^t の γ に沿ったブローアップ流れという。極座標を用いた計算を実行することにより ϕ_γ^t を ∂M に制限した流れは、 γ の各点 x を法線方向の作る円周

$$S_x^1 = ((T_x M / E_x^0) - \{0\}) / \mathbb{R}_{>0}$$

で置き換えることにより得られるトーラス T_γ 上に $d\phi^t$ が導く流れに位相共役であることがわかる。ここで、多様体 M_1 上の流れ ϕ_1^t と M_2 上の流れ ϕ_2^t が位相共役であるとは、同相写像 $h: M_1 \rightarrow M_2$ が存在して

$h \circ \phi_1^t = \phi_2^t \circ h$ が成り立つときをいう。

ϕ^t が向き付け可能なアノソフ流の場合、 ϕ_γ^t は、境界 T_γ 上に丁度 4 本の閉軌道をもつ。そのうち 2 本は、 E^u から決まるアトラクターであり、残りの 2 本は、 E^s からきまるリペラーである。さらに、それらは、 S_x^1 と丁度 1 度交わる。そこで、これを用いて、 $H_1(T_\gamma) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ の基底を閉軌道が表すホモロジー類を $(1, 0)$ 、流れの方向をみて半時計回りに向きをつけた S_x^1 の表すホモロジー類を $(0, 1)$ と定めておく。また、流れに、横断的な曲面片の向きは、流れの方向を見て、時計回りを正の向きとする ([5] 参照)。

§3. Birkhoff 切断

ϕ^t を 3 次元多様体 M 上の向き付け可能な Anosov 流とする。 ϕ^t がトーラスの双曲的自己同相写像の懸垂流に手術同値であるならば、そのトーラスによるバンドル構造が、 ϕ^t を何本かの閉軌道の和集合 Γ でブローアップした多様体のバンドル構造、従って、ブローアップ流れ ϕ_Γ^t 切断 $\hat{\Sigma}$ を定める。ここで、 Γ にそってブローダウンすると、この切断は、 M にはめ込まれた曲面を定める。このような曲面を Birkhoff 切断という。ここで、正確な定義を述べておく。

ϕ^t を 3 次元多様体上の流れとする。多様体 M にはめ込まれたコンパクトな曲面 Σ が Birkhoff 切断であるとは、次の 3 つの条件を満たすときをいう ([7] 参照)。

(B1) $\text{Int}(\Sigma)$ は、流れに横断的な埋め込まれた曲面である。

(B2) 境界 $\partial\Sigma$ は、 ϕ^t の有限本の閉軌道の和集合である。

(B3) ある正数 t_0 が存在して、任意の点 $x \in M$ に対して、 $\phi^t(x) \in \Sigma$ となるような $t \in [0, t_0]$ が存在する。

逆に、Anosov 流に対して Birkhoff 切断が存在するならば、その流れは、トーラスの Anosov 同相写像かまたは閉曲面の一般化された擬 Anosov 同相写像の懸垂流と手術同値となることがわかる。ここで、 $f: \Sigma \rightarrow \Sigma$ が閉曲面 Σ 上の (一般化された) 擬 Anosov 同相写像であるとは、次の 3 つの条件を満たす、共通の (つの型を許す) 分岐特異点をもつ測度付き葉層のペア (\mathcal{F}^+, μ^+) 、 (\mathcal{F}^-, μ^-) が存在するときを言う。

- (1) f は、 \mathcal{F}^+ 、 \mathcal{F}^- を保つ、
- (2) \mathcal{F}^+ と \mathcal{F}^- は、特異点の外で横断的に交わる、
- (3) $f_*\mu^+ = \lambda\mu^+$ 、 $f_*\mu^- = \lambda^{-1}\mu^-$ となる正数 $\lambda > 1$ が存在する。

ただし、測度の送り込み (push forward) $f_*\mu$ を $f_*\mu(T) = \mu(f^{-1}(T))$ と定める。(3) の λ を f の拡大度 (dilatation) という。

Theorem 3.1 ([5]) 任意の 3 次元閉多様体上の推移的 Anosov 流は、Birkhoff 切断をもつ。

向き付け可能な Anosov 流の場合、Birkhoff 切断を用いると問題 1 は、つぎのように言い換えることができる。

問題 1' 向き付け可能な Anosov 流は、種数 1 の Birkhoff 切断をもつか？

§4. Birkhoff 切断の構成

「Fried の構成法 ([6])」 Anosov 流に対する Markov 分解を用いると、流れに横断的な四角形 $ABCD$ で向き付けられた辺 AB を流れに沿って移動させて向き付けられた辺 AD に重ねることができ、同様に CD を CB に重ねることができるものの存在が言える。そこで、 AB から AD に至る流れの帯と CD から CB に至るそれを四角形に貼り合わせてからその内部が流れに横断的になるように変形する。内部に自己交叉がある場合には、流れに横断的になるように切り貼り (cut and paste) を行なうと、条件 (B1)、(B2) を満たすはめ込まれた曲面が得られる。Anosov 流が推移的であるときには、最初の四角形を十分多く取っておくと、各軌道がそれらの四角形のいずれかの内部と交わるようにできる。これらの四角形それぞれについて上の構成を行ない、それらの和集合に対して、必要があれば切り貼りを行なうと Birkhoff 切断が構成される。

この構成法では、一般的には、四角形の選び方に制限がうまくできないので、結果として、出来上がった Birkhoff 切断の種数をコントロールすることができない (§7 Theorem 5.6 のアイディア参照)。

「Birkhoff の構成法 ([6]、[8])」 種数 g の双曲的閉曲面 Σ_g の測地流の Birkhoff 切断を次のように構成した。まず、曲面上の閉測地線 c_1, \dots, c_{2g+2} を

- (1) 任意の i に対して c_i と c_{i+1} は、丁度 1 点で交わる、
- (2) c_{2g+2} と c_1 は、丁度 1 点で交わる、
- (3) (1)、(2) 意外の交叉はない

という条件を満たすように選ぶ。 Σ_g からこれらの閉測地線をすべて除くと 4 つの包体がえられるがそれぞれの閉包は、 Σ_g 内の測地的 $2g+2$ 角形となる。これら 4 つの包体のうち、その閉包が辺を共有しない 2 つを選び P_1, P_2 とおく。各 i について、 $P_i - 1$ 点を真に凸な閉曲線の滑らかな族 C_i で分割する。 $C_1 \cup C_2$ に属する曲線の各点における単位接ベクトル全体のなす集合の単位接束 $T_1\Sigma_g$ での閉包を Σ とすると、それが Σ_g の測地流に対する種数 1 の Birkhoff 切断となる。

「Brunella の構成法 ([3])」 Σ_g を種数 g の向き付けられた双曲的閉曲面とする。 c_1, \dots, c_k を Σ_g 上の向き付けられた単純閉測地線で

- (1) 任意の i に対して、 c_i と c_{i+1} は丁度 1 点で交わり、
 $[c_i \text{ の向き}, c_{i+1} \text{ の向き}] = \Sigma \text{ の向き}$ である、
- (2) c_k と c_1 は、丁度 1 点で交わり、
 $[c_k \text{ の向き}, c_1 \text{ の向き}] = \Sigma \text{ の向き}$ である、
- (3) (1)、(2) 意外の交叉はない、
- (4) $\Sigma_g - \cup_{i=1}^k c_i$ の連結成分は、すべて包体である、

を満たすものとする。次に、 c_i の各点における c_i の向きの単位接ベクトル及びそれらを正の向きに 180 度回転するまでの全てのベクトルを集めた単位接束内のアニュラスを Γ_i とおく。 $\cup_{i=1}^k \Gamma_i$ において内点が 2 重点をもたず流れに横断的になるように切り貼りを行なうと種数 1 のパーコフ切断が得られる。

Birkhoff の構成法における c_1, \dots, c_{2g+2} に対して Brunella の構成法を実行すると Birkhoff の構成法によりえられる Birkhoff 切断と流れに

沿ってイソトピックな Birkhoff 切断が得られる。

「橋口の構成法 ([9])」 Birkhoff の構成法において、凸閉曲線族 C_i の中心点が、曲面の錐特異点であっても同様の構成が可能であることを発見した。3つの錐特異点をもつ双曲的軌道体のうち、3つの特異点を互いに分離する8の字型の閉測地線が存在する場合を扱う。その閉測地線をの補集合として現れる包体のうちその閉包が残りの2つの特異点を分離するものを選び P とする。 P に対して一般化した Birkhoff の構成法を行なうと 測地流に対する種数 1 の Birkhoff 切断が得られる。

§5. 現在の状況と結果

これまでに知られている Birkhoff 切断の構成法を見る限り、問題 1 を肯定的に解くには、まだまだ準備が足りないと思われる。そこで、問題をこれまでの歴史的な流れに従って Seifert 多様体上の Anosov 流に限って考えてみる。次の定理が、知られている。

Theorem 5.1 ([1], [9]) 有向閉曲面上の主 Seifert 束上の Anosov 流は、双曲的軌道体上の測地流の有限被覆により得られる Anosov 流と位相同値である。このような、2つの Anosov 流が、位相同値である必要十分条件は、その安定葉層が互いに位相共役となることである。

しかし、問題を測地流に限ってもこれまでの構成法だけでは、十分ではないことを次の例が示している。

「Thurston の例 ([16])」 8の字結び目 (figure eight knot) は、モノドロミーが $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ のファイバー結び目であり結び目に沿った $(n, 1)$ 手術 ($n = \pm 1, \pm 2, \pm 3$) は、Seifert 多様体を与える。上の定理を合わせて考えると、双曲的軌道体の測地流のなかには、開円盤を1つ除いたトーラスを Birkhoff 切断にもつものが存在することが解る。

この例では、Birkhoff 切断の境界の成分は、1つであるが、これまでに知られている Fried によるもの以外の構成法では、境界は、偶数個の成分をもたなければならない。そこで、Thurston の例に現れる Birkhoff 切断を測地流に対し直接幾何学的に構成することを1つめの目標として定め次の定理を得た。

Theorem 5.2 3つの錐特異点をもつ双曲軌道体の測地流は、境界の成分が1つで種数1の *Birkhoff* 切断をもつ。

この定理の証明に用いた方法を一般化して次の定理を得た。

Theorem 5.3 種数0の双曲的軌道体の測地流は、種数1の *Birkhoff* 切断をもつ。

Theorem 5.4 任意の自然数 g に対して、種数 g で $2g+6$ 固以下の錐特異点をもつ双曲的軌道体の測地流は、種数1の *Birkhoff* 切断をもつ。

また、測地流に対する *Birkhoff* 切断の中から、単位接束のファイバー方向の被覆で持ち上げても種数が変化しないものを見つけ出すことによって次の定理を証明した。

Theorem 5.5 有向閉曲面上の主 S^1 束上のアノソフ流は、種数1の *Birkhoff* 切断をもつ。

問題2に関しては、Fried の構成法を参考に懸垂流のパーコフ切断を初等的に構成することにより次の結果を得た。

Theorem 5.6 任意の $\text{tr} A \geq 4$ である $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ に対して、 $\text{tr}(B) < \text{tr}(A)$ である $B \in SL(2, \mathbb{Z})$ が存在して A の誘導するトーラス自己同相写像の懸垂流は B の誘導するそれと手術同値になる。

§6. 種数が2以上の *Birkhoff* 切断

問題1、2とは、直接関係はないが、有向閉曲面の擬アノソフ同相写像の面白い族を見つけたので報告する。

Theorem 6.1 種数 $g \geq 2$ の有向閉曲面 Σ_g 上の擬アノソフ同相写像 f_g で、その拡大度 λ_g が方程式

$$\left(\sum_{i=0}^{2g} (-1)^i x^i \right) - 2x^g = 0$$

の最大実数解であるものが存在する。さらに、次の評価式が成り立つ。

$$\log \lambda_g \leq \frac{\log(2 + \sqrt{3})}{g}$$

この例を、これまでに知られている最小の拡大度をもつ例と比較してみると、

($g = 2$ の場合) Zhiron ([17]) により示された例と同じ拡大度をもつ。

($g \geq 3$ の場合) Bauer ([2]) により示された例では、拡大度の対数は、 $\frac{\log 6}{g}$ 以下であることが示されているが、上の定理の例は、その評価をさらに良くしている。

§7. 証明のアイディア

Theorem 5.2.

角度が $2\pi/p$, $2\pi/q$, $2\pi/r$ の錐特異点をもつ双曲的軌道体の軌道体の基本群を $\Gamma_{p,q,r}$ とおく。双曲的 3 角形群 $\Gamma_{p,q,r}$ から $S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ の PL 同相写像群への準同型写像でその有理 Euler 数が $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} - 1$ となるものを構成することにより、この双曲的軌道体上の測地流の安定葉層 \mathcal{F}^s に横断的 PL 構造を与える。葉のホロノミーを計算することによりこの横断的 PL 構造は、 \mathcal{F}^s から 1 本の閉軌道を除いた葉層の横断的アフィン構造を定めることが示される。このアフィン構造の全ホロノミーの線形部分の定める 1 次元コホモロジー類の Poincaré 双対が求める Birkhoff 切断を与える。

Theorem 5.3.

まず、Birkhoff、橋口による構成法を共通の中心をもつ 2 組の同心凸閉曲線族に対して行なうことにより、Theorem 5.2 の Birkhoff 切断を幾何学的に構成することができた。さらに、Brunella の構成法のアイディアを、測地線分による有向グラフに対して適用することにより新しい構成法を見つけた。これら 2 つの構成法を同時に用いることが可能であることを示し、それらを用いて定理は証明される。

Theorem 5.6.

$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を $a+d \geq 4$ なる $SL(2, \mathbf{Z})$ の元とする。 $SL(2, \mathbf{Z})$ で共役をとることにより、 $a \geq c \geq d \geq 1$ かつ $a \geq b \geq d \geq 1$ と仮定して良い。このとき、 $\begin{pmatrix} a-1 & b \\ c & d-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in (-1, 0] \times (0, 1)$ が示される。このベクト

ルを x とおき、さらに $A' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $B' = -x$ 、 $C' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 、 $D' = x + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ とおく。 X の導く $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ の双曲的同相写像を \bar{X} とし、その懸垂流を $\phi_X^t : M_X \rightarrow M_X$ とする。ただし、 $M_X = M \times [0, 1]/(x, 1) \sim (\bar{X}(x), 0)$ とする。平行四辺形 $A'B'C'D'$ の $T^2 \times \{0\}$ への像を 4 角形 $ABCD$ とし、Fried の構成を行なったものを S とする。 $S \cup (T^2 \times \{\frac{1}{2}\})$ に切り貼りを行なうことにより種数 1 の Birkhoff 切断が得られる。

Theorem 6.1.

行列 $X = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対し S を上のように構成する。ここで、次の和集合 $S \cup \left(\bigcup_{i=1}^g T^2 \times \{\frac{i}{2g}\} \right)$ に切り貼りを行なうことにより種数 g の Birkhoff 切断 S_g が得られる。懸垂流 ϕ_X^t の S_g に関する回帰写像を S_g の各境界成分を 1 点に縮約することで、求める Σ_g 上の擬アノソフ同相写像 f_g が得られる。この構成法をもとに、 f_g の PL モデルが初等的に構成される。定理のなかの方程式および評価式は、このモデルを用いて初等的に計算される。

参考文献

- [1] T. Barbot, Caractérisation des flots d'Anosov en dimension 3 par leurs feuilletages faibles, *Ergod. Th. & Dynam. sys.* 15 (1995), 247–270.
- [2] M. Bauer, An upper bound for the least dilatation, *Tracs. Amer. Math. Soc.* Vol. 330, No.1 (1992), 361–370.
- [3] M. Brunella, On the discrete Godbillon-Vey invariant and Dehn surgery on geodesic flows, *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math.* (6) 3 no. 3 (1994), 335–344.
- [4] M. Brunella, On the topological equivalence between Anosov flows on three-manifolds, *Comment. Math. Helv.* 67 (1992), 495–470.

- [5] S. Fenley, Anosov flows in 3-manifolds, *Annals of Math.* 139 (1994), 79–115.
- [6] D. Fried, Transitive Anosov flows and pseudo-Anosov maps, *Topology* vol. 22, No. 3 (1983), 299–303.
- [7] D. Fried, The geometry of cross sections to flows, *Topology* Vol. 21, No.4 (1982), 353–371.
- [8] E. Ghys, Sur l’invariance topologique de la classe de Godbillon-Vey, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 37, 4 (1987), 59–76.
- [9] E. Ghys, Flots d’Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles, *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* 4 (1984), 67–80.
- [10] N. Hashiguchi, On the geodesic flows on Seifert fibered spaces, preprint.
- [11] N. Hashiguchi, PL-representations of Anosov foliations, *Ann. Inst. Fourier, Grenoble* 42, 4 (1992), 937–965.
- [12] N. Hashiguchi, On the Anosov diffeomorphisms corresponding to geodesic flows on negatively curved closed surfaces, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA, Math.* 37 (1990), 485–494.
- [13] S. Kamatani, H. Kodama, and T. Noda, A Birkhoff section for the Bonatti-Langevin example of Anosov flow, *Abstract in Geom. and Fol. Kyoto 2003*, 367–372.
- [14] H. Minakawa, Algebraic property of dilatation constants of piecewise linear structures of Anosov foliations, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* 11 (2004), 65–74.
- [15] H. Minakawa, Transversely piecewise linear foliation by planes and cylinders; PL version of a theorem of E. Ghys, *Hokkaido Math. J.* 20 (1991), 531–538.
- [16] W. Thurston, The geometry of 3-manifolds, preprint.
- [17] A. Zhirov, On the minimum dilatation of pseudo-Anosov diffeomorphisms of a pretzel, *Comm. Moscow Math. Soc.* (1995), 223–224.

特異ファイバーの分裂現象をめぐって

高村 茂（京都大学大学院理学研究科数学教室）

e-mail: takamura@math.kyoto-u.ac.jp

単位円盤 $\Delta = \{s \in \mathbb{C} : |s| < 1\}$ でパラメータ付けされたコンパクトなリーマン面の族で、原点上のファイバーが特異点をもち、それ以外の点の上のファイバーはなめらかなリーマン面である族をリーマン面の退化といいます。すなわち、複素曲面 M から単位円盤 Δ への正則写像 π で $X = \pi^{-1}(0)$ は特異ファイバー、 $X = \pi^{-1}(s)$ ($s \neq 0$) はなめらかなファイバーであるような組 $\pi : M \rightarrow \Delta$ をリーマン面の退化と呼びます。さて、なめらかなファイバーが種数 g のリーマン面であるような退化はどれくらいあるか、と言う問題がまず考えられます。この問題を考える上で鍵となるのは特異ファイバーのまわりのモノドロミー（これは写像類群の元になっています）と結びつけることです。松本幸夫氏とモンテシノス氏は退化の位相同値類とモノドロミーは一対一に対応するという画期的な定理を示し、退化全体の集合をモノドロミーの立場から鳥瞰することができる、という見方を提示しました。さらに、モノドロミーは擬周期的な同相写像ということがわかるので、退化を理解することはリーマン面の擬周期的な同相写像を理解することに帰着されるわけです。その後、足利正氏と石坂瑞穂氏は安定曲線の周期的同相写像の観点から「種数 g のリーマン面の退化の具体的なアルゴリズム」（足利-石坂アルゴリズム）を与えました。（同時に両氏は種数 3 の分類を完成しています。それによると種数 3 の場合、約 1600 個の退化が存在します。ちなみに種数 1、2 の場合はそれぞれ小平邦彦氏および浪川、上野両氏により約 10、120 個の退化があることが示されています。）

もう少し補足しておく、退化には 2 つの種類があります。すなわち、特異ファイバーの形状が星形 (stellar) または星座型 (constellar) によって 2 種類に大別されます。星座型というのは、文字通りいくつかの星形ファイバーを基本的な操作（松本-モンテシノス結合）で結合して得られたファイバーです。モノドロミーの立場から言うと、星形ファイバーはモノドロミーが周期的同相写像、一方、星座型ファイバーのモノドロミーは（周期的でない）擬周期的同相写像です。具体的には、星形ファイバーは芯 (core) と呼ばれる既約成分から何本かの枝 (branch)、すなわちリーマン球面の chain が出た形をしています。また、星座型ファイバーはいくつかの星形ファイバーの枝と枝を結び合わせてできた形をしています。このとき、枝と枝が結ばれてできた部分（これもリーマン球面の chain）は星座型ファイバーの幹 (trunk) と言います。

以上述べたように、リーマン面の退化の分類は、モノドロミーと結びつけることにより解決をみたのですが、さて話しはここから始まります。一般に、ある対象が時間

とともに変化するとき、この対象は「不安定」であると考えられます。その反対にも、時間がたっても変化しないときは「安定」である、と言えます。こういう見方は力学系の分野で基本的な考えなのですが、リーマン面の退化に対しても、このような見方を導入することができます。すなわち、時間パラメータ $t \in \Delta'$ を用意し (Δ' は十分小さい開円盤)、与えられた退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の時間発展 $\{\pi_t: M_t \rightarrow \Delta\}_{t \in \Delta'}$ を考えます。ここで、 M_t は複素曲面 M の変形である複素曲面、 π_t は正則写像 π の変形である正則写像とします。特に、時刻 0 では $\pi_0: M_0 \rightarrow \Delta$ は元の退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ に一致します。さて、時刻 $t=0$ では退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の特異ファイバーは 1 本だけですが、もし時刻 $t \neq 0$ で、 $\pi_t: M_t \rightarrow \Delta$ の特異ファイバーが 2 本以上のとき (これらを X_1, X_2, \dots, X_l とします)、時間発展 $\{\pi_t: M_t \rightarrow \Delta\}_{t \in \Delta'}$ を退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の分裂族 (splitting family) と言い、元の特異ファイバー X が X_1, X_2, \dots, X_l に分裂した、といいます。私たちがリーマン面の退化のカテゴリーで採用する「安定」の概念は「退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ の分裂族がまったく存在しないとき、 $\pi: M \rightarrow \Delta$ を原子的 (atomic) という」ふうに定めます。また「不安定」の概念はもちろん、「退化 $\pi: M \rightarrow \Delta$ が少なくとも 1 つは分裂族をもつとき (分子的, molecular)」です。また、複雑な形をした特異ファイバーは「不安定」だろう (分裂しやすい) と推測されますが、実際、複雑な星座型ファイバーは分裂しやすいです。これに対し、星形ファイバーが分裂するかどうかは (高種数になると) 微妙な問題です。

現在までのところ、筆者により種数 5 以下に限っては、原子的な退化の分類は完成しています。(種数 1、2 のときはそれぞれモイシェゾン氏、堀川氏によります。なお、種数 3 以上のときは彼らの使った 2 重分岐被覆法は使えないので、別の手法を用います。注: 種数 1、2 のリーマン面は超楕円的ですが、種数 3 以上では、そうとは限りません。) 種数 5 以下の場合、原子的な退化の特異ファイバーはレフシェッツファイバー (これは node をただ 1 つだけもつ安定曲線です) またはなめらかなリーマン面の何重かになっている多重ファイバーになっています。

さて、分裂族の構成法としては、モイシェゾン氏、堀川氏により始まり足利氏と荒川氏によって任意の種数の超楕円的な退化へと発展した 2 重分岐被覆法という精緻な方法や、筆者による一般のリーマン面の退化に対しても有効な剥がし変形という方法があります。後者の方法でできる分裂族では元の特異ファイバーは、1 つの主要ファイバー (main fiber) といくつかの付随ファイバー (subordinate fiber) に分裂しますが、最近、明治大学の栗田育子氏により付随ファイバーの興味深い性質がいろいろとあきらかにされています (2004 年修士論文)。

さて、分裂族と写像類群の関係を少しみてみましょう。たとえば、特異ファイバー X が l 個の特異ファイバー X_1, X_2, \dots, X_l に分裂するとしましょう。 X のまわりのモノドロミーを h 、 X_i のまわりのモノドロミーを h_i とするとき、分裂族から h の分解が定まります。

$$h = h_1 h_2 \cdots h_l.$$

特に、 X_1, X_2, \dots, X_l がすべてレフシェッツファイバーのとき、 h_1, h_2, \dots, h_l はすべて右まわりのデーンツイストになります。したがって、 $h = h_1 h_2 \cdots h_l$ は h の右まわり

のデーンツイストへの分解になります。もちろん、古典的な定理「写像類群のどんな元もデーンツイストの積へ分解できる」わけですが、それでは、分裂族に由来したモノドロミー h の分解はどのように特徴付けすればいいのでしょうか。なにか特殊な性質をもつはずと推測されますが、まだはっきりしたことはあまりわかっていません。このように代数幾何学やトポロジー、組み合わせ論が複雑に「出会う」面白さがリーマン面の退化の分裂族にあります。上で述べたこと以外にも、多変数パラメータ分裂族など、興味深い話題もあります。本講演では、適当なトピックスを選んで説明したいと思います。

なお、足利正氏と遠藤久顕氏によるリーマン面の退化全般の秀逸な論説が雑誌「数学」(第50巻1号2004年1月) p 49-72に出ているので興味を持たれた方は参照してください。

謝辞 トポロジーのシンポジウムで講演する機会はありませんでしたが、このような機会を与えて下さった主催者の方々に感謝いたします。

1 の分割の拡張問題とその周辺

筑波大学大学院 数理物質科学研究科 山崎 薫里

1. 連続関数の拡張と Dydak の問題

以下、空間はすべて T_1 -空間であることを仮定し、 γ は無限濃度、 I は $[0, 1]$ 、 \mathbb{N} は自然数全体の集合、 \mathbb{R} は実数全体の集合をあらわす。位相空間 Y が濃度高々 γ であるような基底をもつとき、 $w(Y) \leq \gamma$ とあらわす。

位相空間 X の部分空間 A で定義された連続関数 $f: A \rightarrow Y$ が X 上へ連続に拡張されるための X, A, Y に関する条件を求める問題は、連続関数の拡張問題と呼ばれる。終域 Y に関する研究はレトラクト理論や ANR 理論として発展した。他方、定義域 X, A に関する条件は、 Y が実数空間や Banach 空間の場合には、Tietze-Urysohn の拡張定理 (定理 1.1) や Dowker の定理 (定理 1.2) が有名である。

X を位相空間、 A をその部分空間とする。任意の実数値連続関数 (resp. 実数値連続有界関数) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ を X 上の連続関数に拡張できるとき、 A は X に C -embedded (resp. C^* -embedded) であるという。特に、 A が X に C^* -embedded であることは、任意の連続関数 $f: A \rightarrow I$ を X 上の連続関数 $g: X \rightarrow I$ に拡張できることと必要十分である。任意の $w(Y) \leq \gamma$ な Banach 空間 Y に対し、任意の連続関数 $f: A \rightarrow Y$ を X 上の連続関数に拡張できるとき、 A は X に P^γ -embedded であるという。任意の γ に関して A が X に P^γ -embedded であるとき、 A は X に P -embedded であるという。これらの性質は次のようにまとめられる ([2], [9], [10])。

$$P\text{-embedding} \implies P^\omega\text{-embedding} \iff C\text{-embedding} \implies C^*\text{-embedding}$$

定理 1.1 (Tietze-Urysohn の拡張定理 [21], [22]). 位相空間 X に関して、次は同値である:

- (1) X は正規空間である;
- (2) X の任意の閉集合は X に C -embedded である;
- (3) X の任意の閉集合は X に C^* -embedded である。

C^* -embedding と C -embedding の概念は、一般には一致しない。例えば、 \mathbb{N} は $\beta\mathbb{R} \setminus (\beta\mathbb{N} \setminus \mathbb{N})$ に C^* -embedded な閉集合であるが C -embedded ではない ([10])。ここで、 $\beta\mathbb{R}$, $\beta\mathbb{N}$ はそれぞれ \mathbb{R} , \mathbb{N} の Stone-Ćech コンパクト化をあらわす。

定理 1.2 (Dowker [4]). 位相空間 X に関して, 次は同値である:

- (1) X は族正規空間である;
- (2) X の任意の閉集合は X に P -embedded である.

ここで, 位相空間 X が族正規であるとは, X の疎な閉集合族 \mathcal{F} が X の互いに交わらない開集合族で分離できることをいう.

位相空間 X の部分空間 A は, ある連続関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ を用いて $A = f^{-1}(\{0\})$ とあらわされるとき, X の零集合 (zero-set) と呼ばれる. X の零集合の補集合を余零集合 (cozero-set) という.

X を位相空間, \mathcal{U}, \mathcal{V} を X の被覆とする. 任意の $U \in \mathcal{U}$ に対して $U \subset V_U$ となる $V_U \in \mathcal{V}$ が存在するとき, \mathcal{U} は \mathcal{V} を細分する といい, $\mathcal{U} < \mathcal{V}$ とあらわす. また, $\mathcal{U}^* = \{\text{St}(U, \mathcal{U}) : U \in \mathcal{U}\}$, $\text{St}(U, \mathcal{U}) = \bigcup \{U' \in \mathcal{U} : U \cap U' \neq \emptyset\}$ と定義する. X の開被覆の列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ が各 $n \in \mathbb{N}$ に関して $\mathcal{U}_{n+1}^* < \mathcal{U}_n$ を満たすとき, $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ は正規列 (normal sequence) と呼ばれる. X の開被覆 \mathcal{U} は, $\mathcal{U}_1 < \mathcal{U}$ となるようなある正規列 $\{\mathcal{U}_n : n \in \mathbb{N}\}$ を持つとき, 正規開被覆 (normal open cover) と呼ばれる.

C^* , C , P -embedding は正規開被覆の拡張として統一的に表現できる.

定理 1.3 ([2], [9], [15], [20]). X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, A が X に C^* (resp. C , P^γ)-embedded であるための必要十分条件は, A 上の有限な (resp. 可算な, 濃度が高々 γ である) 正規開被覆 \mathcal{U} に対し $\{V \cap A : V \in \mathcal{V}\} < \mathcal{U}$ となるような X 上の正規開被覆 \mathcal{V} が存在することである.

定理 1.3 により, 関数の拡張を, より扱いやすい部分集合族の拡張と捉えられたことは, shape 理論や次元論などにおける研究の発展の端緒となった. 特に, 次の定理および系は重要である.

定理 1.4 (Alò-Sennott [1], Morita-Hoshina [16], Przymusiński [17]). X を位相空間, A を X の部分空間とすると, 次は同値である:

- (1) A は X に P^γ -embedded である;
- (2) $w(Y) \leq \gamma$ である任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に C^* - (or P^γ -) embedded である;
- (3) $A \times I$ は $X \times I$ に P^γ -embedded である.

系 1.5 (Morita [14], Morita-Hoshina [16]). X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, A が X に P^γ -embedded であるならば, $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ は $X \times I$ に P^γ -embedded である.

一方, J. Dydak [5] は 1996 年, 複数の連続関数を同時に拡張する場合として, 1 の分割の拡張問題を提起した.

X を位相空間, $\{f_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ を X から I への連続関数からなる族とする. $\{f_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ が 1 の分割 (*partition of unity*) であるとは, 任意の $x \in X$ に関して $\sum_{\alpha \in \Omega} f_\alpha(x) = 1$ が成り立つときをいう. ただし, ここで $\sum_{\alpha \in \Omega} f_\alpha(x) = \sup\{\sum_{\alpha \in \delta} f_\alpha(x) : \delta \text{ は } \Omega \text{ の有限集合}\}$ と定義されている.

X の 1 の分割 $\{f_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ が 局所有限 (*locally finite*) (resp. 点有限 (*point-finite*)) であるとは, $\{f_\alpha^{-1}((0, 1]) : \alpha \in \Omega\}$ が局所有限 (resp. 点有限) であることをいう. ここで, X の部分集合からなる族 \mathcal{U} が局所有限であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, 高々有限の \mathcal{U} の元としか交わらないような近傍 O_x が存在することをいう. また, X の部分集合からなる族 \mathcal{U} が点有限であるとは, 任意の $x \in X$ に対して, x を含む \mathcal{U} の元は高々有限であることをいう.

X を位相空間, A を X の部分空間とする. $|\Omega| \leq \gamma$ となるような A 上の任意の局所有限な (resp. 点有限な) 1 の分割 $\{f_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ を X 上の局所有限な (resp. 点有限な) 1 の分割 $\{g_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ に拡張できる (すなわち, 任意の $\alpha \in \Omega$ に対し $g_\alpha|_A = f_\alpha$ とできる) とき, A は X に P^γ (locally-finite)-embedded (resp. P^γ (point-finite)-embedded) であるという (Dydak [5]). また, 任意の γ に対して A が X に P^γ (locally-finite)-embedded (resp. P^γ (point-finite)-embedded) であるとき, A は X に P (locally-finite)-embedded (resp. P (point-finite)-embedded) と呼ばれる ([5]).

(局所有限または点有限とは限らない) 1 の分割の拡張は, 次のように特徴付けられる.

定理 1.6 (Dydak [5]). X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, A 上の任意の 1 の分割を X 上の 1 の分割の拡張できるための必要十分条件は, A は X に P -embedded であることである.

したがって, (局所有限または点有限とは限らない) 1 の分割に関するホモトピー拡張定理は定理 1.5 に帰着される.

一方, J. Dydak [5] は, ' $A \times I$ が $X \times I$ に P^γ (locally-finite)- (resp. P^γ (point-finite)-) embedded であるとき $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ は $X \times I$ に P^γ (locally-finite)- (resp. P^γ (point-finite)-) embedded である' を示し, 以下の未解決問題を挙げた.

問題 1.7 (Dydak [5]). A を X の P^γ (locally-finite)-embedded な部分空間とする. このとき, $A \times I$ は $X \times I$ に P^γ (locally-finite)-embedded であるか?

問題 1.8 (Dydak [5]). A を X の P^γ (point-finite)-embedded な部分空間とする. このとき, $A \times I$ は $X \times I$ に P^γ (point-finite)-embedded であるか?

すなわち, 上述の問題 1.7 および 1.8 は, 局所有限または点有限な 1 の分割に関する Borsuk 型のホモトピー拡張定理を完成させるための本質的な部分を問うものである. 本講演では, 上述の問題 1.7 の肯定解と問題 1.8 の部分解, 問題の歴史的な背景, および関連する話題を紹介する.

2. 局所有限な 1 の分割の拡張問題とその周辺

定理 1.4 や系 1.5 は, 定理 1.3 にある P -embedding という ‘写像の拡張’ を正規開被覆の拡張という ‘よい集合族の拡張’ としてとらえられたことが証明の鍵であった. 同様に, 1 の分割の拡張をよい集合族の拡張としてとらえてみるという発想は自然であり, 実際, M. Katětov [13] や T. C. Przymusiński - M. L. Wage [18] の古典的文献中にも見られる (定理 2.1).

X を位相空間, A をその部分空間, $\mathcal{U} = \{U_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ を A の被覆とする. X の被覆 \mathcal{V} が \mathcal{U} の拡張であるとは, \mathcal{V} は $\mathcal{V} = \{V_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ と (\mathcal{U} と同じ添え字で) あらわされ各 $\alpha \in \Omega$ について $V_\alpha \cap A = U_\alpha$ となるようにできることである. 位相空間 X は正規空間でかつ X の任意の開集合 A 上の局所有限な余零被覆 (resp. 可算な局所有限な余零被覆) を X 上の局所有限な余零被覆に拡張できるとき, functionally Katětov (resp. countably functionally Katětov) であるという ([13], [18]).

これらの位相的性質は次のような関係にある (Katětov [13]).

族正規 可算パラコンパクト \Rightarrow functionally Katětov \Rightarrow 族正規
 正規 可算パラコンパクト \Rightarrow countably functionally Katětov \Rightarrow 正規

上の図にある implications の逆はすべて成り立たない ([13], [18]). つまり, (countably) functionally Katětov 性は, (族) 正規可算パラコンパクトや (族) 正規といったよく知られた性質と一致しない中間の性質と位置づけられ, さらに以下のように 1 の分割の拡張と関連する.

定理 2.1 (Przymusiński - Wage [18]). 次が成り立つ.

(1) 位相空間 X が functionally Katětov であるための必要十分条件は, X の任意の開集合上の任意の局所有限な 1 の分割を X 上の局所有限な 1 の分割の拡張できること (すなわち, X の任意の開集合は X に P (locally-finite)-embedded) である.

(2) 位相空間 X の部分空間 A が X に P -embedded であるための必要十分条件は A 上の任意の局所有限な 1 の分割を X 上の (局所有限とは限らない) 1 の分割の拡張できることである.

定理 2.1 の (1) では, (2) のように部分空間 A を固定した表現にはできていなかった. [23] において, この部分の改良となる次の結果を得た.

定理 2.2 ([23]). X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, A が X に $P^\gamma(\text{locally-finite})$ -embedded であるための必要十分条件は, A 上の濃度が高々 γ な局所有限な余零被覆を X 上の局所有限な余零被覆に拡張できることである.

定理 2.2 の証明の本質的な部分は, 次の補題を示したことである.

補題 2.3 ([23])¹. X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, A が X に C -embedded であるための必要十分条件は, 任意の連続関数 $f: A \rightarrow I$ と $f^{-1}((0, 1]) = U \cap A$ となるような X の余零集合 U に対して, $g^{-1}((0, 1]) \subset U$ となるような f の連続な拡張 $g: X \rightarrow I$ が存在することである.

定理 2.2 を用いて, 問題 1.7 の肯定解を与える次の定理を得た.

定理 2.4 ([23]). X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, 次は同値である:

- (1) A は X に $P^\gamma(\text{locally-finite})$ -embedded である;
- (2) $w(Y) \leq \gamma$ である任意のコンパクト Hausdorff 空間 Y に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に $P^\gamma(\text{locally-finite})$ -embedded である;
- (3) $A \times I$ は $X \times I$ に $P^\gamma(\text{locally-finite})$ -embedded である.

系 2.5. X を位相空間, A をその部分空間とする. このとき, A は X に $P^\gamma(\text{locally-finite})$ -embedded であるならば, $(X \times \{0\}) \cup (A \times I)$ は $X \times I$ に $P^\gamma(\text{locally-finite})$ -embedded である.

定理 1.4 に関連して, A の X への $P(\text{locally-finite})$ -embedding を, $Y \in \mathcal{C}$ となるすべての Y に関する $A \times Y$ の $X \times Y$ への C^* -embedding として特徴付けるための空間のクラス \mathcal{C} を求める問題が生じる. この問題に関し, 次を得た.

¹' $g^{-1}((0, 1]) \subset U$ ' は ' $g^{-1}((0, 1]) = U$ ' に改良できる ([25]).

定理 2.6 ([24]). X を位相空間, A をその部分空間とする. A が X に P^ω (locally-finite)-embedded であるための必要十分条件は, 任意の可分距離空間 Y で, ある閉疎な集合 Y_1 を除いた集合 $Y - Y_1$ が局所コンパクトであるようなものに対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に C^* -embedded である.

この定理は, よく知られた定理 ‘ A が X に C (すなわち P^ω)-embedded であるための必要十分条件は, 任意の局所コンパクト可分距離空間 Y に対して, $A \times Y$ は $X \times Y$ に C^* -embedded である’ と比較できる.

3. 点有限な 1 の分割の拡張とその周辺

点有限な 1 の分割に関する問題 1.8 は, 現在でも未解決である. ここでは, この問題へのアプローチの過程で得られた問題 1.8 への部分解および Dydak の別の問題への否定解を紹介する.

P (point-finite)-embedding の研究において, M -embedding という古典的概念が密接に関連する. 任意の Banach 空間の凸部分集合 Y について, 任意の連続関数 $f: A \rightarrow Y$ を X 上の連続関数に拡張できるとき, A は X に M -embedded であるという (Sennott [19]). J. Dydak [5] は

$$M\text{-embedding} \implies P(\text{point-finite})\text{-embedding} \implies P\text{-embedding}$$

が成り立つことを示した. 一方, M - と P (point-finite)-embedding が一致するかどうかは未解決である² (Dydak [5]).

位相空間 X とその部分空間 A に対して, X に新たな位相 $\{U \cup V : U \text{ は } X \text{ の開集合, かつ } V \subset X \setminus A\}$ を導入した空間を X_A とあらわす. 特に, X を実数全体の集合 \mathbb{R} , A を有理数全体の集合 \mathbb{Q} とするとき, X_A (すなわち $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$) は Michael 直線 と呼ばれる. 有理数全体の集合 \mathbb{Q} は Michael 直線 $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ に P -embedded であるが M^ω -embedded ではない例である (Hoshina [12], Sennott [19]). このような背景のもと, Dydak [5] は

問題 ‘ \mathbb{Q} は $\mathbb{R}_{\mathbb{Q}}$ に P^γ (point-finite)-embedded であるか?’

を提起し, 一方, P -embedded であるが P^ω (point-finite)-embedded でない独自の例を構成している. この例は, ‘ A を完備距離化可能でない距離位相を持つ単体的複体, X を A を部分空間として含むような完備距離空間

² M -embedding に関しては, 系 1.5 に対応するようなホモトピー拡張定理が成立する (Sennott [19]). したがって, もし P (point-finite)-embedding と M -embedding が一致すれば, 問 1.8 は肯定的に解決される.

とするとき、 A は X_A に P^ω (point-finite)-embedded ではない' というものであるが、証明には A が単体的複体であることが本質的に用いられており、 \mathbb{R}_Q には単体的複体を持つような幾何的な情報が期待できないことが問題解決への困難な点であった。

点有限なケースも 1 の分割を関数の拡張でなく 'よい集合族の拡張' として扱えることからアプローチし、次の定理を得た。証明には、補題 2.3 を用いる。

定理 3.1 ([26]). X を位相空間、 A をその部分空間とする。このとき、 A が X に P^ω (point-finite)-embedded である必要十分条件は、 A 上の点有限な可算余零被覆を X 上の点有限な可算余零被覆に拡張できることである。

被覆の濃度が非可算の場合には、定理 3.1 に対応するような結果は (必要条件および十分条件ともに) 成立しないことを示す例が構成できる ([26]).

定理 3.1 を用いて、次を示した。

定理 3.2 ([26]). X を第 2 類、 A をその稠密な部分空間で (A 自身において) 第 1 類かつ完全正規空間であるとする。このとき、 A は X_A に P^ω (point-finite)-embedded ではない。

定理 3.2 から、直ちに上述の Dydak の問題の否定解が得られる。

系 3.3 ([26]). \mathbb{Q} は \mathbb{R}_Q に P^ω (point-finite)-embedded ではない。

また、定理 3.1 を用いることで、問題 1.8 の部分解が得られる (unpublished)。ここで、 $\omega + 1 = \{\alpha : \alpha \leq \omega\}$ で通常の順序位相をもつ。

定理 3.4. A は X に P^ω (point-finite)-embedded ならば、 $A \times (\omega + 1)$ は $X \times (\omega + 1)$ に P^ω (point-finite)-embedded である。

位相空間 X_A 上の連続関数の拡張の話題は [27]、1 の分割全般に関する話題は [6] に詳しい。

4. 補題 2.3 の Controlling Extensions への応用

P (locally-finite) および P (point-finite)-embedding の集合の拡張による特徴付けを与えるための鍵は、補題 2.3 を示したことにあった。補題 2.3 にあるような、拡張となる関数がある特別な値を取るようにできること (または、そのようにできる連続関数の拡張) は、Controlling Extensions (または Controlled Extensions) と呼ばれる。Controlling Extensions の系統的な研究は、M. Frantz [8] によって始められた。

定理 4.1 (Frantz [8]). X を正規空間, A を X の閉部分空間とする. Z_0, Z_1 を交わらない X の零集合, $f: A \rightarrow I$ は $Z_i \cap A = f^{-1}(\{i\})$, $i = 0, 1$ をみたく連続関数とする. このとき, $Z_i = g^{-1}(\{i\})$ ($i = 0, 1$) となるような f の連続な拡張 $g: X \rightarrow I$ が存在する.

補題 2.3 を改良することで, 次の定理 4.2 を得た. この結果は, 定理 4.1 で述べられている Controlled Extensions を特徴づけの形に改良するものである.

定理 4.2 ([25]). X を位相空間, A を X の部分空間とする. Z_0, Z_1 を交わらない X の零集合, $f: A \rightarrow I$ は $Z_i \cap A = f^{-1}(\{i\})$, $i = 0, 1$ をみたく連続関数とすると, $Z_i = g^{-1}(\{i\})$ ($i = 0, 1$) となるような f の連続な拡張 $g: X \rightarrow I$ が存在するための必要十分条件は, A は X に C -embedded となることである.

最近, V.Gutsev-H.Ohta-K.Yamazaki [11] は, n -次元単位球 D^n への集合値関数に対しある種の境界を避けるような連続選択関数の存在を用いた C -embedding の特徴付けを与えた. この特徴付けを用いて, 次の定理 4.3 を得ることができる. この結果は, 定理 4.2 の一般化とみなせる. ここで, ∂D^n は D^n の境界, すなわち $(n-1)$ -次元球面をあらわす.

定理 4.3. X を位相空間, A をその部分空間, n を自然数とする. このとき, A が X に C -embedded であるための必要十分条件は, $h: X \rightarrow D^n$ を連続関数, $f: A \rightarrow D^n$ を $f^{-1}(\partial D^n) = h^{-1}(\partial D^n) \cap A$ かつ $f|_{h^{-1}(\partial D^n) \cap A} = h|_{h^{-1}(\partial D^n) \cap A}$ をみたく連続関数とすると, f は $g^{-1}(\partial D^n) = h^{-1}(\partial D^n)$ かつ $g|_{h^{-1}(\partial D^n)} = h|_{h^{-1}(\partial D^n)}$ をみたくような連続関数 $g: X \rightarrow D^n$ に拡張できることである.

また, 関数の積の Controlling Extensions に関しては, 次の定理が知られている. ここで, $\mathbb{R}^+ = \{r \in \mathbb{R} : r \geq 0\}$ をあらわす.

定理 4.4 (S. Barov-J. J. Dijkstra [3]; コンパクト距離空間 X に関しては Frantz [8]). X を正規空間, A を X の閉部分空間とする. $f: A \rightarrow \mathbb{R}$, $g: A \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h: X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f \cdot g = h|_A$ かつ $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ をみたく連続関数とする. このとき, f の連続な拡張 $\hat{f}: X \rightarrow \mathbb{R}$ と, g の連続な拡張 $\hat{g}: X \rightarrow \mathbb{R}^+$ で $\hat{f} \cdot \hat{g} = h$ かつ $\hat{g}^{-1}(0) \subset \hat{f}^{-1}(0)$ をみたくものが存在する.

これらの結果に関しても, 次の特徴付けの形に改良できる.

定理 4.5 ([28]). X を位相空間, A を X の部分空間とする. このとき, 次の条件は同値である:

- (a) A は X に C -embedded である;
- (b) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f \cdot g = h|_A$ かつ $g^{-1}(0) \subset f^{-1}(0)$ をみたす連続関数とする. このとき, f の連続な拡張 $\hat{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ と, g の連続な拡張 $\hat{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ で $\hat{f} \cdot \hat{g} = h$ かつ $\hat{g}^{-1}(0) \subset \hat{f}^{-1}(0)$ をみたすものが存在する;
- (c) $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}^+$, $h : X \rightarrow \mathbb{R}$ を $f \cdot g = h|_A$ かつ $g^{-1}(0) = f^{-1}(0)$ をみたす連続関数とする. このとき, f の連続な拡張 $\hat{f} : X \rightarrow \mathbb{R}$ と, g の連続な拡張 $\hat{g} : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ で $\hat{f} \cdot \hat{g} = h$ かつ $\hat{g}^{-1}(0) = \hat{f}^{-1}(0)$ をみたすものが存在する.

[3] では, 定理 4.4 の複素数値バージョンも与えられている. この結果も, C -embedding を特徴づける形に改良できる ([28]).

参考文献

- [1] R. A. Alò and L. I. Sennott, *Collectionwise normality and the extensions of functions on product spaces*, Fund. Math. 76 (1972), 231–243.
- [2] R. A. Alò and H. L. Shapiro, *Normal Topological Spaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974.
- [3] S. Barov and J. J. Dijkstra, *On boundary avoiding selections and some extension theorems*, Pacific J. Math. 203 (2002), 79–87.
- [4] C. H. Dowker, *On a theorem of Hanner*, Ark. Math. 2 (1952), 307–313.
- [5] J. Dydak, *Extension Theory : the interface between set-theoretic and algebraic topology*, Topology Appl. 74 (1996), 225–258.
- [6] J. Dydak, *Partitions of unity*, Topology Proc. 27 (2003), 125–171.
- [7] R. Engelking, *General Topology*, Heldermann Verlag, Berlin, 1989.
- [8] M. Frantz, *Controlling Tietze-Urysohn extensions*, Pacific J. Math. 169 (1995), 53–73.
- [9] T. E. Gantner, *Extensions of uniformly continuous pseudo-metrics*, Trans. Amer. Math. Soc. 132 (1968), 147–157.
- [10] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Van Nostrand, Princeton, 1960.
- [11] V. Gutev, H. Ohta and K. Yamazaki, *Extensions by means of expansions and selections*, preprint, 2002.

- [12] T. Hoshina, *Remarks on Sennott's M -embedding*, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku Sect. A 13 (1977), 284–289.
- [13] M. Katětov, *Extension of locally finite covers*, Colloq. Math. 6 (1958), 145–151. (in Russian.)
- [14] K. Morita, *On generalizations of Borsuk's homotopy extension theorem*, Fund. Math. 88 (1975), 1–6.
- [15] K. Morita and T. Hoshina, *C -embedding and the homotopy extension property*, General Topology Appl. 5 (1975), 69–81.
- [16] K. Morita and T. Hoshina, *P -embedding and product spaces*, Fund. Math. 93 (1976), 71–80.
- [17] T. C. Przymusiński, *Collectionwise normality and extensions of continuous functions*, Fund. Math. 98 (1978), 75–81.
- [18] T. C. Przymusiński and M. L. Wage, *Collectionwise normality and extensions of locally finite coverings*, Fund. Math. 109 (1980), 175–187.
- [19] L. I. Sennott, *On extending continuous functions into a metrizable AE* , Gen. Topology Appl. 8 (1978), 219–228.
- [20] H. L. Shapiro, *Extensions of pseudometrics*, Canad. J. Math. 18 (1966), 981–998.
- [21] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, J. für die reine und angew. Math. 145 (1915), 9–14.
- [22] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. 94 (1925), 262–295.
- [23] K. Yamazaki, *Extensions of partitions of unity*, Topology Proc. 23 (1998), 289–313.
- [24] K. Yamazaki, *P (locally-finite)-embedding and rectangular normality of product spaces*, Topology Appl. 122 (2002), 453–466.
- [25] K. Yamazaki, *Controlling extensions of functions and C -embedding*, Topology Proc. 26 (2001-2002), 323–341.
- [26] K. Yamazaki, *Extending point-finite partitions of unity*, Houston J. Math. 29 (2003), 353–359.
- [27] K. Yamazaki, *Absolute weak C -embedding in Hausdorff spaces*, Topology Appl. 131 (2003), 273–279.
- [28] K. Yamazaki, *Controlled extensions of products of continuous functions*, preprint, 2004.

Kaori Yamazaki

Institute of Mathematics, University of Tsukuba, Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

E-mail: kaori@math.tsukuba.ac.jp

On some theorems of Borsuk–Ulam type and their applications

by Henryk Toruńczyk (Warszawa)

based on work joint with R. Simon and S. Spież

1. A theorem of Borsuk–Ulam type we needed for an application in game theory

Let me start with a reformulation of the the classical Borsuk-Ulam theorem, which I would like to state as follows:

Borsuk–Ulam theorem: *With B^n denoting an n -ball and δB^n its boundary, it is true that for each map $f : \delta B^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ and for each point $p \in B^n$ there exist points $x_1, x_2 \in \delta B^n$ such that $f(x_1) = f(x_2)$ and $p \in \text{conv}\{x_1, x_2\}$.*

When p is the center of the ball B this is the well-known version of the theorem on antipodes, which has a vast number of applications in areas varying from different aspects of topology to discrete mathematics. It is impossible to list here even the most spectacular of them and I would like to refer to Stenlein's and Björner's surveys [Bj], [St1] and [St2] for a comprehensive discussion.

The variation I am going to be concerned with in this talk has been motivated by a problem in game theory. It turned out, namely, that for this particular application the number of points x_i is allowed to become larger than two, but the assumptions on the target and on the domain of f need to be weakened: the domain should be allowed to be a boundary of an open subset U of \mathbb{R}^n , while the range should be an arbitrary space of dimension smaller than n . In such a setting, we demand that for a given point $p \in U$ there existed points $x_1, \dots, x_k \in \delta U$ which all belong to a common level-set of f and contain the point p in its convex hull, that is

$$f(x_1) = \dots = f(x_k) \text{ and } p \in \text{conv}\{x_1, \dots, x_k\}$$

Before discussing the result we obtained in this direction let me say a few words about the game-theoretical problem that motivated it.

2. A few words on games

The Game we consider (for recognition, a capitalization of its name will be used) is one of the "infinite games with incomplete information on one side", as devised by Aumann, Maschler and Stearns. It resembles a sequence of infinitely many identical stage-games being played on a certain day by two players, with the assumption that their gains depend on the day of the week on which the play is being played. However, while one of the players knows this day for sure, the other knows merely the (seven) probabilities that it be Sunday, or Monday etc.

More precisely, but still in a simplified form, this Game may be described as follows.

There are two players, \mathcal{A} and \mathcal{B} , each having a certain fixed (finite) set of pure strategies: a set I for Player \mathcal{A} and J for Player \mathcal{B} . The play against each other infinitely many times, in succession, the game von Neumann and others considered. These "von Neumann stages" of our Game consist of the following:

- The Players choose probability distributions on their sets of pure strategies: Player \mathcal{A} chooses a $\sigma \in \Delta(I)$, while Player \mathcal{B} chooses a $\tau \in \Delta(J)$, where for a finite set X we let

$$\Delta(X) = \{f : X \rightarrow [0, 1] : \sum_{x \in X} f(x) = 1\},$$

the set of probability distributions on X (We think of $\Delta(X)$ as a formal simplex on the set X of vertices.)

- The respective players gains (which may be negative) are equal to

$$\sum_{i \in I, j \in J} a_{ij} \sigma(i) \tau(j) = \sigma A \tau^t \text{ (for } \mathcal{A}\text{)} \text{ and } \sum_{i \in I, j \in J} b_{ij} \sigma(i) \tau(j) = \sigma B \tau^t \text{ (for } \mathcal{B}\text{)},$$

where A and B are certain $I \times J$ -matrices.

These von Neumann stages are played repeatedly, thus giving sequences:

$(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ of elements of $\Delta(I)$ and (τ_1, τ_2, \dots) of elements of $\Delta(J)$

and

$(\sigma_1 A \tau_1^t, \sigma_2 A \tau_2^t, \dots)$ and $(\sigma_1 B \tau_1^t, \sigma_2 B \tau_2^t, \dots)$ of the payoffs of the players.

The pair (A, B) of matrices, which governs the payoffs, remains fixed throughout the entire sequence of stages. As said earlier, it is an important feature of the game that this pair is known to Player \mathcal{A} , but not to \mathcal{B} . The "uninformed" player \mathcal{B} knows the following:

$$(A, B) \text{ belongs to } \{(A_k, B_k) : k \in K\}, \quad (1)$$

a given finite set of pairs of $I \times J$ -matrices,

and, for each $k \in K$, both players also know the probability $p(k)$ that this pair (A, B) be equal to (A_k, B_k) :

$$\mathcal{A} \text{ and } \mathcal{B} \text{ know } p \in \Delta(K), \text{ a probability distribution on } K. \quad (2)$$

The Game is thus defined by the data (1) and (2)—which includes the "true" pair of payoff matrices $(A, B) = (A_k, B_k)$, where k is known to Player \mathcal{A} , but not to Player \mathcal{B} . (All other data are known to both players.) The actual value of k is called the state of nature.

It still requires describing how the total payoff of the players is calculated. (See e.g. [SST1].)

The whole theory of such infinitely repeated games has been secretly developed by Aumann, Maschler and Stearns in the late 1960's. ("Secretly" refers to the fact that the Game has been considered to be applicable to the disarmament negotiations that had taken place then. Characteristically, the title of one of their papers was: "Game Theoretic Aspects of Gradual Disarmament".) Consequently, their papers had not been fully published until in a book [AM] in the past decade.

It should be stressed that more general games are also being considered in this context. Namely, above we described the information of both players as

standard, meaning that both players have perfect knowledge of all the past moves. However, this assumption may be weakened so that that player's \mathcal{B} information is received only from perception that is determined stochastically by the past moves and by the state of nature.

In both cases, with standard and non-standard information, by an equilibrium is meant a pair of strategies of the players such none of them can increase his payoff by unilaterally changing his strategy. It is only the aspect of equilibrium existence in these games that is of interest to us.

3. How do the topological results enter into the play

For the Game with standard information, Aumann, Maschler and Stearns devised strategies (one for each players) which lead to an equilibrium, provided such strategies pairs existed. They proposed that both players agreed to play at each stage of the game in a certain prescribed manner, known to both of them. If any of the players violated this agreement, the other one used a punishing strategy that kept the payoff relatively low. For all of this to work a complicated system of inequalities and equalities needed to be solvable.

Inequalities corresponding to Maschler–Sterans equilibria: Given $p_0 \in \Delta(K)$ we seek:

- a set $P_0 \subset \Delta(K)$,
- for each $p \in P_0$, elements $\sigma_p \in \Delta(I)$ and $\tau_p \in \Delta(J)$, a vector $\Phi \in \mathbb{R}^K$

such that, with $A(p) := \sum_k p(k)A_k$ and $B(p) := \sum_k p(k)B_k$ we have:

- $p_0 \in \text{conv } P_0$;
- $\Phi \cdot q \geq \min_{\tau} \sigma^t A(q)\tau$ for all $q \in \Delta(K)$ and $\sigma \in \Delta(I)$;
- $\sigma^t B(q)\tau_p \geq \min_{\sigma_1} \sigma_1^t B(p)\tau$ for all $p \in P_0, \sigma \in \Delta(I)$ and $\tau \in \Delta(J)$;
- $\Phi_k \geq \sigma_p^t A_k \tau_p$ for $k \in K$ and $p \in P_0$, with \geq changed to $=$ if $p_k > 0$.

It turns out that a solution to it would exist if we were able to attack the following problem:

Let Δ be a simplex with non-empty interior in \mathbb{R}^n and let a point $p_0 \in X$ and real functions a, b_v on Δ be given, with the functions b_v being convex and continuously depending on v . Let $r : \mathbb{R}^n \rightarrow \Delta$ be the nearest point retraction. Establish conditions under which it is true that

- either b_{p_0} can be separated from a by an affine functional, or

there exists a finite set $P_0 \subset \mathbb{R}^n$ and an affine functional Φ in \mathbb{R}^n such that $p_0 \in \text{conv}(r(P_0))$ and $b_p \leq \Phi|_{\Delta} \leq b_p$, for all $p \in P_0$.

In turn, this geometric problem lead to the following setup concerning set-valued functions. Suppose we are given a point $p \in \Delta(K)$ and want to represent it as a convex combination of finitely many points p_1, \dots, p_n lying in the boundary of the simplex, so that certain convex sets $F(p_i)$, associated to these points, have a non-empty intersection. (In the problem formulated earlier, the sets $F(p)$ would consist of affine functionals separating a from b_p .) This formulation immediately focuses attention to the set-valued mapping $p \mapsto F(p)$, and from now on we leave game theory and geometry and concentrate on some topological properties of set-valued mappings. The important fact is that the sets $F(p)$ are convex and compact and thus are acyclic. We formulate our results in this more general setup of acyclic set-valued mappings (or correspondences, as we call them).

4. Some results on correspondences.

Definitions. By a **correspondence** $F : X \rightarrow Y$ we mean a subset of $X \times Y$ such that its projection to X is a proper mapping—that is, it is closed and has compact point-inverses. For $x \in X, y \in Y$ we may consider the sets

$$F(x) := \{y' \in Y : (x, y') \in F\}, \quad F^{-1}(y) := \{x' \in X : (x', y) \in F\}$$

In general, we do not assume that the set $F(x)$ be non-empty for all $x \in X$. The set $\text{dom}(F) := \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\}$ will be called the domain of F , and similarly we define $F(U) = \bigcup_{u \in U} F(u)$, the image under F of a subset U of X . By the **restriction** of F to a set $S \subset X$ we mean the correspondence $F \cap (S \times Y)$.

We say that F is **acyclic-valued** if each set $F(x), x \in X$, is non-empty and has trivial reduced Čech homologies with coefficients in \mathbb{Z}_2 .

In our setting, X is often going to be a subset of an Euclidean space. Whenever this is the case we may define the following correspondence:

$$cF := \bigcup_{y \in Y} \text{conv}(F^{-1}(y)) \times \{y\}$$

We say that cF is a **level-wise convexification** of F .

Theorem 1. *Let U be an open bounded subset of \mathbb{R}^n and F be an acyclic-valued correspondence defined on the closure of U . If $\dim F(U) < n$, then $U \subset \text{dom } c(F|_{\delta U})$.*

Otherwise stated: each point $p_0 \in U$ is in the domain of $c(F|_{\delta U})$, i.e. there exists a finite set $P_0 \subset \delta U$ such that $p_0 \in \text{conv}(P_0)$ and $\bigcap_{p \in P_0} F(p) \neq \emptyset$. And if F is just a single-valued function then the last condition means that P_0 is in a single level-set of F , which is the version of Borsuk–Ulam theorem we alluded to in section 1.

The set P_0 above may be assumed to be finite and consist of at most $n + 1$ elements, by a classical theorem of Caratheodory. Let us show on a simple example that in general it cannot consist of fewer points.

Example 1. *Let f be the natural simplicial map of the barycentric subdivision of an n -simplex Δ onto the join of the barycenter of Δ and of the $(n - 2)$ -skeleton of Δ . Then the center of Δ cannot be represented as a convex combination of n points that have a common image.*

(The picture can easily be drawn for $n = 2$, and we see that set of points which are not a convex combination of 2 points with a common image is a triangle on the midpoints of the edges of Δ .)

Remark 1. *In the most intuitive special case when Y is an $(n - 1)$ -manifold and F is single-valued, one can drop the number of the required points down to two. This is a rather easy consequence of a result of Ołędzki [Ol], generalizing the Borsuk–Ulam theorem.*

Theorem 1 allows to give a rather satisfactory answer to the problem on separation of functions. I do not formulate the sufficient condition obtained, the essence of which is that it forces the image of the arising correspondence to have dimension smaller than n and thus makes Theorem 1 applicable. In this way the existence of an equilibrium in the Game with standard information is established. (See [SST1].)

5. A certain homological property of correspondences

Definitions. a) Given an open bounded set in \mathbb{R}^n we distinguish the "fundamental class" $[\delta U] \in \tilde{H}_n(\delta U, \mathbb{Z}_2)$ of the boundary of U .

b) We say that a correspondence $F : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ has **property \mathcal{S}** for an open set $U \subset \mathbb{R}^n$ provided there exists an element of $\tilde{H}_{n-1}(F|_{\delta U}, \mathbb{Z}_2)$ which is mapped to $[\delta U]$ under the homomorphism induced by the projection $F|_{\delta U} \rightarrow \delta U$, and to 0 under the inclusion $F|_{\delta U} \rightarrow F$.

c) We say that F has property \mathcal{S} for a compact set C if it has it for $\text{Int } U$.

It turns out that Property \mathcal{S} is:

a) hereditary: if F has it for C and $D \subset C$ (C and D are compact) then F has this property for D ;

b) continuous with respect to nested intersections;

c) can sometimes be pasted together: under additional assumptions, if F has property \mathcal{S} for an open set U_1 and $G : \bar{U}_2 \rightarrow Y$ is acyclic-valued, then $F \cup G$ has property \mathcal{S} for the closure of $U_1 \cup U_2$.

We note that if F has property \mathcal{S} for U , then $F(p) \neq \emptyset$ for all $p \in U$. (For this reason we call \mathcal{S} a "spanning property".) Theorem 1 is established by showing that if U is an open bounded subset of \mathbb{R}^n and the acyclic-valued correspondence $F : \bar{U} \rightarrow Y$ satisfies $\dim F(U) < n$, then it has property \mathcal{S} for U .

The correspondences we encounter in game theory are usually defined on a an n -simplex Δ and take values in a cube of dimension by 1 higher than that of a simplex. Usually, the property that $\dim F(\Delta) < n$ fails. However, the essential feature of these correspondences is that they are saturated in a certain sense.

Definition. If $F : \Delta(L) \rightarrow Y$ is a correspondence and $Y \subset \mathbb{R}^L$, then by F^+ we denote the correspondence $\Delta(L) \rightarrow Y$ defined by

$$F^+(p) := \{y \in Y : \exists x \in F(p) \text{ such that } x_l \leq y_l \text{ and } (x_l - y_l)p_l = 0 \forall l \in L\}.$$

We call F^+ the Y -saturation of F . We say that F is **saturated** if $F = F^+$.

Theorem 2. Let $I = [0, 1]$ and $J = [0, 2]$ and let $F : \Delta(K) \rightarrow I^K$ be a saturated correspondence such that the set $F^{-1}(y)$ is acyclic for every $y \in \text{im}(F)$. Then, the correspondence F has property \mathcal{S} for $\Delta(K)$ iff the image of its J^K -saturation separates the cube J^K between the vertex $v_+ = (2, \dots, 2)$ and the union of all the faces of J^K disjoint from v_+ .

It is this result which allows for handling the games with non-standard information. (See [SST2].) The main advantage of it is that it allows for pasting together of various correspondences with property \mathcal{S} so as to preserve this property. The following easy set-theoretic lemma makes such a pasting possible:

Lemma 1. *For $i = 1, \dots, n$, let B_i, S_i, U_i be closed subsets of a cube I^n such that S_i separates X between B_i and $I^n \setminus U_i$. Then $\bigcup_{i=1}^n S_i \cap \bigcap_{i=1}^n U_i$ separates X between $\bigcap_{i=1}^n B_i$ and $I^n \setminus \bigcap_{i=1}^n U_i$.*

6. Some related results and questions.

The proof of Remark 1, based on Ołędzki's result, can be used to generalize Borsuk–Ulam theorem as follows:

Let C be a compact n -manifold with boundary in \mathbb{R}^n . For $p \in C$ let $F(p)$ denote the set of points $y \in \mathbb{R}^{n-1}$ for which there exist $a, b \in \delta C$ satisfying $f(a) = f(b) = y$ and $p \in [a, b]$. Then, the correspondence F has property \mathcal{S} for C .

It would of course be interesting to narrow the gap between Borsuk–Ulam theorem and our theorem 1 for single-valued mappings:

Question: under what conditions on a compact set $C \subset \mathbb{R}^n$ and on f is it true for each point $p \in C$ there exists a set of no more than l points in δC , where l is a given number smaller than $n + 1$, which contains p in its convex hull and lies in a single level-set of f ?

What about the case when C is a ball?

This question is related to that of calculating the Uhrysohn diameters of an n -ball in \mathbb{R}^n . Let us recall that the k -th **Uhrysohn diameter**, $u_k(X)$, of a compact subset of \mathbb{R}^n is defined to be the smallest number $\varepsilon > 0$ such that there exists an ε -map of X into a space of dimension not greater than k . It is known that:

- $u_{n-1}(X) \geq \sup_{x \in X} \{ \inf \text{diam} A : x \in \text{conv} A \text{ and } A \subset \delta X \}$
- $u_{n-1}(B^n) = \sqrt{2(n+1)/n}$. (This follows from the above and theorem 1, but was known earlier.)
- $u_k(B^n) = 2$ if $2k < n$. If $2k > n$ then $u_k(B^n)$ is proved to be larger

than 2 (Schepin), but its value is unknown.

Theorem 1 shows that when U is an open set in \mathbb{R}^n and $\dim Y < n$, then the level sets of a fixed mapping $\delta U \rightarrow Y$ are "large"—at least in the sense that the union of their convex hulls covers U under rather weak assumptions. Let us recall that when $U = B^n$ and $Y = \mathbb{R}^k$, then B. Knaster conjectured in 1947 that these level sets are "large" in a quite different sense—namely, that every subset of the sphere δB^n , which consists of no more than $p(n, k) = n - k + 2$ points, is isometric to a subset some of the level-sets. It has been proved by Makarov (for $k > 1$) and recently by Kashin and Szarek (for $k = 1$) that this conjecture was false. However, it is still unknown what is the asymptotic behaviour of the largest numbers $p(n, k)$ for which Kanster's statement (without the postulate that $p(n, k) = n - k + 2$) holds.

References

- [AM] R. Aumann and M. Maschler, Repeated games with incomplete information. With the collaboration of R. Stearns. (M.I.T. Press, 1995).
- [Bj] A. Björner, Topological methods. In R. Graham, M. Grötschel, and L. Lovasz, editors, Handbook of combinatorics, vol II, Ch. 34, 1819-72 (North Holland, 1995).
- [Ol] J. Ołędzki "On a generalization of the Borsuk-Ulam theorem", Bull. Polon. Acad. Sci. 26 (1978), 157-162.
- [St1] H. Steinlein, Borsuk's antipodal theorem and its generalizations and applications; a survey, Sémin. Math. Supér., Sémin. Sci. OTAN (NATO Adv. Study Inst.) 95 (1985), 166-235.
- [St2] H. Steinlein, Spheres and Symmetry: Borsuk's antipodal theorem, Topol. Methods in Nonlinear Analysis 1 (1993) 15-33.
- [SST1] R. Simon, S. Spież, and H. Toruńczyk, The existence of equilibria in certain games, separation for families of convex functions and a theorem of Borsuk-Ulam type, Israel J. Math. 92 (1995), 1-21.
- [SST2] R. Simon, S. Spież, and H. Toruńczyk, Equilibrium existence and topology in some repeated games with incomplete information, Transactions of the A. M. S. 354 (2002), 5005-50026.

ポアンカレ予想

小島 定吉 (東京工業大学大学院情報理工学研究科)

Email : sadayosi@is.titech.ac.jp

昨年4月15日のニューヨークタイムスに、「ポアンカレ予想が解けたらしい」という記事が掲載された。ポアンカレ予想がどの程度の社会的認知を得ているのか私には知る由もないが、世界が注目するメディアに数学の話題が登場するのは稀である。この講演では、数学の流れを歴史とよぶに相応しい時間経過の中で捉え、ポアンカレ予想の解決がなぜこれほど大きなニュースなのかを平易に解説したい。

まず、一つの短絡的な理由として、1900年にヒルベルトが提起した23の問題が20世紀の数学を牽引したことを手本に、アメリカの一富豪の私的機関であるクレイ数学研究所が2000年に7つの問題を挙げ、各々に100万ドルの懸賞金をかけたことがある。ポアンカレ予想もその中の一つであり、解決は即100万ドルというアメリカンドリームに結びつく点で、ニュース性は確かに大きかった。

しかし本質は少し異なる。解いたと主張するセントペテルスブルグ（旧レニングラード）ステクロフ研究所のペレルマンは懸賞金には興味がないらしく、自身はメディアの騒ぎに我関せずを貫いている。また懸賞金とは無関係に、数学者の間では成果の大きさに対する注目が時間が経つにつれ増大している。ポアンカレ予想の解決についてはいまだ検証中であるが、それを置いても今世紀初頭の偉業の一つという認識が生まれつつある。

そもそもポアンカレ予想は、3次元のコンパクト多様体は単連結であれば3次元球面とトポロジーが等しいことを主張し、純粋にトポロジーの問題である。それに対し曲率を用いたリーマン幾何学的視点からのアプローチがあり、とくに80年代初頭にハミルトンはリッチ流と呼ばれる微分方程式を提唱、その有用性の一端を示した。ペレルマンの仕事はハミルトンの仕事の延長にある。

100年を振り返り、ポアンカレから、講演で述べる予定のクネーザー、ミルナー、ジェイコー・シャーレン・ヨハンセン、サーストーン、ハミルトンの仕事を経てペレルマンに至る道筋を見直すと、数学者がその時々何を考えて、活動の総体として我々が何を得てきたのかが浮かび上がってくる。

参考文献

• 手に入れやすい文献

1. 齋藤利弥訳, 「ポアンカレトポロジー Analysis Situs」, 朝倉書店, 1996年.
2. 数学セミナー編集部編, 「20世紀の予想」, 日本評論社, 2000年.
3. 拙記事, 「Poincaré 予想」, 岩波書店, 数学, 53 (2001), 195-207.
4. 拙記事, 「現代幾何学の流れ/サーストン」, 日本評論社, 数学セミナー, 5月号 (2004), 78-83.

• 論文等

1. H. Poincaré, Analysis situs, Journ. de l'École Polytech., 2^e série, 1^{er} cahier (1895).
2. H. Poincaré, Cinquième complément à l'Analysis situs, Rend. Circ. Mat. Palermo, t 18 (1904).
3. W. P. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc., 6 (1982), 357-381.
4. G. Perelman, The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications, arXiv/math.DG/0211159.
5. G. Perelman, Ricci flow with surgery on three-manifolds, arXiv/math.DG/0303109.
6. B. Kleiner が開設している Perelman の仕事に関する HP :
<http://www.math.lsa.umich.edu/research/ricciflow/perelman.html>

Ricci flow と Perelman の仕事

戸田 正人 (お茶の水女子大理学部)

1 全体像

1.1 特異点の解析

Perelman の仕事はハミルトンプログラムをほぼ実行したことである。その実装の見取り図を Ricci flow の基本的な性質を眺めながら述べていきたい。

向きづけられた閉三次元多様体 M^3 が与えられたとき、 M 上の計量 g の Ricci flow

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t}(x, t) = -2R_{ij}(x, t)$$

を滑らかな初期値に対して解いていく。Ricci flow は計量の変形を与える (放物型の) 方程式である。時間局所的な解は常に存在するが、一般には有限時間内に特異性を持つ。次の例は初等的だが、重要な例である。

例 1.1 (球面の標準解). 標準的 S^n を初期値とすれば、解は $\alpha(t)g_{S^n}$ の形をしており、スケールリングを適用するとき $Rc_{ij}(g) = Rc_{ij}(\alpha g)$ であることを見れば、常微分方程式 $\alpha' = -2$ を解いて、 $\alpha(t) = 1 - 2t$ 、 $R(t) = (1 - 2t)^{-1}R(0)$ を得る。有限時間 $T = 1/2$ で計量はつぶれて、スカラー曲率 R は $T - t$ の逆数に比例して発散する。

また、ricci flow の二つの解の直積計量もまた解となることは簡単に分かる。例えば、 $S^2 \times \mathbb{R}$ は ricci flow により、 S^2 がつぶれていく一方で、フラットな \mathbb{R} は変化しないので、しだいに細長い形状になり、有限時間で \mathbb{R} につぶれてしまう。

$S^2 \times \mathbb{R}$ の標準解は ricci flow に従って連結と分解が起る際の特異点の典型的モデルである。Perelman の実装において特異点の解析は次の二つの部分からなるといってよい：

- (1) 特異点モデルの分類= κ -solution の分類
- (2) 特異点の近傍の解析=canonical neighborhood theorem

特異点を scaling で blowup して解析するというのは Hamilton 以来、というより ricci flow に限らず多くの状況で用いられる手法である。 $t = 0$ における初期値から ricci flow に従う $(M^3, g(t))$ において、最初の特異時間 $T < \infty$ における特異点を blowup することを考える。有限特異時間では曲率テンソル Rm が $\lim_{t \uparrow T} \sup_{x \in M} |Rm(x, t)| = \infty$ と発散することが知られている。このとき、次のような時間列 t_i と点列 x_i を選ぶことができる。

$$t_i \rightarrow T, Q_i = \sup_{t < t_i, x \in M} |Rm(x, t)| = |Rm(x_i, t_i)| \quad (1)$$

このとき、 (x_i, t_i) における曲率を 1 に正規化する parabolic scaling $\bar{g}_i(\tau) = Q_i g(x, t_i + Q_i^{-1} \tau)$ を行う。この scaling のもと ricci flow の方程式は不変だから、rescale された時間 τ について、 $\tau \in (-Q_i t_i, Q_i(T - t_i))$ で定義された ricci flow の列を得る。この列の収束を考えるため、基点つき ricci flow $(M, \bar{g}_i(t), x_i)$ を考える。収束の意味は次の定義による。

定義 1.1. $a < 0 < b$ とする。 $g(t)$ を時間 $t \in (a, b)$ とともに発展する M 上の滑らかな計量とする。また、 $p \in M$ を基点とし、 $t = 0$ で $T_p M$ の正規直交フレーム F を与えておく。四つ組

$\mathfrak{M} = (M, g(t), p, F)$ を発展リーマン多様体と呼ぶ。このとき、発展リーマン多様体の列 \mathfrak{M}_i に対して、発展リーマン多様体 \mathfrak{M} が次の条件を満たすとき、 \mathfrak{M}_i は \mathfrak{M} に収束するという：

$i \rightarrow \infty$ のとき、 M を被覆する開集合 $p \in U_i \subset M$ とその上で定義された基点とフレームを保つ中への微分同相 $F_i : (U_i, F, p) \rightarrow (M_i, F_i, p_i)$ が存在して、 $F_i^* g_i(t)$ は $g(t)$ に $M \times (a, b)$ で C^∞ 級広義一様収束する。フレームを固定しているので、極限は isometry を除いて一意である。

定理 1.1 (コンパクト性定理 [Ham95a]). $0 \in [a_i, b_i]$ なる時間列で定義された点つき ricci flow の列 (M_i, g_i, p_i) を考える。定義時間 $[a_i, b_i]$ は極限において (a, b) を含むとする。時間 $t = 0$ において p_i における単射半径の様な下からの評価を持ち、任意の $D > 0$ と閉時間区間 $I \subset (a, b)$ に対して $B(x, D) \times I$ で一様な曲率評価 $|\text{Rm}| \leq Q_{D,I}$ を満たすとき、 (M_i, g_i, p_i) は $M \times (a, b)$ で *subconverge* する。

定理 1.1 により列 $(M, \bar{g}_i(t), x_i)$ の収束を言うには曲率、 x_i での単射半径の評価を必要とする。曲率は点列の選び方から $(-Q_i t_i, 0]$ においてコントロールされている。したがって、極限においては ancient time interval $(-\infty, 0]$ において曲率の広義一様な評価がある。一方収束を保証する単射半径 $\iota_{x_i}(M)$ の評価を得るには、ある一様な $\delta > 0$ について

$$\delta \leq \iota_{x_i}(M) |\text{Rm}(x_i, t_i)|^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

なる一様な下からの評価をしなければならない。この評価は Perelman 以前においてもっとも深刻な障害の一つであった。Perelman の二本の論文の前半部分はこの評価にあてられている。この評価を与える κ -noncollapsed theorem は Perelman の論文の前半の最大の結論であるが、ここではとりあえず全体図を眺めるため、この評価が初期値に依存して保証されるとして先に進もう。

すると、我々の rescaled ricci flow (M, \bar{g}_i, x_i) はある ancient solution、つまり時間 $(-\infty, 0]$ で定義された ricci flow に収束する。この際、三次元における特殊な状況を利用した最大値原理の議論から次が成り立つ。

定理 1.2 (Hamilton-Ivey [Ham99]). M^3 上の ricci flow で初期計量が $\text{Rm} \geq -1$ を満たしているものを考える。このとき、 $\inf_{|\phi|=1} \text{Rm}(x, t)(\phi, \phi) = -X(x, t)$ と定める。このとき、 $X \geq 0$ を満たす点で

$$R \geq X(\ln X + \ln(1+t) - 3).$$

このことから blowup limit は非負曲率を持つことがわかる。さらに、 κ -noncollapsed theorem からくる global な non-collapsed の条件をみたくともわかる。これらの条件を満たす ancient solution を κ -solution という。toponogov の splitting theorem や非負曲率リーマン多様体の end の解析、などのリーマン幾何の主要な定理を駆使して κ -solution の分類を行う。結論は

定理 1.3 (κ -solution の分類 [Per02]§11, [Per03]§1). 三次元の κ -solution は

- (1) $S^2 \times \mathbb{R}$ の標準解 (Neck), $S^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ (Twisted cap)
- (2) S^3 の標準解の Quotient
- (3) 片側キャップされたシリンダー (Cap)
- (4) 位相的には S^3 だが標準解でない

のいずれか。下の二つは $t \rightarrow -\infty$ での blow down limit が $S^2 \times \mathbb{R}$ の標準解に収束する。

Canonical neighborhood theorem([Per02, §12]) は Perelman の論文の後半の最大の結論である。この定理は本質的に三次元 ricci flow の強コンパクト性定理である。詳説は後にしてここでは定理 1.1 とこの定理の違いを説明する。

たとえば、上の議論で我々は式 (1) のように (x_i, t_i) を選んだ。このような blowup center の選び方は一般に scaling の議論においてよく行われる。これが必要な理由は（ここでは曲率の）発散の order が異なる複数の特異性が互いに干渉しながら同じ点において発生する、という現象（状況により double bubble と呼ばれる）がありうるからである。式 (1) での選び方は最も発散の order が大きい特異性だけを見るための blowup center の選び方である。三次元強コンパクト性定理はこのような特異性の干渉が起らないことを主張する。つまり、三次元強コンパクト性定理を雑に述べれば、「 κ -noncollapsed ricci flow 列が基点で曲率が発散しさえすれば、(blowup center の選び方に気を配らなくても) 自然な scalingのもと κ -solution に収束する」という主張である。したがって、背理法によるコンパクト性の議論を適用すれば、

定理 1.4 (Canonical neighborhood theorem). $\kappa, \varepsilon > 0$ に対して、 $r(\kappa, \varepsilon) > 0$ が存在して次の条件を満たす： κ -noncollapsed な ricci flow $(M^3, g(t))$ について、ある点 $(p, t) \in M \times [0, T)$ 、 $t > 1$ で $R(p, t) \geq r^{-2}$ ならば、 (p, t) の近傍は曲率に応じたスケージングの後或る κ -solution で ε 近似される。

Remark 1. 定理 1.2 により三次元の場合、曲率 Rm の発散の代りスカラー曲率 R の発散を考えれば十分である。

1.2 Surgery と Extinction [Per03, §3,4]

三次元 ricci flow の最初の特異時間 T を考える。このとき、 $\lim_{t \rightarrow T} R(x, t) < \infty$ なる点 $x \in M$ なる点の集合 Ω は開集合である。この部分には $t = T$ まで滑らかな metric $g(t)$ が定義される。

$$\Omega_\rho = \left\{ x \in \Omega; \lim_{t \rightarrow T} R(x, t) \leq \rho^{-2} \right\}$$

とすると、定理 1.4 の r より十分小さな ρ に対して、定理 1.4 から $\Omega \setminus \Omega_\rho$ の点は近傍が κ -solution で近似される。 κ -solution の分類から閉じていないもので近似されるなら neck か cap である。このことから、 Ω が有限個の連結成分を持つこと、 $t = T$ より少し前の時間では Ω_ρ の S^2 境界を cap したり、cylinder で結んだりした位相を持つことがわかる。つまり、 Ω_ρ を cap したものは位相的には M を適当な連結和分解したものである。cap に適切な方法で計量をいれて再び ricci flow を走らせて surgery 付きの ricci flow の構成を行っていく。

一方特異時間 T で M の曲率が一斉に ρ^{-2} を越えて Ω_ρ が空集合になってしまう場合がある。このケースを extinction という。この場合位相はこの時点で決定してしまい、それ以上解を考察する必要はない。実際 M 上の全域で定理 1.4 の仮定が成り立ち、どの点の近傍も canonical neighborhood を持つ。このことから位相的には $M = S^2 \times S^1, S^3, \mathbb{R}P^3, \mathbb{R}P^3 \# \mathbb{R}P^3$ しかないことがわかる。とくにこの考察は Gromov-Lawson の結果の改良を与えることを見よう。ricci flow のスカラー曲率 R は方程式

$$\partial_t R = \Delta R + |\text{Rc}|^2 = \Delta R + \frac{2}{3}R^2 + |\text{Rc}|^2 \quad (3)$$

に従うから最大値原理により $\underline{R}(t) = \min_{x \in M} R(x, t)$ は単調増加する。とくにある時点で $\underline{R}(t) > 0$ となれば、 $\frac{d\underline{R}}{dt} \geq \frac{2}{3}\underline{R}^2$ より、有限時間内に（何回かの surgery の後）extinction がおこる。したがって、 $R > 0$ ならば $S^2 \times S^1$ の連結和であることが従う。強最大値原理を用いて $R = 0$ の場合も込めて考えれば、それ以外の可能性が flat な場合しかないことも従う。

1.3 時間大域解の構成、双曲化とリーマン多様体の崩壊 [Per03, §5-7]

Extinction が起らないとき（時間大域的に $\mathbb{R} < 0$ のとき）は $[0, \infty)$ で surgery 付きの ricci flow を構成しなければならない。この際、適当な $t_0 > 0$ を選び、 $[0, 2t_0]$, $[2t_0, 4t_0]$, ... と時間の区間で帰納的に構成を行っていく。各 surgery time で前節のような解析を行うためには、noncollapsed parameter κ とそれに依存する canonical neighborhood parameter r がコントロールされていなければならない。このためには surgery radius h を小さく取った方がよい。（つまり、neck の細くなった先の方で surgery を行った方がよい。）実際 Perelman の評価では各時間区間で h は下から押さえられるが、 $t \rightarrow \infty$ の際、 h が次第にゼロに近くなるかもしれない。しかし $h \rightarrow 0$ なる極限をとるには現状では論拠が足りない。というのは、各時間の区間でおこる surgery の回数の評価が h による体積評価によってのみ保証されているからである。この相矛盾する制約のもとに（理論的にはやや不満足な）時間大域解が現在のところ構成されているものである。この辺の事情が本来の Hamilton program で予想されていた surgery の有限性を保証できない主因である。（もっとも筆者は本当に Hamilton の予想する surgery の有限性が正しいのかあまり確信はない。）

解の構成ができたなら時間大域的な挙動を調べる。この際、

$$\rho(p, T) = \sup \{ r \in \mathbb{R}_+; R(x, T) > -r^{-2} \text{ if } x \in B(p, T, r) \}$$

として、ある定数 $w > 0$ に対して、 $\text{vol}(B(p, t, \rho)) / \rho^3 > w$ なる点の集合を thick part、それ以外の点を thin part と見なす。surgery が行われる部分は（細長い）cap や cylinder だからその近辺は thin part に入ってしまうことに注意。

thick part は factor T で blowdown した後、 $T \rightarrow \infty$ の極限で hyperbolization を行う。この際、blowdown の metric の収束を仮定すれば、式 (3) を用いて極限は hyperbolic になることがわかる。この収束のために曲率の評価を行う。その議論で本質的なのは三次元強コンパクト性定理と曲率の下からの評価を利用した volume comparison の議論である。その他の議論、例えばカスプが非圧縮的であるなど、はずで Hamilton [Ham99] が開発した議論を用いることができる。thin part は下からの曲率の評価のもとで local volume collapse が起っている。この部分は三次元リーマン多様体の崩壊の理論 [SY03] を用いて位相がグラフ多様体に決定する。

以上の全体像を振り返ると結局のところ ricci flow が本当に Geometrization を実行する部分は hyperbolization の部分だけであとは extinction や崩壊の理論によって位相が決定されていることがわかる。

2 各論

2.1 ricci flow の基本定理

定理 2.1 (強最大値原理 [Ham86]). M 上の ricci flow を考える。曲率作用素 Rm が初期値で $Rm \geq 0$ を満たすとす。このとき、 $Rm \geq 0$ は ricci flow で保存され、

- (1) Rm の null space の rank が k の点初期値にあれば、 $t > 0$ で他の点でも null space は k 以下になる。したがって局所ホロノミーは $t > 0$ で時間によらず一定。
- (2) topologov の splitting theorem から、 $t > 0$ において、timeslice の多様体が line を含めば、ricci flow の解そのものが自明な \mathbb{R} 上の解と余次元 1 の M' 上の解の直積となる。
- (3) とくに三次元の場合、 $t > 0$ において、 $Rm > 0$ でない点が存在すれば、その被覆は曲面の ricci flow と自明な \mathbb{R} 上の解の直積となる。

定理 2.2 (Harnack 不等式 [Ham93]). M 上の ricci flow が $(0, T)$ 上で定義され、 $\text{Rm} \geq 0$ を満たしているとする。このとき、 X, Y を任意の点での接ベクトルとして、

$$\begin{aligned} M(X) &:= \Delta \text{Rc}(X, X) - \frac{1}{2} \nabla_X \nabla_X R + 2(R(X, \text{Rc}(\cdot))X, \cdot) - |\text{Rc}(X)|^2 + \frac{1}{2t} \text{Rc}, \\ P(X, Y) &:= (\nabla_X \text{Rc}(Y, X) - \nabla_Y \text{Rc}(X, X)) \end{aligned}$$

とするとき、

$$M(X) + 2P(X, Y) + (R(X, Y)X, Y) \geq 0 \quad (4)$$

とくに X についてトレースをとると、

$$H(Y) = \partial_t R + \frac{R}{t} + 2\nabla_Y R + 2\text{Rc}(Y, Y) \geq 0 \quad (5)$$

2.2 noncollapsing theorem と asymptotic soliton

式 (2) を保証するための評価について簡単に述べる。(原論文で省略されている解析的な正当化は [Ye04] に詳しい。) 直接単射半径を評価するのではなく次のような定義を行い、それを保証する。ここでの議論はすべて一般次元のものである。ricci flow に関して parabolic neighborhood (以下 P 近傍) を $P(p, T, r, \tau) = B(p, T, r) \times [T, T + \tau]$ で定める。 τ は負の値を取りうる。

定義 2.1. $(M^n, g(t))$ を時間 $[0, T]$ で定義された ricci flow、 $r_0 > 0$ 、 $\kappa > 0$ とする。 $(p, t) \in M \times [0, T]$ に対して、 $\rho < r_0$ なる P 近傍 $P(p, t, \rho, -\rho^2)$ でその上で曲率評価 $|\text{Rm}| \leq \rho^{-2}$ を満たすものについて、volume ratio が $\kappa \leq \text{vol}(B(p, t, \rho)) / \rho^n$ なる条件を満たすとき ricci flow $(M^n, g(t))$ は (p, t) において、スケール $< r_0$ で κ -noncollapsed という。 $r_0 = \infty$ のとき、任意のスケールで κ -noncollapsed という。

Remark 1. この定義のポイントは曲率から来る自然な半径 ρ の bound $\rho \leq |\text{Rm}|^{-\frac{1}{2}}$ と外部から与えられた bound $\rho < r_0$ を両方考える点である。曲率が大きな点では前者の bound が ρ を支配し、曲率がフラットに近い点では後者の bound が支配する。局所的な noncollapsed の条件を考えるときは後者の bound は重要である。逆に任意のスケールで noncollapsed である、という場合大域的な幾何に対する制約を与えていることになる。例えば、シリンダー $S^1 \times \mathbb{R}$ はスケール < 1 では適当な κ に関して noncollapsed だが、任意のスケールで考えるなら大きな ρ について collapse してしまう。

これについて基本的な結論は

定理 2.3 ([Per02] §7). $[0, T]$ で定義された閉多様体 M^n 上の ricci flow $(M, g(t))$ は点 (x, T) について、スケール $< \sqrt{T}$ で κ -noncollapsed。ここで κ は次元 n と $[0, T/2]$ 上の noncollapsed parameter κ' により下から評価される。

Remark 1. この定理の結論は式 (2) を導く。

Proof. 定理 2.3 の結論を予想する (物理的な?) 考察の出所は筆者にはとてもミステリアスに見える。証明の議論自体は地道な解析的正当化を必要とするもののさほど難解なものではない。基本的アイデアは逆向きの時間 $\tau = T - t$ によりパラメトラズされた $M \times [0, T]$ 上の曲線 γ に対して、 \mathcal{L} -length

$$\mathcal{L}(\gamma) = \int_0^T \sqrt{\tau} \{ |\dot{\gamma}(\tau)|^2 + R(\gamma(\tau), T - \tau) \} d\tau$$

を考える。簡単に基点 $(p, 0)$ と任意の時空の点 $(q, \bar{\tau})$ は \mathcal{L} -minimal path で結ばれることがわかる。

この \mathcal{L} -length を $L(q, \bar{\tau})$ とする。このとき、 $l(q, \bar{\tau}) = L(q, \bar{\tau})/2\sqrt{\bar{\tau}}$ とおき、reduced volume \bar{V} を

$$\bar{V}(\tau) = \int_M \tau^{-\frac{n}{2}} \exp(-l(q, \tau)) dV_q$$

と定める。このとき、 \mathcal{L} -image を考えることにより、 $P(p, T, \rho, -\rho^2)$ で曲率評価 $|\text{Rm}| \leq \rho^{-2}$ が成り立つならば、 $\alpha\rho^2 \leq T$ について

$$\bar{V}(\alpha\rho^2) \leq \alpha^{-\frac{n}{2}} \rho^{-n} \text{vol}(B(p, T, \rho)) + o(\alpha) \quad (6)$$

を得る。さらに \mathcal{L} の二階変分を考察することにより、 \bar{V} は τ について単調非増加であることがわかる。(これはある asymptotic に Ricci flat な多様体の asymptotic な Volume comparison として解釈できる。) これにより、式 (6) の左辺を下から評価して結論を得る。 \square

定理 2.3 により、 κ -noncollapsed が保証されているから、その最初の特異時間において singularity を曲率を基準に適当な blowup center を選んで blowup するとき、その極限の存在は保証され、しかも極限において κ -noncollapsed のスケールも blowup されて任意のスケールで κ -noncollapsed な ricci flow が得られる。これは定義 2.1 の remark により、極限の大域的な幾何に対する制約を与えていることに注意。この考察によれば、 κ -solution の定義を次のように与えるのは自然な事である。

定義 2.2. $\kappa > 0$ とする。時間 $(-\infty, 0]$ で定義された M 上の complete ancient solution が

- (1) すべての点 (x, t) で $\text{Rm} \geq 0$
- (2) 任意の時間 t において空間全域で $|\text{Rm}|$ は一様有界。
- (3) すべての点で任意のスケールで κ -noncollapsed.

を満たすとき、 κ -solution という。

Remark 1. Harnack 不等式 (5) を $(-\infty, 0]$ で定義された場合に適用すると $\text{Rm} \geq 0$ なる ancient solution について $\partial_t R \geq 0$ 、つまりスカラー曲率 R は時間に対して各点で単調増加である。したがって、ある時間で曲率の上からの評価があれば過去における評価が自動的に従う。

$\text{Rm} \geq 0$ なら解は各点で shrink していく。したがって、 κ -solution $(M, g(t), p)$ は $t \rightarrow -\infty$ において、expand していく。これを blowdown していくときの極限を考える。このとき、スケールリングの factor は時間 t の絶対値に取るのが正しい。つまり、 $g_\tau(t) = \tau^{-1}g(t + \tau)$ とする。基点 $q(\tau)$ を選んでこの極限の存在を定理 1.1 により示す。(基点 $q(\tau)$ の選び方は重要だがここでは論じない。) この際、単射半径の評価は任意のスケールでの κ -noncollapsed の条件から、曲率評価は Harnack 不等式 (4) を用いて $L(q, \tau)$ の評価を行うことにより得られる。この極限は特別な κ -solution となる。

定義 2.3. リーマン多様体 (M, g) に対して、微分同相の 1 パラメータ族 ϕ_t と正値関数 $\alpha(t)$ が存在して、 $(M, \alpha(t)\phi_t^*g)$ が ricci flow に従うとき、この ricci flow を soliton という。 $\alpha > 1$ のとき expanding soliton, $\alpha < 1$ のとき shrinking soliton という。とくに、 ϕ_t を生成するベクトル場 $X(x, t)$ がある関数 $F(x, t)$ の gradient で与えられるとき gradient soliton という。

定理 2.4 ([Per02] §11). κ -solution のスケールリング $g_\tau(t) = \tau^{-1}g(t + \tau)$ は $\tau \rightarrow \infty$ の際 blow down limit に収束する。この極限は $l(q, \tau)$ 関数の極限関数 l_∞ に関する κ -noncollapsed gradient shrinking soliton (以下 κ -GSS) である。

二次元、三次元のとときの κ -GSS は比較的簡単に分類できる。

命題 2.5 ([Per03] §1). 二次元の κ -GSS は S^2 の標準解に限る。とくにこのことから二次元の κ -solution もそれに限る。

三次元の κ -GSS は S^3 の標準解とその Quotient であるか、 $S^2 \times \mathbb{R}, S^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ の標準解に限る。

2.3 κ -solution について [Per02, §11]

κ -solution に関する次の結論は基本的である。

定理 2.6. n 次元 nonflat- κ -solution の asymptotic volume ratio

$$\nu(t) = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(B(x, t, r))}{r^n}$$

は任意の t について $\nu = 0$

Remark 1. この定理は背理法によるコンパクト性の議論を使って曲率評価を行うための大事な道具となる。その使い方は次のような感じである：(何らかの意味で) 基点近辺での volume noncollapsion の条件と曲率の下からの評価がある状況を考える。基点から有界半径内の曲率の上からの評価をするため、結論を否定して、ricci flow の列で基点を中心とするある一定半径の Ball B での曲率の最大値 Q_i が発散しているようなものをとる。この際 blowup limit を取り、その limit にこの定理を適用して、blowup center 中心の十分小さな ball (半径 $\sim CQ_i^{-\frac{1}{2}}$, C は十分大きい) の volume ratio が 0 に近いことがわかる。この際曲率の下からの評価と relative volume comparison を用いれば、 B の volume collapse が従う。この結論と基点付近での volume noncollapsed の条件から矛盾を導く。

Proof. 証明は基点 p に関する asymptotic scalar curvature $\mathcal{R} = \limsup_{x \rightarrow \infty} R(x, t) d_t^2(p, x)$ により分類して $\mathcal{R} = 0$ の場合は flat になることが知られている。 $0 < \mathcal{R} < \infty$ の場合、asymptotic cone (p に関する blowdown limit) を考えて、 $\mathcal{R} < \infty$ から blowdown の際 ricci flow も収束する。しかし、強最大値原理 (定理 2.1) から正の時間が経過した後、nonflat で $R_m > 0$ なる cone が ricci flow に現れることはない。

したがって、 $\mathcal{R} = \infty$ の場合を考えればよい。この場合に次元に関する帰納法を用いる。仮定からスカラ曲率 R が発散しながら、遠方へ行く点列 x_i で blowup center となるものがある。このとき、基点 p と x_i を結ぶ ray がその blowup limit において line に収束することをみて、toponogov splitting theorem と強最大値原理 (定理 2.1) を用いると、この blowup limit は \mathbb{R} と $n-1$ 次元の ricci flow の直積に収束する。volume comparison により、帰納法の仮定に帰着する。□

定理 2.7. 三次元点つき κ -solution $(M, g(t), p)$ で $R(p) = 1$ と正規化したもの全体の空間は点列コンパクト。

Proof. 証明は曲率の評価に帰着する。基点 p からの有界なところでの評価は本質的に定理 2.6 のあとの remark の議論である。これが本当に一様有界であることを言うには、非負曲率多様体の end の解析と定理 2.6 の証明のような splitting の議論による。□

$(M^3, g(t))$ 上の点 (p, T) の P 近傍 $P(x, T, Q^{-\frac{1}{2}}, -Q^{-1})$, $Q = R(x, t)$ を $Q^{-1/2}$ でスケールリングしたとき、 $S^2 \times \mathbb{R}$ の標準解を $t = 0$ で曲率 1 となるように正規化したものの P 近傍 $P(x, 0, \varepsilon^{-1}, -\varepsilon^{-2})$ で ε 近似されるとき、 (p, T) は ε -neck (の中心) という。

定理 2.8. noncompact, nonflat な κ -solution に対して、 ε -neck でない点の集合を M_ε とする。このとき、 M_ε はコンパクトであり、 M_ε 上の点を基点として曲率 1 に正規化すると M_ε の直径および M_ε 上のスカラ曲率の上界、下界は κ -solution によらない定数により評価される。

Proof. これも背理法によるコンパクト性の議論である。例えば遠方に ε -neck とならない点があれば、splitting の議論から $S^2 \times \mathbb{R}$ に収束することがわかる。これにより M_ε のコンパクト性が従う。□

これらの定理と定理 2.4 によって三次元の κ -solution の分類を行うことができる。asymptotic soliton が標準的 S^3 であるときは κ -solution 自身も標準的 S^3 になる。

そうでないとき、noncompact であれば、 $Rm > 0$ であれば soul theorem から位相は \mathbb{R}^3 であり、定理 2.8 から遠方で asymptotic には $S^2 \times \mathbb{R}$ の neck で近似される cap となる。 Rm がある点で null space を持てば強最大値原理定理 2.1 により、計量は split するから標準的 $S^2 \times \mathbb{R}, S^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}^2$ となる。

コンパクトのケースは定理 2.8 に述べられていないが、同様にして調べることができる。結論は $t \rightarrow -\infty$ でシリンダー $S^2 \times \mathbb{R}$ になっていき、その両端が cap された位相的 S^3 となることがわかる。

2.4 三次元強コンパクト性定理 [Per02, §12]

ここでは三次元強コンパクト性定理の証明の粗筋について述べる。Perelman の証明の筋立ては非常にトリッキーであるが、話の筋を簡単にするため次の評価を認めたくえ話を進める。(三次元の場合、定理 2.7 とここでの議論を用いることによりやはり背理法により示すことができる。筆者はこの評価は(もしかすると一般次元で)直接証明できるような気がするのだが、現時点ではまだ成功していない。)

命題 2.9. つぎの性質を満たす定数 $\eta, r(\kappa) > 0$ が存在する： $(M^3, g(t))$ を閉多様体 M と時間 $[0, T)$ 上で定義された κ -noncollapsed ricci flow とする。 $(x, t), t > 1$ において、 $R(x, t) \geq r^{-2}$ ならば、

$$|\partial_t R(x, t)| \leq \eta^2 R^2(x, t), \quad |\nabla R(x, t)| \leq \eta R^{\frac{3}{2}}(x, t)$$

が成り立つ。

$(M_i^3, g_i(t), p_i)$ をスケール $< \varepsilon$ で κ -noncollapsed であるような三次元 ricci flow の列とする。このとき、 $t_i > 1$ として、スカラー曲率が $Q_i = R(p_i, t_i) \rightarrow \infty$ と発散しているとする。この際、曲率に関する自然なスケール $\bar{g}_i(t) = Q_i g_i((t - t_i)Q_i^{-1})$ を考える。このとき、 $(\bar{M}_i, \bar{g}_i, \bar{p}_i)$ が κ -solution に収束することが強コンパクト性の主張であった。

局所的な曲率評価 命題 2.9 を用いて簡単な評価を行うと、小さな普遍定数 c が存在して $(\bar{p}_i, 0)$ の P 近傍 $P(\bar{p}_i, 0, c, -c)$ で一様な曲率評価 $R \leq c$ を満たすことがわかる。したがって、この範囲での収束は保証される。次に $t = 0$ の time slice で考えて、 $B(\bar{p}_i, 0, r)$ において、曲率が一様な有界となるような最大の半径 r を $D > 0$ とする。(D はいわば収束半径である。) 前の考察から $D > c > 0$ である。時間方向についても $q \in B(\bar{p}_i, 0, D)$ の P 近傍に対して命題 2.9 を適用すれば、 $\bar{Q} = \bar{R}(q, 0) \geq 2$ である場合、 P 近傍 $P(q, 0, c\bar{Q}^{-\frac{1}{2}}, -c\bar{Q}^{-1})$ において一様な曲率評価 $R(x, t) \leq 4\bar{Q}$ が保証される。

非完備な局所極限 Ω $D < \infty$ とする。つまり前章の言葉でいえば特異性の干渉があるとすると。このとき、収束半径内で極限をとることを考える。 $\bar{R}(\bar{p}_i, 0) < \rho$ を満たす \bar{M}_i の開集合の p_i を含む連結成分 Ω_ρ^i を考える。このとき、 γ_ρ^i を $\partial\Omega_\rho^i$ への p_i からの minimal path とする。この path の長さは $< D$ であるとしてよい。さらに時間方向の評価から各点ともその曲率に応じた time interval $[-c\bar{Q}^{-1}, 0]$ で曲率評価を持つから、対角線論法により適当な $\rho_i \rightarrow \infty$ を選び、 $\Omega_{\rho_i}^i$ について ricci flow の limit Ω を取ることができ、 Ω は各点で曲率に応じた半径、time interval で定義された ricci flow で「support されている」と考えてよい。 Ω は完備でないが、定理 1.2 から非負曲率である。この際 p_i からの segment γ_ρ^i も γ 収束し、 p_i から $s \rightarrow D$ とすると $\gamma(s)$ 上の曲率が発散している。

Ω の特異性 極限 Ω の特異性を解析して $D < \infty$ との矛盾を導くのが次の目標である。 γ に沿って、 $s \rightarrow D$ とするとき、曲率が発散するが、geodesic γ に関する index の議論を行うと $s \rightarrow D$ のとき $Rc(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})/R(\gamma) \rightarrow 0$ がわかる。このことから $\gamma(s)$ を blowup center とする scaling を

考えると標準的 $\text{cylinder } S^2 \times \mathbb{R}$ に収束することがわかる。つまり Ω は γ にそった cylindrical neck の特異性を持つことがわかる。とくにこのことから、

$$\lim_{s \rightarrow D} (D - s)^2 \tilde{R}(\gamma(s), 0) = \infty \quad (7)$$

を得る。

大域的な収束 上の特異性の解析により、 Ω は完備ではないが、任意の二点は minimal path で結ばれることが従う。実際 path を minimize するとき、それが minimizing path に収束しないのは path の一部が neck singularity に深く入っていくケースだが、そのような path は長さのロスが大きいためそのようなことはありえない。したがって、 Ω の完備化 $\bar{\Omega}$ は曲率 ≥ 0 のアレクサンドロフ空間となる。局所的には $\bar{\Omega}$ は $\gamma_\infty = \lim_{s \rightarrow D} \gamma(s)$ の極限点を Ω に付け加えたものである。アレクサンドロフ空間の一般論から $\bar{\Omega}$ の Tangent cone は三次元である。しかし、式 (7) は γ_∞ での tangent cone は $\text{ray } \mathbb{R}_+$ であることを示している。これは矛盾である。したがって、 $D = \infty$ 。

空間大域的な収束が言えれば、空間での一様な曲率評価は κ -solution の場合と同様に非負曲率空間の end の解析から従う。したがって $\bar{M} \times (-c, 0]$ での収束を得る。あとは時間大域的な収束をいえばよいが、 $c < \infty$ として、曲率が $t \rightarrow -c$ の際曲率が発散するとして矛盾を導いて κ -solution への収束を得る。

三次元はどう効いているのか 明らかな三次元の特異事情は定理 1.2 から $\text{Rm} \geq 0$ が blowup limit で自動的に保証されることである。筆者にはそれ以上に singularity が基本的に cylindrical (split するなら $S^2 \times \mathbb{R}$ となるという程度の意味) であることが重要であるように見える。実際、上の証明においてアレクサンドロフ空間の Tangent cone を解析する代りに γ に沿った cylindrical neck の点 x をとり、 $\text{cylinder } S^2 \times \mathbb{R}$ の γ_∞ と反対の方向を向く geodesic ray のみを考えて、定理 2.6 のあとの remark にあるような volume comparison による議論を行うことにより矛盾を導き $D = \infty$ を示すことができると思われる。volume comparison を行うためには minimal path の存在は重要であるが、この証明で Ω の singularity が cylindrical であること以外にそれを保証する根拠はないように思える。このように考えると曲率の仮定がある程度 (例えば Rc の下からの評価) あって、何らかの形で cylindrical singularity が保証される状況では三次元でなくても同じ議論ができると思われる。Hamilton [Ham95b] によれば、四次元までは ricci flow を用いてトポロジーを解析できる可能性がある。その観点から、三次元以外でおそらく一番興味あるケース、一般の四次元 ricci flow について、同じような議論をするには新しいアイデアが必要であろう。というのは四次元 ricci flow を解析するのに明らかに (cylindrical でない) $S^2 \times \mathbb{R}^2$ のように split する状況を考えることが本質的であるだろうからである。

2.5 時間大域挙動について [Per03, §6,7]

スカラー曲率 R に関する方程式 (3) から R の空間における最小値 $\underline{R}(t)$ は $\frac{d\underline{R}}{dt} \geq \frac{2}{3}\underline{R}^2$ なる微分不等式を満たす。(リプシッツの意味で) \underline{R} が非負の場合、フラットであるか有限時間内に正曲率に extinction するから、 $\underline{R} < 0$ の場合のみ考えればよい。この場合、surgery の存在は \underline{R} の微分不等式に影響を与えない。この微分不等式から、

$$\underline{R}(t) \geq -\frac{3}{2} \frac{1}{t + \frac{1}{4}}$$

が成り立つ。また体積の微分 $\frac{dV}{dt} = -\int_M R dV$ から

$$\frac{dV}{dt} \leq -\underline{R}V$$

これらから、 $V(t)(t + \frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$ は単調非減少である。surgery が行われても体積は減少するだけだからこの関係が保たれることに注意。とくに t に関する linear な blowdown は一様に有界な体積を持つ。この極限を \bar{V} とする。一方 $\hat{R} = \underline{R}V^{\frac{2}{3}}$ について

$$\frac{d}{dt}\hat{R} \geq \frac{2}{3}\hat{R}V^{-1} \int (\underline{R} - R)dV \quad (8)$$

が成り立ち、 \hat{R} は単調非減少。これは負だから、 $t \rightarrow \infty$ の極限 \bar{R} が存在する。 \hat{R} の挙動と \underline{R} の lower bound から $\bar{V} \neq 0$ ならば $\underline{R} \sim -3/2t$ であることが従う。

$\bar{V} \neq 0$ の仮定のもとで、 $P(x, t, r\sqrt{t}, -r^2t)$ の時間 $t \rightarrow \infty$ における $P(x, 1, r, -r^2)$ への blow down を考える。この blow down が収束するならば式 (8) を積分して、 $R \equiv \underline{R}$ を得る。このとき、式 (3) に強最大値原理を用いると $R_c \equiv 0$ を得る。つまり定曲率となる。

したがって、collapse しないとき、任意の $r > 0$ についてこの blow down の収束が言えれば Hyperbolic piece を得ることができる。Thick part では定義により blowdown を考えるとき、 $B(x, 1, r)$ での曲率の下からの評価と volume ratio の下からの評価を持つ。収束を言うには曲率の評価がまず必要である。定理 2.6 のあとの remark の議論を用いるのが本質的なアイデアである。この際 blowup limit の存在は前節の強最大値原理によるから κ -noncollapsed であることを保証する必要がある。このために κ -noncollapsing theorem の別バージョンを必要とする。この別バージョンは $P(x, 1, r, -r^2)$ 上での曲率評価 $|\text{Rm}| < K$ と $B(x, 1, r)$ での volume noncollapsed の条件 $\text{vol}(B(x, 1, r))/r^3 > w$ さえあれば、任意の $A > 0$ に対して $P(x, 1, Ar, -r^2)$ での $\kappa(A)$ -noncollapsed を保証するものである。このことから、いま考えている極限は任意の半径 A において収束することがわかる。したがって、極限は完備双曲となる。また $\bar{V} < \infty$ からこのようにして得られる完備双曲多様体はすべて体積有限で有限個であることも従う。

参考文献

- [Ham86] R.S. Hamilton, *Four-manifold with positive curvature operator*, J.D.G. 24 (1986), 153–179.
- [Ham93] R.S. Hamilton, *The Harnack estimate for the ricci flow*, J.D.G. 37 (1993), 225–243.
- [Ham95a] R.S. Hamilton, *A compactness property of solutions of the Ricci flow*, American Journal of Math. 117 (1995), 545–572.
- [Ham95b] R.S. Hamilton, *Formation of singularities in the Ricci flow*, Surveys in Diff. Geom. 2 (1995), 7–136.
- [Ham99] R.S. Hamilton, *Non-singular solutions of the Ricci flow on three manifolds*, Commun. Anal. Geom. 7 (1999), no. 4, 695–729.
- [Per02] G Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, arXiv:math.DG/0211159 (2002).
- [Per03] G Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, arXiv:math.DG/0303109 (2003).
- [SY03] T Shioya and T Yamaguchi, *Volume collapsed three-manifolds with a lower curvature bound*, arXiv:math.DG/0304472 (2003).
- [Ye04] R Ye, *Notes on reduced volume and asymptotic ricci solitons of kappa solutions*, preprint (2004).

Lehmer's polynomial and Coxeter links

Eriko Hironaka

May 29, 2004

Abstract

Lehmer's polynomial, which is the minimal polynomial for the smallest known Salem number, has appeared in various geometric contexts within knot theory, geometric group theory, and Coxeter theory. In this lecture we will describe some of these occurrences, and present some combinatorics which unify these examples.

1 Introduction.

For a single variable monic integer polynomial

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0,$$

the Mahler measure of $f(x)$, which we will denote by $\|f\|_M$, is the absolute value of the product of roots of $f(x)$ whose norms are greater than one.¹

In 1933, Lehmer [9] asked whether for all $\delta > 0$, there is a polynomial $p(x)$ such that

$$1 < \|f\|_M < 1 + \delta.$$

Lehmer's question is still open, and as are many questions about the distribution of Mahler measures. A related open problem is whether there exists a smallest *Salem number*, an algebraic integer all of whose algebraic conjugates lie on the unit circle except for itself and its multiplicative inverse [1].

This paper will concern a degree 10 polynomial

$$f_L(x) = x^{10} + x^9 - x^7 - x^6 - x^5 - x^4 - x^3 + x + 1,$$

¹The Mahler measure can be defined for integer polynomials of several variables. For the purposes of this note, we will restrict to Mahler measures of monic integer polynomials.

which appears in Lehmer's article. For polynomials of degree up to 40, Lehmer's polynomial $f_L(x)$ has smallest Mahler measure greater than one [11]. Lehmer's polynomial is also a Salem polynomial, and its largest real root $\alpha_L = 1.7638\dots$ is the smallest known Salem number.

Lehmer's polynomial, and all minimal polynomials for Salem numbers are *reciprocal*, that is, $f(x) = x^d f(\frac{1}{x})$. For non-reciprocal monic integer polynomials, Smyth [13] showed that the Mahler measure is minimized by

$$f_S(x) = x^3 - x + 1.$$

The positive real root $\alpha_S = 1.32472\dots$ of $f_S(x)$ is the smallest P-V number, an algebraic integer all of whose algebraic conjugates other than itself lie strictly within the unit circle.

In this lecture, we describe some geometric manifestations of Lehmer's polynomial incorporate the triple $\{2, 3, 7\}$. The minimality of Lehmer's polynomial for a large class of polynomials has to do with the property that the function

$$2 - k + \frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_k}$$

attains its largest negative value, among all k -tuples of positive integers p_1, \dots, p_k , when $\{p_1, \dots, p_k\} = \{2, 3, 7\}$. In Section 2, we will describe a family of corresponding rational functions.

$$R_{p_1, \dots, p_k}(x) = [2] - k + \frac{1}{[p_1]} + \dots + \frac{1}{[p_k]}, \quad (1)$$

where, for a positive integer m , $[m] = 1 + x + x^2 + \dots + x^{m-1}$. Lehmer's polynomial is the numerator of $R_{2,3,7}(x)$.

Lehmer's polynomial appears in relation to the $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot, to the growth series of the $(2, 3, 7)$ -triangle group, and to the Coxeter element for the E_{10} Coxeter system, whose Coxeter graph is a $(2, 3, 7)$ -star graph. We describe these appearances in Section 3. These geometric realizations of Lehmer's polynomial can be related to each other explicitly using properties of Coxeter graphs. In Section 4 we explain some of the underlying combinatorics behind the geometric examples.

2 A family of deformations of cyclotomic polynomials

Let $k \geq 3$, and let $p_1, \dots, p_k \geq 2$ be integers. Multiplying $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$ (see Equation 1) by the product $[p_1] \cdots [p_k]$ gives

$$Q_{p_1, \dots, p_k}(x) = ([2] - k)[p_1] \cdots [p_k] + \sum_{i=1}^k [p_1] \cdots [\widehat{p_i}] \cdots [p_k].$$

These polynomials can be thought of as reciprocal deformations of the cyclotomic polynomials $[p_1] \cdots [p_k]$. Lehmer's polynomial $f_L(x)$ equals $Q_{2,3,7}(x)$.

Let

$$\chi_{p_1, \dots, p_k} = \frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_k} - k + 2.$$

Theorem 2.1 *If $\chi_{p_1, \dots, p_k} < 0$, then*

$$\|Q_{p_1, \dots, p_k}\|_M \geq \|Q_{2,3,7}\|_M = \|f_L\|_M,$$

otherwise

$$\|Q_{p_1, \dots, p_k}\|_M = 1.$$

The special property of $Q_{2,3,7}(x)$ reduces to a property of the triple $(2, 3, 7)$.

Lemma 2.2 *For $k \geq 3$, and integers $p_1, \dots, p_k \geq 2$, χ_{p_1, \dots, p_k} is either greater than or equal to zero, or*

$$\chi_{p_1, \dots, p_k} \leq \chi_{2,3,7}.$$

Proof. One can easily verify that if p_1, \dots, p_k are put in increasing order, we have the following:

- (1) $\chi_{p_1, \dots, p_k} > 0$ only for the triples $(2, 2, n)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, and $(2, 3, 5)$; and
- (2) $\chi_{p_1, \dots, p_k} = 0$, for $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$, $(3, 3, 3)$, and $(2, 2, 2, 2)$.

Furthermore,

$$\chi_{p_1, \dots, p_k, p_{k+1}} < \chi_{p_1, \dots, p_k} - \frac{1}{2}.$$

Thus, it suffices to check the minimal cases: $(2, 3, 7)$, $(2, 4, 5)$, $(3, 3, 4)$, $(2, 2, 2, 3)$, and $(2, 2, 2, 2, 2)$. ■

To prove Theorem 2.1 we make the following easy observations:

- (1) the zeros of R_{p_1, \dots, p_k} are roots of $Q_{p_1, \dots, p_k}(x)$,
- (2) $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$ satisfies

$$R_{p_1, \dots, p_k}(x) = x R_{p_1, \dots, p_k}\left(\frac{1}{x}\right),$$

and hence $Q_{p_1, \dots, p_k}(x)$ is reciprocal;

- (3) $R_{p_1, \dots, p_k}(1) = \chi_{p_1, \dots, p_k}$;
- (4) $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$ has strictly positive slope for real $x > 1$; and
- (5) $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$ is concave up and decreasing on the interval $0 < x < 1$.

Proofs are contained in [4]. Properties (3) and (4) imply $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$ has exactly one real root $\alpha > 1$ if and only if $\chi_{p_1, \dots, p_k} < 0$. By property (5), the polynomial $Q_{p_1, \dots, p_k}(x)$ with smallest real root greater than 1 is $Q_{2,3,7}(x)$. Since $Q_{2,3,7}(x)$ has only one root of norm greater than one, this completes the proof of Theorem 2.1.

3 Appearances of Lehmer's polynomial in geometry.

In this section we will describe three different geometric settings in which the family \mathcal{Q} of polynomials $Q_{p_1, \dots, p_k}(x)$ appears.

3.1 Knots and links.

In 1932, Lehmer's polynomial had already appeared in the literature as the Alexander polynomial of the $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot $K_{2,3,7}$ [12]. The identity $\Delta_{K_{2,3,7}}(x) = p_L(-x)$ was observed by several people (see, for example, [8]).

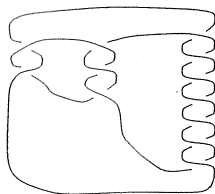


Figure 1. $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot

Given any fibered link K with fiber Σ , let $\Delta_K(x)$ be the characteristic polynomial of the monodromy action $\eta : \Sigma \rightarrow \Sigma$ restricted to $H_1(\Sigma, \mathbb{R})$. If K is a knot, then $\Delta_K(x)$ is the Alexander polynomial of K . Kanenobu [7] showed that all reciprocal monic integer polynomials are realized by Hosokawa polynomials of fibered links, and hence appear as factors of $\Delta_K(x)$. Thus, Kanenobu and Smyth's result show that Lehmer's problem can be solved by studying fibered links.

The pretzel knot $K_{2,3,7}$ is one of a family of links K_{p_1, \dots, p_k} with positive twists of orders p_1, \dots, p_k , where $p_i \geq 2$, and $k - 2$ negative single twists; for example, the $(-2, 3, 7)$ -pretzel knot in Figure 1 is knot-equivalent to the $(2, 3, 7, -1)$ -pretzel link $K_{2,3,7}$. The pretzel links K_{p_1, \dots, p_k} are fibered with fibering surface Σ as in Figure 2.

The following theorem was proved using direct calculation in [4].

Theorem 3.1 *Let $\Delta_{p_1, \dots, p_k}(x) = \Delta_K(x)$, where $K = K_{p_1, \dots, p_k}$. Then we have the identity:*

$$\Delta_{p_1, \dots, p_k}(x) = Q_{p_1, \dots, p_k}(-x).$$

3.2 Growth series of planar Coxeter groups.

In the 1980's, work of Cannon [2] and others exhibited Lehmer's polynomial and more generally the family of polynomials $Q_{p_1, \dots, p_k}(x)$ as denominators of growth series of

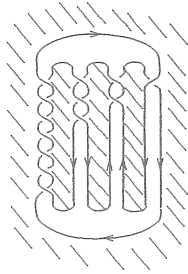


Figure 2. Seifert surface

planar polygonal Coxeter reflection groups.

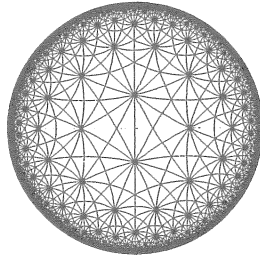


Figure 3. Tessellation of hyperbolic disk by (2,3,7)-triangle group

Let G be a group with generating set S . For an element $\omega \in G$, define the *word length* of ω , written $\ell(\omega)$, to be the minimal number ℓ such that

$$\omega = s_1 \cdots s_\ell$$

where s_i or s_i^{-1} is in S for $i = 1, \dots, \ell$. The *growth series* of (G, S) is defined to be

$$\Phi_{(G,S)}(t) = \sum_{\omega \in G} t^{\ell(\omega)}.$$

Given integers p_1, \dots, p_k , where $k \geq 2$, let G_{p_1, \dots, p_k} the group with generators $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ and relations

$$\begin{aligned} (s_i s_{i+1})^{p_i} &= 1, & i = 1, \dots, k-1 \\ (s_k s_1)^{p_k} &= 1 \end{aligned}$$

Theorem 3.2 [Floyd-Plotnick[3]] *The growth series of the polygonal reflection group (G_{p_1, \dots, p_k}, S) is given by*

$$\frac{[2]}{R_{p_1, \dots, p_k}(t)}.$$

Furthermore, this rational function has at most one pole outside the unit circle.

The result applies a formula of Steinberg [15], which recursively defines the growth series of Coxeter groups in terms of subgroups generated by finite subsets of S .

3.3 Coxeter elements.

In 2000, C. McMullen [10] noticed that Lehmer's polynomial is the characteristic polynomial of the Coxeter element of the E_{10} Coxeter system, and showed that Lehmer's polynomial has minimal Mahler measure greater than 1 among all characteristic polynomials of Coxeter elements.



Figure 4. (2,3,7)-star or E_{10} Coxeter graph

A general Coxeter system is a group G with generating set $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ subject to the relations

$$(s_i s_j)^{m_{i,j}} = e$$

where $m_{i,j}$ are positive integers satisfying

- (i) $m_{i,i} = 1$;
- (ii) $m_{i,j} = m_{j,i}$; and
- (iii) $m_{i,j} \geq 2$ if $i \neq j$.

A Coxeter group G has a natural representation in $GL(n)$ so that each generator s_i is reflection through a hyperplane with respect to the bilinear form:

$$\left[-2 \cos \left(\frac{\pi}{m_{i,j}} \right) \right].$$

The Coxeter element of (G, S) is the product $s = s_1 \cdots s_k$ considered as an element of $GL(n)$.

Let p_1, \dots, p_k be integers with $p_i \geq 2$, and let Γ_{p_1, \dots, p_k} be the star graph with prongs of length $p_1 - 1, \dots, p_k - 1$ emanating from a central node. Thus, the E_{10} graph is a (2,3,7)-star.

Theorem 3.3 *The characteristic polynomial of the Coxeter element of Γ_{p_1, \dots, p_k} equals $Q_{p_1, \dots, p_k}(x)$.*

We will prove Theorem 3.3 in Section 4.1. The relationship between Coxeter elements of star-graphs and pretzel links is explained in Section 4.1. Star-graphs and growth rates of polygonal reflection groups are related in Section 4.2.

4 Coxeter links

In this section, we will give concrete relations between the three geometric occurrences of Lehmer's polynomial, and the family of polynomials Q .

4.1 Star graphs and pretzel links.

We begin by describing a construction, given in [5], which produces fibered links whose monodromy is associated to simply-laced Coxeter systems. By this relation, the pretzel links K_{p_1, \dots, p_k} are related to the simply-laced Coxeter systems associated to the (p_1, \dots, p_k) -star graphs.

Let Γ be an ordered graph. Then there is an associated *simply-laced* Coxeter system

$$\langle s_1, \dots, s_k : (s_i s_j)^{m_{i,j}} \quad i, j = 1, \dots, k \rangle$$

where s_1, \dots, s_k are in one-to-one correspondence with the vertices $\{\nu_1, \dots, \nu_k\}$ of the graph, and the numbers $m_{i,j}$ are given by

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 2 & \text{if there is no edge between } \nu_i \text{ and } \nu_j \\ 3 & \text{otherwise} \end{cases}$$

Let $c(\Gamma)$ the Coxeter element associated to its associated simply-laced Coxeter system.

Now suppose Γ is the incidence graph of a chord diagram in a 2-dimensional disk, so that the chords are in one-to-one correspondence with the vertices of Γ , and two chords intersect if and only if the corresponding vertices have an edge between them. Embed the 2-disk on a 2-dimensional plane in Euclidean 3-space \mathbb{R}^3 . Attach positively-twisted bands to 2-disk as in Figure 5, in the order determined by the graph Γ . The process of attaching the bands is known as *Hopf-plumbing*, and is an example of a Murasugi sum. By a theorem of Stallings [14], the boundary K of the resulting surface Σ is a fibered link in $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ with fiber Σ .

If Γ can be realized by an oriented chord diagram $\mathcal{L} = \{\ell_1, \dots, \ell_k\}$, such that $I(\ell_i, \ell_j) \geq 0$ whenever $i > j$, then we will call the chord diagram *positive*.

Theorem 4.1 *Suppose Γ admits a positive chord diagram. Let (Σ, K) be the surface-link pair obtained by Hopf-plumbing, and let $h : \Sigma \rightarrow \Sigma$ be the monodromy of the*

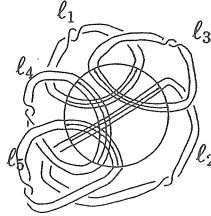


Figure 5. Hopf plumbing on an ordered chord diagram

associated fiber bundle $S^3 \setminus \Sigma \rightarrow S^1$, and let $h_* : \mathbb{H}_1(\Sigma; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{H}_1(\Sigma; \mathbb{R})$ be its restriction to homology. Let $c(\Gamma)$ be the Coxeter element of the simply-laced Coxeter system associated to Γ . Then we have

$$h_* = -c(\Gamma).$$

We leave it to the reader to verify that the pretzel link K_{p_1, \dots, p_k} is the Coxeter link associated to a (p_1, \dots, p_k) -star graph. This proves Theorem 3.3. In particular, $K_{2,3,7}$ has monodromy equal to minus the Coxeter element of E_{10} .

For any fibered link K , define the Mahler measure of K to be the Mahler measure of the characteristic polynomial of h_* , where h is the monodromy of the associated fiber bundle. McMullen's result on Coxeter systems [10] implies the following.

Theorem 4.2 *Among all Coxeter links, $K_{2,3,7}$ has smallest Mahler measure.*

4.2 Star graphs and growth rates of Coxeter groups

Independent calculations in [3] and [4] imply the following.

Theorem 4.3 *The characteristic polynomial of the Coxeter element of the (p_1, \dots, p_k) -star graph equals the denominator of the growth series of the (p_1, \dots, p_k) -polygonal reflection group.*

We sketch here a direct proof that the Mahler measures of the polynomials are the same. Full details will appear in an upcoming paper.

Let Γ be an arbitrary graph, with no self-loops or double edges. Let A be the adjacency matrix for Γ , A^+ the upper triangular part of A , and $S = I - A^+$.

Theorem 4.4 (Howlett [6]) *Given a graph Γ , the Coxeter element of its associated simply-laced Coxeter system is given by*

$$c(\Gamma) = -S^{-1}S^t.$$

Let p_1, \dots, p_k be integers $p_i \geq 2$. Let $G = G_{p_1, \dots, p_k}$ be the (p_1, \dots, p_k) -polygonal refraction group, and let $\Gamma = \Gamma_{p_1, \dots, p_k}$ be the star graph introduced in Section 3.3.

Let λ_n be the number of elements of G of minimal word length n . Let

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} (\lambda_n)^{\frac{1}{n}}.$$

Then by Theorem 3.2, λ equals the largest norm of a root of $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$.

Order the vertices of Γ so that the initial vertex is the central vertex. Let T be the $k \times k$ -identity matrix with first entry replaced by -1 . Let $C = Tc(\Gamma)T^{-1}$.

For a matrix M , let $M[i, j]$ be its i, j -th entry.

Lemma 4.5 *For large n , the entry of C^n with largest absolute value is $\mu_n = C^n[1, 1]$. Furthermore,*

$$R_{p_1, \dots, p_k}(x) \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n x^n$$

is a polynomial.

Let

$$\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} |\mu_n|^{\frac{1}{n}}.$$

Lemma 4.5 implies that μ is a root of $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$.

For a vector V , let $V[j]$ be its j -th entry.

Lemma 4.6 *There is an initial vector $V_0 \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ so that $\lambda_n = C^n V_0[1]$.*

When $\chi_{p_1, \dots, p_k} < 0$, G_{p_1, \dots, p_k} is hyperbolic, and $\lambda > 1$. Lemma 4.6 implies that in this case C has an eigenvalue greater than one. Furthermore, this eigenvalue must be equal to the largest root of $R_{p_1, \dots, p_k}(x)$ by Lemma 4.5. Thus $\lambda = \mu$. If $\chi_{p_1, \dots, p_k} \geq 1$ then it is an easy check case by case that $\lambda = \mu = 1$. This completes the proof of Theorem 4.3.

References

- [1] D.W. Boyd. Small Salem numbers. *Duke Math. J.*, 44(2):315–328, 1977.
- [2] J. Cannon and P. Wagreich. Growth functions of surface groups. *Math. Ann.*, 293:239–257, 1992.
- [3] W. J. Floyd and S. P. Plotnick. Symmetries of planar growth functions of Coxeter groups. *Invent. Math.*, 93:501–543, 1988.
- [4] E. Hironaka. The Lehmer polynomial and pretzel knots. *Bulletin of Canadian Math. Soc.*, 44(4):440–451, 2001.
- [5] E. Hironaka. Chord diagrams and Coxeter links. *J. London Math. Soc. (2)*, 69(1):243–257, 2004.
- [6] R. Howlett. Coxeter groups and M -matrices. *Bull. London Math. Soc.*, 14(2):137–141, 1982.
- [7] T. Kanenobu. Module d’Alexander des noeuds fibrés et polynôme de Hosokawa des lacements fibrés. *Math. Sem. Notes Kobe Univ.*, 9(1):75–84, 1981.
- [8] R. Kirby. Problems in low-dimensional topology. In W. H. Kazez, editor, *Geometric Topology*, Studies in Advanced Mathematics. A.M.S., 1997.
- [9] D. H. Lehmer. Factorization of certain cyclotomic functions. *Ann. of Math.*, 34:461–469, 1933.
- [10] C. McMullen. Coxeter groups, Salem numbers and the Hilbert metric. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 95:151–183, 2002.
- [11] M. Mossinghoff. Polynomials with small Mahler measure. *Mathematics of Computation*, 67(224):1697–1705, 1998.
- [12] K. Reidemeister. *Knotentheorie*. Springer, Berlin, 1932.
- [13] C. J. Smyth. On the product of the conjugates outside the unit circle of an algebraic integer. *Bull. London Math. Soc.*, 3:169–175, 1971.
- [14] J. Stallings. Constructions of fibered knots and links. *Proc. Symp. Pure Math.*, 27:315–319, 1975.
- [15] R. Steinberg. Finite reflection groups. *Trans. Am. Math. Soc.*, 91:493–504, 1959.

定径円織面について

佐治健太郎 (広島大学大学院理学研究科)

泉屋周一 (北海道大学大学院理学研究科), 竹内伸子 (東京学芸大学教育学部) との共同研究

平成 16 年 6 月 15 日

1 序

円織面とはユークリッド空間内の円の 1 パラメーター族のことである。円織面の定義を与える。

定義 1.1. 円織面 (circular surface) とは

$$V(t, \theta) = V_{(\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, r)}(t, \theta) = \gamma(t) + r(t)(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t))$$

であらわされる写像 $V : I \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{R}^3$ のことである。ただし, $\gamma, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 : I \rightarrow \mathbf{R}^3$, $r : I \rightarrow \mathbf{R}_{>0}$, $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = 1, \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ で, I は開区間である。 \cdot は \mathbf{R}^3 の通常の内積である。

γ をベース曲線, $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ を方向枠という。円 $\theta \mapsto \gamma(t) + r(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t))$ を母円という。 $r(t)$ が一定のとき定径円織面 (circular surface with constant radius) と呼ぶ。

本稿では定径円織面のみを扱うのでこれを単に円織面と呼ぶ。これは古典的な線織面の“線”を“円”に替えたものである。線織面は古典的で数多くの研究がされてきたが、円織面の研究は、[8] で少し紹介されているものと、ポータスによる円管面の特異点の研究 ([9]) ぐらいしかなく、その組織的研究はほとんどない。しかし、円織面は線織面の様にして模型を作りやすい曲面であり、建築やデザイン等の分野でも注目されており、重要な研究対象である。

円織面には、線織面と同様にさまざまなクラスを考えることが出来る。それらに対して主に特異点に注目して線織面と対比させて論じたい。すなわち本稿の目的は次である。

目標

円織面を線織面と対比させて論じる。

点 $x \in \mathbf{R}^n$ が写像 $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^p$ の特異点であるとは $(df)_x$ の階数が $\min\{n, p\}$ よりも小さいときをいう。本稿を通じて写像はすべて C^∞ -級とし, $e, \mathbf{n}, \mathbf{b}$ は空間曲線 γ のフルネフレームをあらわし, k, τ は γ の曲率, 捩率をあらわすとする。空間曲線の曲率は常に正とする。

2 線織面の復習

ここで、対比させて論じたいために、古典的な線織面について必要な事柄を復習しておく。くわしくは [2, 6] 等を参照。

定義 2.1. 線織面とは $F(t, u) = F_{(\gamma, \delta)}(t, u) = \gamma(t) + r\delta(t)$ であらわされる写像 $F: I \times J \rightarrow \mathbb{R}^3$ のことである. ただし, $\gamma, \delta: I \rightarrow \mathbb{R}^3, |\delta| = 1$ で, I, J は开区間である. γ をベース曲線, δ を方向曲線という. 直線 $u \mapsto \gamma(t) + r\delta(t)$ をルーリング (母線) という.

線織面には, 締括線という特別なベース曲線が存在する.

定義 2.2. 線織面 $F_{(\gamma, \delta)}$ 上の曲線 $\sigma(t) = \gamma(t) + u(t)\delta(t)$ が締括線 (striction curve) であるとは任意の $t \in I$ に対して

$$\sigma'(t) \cdot \delta'(t) = 0$$

がなりたつときをいう. ただし $' = d/dt$ である.

いくつかの線織面に対して締括線を描くと次のようになる. 太い線が締括線.

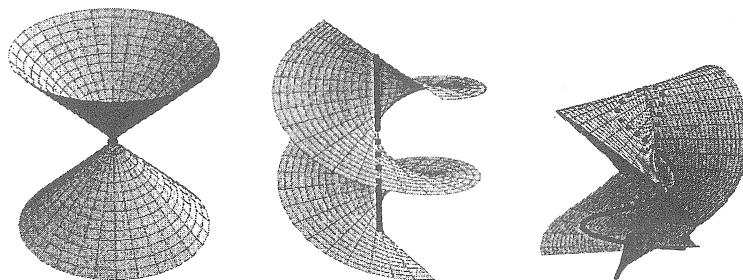


図 1: 締括線の絵

線織面は常に $\delta' = 0$ を満たすとき柱面的, 常に $\delta' \neq 0$ を満たすとき非柱面的と呼ぶ, 非柱面的な線織面にはベース曲線のとり方によらずに締括線がただ 1 つ定まる.

線織面や線織面の一般化の特異点を考える際, 締括線とそれに対応する概念は大変重要である. たとえば, 線織面の特異点 (の像) はかならず締括線上にあり, 特異点では締括線とルーリングが接している ([5]), 線叢 (\mathbb{R}^3 内の線の 2 パラメーター族) の特異点 (の像) は締括線に対応する焦曲面と一致し ([4]), \mathbb{R}^{2n} 内の n -平面の 1 パラメーター族の特異点 (の像) は締括線に対応する曲線と一致する. さらに, 締括線の振る舞いによって, 特異点の型も知ることが出来る ([10]).

線織面にジェネリックにあらわれる特異点は交差帽子であることが知られている ([5]). すなわち, 線織面全体の空間 $RS = C^\infty(I, \mathbb{R}^3 \times S^2)$ 内の稠密かつ開集合 \mathcal{O} が存在して任意の $F \in RS$ に対して任意の $(t, u) \in I \times J$ における F の写像芽は交差帽子に同値である. 今後ジェネリックという言葉を上のような文脈で使用する.

2 つの写像芽が同値であるとは定義域と値域との座標変換で一致するときをいう. 交差帽子 (cross cap) とは $(x, y) \mapsto (x^2, xy, y)$ の原点における写像芽をいう (図 2).

線織面には次のような特別なクラスが考えられている.

- 可展開面, 柱面 ($\delta = \text{const}$), 錘面 ($\gamma = \text{const}$), 接線曲面 ($\delta = e$)

- 主法線曲面 ($\delta = n$), 陪法線曲面 ($\delta = b$)
- ダルブー可展開面 ($\gamma = b, \delta = e$)
- 展直曲面 ($\delta = D, D = (\tau/k)e + kb$)

これらに対してジェネリックにあらわれる特異点が次であることが知られている.

- 可展開面にジェネリックにあらわれる特異点はカस्प角, スワローテイル, カスプ的交差帽子.
- 接線曲面にジェネリックにあらわれる特異点はカस्प角, カスプ的交差帽子 [1].
- 主法線曲面にジェネリックにあらわれる特異点は交差帽子 ([6]).
- 陪法線曲面は常に非特異.
- ダルブー可展開面にジェネリックにあらわれる特異点はカस्प角, スワローテイル, カスプ的交差帽子 ([6]).
- 展直曲面にジェネリックにあらわれる特異点はカस्प角, スワローテイル ([3]).
- 柱面はジェネリックに非特異.

また, 可展開面は臍点以外では各ルーリングが曲率線 (接線が曲面の主方向を向いている) であるような線織面という特徴づけを持つ.

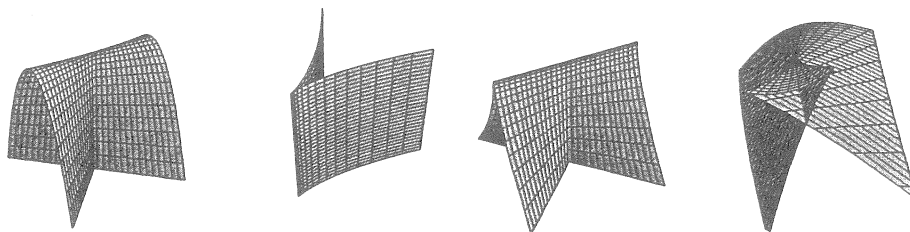


図 2: 左から交差帽子, カस्प角, カスプ的交差帽子, スワローテイルの図

カस्प角 (cuspidal edge) とは $(x, y) \rightarrow (x^2, x^3, y)$ 表される写像の原点における写像芽, カスプ的交差帽子 (cuapidal cross cap) とは $(x, y) \rightarrow (x^2, x^3y, y)$ の原点における写像芽, スワローテイルとは $(x, y) \mapsto (3x^4 + x^2y, 4x^3 + 2xy, y)$ の原点における写像芽をいう (図 2).

3 円織面の締括線

線織面上の曲線である締括線は線織面の特異点を論じる際大変有用であった. 円織面に対しても締括線に対応する曲線を定義したい.

定径円織面

$$V(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos \theta \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta \mathbf{a}_2(t))$$

に対して $\{\mathbf{a}_1(t), \mathbf{a}_2(t), \mathbf{a}_3(t)\}$ ($\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$) は \mathbf{R}^3 の正規直交基底を与えるので,

$$c_1(t) = \mathbf{a}'_1(t) \cdot \mathbf{a}_2(t) = -\mathbf{a}'_2(t) \cdot \mathbf{a}_1(t)$$

$$c_2(t) = \mathbf{a}'_1(t) \cdot \mathbf{a}_3(t) = -\mathbf{a}'_3(t) \cdot \mathbf{a}_1(t)$$

$$c_3(t) = \mathbf{a}'_2(t) \cdot \mathbf{a}_3(t) = -\mathbf{a}'_3(t) \cdot \mathbf{a}_2(t)$$

とおくと次のようなフルネ・セレ型の公式を得る.

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}'_1(t) \\ \mathbf{a}'_2(t) \\ \mathbf{a}'_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & c_1(t) & c_2(t) \\ -c_1(t) & 0 & c_3(t) \\ -c_2(t) & -c_3(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{a}_1(t) \\ \mathbf{a}_2(t) \\ \mathbf{a}_3(t) \end{pmatrix} \quad (1)$$

が成り立つ. さて, (t, θ) で V が特異点を持つための必要十分条件を求めると

$$\begin{cases} \mathbf{a}_3 \cdot (\gamma' + r \cos \theta \mathbf{a}'_1 + r \sin \theta \mathbf{a}'_2) = 0 & (2) \\ \gamma' \cdot (\cos \theta \mathbf{a}_1 + \sin \theta \mathbf{a}_2) = 0 & (3) \end{cases}$$

となる. $V(t, \theta)$ 上の曲線

$$\sigma(t) = \gamma(t) + r(\cos \theta(t) \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{a}_2(t))$$

を考える. σ が $\sigma'(t) \cdot (\cos \theta(t) \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{a}_2(t)) = 0$ を満たしていると仮定すると

$$\gamma'(t) \cdot (\cos \theta(t) \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{a}_2(t)) = \sigma'(t) \cdot (\cos \theta(t) \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{a}_2(t)) = 0$$

となり上記の条件 (3) を常に満たす. ここで次の定義をする.

定義 3.1. 定径円織面 V 上の曲線 $\sigma(t) = \gamma(t) + r(\cos \theta(t) \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{a}_2(t))$ が

$$\sigma'(t) \cdot (\cos \theta(t) \mathbf{a}_1(t) + \sin \theta(t) \mathbf{a}_2(t)) = 0$$

を満たしているとき縮括線 (striction curve) という (図 3).

これは線織面の縮括線の条件に対応する条件を与えている. ここで, 線織面の非柱面的に対応する非管状という概念を次のように定義する. 定径円織面 V が $t \in I$ で非管状 (non-canal) であるとは $\gamma'(t) \cdot \mathbf{a}_1(t) \neq 0$ または $\gamma'(t) \cdot \mathbf{a}_2(t) \neq 0$ が成り立つときをいう. 特に, 任意の $t \in I$ で非管状のとき, 非管状円織面という. 任意の点で非管状でないとき, 円管面という. すなわち, 任意の点で $\gamma' \cdot \mathbf{a}_1 = \gamma' \cdot \mathbf{a}_2 = 0$ となる円織面を円管面という.

このように定義すると円織面の縮括線について次が成り立つ.

命題 3.2. 非管状円織面 $V(t, \theta)$ に対して (1) 縮括線が 2 本存在し, 各母円上での切り口は互いに対蹠点となっている. (2) 特異点は縮括線 $\sigma(t)$ 上の点で, $\sigma'(t) = 0$ となる点または, $\sigma'(t) \neq 0$ のとき母円と縮括線が接している点である.

円管面上の, 母円に横断的な全ての曲線は縮括線となる.

線織面の場合と見比べるとうまく概念が対応しているといえる.

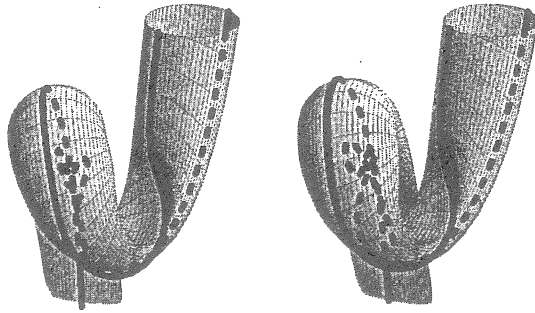


図 3: 円織面の縮括線 (ステレオ図)

4 ジェネリックにあらわれる特異点

線織面にジェネリックにあらわれる特異点は交差帽子であった。本節では円織面にジェネリックにあらわれる特異点が交差帽子であることを示す。

集合 $M \subset \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$ を $M = \{(Y, Z) \in \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 \mid \|Y\| = \|Z\| = 1, Y \cdot Z = 0\}$ と定義すると M は 3 次元多様体になる。 I を开区間とし、 $C^\infty(I, \mathbf{R}^3 \times M) = \{(\gamma, (a_1, a_2)) \mid \gamma \in C^\infty(J, \mathbf{R}^3), (a_1, a_2) \in C^\infty(J, M)\}$ とおき、 $C^\infty(I, \mathbf{R}^3 \times M)$ にホイットニー位相を入れたものを定径円織面の空間とする。このとき次の定理を得る。

定理 4.1. 開かつ稠密な部分集合 $\mathcal{O} \subset C^\infty(I, \mathbf{R}^3 \times M)$ が存在して、任意の $(\gamma, (a_1, a_2)) \in \mathcal{O}$ と任意の $(t, \theta) \in I \times \mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ に対して定径円織面 $V_{(\gamma, a_1, a_2, r)}$ は非管状で、任意の (t, θ) での写像芽ははめ込みか交差帽子に同値である。

非管状円織面の特異点が交差帽子に同値となるための必要十分条件を $c_1, c_2, c_3, \lambda, \nu, \delta$ を使ってあらわすこともできるが省略する。

これで、円織面にジェネリックにあらわれる特異点は交差帽子であることがわかったが、次節では線織面のようにさまざまなクラスを考えてそのクラスの中でのジェネリシティィーを考えていく。

5 母円が曲率線となる円織面

線織面が可展面である必要十分条件はガウス曲率が 0 であることで、これは母線が曲率線であることと同値であった。円織面の場合にも、各母円が曲率線となる場合を調べる。

5.1 母円が曲率線となる円織面

定理 5.1. 臍点と特異点を除くすべての点でその点を通る母円が曲率線となる円織面は球面、円管面か次の形の曲面のいずれかである。

$$V(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos \theta e + \sin \theta(\cos \varphi(t)n(t) + \sin \varphi(t)b(t))). \quad (4)$$

ただし, $\varphi(t)$ は $\tau(t)$ の原始関数である.

この曲面をローラーコースター曲面という. 特異点は $\cos \theta = 0$ となり, 母円の対蹠点に曲線としてあらわれる.

可展面は, 錘面, 柱面, 接線曲面の 3 種類であるが, 定理 5.1 の分類がそれぞれ対応しているといえる. 従来, 円管面は広く知られていたが, ローラーコースター曲面は知られていた形跡は認められないので, この曲面についてくわしく研究する. この曲面に対して次が成り立つ.

定理 5.2. (1) 母円に沿って主曲率の片方は一定である.

(2) ガウス曲率 K と平均曲率 H は

$$K = \frac{k \sin \varphi (r^2 k^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + k(\sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + rk' \sin \varphi)}{(1 + r^2 k^2 \sin^2 \varphi)^2 \cos \theta}$$

$$H = -\frac{2r^2 k^3 \sin^3 \varphi \cos \theta + k(2 \sin \varphi \cos \theta - r\tau \cos \varphi) + rk' \sin \varphi}{2(1 + r^2 k^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} \cos \theta}$$

で与えられる.

(3) 平坦な (ガウス曲率 $\equiv 0$) ローラーコースター曲面は平面のみ.

(4) 極小な (平均曲率 $\equiv 0$) ローラーコースター曲面は平面のみ.

(5) 2 本の特異曲線の曲率・捩率は, γ の曲率・捩率を k, τ , 特異曲線のはそれぞれ $k_1, \tau_1(\theta = -\pi/2), k_2, \tau_2(\theta = \pi/2)$ とすると,

$$k_1 = \frac{k}{|1 + rk \cos \varphi|} \quad \tau_1 = \frac{\tau}{1 + rk \cos \varphi}$$

$$k_2 = \frac{k}{|1 - rk \cos \varphi|} \quad \tau_2 = \frac{\tau}{1 - rk \cos \varphi}$$

となる.

5.2 ローラーコースター曲面の特異点

本節ではローラーコースター曲面の特異点を調べる

$$V(t, \theta) = \gamma(t) + r(\cos \theta e + \sin \theta d), \quad d(t) = \cos \varphi(t)n(t) + \sin \varphi(t)b(t), \quad \varphi'(t) = \tau(t)$$

の特異点集合は $\{(t, -\pi/2)\}, \{(t, \pi/2)\}$ であった.

5.2.1 フロントになる条件

$f: R^2 \rightarrow R^3$ を写像とする. これが単位余接束へのルジャンドルはめ込みの射影になっているとき (ウェーブ) フロントであるという. 単位余接束への持ち上げが存在するが, 必ずしもはめ込みでないときはフロント的であるという. 交差帽子はフロント的でない. カスプ的交差帽子は

フロントではないがフロント的である. 命題 5.3 に示すようにフロントの特異点は解析しやすいので, フロントになるかどうかを調べることは重要である. 自然なリーマン計量を入れて, 単位余接束と単位接束を同一視して, フロント (f, ν) (ν は単位法線ベクトル) と書くこともある. \mathbf{R}^2 の座標を (x, y) と書くと関数 λ が存在して

$$f_x(x, y) \times f_y(x, y) = \lambda(x, y)\nu(x, y)$$

を満たす. たとえば $f_x = \partial f / \partial x$ と書いた.

フロント (f, ν) は $0 \in \mathbf{R}^2$ で特異点を持つとする. このとき f が非退化であるとは $d\lambda$ が 0 でないときと定義する. 陰関数定理より非退化なフロントの特異点集合は正則曲線になるので, そのパラメーター表示を $c(t)$ とする. このとき c に沿うベクトル場 $\eta(t)$ で $df(\eta) = 0$ となるものが存在する. c' を特異方向, η を退化方向という. アーノルドとザカリューキンとによってフロント $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ にジェネリックにあらわれる特異点はカस्प角とスワローテイルであることが知られているが, これらの記号を使って, フロントの特異点がカस्प角とスワローテイルとなる実用的な必要十分条件が得られている ([7]).

命題 5.3 ([7], Proposition 1.3). 非退化なフロント $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ は 0 を特異点を持つとする. 上のような c, η に対して, 以下が成り立つ.

- 0 で f がカस्प角に同値である $\iff \det(c'(0), \eta(0)) \neq 0$.
- 0 で f がスワローテイルに同値である $\iff \det(c'(0), \eta(0)) = 0, d/dt \det(c'(t), \eta(t))|_0 \neq 0$.

ローラーコースター曲面 V が, フロントになるための必要十分条件は次のようになる.

- $\theta = \pi/2$ のとき $k\tau \cos \varphi - k' \sin \varphi \neq 0$.
- $\theta = -\pi/2$ のとき $k\tau \cos \varphi - k' \sin \varphi \neq 0$.

となる. また,

$$d\lambda(t, \pm\pi/2) = -r\sqrt{1 + r^2k^2 \sin^2 \varphi} d\theta$$

となるので常に非退化である. これで命題 5.3 が使えて, 特異点を調べることが出来る.

5.2.2 カस्प角の条件

フロントになるローラーコースター曲面が $(t, \pm\pi/2)$ でカस्प角になる条件を求める. あきらかに特異曲線は $\{(t, \pm\pi/2)\}$ で, $\theta = -\pi/2$ のとき退化方向は $(-r, 1 + rk \cos \varphi)$ となり, $\theta = \pi/2$ のとき退化方向は $(r, 1 - rk \cos \varphi)$ であるのでフロントになる円織面が $(t, \pm\pi)$ でカस्प角になる条件は命題 5.3 より,

$$1 \pm rk \cos \varphi \neq 0 \tag{5}$$

となる. 上の条件が同時に崩れることはなく, 母円の対蹠点でフロントになっていればどちらか一方はカस्प角である.

5.2.3 スワローテイルの条件

フロントになるローラーコースター曲面が $(t, \pm\pi/2)$ でスワローテイルになる条件を求める. 特異曲線は $\{(t, \pm\pi/2)\}$ で, 退化方向は $(\mp r, 1 \pm rk \cos \varphi)$ であったので,

$$1 \pm rk \cos \varphi = 0, rk' \cos \varphi - rk\varphi' \sin \varphi \neq 0 \quad (6)$$

ならばスワローテイルとなる. 特に, 母円の対蹠点で同時にスワローテイルが現れることはない.

5.2.4 カスプ的交差帽子の条件

フロントにならない場合にローラーコースター曲面の特異点がどうなるか調べる. ローラーコースター曲面は常にフロント的であり, 可展開面では, フロントにならない場合によく出てくる特異点はカスプ的交差帽子であった ([1]) ので, カスプ的交差帽子になる条件を調べる. 条件は r, k, τ を用いて書かれるがここでは省略する.

5.3 ジェネリックにあらわれる特異点

ローラーコースター曲面は空間曲線 γ と φ の初期値のみで決まってしまうので, ローラーコースター曲面の空間は $RC = \mathbf{R} \times C^\infty(I, \mathbf{R}_{>0} \times \mathbf{R})$ にホイットニー位相を入れたものとする. 前節の結果と通常横断性定理を使った議論により次を得る

定理 5.4. 稠密かつ開集合 $\mathcal{O} \subset RC$ が存在して任意の $V \in \mathcal{O}$ に対して, 任意の点 (t, θ) での V の写像芽は正則かカスプ角かスワローテイルかカスプ的交差帽子に同値である.

5.4 接線曲面に対応する円織面としてのローラーコースター曲面

接線曲面とは空間曲線の接線を集めたものであり, 各ルーリングが曲面の曲率線となっているものである. この意味で, 曲線に接する円たちで, 円が曲面の曲率線になっている性質を持つローラーコースター曲面は接線曲面に対応する円織面であると自然に思える.

曲線に接する円を集めたものと思うローラーコースター曲面の表示を与えておく.

$$V(s, \theta) = \xi(s) + r\mathbf{d}_\xi(s) + r(\cos \theta \mathbf{e}_\xi(s) + \sin \theta \mathbf{d}_\xi(s))$$

ただし $\mathbf{d}_\xi(s) = \cos \varphi(s) \mathbf{n}_\xi(s) + \sin \varphi(s) \mathbf{b}_\xi(s)$ で, $\mathbf{e}_\xi, \mathbf{n}_\xi, \mathbf{b}_\xi$ は ξ のフルネ枠とし, φ は ξ の振率 τ_ξ の原始関数である. この曲面についても, ξ 側ではスワローテイルはあらわれないが, ジェネリックにあらわれる特異点はカスプ角とスワローテイルとカスプ的交差帽子とであることがわかる.

5.5 例

本節ではローラーコースター曲面の例を与える. 曲線 $(\cos t, \sin t, t)$ を中心線としたローラーコースター曲面を描いたものである. 両側にカusp角をもち, 真ん中あたりにカusp的交差帽子をもち, スワローテイルを2個観察できる. (図 3, 4, 5 はステレオ図になっている. 立体的に見られるならば立体的に見ていただきたい.)

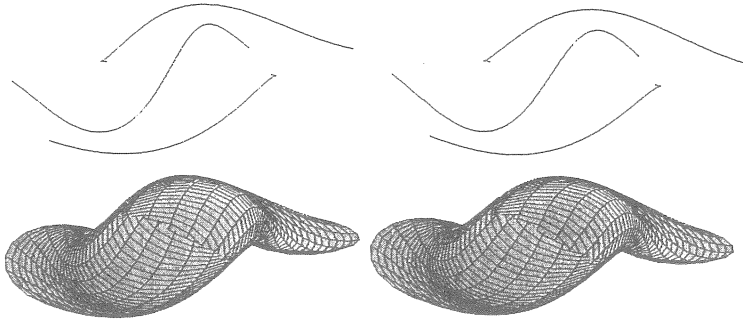


図 4: ローラーコースター曲面 (上段は中心線と特異点の像)

6 接円織面

前節の接線曲面に対応する円織面で, 曲線に接するという以外に $\varphi' = \tau$ という条件を設けた (定理 5.1 参照) が, 単に接しているだけという状況ではどのようなものか考えるのは自然な疑問である. このような円織面を接円織面と呼ぶ. すなわち接円織面とは

$$V(s, \theta) = \xi(s) + r h_{\xi}(s) + r(\cos \theta e_{\xi}(s) + \sin \theta h_{\xi}(s))$$

ただし $h_{\xi}(s) = \cos \psi(s) n_{\xi}(s) + \sin \psi(s) b_{\xi}(s)$ である.

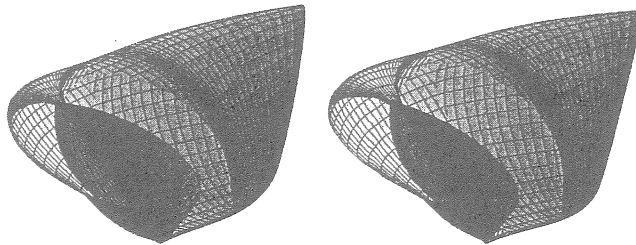


図 5: 接円織面

この曲面の絵を描いてみると図ようになる. 円の片側ではカusp角になっていて, 反対側では正則になっているところや, 円の片側ではカusp的交差帽子になっていて, 反対側では交差帽子になっているところなどが見当たる. これは, 接しているほうの曲線の近くではフロント的となって

いるが対蹠点にあらわれる締括線上の特異点はフロント的にもならない場合があることを意味している。

これは線織面では起こりえない現象であり、この点を見ても円織面は線織面よりも豊富な幾何を持つといえる。

この曲面についても同様にいくつかの特異点の条件を書くことができ、ジェネリックにあらわれる特異点を求めることが出来る。ジェネリックにあらわれる特異点は交差帽子とカスパ角とカスパ的交差帽子である。

たとえば、 $h_\xi = b_\xi$ であるような円織面を考えることもできる。これを接線-陪法線円織面と呼ぶと、特異点の条件は次のようになり、ジェネリックにあらわれる特異点はカスパ角、カスパ的交差帽子、交差帽子であることがわかる。

- $\theta = -\pi/2$ でカスパ角 $\iff (3 + 2r^2 k_\xi^2)\tau_\xi + 2r\dot{k}_\xi \neq 0$.
- $\theta = -\pi/2$ でカスパ的交差帽子 $\iff (3 + 2r^2 k_\xi^2)\tau_\xi + 2r\dot{k}_\xi = 0, 30\tau_\xi + 20r\dot{k}_\xi + 4r^2(27k_\xi^2\tau_\xi + 5\dot{\tau}_\xi) + r^3(-8k_\xi^2\dot{k}_\xi + 20k_\xi\tau_\xi^2 + 24k_\xi\tau_\xi\dot{\tau}_\xi - 24\dot{k}_\xi\tau_\xi^2 + 8\ddot{k}_\xi) + r^4(8k_\xi^4\tau + 16k_\xi^2\tau_\xi^3 + 8k_\xi^2\dot{\tau}_\xi + 24k_\xi\dot{k}_\xi\dot{\tau}_\xi + 48k_\xi\dot{k}_\xi\tau_\xi) + r^5(24k_\xi^3\tau_\xi\dot{\tau}_\xi + 48k_\xi^2\tau_\xi^2\dot{k}_\xi) \neq 0$.
- $\theta = \pi/2$ で交差帽子 $\iff \tau_\xi = 0, \dot{\tau}_\xi \neq 0$.

ただし s は ξ の弧長で、 $\dot{} = d/ds$.

7 線織面との対応のまとめ

線織面と円織面の対応をまとめておく。括弧内はそのクラスにジェネリックにあらわれる特異点である。

- 円織面 (交差帽子)
 \downarrow
 線織面 (交差帽子)
- ローラーコースター曲面 (カスパ角, スワローテイル, カスパ的交差帽子)
 \downarrow
 接線曲面 (カスパ角, カスパ的交差帽子)
- 接円織面 (交差帽子, カスパ角, カスパ的交差帽子)
 \downarrow
 対応する線織面なし
- 接線-倍法線円織面 (交差帽子, カスパ角, スパ的交差帽子)
 \downarrow
 対応する線織面なし

- 円管面 (カस्प角, スワローテイル [9])

↓

柱面 (非特異)

参考文献

- [1] J. P. Cleave, *The form of the tangent developable at points of zero torsion an space curves*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88, (1980), 403–407.
- [2] A. Gray, *Modern differential geometry of curves and surfaces*, CRC Press, 1993.
- [3] S. Izumiya, H. Katsumi and T. Yamasaki, *The rectifying developable and the Darboux indicatrix of a space curve*, Geometry and topology of caustics-caustics '98, Banach center publications, vol50, (1999), 137–149.
- [4] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Singularities of line congruences*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 133A, (2003), 1341–1359.
- [5] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Singularities of ruled surfaces in \mathbf{R}^3* , Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 130 (2001), 1–11.
- [6] S. Izumiya and N. Takeuchi, *Geometry of ruled surfaces*, Applicable math. in the golden age (2003) 305–338.
- [7] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, preprint.
- [8] 窪田忠彦著, 佐々木重夫編, 微分幾何学, 岩波全書.
- [9] I. R. Porteous, *The normal singularities of submanifold*, J. Diff. Grom. 5, 1991, 543–564.
- [10] K. Saji *Singularities of non-degenerate n -ruled $(n + 1)$ -manifolds in Euclidian space*, To appear in Banach Center Publications, Volume entitled “Geometric Singularity Theory”.

佐治健太郎 (広島大学大学院理学研究科)

sajik@hiroshima-u.ac.jp

日本学術振興会特別研究員

Divideの性質とその一般化について

石川昌治

〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2-12-1

東京工業大学大学院理工学研究科

E-mail address: ishikawa@math.titech.ac.jp

1. 序

A'Campo は 1998 年頃に、円盤内の実平面曲線からファイバーリンクを構成する方法を考え、実平面曲線を divide と名付けました。発想の起点は複素特異点の Milnor 束であり、divide のファイバー束はその一般化になっています。その後の研究で、divide の特徴付けや、divide の結び目理論や 3 次元多様体論への一般化が行われてきました。本稿では、Milnor 束とその実モース化を説明した後、divide の定義と諸定理の紹介を致します。

2. Milnor 束と特異点の実モース化

Milnor 束とは、複素多項式写像の特異点の近傍に構成されるファイバー束のことである。 $f: \mathbb{C}^{n+1} \rightarrow \mathbb{C}$ を $n+1$ 個の複素変数 (z_0, z_1, \dots, z_n) を持つ複素多項式により定義される写像とする。このとき、集合 $\Sigma(f) := \{z \in \mathbb{C}^{n+1} \mid (\partial f / \partial z_0)(z) = \dots = (\partial f / \partial z_n)(z) = 0\}$ を f の特異点集合と呼び、特異点 z の近傍で $\Sigma(f)$ が 0 次元のとき、 z は孤立特異点であるという。

原点 $O \in \mathbb{C}^{n+1}$ を f の特異点とし、 $f(O) = 0$ が成り立つと仮定する*。原点を中心とする半径 $\varepsilon > 0$ の球面は $2n+1$ 次元球面であり、これを S_ε とおく。

定理 2.1 (Milnor [23]). 原点 $O \in \mathbb{C}^{n+1}$ が f の特異点であり、 $f(O) = 0$ を満たすとする。このとき、十分小さい $\varepsilon' > 0$ が存在し、 $\varepsilon' > \varepsilon > 0$ を満たす任意の ε に対して

$$\varphi = \frac{f}{|f|} : S_\varepsilon \setminus f^{-1}(0) \rightarrow S^1$$

は局所自明なファイバー束となる。

* \mathbb{C}^{n+1} の座標系の平行移動と、多項式 $f(z)$ の定数項を動かすことで、特異点が原点にあり、さらに $f(O) = 0$ を満たすと仮定できる。

各 $c \in S^1$ の逆像 $\varphi^{-1}(c)$ をファイバーと呼び、ファイバー束の写像が定義されていない部分 $S_\varepsilon \cap f^{-1}(0)$ を特異点のリンクと呼ぶ。

原点が孤立特異点である場合には、特異点のリンクは $2n+1$ 次元球面内の $2n-1$ 次元閉多様体になっている。またこのとき、ファイバー $\varphi^{-1}(c)$ のホモロジー群は

$$H_k(\varphi^{-1}(c); \mathbb{Z}) = \begin{cases} \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}}_{\mu} & k = n \\ \mathbb{Z} & k = 0 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

であることが知られている。特に、 n 次元のベッチ数 μ は孤立特異点の最も基本的な不変量であり、Milnor 数と呼ばれている。

以下、 $n = 1$ のときのみを考える。このとき f は 2 変数の複素多項式である。その変数をここでは $(z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$ と書くことにする。ただし、 $i = \sqrt{-1}$ である。複素平面曲線 $f(z_1, z_2) = 0$ は、原点 $O \in \mathbb{C}^2$ の近傍で有限個の枝 (branch) を持ち、その各々を局所既約成分 (locally irreducible component) と呼ぶ。

平面曲線特異点の実モース化のアイデアは、複素ベクトル空間 \mathbb{C}^2 で定義されている複素特異点を、それをモース化して得られる曲線と実平面 $\text{Re}\mathbb{C}^2 := \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 \mid y_1 = y_2 = 0\}$ との交わりとして現われる図 (graph) を使って考察することである。

定義 2.2. f が原点で孤立特異点を持つとし、その Milnor 数を μ 、局所既約成分の数を r とする。また、特異点 (f, O) は次の条件を満たしていると仮定する：

- (1) $f(0, 0) = 0$;
- (2) f の係数は実数;
- (3) 各局所既約成分と実平面 $\text{Re}\mathbb{C}^2$ との交わりは、原点の近傍で 1 次元実曲線になっている。

このとき、多項式の族 $f_t(z_1, z_2)$, $(0 \leq t < 1)$ で以下を満たすものを孤立特異点 (f, O) の実モース化と呼ぶ：

- (i) $t = 0$ のとき、 $f_0 = f$;
- (ii) $t > 0$ のとき、 f_t はモース特異点[†]のみを持つ;

[†]ヘッシアン[†]の行列式が 0 でない特異点のこと。実モース化により得られるモース特異点は、座標変換すると $X^2 + Y^2, X^2 - Y^2, -X^2 - Y^2$ の 3 種類に分けられ、それぞれ極大、サドル、極小と呼ぶ。

- (iii) $t > 0$ のとき, 原点の近傍にある $\Gamma_t := f_t^{-1}(0) \cap \text{Re}\mathbb{C}^2$ の二重点の個数を δ_t , Γ_t に囲まれている連結領域の個数を γ_t とすると, δ_t と γ_t は t によらず, $\delta_t + \gamma_t = \mu$ を満たす.

孤立特異点をモース化すると, 特異点の近傍に μ 個のモース特異点が現れることが知られている. 実モース化された関数 f_t に関しては, 各二重点にサドル特異点が存在し, Γ_t に囲まれた領域の内部に極大あるいは極小のモース特異点が存在している. 上の条件 (iii) にある等式 $\delta_t + \gamma_t = \mu$ は, 特異点をモース化した際に現れるモース特異点が全て, 二重点あるいは連結領域に対応していることを意味している.

例を1つ挙げておくと, $f(z_1, z_2) = -z_1^4 + z_2^3$ は原点に孤立特異点を持ち, 局所既約成分の数は1つで, Milnor 数は $\mu = 6$ である. この特異点の実モース化 f_t は, 例えば,

$$f_t(z_1, z_2) = -z_1^4 + z_2^3 + \frac{1}{16} t^3 z_1^2 + \left(\frac{3}{8} t^2 - \frac{3}{8} t\right) z_2^2 + \left(\frac{9}{256} t^4 - \frac{3}{32} t^3 + \frac{3}{64} t^2\right) z_2 - \frac{9}{2048} t^5 + \frac{3}{512} t^4 - \frac{1}{512} t^3$$

で与えられる.(注: これは一意的ではない.) 曲線 $f_t^{-1}(0)$ と実平面 $\text{Re}\mathbb{C}^2$ との交わりは図1のようになり, 特に, 二重点の数は $\delta_t = 3$, 実曲線で囲まれた領域の数は $\gamma_t = 3$ であり, よって $\delta_t + \gamma_t = 6 = \mu$ が成り立っている.

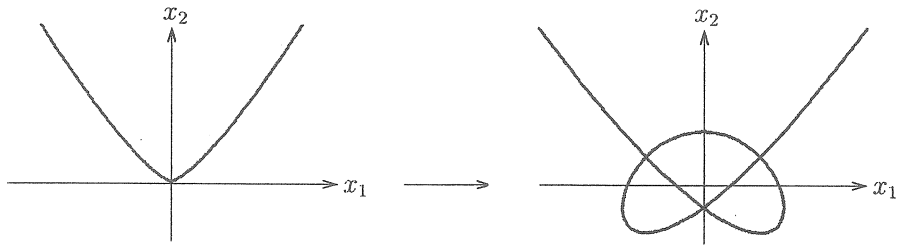


図 1. 特異点の実モース化の例

定義 2.2 の (1), (2), (3) を満たす任意の平面曲線孤立特異点に対し, その実モース化が存在する. さらに実モース化して得られる平面曲線から Dynkin 図形が得られ, そこから Milnor 束のモノドロミー写像[†]の情報を引き出せることが知られている [1, 2, 9, 10, 11].

[†]点 $c \in S^1$ を固定しそこから S^1 を一周すると, ファイバー $\varphi^{-1}(c)$ からそれ自身への微分同相写像が導かれる. これを Milnor 束のモノドロミー写像と呼ぶ.

3. Divide の定義とファイバー束定理

平面曲線特異点を実モース化して得られる実曲線について、特異点の存在を忘れて、実曲線が最初に与えられているものと思直すことで得られたものが divide である。

定義 3.1. Divide とは単位円盤に一般的 (generic) かつ相対的 (relative) にはめ込まれたコンパクト 1 次元多様体 (線分と円) のことである。

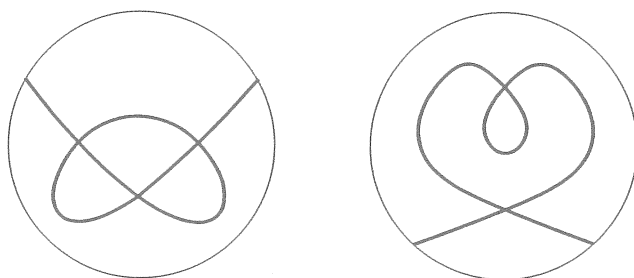


図 2. Divide の例

$T(\mathbb{R}^2)$ を実平面 $\mathbb{R}^2 := \text{Re}\mathbb{C}^2$ の接束 (tangent bundle) とし, $x = (x_1, x_2)$ を \mathbb{R}^2 の座標系, $u = (u_1, u_2)$ を接ベクトル空間の座標系とする. $T(\mathbb{R}^2)$ 内の単位球面 $\{(x, u) \in T(\mathbb{R}^2) \mid |x|^2 + |u|^2 = 1\}$ は 3 次元球面であり, これを $ST(\mathbb{R}^2)$ と書くことにする. Divide のリンクはこの単位球面内に次のように定義される.

定義 3.2. Divide P のリンク $L(P)$ とは, 以下で定義される $ST(\mathbb{R}^2)$ 内の 1 次元閉多様体のことである:

$$L(P) := \{(x, u) \in ST(\mathbb{R}^2) \mid x \in P, u \in T_x(P)\}.$$

ここで, $T_x(P)$ は点 $x \in \mathbb{R}^2$ において P に接しているベクトルの集合である.

Divide P の曲線が連結であるならば, 実モース化された特異点に対して実モース化された関数 f_t が存在するように, divide P に対しても, P の各二重点にサドル特異点を持ち, P に囲まれた領域に極大あるいは極小のモース特異点を持つモース関数 f_P を作る事ができる. このモース関数 f_P に対し, 関数 $\theta_{P,\eta}$ を次で定義する:

$$\theta_{P,\eta}(x, u) = f_P(x) + \eta df_P(x)(u) - \frac{1}{2}\eta^2 \chi(x) H_{f_P}(x)(u, u).$$

ここで, $df_P(x)$ は $f_P(x)$ の微分, $\chi(x)$ は f_P のモース特異点の近傍での bump 関数, $H_{f_P}(x)$ は f_P のヘッシアンである. このとき, divide P に対して次のファイバー束定理が成り立つ.

定理 3.3 (A'Campo [3, 4]). P を連結な *divide* とする. このとき, 十分小さい $\eta' > 0$ が存在し, $\eta' > \eta > 0$ を満たす任意の η に対して

$$\psi = \frac{\theta_{P,\eta}}{|\theta_{P,\eta}|} : ST(\mathbb{R}^2) \setminus L(P) \rightarrow S^1$$

は局所自明なファイバー束となる.

さらに *divide* P が平面曲線孤立特異点の実モース化として得られる曲線ならば, P のファイバー束はその特異点の Milnor 束と同値であることが知られている. よって, *divide* とそのファイバー束は平面曲線特異点とその Milnor 束の一般化になっている [3, 4].

Divide のリンクには以下のリンクが含まれている:

- (1) (p, q) -トーラスリンク ($p, q > 0$);
- (2) トーラスリンクに cabling 操作を繰り返して得られるリンク (iterated torus link) で, cabling の係数たちがある不等式を満たしているもの;
- (3) 係数が $(-2, p, q)$ ($p, q > 0$) のプレッツェルリンク;
- (4) $10_{145}, 10_{139}$ (10 交点以下でトーラス結び目以外のものはこれだけ).

平面曲線孤立特異点のリンクは (1) と (2) に含まれている. また, 各 *divide* に対して Dynkin 図を定義することができ, Dynkin 図が木 (tree) になっている *divide* のことを *slalom divide* と呼ぶ. *Slalom divide* のリンクは重み -2 の arborescent リンクであり, (3) のリンクもそれに含まれている. さらに, *slalom divide* のリンクが結び目で, その木が A_{2k+1} ($k \geq 1$), E_6, E_8 以外であれば, リンクの補空間に双曲構造が入る, いわゆる双曲結び目であることが知られている [5].

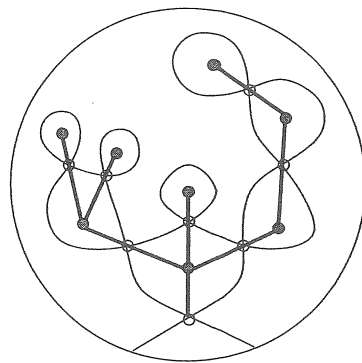


図 3. Slalom divide とその木.

4. Divide のリンクの性質

4.1. 正モノドロミー. Dehn twist とは、図 4 のように、曲面を単純閉曲線に沿って切り開き、 $\pm 2\pi$ 捻って貼り合わせる写像のことである。曲面からそれ自身への写像は Dehn twist の積で書き表せることが知られている。Dehn twist の捻りの向きが図 4 の場合、それを正 Dehn twist と呼ぶ。例えば、多項式写像 $f = -z_1^2 + z_2^2$ の原点にある特異点の Milnor 束のファイバー曲面はアニュラスであり、そのモノドロミー写像はアニュラスのコアに沿った正 Dehn twist で表される。一般に、平面曲線孤立特異点の Milnor 束のモノドロミー写像は、正 Dehn twist の積で書けることが知られている。このようなモノドロミーのことを正モノドロミーと呼ぶ。

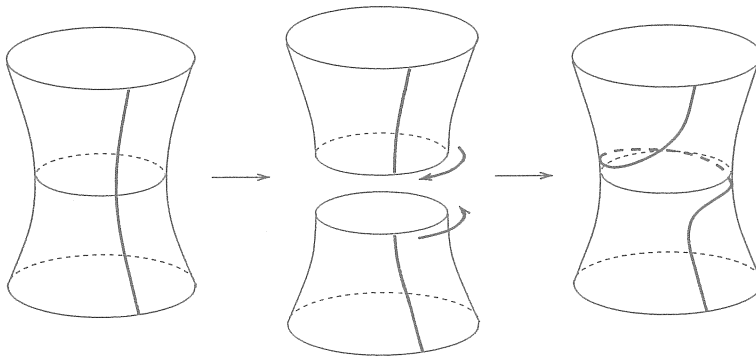


図 4. 正 Dehn twist.

Divide のファイバー束についても同様に、正モノドロミーを持つことが知られている [4]。さらに divide の Dynkin 図からファイバー曲面のホモロジーの交叉行列を読み取ることができ、モノドロミー写像のホモロジーの行列もそこから具体的に計算することができる。

4.2. Quasipositivity. Rudolph は 1972 年の論文 [25] で、 \mathbb{C}^2 内の複素代数曲線と 3 次元球面との交わりを考察し、quasipositive という概念を導入した。ブレイドのストリングの i 番目と $i+1$ 番目の間の正の crossing を σ_i で表し、負の crossing を σ_i^{-1} で表すことにする。 σ_i たちの積 w_j , ($j = 1, \dots, m$) に対し、リンクが

$$(\omega_1 \sigma_{i_1} \omega_1^{-1})(\omega_2 \sigma_{i_2} \omega_2^{-1}) \cdots (\omega_m \sigma_{i_m} \omega_m^{-1})$$

という形のブレイドを閉じて得られる図 (diagram) で表せる場合、そのリンクは quasipositive な閉ブレイド表示を持つという (図 5 参照)。また、各 w_j が $w_j = \sigma_{k_j} \sigma_{k_j+1} \cdots \sigma_{k_j+l}$ で表されるとき、そのリンクは strongly quasipositive な閉ブレイド表示を持つという。Quasipositivity は結び目を 4 次元やその複素構造を使って調べる際に現れる重要な概念である。

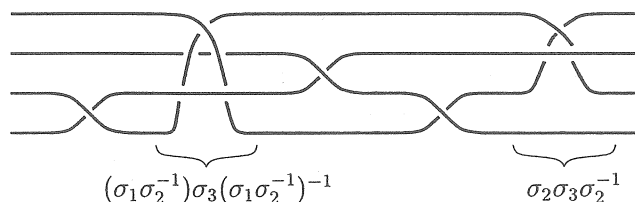


図 5. Quasipositive ブレイドの例.

Divide のリンクも、複素特異点のリンクの一般化であることから、複素構造との関係が強く、quasipositivity を持っている。

定理 4.1 (平澤 [12], 川村 [15][§]). Divide のリンクは *strongly quasipositive* な閉ブレイド表示を持つ。

Rudolph は論文 [26] で、Kronheimer-Mrowka の結果 [17] を quasipositive な閉ブレイド表示を持つリンクに適用することで、それらの 4 次元種数を決定した。この結果に代表されるように、4 次元から来る新しい結果を quasipositivity を持つリンクに適用することで、面白い結果が得られることが多々ある。Divide の場合には、定理 4.1 の系として次の結果が得られる。

定理 4.2 (A'Campo [4]). Divide P が線分 1 つのはめ込みで構成されているならば、その結び目 $L(P)$ の結び目解消数、種数、4 次元種数[¶] はすべて P の二重点の数に等しい。

ちなみに A'Campo の論文では、divide の quasipositivity がまだ知られていなかったため、Kronheimer-Mrowka の結果を divide のモース関数に直接適用することで定理を証明している。

また、最近の Heegaard Floer homology と接触トポロジーの研究からの産物として、Lisca と Stipsicz が次の定理を証明した。

定理 4.3 (Lisca-Stipsicz [20]). 結び目 K が $g_s(K) > 0$ かつ $TB(K) = 2g_s(K) - 1$ を満たすとき、 S^3 に、 K に沿った係数 $r \neq 2g_s(K) - 1$ の *Dehn surgery* を施して得られる 3 次元閉多様体は *tight* な接触構造を許容する。

ここで $g_s(K)$ は K の 4 次元種数であり、 $TB(K)$ は K の最大 Thurston-Bennequin 数である。 $TB(K)$ や *tight* な接触構造の定義はここでは省略する ([24] 参

[§]川村氏は [15] で divide のリンクの quasipositivity を示した。また、平澤氏は [12] で divide のファイバー曲面が *stable Hopf plumbing* であることを示し、その系として divide のリンクが *strongly quasipositive* であることを示した。

[¶] S^3 を 4 次元球体 B^4 の境界とみなしたとき、 B^4 内に貼られる、リンクを境界とする曲面の最小種数のこと。

照). Divide の結び目 K に対し, $TB(K) = 2g_s(K) - 1$ が成り立つことが Gibson により示されており [6], よって非自明な divide の結び目全てに対し定理 4.3 の主張が成り立っていることが分かる.

5. Divide の一般化

5.1. 結び目理論における一般化. Gibson と筆者は任意の結び目を divide のように単位円盤上で扱うための手法として, 次に紹介する oriented divide を導入した.

定義 5.1. Oriented divide とは単位円盤に一般的 (generic) にはめ込まれた向き付けられた円 (複数可) のことである.

定義 5.2. Oriented divide \vec{P} のリンク $L(\vec{P})$ とは, 以下で定義される S^3 内の 1 次元閉多様体のことである:

$$L(\vec{P}) := \{(x, y) \in ST(\mathbb{R}^2) \mid x \in \vec{P}, y \in T_x(\vec{P})\}.$$

ここで, $x \in \vec{P}$ とは $x \in \mathbb{R}^2$ が \vec{P} の曲線に乗っているということで, $T_x(\vec{P})$ は点 $x \in \mathbb{R}^2$ において \vec{P} に接しているベクトルで, その向きが \vec{P} と一致しているものの集合である.

任意のリンクは oriented divide を使って表すことができる.

定理 5.3 (Gibson-I. [7]). S^3 内の任意のリンク L に対し, oriented divide \vec{P} で, そのリンク $L(\vec{P})$ が L と同型 (ambient isotopic) であるものが存在する.

この結果と divide のファイバー束定理から次の系を示すことができる.

系 5.4 (Gibson-I. [7]). S^3 内の任意のリンク L に対し, $S^3 \setminus L$ 内の結び目 K で, $L \cup K$ が正モノドロミーを持つファイバーリンク^{||}となるものが存在する.

その後は, divide の定義を一部崩すことで, より広いリンクのクラスに話を一般化することが考えられ, free divide や graph divide などが導入され, その性質を調べる研究が行われている [8, 15, 16].

5.2. 3次元多様体論における一般化. Divide を単位円盤上だけでなく, コンパクトな曲面上にはめ込まれたコンパクト 1 次元閉多様体として定義することもできる. この場合は, divide のリンクはその曲面の接円束 (unit tangent bundle) の境界を潰して得られる 3 次元閉多様体内に構成される. さらに, ある条件の下, divide のファイバー束定理も成立する [13].

^{||} 3次元閉多様体内のリンクに対し, その補空間に S^1 上のファイバー束の構造が入るとき, そのリンクをファイバーリンクと呼ぶ.

また, 系 5.4 の結果を S^3 以外の 3 次元閉多様体に一般化しようと試みると, Stein fillable な 3 次元閉多様体というクラスに出会う. Stein fillable の定義はここでは省略する ([24] を参照) が, その特徴付けとして, 3 次元閉多様体内に正モノドロミーを持つファイバーリンクが存在すること**が, その多様体が Stein fillable であるための必要十分条件であることが Loi-Piergallini により示されている [22]. 系 5.4 は正モノドロミーを持つファイバーリンクで特別な条件を満たすものを構成するという内容であるから, Loi-Piergallini の結果から Stein fillable でない 3 次元閉多様体に対しては系 5.4 は成り立たないことが分かる. 逆に Stein fillable な 3 次元閉多様体に対しては, 系 5.4 を一般化できることが, divide のファイバー束に接触トポロジーの諸技術を適用することで証明できる [14]. 尚, Stein fillable な 3 次元閉多様体のクラスは非常に広く, そうでない多様体の例はほとんど知られていない [18, 19, 21].

参考文献

- [1] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes I*, Math. Ann. **213** (1975), 1-32.
- [2] N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolées de courbes planes II*, Actes du Congrès International des Mathématiciens, Vancouver, 1974, pp. 395-404.
- [3] N. A'Campo, *Real deformations and complex topology of plane curve singularities*, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse **8** (1999), no. 1, 5-23.
- [4] N. A'Campo, *Generic immersions of curves, knots, monodromy and gordian number*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **88** (1998), 151-169.
- [5] N. A'Campo, *Planar trees, slalom curves and hyperbolic knots*, Publ. Math. de l'I.H.E.S. **88** (1998) 171-180.
- [6] W. Gibson, *Computation of the Bennequin number for free divide knots*, preprint.
- [7] W. Gibson, M. Ishikawa, *Links of oriented divides and fibrations in link exteriors*, Osaka J. Math. **39** (2002), 681-703.
- [8] W. Gibson, M. Ishikawa, *Links and gordian numbers associated with generic immersions of intervals*, Topology Appl. **123** (2002), no. 3, 681-703.
- [9] S.M. Gusein-Zade, *Intersection matrices for certain singularities of functions of two variables*, Funct. Anal. Appl. **8** (1974), 10-13.

**このとき 3 次元閉多様体は正オープンブック分解を持つという.

- [10] S.M. Gusein-Zade, *Dynkin diagrams of singularities of functions of two variables*, *Funct. Anal. Appl.* **8** (1974), 295-300.
- [11] S.M. Gusein-Zade, *The monodromy groups of isolated singularities of hypersurfaces*, *Russian Math. Surveys* **32** (1977), 23-69.
- [12] M. Hirasawa, *Knots and links of connected divides have a stable Hopf plumbing fiber surface*, preprint.
- [13] M. Ishikawa, *Tangent circle bundles admit positive open book decompositions along arbitrary links*, *Topology* **43** (2004), 215-232.
- [14] M. Ishikawa, *Stein fillable 3-manifolds admit positive open book decompositions along arbitrary links*, preprint, arXiv:math.GT/0402290
- [15] T. Kawamura, *Quasipositivity of links of divides and free divides*, *Topology Appl.* **125** (2002), 111-123.
- [16] T. Kawamura, *Links associated with generic immersions of graphs*, preprint.
- [17] P.B. Kronheimer, T.S. Mrowka, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, *Math. Res. Lett.* **1** (1994), 797-808.
- [18] P. Lisca, *Symplectic fillings and positive scalar curvature*, *Geometry & Topology* **2** (1998), 103-116.
- [19] P. Lisca, *On symplectic fillings of 3-manifolds*, *Proceedings of 6th Gökova Geometry-Topology Conference. Turkish J. Math.* **23** (1999), 151-159.
- [20] P. Lisca, A.I. Stipsicz, *Ozsváth-Szabó invariants and tight contact three-manifolds*, preprint, arXiv:math.SG/0404135
- [21] P. Lisca, A.I. Stipsicz, *Infinitely many irreducible 3-manifolds with no tight contact structures*, preprint, arXiv:math.SG/0404136
- [22] A. Loi, R. Piergallini, *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , *Invent. Math.* **143** (2001), 325-348.
- [23] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, *Ann. Math. Studies* 61, Princeton Univ. Press, 1968.
- [24] 三松佳彦, 3次元接触構造のトポロジー, 数学メモアール, 第1巻, 日本数学会, 2001.
- [25] L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, *Topology* **22** (1983), 191-201.
- [26] L. Rudolph, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, *Bull. Amer. Math. Soc.* **29** (1993), 51-59.

