第５０回

トポロジーシンポジウム

講 演 集

2003 年 7 月

於　松本市中央公民館（Ｍウイング）

平成 15 年度科学研究費　基盤研究（A）

課題番号 15204002

序

この講演集は２００３年７月１９日から２２日の間，松本市中央公民館（Ｍウイング）において開催される第５０回トポロジーシンポジウムに際し，予め講演者より集めた原稿を印刷したものである．

その目的は，参加者が各講演をより良く理解し，活発な研究討論を行うための一助とするとともに，記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある．

なお，この講演集は

平成１５年度科学研究費　基盤研究Ａ（１）

研究代表者　泉屋　周一（北海道大学大学院理学研究科）

研究題目　　特異点論からみた様々な幾何学の研究

課題番号　　15204004

により作成されたものである．

世話人：阿部　孝順（信州大学理学部）

稲葉　尚志（千葉大学大学院自然科学研究科）

枡田　幹也（大阪市立大学大学院理学研究科）

第５０回トポロジーシンポジウム

プログラム

７月１９日（土）

１４：００－１５：００　作間　誠（大阪大学大学院理学研究科）
Markoff triples, quasifuchsian groups, and 2-bridge knot groups

１５：３０－１６：３０　小野　薫（北海道大学大学院理学研究科）
Symplectic Floer homology について

７月２０日（日）

９：３０－１０：３０　保坂　哲也（宇都宮大学教育学部）
Coxeter groups and their boundaries

１１：００－１２：００　泉屋　周一（北海道大学大学院理学研究科）
ルジャンドル特異点論と微分幾何学

１３：３０－１４：３０　松元　重則（日本大学理工学部）
極小集合をもたない力学系

１５：００－１６：００　高瀬　将道（横浜国立大学教育人間科学部）
Haefliger 結び目の幾何公式

１６：３０－１７：３０　加藤　十吉（九州大学大学院数理学研究院）
平面幾何学における有向角の活用

7月２１日（月）

９：３０－１０：３０　丹下　基生（京都大学大学院理学研究科）
　Akbulut の knot 手術による微分同相写像について

１１：００－１２：００　井草　潔（Brandeis University）
　Graph cohomology and its relationship to Miller-Morita-Mumford classes and higher Franz-Reidemeister torsion

１３：３０－１４：３０　服部　晶夫（東京大学大学院数理科学研究科）
　V-多様体の不変量

１５：００－１６：００　藤原　耕二（東北大学大学院理学研究科）
　幾何の離散群への応用　－群の CAT(0) 次元－

１６：３０－１７：３０　戸田　宏（京都大学大学院理学研究科）
　ホモトピー論の進展

7月２２日（火）

９：３０－１０：３０　吉田　尚彦（東京大学大学院数理科学研究科）
　点付きリーマン面上の平坦接続のモジュライの幾何学的量子化について

１１：００－１２：００　神島　芳宣（東京都立大学大学院理学研究科）
　Geometry of flat manifolds； past 20 years

Markoff triples, quasifucsian groups and two bridge knot groups

作間　誠　大阪大学理学研究科

1　序

Markoff triple とは複素数の３つ組 (x, y, z) で Markoff 方程式

$$x^2 + y^2 + z^2 = xyz$$

を満たすものをいう．Markoff triple は一点穴あきトーラス T の基本群 $\pi_1(T)$ の型保存 $SL(2, C)$ 表現を定める．例えば整数 Markoff triple(3, 3, 3) は $Z/3Z$ 対称性を持つ双曲的穴あきトーラスフックス群を定め，またその近傍にある Markoff triple は穴あきトーラス擬フックス群を定める．また 0 を含む Markoff triple $(0, 2\cos\frac{\pi}{n}, 2i\cos\frac{\pi}{n})$ はヘッケ群，$(0, \exp\frac{\pi i}{3}, i\exp\frac{\pi i}{3})$ は八の字結び目群にそれぞれ対応し，更に任意の２橋結び目群はある適当な代数的整数 ω が定める Markoff triple $(0, \omega, i\omega)$ に対応する．

このように Markoff triple の空間は様々な（特殊ではあるが重要な）クライン群と３次元双曲多様体を含んでいる．また潜伏的放物型変換の出現や不連続領域の退化等のクライン群論に於ける重要な現象も，この空間の中で手に取るように観察することが出来る．(詳しくは Mumford-Series-Wright による魅惑的な本 [20] を見てください.）本講演では，この小宇宙に関する次の事柄を紹介します．

1. 穴あきトーラス擬フックス群に関する Jorgensen の定理 [13] とその精密化 [1], [5]（第４節）．
2. Jorgensen の定理の擬フックス空間の外部への拡張 [4], [6]（第５節）．
3. McShane の等式 [18] の精密化と一般化 [2], [21]（第６節）．

この箱庭の世界がどれだけ３次元多様体全体の世界を反映しているかというのは今後の重要課題ですが，残念ながらまだ殆ど何もわかっていません．

2　Markoff triple と $\pi_1(T)$ の型保存 $SL(2, C)$ 表現

記号 κ で，穴あきトーラス T の穴のまわりを一周する単純閉曲線が定める基本群 $\pi_1(T)$ の元を表し，α, β を $\pi_1(T)$ の "幾何的" 生成元とする．このとき，$\kappa = [\alpha, \beta]$ が成立している．表現 $\rho : \pi_1(T) \to SL(2, C)$ が**型保存**であるとは ρ が既約であって $\rho(\kappa)$ が放物的となることである．$\mathrm{tr}(\rho(\kappa)) = 2$ なら ρ は可約なので，この条件は $\mathrm{tr}(\rho(\kappa)) = -2$ であって ρ がアーベル表現でないことと同値である．

一方，$SL(2,\boldsymbol{C})$ の元 A,B に対して次の等式が成立することが知られている.

$$\mathrm{tr}(A)^2+\mathrm{tr}(B)^2+\mathrm{tr}(AB)^2-\mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(AB) \;=\; 2+\mathrm{tr}([A,B])$$

従って表現 $\rho:\pi_1(T)\to SL(2,\boldsymbol{C})$ が型保存であるための必要十分条件は $(\mathrm{tr}(\rho(\alpha)),\mathrm{tr}(\rho(\alpha\beta)),\mathrm{tr}(\rho(\beta)))$ が非自明な Markoff triple となることである．また逆に任意の非自明 Markoff triple(x,y,z) に対して，次のような型保存表現 $\rho:\pi_1(T)\to SL(2,\boldsymbol{C})$ が構成できる.

$$\rho(\alpha)=\begin{pmatrix} x-z/y & x/y^2 \\ x & z/y \end{pmatrix},\quad \rho(\alpha\beta)=\begin{pmatrix} y & -1/y \\ y & 0 \end{pmatrix},\quad \rho(\beta)=\begin{pmatrix} z-x/y & -z/y^2 \\ -z & x/y \end{pmatrix}.$$

しかも ρ の共役類は $(\mathrm{tr}(\rho(\alpha)),\mathrm{tr}(\rho(\alpha\beta)),\mathrm{tr}(\rho(\beta)))$ により決定される．従って型保存表現 $\rho:\pi_1(T)\to SL(2,\boldsymbol{C})$ の共役類全体が成す空間 $\tilde{\mathcal{R}}$ は Markoff triple 全体が成す空間と同一視できる．また $\pi_1(T)$ の型保存 $PSL(2,\boldsymbol{C})$ 表現の共役類全体が成す空間 $\mathcal{R}$ は Markoff triple 全体が成す空間の次の二つの変換が生成する位数 4 のアーベル群による商空間と同一視出来る.

$$(x,y,z)\mapsto(-x,-y,z),\quad (x,y,z)\mapsto(x,-y,-z).$$

3　擬フックス空間のプリーツ座標

型保存表現 $\rho:\pi_1(T)\to PSL(2,\boldsymbol{C})$ が忠実，離散的であって，その像 $\Gamma=\rho(\pi_1(T))$ が超平面 $\boldsymbol{H}^2$ を保存するとき，ρ は**フックス表現**と呼ばれ，Γ は（穴あきトーラス）**フックス群**と呼ばれる．ρ がフックス表現であるための必要十分条件は対応する Markoff triple が実数からなることである．従ってフックス表現全体が作る $\mathcal{R}$ の部分空間は実 Markoff triple が作る空間（の商）と同一視できる．（穴あきトーラス）フックス群 Γ に対して，商空間 $\boldsymbol{H}^2/\Gamma$, $\boldsymbol{H}^3/\Gamma$ はそれぞれ T, $T\times\boldsymbol{R}$ と同相である．Γ の**極限集合** Λ (即ち，$\boldsymbol{H}^3$ の任意の一点 x に対してその軌道 Γx の $\bar{\boldsymbol{H}}^3$ に於ける集積点全体が作る $\partial\boldsymbol{H}^3$ の部分集合）はリーマン球面 $\partial\boldsymbol{H}^3$ 内の真円 $\partial\boldsymbol{H}^2$ になり，不連続領域 $\Omega:=\partial\boldsymbol{H}^3-\Lambda$ は二つの開円板から成る.

型保存表現 $\rho:\pi_1(T)\to PSL(2,\boldsymbol{C})$ が**擬フックス表現**であるとはその像 Γ の $\partial\boldsymbol{H}^3$ への作用が,（穴あきトーラス）フックス群の作用と擬等角写像により共役となっているときをいう．このとき ρ の像が作る**擬フックス群** Γ の極限集合 Λ は円周と同相であるが，Γ がフックス群でないならそのハウスドルフ次元は 1 より真に大きい非常に複雑な曲線である．不連続領域の二つの成分 $\Omega^{\pm}$ の Γ による商として（標識付き）リーマン面の対 $(\Omega^-/\Gamma,\Omega^+/\Gamma)$ が得られるが，擬フックス表現 ρ はこの対により完全に定まり，従って擬フックス表現全体が作る $\mathcal{R}$ の部分空間 $\mathcal{QF}$ はタイヒミュラー空間の直積 $\mathrm{Teich}(T)\times\mathrm{Teich}(T)$ によりパラメータ付けされる（Bers の同時一意化定理）.

擬フックス群 Γ の極限集合 Λ の $\boldsymbol{H}^3$ に於ける凸包を $\mathcal{C}$ とする．この時商空間 $M_0 := \mathcal{C}/\Gamma$ は（無限体積）双曲多様体 $M := \boldsymbol{H}^3/\Gamma$ $(\cong T \times \boldsymbol{R})$ の**凸核**とよばれ，M の変形レトラクトである最小の凸部分空間になる．Γ がフックス群でないときは，M_0 は $T \times [-1,1]$ に同相であり，その二つの境界 $\partial^{\pm} M_0$ は測度付き測地的線層 $pl^{\pm} = pl^{\pm}(\Gamma)$ に沿って折り曲げられた双曲的穴トーラスの構造を持つ [11]．この線層のサポート $|pl^{\pm}|$ を Γ の**折り曲げ線層**とよぶ．互いに相異なる射影化測度付き線層の組 (λ^-, λ^+) に対して

$$\mathcal{P}(\lambda^-, \lambda^+) = \{\rho \in \mathcal{QF} \,|\, [pl^{\pm}(\Gamma)] = \lambda^{\pm}\}$$

を**プリーツ多様体**と呼ぶ．Keen-Series は $\mathcal{P}(\lambda^-, \lambda^+)$ の元は $\lambda^{\pm}$ の $\partial^{\pm} M_0$ に於ける「長さ」でパラメータ付けられることを証明し，擬フックス空間 $\mathcal{QF}$ に**プリーツ座標**と呼ばれる新しい座標を導入した [14],[15],[16],[17]．この研究により表現空間における $\mathcal{QF}$ の（切片の）形を描いた Wright のコンピュータ実験に理論的根拠が与えられた．

尚，$\pi_1(T)$ の $PSL(2, \boldsymbol{C})$ への型保存, 忠実, 離散表現については，それらが $\mathcal{QF}$ の閉包上にあり，しかもエンド不変量により完全に分類できることが Minsky[19] により証明されている．

4　カスプ付き双曲多様体のフォード複体と Epstein-Penner 分解 - 二つの凸包構成の比較 -

この節ではカスプ付き双曲多様体のフォード複体とその幾何的双対である Epstein-Penner 分解，そしてその一般化について説明する．$M = \boldsymbol{H}^n/\Gamma$ をカスプ付双曲多様体で互いに交わらない**カスプ領域**がとれるとものとする．(ここでカスプ領域とは楕円的変換から成る Γ の部分群による接球の商として得られる M の部分多様体のことである.) それらのカスプ領域が同じ体積を持つようにしておくとき，そこへ 2 本以上の最短測地線を持つ点からなる M の部分複体 $\mathcal{F}$ を Γ の**フォード複体**と呼ぶ．直感的には，$\mathcal{F}$ は次のように構成されると理解できる．カスプ領域の境界は柔らかいゴムでできているとし，等しい体積をもつという条件を保ったまま一斉にどんどん膨らましていく．目一杯膨らましたときにカスプ領域の境界がぶつかってできる複体が $\mathcal{F}$ である．

$M = \boldsymbol{H}^n/\Gamma$ が丁度 1 つのカスプしか持たない場合，フォード複体は以下で説明する Γ の**フォード領域** $Ph(\Gamma)$ により定まる．$\boldsymbol{H}^n$ の上半空間モデルにおいて，M のカスプ領域の 1 つの逆像は ∞ に中心をもつ接球 H_∞ としてよい．Γ_∞ を ∞ の固定部分群とする．$\Gamma - \Gamma_\infty$ の各元 γ に対して，H_∞ と $\gamma^{-1}(H_\infty)$ の二等分面として得られる "半球面" を γ の等長半球面とよび $Ih(\gamma)$ で表す．また $Eh(\gamma)$ を $Ih(\gamma)$ の "外部" とする．このとき，フォード領域 $Ph(\Gamma)$ を次で定める．

$$Ph(\Gamma) = \cap\{Eh(\gamma) | \gamma \in \Gamma - \Gamma_\infty\}.$$

フォード複体は$\partial Ph(\Gamma)$のMにおける像に一致する．

$M = \boldsymbol{H}^n/\Gamma$の体積が有限である場合は，フォード複体の幾何学的双対としてM**標準的分割**$\Delta(\Gamma)$を得る．Epstein-Penner[12] と Weeks[23] により，この分割は$n+1$次元ミンコフスキー空間$(\boldsymbol{E}^{1,n}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$に於ける次のような凸包構成を通して構成できることが知られている．まず先に選んだカスプ領域の$\boldsymbol{H}^n$に於ける逆像は，互いに交わらないΓ-不変な接球の族$\mathcal{H}$からなることに注意する．一方，各接球Hは正光錐L^+の点vを用いて

$$H = \{x \in \boldsymbol{H}^n \mid \langle v, x\rangle \geq -1\}$$

と表せる．(ここで$\boldsymbol{H}^n$は$\boldsymbol{E}^{1,n}$の部分空間$\{x \in \boldsymbol{E}^{1,n} \mid \langle x, x\rangle = -1,\ x_0 > 0\}$と同一視している．) $\mathcal{H}$の接球に対応するL^+の点全体が作るΓ-不変集合を$\mathcal{B}$とする．$\mathcal{B}$の$\boldsymbol{E}^{1,n}$に於ける凸包$\mathcal{C}(\mathcal{B})$の境界$\partial\mathcal{C}(\mathcal{B})$は局所有限なユークリッド的面（即ちミンコフスキー計量の制限が正定値であるような面）から成り，それを$\boldsymbol{H}^n$に射影すると$\boldsymbol{H}^n$のΓ-不変理想多面体分割を得る．このMへの射影がMの標準的分割$\Delta(\Gamma)$である．

Mが無限体積の場合にこのミンコフスキー空間内の凸包構成をあてはめると，M内の（一般には局所有限とは限らない）測地的理想多面体複体$\Delta(\Gamma)$を得る．有限体積の場合，$\Delta(\Gamma)$の面は全てEuclid的であったが，一般には$\Delta(\Gamma)$にはparabolicまたはhyperbolicである面が存在することから，この複体は**EPH-分解**と命名された[1]．フォード複体は$\Delta(\Gamma)$の（ユークリッド的な面からなる）部分複体$\Delta_{\boldsymbol{E}}(\Gamma)$の幾何的双対と理解できる．*EPH*-分解$\Delta(\Gamma)$は，前節で紹介した（もう一つの凸体構成により定まる）Mの凸核M_0と次のような関係にある[1].

定理 4.1 *EPH*-分解$\Delta(\Gamma)$のサポート$|\Delta(\Gamma)|$は凸核M_0の境界の構造により決定される．特にΓが穴あきトーラス擬フックス群の場合は，$|\Delta(\Gamma)| = M_0 - (|pl^-| \cup |pl^+|)$が成立する．

この定理によりΓが穴あきトーラス擬フックス群の場合は，EPH-分解$\Delta(\Gamma)$が折り曲げ線層$|pl^{\pm}|$を決定することがわかる．次の定理は逆に折り曲げ線層$|pl^{\pm}|$から$\Delta(\Gamma)$の情報がある程度読みとれることを示している[1].

定理 4.2 Γが穴あきトーラス擬フックス群であるとき，$\Delta(\Gamma)$の$\partial^{\epsilon} M_0$への制限$\partial^{\epsilon}\Delta(\Gamma)$は折り曲げ線層$|pl^{\epsilon}|$により定まる．

Jorgensen [13] は擬フックス穴あきトーラス群のフォード領域の構造を完全に記述した（[4],[5],[24] 参照）．これは言い換えるとEPH-分解$\Delta(\Gamma)$の部分複体$\Delta_{\boldsymbol{E}}(\Gamma)$の構造が決定されたことになる．では$\Delta(\Gamma)$自身の構造はどうなっているのであろうか？これに関しては我々は次のように予想している[5].

予想 4.3 擬フックス穴あきトーラス群Γに対して，*EPH*-分解$\Delta(\Gamma)$の組み合わせ構造は折り曲げ線層$(|pl^-(\Gamma)|, |pl^+(\Gamma)|)$により一意的に決まる．

上の予想を言い換えると，プリーツ多様体 $\mathcal{P}(\lambda^-,\lambda^+)$ に含まれる擬フックス穴あきトーラス群 Γ の EPH-分解 $\Delta(\Gamma)$ は全て組み合わせ的に同値であるということである．群 Γ がフックス群に近いときは比較的単純なフォード領域を持ち，Γ が $\mathcal{P}(\lambda^-,\lambda^+)$ の境界に近づけば複雑なフォード領域を持つが，このフォード領域の進化はその双対部分複体 Δ_E が $\Delta(\Gamma)$ 内で成長していくことに対応すると予想される．従って，どんなにフックス群に近くて「幼い」擬フックス群であっても，それが将来もつはずの（複雑な）フォード領域はすでに $\Delta(\Gamma)$ として内に秘めているはずであるというのが予想の意味である．

この予想に関しては次の部分的解答が得られている [5].

定理 4.4 (λ^-,λ^+) が有理的である場合，$\mathcal{P}(\lambda^-,\lambda^+)$ の境界上にある二重カスプ群に十分近い $\mathcal{P}(\lambda^-,\lambda^+)$ 内の群に関しては上の予想は成立する．

5 擬フックス空間の外部と 2 橋結び目

4 点穴あき球面 S は 1 点穴あきトーラス T と通約可能であり，$\pi_1(T)$ の型保存表現は $\pi_1(S)$ の型保存表現を導く．従って，$\mathcal{QF}$ の各元 ρ は $S\times\boldsymbol{R}$ の双曲構造を与える．一方，傾き r の 2 橋結び目 $K(r)$ の補空間 $S^3-K(r)$ は $S\times[-1,1]$ から $S\times\{-1\}$ 側に傾き ∞ の単純閉曲線に沿って 2 −ハンドルを，$S\times\{1\}$ 側に傾き r の単純閉曲線に沿って 2 −ハンドルをそれぞれ貼り付けて得られる．次の定理は，この 2 橋結び目補空間のヘガード構造と双曲構造が自然に結びついていることを示している．

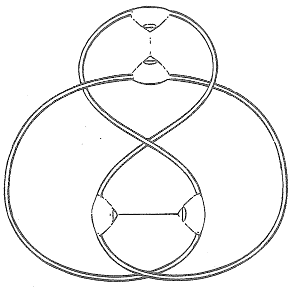
定理 5.1 （1）擬フックス空間 $\mathcal{QF}$ 内の有理的プリーツ多様体 $\mathcal{P}(\lambda^-,\lambda^+)$ は自然に（$\mathcal{R}$ に於ける）$\mathcal{QF}$ の外部へ延長でき，その延長上にある表現は次ページの図に示すような双曲錐多様体のホロノミーになる．

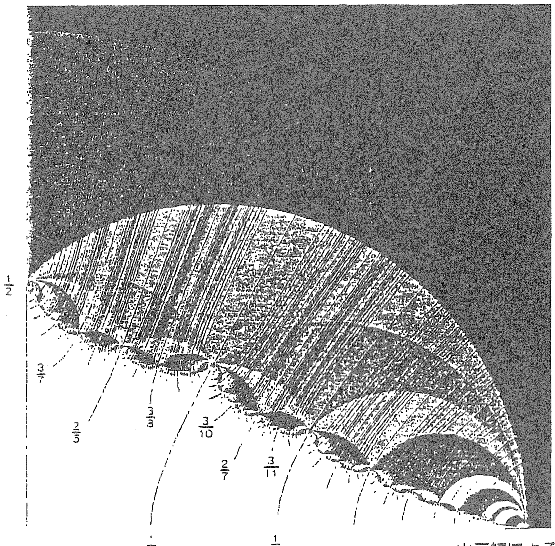
（2）特に，次の条件を満足する双曲的錐多様体の連続族 $\{M(\infty,r;\theta^-,\theta^+)\}$ が存在する．底空間は 2 橋結び目の補空間 $S^3-K(r)$，錐軸は下トンネルと上トンネルでそれぞれ錐角 θ^-,θ^+，但し (θ^-,θ^+) が動ける範囲は次で与えられる．

1. $d(\infty,r)>2$ の時，$[0,2\pi]\times[0,2\pi]$.
2. $d(\infty,r)=1,2$ の時，$[0,2\pi]\times[0,2\pi]-(2\pi,2\pi)$.
3. $d(\infty,r)=0$ の時，$\emptyset$.

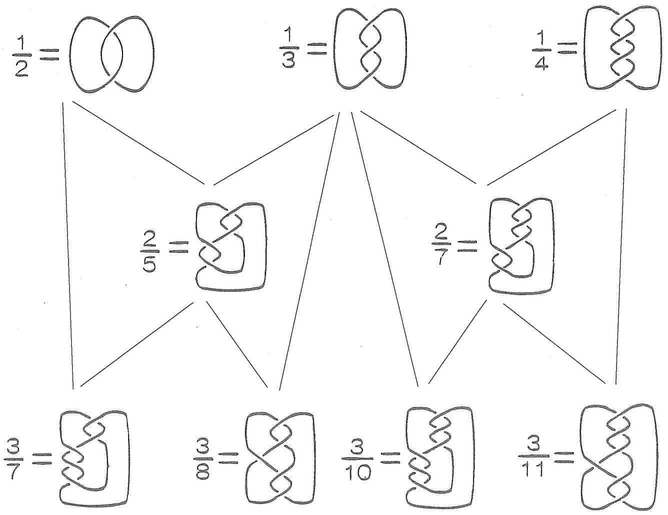
（ここで上の d はモジュラーダイアグラムに於いて二頂点を結ぶのに必要な辺の数の最小数である.）

（3）双曲錐多様体 $M(\infty,r;\theta^-,\theta^+)$ のフォード複体の組み合わせ構造は，傾き ∞,r の単純閉曲線の像を潜伏的放物変換としてもつ 2 重カスプ群のフォード複体の類似として記述でき，特に双曲多様体 $M(\infty,r;2\pi,2\pi)=S^3-K(r)$ のフォード複体は [22] により予想されていたものに一致する．





山下靖による



6 McShaneの等式の類似

McShane [18]（[7] 参照）は穴あきトーラスフックス群に対する次のような不思議な等式を証明した．

定理 6.1 (McShane) 任意のフックス表現 $\rho : \pi_1(T) \to SL(2, \boldsymbol{C})$ に対して次の等式が成立する．

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{S}} \frac{1}{1 + e^{\ell_\rho(\gamma)}} = \frac{1}{2},$$

但し $\mathcal{S}$ は T 上の本質的単純閉曲線のイソトピー類全体の集合を表し，$\ell_\rho(\gamma)$ は $\rho(\gamma)$ の移動距離，言い換えれば，双曲多様体 $\boldsymbol{H}^2/\Gamma$ 上のホモトピー類 γ に属する閉測地線の長さを表す．

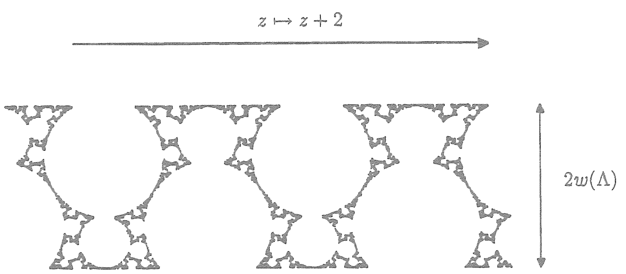
Bowditch [9] は，ρ が擬フックス表現である場合でも同じ等式が成立することを証明した．但し，$\ell_\rho(\gamma)$ は斜行的変換 $\rho(\gamma)$ の**複素移動距離**を表し，従って $\Re(\ell_\rho(\gamma))$ は $\rho(\gamma)$ の軸上の（実）移動距離を，$\Im(\ell_\rho(\gamma))$ は軸の周りの回転角をそれぞれ表している．更に Bowditch [8] は，上の等式の類似として，双曲構造を持つ円周上の穴あきトーラス束のカスプトーラスのモジュラスを複素移動距離を用いた無限和で表す公式を発見した．

この節では McShane の等式を精密化することにより，穴あきトーラス擬フックス群の極限集合 Λ の幅 $w(\Lambda)$ を複素移動距離を用いた無限和で表せす公式を与える．ここで，極限集合 Λ の幅 $w(\Lambda)$ は以下のように定義される．穴あきトーラス擬フックス表現 ρ で $\rho(\kappa) = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ と正規化されたものを考える．このとき極限集合 Λ は変換 $z \mapsto z + 2$ で不変な周期的な曲線であるので，次の式は意味を持つ．

$$w(\Lambda) := \frac{1}{2}(m^+(\Lambda) - m^-(\Lambda)),$$

但し

$$m^+(\Lambda) := \max\{\Im z \mid z \in \Lambda \cap \boldsymbol{C}\},\ m^-(\Lambda) := \min\{\Im z \mid z \in \Lambda \cap \boldsymbol{C}\}.$$



さて穴あきトーラス T の射影的測度付き線層空間 $\mathcal{P}$ は $S^1 = \boldsymbol{R} \cup \{\infty\}$ と同一視され，$\mathcal{S}$ は $\mathcal{P}$ の有理点の集合と同一視されることを想い出そう．すると二つの射影的測度付き線層 $[pl^{\pm}]$ は S^1 を二つの区間に分割し，従って $\mathcal{S} - \{[pl^-],[pl^+]\}$ を二つの部分集合 $\mathcal{S}_L$ と $\mathcal{S}_R$ に分割する．このとき次の定理が成立する [2].

定理 6.2 任意の擬フックス穴あきトーラス表現 ρ に対して，その極限集合 Λ の幅 $w(\Lambda)$ は次の等式により与えられる．

$$\pm w(\Lambda) = \Im \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_L} \frac{1}{1+e^{\ell_\rho(\gamma)}} = -\Im \sum_{\gamma \in \mathcal{S}_R} \frac{1}{1+e^{\ell_\rho(\gamma)}}.$$

この等式は，一般の穴あき曲面を表す擬フックス群に対するものへ一般化されている [3]．また Bowditch [8] の結果も円周上の穴あき曲面束に対するものへ一般化されると予想している．

さて，Jorgensen の定理が擬フックス空間の外部への自然な拡張を持っていたことを思い起こすと，先の等式も擬フックス空間の外部への一般化があると考えるが自然である．以下でこの予想を定式化し，これまでにわかっていることを報告する．有理数 r $(0 < r < 1)$ に対して，$G_{\infty,r}$ を ∞ または r を頂点とするモジュラーダイアグラムの辺に関する鏡映変換が生成する $\boldsymbol{H}^2$ 上の離散群とし，r_1, r_2 を次の条件を満足する有理数とする．

1. $r_1 < r < r_2$.
2. モジュラーダイアグラムの 4 つの辺 $\overline{\infty 0}$ $\overline{\infty 1}$, $\overline{rr_1}$, $\overline{rr_2}$ が囲む領域は $G_{\infty,r}$ の基本領域.

$\mathcal{S}$ の重み付き部分集合 $\mathcal{S}_L^* = [r_2, 1] \cap \boldsymbol{Q}$，$\mathcal{S}_R^* = [0, r_1] \cap \boldsymbol{Q}$ （但し「境界」上にある有理点は重み 1/2，残りの点は重み 1 をもつ）を考える．

予想 6.3 （１）双曲錐多様体 $M(\infty, r; \theta^-, \theta^+)$ のホロノミー表現 ρ に対して，

$$\sum_{\gamma \in \mathcal{S}_L^*} \frac{1}{1+e^{\ell_\rho(\gamma)}}$$

は絶対収束し，その値は双曲錐多様体 $M(\infty, r : \theta^-, \theta^+)$ のフォード複体の形に関するある量を与えている．

（２）特に双曲多様体 $M(\infty, r; 2\pi, 2\pi) = S^3 - K(r)$ のホロノミーに対し，上の級数は絶対収束し，その値は $S^3 - K(r)$ のカスプトーラスの（適当な基底に関する）モジュラスを与える．

コンピュータ実験により,（１）は八の字結び目に対しては正しそうであるとの確証を得ている．また（２）に関しては次のことがわかっている [21], [10].

命題 6.4 予想 *6.3*（２）は $r = n/(2n+1)$ （但し $2 \le n \le 10$）に対しては成立する．

参考文献

[1] H. Akiyoshi and M. Sakuma, *Comparing two convex hull constructions for cusped hyperbolic manifolds*, to appear in the proceeding of the workshop "Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds" (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003).

[2] H. Akiyoshi, H. Miyachi and M. Sakuma A refinement of McShane's identity for quasifuchsian punctured torus groups, To appear in the Proceedings of the 2002 Ahlfors-Bers Colloquium, Contemporary Math. A.M.S.

[3] H. Akiyoshi, H. Miyachi, M. Sakuma and C. Series, A refinement of McShane's identity for quasifuchsian punctured surface groups, in preparation.

[4] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Ford domains of punctured torus groups and two-bridge knot groups*, in "Knot Theory", Proceedings of the workshop held in Toronto dedicated to 70th birthday of Prof. K. Murasugi, 1999.

[5] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, *Jørgensen's picture of punctured torus groups and its refinement*, to appear in the proceeding of the workshop "Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds" (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003).

[6] H. Akiyoshi, M. Sakuma, M. Wada, and Y. Yamashita, in preparation.

[7] B. H. Bowditch, *A proof of McShane's identity via Markoff triples*, Bull. London Math. Soc. 28 (1996), 73–78.

[8] B. H. Bowditch, *A variation of McShane's identity for once-punctured torus bundles*, Topology 36 (1997) 325–334.

[9] B. H. Bowditch, *Markoff triples and quasifuchsian groups*, Proc. London Math. Soc. 77 (1998) 697–736.

[10] 江口友和, マルコフ写像と２橋結び目，大阪大学修士論文　2003.

[11] D. B. A. Epstein and A. Marden, *Convex hulls in hyperbolic space, a theorem of Sullivan, and measured pleated surfaces*, Analytical and geometric aspects of hyperbolic space (Coventry/Durham, 1984), 113–253, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 111, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987.

[12] D.B.A. Epstein and R.C. Penner *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds* J. Diff. Geom. 27(1988), 67–80

[13] T. Jorgensen, *On pairs of punctured tori*, to appear in the proceeding of the workshop "Kleinian groups and hyperbolic 3-manifolds" (edited by Y.Komori, V.Markovic and C.Series), London Math. Soc., Lect. Notes 299 (2003).

[14] L. Keen and C. Series, *Pleating coordinates for the Maskit embedding of the Teichmüller space of punctured tori*, Topology 32 (1993), 719-749.

[15] L. Keen and C. Series, *Continuity of convex hull boundaries*, Pacific J. Math. 168 (1995).

[16] L. Keen and C. Series, *How to bend pairs of punctured tori*, In J.Dodziuk and L.Keen, editors, Lipa's Legacy, Proceedings of the Bers Colloquium 1995, Contemp. Math. 211 (1997), 359-388.

[17] L. Keen and C. Series, *The Riley Slice of Schottky space*, Proc. London Math. Soc. 69 (1994), 72-90.

[18] G. McShane, *Simple geodesics and a series constant over Teichmuller space*, Invent. Math. 132 (1998), 607–632.

[19] Y. Minsky, *The classification of punctured-torus groups*, Ann. of Math. 149 (1999), 559–626.

[20] D. Mumford, C. Series and D. Wright *Indra's Perals*, Cambridge Univ. Press, 2002.

[21] M. Sakuma, *Variations of McShane's identity for the Riley slice and 2-bridge links*, Hyperbolic Spaces and Related Topics (ed. S. Kamiya) R.I.M.S. Kokyuroku 1104 (1999), 103–108.

[22] M. Sakuma and J. Weeks, *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Japanese Journal of Math. 21(1995), 393-439.

[23] J. Weeks *Convex hulls and isometries of cusped hyperbolic manifolds*, Topology Appl. 52(1993), 127-149

[24] M. Wada, *OPTi*, http://vivaldi.ics.nara-wu.ac.jp/~wada/OPTi/index.html.

Symplectic Floer homology について

北大 理　　小野 薫

1980年代後半、Floer は 完全微分同相写像の不動点や Lagrange 部分多様体とその完全変形の交点数に関する Arnold 予想の解決の為に 道の空間上の作用汎関数に対する Morse 理論の類似物を構成し、その解決への道を切り開いた。すぐ後にゲージ理論へもその考え方が適用され、Donaldson 不変量の張り合わせの議論の定式化等で重要なものとなった。本講演では シンプレクティック幾何における Floer ホモロジーの概観を与える事を目標とする。

1. シンプレクティック構造

典型的なシンプレクティック多様体として 滑らかな多様体の余接束がある。Mを多様体とし、$(q^1,\cdots,q^n)$を局所座標、$(p_1,\cdots,p_n)$を$\{dq^1,\cdots,dq^n\}$を枠とした時のT^*Mのファイバー座標とすると、$\lambda = \sum p_i dq^i$ は Mの局所座標の取り方には依らずT^*Mの1次微分形式を定める。$\omega_0 = -d\lambda$ は T^*M 上の非退化閉2次形式(シンプレクティック形式)を与える。λは次の意味で M 上の1次微分形式の親玉である。即ち M上の1次微分形式 η は $T^*M \to M$ の切断 s_η に対応する。このとき $\eta = s_\eta^* \lambda$ が成り立つ。この事実に注意すると η が閉形式となる事と $s_\eta^* \omega_0 = 0$ となる事とが同値となる事が分かる。(後者は Lagrange 部分多様体となる事と言い換えられる。)

一般の多様体 X 上の2次微分形式 ω がシンプレクティック形式であるとは、閉形式かつ非退化、即ち $i(\cdot)\omega : TX \to T^*X$ が同型、の2条件を満たす事である。Darboux の定理により、各点のまわりに局所座標 (q^i, p_i) で $\omega = \sum dq^i \wedge dp_i$ となるものを取る事ができる。

シンプレクティック幾何の重要な対象はしばしば Lagrange 部分多様体として現れる。$L \subset (X, \omega)$ が Lagrange 部分多様体であるとは、L が X の半分次元の部分多様体で ω の L への制限が L 上の2次微分形式として恒等的に消えるものの事である。上述の Darboux の定理は1点のまわりの標準形を与えるが、閉部分多様体のまわりの様子を記述する Weinstein の定理はその一般化である。特に Lagrange 部分多様体に対して次が分かる。

<u>定理</u> 閉 Lagrange 部分多様体に対し、ある管状近傍 U が取れ、T^*L の零切断のある管状近傍 V と シンプレクティック同型になる。

シンプレクティック多様体は局所的に同型であるが、この事実と関連して、連結シンプレクティック多様体へのシンプレクティック同型群の作用は推移的であることも判る。ここでは Hamilton ベクトル場を考える事が重要である。(X, ω) 上の滑らかな関数 h に対し Hamilton ベクトル場 X_h を $dh + i(X_h)\omega = 0$ を満たすものとして定義する。外微分に関する Cartan の公式を用いると $\mathcal{L}_{X_h} \omega = 0$ となり、X_h の生成する流れ φ_h^t は ωを保つ。$\mathcal{L}_X \omega = 0$ は $i(X)\omega$ が閉1次微分形式となる事と同値になるので、

$$\{v \in \mathfrak{X}(X) \mid \mathcal{L}_v \omega = 0\} / \{v = X_h \mid h \in C^\infty(X)\} \cong H^1(X;\mathbb{R})$$

が分かる。時間に依存したHamiltonベクトル場により生成された流れの時刻1での写像 $\varphi^1_{\{h_t\}}$ と表される微分同相写像を完全微分同相写像といい、その全体を $Ham(X,\omega)$ と書く。シンプレクティック同型群の単位元連結成分を $Symp_0(X,\omega)$ と書くと、上で述べた事は $Symp_0(X,\omega)/Ham(X,\omega)$ は"Lie環"を取ると $H^1(X;\mathbb{R})$ になる事と解釈できる。これの「積分形」として flux 準同型 或いは Calabi不変量と呼ばれるものがある。

$$\widetilde{flux} : Symp_0(X,\omega)/Ham(X,\omega) \longrightarrow H^1(X;\mathbb{R})/\Gamma_\omega$$

が定まる。Banyagaにより、これは同型である。ここで Γ_ω は flux群と呼ばれる $H^1(X;\mathbb{R})$ の部分群で、これが $H^1(X;\mathbb{R})$ の中で離散的であろうというのが flux 予想である。

2. シンプレクティック幾何の剛的側面

シンプレクティック形式 ω は体積要素 ω^n を定める。「ω の幾何」と「ω^n の幾何」に本質的な差異を明確に示したのは Gromov の non-squeezing theorem であった。それ以降多くの研究が成されている。

(Non-squeezing theorem) $B^{2n}(r) = \{(q^i, p_i) \in \mathbb{R}^{2n} \mid \Sigma (q^i)^2 + (p_i)^2 < r^2\}$ が $Z^{2m}(R) = \{(q^i, p_i) \in \mathbb{R}^{2n} \mid (p^1)^2 + (q_1)^2 < R^2\}$ に $\omega_0 = \Sigma dq_i \wedge dp^i$ を保って埋め込める為の必要十分条件は $r \leq R$ である。

この定理の系として(も)次が得られる。

<u>定理</u> $Symp(X,\omega)$ は $Diff(X)$ の中で C^0-位相について閉である。特に $Symp(X,\omega)$ は保積変換群 $Diff(X,\omega^n)$ の中で閉真部分群である。

Gromov は上記の定理を含む一連の結果を示すために「擬正則曲線の理論」を展開した。その後 Hamilton 力学系の考察に基づくシンプレクティック容量の理論や(無限遠で2次関数と一致する)母関数に対する安定Morse理論などによる Non-squeezing theorem の別証明もでき、関連した数々の結果が得られている。

また(閉シンプレクティック多様体)(X,ω) 上の完全微分同相写像の不動点の個数についての Arnold予想も、シンプレクティック幾何の大域的研究に大きな動機付けを与えた。

<u>予想</u> 完全微分同相写像 φ の不動点は少なくとも $\min\{\# Crit(f) \mid f \in C^\infty(X)\}$ だけある。更に全ての不動点が非退化であれば $\min\{\# Crit(f) \mid f は X 上の Morse 関数\}$ だけある。

Conley-Zehnder はこの予想を $(\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}, \omega_0)$ に対して証明した。φ の不動点はある周期的Hamilton系の1-周期解と対応する。また周期解はループ空間上のある汎関数の臨界点として捉えられる。Conley-Zehnder は $\mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ の零ホモトピックなループの空間を有限Fourier部分和を取ることで有限次元近似をし、その上でのある関数の考察をした。このような有限次元近似は一般には容易ではなく(Sikorav, Floer) また

直接ループ空間上で汎関数の臨界点を探すことも大変困難であると思われていた。Floer はここに Gromov の擬正則曲線の理論を用い，現在 Floer ホモロジーと呼ばれているものを導入した。同時期に Hofer も擬正則曲線の理論を用いる事で深く関連する結果を得ている。

Gromov は Lagrange 部分多様体に関しても重要な結果をいくつも得ている。多様体のはめ込みについての Hirsch－Smale の理論は Lagrange はめ込みに対しても然るべく適用できる（Lees，より一般には Gromov）。しかし Lagrange 埋め込みでは全く様相が異なる。

<u>定理</u>　$L \subset (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ を埋め込まれた閉 Lagrange 部分多様体とすると $\lambda = \sum p_i dq^i$ の L への制限 $\lambda|_L$ は $H^1(L;\mathbb{R})$ の零でないコホモロジー類を表わす。

注）（$\lambda|_L$ の代りに）L の Maslov 類の非自明性が色々な場合に示されている。（Polterovich，Viterbo，Oh，Fukaya-Oh-Ohta-Ono，Biran，…）

また Lagrange 部分多様体と，その完全微分同相写像による像の交叉に対しても，然るべき付加条件の下で Arnold 予想の類似が考察されている。これについては後で触れる。

$Ham(X, \omega)$ には両側不変距離が存在する。これは Eliashberg の問に Hofer, Viterbo が独立な解答を与えた仕事に始まる。現在 Hofer 距離と呼ばれているものについては「局所平坦性」「測地線の特徴付け」等の研究がされている。Hofer 距離が存在することはシンプレクティック構造の特徴的事実である。（保積変換群上に両側不変距離が入るかどうか筆者は知らない。）また $Ham(X, \omega)$ という対象も，それ自体幾何構造を保つ変換の全体として把えられない。（X が単連結であれば $Ham(X,\omega) = Symp_0(X,\omega)$ ゆえシンプレクティック同型群の単位元連結成分。一般には $Symp_0(X,\omega)$ の交換子群となる。）

3. Floer ホモロジー

(1) 周期的 Hamilton 系

$H : X \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $H(\cdot, t+1) = H(\cdot, t)$ を満たす C^∞ 関数とする。H の定める Hamilton 系の周期解 即. $\dot{\gamma}(t) = X_{H_t}(\gamma(t))$，$\gamma(0) = \gamma(1)$ を満たすループは，X のループ空間上の作用汎関数の臨界点となる。ここでは特に零ホモトピックなループの空間 $\mathcal{L}^0(X)$ 上の汎関数 $\mathcal{A}_H$ を
$$\mathcal{A}_H(\gamma) := \int_{D^2} u^*\omega + \int_0^1 H(\gamma(t), t)\, dt$$
と定める。ここで第1項に現れる u は γ を張る円盤 $u : D^2 \to M$ 上での ω の積分で，実は u のとり方に依存する。そのため，$\mathcal{A}_H$ は $\mathcal{L}^0(X)$ のある被覆空間の上で定義される。前述の Conley－Zehnder の仕事においては $\mathcal{A}_H$ を有限次元空間上の関数で近似することにより有限次元の位相幾何を用いることで $T^{2n} = \mathbb{R}^{2n}/\mathbb{Z}^{2n}$ 上の Hamilton 系の Arnold 予想が証明された。Floer ホモロジーはこの有限次元近似の極限を取ることにより，一種の安定 Morse 理論と考えられる。$\mathcal{L}^0(X)$ 上で直接 $\mathcal{A}_H$ の Morse 理論の類似を考えようとすると，勾配流の考察をしなくてはならない。形式的に $d\mathcal{A}_H$ を計算すると

$$d\mathcal{A}_H(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi(t), \dot{\gamma}(t) - X_{H_t}(\gamma(t)))\,dt$$

ここで ξ は $\gamma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to X$ に沿うベクトル場（$\xi(t) \in T_{\gamma(t)}X$）である。$\omega$ と両立する概複素構造 J を取る。（即ち $g_J(u,v) := \omega(u, Jv)$ が Riemann 計量を定めるような概複素構造）このような J は常に存在し、全体として可縮な空間を成す。$\mathcal{A}_H$ の勾配ベクトル場を考えるには $\mathcal{L}^0(X)$ 上の "Riemann計量" を用いる。ここでは g_J を基に L^2-内積について形式的に考えると、

$$\operatorname{grad} \mathcal{A}_H(\gamma) = -J\dot{\gamma}(t) + \nabla H_t(\gamma(t))$$

となる。ここで ∇H_t は $H_t \in C^\infty(X)$ の g_J に関する勾配ベクトル場である。有限次元の時はベクトル場は少なくとも局所的な積分曲線を持つが、今の場合には局所的な存在さえ一般の初期値に対しては保障されない。（注：L^2-内積ではなく $W^{1/2,2}$-内積を用いると状況は異なる。$\mathbb{R}^{2n}$ 上の Hamilton 系については色々な仕事がある。）

次に $\mathcal{A}_H$ の Hessian を計算すると、

$$\operatorname{Hess} \mathcal{A}_H : \xi \longmapsto -J\dot{\xi} + (\xi \text{の微分を含まない項})$$

となることから、$\operatorname{Hess}\mathcal{A}_H$ の固有値は正、負共に無限個現れることが分かる。従って通常の Morse 指数は定義されない。閉多様体 M 上の関数 h の臨界点を探すには $\{x \in M \mid h(x) \leq c\}$ の位相が変化する c の値に着目するとよい。しかし今の場合たとえ非退化な臨界点があるとしても、その臨界値を超えることによる変化は「無限次元胞体」を貼ることと想像すると通常の位相幾何により変化を捕えることはできないと思われる。

前に述べた様に $\mathcal{A}_H$ は $\mathcal{L}^0(X)$ の被覆空間で定義されるので、関数の臨界点を探すというよりは、閉 1 次微分形式の零点を探す問題を考えることが必要となる。（有限次元の場合の Novikov ホモロジーに似た状況である。）

これらの困難を如何にして克服するのかその粗筋を述べることにする。まず Morse 理論の類似を考えるので全ての周期解は非退化（このことは $\operatorname{Hess}\mathcal{A}_H$ が非退化であることと同値）とする。Morse 指数は定まらないが、2つの臨界点を道でつなぐと、その道に沿った指数の差に相当するものを定義できる（spectral flow）。更にある正規化をした Conley–Zehnder 指数と呼ばれるものが定義できる。これを次数付けに用いて加群 $C^k(H)$ を Conley–Zehnder 指数 μ が k の周期解を生成元とした自由加群のある完備化として定義する。（ここで完備化をとるのは Novikov ホモロジーの時と同様、次に述べる境界準同型がきちんと定義されるようにするためである。）
次数の差が 1 である 2 つの周期解 γ_1, γ_2 をつなぐ $\mathcal{A}_H$ の勾配ベクトル場の積分曲線の数を $n(\gamma_1, \gamma_2)$ とおき、$\delta : C^k(H) \to C^{k+1}(H)$ を

$$\delta(\gamma) = \sum_{\mu(\sigma)=\mu(\gamma)+1} n(\gamma, \sigma)\,\sigma$$ として定める

更に $\delta\circ\delta=0$ であることを示すと. Floer コホモロジー $HF^*(H,J)=\mathrm{Ker}\,\delta/\mathrm{Im}\,\delta$ が定義される。実はこの鎖複体は Novikov 環 Λ_ω 上で定義される。

$HF^*(H,\delta)$ の計算は、"小さな Morse 関数" h を H として取り、h の Morse 複体と比較する，$H\equiv 0$ とし Bott−Morse の状況で考える等の方法がある。結論は $HF^*(H,\delta)\cong H^{*+n}(X)\otimes\Lambda_\omega$ となり. このことから次が得られる。

定理（Fukaya−Ono，$\mathbb{Q}$ 係数の時の主張は独立に G. Liu−Tian） H を閉シンプレクティック多様体 X 上の周期的 Hamilton 関数とする。このとき: $\dot{\gamma}(t)=X_{H_t}(\gamma(t))$ の解が全て非退化であれば: その個数は少なくとも $\sum_p b_p(X)+2\sum_p t_p(X)$ ある。
ここで $b_p(X)$ は Betti 数，$t_p(X)$ は $H_p(X;\mathbb{Z})$ の捩れ部分の生成系の最小個数。

- $n(\gamma_1,\gamma_2)$ が定まる事，$\delta\circ\delta=0$ が成立する事.

$\mathcal{A}_H$ の勾配ベクトル場の積分曲線は $u:\mathbb{R}\times\mathbb{R}/\mathbb{Z}\longrightarrow X$ で

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}+J(u)\frac{\partial u}{\partial t}-\nabla H_t(u,t)=0 \qquad \text{—— } \circledast$$

を満たすものと考えられる。主要部は Cauchy−Riemann 方程式と同じ形をしていて非線形楕円型方程式である。u のエネルギーを

$$E(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^1\left\|\frac{\partial u}{\partial \tau}\right\|^2 d\tau\, dt$$

と定めると $E(u)<+\infty$ となる事と、$\tau\to\pm\infty$ の時に $u(\tau,t)$ が周期解に収束する事とは同値になる。Floer 複体の構成には $E(u)<+\infty$ の $\circledast$ の解の空間の考察が必要となる。

$$\widetilde{\mathcal{M}}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])=\left\{u\ \middle|\ \begin{array}{l}\circledast \text{ の解で } u(\tau,t)\to\gamma^\pm\ (\tau\to\pm\infty)\\ c_1(X)[w^-\# u\#(-w^+)]=0\\ \int_{S^2}(w^-\# u\#(-w^+))^*\omega=0\end{array}\right\}$$

ここで $w^\pm$ は $\gamma^\pm$ を張る円盤。

この空間には τ−平行移動の対称性がある。$[\gamma^-,w^-]\neq[\gamma^+,w^+]$ のときはこの $\mathbb{R}$−作用は自由であり $\mathcal{M}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])=\widetilde{\mathcal{M}}([\gamma^-,w^-],[\gamma^+,w^+])/\mathbb{R}$ は仮想次元 $\mu(\gamma^+,w^+)-\mu(\gamma^-,w^-)-1$ である。この空間が多様体の様な良い空間になるかどうかは $\circledast$ の線形化の全射性が成立するかどうかに関わる。コンパクト性の崩れ方は（有限次元同様）勾配ベクトル場の積分曲線の列への分裂の可能性と、擬正則曲線の Gromov コンパクト性同様、$\mathbb{C}P^1$ からの擬正則曲線の樹が bubble として生ずる可能性の２つがある。Floer は bubble も起こらず $\mathcal{A}_H$ も $\mathcal{L}^0(X)$ 上で定義される状況（たとえば $\pi_2(X)=0$）や、それを含む単調性を満たす場合（$c_1(X)$ と $[\omega]$ が $\pi_2(X)\longrightarrow\mathbb{R}$ として正定数で比例している時）に

Floer ホモロジーを構成，計算した。一般の閉シンプレクティック多様体上での議論は（$\mathbb{Q}$係数のとき）Fukaya-Ono，G. Liu-Tian による。まず $\mathcal{M}([\gamma^-, u^-], [\gamma^+, u^+])$ のコンパクト化を Kontsevich の安定写像にならって構成し，コンパクト化を局所的に有限次元モデルを用いて記述し，それに基づいて「基本類」，「基本鎖」が構成される。有限群の対称性が残るため「局所定義方程式」を横断的なものに摂動する際に多価摂動を用いる。それ故 $\mathbb{Q}$ 係数の議論となる。これについては既に何度か発表しているのでこれ以上述べない。$\mathbb{Z}$ 係数の Floer ホモロジーの構成の概要については時間が許せば話したい。

(2) Lagrange 部分多様体の交叉

$L_0, L_1 \subset (X, \omega)$ を閉 Lagrange 部分多様体とする。L_0 と L_1 は横断的に交わると仮定する。このとき L_0, L_1 の対の Floer(コ)ホモロジーを定義したい。

$$\mathcal{P}(L_0, L_1) = \{\gamma : [0,1] \longrightarrow X \mid \gamma(0) \in L_0,\ \gamma_1 \in L_1\}$$

$\mathcal{P}(L_0, L_1)$ 上の“1次微分形式” α を

$$\alpha(\xi) = -\int_0^1 \omega(\xi(t), \dot{\gamma}(t))\, dt \qquad \xi \in T_\gamma \mathcal{P}(L_0, L_1)$$

として定めると形式的な計算により閉形式となり適当な被覆空間をとると原始関数 $\mathcal{A} : \widetilde{\mathcal{P}}(L_0, L_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ が得られる。この被覆空間は原始関数$\mathcal{A}$が取れることと臨界点での Hessian の指数（Maslov-Viterbo 指数）が定義できることの2条件を満たすもので最小のものとする。）この汎関数に対して (1) と同様に Morse 理論の類似を考えたい。

- 鎖複体の生成元 $L_0 \cap L_1$（正確には $\widetilde{\mathcal{P}}(L_0, L_1) \to \mathcal{P}(L_0, L_1)$ による逆像）
- 次数付け Maslov-Viterbo 指数
- 境界準同型 $\delta : C^k(L_0, L_1; J) \longrightarrow C^{k+1}(L_0, L_1; J)$

$$\delta \tilde{x} = \sum_{\mu(\tilde{y}) = \mu(\tilde{x})+1} n(\tilde{x}, \tilde{y}) \cdot \tilde{y}$$

ここで $n(\tilde{x}, \tilde{y}) = \# \mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y}; J)$

$$\mathcal{M}(\tilde{x}, \tilde{y}; J) = \left. \left\{ u : \mathbb{R} \times [0,1] \to X \;\middle|\; \begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial \tau} + J(u) \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0 \\ u(\mathbb{R} \times \{0\}) \subset L_0,\ u(\mathbb{R} \times \{1\}) \subset L_1 \\ u \text{ は } \widetilde{\mathcal{P}}(L_0, L_1) \text{ の道に持ち上げると} \\ \tilde{x} \text{ と } \tilde{y} \text{ をつなぐ道とできる.} \end{array} \right\} \right/ \mathbb{R}$$

(1) の場合と同様問題となるのは，δ の定義がきちんとできるか，$\delta \circ \delta = 0$ は成り立つかである。Floer は $\pi_2(X, L_0) = \pi_2(X, L_1) = \{1\}$ という仮定

の下にこれらの事が成立することを証明し、汎関数$\mathcal{A}$に関する$\frac{\infty}{2}$次元のMorse理論を創始した。（その後(1)で述べた(X,ω)が単調な場合の周期的Hamilton系のFloerホモロジーの構成をした。）Y. G. OhはLagrange部分多様体の単調性と最小Maslov数が3以上という条件下でFloerの構成を一般化した。（Lagrange部分多様体の対のFloerホモロジーに関する、ここまでの仕事は$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-係数で行われた。）何の制約もつけずにFloerホモロジーを構成しようとしても、擬正則円盤のbubble現象により$\delta\circ\delta=0$が成立しなくなる場合がある。（A. Sergeevから以前聞いたのだが、Floer自身この事を認識していたそうである。）上述のOhの仕事に最小Maslov数の条件が付いているのはこの問題を回避するためである。また$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$係数にしてあるのは、$\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{y};J)$の向きづけ可能性（更に向きを一斉に両立条件を満たすように与える事）が一般には保障されないからである。

周期的Hamilton系のFloerホモロジーの構成では$\mathcal{M}([\gamma^-,u^-],[\gamma^+,u^+])$のコンパクト化と「基本鎖」の構成の為に安定写像の類似物と倉西構造の理論が使われた。この方法によりLagrange部分多様体の対のFloerホモロジーの構成がどこまで可能であるかをFukaya-Oh-Ohta-Onoは調べた。倉西構造を用いた「基本鎖」の構成では多価摂動を用いるため$\mathbb{Q}$-係数で考えることとなり、$\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{y};J)$の向きの問題を避けて通れない。そのため、Lagrange部分多様体の「弱スピン構造」が必要となる。「弱スピン構造」が与えられると、各$\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{y};J)$に向きを入れて、それらが分裂現象、正則円盤のbubble現象（逆からみると張り合わせ）と両立するようにできる。そこで以下Lagrange部分多様体には「弱スピン構造」が与えられているとする。

周期的Hamilton系のときとLagrange部分多様体の対のときとで大きく異なるのは、$\mathcal{M}([\gamma^-,u^-],[\gamma^+,u^+])$, $\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{y};J)$のコンパクト性の崩れ方にある。コンパクト性が崩れる原因は「勾配流の積分曲線としての分裂」と「擬正則曲線のbubble現象」の2つである。前者は正に$\delta\circ\delta=0$を示すための鍵で後者の可能性を排除できれば$\delta\circ\delta=0$を示すことができる。周期的Hamilton系のFloerホモロジーを構成するためには、$\mathbb{C}P^1$からの擬正則曲線のbubble現象のみの考察で十分であるが、Lagrange部分多様体の対のFloerホモロジーの構成では、それと共にL_0又はL_1上に境界を持つ擬正則円盤のbubble現象も考察しなくてはならない。$\mathbb{C}P^1$からの擬正則曲線のbubblingは、モジュライ空間の「複素余次元1」即「実余次元2」で起こり得るのに対し、擬正則円盤のbubblingはモジュライ空間の「実余次元1」で起こり得る。（このことは指数定理による仮想次元の計算からの帰結である。）従って周期的Hamilton系のFloerホモロジーの場合は倉西構造の理論により0次元又は1次元の$\mathcal{M}([\gamma^-,u^-],[\gamma^+,u^+])$ではbubble現象を避けることができて、構成がうまくいく。一方、Lagrange部分多様体の対の場合は1次元の$\mathcal{M}(\tilde{x},\tilde{y};J)$で擬正則円盤のbubble現象を一般には排除できない。これが$\delta\circ\delta=0$を示す際の障害となる。従って擬正則円盤のモジュライを組織的に調べることにより、鎖複体の構成が可能であるかどうかがはっきりするはずである。Kontsevichの示唆を受け、擬正則円盤のモジュライをシンプレクティック面積が小さいものから順に用いて、障害類をLの$\mathbb{Q}$係数ホモロジーの元と

して定義した。（ファイバー束の切断の障害理論の時と同じように、順々に障害類が定義されそれまでの障害類が全て消えていると次の障害が定義される。）全ての障害が消えている時は障害類を消すのに用いられる鎖を用いて δ の定義を修正して $\delta\circ\delta=0$ を満たすようにできる。　まとめると次を得る。

<u>定理</u>　(X,ω) を閉シンプレクティック多様体とする。$L_i\ (i=0,1)$ をその Lagrange 部分多様体の対で弱スピン構造が与えられているとする。

(1) 障害類 $o_1(L_i)\in H_*(L_i;\mathbb{Q})$ が定義され、$o_1(L_i),\cdots,o_k(L_i)$ が全て消えていると $o_{k+1}(L_i)\in H_*(L_i,\mathbb{Q})$ が定義される。

(2) $i=0,1$ 両方に対し障害類が全て消えるとすると δ の定義を修正して $\delta\circ\delta=0$ とすることができ、従って Floer (コ)ホモロジー $HF^*(L_0,L_1)$ が定義される。

実は障害類の構成，δ の定義は倉西構造での多価摂動の取り方にも依存している。そのため上の定理に現れる $o_k(L_i)$ や $HF^*(L_0,L_1)$ がこのような付加情報に如何に依存するかをはっきりさせる必要がある。ここでは詳しく述べる余裕はないが、そのために Lagrange 部分多様体に付随したフィルター付 A_∞-代数を考える。これ自体も付加情報に依るが次が分かる。

<u>定理</u>　弱スピン構造が与えられた閉 Lagrange 部分多様体 L に対しフィルター付 A_∞-代数 $(BC(L)[-1]\otimes\Lambda_0,\hat{d})$ のホモトピー同値類が定まる。

このフィルター付 A_∞-代数は擬正則円盤の効果を忘れると、鎖の交叉を基に作られる A_∞-代数となる。鎖の交叉は横断的になるとは限らない（例えば自分自身との交叉）ので、摂動して交叉を取ることを考えると、この演算は結合的ではなくホモトピー結合的になる。擬正則円盤の bubble が実余次元 1 で起こる為，議論をホモロジーの枠で行なうことができず、ホモロジーを取る前の鎖を扱うことが避けられない。これが周期的 Hamilton 系の Floer ホモロジーや Gromov-Witten 不変量の議論と異なる点である。（実は鎖としても全ての鎖を扱うのではなく適当な可算個の鎖を取って議論しなければならずかなり面倒な事になる。）

Lagrange 部分多様体 L の障害類が全て消える事は $(BC[1]\otimes\Lambda_0,\hat{d})$ の言葉では $b\in C[1]$ で　$\hat{d}(e^b)=0$　を満たすものが存在することと同値になる。（ここで $e^b=1+b+b\otimes b+b\otimes b\otimes b+\cdots\in BC[1]$）このような b を L と共に考えて (L,b) の（形式的）モジュライを考察することはミラー対称性等とも関係して重要である。また一般の弱スピン構造の与えられた Lagrange 部分多様体の対に対しては $(BC(L_0)[-1]\otimes\Lambda_0,\hat{d})$, $(BC(L_1)[-1]\otimes\Lambda_0,\hat{d})$ が両側から作用するフィルター付 A_∞-加群が対応する。詳しくは [FOOO] 等を参照されたい。Lagrange 部分多様体を基に作られる深谷カテゴリーは重要なものであるが、ここでは紙面の都合もあり述べないことにする。

注　周期的ハミルトン系は完全微分同相写像を決める。従ってそのグラフを考えることで Lagrange 部分多様体が得られる。このように (2) は (1) を含む。（このとき障害類は全て消えることが判る。）

4　Floer ホモロジーの応用例

◦ Hamilton 系の周期解の存在問題

$\mathcal{A}_H$ の臨界点を探す為に Floer ホモロジーを応用することは自然であろう。シンプレクティック容量の Ekeland-Hofer，Hofer-Zehnder による構成を Floer ホモロジーの枠組で理解する事は Floer-Hofer（及び共同研究者）のシンプレクティック・ホモロジーという理論へとつながった。これを用いて周期解の存在やそれに基づく応用が色々とある。擬正則曲線を用いた周期解の存在の機構は Floer, Hofer, Viterbo により 1980年代末に認識された。Hofer による 3次元過旋接触多様体に対する Weinstein 予想（Reeb ベクトル場の閉軌道の存在）の証明もその延長上にある。他にも Schwarz による Hamilton 系或いは完全微分同相写像の作用スペクトルの仕事等がある。

◦ 既に述べた様に完全微分同相写像の不動点に関する Arnold 予想はホモロジーレベルでは証明されている（退化した不動点を持つ場合には未だ結着には程遠い）。Lagrange 部分多様体に対しても次の問題がある。

<u>問題</u>　$L \subset (X, \omega)$ を閉 Lagrange 部分多様体，$\varphi: X \to X$ を完全微分同相写像とする．然るべき条件の下で $L \cap \varphi(L)$ を L のトポロジーを用いて下から評価せよ。

注）何の条件も課さなければ、$L \cap \varphi(L) = \phi$ とできる。

• $X = T^*M$（M 閉多様体），$L =$ 零切断の時は Laudenbach-Sikorav による母関数の安定 Morse 理論や，Hofer の仕事により Arnold 予想の類似が成り立つ。

• Floer は $\pi_2(X, L) = 0$ の時に Floer ホモロジーを用いて、$\mathbb{Z}_2$ 係数ホモロジーの階数による評価（非退化のとき），カップ積長による評価（一般）を証明した。

L に条件を課す方向では次の Arnold-Givental 予想がある。

<u>予想</u>　(X, ω) を閉シンプレクティック多様体，$\tau: X \to X$ を $\tau^*\omega = -\omega$ を満たす対合とする。$L = \mathrm{Fix}(\tau)$ に対し、Arnold 予想の類似が成り立つ．たとえば $L \pitchfork \varphi(L)$ ならば　$\#(L \cap \varphi(L)) \geq \sum_p b_p(L; \mathbb{Z}/2)$ が成り立つ。

この予想についてはエルミート対称空間とその実形の場合に Oh，単調性の仮定の下に Fukaya-Oh-Ohta-Ono の仕事がある。

L ではなく φ に条件をつける方向では Chekanov の仕事がある。まず $\mathrm{Ham}(X, \omega)$ の Hofer 距離を次で定める。$H.\ M \times [0,1] \to \mathbb{R}$ に対し，

$\|H\| := \int_0^1 \{\max_x H(x,t) - \min_x H(x,t)\}\, dt$ と定め．$\varphi \in \mathrm{Ham}(X, \omega)$ に対し

$$\rho(id, \varphi) := \inf\{\|H\| \mid \varphi \text{ は } X_H \text{ の生成する流れの時刻 } 1 \text{ 写像}\}$$

と定義すると ρ は $\mathrm{Ham}(X, \omega)$ 上の両側不変距離となる。これを Hofer 距離という。Hofer 距離が非退化である事は Hofer, Lalonde-Sikorav により示されている。次の Chekanov の定理からも非退化性が従う。更に1つの Lagrange 部分多様体と完全微分同相により写りあうもの全体の空間にも Hofer 型距離が入る事も系として得られる。

定理　X 内の $\mathbb{CP}^1$ からの擬正則曲線，L に境界を持つ擬正則円盤のシンプレクティック面積の最小値を a_L とする。φ の id からの Hofer 距離が $\rho(id, \varphi) \leqq a_L$ を満たすとする。$L \pitchfork \varphi(L)$ であれば　$\# L \cap \varphi(L) \geqq \sum_p b_p(L; \mathbb{Z}/2)$ が成り立つ。

- Kollar 予想に関する Viterbo の仕事

最後に Floer ホモロジーの実代数幾何への応用を紹介したい。

X を $\mathbb{R}$ 上で定義された非特異射影多様体とする．$X(\mathbb{R})$ でその実部を表す．$X(\mathbb{R})$ の複雑さが X の複雑さとどう関係するかという問題意識がある。X が 2 次元の時に次が知られている。

(Comessatti) X を有理曲面，$X(\mathbb{R})$ 向き付け可能とすると．$X(\mathbb{R})$ は 2 次元球面又はトーラスである．

3 次元以上の場合に Kollar は次の予想をした。

予想　X を 3 次元以上の単線織 (uniruled) 多様体とすると．$X(\mathbb{R})$ の各連結成分は双曲的にならない。

Viterbo は $X(\mathbb{R})$ を X の Lagrange 部分多様体として考え，その管状近傍上に $X(\mathbb{R})$ の測地流を定める Hamilton 系を取り，それを外に適当に拡張し，この Hamilton 系の Floer ホモロジーを考察した。測地流の閉軌道即ち閉測地線の Morse 指数は，負曲率多様体に対しては 0 である．Morse 指数と Conley-Zehnder 指数の関係や有理曲線の存在とその Floer ホモロジーとの関係等をうまく用いて次を示した。

定理　上の予想は，$H_2(X; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，$X$ が $H_2(X; \mathbb{Z})$ の生成元を代表する有理曲線で覆われる の 2 条件の下では正しい。

後に Eliashberg-Givental-Hofer の symplectic field theory の枠組からも Viterbo の定理の証明が与えられた。

Floer ホモロジー理論の全貌を概観するには未だ足りないものも多くあるが，ここで終りとしたい。

References.

[A] V. I. Arnold, First steps in symplectic topology, Russ. Math. Surveys, 41(1986) 1-21.

[Chap] M. Chaperon, Une idée du type géodesiques brisées, Comptes Rendues, Paris, 298(1984) 293-296.

[Chek] Y. Chekanov, Hofer's symplectic energy and lagrangian intersections, In: "Contact and Symplectic Geometry" Edited by C. B. Thomas, Cambridge University Press, 1996. Lagrangian intersections, symplectic energy and areas of holomorphic curves, . Duke Math. J. 95 (1998) 213–226.

[C-Z] C. Conley and E. Zehnder, The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V. I. Arnold, Invent. Math., 73(1983) 33-49, Morse type index theory for flows and periodic solutions for Hamiltonian systems, Comm. Pure Appl. Math., 37(1984) 207-253.

[E-G-H] Y. Eliashberg, A. Givental, and H. Hofer, Introduction to symplectic field theory, Geom. Funct. Anal. 2000, Special Volume, Part II, 560–673.

[E-H-S] Y. Eliashberg, H. Hofer and D. Salamon, Lagrangian intersection in contact geometry, Geom. Funct. Anal. 5(1995) 244-269.

[F] A. Floer, Morse theory for lagrangian intersections, Journ. Differ. Geom. 28(1988) 513-547, The unregularized gradient flow of the symplectic action, Comm. Pure Appl. Math. 41(1988) 775-813, A relative Morse index for the symplectic action, Comm. Pure Appl. Math. 41(1988) 393-407, Witten's complex and infinite dimensional Morse theory, Journ. Differential Geom. 30(1989) 207-221, Cup length estimate on lagrangian intersections, Comm. Pure Appl. Math. 42(1989) 335-357.

[F2] A. Floer, Holomorphic spheres and symplectic fixed points, Comm. Math. Phys. 120(1989) 575-611.

[F-H] Floer, A.; Hofer, H. Symplectic homology. I. Open sets in C^n. Math. Z. 215 (1994) 37–88. Cieliebak, K.; Floer, A.; Hofer, H. Symplectic homology. II. A general construction. Math. Z. 218 (1995) 103–122.

[F-H-S] A. Floer, H. Hofer and D. Salamon, Transversality in elliptic Morse theory for the symplectic action, Duke Math. Journ. 80(1995) 251-292.

[F-Oh] K. Fukaya and Y. G. Oh, Zero-loop open strings in the cotangent bundle and Morse homotopy. Asian J. Math. 1 (1997) 96–180.

[Fu] K. Fukaya, Morse homotopy, A^∞-category, and Floer homologies. Proceedings of GARC Workshop on Geometry and Topology '93 (Seoul, 1993), 1–102, Lecture Notes Ser., 18, Seoul Nat. Univ., Seoul, 1993. The sym-

plectic s-cobordism conjecture: a summary. Geometry and physics (Aarhus, 1995), 209–219, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 184, Dekker, New York, 1997.
[F-O] K. Fukaya and K. Ono, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant for general symplectic manifolds, Fields Institute Communications, Amer. Math. Soc. 1999, Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant, Topology **38**(1999), 933-1048.
[FOOO] K. Fukaya, Y.-G. Oh, H. Ohta and K. Ono, Lagrangian intersection Floer thoery -obstruction and anomaly-, preprint, December 2000.
[Giv] A. Givental, Nonlinear generalization of the Maslov index, In: Theory of singularities and its applications, Edited by V. Arnold, 71-103, Adv. Soviet Math. 1, Amer. Mah. Soc. 1990.
[Gr] M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. 82(1985) 307-347.
[H1] H. Hofer, Lagrangian embeddings and critical point theory, Ann. Inst. H. Poincaré, Anál. Non Linéaire 2(1985) 407-462, Lusternik-Schnirelmann theory for Lagrangian intersections, ibid. 5(1988) 465-499.
[H2] H. Hofer, Pseudoholomorphic curves in symplectization with application to Weinstein conjecture in dimension three, Invent. Math. 114(1993) 515-563.
[H-S] H. Hofer and D. Salamon, Floer homology and Novikov rings, The Floer memorial volume, Edited by H. Hofer, C. Taubes, A. Weinstein and E. Zehnder, 483-524, Progr. Math. 133 Birkhäuser 1995.
[H-Z] H. Hofer and E. Zehnder, Symplectic Invariants and Hamiltonian Dynamics, Birkhäuser, 1994.
[K] M. Kontsevich, Enumeration of rational curves by torus action, In: Moduli space of curves, Edited by H. Dijkgraaf, C. Faber, G. v. d. Geer, 335-368, Progr. Math. 129 Birkhäuser 1995.
[L-S] F. Laudenbach and J.-C. Sikorav, Persistence d'intersection avec la section nulle au cours d'une isotopie hamiltonienne dans un fibré cotangent,Invent. Math., 82 (1985), 349-358.
[L-O] H. V. Lê and K. Ono, Symplectic fixed points, the Calabi invariant and Novikov homology, Topology 34 (1995), 155-176.
[L-O2] H. V. Lê and K. Ono, Cup-length estimate for symplectic fixed points, In: Contact and Symplectic Geometry, 268-295, Edited by C. B. Thomas, Publication of the Newton Institute, Cambridge Univ. Press, 1996.

[Liu-T] G. Liu and G. Tian, Floer homology and Arnold conjecture, J. Diff. Geom. **49**(1998), 1-74.
[Oh] Y. G. Oh, Floer cohomology of Lagrangian intersections and pseudo-holomorphic disks, I, Comm. Pure Appl. Math. 46(1993) 949-994, II ibid. 46(1993) 995-1012, III In :Floer Memorial Volume, Birkhäuser 1995.
[Oh2] Y. G. Oh, Floer cohomology, spectral sequences and the Maslov class of Lagrangian embeddings, Intern. Math. Res. Notices 7(1996) 305-346.
[Oh3] Y. G. Oh, Relative Floer and quantum cohomology and the symplectic topology of Lagrangian submanifolds, In: Contact and Symplectic Geometry, Edited by C. B. Thomas, 201-267, Cambridge Univ. Press 1996.
[O1] K. Ono, On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds, Invent. Math. 119(1995) 519-537.
[O2] K. Ono, Lagrangian intersection under legendrian deformations, Duke Math. Journ. 85(1996) 209-225.
[Pol] L. Polterovich, Monotone Lagrangian submanifolds of linear spaces and the Maslov class in cotangent bundles, Math. Z. 207(1991) 217-222.
[Sa] D. Salamon, Morse thoery, the Conley index and Floer homology, Bull London Math. Soc. 22(1990) 113-140.
[S-Z] D. Salamon and E. Zehnder, Morse theory for periodic solutions of Hamiltonian systems and the Maslov index, Comm. Pure Appl. Math., 45(1992) 1303-1360.
[Sch] M. Schwarz, Quantum cup-length estimate for symplectic fixed points, Invent. Math. 118(1998) 353-397.
[Sch2] M. Schwarz, On the action spectrum for closed symplectically aspherical manifolds. Pacific J. Math. 193 (2000) 419–461.

This is still far from a complete list of papers related to symplectic Floer theory.

Coxeter groups and their boundaries

保坂 哲也 (宇都宮大学教育学部)

1. 序

本稿では，無限 Coxeter 群とその「境界」と呼ばれる空間に関する rigidity の諸問題と最近の研究成果について紹介する．

まず，Coxeter 群と Coxeter 系の定義を与える．

Definition 1.1. 有限集合 S と写像 $m : S \times S \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ で次の条件をみたすものを考える．

(1) すべての $s, t \in S$ について $m(s,t) = m(t,s)$,
(2) すべての $s \in S$ について $m(s,s) = 1$,
(3) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $m(s,t) \geq 2$.

このような S と m によって

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in S \,\rangle$$

と表現される群 W を **Coxeter 群**とよび，(W,S) の組を **Coxeter 系**と呼ぶ．また，更に条件

(4) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $m(s,t) = 2$ or ∞

をみたすとき，(W,S) を **righ-angled Coxeter 系**とよぶ．

Coxeter 系に対して parabolic 部分群とよばれる部分群が定義される．

Definition 1.2. Coxeter 系 (W,S) と S の部分集合 T に対して，W_T を T によって生成される W の部分群とする．このような W_T を **parabolic 部分群**とよぶ．

Remark. Coxeter 系 (W,S) と S の部分集合 T に対して，上述の定義どおり Coxeter 群 W が

$$W = \langle\, S \mid (st)^{m(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in S \,\rangle$$

と表現されているとき，parabolic 部分群 W_T は

$$W_T = \langle\, T \mid (st)^{m|_{T\times T}(s,t)} = 1 \text{ for } s,t \in T \,\rangle$$

と表現できることが知られている ([Bo])．従って，(W_T, T) は再び Coxeter 系となる．

Coxeter 系を視覚的に捕らえるため，Coxeter diagram を定義する．

Definition 1.3. 有限の頂点をもち，ループをもたず，二つの頂点を結ぶ edge は高々一つである重みつきグラフ Γ で，各 edge に対応する数字は 2 以上の整数であるとき，Γ を **Coxeter diagram** とよぶ．

Coxeter 系 (W,S) に対して，Coxeter diagram $\Gamma(W,S)$ を次の方法で一意的に定めることができる:

(1) $\Gamma(W,S)$ の vertex set を S とする．
(2) $s,t \in S$ に対して，$m(s,t) < \infty$ のときに限り s と t は edge で結ばれているとする．
(3) $s,t \in S$ に対して，s と t が edge で結ばれているとき，この edge に対して整数 $m(s,t)$ を対応させる．

逆の方法により，Coxeter diagram に対して Coxeter 系が定義される．このように Coxeter 系と Coxeter diagram は対応がつく．

直接扱うことが困難な無限 Coxeter 群に対して，近年，幾何的なものを対応させて性質を調べることが活発に行われている．Coxeter 系から simplicial complex $L(W,S)$ と CAT(0) 空間 $\Sigma(W,S)$ を定義する．

Definition 1.4. Coxeter 系 (W,S) に対して，simplicial complex $L(W,S)$ を次で定義する:

(1) $L(W,S)$ の vertex set を S とする．
(2) S の空でない部分集合 T は，W_T が有限のときに限り $L(W,S)$ の simplex を張るとする．

Definition 1.5. (W,S) を Coxeter 系とする．このとき，離散位相を入れた W と $L(W,S)$ の cone $CL(W,S)$ の基底空間 $|CL(W,S)|$ の積 $W \times |CL(W,S)|$ 上の同値関係 $\sim$ を次で定める: $(w_1,x_1),(w_2,x_2) \in W \times |CL(W,S)|$ について

$$(w_1,x_1) \sim (w_2,x_2) \iff x_1 = x_2 \text{ and } w_1^{-1}w_2 \in W_{V(x_1)},$$

ただし $V(x) = \{s \in S \mid x \in \mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))\}$．ここで，$\mathrm{St}(s, \mathrm{sd}\, L(W,S))$ は $L(W,S)$ の重心細分 $\mathrm{sd}\, L(W,S)$ における s の closed star をあらわす．このとき，

$$\Sigma(W,S) := (W \times |CL(W,S)|)/\sim$$

と定義する．$\Sigma(W,S)$ は contractible となり ([D1])，1-skeleton が W の S に関する Cayley graph となるような CW-complex とみなすことができる ([D2]) ことが知られている．このとき，自然な距離に関して $\Sigma(W,S)$ は CAT(0) 空間となることが G.Moussong によって示されている ([M])．

一般に CAT(0) 空間は境界と呼ばれる空間を付け加えることによりコンパクト化される．

Definition 1.6. CAT(0) 空間 X に対して，X の境界 ∂X を

$$\partial X = \{\xi : [0, \infty) \to X \text{ geodesic ray} \mid \xi(0) = x_0\}$$

と定義する．ただし $x_0 \in X$ である．実際には ∂X は x_0 の取り方によらないことが知られている ([BH]).

Coxeter 系の「境界」は次で定義される.

Definition 1.7. Coxeter 系 (W, S) から定義される CAT(0) 空間 $\Sigma(W, S)$ の境界 $\partial\Sigma(W, S)$ を **Coxeter 系** (W, S) **の境界** とよぶ.

本研究では，Coxeter 群 W の代数的な性質とこの境界 $\partial\Sigma(W, S)$ の幾何的な性質を調べることを目的としている.

2. Coxeter 群とその境界の rigidity

一般に Coxeter 群によって Coxeter 系は決定されないことが知られている.

Example 1 ([Bo, p.38 Exercise 8]). 以下の Figure 1 の diagram で定義される二つの Coxeter 群は同型となる.

Figure 1. Two distinct Coxeter diagrams for D_6

Example 2 ([Mu]). 以下の Figure 2 の diagram で定義される二つの Coxeter 群は同型となることが，B.Mühlherr([Mu]) によって示されている.

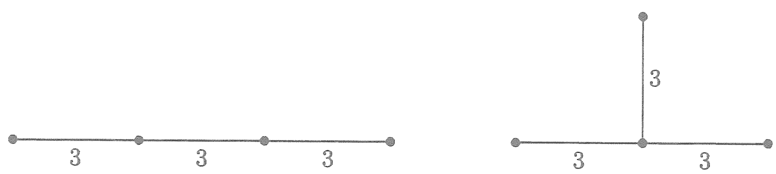


Figure 2. Coxeter diagrams for isomorphic Coxeter groups

有限な Coxeter 群については [Bo] にみられるように，完全に分類が与えられるなど，ある程度のことがわかっているのだが，無限な場合についてはまだほとんど分かっていない状況にある．Coxeter 群の代数的な rigidity の問題として次の問題がある．

Problem (Charny and Davis [CD]). 無限 Coxeter 群を Coxeter 系を用いて分類せよ．特に，どのような条件下で Coxeter 群は Coxeter 系を決定するのか?

また，Coxeter 系の境界に関する幾何的な rigidity については，A.N.Dranishnikov による次の予想がある．

Rigidity Conjecture (Dranishnikov [Dr2]). Coxeter 系 (W, S), (W', S') に対して，Coxeter 群 W と W' が同型ならば，境界 $\partial\Sigma(W, S)$ と $\partial\Sigma(W', S')$ は同相となるであろう．

これらの rigidity の問題について，特に Coxeter 系が right-angled な場合に関しては，D.Radclife と独立に，Tits の代数的な結果 (cf. [Br2, p.50]) を用いて次の定理を得ている．

Theorem 2.1 ([H3]). *Coxeter 系 (W, S), (W', S') について，Coxeter 群 W と W' が同型で (W, S) が right-angled ならば，(W, S) と (W', S') は Coxeter 系として同型となる．特に，境界 $\partial\Sigma(W, S)$ と $\partial\Sigma(W', S')$ は同相となる．*

これは，Dranishnikov の rigidity conjecture が，right-angled の場合には正しいことを示している．

Coxeter 群の代数的な rigidity に関連して，次の定理が示されている．この定理は A.Kaul の結果 ([K]) の拡張として与えられた．

Theorem 2.2 (Brady, McCammond, Mühlherr and Neumann [BMMN]). *Coxeter 系 (W, S), (W', S') について，Coxeter 群 W と W' が同型で，相異なるすべての $s, t \in S$ について order $o(st)$ が奇数か無限のとき，次が成り立つ:*

(1) $|S| = |S'|$,

(2) 元の個数も含めて $\{o(st) : s, t \in S\} = \{o(s't') : s', t' \in S'\}$.

この定理の一般化として，$\dim \Sigma(W, S) = 2$ の場合について，次の定理を得た．

Theorem 2.3 ([H4]). *Coxeter 系 (W, S), (W', S') について，Coxeter 群 W と W' が同型で $\dim \Sigma(W, S) = \dim \Sigma(W', S') = 2$ のとき，次が成り立つ:*

(1) $|S| = |S'|$,

(2) 元の個数も含めて $\{o(st) : s, t \in S\} = \{o(s't') : s', t' \in S'\}$.

Remark. 定義から

$$\dim \Sigma(W, S) = \max\{|T| : W_T \text{ が有限となる } T \subset S\}$$

であるから，例えば，次のいずれかを満たす場合は $\dim \Sigma(W, S) = 2$ となる．

(1) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $o(st)$ が奇数か無限のとき.
(2) 相異なるすべての $s, t \in S$ について $o(st) \geq 3$ のとき.
(3) (W, S) の Coxeter diagram が tree のとき.

従って，この (1) のケースから，Theorem 2.3 は Theorem 2.2 の拡張となっていることがわかる.

3. Coxeter 群の strong rigidity と strong reflection rigidity

Coxeter 群の分類に関する問題に対して，strong rigidity と strong reflection rigidity という概念が導入される.

Definition 3.1. W を Coxeter 群とする. W の任意の Coxeter 系 (W, S), (W, S') に対して，ある $w \in W$ を用いて $S = wS'w^{-1}$ と書けるとき，W を **strongly rigid** であるという.

一般に，(W, S) が Coxeter 系ならば，(W, wSw^{-1}) も Coxeter 系となることが知られている.
Strong rigidity に関しては，次の定理が示されている.

Theorem 3.2 (Charney and Davis [CD]). *Coxeter* 系 (W, S) に対して，$\Sigma(W, S)$ が *manifold* ならば，*Coxeter* 群 W は *strongly rigid* である.

Coxeter 系 (W, S) に対して，wsw^{-1} ($w \in W$, $s \in S$) という形の W の元を **reflection** とよび，reflection 全体の集合を R_S とあらわすことにする.
ここで strongly reflection rigid という概念が定義される.

Definition 3.3. (W, S) を Coxeter 系とする. $R_S = R_{S'}$ となる任意の Coxeter 系 (W, S') に対して，ある $w \in W$ を用いて $S = wS'w^{-1}$ と書けるとき，(W, S) を **strongly reflection rigid** であるという.

この strong rigidity と strong reflection rigidity という概念について，dihedral Coxeter 群に関しては，完全に分類することに成功している.

Theorem 3.4 ([H5]). $S = \{s, t\}$ とおき，*dihedral Coxeter* 群

$$D_m = \langle\, S \mid s^2 = t^2 = (st)^m = (ts)^m = 1 \,\rangle$$

(ただし $m \geq 2$) を考える. このとき次が成り立つ.

(1) *Coxeter* 系 (D_m, S) が *strongly reflection rigid* となる必要十分条件は $m \in \{2, 3, 4, 6\}$ である.
(2) *Dihedral Coxeter* 群 D_m が *strongly rigid* となる必要十分条件は $m \in \{3, 4\}$ である.

Example 1 で与えられた例では，二つの Coxeter 系の reflection の集合 R_S は異なるが，Example 2 の場合には一致する．また，Example 2 の二つの Coxeter 系は，diagram twisting という操作で移りあえる．

ここで次の予想がある．

Conjecture (Brady, McCammond, Mühlherr and Neumann [BMMN]). Coxeter 系 (W,S), (W,S') に対して，$R_S = R_{S'}$ ならば，(W,S) と (W,S') は diagram twisting で移りあえるであろう．

この予想が部分的には正しいことを示す次の定理が，最近，証明されている．

Theorem 3.5 (Mühlherr and Weidmann [MW]). *(W,S), (W,S') を Coxeter 系とする．相異なるすべての $s,t \in S$ について $o(st) \geq 3$ のとき，$R_S = R_{S'}$ ならば，(W,S) と (W,S') は diagram twisting で移りあえる．*

今後の課題として，Theorem 2.3 との関連から，Theorem 3.5 の拡張として次の問題が提起される．

Problem. (W,S), (W,S') を Coxeter 系とする．$\dim\Sigma(W,S) = \dim\Sigma(W,S') = 2$ のとき，$R_S = R_{S'}$ ならば，(W,S) と (W,S') は diagram twisting で移りあえるか?

References

[B1] M.Bestvina, *The virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Geometric Group Theory Vol. 1, LMS Lecture Notes, vol. 181, 1993, pp. 19–23.

[B2] M.Bestvina, *Local homology properties of boundaries of groups*, Michigan Math. J. **43** (1996), 123–139.

[BM] M.Bestvina and G.Mess, *The boundary of negatively curved groups*, Jour. of Amer. Math. Soc. **4 (no. 3)** (1991), 469–481.

[Bo] N.Bourbaki, *Groupes et Algebrès de Lie*, Chapters IV-VI, Masson, Paris, 1981.

[BMMN] N.Brady, J.P.McCammond, B.Mühlherr and W.D.Neumann, *Rigidity of Coxeter groups and Artin groups*, Geom. Dedicata **94** (2002), 91–109.

[BH] M.R.Bridson and A.Haefliger, *Metric spaces of non-positive curvature*, Grundl. Math. Wiss., Vol. 319, Springer, Berlin, 1999.

[Br1] K.S.Brown, *Cohomology of groups*, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1982.

[Br2] K.S.Brown, *Buildings*, Springer-Verlag, 1980,

[CD] R.Charney and M.W.Davis, *When is a Coxeter system determined by its Coxeter group?* J. London Math. Soc. **61 (no.2)** (2000), 441–461.

[D1] M.W.Davis, *Groups generated by reflections and aspherical manifolds not covered by Euclidean space*, Ann. of Math. **117** (1983), 293–324.

[D2] M.W.Davis, *Nonpositive curvature and reflection groups*, in Handbook of geometric topology (Edited by R.J.Daverman and R.B.Sher), North-Holland, Amsterdam, 2002, pp.373–422.

[D3] M.W.Davis, *The cohomology of a Coxeter group with group ring coefficients*, Duke Math. J. **91 (no.2)** (1998), 297–314.

[Dr1] A.N.Dranishnikov, *On the virtual cohomological dimensions of Coxeter groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **125 (no.7)** (1997), 1885–1891.

[Dr2] A.N.Dranishnikov, *On boundaries of hyperbolic Coxeter groups*, Topology Appl. **110 (no.1)** (2001), 29–38.

[Dy] M.Dyer, *Reflection subgroups of Coxeter systems*, J. Algebra **135 (no.1)** (1990), 57–73.

[H1] T.Hosaka, *On the cohomology of Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **162** (2001), 291–301.

[H2] T.Hosaka, *Parabolic subgroups of finite index in Coxeter groups*, J. Pure Appl. Algebra **169** (2002), 215–227.

[H3] T.Hosaka, *Determination up to isomorphism of right-angled Coxeter systems*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **79** (2003), 33–35.

[H4] T.Hosaka, *Coxeter systems with two-dimensional Davis-Vinberg complexes*, preprint, 2002.

[H5] T.Hosaka, *Strong reflection rigidity of Coxeter systems of dihedral groups*, preprint, 2003.

[HY] T.Hosaka and K.Yokoi, *The boundary and the virtual cohomological dimension of Coxeter groups*, Houston J. Math. **26 (no.4)** (2000), 791–805.

[Hu] J.E.Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*, Cambridge University Press, 1990.

[K] A.Kaul, *Rigidity for a class of Coxeter groups*, J. London Math. Soc. (2) **66 (no.3)** (2002), 592–604.

[M] G.Moussong, *Hyperbolic Coxeter groups*, Ph.D. thesis, The Ohio State University, 1988.

[Mu] B.Mühlherr, *On isomorphisms between Coxeter groups*, to appear in Designs, Codes and Cryptography.

[MW] B.Mühlherr and R.Weidmann, *Rigidity of skew-angled Coxeter groups*, Adv. Geom. **2** (2002), 391–415.

Department of Mathematics, Utsunomiya University, Utsunomiya, 321-8505, Japan

E-mail address: `hosaka@cc.utsunomiya-u.ac.jp`

ルジャンドル特異点と微分幾何学

泉屋　周一　（北海道大学大学院理学研究科）

平成15年6月9日

1　序

微分幾何学の歴史を眺めてみると、ガウス以降はリーマンの登場とそれに繋がる内在的性質の研究が中心となるが、「驚異の定理」以前の素朴な部分はガウス自身の研究においても、曲面の埋め込み方、すなわち法線ベクトル場の性質による外在的[1]な微分幾何学である。これらは、それ以前のオイラーやラグランジュによる微積分学の整備を基礎としている。実際、関数のグラフの形状を調べるために、極値問題が2次までの情報（ヘッセ行列）をもとに考えられているように、「ガウスの微分幾何学（曲面論）」においても、高さ関数の2次までの情報（ガウス曲率や主曲率、Dupin 標形）を用いて曲面の局所的な形状の研究が行われている。平面曲線の局所的性質がより高次の状況まで把握されているのに比較して曲面が2次までの形状しか研究されていなかったのは、多変数の微積分学の限界によるものであった。この事情は２０世紀後半になり一変する。それは、その頃からトム、マザー、アーノルドなどにより関数の特異点論の研究が爆発的に進展したことによる。微積分学を関数の特異点の研究の初期段階であるとやや強引に規定すると、いわゆるトムの基本カタストロフ理論（関数の開折理論）はその自然な一般化であると言える。それ以降、トムの理論の微分幾何学への応用が（主として、英国やロシアの特異点論研究者によって）精力的に推し進められてきた。この流れの研究を「ガウスの微分幾何学」に対して「トムの微分幾何学」と呼ぶ（呼びたい）。「ガウスの微分幾何学」が単独の高さ関数の安定特異点（モース型特異点）の情報を用いるのに対して、「トムの微分幾何学」は高さ関数族の安定特異点の情報を用いる分だけより詳しい幾何学的情報が得られる。このように、関数から関数族へと関数概念のある意味での一般化がより詳しい幾何学的情報を得るために有効なのである。筆者はここ6年ほど、（アファイン微分幾何学、ローレンツ微分幾何学、双曲微分幾何学等の）様々な構造の微分幾何学へトムのアイデアを適用することを試みてきた。その結果、関数族の概念の幾何学的一般化であるルジャンドル特異点の情報により、さらに詳しい幾何学的情報を得るいくつかの確証が得られた。ここでは、そのようなルジャンドル特異点論の応用による微分幾何学を「ルジャンドル微分幾何学」[2]と呼びたい。本講演では、ルジャンドル微分幾何学が有効ないくつかの例として、ミンコフスキー空間内の擬球面幾何学上の部分多様体論について、最近までに得られた結果と今後の研究の方針について述べる。

---

[1](a) もちろん現代でも平均曲率の研究は部分多様体論における主要な研究課題である。(b)「露骨な微分幾何学」とも呼ぶ。講演者にとって「露骨な微分幾何学」の方が好みである（性格にあっている？）。

[2]ルジャンドル微分幾何と言うと「ルジャンドル構造」なるものがあってその幾何学のことであろうと誤解される恐れがある。その方が通常の考え方であろうが？

2 ミンコフスキー空間に関する復習

最初にミンコフスキー空間における諸概念の復習をする。$\mathbb{R}^{n+1} = \{(x_0, x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\ (i = 0, 1, \ldots, n)\ \}$ を $(n+1)$ 次元ベクトル空間として、その上の疑内積を任意のベクトル $\boldsymbol{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, に対して $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \rangle = -x_0 y_0 + \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$ と定める。対 $(\mathbb{R}^{n+1}, \langle , \rangle)$ を $(n+1)$ 次元ミンコフスキー空間と呼び、$\mathbb{R}_1^{n+1}$ と表す。零でないベクトル $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ が空間的とは $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle > 0$ を満たすこと、光的とは $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0$ を満たすこと、時間的とは $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle < 0$ を満たすことである。ベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ と実数 c に対して疑法線ベクトル $\boldsymbol{v}$ を持つ超平面は $HP(\boldsymbol{v}, c) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} \mid \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{v} \rangle = c\ \}$ で与えられる。このとき、$HP(\boldsymbol{v}, c)$ がそれぞれ空間的超平面、時間的超平面、光的超平面であるとは対応する疑法線ベクトル $\boldsymbol{v}$ がそれぞれ時間的、空間的、光的であることと定める。一般にベクトル $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ のノルムを $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{|\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle|}$ とする。

ミンコフスキー空間内には以下の 3 種類の疑超球が考えられる：$H^n(-1) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = -1\}$ を n 次元双曲空間と呼び、$S_1^n = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}_1^{n+1} | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 1\ \}$ を n 次元ド・シッター空間と呼ぶ。さらに、（開）光錐とは $LC^* = \{\boldsymbol{x}\ | \langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle = 0,\ \boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{0}\ \}$ のことである。

ここで、以下の構成は計算上重要である：任意の n 個のベクトル $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n \in \mathbb{R}_1^{n+1}$ に対して、ベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n$ を

$$\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n = \begin{vmatrix} -\boldsymbol{e}_0 & \boldsymbol{e}_1 & \cdots & \boldsymbol{e}_n \\ x_0^1 & x_1^1 & \cdots & x_n^1 \\ x_0^2 & x_1^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_0^n & x_1^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

と定める、ただし $\boldsymbol{e}_0, \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ は $\mathbb{R}_1^{n+1}$ の標準基底として $\boldsymbol{x}_i = (x_0^i, x_1^i, \ldots, x_n^i)$ とする。このとき、定義から $\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n \rangle = \det(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n)$, であり、したがってベクトル $\boldsymbol{x}_1 \wedge \boldsymbol{x}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_n$ は $\boldsymbol{x}_i\ (i = 1, \ldots, n)$ に疑直交する。

3 双曲空間内の超曲面の微分幾何学

最初に、双曲空間 $H^n(-1)$ 内の超曲面[3]に関する「ガウスの微分幾何学」及び「トムの微分幾何学」について解説する [5, 6, 7]。開集合 $U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ に対して、埋め込み $\boldsymbol{x} : U \longrightarrow H_+^n(-1)$ を考える。この時、$M = \boldsymbol{x}(U)$ と表し、M と U を埋め込み写像 $\boldsymbol{x}$ を通して同一視する。$\langle \boldsymbol{x}, \boldsymbol{x} \rangle \equiv -1$ なので $u = (u_1, \ldots u_{n-1}) \in U$ に対して、$\langle \boldsymbol{x}_{u_i}, \boldsymbol{x} \rangle \equiv 0 \quad (i = 1, \ldots, n-1)$ となる。そこで、ベクトル

$$\boldsymbol{e}(u) = \frac{\boldsymbol{x}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{u_{n-1}}(u)}{\|\boldsymbol{x}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{u_{n-1}}(u)\|},$$

を考えると $\langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x}_{u_i} \rangle \equiv \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{x} \rangle \equiv 0, \quad \langle \boldsymbol{e}, \boldsymbol{e} \rangle \equiv 1.$ と言う性質をもつ。さらに、$\boldsymbol{x} \pm \boldsymbol{e}$ は光的ベクトルとなる。ここで、写像 $\mathbb{L}^{\pm} : U \longrightarrow LC^*$ を $\mathbb{L}^{\pm}(u) = \boldsymbol{x}(u) \pm \boldsymbol{e}(u)$ で定め $\boldsymbol{x}(U) = M$ の光錐的ガウ

[3]余次元が高い場合の研究については [8, 9, 10, 11, 12] 参照。

ス標形[4]と呼ぶ。また、写像 $\mathbb{E}: U \longrightarrow S^n_1$ を $\mathbb{E}(u) = \boldsymbol{e}(u)$ と定め $\boldsymbol{x}(U) = M$ のド・シッターガウス標形と呼ぶ。ここで、「ガウスの微分幾何学」の立場とは $\mathbb{L}^{\pm}$ と $\mathbb{E}$ を通常のガウス写像の様に扱い、$\boldsymbol{x}(U) = M$ の曲率等を求めることにある。最初に、$\mathbb{E}_{u_i}(u_0)$ は $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ における $M = \boldsymbol{x}(U)$ の接ベクトルであることが示される。さらに、U と M の同一視によって、$d\boldsymbol{x}(u_0)$ は $T_{p_0}M$ 上の高等写像 $id_{T_{p_0}M}$ と同一視される。従って、$\mathbb{L}^{\pm}, \mathbb{E}$ の $u_0 \in U$ における微分写像 $d\mathbb{L}^{\pm}(u_0)$, $d\mathbb{E}(u_0)$ はそれぞれ、$T_{p_0}M$ 上の線形変換とみなされる。この時、$A_{p_0} = -d\mathbb{E}(u_0): T_{p_0}M \longrightarrow T_{p_0}M$ をド・シッター型作用素と呼び、$S^{\pm}_{p_0} = -d\mathbb{L}^{\pm}(u_0): T_{p_0}M \longrightarrow T_{p_0}M$ を**光錐的型作用素**と呼ぶ。定義から、$S^{\pm}_p = -id_{T_pM} \pm A_p$ が成り立ち、固有方向（主方向）は共通である。また $S^{\pm}_p$ の固有値（光錐的主曲率）を $\bar{\kappa}^{\pm}_p$ A_p の固有値（ド・シッター主曲率）を κ_p で表すと $\bar{\kappa}^{\pm}_p = -1 \pm \kappa_p$ と言う関係がある。さらに、$K^{\pm}_{\ell}(u_0) = \det S^{\pm}_p$ を**光錐的ガウス・クロネッカー曲率**[5]と呼び、$K_d(u_0) = \det A_p$ をド・シッターガウス・クロネッカー曲率と呼ぶ。対応する平均曲率も同様に定義されるが、ここでは述べない。この光錐的曲率は双曲幾何学において自然な曲率であると思われる。実際、3次元双曲空間内のホロ球はユークリッド空間内の平面と似た性質をもつことが知られているが、光錐的曲率からみると光錐的ガウス曲率、光錐的平均曲率双方とも零となるが $H^3(-1)$ 上の内積から誘導されるホロ球面上のリーマン計量から得られる曲率ではガウス曲率が零で平均曲率が1となる。さらに大域的な性質として $K^{\pm}_{\ell}$ に関してガウス・ボンネ型の定理が成り立つ [7]. 点 $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ が**光錐（ホロ球面）的放物点**であるとは $K^{\pm}_{\ell}(u_0) = 0$ を満たすこととし、ド・シッター放物点であるとは $K_d(u_0) = 0$ を満たすこととする。ここで、これらの曲率の幾何学的意味を考えてみる。ユークリッド空間内の超曲面の微分幾何学ではモデルとなる超曲面を考え、それらのモデル超曲面とどれだけ形が近いかを表す量が曲率であった。ユークリッド空間ではモデル超曲面として超平面や超球面を採用する。これらの超曲面は全臍的超曲面であることが知られている。双曲空間内の超曲面では、以下のように4種類の全臍的超曲面が存在する。超曲面がミンコフスキー空間内の超平面と双曲空間との共通部分として得られるとき、それぞれ、対応する超平面が空間的な場合は**超球面**、時間的な場合は原点をとおらない場合**等距離超平面**とくに原点を通る場合は**超平面**、さらに光的な場合は**超ホロ球面**と呼ばれる。点 $u_0 \in U$ または $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ が**臍点**であるとは $S^{\pm}_{p_0} = \bar{\kappa}^{\pm}(p_0) id_{T_{p_0}M}$ が成り立つこととする。さらに、$M = \boldsymbol{x}(U)$ が**全臍的**であるとは M の任意の点が臍的であることとする。このとき、以下が成り立つ：

命題 3.1 $M = \boldsymbol{x}(U)$ を全臍的とする。このとき、光錐的主曲率 $\bar{\kappa}^{\pm}(p)$ は定数 $\bar{\kappa}^{\pm}$ であり、さらに、次の4つの場合が成り立つ：

1) $\bar{\kappa}^{\pm} \neq 0$ と仮定する。

a) もし $\bar{\kappa}^{\pm} \neq -1$ かつ $|\bar{\kappa}^{\pm} + 1| < 1$ ならば M は（超曲面でない）等距離超曲面の一部分である。

b) $\bar{\kappa}^{\pm} \neq -1$ かつ $|\bar{\kappa}^{\pm} + 1| > 1$ ならば M は超球面の一部分である。

c) もし $\bar{\kappa}^{\pm} = -1$ ならば M は超平面の一部分である。

2) もし $\bar{\kappa}^{\pm} = 0$ ならば M は超ホロ球面の一部分である。

また、光的ガウス標形 $\mathbb{L}^{\pm}$ が定値写像のとき、$\boldsymbol{x}(U) = M$ は超ホロ球面の一部分となる。臍点 $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0) \in \boldsymbol{x}(U) = M$ を以下のように分類する。$p_0 = \boldsymbol{x}(u_0) \in \boldsymbol{x}(U) = M$ を臍点とする。

[4] [6] では、双曲的ガウス標形と呼んだ。これはもともと、Epstein[4] の定義した双曲的ガウス写像に対応しているからである。

[5] [6] では双曲的ガウス・クロネッカー曲率と呼んだ。$n = 3$ のとき、H_d で平均曲率を表すと $K^{\pm}_{\ell} = K_d \mp 2H_d + 1$ であり、$K^{\pm}_{\ell}$ に対する「驚異の定理」は成り立たない。

p_0 が $\bar{\kappa}^{\pm}(p_0) \neq 0, 0 < |\bar{\kappa}^{\pm}(p_0)+1| < 1$ を満たすとき等距離超平面的点、$\bar{\kappa}^{\pm} \neq 0, |\bar{\kappa}^{\pm}+1| > 1$ を満たすとき超球面的点、$\bar{\kappa}^{\pm}(p_0) \neq 0, |\bar{\kappa}^{\pm}(p_0)+1| = 0$ を満たすとき（ド・シッター）平坦点さらに $\bar{\kappa}^{\pm}(p_0) = 0$ を満たすとき超ホロ球面的点と呼ぶ。

今 $\boldsymbol{x}_{u_i}$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ は空間的ベクトルなので、M 上にリーマン計量（第一基本量）$ds^2 = \sum_{i=1}^{n-1} g_{ij} du_i du_j$ を $g_{ij}(u) = \langle \boldsymbol{x}_{u_i}(u), \boldsymbol{x}_{u_j}(u) \rangle$ で定める。さらに、光錐的第二基本量を $\bar{h}^{\pm}_{ij}(u) = \langle -\mathbb{L}^{\pm}_{u_i}(u), \boldsymbol{x}_{u_j}(u) \rangle$ によって定義する。さらにド・シッター第二基本量を $h_{ij}(u) = -\langle \boldsymbol{e}_{u_i}(u), \boldsymbol{x}_{u_j}(u) \rangle$ で定義すると関係式 $\bar{h}^{\pm}_{ij}(u) = -g_{ij}(u) \pm h_{ij}(u)$ が得られる。

命題 3.2 以下の公式が成り立つ：

$$K^{\pm}_{\ell} = \frac{\det\left(\bar{h}^{\pm}_{ij}\right)}{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)},\ K_d = \frac{\det\left(h_{ij}\right)}{\det\left(g_{\alpha\beta}\right)}.$$

次に、対応する関数族を考える。超曲面 $\boldsymbol{x} : U \longrightarrow H^n_+(-1)$ に対して、

$$H_\ell : U \times LC^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ H_\ell(u, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{x}(u), \boldsymbol{v} \rangle + 1$$

を光錐（ホロ球面）的高さ関数族と呼ぶ。また、

$$H_d : U \times S^n_1 \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ H_d(u, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{x}(u), \boldsymbol{v} \rangle$$

をド・シッター高さ関数族と呼ぶ。

命題 3.3 以下が成り立つ：

(1) $H_\ell(u, \boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial H_\ell}{\partial u_i}(u, \boldsymbol{v}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ である為の必要十分条件は $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{x}(u) \pm \boldsymbol{e}(u) = \mathbb{L}^{\pm}(u)$ である。

(2) $H_d(u, \boldsymbol{v}) = \dfrac{\partial H_d}{\partial u_i}(u, \boldsymbol{v}) = 0$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ である為の必要十分条件は $\boldsymbol{v} = \pm\boldsymbol{e}(u) = \pm\mathbb{E}(u)$ である。

(3) $\boldsymbol{v}^{\pm}_0 = \mathbb{L}^{\pm}(u_0)$ とすると、

(a) $p = \boldsymbol{x}(u_0)$ が光錐的放物的点であるための必要十分条件は $\det \mathrm{Hess}(h_{\ell, v^{\pm}_0})(u_0) = 0$ である。

(b) $p = \boldsymbol{x}(u_0)$ が超ホロ球面的点である為の必要十分条件は $\mathrm{rank}\, \mathrm{Hess}(h_{\ell, v^{\pm}_0})(u_0) = 0$ である。

(4) $\boldsymbol{v}_0 = \mathbb{E}(u_0)$ とすると、

(a) $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ がド・シッター放物的点であるための必要十分条件は $\det \mathrm{Hess}(h_{d, v_0})(u_0) = 0$ である。

(b) $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ がド・シッター平坦点である為の必要十分条件は $\mathrm{rank}\, \mathrm{Hess}(h_{d, v_0})(u_0) = 0$ である。

ここで、$\mathrm{Hess}(h_{\ell, v_0})(u_0)$、$\mathrm{Hess}(h_{d, v_0})(u_0)$ それぞれの関数芽のヘッセ行列を表す。

これらの事実は、光錐的高さ関数やド・シッター高さ関数に関数族の開折理論（トムの基本カタストロフ理論）を応用すれば、より高次の（微妙な）双曲幾何学的性質を導きだすことが出来る事を示唆している。さらに [6] では以下の事実を示した：

命題 3.4 光錐的高さ関数 $H_\ell : U \times LC^*_0 \longrightarrow \mathbb{R}$ はモース関数族[6]である。

[6]付録参照

こ事実により、光錐的高さ関数の判別集合[6]である光錐的ガウス標形は $PT^*(LC^*_+)$ 内のあるルジャンドル部分多様体の波面集合[6]となることがわかる。ド・シッター高さ関数も同様な性質を持つがここでは述べない。

この事実の応用として、超曲面 $\boldsymbol{x}(U)=M$ と超ホロ球面との接触について研究することができる。一般の部分多様体間の接触に関する研究は Montaldi [15] によって定式化された。X_i, Y_i $(i=1,2)$ を $\mathbb{R}^n$ の部分多様体で $\dim X_1 = \dim X_2$ と $\dim Y_1 = \dim Y_2$ を満たすものとする。このとき X_1 と Y_1 の y_1 における接触が X_2 と Y_2 の y_2 における接触と同じ型であるとは微分同相写像芽 $\Phi : (\mathbb{R}^n, y_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_2)$ で $\Phi(X_1)=X_2$ かつ $\Phi(Y_1)=Y_2$ を満たすものが存在するときである。このとき $K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$. と書く。このとき、以下の定理が成り立つ [15]

定理 3.5 X_i, Y_i $(i=1,2)$ を前記の性質を持った $\mathbb{R}^n$ 内の部分多様体とする。$g_i : (X_i, x_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^n, y_i)$ をはめ込み芽、$f_i : (\mathbb{R}^n, y_i) \longrightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $(Y_i, y_i) = (f_i^{-1}(0), y_i)$ である沈め込み芽とする。このとき、$K(X_1, Y_1; y_1) = K(X_2, Y_2; y_2)$ である為の必要十分条件は $f_1 \circ g_1$ と $f_2 \circ g_2$ が $\mathcal{K}$ 同値[7]であることである。

ここで、関数 $\mathcal{H} : H^n_+(-1) \times LC^*_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ を $\mathcal{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + 1$ で定める。任意の $\boldsymbol{v}_0 \in LC^*_+$ に対して $\mathfrak{h}_{v_0}(\boldsymbol{u}) = \mathcal{H}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}_0)$ とおくと超ホロ球面 $\mathfrak{h}_{v_0}^{-1}(0) = HP(\boldsymbol{v}_0, -1) \cap H^n_+(-1) = HS(\boldsymbol{v}_0, -1)$ を得る。とくに $\boldsymbol{v}_0^{\pm} = \mathbb{L}^{\pm}(u_0)$ とすると超ホロ球面 $\mathfrak{h}_{v_0^{\pm}}^{-1}(0) = HS(\boldsymbol{v}_0^{\pm}, -1)$ は $M = \boldsymbol{x}(U)$ に $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ で接することがわかる。このとき、$HS(\boldsymbol{v}_0^{\pm}, -1)$ を**接超ホロ球面**と呼び $HS^{\pm}(\boldsymbol{x}, u_0)$ と書き表す。ユークリッド空間内の超曲面の接超平面と同様に接超ホロ球面は各点で一意的に存在する。さらに、その接触が退化している点がホロ球面的放物点や超ホロ球面的点である。ルジャンドル特異点論を応用すると超曲面と接超ホロ球面の接触を研究することが可能となる。

$\mathbb{L}_i^{\pm} : (U, u_i) \longrightarrow (LC^*_+, \boldsymbol{v}_i^{\pm})$ $(i=1,2)$ を超曲面芽 $\boldsymbol{x}_i : (U, u_i) \longrightarrow (H^n_+(-1), \boldsymbol{x}_i(u_i))$ の光錐的ガウス標形芽とする。$\mathbb{L}_1^{\pm}$ と $\mathbb{L}_2^{\pm}$ が $\mathcal{A}$ **同値**であるとは微分同相写像芽 $\phi : (U, u_1) \longrightarrow (U, u_2)$ と $\Phi : (LC^*_+, \boldsymbol{v}_1^{\pm}) \longrightarrow (LC^*_+, \boldsymbol{v}_2^{\pm})$ が存在して $\Phi \circ \mathbb{L}_1^{\pm} = \mathbb{L}_2^{\pm} \circ \phi$ を満たすことである。さらに $\boldsymbol{v}_0^{\pm} = \mathbb{L}^{\pm}(u_0)$ にたいして $Q^{\pm}(\boldsymbol{x}, u_0)$ で関数芽 $h_{v_0^{\pm}} : (U, u_0) \longrightarrow \mathbb{R}$ の局所環[8]をあらわす。

定理 3.6 上記の状況で光錐的ガウス標形芽 $\mathbb{L}_i^{\pm}$ のルジャンドル持ち上げ

$$\mathcal{L}_i^{\pm} : (U, u_i) \longrightarrow (PT^*(LC^*_+), z_i^{\pm})$$

がルジャンドル安定[7]であると仮定する。このとき、以下の条件は同値である：

(1) 光錐的ガウス標形芽 $\mathbb{L}_1^{\pm}$ と $\mathbb{L}_2^{\pm}$ は $\mathcal{A}$ 同値である。

(2) ルジャンドル部分多様体芽 $\mathcal{L}_1^{\pm}$ と $\mathcal{L}_2^{\pm}$ はルジャンドル同値である。

(2) H_1 と H_2 は P-$\mathcal{K}$ 同値である。

(3) h_{1,v_1} と h_{1,v_2} は $\mathcal{K}$ 同値である。

(4) $K(\boldsymbol{x}_1(U), HS^{\pm}(\boldsymbol{x}_1, u_1), \boldsymbol{v}_1^{\pm}) = K(\boldsymbol{x}_2(U), HS^{\pm}(\boldsymbol{x}_2, u_2), \boldsymbol{v}_2^{\pm})$。

(5) $Q^{\pm}(\boldsymbol{x}_1, u_1)$ と $Q^{\pm}(\boldsymbol{x}_2, u_2)$ は $\mathbb{R}$ 代数として同型である。

さらに、この条件が成立するとき、$(\boldsymbol{x}_1^{-1}(HS(\mathbb{L}_1^{\pm}(u_1), -1)), u_1)$ と $(\boldsymbol{x}_2^{-1}(HS(\mathbb{L}_2^{\pm}(u_2), -1)), u_2)$ は集合芽として微分同相である。ただし、$h_{i,v_i^{\pm}}(u) = H_i(u, \boldsymbol{v}_i^{\pm})$ とする。

[7] 二つの写像芽 f, g が $\mathcal{K}$ 同値であるとは対応する局所環 $Q(f), Q(g)$（付録参照）が微分同相写像芽による引き戻し同型で $\mathbb{R}$ 代数として同型となることである

[8] 付録参照

この定理の仮定は $n \leq 6$ のとき超曲面の生成的な性質である。一般の次元では生成的には以下の命題が成り立つ。

命題 3.7 $\boldsymbol{x}_i : (U, u_i) \longrightarrow (H^n_+(-1), \boldsymbol{x}_i(u_i))$ $(i = 1, 2)$ をホロ球面的放物点の集合が U で内点を持たないような埋め込みとする。このとき、光錐的ガウス標形芽 $\mathbb{L}_1^{\pm}$, $\mathbb{L}_2^{\pm}$ が $\mathcal{A}$ 同値である為の必要十分条件はそのルジャンドル持ち上げ $\mathcal{L}_1^{\pm}$ と $\mathcal{L}_2^{\pm}$ がルジャンドル同値であることである。さらにこの条件が成り立つとき

$$K(\boldsymbol{x}_1(U), HS^{\pm}(\boldsymbol{x}_1, u_1), \boldsymbol{v}_1^{\pm}) = K(\boldsymbol{x}_2(U), HS^{\pm}(\boldsymbol{x}_2, u_2), \boldsymbol{v}_2^{\pm}).$$

となる。また、$(\boldsymbol{x}_1^{-1}(HS(\mathbb{L}_1^{\pm}(u_1), -1)), u_1)$ と $(\boldsymbol{x}_2^{-1}(HS(\mathbb{L}_2^{\pm}(u_2), -1)), u_2)$ は集合芽として微分同相となる。

ところで、ユークリッド空間内の超曲面のガウス写像と違って、これらの場合はガウス標形も擬球面内の（特異点を許容する）超曲面である。このことは、ある種の双対性を連想させる。ここで、ド・シッター空間内の空間的超曲面 $\boldsymbol{x} : U \longrightarrow S^n_1$ に対して同様な構成が出来そうなことは想像に難くない。実際、双曲的法線ベクトルを

$$\boldsymbol{e}(u) = \frac{\boldsymbol{x}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{u_{n-1}}(u)}{\|\boldsymbol{x}(u) \wedge \boldsymbol{x}_{u_1}(u) \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{x}_{u_{n-1}}(u)\|},$$

と定義すると $\boldsymbol{e}(u)$ は時間的ベクトルで $\boldsymbol{e}(u) \in H^n(-1)$ となる。また、$\boldsymbol{e}(u) \pm \boldsymbol{x}(u)$ は光的ベクトルとなりここでも光錐的ガウス標形 $\mathbb{L}^{\pm}(u) = \boldsymbol{e}(u) \pm \boldsymbol{x}(u)$ が定義できる。このような構成を行うとド・シッター空間内の空間的超曲面に対してまったく同様な幾何学的構成が平行して可能となる。ところで、ここまでの方法における基本的な点は具体的に法線ベクトル $\boldsymbol{e}(u)$ を構成できたことにある。双曲空間の場合にせよド・シッター空間の場合にせよいずれの場合においても、曲面の支持ベクトル $\boldsymbol{x}(u)$ がミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 内の余次元 2 の部分多様体（擬球面の超曲面）の光的でない法ベクトルとなることがこの構成を可能にしていた。ところが、今、光錐内の空間的超曲面に対してはこの様な都合のよい状況は起こらない。しかもこの場合は以下の定理が示すように上記の場合と比較しても重要な研究対象であると思われる：

定理 3.8 (Asperti-Dajczer[2]) M^{n-1} を単連結なリーマン多様体とする $(n \geq 4)$。このとき、M が共形的平坦である為の必要十分条件は M が n 次元光錐 LC^* に空間的超曲面として等長的に埋め込まれることである。

この定理から、光錐内の超曲面の「ガウスの幾何学」「トムの幾何学」による不変量を得ることができれば、共形平坦なリーマン多様体の幾何学的不変量を得ることになる。そこで、次節ではこれまでの方法を離れ、「ルジャンドル微分幾何」の方向から考えてみる。

4 ミンコフスキー空間内の擬球面の間のルジャンドル双対性

ミンコフスキー空間 $\mathbb{R}^{n+1}_1$ 内の 3 種類の擬球面 $H^n(-1)$、S^n_1、LC^* を考える。これら擬球面の直積空間の超曲面、標準射影、1 形式を以下の 4 つの場合に考える：

(1)(a) $H^n(-1) \times S^n_1 \supset \Delta_1 = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle = 0\}$、

(b) $\pi_{11} : \Delta_1 \longrightarrow H^n(-1)$、$\pi_{12} : \Delta_1 \longrightarrow S^n_1$、
(c) $\theta_{11} = \langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle|\Delta_1$、$\theta_{12} = \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w}\rangle|\Delta_1$。

(2)(a) $H^n(-1) \times LC^* \supset \Delta_2 = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = -1\}$、
(b) $\pi_{21} : \Delta_2 \longrightarrow H^n(-1)$、$\pi_{22} : \Delta_2 \longrightarrow LC^*$、
(c) $\theta_{21} = \langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle|\Delta_2$、$\theta_{22} = \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w}\rangle|\Delta_2$。

(3)(a) $LC^* \times S^n_1 \supset \Delta_3 = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 1\}$、
(b) $\pi_{31} : \Delta_3 \longrightarrow LC^*$、$\pi_{32} : \Delta_3 \longrightarrow S^n_1$、
(c) $\theta_{31} = \langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle|\Delta_3$、$\theta_{32} = \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w}\rangle|\Delta_3$。

(4)(a) $LC^* \times LC^* \supset \Delta_4 = \{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mid \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = -2\}$、
(b) $\pi_{41} : \Delta_4 \longrightarrow LC^*$、$\pi_{42} : \Delta_4 \longrightarrow LC^*$、
(c) $\theta_{41} = \langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle|\Delta_4$、$\theta_{42} = \langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w}\rangle|\Delta_4$。

ここで、$\pi_{i1}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v}$、$\pi_{i2}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}$、$\langle d\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = -w_0dv_0 + \sum_{i=1}^n w_idv_i$、$\langle \boldsymbol{v}, d\boldsymbol{w}\rangle = -v_0dw_0 + \sum_{i=1}^n v_idw_i$ である。これらの構成にかんして、$\theta_{i1}^{-1}(0)$ と $\theta_{i2}^{-1}(0)$ は Δ_i 上に同じ接超平面場を定める。それを今 K_i で書き表すと、我々のルジャンドル双対性[9]に関する基本定理は以下のものである：

定理 4.1 上記の設定において (Δ_i, K_i) $(i = 1, 2, 3, 4)$ は接触多様体[10]であり、各 π_{ij} $(j = 1, 2)$ はそれぞれルジャンドルファイバー空間[10]としての射影である。

証明： ここでは、証明の概略を与える。最初に (1) の場合を考えると、条件 $\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}\rangle = 0$ は $\boldsymbol{w}$ が $H^n(-1)$ の $\boldsymbol{v}$ における接ベクトルであることを意味する。また、$\boldsymbol{w}$ は S^n_1 の元であり、条件 $\langle \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}\rangle = 1$ から $T_vH^n(-1)$ 上の単位接ベクトルとなる。今 $S(TH^n(-1))$ で $H^n(-1)$ 上の単位球接束を表すとこの上には（射影的余接束[10]と同様に）標準的な接触構造が存在する。（１）の場合の $\theta_{11} = \theta_{12} = 0$ はこの標準的接触構造と同一視されることが示される。この場合、射影 π_{1j} は定義から明らかにルジャンドルファイバー空間の射影の構造を持つ。そのほかの場合はこの（１）への微分同相写像で接超平面場を保つものが具体的に構成されることにより示される。□

基本定理の証明におけるお互いを繋げる具体的な微分同相は応用上も重要なので、ここに書き表しておく。

$$\begin{aligned}
\Phi_{12} : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_2 \ &: \ \Phi_{12}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}) \\
\Phi_{13} : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_3 \ &: \ \Phi_{13}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{w}) \\
\Phi_{14} : \Delta_1 \longrightarrow \Delta_4 \ &: \ \Phi_{14}(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w})
\end{aligned}$$

$\Phi_{ij} = \Phi_{ji}^{-1}$ とすると残りの間の接触同相も定まる。

[9]佐藤肇先生（名古屋大学）や待田芳徳先生（沼津高専）に言わせれば「(まさに) ツイ（対）スター図式」である。
[10]付録参照

ここで、この基本定理からわかる事をいくつか述べてみる。たとえば、第3章の内容はこの定理から以下のように解釈される。$\boldsymbol{x}: U \longrightarrow H^n(-1)$ を双曲空間内の超曲面とする。このとき、光錐的ガウス写像 $\mathbb{L}^{\pm}: U \longrightarrow LC^*$ が得られた。そこで、写像 $\mathcal{L}_2: U \longrightarrow \Delta_2$ が $\mathcal{L}_2(u) = (\boldsymbol{x}(u), \mathbb{L}^{\pm}(u))$ と定まる。このとき、$\langle \boldsymbol{x}_{u_i}, \mathbb{L}^{\pm}\rangle = 0$ なので、$\mathcal{L}_2^*\theta_{21} = 0$ となり $\mathcal{L}_2$ はルジャンドル埋め込みである。また、$\mathbb{L}^{\pm}_{u_i}$ は $\boldsymbol{x}(U) = M$ に接しているので空間的ベクトルである。したがって、$\mathbb{L}^{\pm}: U \longrightarrow LC^*$ は空間的写像となる（ただし、空間的写像とはその微分の像が空間的ベクトルのみからなるときのこととする）。したがって、$\mathbb{L}^{\pm}$ がはめ込みのとき、$\boldsymbol{x}: U \longrightarrow H^n(-1)$ は光錐内の空間的超曲面 $\mathbb{L}^{\pm}$ の時間的な単位法線ベクトルを与える。このことは、$\boldsymbol{x}$ と $\mathbb{L}^{\pm}$ は双対をなすことを意味する。実際この双対性は、第3章で見たように $\boldsymbol{x}(U)$ が $H^n(-1)$ の超ホロ球面の一部となることと $\mathbb{L}^{\pm}(U)$ が一点となることが同値である。即ち、超ホロ球面と一点を対応させる双対性である。逆に $\boldsymbol{x}(U)$ が一点のときは $\mathbb{L}^{\pm}(U)$ は超楕円面となることであり。超楕円面と一点を対応させる双対性であると理解される。この事実は最初からルジャンドル埋め込み $\mathcal{L}_2: U \longrightarrow \Delta_2$ を考えれば、第3章で考えたような（ホロ球面的）微分幾何学が考えられる事を示唆している。また Δ_1、Δ_3、Δ_4 のルジャンドル部分多様体を考えるとそれぞれ、双曲空間内の超曲面のド・シッター微分幾何学[11]とその逆、光錐内の空間的超曲面のド・シッター微分幾何学とその逆、さらには光錐内の空間的超曲面の光錐的微分幾何学が展開されることも想像に難くない。

ここでは、特に Δ_4 に注目して光錐内の空間的超曲面の光錐的微分幾何学[12]に関して解説する。$\boldsymbol{x}: U \longrightarrow LC^*$ を光錐内の空間的超曲面とする（即ち、$U \subset \mathbb{R}^{n-1}$ は開集合で $\boldsymbol{x}$ は埋め込みである）。今 $\boldsymbol{x}(U) = M$ と書き、$\boldsymbol{x}$ によって U と M を同一視する。このとき（必要ならば U を小さくとることにより）ルジャンドル埋め込みの一意存在性からルジャンドル埋め込み $\mathcal{L}_4: U \longrightarrow \Delta_4$ で $\mathcal{L}_4(u) = (\boldsymbol{x}(u), \boldsymbol{x}_\ell(u))$ の形をしているものが存在する。ここで、$\boldsymbol{x}_h(u) = (\boldsymbol{x}(u) + \boldsymbol{x}_\ell(u))/2$、$\boldsymbol{x}_d(u) = (\boldsymbol{x}(u) - \boldsymbol{x}_\ell(u))/2$ とおくと $\boldsymbol{x}_h(u) \in H^n(-1), \boldsymbol{x}_d(u) \in S^n_1$ が成り立つ。仮定から $\boldsymbol{x}_{u_i}(u)$ は空間的ベクトルなので、

$$T_{p_0}\mathbb{R}^{n+1}_1 = \langle \boldsymbol{x}_h(u_0), \boldsymbol{x}_{u_1}(u_0), \ldots, \boldsymbol{x}_{u_{n-1}}(u_0), \boldsymbol{x}_d(u_0)\rangle_{\mathbb{R}}$$

が成り立つ。ただし、$p_0 = \boldsymbol{x}(u_0) \in M$ とする。この基底をつかって計算すると $\boldsymbol{x}_{\ell u_i}(u_0) \in T_{p_0}M$ がわかる。このことは $\boldsymbol{x}_\ell$ の微分 $d\boldsymbol{x}_\ell(u_0)$ が $T_{p_0}M$ 上の線形変換であることを示している。そこで、$S_{\ell,p_0} = -d\boldsymbol{x}_\ell(u_0)$ と定め、M の p_0 における**光錐的型作用素**と呼ぶ。さらに、$K_\ell(u_0) = \det S_{\ell p_0}$ を**光錐的ガウス・クロネッカー曲率**と呼ぶ。同様に、$\boldsymbol{x}_{h,u_i}(u_0), \boldsymbol{x}_{d,u_i}(u_0) \in T_{p_0}M$ も示すことができて**双曲的型作用素**が $S_{h,p_0} = -d\boldsymbol{x}_h(u_0)$ として、さらに**ド・シッター型作用素**が $S_{d,p_0} = -d\boldsymbol{x}_d(u_0)$ と定義することが出来る。このとき、関係

$$S_{h,p_0} = -\frac{1}{2}\left(id_{T_{p_0}M} - S_{\ell,p_0}\right), \quad S_{d,p_0} = -\frac{1}{2}\left(id_{T_{p_0}M} + S_{\ell,p_0}\right)$$

から、それぞれの型作用素の固有方向（主方向）は一致し、その固有値を $\kappa_\ell(p_0), \kappa_h(p_0), \kappa_d(p_0)$ と表すと $\kappa_h(p_0) = -(1-\kappa_\ell(p_0))/2,\ \kappa_d(p_0) = -(1+\kappa_\ell(p_0))/2$ となる。いま p_0 が**臍点**であるとは $S_{\ell,p_0} = \kappa_\ell(p_0) id_{T_{p_0}M}$ が成り立つこととする。上記の関係から他の型作用素を用いても同じ定義が得られる。空間的超曲面 $M = \boldsymbol{x}(U)$ が**全臍的**であるとは、M の任意の点が臍点であること

[11]双曲空間内の超曲面に対してド・シッター空間内にあるそのルジャンドル双対を単位法線ベクトル場として微分幾何学を展開すること。

[12]それは [2] から共形的平坦なリーマン多様体の局所微分幾何学である。

とする。このとき、**光錐的主曲率** $\kappa_\ell(p)$ は一定値となる。全臍的な空間的超曲面の分類が出来るがここでは特に平坦なものを考える。ミンコフスキー空間内の超平面 $HP(\boldsymbol{v},c)$ と光錐 LC^* との共通部分[13]を $HL(\boldsymbol{v},c)$ とあらわすと、それは2次超曲面となり $\boldsymbol{v}$ が空間的なとき超楕円面、時間的なとき超双曲面、光的なとき超放物面となる。平坦性も考えると法線ベクトルに依存して以下の3種類が考えられる。

命題 4.2 $\boldsymbol{x}: U \longrightarrow LC^*$ を全臍的な空間的超曲面とする。このとき以下が成り立つ：

(1) $\kappa_\ell = -1$ になるとき、$\boldsymbol{x}_d(u)$ が一定なベクトル $\boldsymbol{c}$ に一致し、M は超双曲面 $HL(\boldsymbol{c},1)$ の一部分である。さらに、$\kappa_d = 0$ となる。

(2) $\kappa_\ell = 1$ になるとき、$\boldsymbol{x}_h(u)$ が一定なベクトル $\boldsymbol{c}$ に一致し、M は超楕円面 $HL(\boldsymbol{c},-1)$ の一部分である。さらに、$\kappa_h = 0$ となる。

(3) $\kappa_\ell = 0$ になるとき、$\boldsymbol{x}_\ell(u)$ が一定なベクトル $\boldsymbol{c}$ に一致し、M は超放物面 $HL(\boldsymbol{c},-2)$ の一部分である。

もちろん、$0 < |\kappa_\ell| < 1$ と $|\kappa_\ell| > 1$ の場合も分類できるが、ここでは上の命題の3つの場合を平坦な場合として特別に扱う。この命題から、一般の LC^* の超曲面 $\boldsymbol{x}(U) = M$ の点に関して3種類の平坦性を以下のように定める。点 $p_0 = \boldsymbol{x}(u_0)$ が**ド・シッター平坦点**であるとは p_0 が臍点でありかつ $\kappa_\ell(u_0) = -1$、**双曲的平坦点**であるとは p_0 が臍点でありかつ $\kappa_\ell(p_0) = 1$、さらに**光錐的平坦点**であるとは p_0 が臍点でありかつ $\kappa_\ell(p_0) = 0$ を満たすこととする。また、p_0 が**光錐的放物点**であるとは $K_\ell(p_0) = 0$ を満たすこととする。これらの点の幾何学的意味[14]は以下のような高さ関数の特異点を研究することによりわかる：

$$H_\ell : U \times LC^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ H_\ell(u,\boldsymbol{v}) = \langle \boldsymbol{x}(u), \boldsymbol{v} \rangle + 2$$

を**光錐的高さ関数**と呼ぶ。この関数の判別集合が $\boldsymbol{x}_\ell$ の像となることがわかりさらに、この関数はルジャンドル埋め込み $\mathcal{L}_4 : U \longrightarrow \Delta_4$ の母関数族となることがわかる。このように、双曲空間内の超曲面、ド・シッター空間内の空間的超曲面さらには光錐内の空間的超曲面の（露骨）な微分幾何学は、ルジャンドル双対性の基本定理の応用として展開することができる。講演では執筆時点以降の発展内容についてもできれば触れたい。

付録　ルジャンドル特異点論

ここでは主にアーノルドやザカリューキン [1, 16] により構成されたルジャンドル特異点論の基礎（局所理論）について解説する。最初に (E,K) が**接触多様体**であるとは、E は $(2n-1)$ 次元多様体であり、K は E 上の非退化接超平面場（i.e., $K_z \subset T_zE$ は余次元1の部分空間であり、θ を K を定める局所1形式とすると、$\theta \wedge (d\theta)^{n-1} \neq 0$ をみたす）であることとする。また、E の部分多様体 L が**ルジャンドル部分多様体**であるとは、L の次元が $n-1$ で $T_zL \subset K_z$（即ち、L は K の最大積分多様体）であることとする。さらに、局所自明ファイバー空間 $\pi : E \longrightarrow N$ が**ルジャンドルファイバー空間**であるとは E が接触多様体で各ファイバー $\pi^{-1}(x)$ がルジャンドル部分多様体となることである。接触多様体においてもダルブーの定理が成立することが知

[13] これが全臍的な超曲面である。
[14] たとえば接超放物面との接触に関する情報等々。

られているがもっと強くルジャンドルファイバー空間にたいしても同様な事実が成立する。今、$\pi : PT^*(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ 上の射影的余接束（余接束のファイバーごとの射影化）とする。この全空間上には標準的接触構造が存在する。実際全空間の接束 $\tau : TPT^*(\mathbb{R}^n) \to PT^*(\mathbb{R}^n)$ と射影 π の微分写像 $d\pi : TPT^*(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^n$ を考える。任意の $X \in TPT^*(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\alpha \in T^*(\mathbb{R}^n)$ で $\tau(X) = [\alpha]$ となるものが存在する。接ベクトル $V \in T_x(\mathbb{R}^n)$ に対して、$\alpha(V) = 0$ という性質は類 $[\alpha]$ のみに依存し、代表元 α のとり方に依存しない。このとき、$PT^*(\mathbb{R}^n)$ 上の接触構造は $K = \{X \in TPT^*(\mathbb{R}^n) | \tau(X)(d\pi(X)) = 0\}$ で与えられる。これを**標準的ルジャンドルファイバー空間**と呼ぶ。すべてのルジャンドルファイバー空間は局所的にはこの標準的ルジャンドルファイバー空間と（同値に）なることが知られている [1]。

$\pi : E \longrightarrow N$ をルジャンドルファイバー空間として、$L \subset E$ をルジャンドル部分多様体とする。このとき、$\pi|L : L \longrightarrow N$ を L の**ルジャンドル写像**、$W(L) = \pi(L)$ を L の**波面集合**さらに L を $W(L)$ の**ルジャンドル持ち上げ**と呼ぶ。局所的ルジャンドル特異点論における主要な結論はルジャンドル部分多様体芽が以下の意味で、母関数族をもちすべての局所的情報が母関数族の言葉で解釈されることにある：$F : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を関数芽とする。F が**モース関数族**であるとは対応する写像芽

$$\Delta^* F = \left(F, \frac{\partial F}{\partial q_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial q_k} \right) : (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \longrightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k, 0)$$

が沈め込み芽であることとする。このとき、集合芽

$$\Sigma_*(F) = \left\{ (q, x) \in (\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n, 0) \mid F(q, x) = \frac{\partial F}{\partial q_1}(q, x) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial q_k}(q, x) = 0 \right\}$$

は $(n-1)$ 次元部分多様体芽となり、写像芽

$$\Phi_F : (\Sigma_*(F), 0) \longrightarrow PT^*\mathbb{R}^n \, ; p \; \Phi_F(q, x) = \left(x, [\frac{\partial F}{\partial x_1}(q, x) : \cdots : \frac{\partial F}{\partial x_n}(q, x)] \right)$$

はるジャンドルはめ込み芽であることがわかる。以下の命題が基本的である [1, 16]：

命題 A.1 $PT^*\mathbb{R}^n$ 内のすべてのルジャンドル部分多様体芽は上記の方法で構成される。

F を $\Phi_F(\Sigma_*(F))$ の**母関数族**と呼ぶ。したがって波面集合は

$$W(\Phi_F) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n \mid \exists q \in \mathbb{R}^k \text{ s.t. } F(q, x) = \frac{\partial F}{\partial q_1}(q, x) = \cdots = \frac{\partial F}{\partial q_k}(q, x) = 0 \right\}.$$

関数芽のの開折理論では $\mathcal{D}_F = W(\Phi_F)$ と書き F の**判別集合（芽）**と呼ぶ。

ここで、ルジャンドル部分多様体芽の間の自然な同値関係を定義する。$i : (L, p) \subset (PT^*\mathbb{R}^n, p)$ と $i' : (L', p') \subset (PT^*\mathbb{R}^n, p')$ をルジャンドル部分多様体芽とする。このとき、i と i' が**ルジャンドル同値**であるとは接触微分同相写像芽 $H : (PT^*\mathbb{R}^n, p) \longrightarrow (PT^*\mathbb{R}^n, p')$ で π のファイバーをファイバーに写すものが存在して $H(L) = L'$ となる事とする。ルジャンドル部分多様体芽が**ルジャンドル安定**であることなども定義されるが、ここでは省略する。

ルジャンドル特異点論における重要な（ラグランジュ特異点論では成り立たない）性質は波面集合の正則部分でのルジャンドル持ち上げの一意性にある。このことから以下の重要な性質が得られる：

命題 A.2[17] $i:(L,p)\subset(PT^*\mathbb{R}^n,p)$ と $i':(L',p')\subset(PT^*\mathbb{R}^n,p')$ をルジャンドル部分多様体芽で $\pi\circ i,\pi\circ i'$ の正則点の集合がそれぞれ稠密であると仮定する。このとき、i,i' がルジャンドル同値である為の必要十分条件は対応する波面集合芽 $W(i),W(i')$ が微分同相であることである。

この命題の仮定は i,i' の**生成的性質**であり、特にルジャンドル安定なものはこの性質を満たしている。

次にルジャンドル同値の概念は母関数では以下のように解釈される：$\mathcal{E}_n$ を関数芽 $(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow\mathbb{R}$ 全体からなる局所環としてそのただひとつの極大イデアルは $\mathfrak{M}_n=\{h\in\mathcal{E}_n\mid h(0)=0\}$ である。関数芽 $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ が **P-$\mathcal{K}$-同値**であるとは微分同相写像芽 $\Psi:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)$ で $\Psi(q,x)=(\psi_1(q,x),\psi_2(x))$ $((q,x)\in(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0))$ の形をしているものが存在して $\Psi^*(\langle F\rangle_{\mathcal{E}_{k+n}})=\langle G\rangle_{\mathcal{E}_{k+n}}$ を満たすこととする。ただし、$\Psi^*:\mathcal{E}_{k+n}\longrightarrow\mathcal{E}_{k+n}$ は $\Psi^*(h)=h\circ\Psi$ で定義される引き戻し $\mathbb{R}$ 代数同型とする。

関数芽 $F:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^3,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ が $f=F|\mathbb{R}^k\times\{0\}$ の **$\mathcal{K}$-普遍解析**であるとは

$$\mathcal{E}_k=T_e(\mathcal{K})(f)+\left\langle\frac{\partial F}{\partial x_1}|\mathbb{R}^k\times\{0\},\dots,\frac{\partial F}{\partial x_n}|\mathbb{R}^k\times\{0\}\right\rangle_{\mathbb{R}}$$

を満たすことである。ここで、

$$T_e(\mathcal{K})(f)=\left\langle\frac{\partial f}{\partial q_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial q_k},f\right\rangle_{\mathcal{E}_k}$$

である ([13])。アーノルド・ザカリューキンの理論における主要結果は以下の定理である：

定理 A.3 $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ をモース関数族とする。このとき以下が成り立つ：
(1) Φ_F と Φ_G がルジャンドル同値である必要十分条件は F, G が P-$\mathcal{K}$-同値であることである[15]。
(2) Φ_F がルジャンドル安定である為の必要十分条件は F が $F\mid\mathbb{R}^k\times\{0\}$ の $\mathcal{K}$-普遍開折であることである。

$\mathcal{K}$-普遍開折の一意性と命題 A.2 及び定理 A.3 からルジャンドル安定写像芽の分類定理を得る。写像芽 $f:(\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R}^p,0)$ に対して $Q(f)=\mathcal{E}_n/f^*(\mathfrak{M}_p)\mathcal{E}_n$ を f の局所環と呼ぶ。

命題 A.4 $F,G:(\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^n,0)\longrightarrow(\mathbb{R},0)$ をモース関数族とする。Φ_F,Φ_G がルジャンドル安定なとき以下の 3 条件は同値である：
(1) $(W(\Phi_F),0)$ と $(W(\Phi_G),0)$ は微分同相である。
(2) Φ_F と Φ_G はルジャンドル同値である。
(3) $f=F|\mathbb{R}^k\times\{0\}$, $g=G|\mathbb{R}^k\times\{0\}$ とすると $Q(f)$ と $Q(g)$ は $\mathbb{R}$ 代数として同型である。

参考文献

[1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I.* Birkhäuser (1986)

[15] 母関数族の内部変数の空間が次元がちがう場合も変数に非退化 2 次形式を付け加えることによって同値類を拡大した安定 P-$\mathcal{K}$-同値という形で表される

[2] A. C. Asperti and M. Dajczer, *Conformally flat Riemannian manifolds as hypersurfaces of the light cone.* Canad. Math. Bull., **32** (1989), 281–285

[3] T. E. Cecil and P. J. Ryan, *Distance functions and umbilic submanifolds of hyperbolic space.* Nagoya Math. J., **74** (1979), 67–75

[4] C. L. Epstein *The hyperbolic Gauss map and quasiconformal reflections.* J. Reine Angew. Math., **372** (1986), 96–135

[5] S. Izumiya, D. Pei, T. Sano and E.Torii, *Generic differential geometry of hyperbolic plane curves.* to appear in Acta Mathematica Sinica

[6] S. Izumiya, D.Pei and T. Sano, *Singularities of hyperbolic Gauss maps.* Proc. London Math. Soc. , **86** (2003), 485–512

[7] S. Izumiya and M. C. Romero Fuster, *Hyperbolic Gauss-Bonnet type theorem.* Preprint

[8] S. Izumiya, D-H.Pei and T. Sano, *Horospherical surfaces of curves in Hyperbolic space.* preprit

[9] S. Izumiya, D-H.Pei and M.C. Romero Fuster, *The horospherical geometry of spacelike surfaces in Hyperbolic 4-space.* preprint

[10] S. Izumiya, D-H. Pei and M. Takahashi, *Singularities of Evolutes of hypersurfaces in Hyperboplic space.* preprint

[11] S. Izumiya, D-H. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, *On the horospherical ridges of submanifolds of codimension 2 in hyperbolic n-space* $H^n_+(-1)$. preprint

[12] S. Izumiya, D-H. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, *The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space.* preprint

[13] J. Martinet, *Singularities of Smooth Functions and Maps.* London Math. Soc. Lecture Note Series, Cambridge Univ. Press,vol 58 (1982)

[14] J. N. Mather, *Stability of* C^∞*-mappings IV:Classification of stable germs by* $\mathbb{R}$ *algebras.* Publi. Math. I.H.E.S., **37** (1970), 223–248

[15] J. A. Montaldi, *On contact between submanifolds.* Michigan Math. J., **33** (1986), 195–199, **15** (1981), 147–148

[16] V. M. Zakalyukin, *Lagrangian and Legendrian singularities.* Funct. Anal. Appl., **10** (1976), 23–31

[17] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending one parameter and versality of mappings.* J. Sov. Math., **27** (1984), 2713-2735

極小集合をもたない力学系

日大理工　松元重則

1. はじめに

X を距離空間とし，Homeo(X) で X の同相写像全体のなす位相群を表す．連続準同型 $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow X$ のことを X 上の流れという．φ による t の像を，φ^t と表すことにしよう．一方同相写像 φ^1 がひとつあたえられたとき，準同型 $\varphi : \mathbb{Z} \longrightarrow X$ が，その t の像 φ^t を $\varphi^t = (\varphi^1)^t$ と定めることにより定まる．これらを総称して X の上の力学系という．詳しくは $\{\varphi^t \mid t \in \mathbb{R}\}$ のことを連続時間の力学系，$\{\varphi^t \mid t \in \mathbb{Z}\}$ のことを離散時間の力学系という．以下 G で $\mathbb{R}$ ないしは $\mathbb{Z}$ を表すこととする．

X の部分集合 S が，力学系 φ で不変であるとは，任意の $t \in G$ に対し $\varphi^t(S) = S$ を満たすこととする．力学系の極小集合とは，不変な閉集合であり，(この性質を持つ部分集合の中で) 包含関係に関して極小なものをいう．

いま点 $x \in X$ に対しその軌道 $O(x)$ を $O(x) = \{\varphi^t(x) \mid t \in G\}$ にて定める．部分集合 S が極小であることは，任意の点 $x \in S$ に対しその軌道の閉包 Cl(O(x)) が S に一致する事と同値である．

もしも X がコンパクトならば，Zorn の補題によって，すべての力学系は極小集合を持つ．

例 1.1. 2 次元トーラス $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上にベクトル場 $V_a = \partial/\partial x + a\partial/\partial y$ $(a \in \mathbb{R})$ の定める流れ φ_a を考えよう．a が有理数のとき各点の軌道は閉曲線をなす．この場合各点の軌道そのものが極小集合である．反対に a が無理数のとき，各点の軌道は T^2 にて稠密であり，従って T^2 が極小集合となる．

さて X がコンパクトでないときは，力学系は極小集合をもつ保証はどこにもない．しかし：

例 1.2. 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の水平ベクトル場 $\partial/\partial x$ の定める流れの各軌道は水平直線であり従って閉集合である．よって各軌道は極小集合である．

この例に見るように，極小集合を持たない力学系をコンパクトでない空間に構成しようとすれば，どの軌道も閉集合であってはならない．

いま点 $x \in X$ に対し omega-極限集合 $\omega(x)$ を

$$\omega(x) = \{y \leftarrow \varphi^{t_i}(x) \mid \exists t_i \to \infty\}$$

と定める． ∞ を $-\infty$ に変えることにより alpha-極限集合 $\alpha(x)$ を定める．

また点 $x \in X$ が非遊走点であるとは，任意の近傍 U と任意の正数 T に対し $|t| > T$ なる $t \in G$ が存在して，$\varphi^t(U) \cap U \neq \emptyset$ を満たすこととする．これは x に任意に近い点が長時間の後，再び x の近くに帰ってくるということである．

さて力学系 φ が極小集合を持たないとしよう．このとき上に見たようにどの軌道も閉集合ではない．このことから任意の点の alpha-極限集合ないしは omega-極限集合が空集合でないことがわかる．ところが定義から明らかなようにこれら極限集合の点は非遊走点である．すなわち：

注意 1.3. 極小集合を持たない力学系は非遊走点をもつ．

このことはそのような力学系はすでにかなり複雑な振る舞いをするということを示している．実際：

命題 1.4. 平面上のすべての（離散，連続）力学系は極小集合をもつ．

離散力学系の場合上の命題は次の定理から従う．

定理 1.5.（Brouwer の平面固定点定理）平面上の同相写像（＝離散力学系）は非遊走点を持てば固定点をもつ．

流れの場合，命題 1.4 は次の形の大拡張をもつ．

命題 1.6.（稲葉）種数有限の開曲面上の流れは極小集合をもつ．

開曲面上の，極小集合を持たない流れの最初の例は稲葉尚志により構成された．また直線と種数有限の開曲面を除く任意の開多様体上に，極小集合を持たない流れが存在することが J.-C. Benier と G. Meigniez によって示された．

2. 円筒上の同相写像

前章でみたように，極小集合を持たない力学系の例はかなり豊富に構成されている．しかし，やむを得ないことではあるが，それらの例は余り自然なものとはいえない．ここでは円筒 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上の普通に構成された同相写像のなかに極小集合を持たないものがたくさんあることを報告しよう．この章の結果はすべて宍倉光広との共同研究によるものである．

実数 α に対し円周 $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の α-回転写像 R_α を $R_\alpha(x) = x + \alpha \bmod 1$ にて定義する．α が無理数のとき R_α の各軌道は S^1 にて稠密である．

実数 α と S^1 上の実数値連続関数 f に対し円筒 $S^1 \times \mathbb{R}$ 上の同相写像 $F_{\alpha,f}$ を

$$F_{\alpha,f}(x,y) = (R_\alpha(x), y + f(x))$$

にて定義する．

$F_{\alpha,f}$ は自然な射影 $p : S^1 \times \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ に対し $p \circ F_{\alpha,f} = R_\alpha \circ p$ を満たし，いわゆるファイバー束写像である．

この形の同相写像は円筒上の写像のうち特に簡単であり，その研究はポアンカレにさかのぼる．さて $F_{\alpha,f}$ の繰り返しを計算してみると

$$F^n_{\alpha,f}(x,y)=(R^n_\alpha(x),y+f_n(x)),\qquad f_n(x)=\sum_{i=0}^{n-1}f(R^i_\alpha(x))$$

となる．とくに $f_n(x)$ は $x\in S^1$ の R_α による軌道に沿っての関数 f の和である．

いま α は無理数であると仮定すると，回転写像 $R_\alpha:S^1\longrightarrow S^1$ は一意エルゴード的であり，従って関数族 $(1/n)f_n$ は積分 $\int_{S^1}f(x)dx$ に一様収束する．仮にこの積分値が 0 でなければ 各 $x\in S^1$ に対し $f_n(x)$ は $+\infty$ ないしは $-\infty$ に発散する．このとき $F_{\alpha,f}$ の任意の軌道は閉集合（離散集合）となり，力学系は極めて単純になる．これではおもしろくないので次を仮定しよう．

仮定 2.1.
(1) 実数 α は無理数である．
(2) 関数 f は次を満たす．

$$\int_{S^1}f(x)dx=0.$$

さて，それではこの仮定を満たすとき，$F_{\alpha,f}$ は十分に複雑な振る舞いをするのであろうか．そうではない．例えば f が恒等的に 0 のとき $F_{\alpha,0}$ は単に水平方向の平行移動を表すだけである．もちろん極小集合ももつ．この状況を一般化すると，次の定義にたどり着く．

定義 2.2 連続関数 $h:S^1\longrightarrow\mathbb{R}$ が存在して $f=h\circ R_\alpha-h$ を満たすとき，同相写像 $F_{\alpha,f}$ は積分可能という．

この積分可能性は $F_{\alpha,f}$ が $F_{\alpha,0}$ と共役，すなわち

$$F_{\alpha,f}=F_{0,h}\circ F_{\alpha,0}\circ F_{0,h}^{-1}$$

が成り立つということと同値である．G. A. Hedlund によれば，有界な軌道が存在すれば積分可能である．

ところで積分不可能な同相写像 $F_{\alpha,f}$ の例を作るのはやさしい．実際 $f(x)=\Sigma_{q\neq0}\hat{f}_q\exp(2\pi qix)$ とフーリエ展開し，求めるべき関数 h のフーリエ係数を $\hat{h}_q$ とおけば，

$$\hat{h}_q=\frac{\hat{f}_q}{\exp(2\pi q\alpha i)-1}$$

である．ところで関数が連続であるための，フーリエ係数の満たすべき条件はわかっているので，それを見ながら適当に f の係数 $\hat{f}_q$ を選んでやればいいのである．

さて積分可能でない同相写像 $F_{\alpha,f}$ はいかなる振る舞いをするで あろうか．これがポアンカレ以来研究されてきた問題であり，この章の主題である．

まずはポアンカレの方法を紹介することから始めよう．円筒上の垂直 t-移動を V_t と表そう．すなわち $V_t(x,y)=(x,y+t)$．V_t は $F_{\alpha,f}$ と可換であることに注意しよう．いま点 (x,y) に対し集合

$$L(x)=\{t \mid V_t(x,y)\in \mathrm{Cl}(\mathrm{O}((\mathrm{x},\mathrm{y})))\},\quad \mathrm{O}((\mathrm{x},\mathrm{y}))\text{ は }(\mathrm{x},\mathrm{y})\text{ の軌道}$$

を考えると，これは確かに y によらない．またこれは $\mathbb{R}$ の閉部分半群をなす．また $L(R_\alpha(x))=L(x)$ が成り立つ．

一般に $\mathbb{R}$ の閉部分半群にはあまりにたくさんの種類があり，分類は不可能である（と思う）．ポアンカレはこれに関して次を示したそうである．(確認とれず.)

命題 2.3. $L(x)$ は次のいずれかである．

$$\{1\},\ \mathbb{Z}_{\geq 0},\ \mathbb{Z}_{\leq 0},\ \mathbb{Z},\ \mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{R}_{\leq 0},\ \mathbb{R}.$$

しかし残念ながらポアンカレはこれらのうちどれが実現できるかを決定することはできなかった．明らかなように $F_{\alpha,f}$ が積分可能ならばすべての x に対して $L(x)=\{1\}$ であり，また $L(x)=\mathbb{R}$ は，(x,y) の軌道が稠密であることと同値である．

G. A. Hedlund による次の定理こそ最初の突破口であった．

定理 2.4.(Hedlund) $F_{\alpha,f}$ は積分可能でないとき稠密な軌道をもつ．

Hedlund は最初の論文で，同じ条件のもと，すべての軌道が稠密であると超過主張してしまったが，これについては最近次のようなことがわかってきた．

定理 2.5. (P. Le Calvez, J.-C. Yoccoz) 円筒上にはすべての軌道が稠密であるような同相写像は存在しない．

この定理は一般の同相写像に関するものであり，$F_{\alpha,f}$ の形のものに限定されるものではない．

さて $F_{\alpha,f}$ にもどろう．A. S. Besicovitch は積分不可能な $F_{\alpha,f}$ で離散軌道 $O((x,y))$ をもつものを作った．このとき $L(x)=\{1\}$ である．しかしこの例の f は連続ではあるもののそれ以上の良い性質は何も満たさないようなものだった．

それでは関数 f が C^1 級のとき何がいえるか．次の定理はこれに完全に答えるものであった．

定理 2.6.(A. B. Krygin) $F_{\alpha,f}$ は積分不可能とし f は C^1 級とする．このとき任意の $x\in S^1$ に対し $L(x)$ は $\mathbb{R}$ か $\mathbb{R}_{\geq 0}$ かまたは $R_{\leq 0}$ であり，また同一の $F_{\alpha,f}$ において，この 3 つは実現される．

$\mathbb{R}_{\leq 0}$ に対応する軌道の閉包 K はある上半連続関数 $g : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ のグラフの閉包に等しいことがわかる．また $V_t(K)$ もある軌道の閉包であり，$t < 0$ のとき $V_t(K)$ は K の真部分集合である．

従って上の定理の条件を満たす $F_{\alpha,f}$ は極小集合を許容することはないのである．この結果を拡張して：

定理 2.7. 関数 f が有界変動のとき，$F_{\alpha,f}$ は積分可能であるか，さもなければ極小集合を持たない．

さてそれでは上のふたつの選択肢のうちいずれが一般的であろうか．これに答えるために若干の準備をする．C_0^{VB} で S^1 上の有界変動関数で積分値が 0 であるものの全体のなす空間を表す．これは全変動をノルムとするバナハ空間をなす．

定理 2.8. 任意の無理数 α に対して C_0^{VB} の残留集合 $\mathcal{R}_\alpha$ が存在し，$f \in \mathcal{R}_\alpha$ ならば $F_{\alpha,f}$ は極小集合を持たない．

残留集合とは可算個の開かつ稠密な集合の共通部分を含む集合のことである．上の定理は Baire 的な見地では，極小集合を持たないものが優るという主張である．

最後に C^∞ 級の f について，積分可能なものと，極小集合を持たないものとの分布の様子をみてみよう．これには無理数 α の数論的な性質が関わってくる．

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上の点 x に対し $\|x\|$ で 0 に到る距離を表す．無理数 $\alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ が Diophantus 数であるとは正数 ρ と C が存在して，任意の整数 $q \neq 0$ に対して $\|q\alpha\| > C|q|^{-\rho}$ をみたすこととする．これは S^1 の点 0 が，回転写像 R_α の繰り返し R_α^q により 0 に回帰する様子に関する条件であり，$|q|$ に関し超指数的に回帰することはないということである．よく知られているように：

事実 2.9. α を Diophantus 数，f を C^∞ 関数とする．このとき写像 $F_{\alpha,f}$ は積分可能である．

この事実の証明はやさしい．f のフーリエ係数を $\hat{f}_q$ とするとき，f が C^∞ 級であるための条件は，任意の正数 s に対し級数 $\Sigma|q|^{2s}|\hat{f}_q|^2$ が収束することである．前に見たように関数方程式 $h \circ R_\alpha - h = f$ の解 h のフーリエ係数 $\hat{h}_q$ は

$$\hat{h}_q = \frac{\hat{f}_q}{\exp(2\pi q\alpha i) - 1}$$

で与えられる．ところがこの分母は（小さい数のとき）その大きさは $2\pi\|q\alpha\|$ とほぼ等しく，従って下から $C|q|^{-\rho}$ によりおさえられる．これから $\hat{h}_q$ も，$\hat{f}_q$ と同様の条件を満たすことが示される．すなわち h も C^∞ 級なのである．

そこで α が Diophantus 条件を満たさない場合を考えよう．C_0^∞ で S^1 上の C^∞ 関数で積分値が 0 のもののなすフレッシェ空間を表す．

定理 2.10. 非 Diophantus 数 α に対し C_0^∞ の残留集合 $\mathcal{R}_\alpha$ が定まり，$f \in \mathcal{R}_\alpha$ のとき $F_{\alpha,f}$ は極小集合を持たない．

事実 2.9. と定理 2.10. が好対照をなしているのがおわかりいただけよう．

3. ホロサイクル流

ポアンカレ上半平面とは $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \Im(z) > 0\}$ にリーマン計量 $m_P = |dz|/\Im(z)$ を与えたものであり，曲率 -1 かつ完備な単連結曲面として特徴づけられる．射影化群 $PSL(2,\mathbb{R})$ は一次分数変換として $\mathbb{H}$ に作用する．すなわち

$$\pm\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}.$$

$\mathbb{H}$ の等角同値写像の全体は $(\mathbb{H}, m_P)$ の向きを保つ等長変換の全体と等しく，また $PSL(2,\mathbb{R})$ と一致している．

$\mathbb{H}$ 上に基準点として i をとり，基準単位ベクトルとして i における垂直上向きベクトル ξ_0 をとる．このとき任意の点における任意の単位ベクトル ξ に対し $PSL(2.\mathbb{R})$ の元 γ で $\gamma_*(\xi_0) = \xi$ を満たすものがただ一つ存在する．そこで $\mathbb{H}$ の単位接束 $T_1\mathbb{H}$ と $PSL(2;\mathbb{R})$ とを同一視することができる．このとき自然な射影 $p : PSL(2,\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{H}$ は

$$p(\pm\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}) = \frac{ai+b}{ci+d}$$

で与えられる．

さて $PSL(2,\mathbb{R})$ 上に 3 つの流れ g^t, h_-^t, h_+^t が次の 3 つの行列の右作用により定まる．

$$\begin{bmatrix} e^{t/2} & \\ & e^{-t/2} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & t \\ & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & \\ t & 1 \end{bmatrix}.$$

これらは次の関係を満たす．

$$g^t \circ h_-^s = h_-^{se^{-t}} \circ g^t, \quad g^t \circ h_+^s = h_+^{se^t} \circ g^t.$$

すなわち 流れ g^t は h_- の軌道を h_- の別の軌道にうつし，この際時間変数を e^{-t} 倍に縮める．h_+ についても同様であるが，こちらは時間変数を e^t 倍に引き延ばす．

流れ g はいわゆるアノソフ流であり，h_- はその強安定流，h_+ は強不安定流である．g の軌道を自然な射影 p により上半平面 $\mathbb{H}$ に写すと測地線となる．また $h_\pm$ の軌道は $\mathbb{H}$ のホロサイクルに写される．このために g は測地流，$h_\pm$ はホロサイクル流と呼ばれる．

$PSL(2,\mathbb{R})$ の離散部分群 Γ が与えられたとき，測地流およびホロサイクル流は左商空間 $M=\Gamma\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ 上の流れを導く．これも $g, h_\pm$ と表すことにしよう．Γ が有限位数の元を持たないとき，$\Sigma=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ は曲面となり $\Gamma\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ はその単位接束 $T_1(\Sigma)$ と一致する．

この講演ではホロサイクル流のもつ位相的性質を考えたいのであるが，まず次のような古典的結果がある．

定理 3.1. (Hedlund) 商空間 M がコンパクトのとき，ホロサイクル流 $h_\pm$ のすべての軌道は稠密である．

それでは商空間が開多様体のときホロサイクル流はどういう性質を持っているのであろうか．これを考えたいのであるが，離散群 Γ が放物元をもつ場合，ホロサイクル流には周期軌道が現れる．この現象は本講演の標題にあわないので考えないことにしたい．

$PSL(2,\mathbb{R})$ の離散群 Γ は上半平面 $\mathbb{H}$ のみならず，リーマン球面 $\hat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ におけるその境界円 $\hat{\mathbb{R}}=\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ にも作用する．各点 $z\in\mathbb{H}$ の軌道 $\Gamma\cdot z$ の集積点の全体 Λ_Γ は境界円の閉部分集合をなす．これは z の取り方によらず定まり，Γ ー不変である．Λ_Γ を Γ の極限集合という．極限集合は濃度 2 以下か，カントール集合か，$\hat{\mathbb{R}}$ 全体である．最初のふたつの場合，ホロサイクル流は閉集合軌道（時間変数からの埋め込みが固有写像となるということ）を持つことがすぐわかる．これも標題にあわない．

以上をまとめて，離散群 Γ について次を仮定することにする．

仮定 3.2.

(1) Γ は双曲元と単位元のみからなる．

(2) Λ_Γ は $\hat{\mathbb{R}}$ と一致する．

(3) 商空間 $M=\Gamma\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ はコンパクトでない．

（3）は商曲面 $\Sigma=\Gamma\backslash\mathbb{H}$ がコンパクトでないということと同値．またこれらの仮定の下 Γ は無限生成となり，よって商曲面 Σ はエンド集合ないしは種数が無限．

このときまずわかることは：

命題 3.3. 仮定 3.2 のもとで，商空間 $\Gamma\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ 上のホロサイクル流 $h_\pm$ は稠密な軌道と稠密でない軌道をもつ．

以下話を決めるためホロサイクル流として h_- を考えることとする．$PSL(2,\mathbb{R})$ における流れ h_- の軌道のなす空間 $\mathcal{A}$ は次であたえられる．

$$\mathcal{A}=PSL(2,\mathbb{R})/\{\pm\begin{bmatrix}1 & t\\ & 1\end{bmatrix}\}=(\mathbb{R}^2-\{0\})/\pm.$$

群 $PSL(2,\mathbb{R})$ は自然に $\mathcal{A}$ 上に左から作用する．この作用は $SL(2,\mathbb{R})$ の $\mathbb{R}^2-\{0\}$ 上への行列としての作用の射影化にすぎない．商空間 $\Gamma\backslash PSL(2,\mathbb{R})$ 上のホロサイクル流の位相的性質は離散部分群 Γ の $\mathcal{A}$ へ

の作用の位相的性質と対応する．例えば命題3.3からΓ-作用は$\mathcal{A}$上に稠密な軌道と稠密でない軌道を持つことが知れる．

ところでこの作用は，原点をとおる直線族を保存し，スカラー倍と可換である．この性質は前章の同相写像と共通である．そこで点$x \in \mathcal{A}$に対し$\mathbb{R}$の閉半群$L_\Gamma(x)$を

$$L_\Gamma(x) = \{t \in \mathbb{R} \mid e^t x \in \mathrm{Cl}(\Gamma \cdot \mathrm{x})\},\ \text{ここに } \Gamma \cdot \mathrm{x} \text{ は } \mathrm{x} \text{ の軌道.}$$

にて定める．このとき$L_\Gamma(e^t x) = L_\Gamma(x)$が成り立ち，$L_\Gamma$は$[x] \in \mathcal{A}/\mathbb{R}_{>0} = \mathbb{R}P^1$の不変量である．$\mathbb{R}P^1$は上半平面$\mathbb{H}$の境界$\hat{\mathbb{R}}$と自然に同一視される．

前章と同じく$L_\Gamma(x) = \mathbb{R}$はxの軌道$\Gamma \cdot x$が稠密であることと同値である．しかし今の場合はさらに次が成り立つ．

命題 3.4. $L_\Gamma(x)$が負の元をもてば，$L_\Gamma(x) = \mathbb{R}$である．

仮定3.2により，Γの元は双曲的行列であり，絶対値> 1の固有値と絶対値< 1の固有値をもつ．各々に対応する固有空間は$\mathcal{A}$の直線を定めるが，命題3.4からわかるように点xがこの直線上にあるとき$L_\Gamma(x) = \mathbb{R}$である．

さて仮定3.2を満たすとき，ホロサイクル流は極小集合をもつであろうかという問題であるが，閉集合軌道をもつ例を作ることができると思うがよくわからない．極小集合をもたない例は容易に作ることができる．

定義 3.5. 曲面$\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$が緊縛型であるとは，部分曲面の列$\{\Sigma_i\}_{i=1,2,\cdots}$で次を満たすものが存在すること．

（1）Σ_iはコンパクトであり，その境界は単純閉測地線$\partial_j \Sigma_i$の和集合である．

（2）$\Sigma_i \subset \Sigma_{i+1}$かつ$\cup_i \Sigma_i = \Sigma$.

（3）ある正数Cが存在して，任意のi, jに対し$\partial_j \Sigma_i$の長さはC以下．

定理 3.6. 緊縛型曲面$\Sigma = \Gamma \backslash \mathbb{H}$の単位接束$T_1\Sigma = \Gamma \backslash PSL(2, \mathbb{R})$上のホロサイクル流は極小集合を持たない．

この定理の結論を言い換えると，任意の$x \in \mathcal{A}$に対し次のいずれかが成り立つ．

（1） $L_\Gamma(x) = \mathbb{R}$.

（2） $L_\Gamma(x)$は負の数を含まず，ある正の数を含む．

閉曲面の無限アーベル被覆，とくにホモロジー被覆は緊縛型である．これらに対して$L_\Gamma(x)$の様子を調べるのはおもしろい問題であろうと思うが，余りよくわからない．とくに$L_\Gamma(x) = \mathbb{R}_{\geq 0}$となることがあるのか否か未解決である．

Haefliger 結び目の幾何公式

高瀬将道 (横浜国立大学)

於 松本市中央公民館 (平成 15 年 7 月 20 日)

1 背景と結果

1.1 球面の埋め込み

球面の球面への埋め込み

$$f\colon S^n \hookrightarrow S^{n+q}$$

を考えます. PL (Piecewise Linear) のカテゴリーで考えれば, Zeeman [11] の結び目解消定理によって, 余次元 $q \geq 3$ ならば f は自明です. すなわち, $f(S^n)$ は S^{n+q} の中で PL-円盤をバウンドします. このことから, 余次元 $q=2$ の場合が特に重要な研究対象になっていて, (高次元) 結び目理論と呼ばれます.

けれども Haefliger は, 微分同相のカテゴリーでは $q \geq 3$ であっても f は必ずしも自明ではないことを 1960 年代に示しています [5, 6]. すなわち,

$$C_n^q := \{S^n \text{ の } S^{n+q} \text{ への埋め込みの } C^\infty \text{ イソトピー類}\} \quad (q \geq 2)$$

とすると, C_n^q は連結和という操作によって群になりますが, この C_n^q はさまざまな次元対 $(n+q, n)$ に対して非自明です. 微分同相のカテゴリーでは余次元が 3 以上の「結び目理論」があるのです.

1.2 $(6k, 4k-1)$-Haefliger 結び目

この余次元が 3 以上の「結び目理論」に関して, 最初に示され, またある意味で最も大事だと思われるのは, 同型

$$\Omega\colon C_{4k-1}^{2k+1} \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z} \quad (k \geq 1)$$

です [5, 6, 7]. Haefliger の不変量は, 埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対して, $F(S^{4k-1}) \subset S^{6k} = \partial D^{6k+1}$ を境界に持つ normally framed な $4k$ 次元多様体 $V^{4k} \subset D^{6k+1}$ のある $2k$ 次元コサイクルを使って定義されます. また, Hefliger は $C_{4k-1}^{2k+1} \approx \mathbb{Z}$ の生成元 (を表す埋め込み) も具体的に作っています.

例えば, 「S^3 が S^6 内で結ばる」ことが分かり, 微分同相のカテゴリーでの状況は Zeeman の定理が示す PL の場合とは著しく異なります.

1.3 結果

今回は, 上の同型 $\Omega\colon C_{4k-1}^{2k+1} \approx \mathbb{Z} \quad (k \geq 1)$ に対して, 新しい公式を与えました. その公式は, 与えられた $(4k-1)$ 次元球面の埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対して, 有向 $4k$ 次元多様体 V^{4k} のはめ込み (または埋め込み) による S^{6k} 内での拡張 $\tilde{F}\colon V^{4k} \looparrowright S^{6k}$ を考えることによって得られます. ちょうど余次元 2 の埋め込みに対して Seifert 膜を考えることに相当していて, 球面の余次元 2 の埋め込みの Smale 不変量が埋め込みに対する Seifert 膜の指数で決定されるという Hughes-Melvin による研究 [9] が最初の動機になっています.

主定理は次です．

定理 1. 任意の埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対し，S^{4k-1} を境界に持つようなコンパクト有向 $4k$ 次元多様体 V^{4k} の自己横断的なはめ込み $\widetilde{F}\colon V^{4k} \looparrowright S^{6k}$ で，$\widetilde{F}|_{\partial V^{4k}} = F$ かつ $\widetilde{F}(\mathrm{Int}\,V^{4k}) \cap F(S^{4k-1}) = \emptyset$ となるようなものがあり，次は同型である：

$$\begin{array}{cccc} \Omega\colon & C^{2k+1}_{4k-1} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & F & \longmapsto & -\frac{1}{24}(-\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}] + 3t(\widetilde{F}) + 3[\Delta_{\widetilde{F}}] + 3H_{\widetilde{F}}). \end{array}$$

ここで，$\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}]$ は閉多様体 $\widehat{V}^{4k} := V^{4k} \cup D^{4k}$ の法 Pontrjagin 数，$t(\widetilde{F})$ は $\widetilde{F}(V^{4k})$ の 3 重点の代数的数，$[\Delta_{\widetilde{F}}] \in H_{2k}(S^{6k} \setminus F(S^{4k-1})) = \mathbb{Z}$ は $\widetilde{F}$ の 2 重点集合 $\Delta_{\widetilde{F}} \subset \widetilde{F}(V^{4k})$ が表す $S^{6k} \setminus F(S^{4k-1}) \cong \mathrm{Int}\,D^{4k} \times S^{2k}$ のホモロジー類，$H_{\widetilde{F}} \in \mathbb{Z}$ は $F(S^{4k-1}) \subset \widetilde{F}(V^{4k})$ の外向きの法ベクトル場が定める写像 $S^{4k-1} \to S^{6k} \setminus F(S^{4k-1}) \simeq S^{2k}$ の Hopf 不変量である．

この定理に現れるようなはめ込み $\widetilde{F}\colon V^{4k} \looparrowright S^{6k}$ を F に対する <u>Seifert はめ込み</u> と呼ぶことにします．すなわち，$\widetilde{F}\colon V^{4k} \looparrowright S^{6k}$ は，S^{4k-1} を境界に持つようなコンパクト有向 $4k$ 次元多様体 V^{4k} のはめ込みで，$\widetilde{F}|_{\partial V^{4k}} = F$ かつ $\widetilde{F}(\mathrm{Int}\,V^{4k}) \cap F(S^{4k-1}) = \emptyset$ となるようなものです．

実際には，Seifert はめ込みはいつも埋め込みにとれることが分かり，次のより簡単な公式を得ます．

系 2. (a) 任意の埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対し，S^{4k-1} を境界に持つようなコンパクト有向 $4k$ 次元多様体 V^{4k} の埋め込み $\widetilde{F}\colon V^{4k} \hookrightarrow S^{6k}$ で $\widetilde{F}|_{\partial V^{4k}} = F$ となるものがあり，

$$\Omega(F) \quad = -\tfrac{1}{24}(-\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}] + 3H_{\widetilde{F}})$$

は同型 $\Omega\colon C^{2k+1}_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を与える．実はさらに，

(b) 任意の埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対し，埋め込み $\widetilde{F}\colon S^{2k} \times S^{2k} \setminus \mathrm{Int}\,D^{4k} \hookrightarrow S^{6k}$ で $\widetilde{F}|_{\partial V^{4k}} = F$ となるものがあり，

$$\Omega(F) \quad = -\tfrac{1}{8}H_{\widetilde{F}}$$

は同型 $\Omega\colon C^{2k+1}_{4k-1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を与える．

特に C^3_3 $(k=1)$ の場合には，Hirzebruch の指数定理によって，$-\bar{p}_1[\widehat{V}^4] = p_1[\widehat{V}^4] = 3\sigma(V^4)$ であるので，公式はさらに 4 次元多様体の指数を使って書き直すことができます．

また，埋め込む先の球面を更に高い次元の球面に包含していくことにより，準同型 $C^q_n \to C^{q+1}_n$ が誘導されますが，これに関して，通常の結び目理論 C^2_{4k-1} から Haefliger 結び目 C^{2k+1}_{4k-1} への準同型の像が，

$$\frac{j_k a_k (2k-1)!}{24}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \approx C^{2k+1}_{4k-1}$$

に一致することを得ました．ここで，j_k は Hopf–Whitehead J-準同型 $J\colon \pi_{4k-1}(SO(4k+1)) \to \pi_{8k}(S^{4k+1})$ の像の位数，$a_k = 2$ (k が奇数のとき) または $a_k = 1$ (k が偶数のとき) です (定理 9)．

2　二つの準備

2.1　Szűcs の linking

$G\colon W^{4k} \to \mathbb{R}^{6k}$ を有向 $4k$ 次元多様体 W から $6k$ 次元空間 $\mathbb{R}^{6k}$ への安定写像とします．

このとき，G は 0 次元の 3 重点を持ちますが，G の余次元が偶数であることから，各 3 重点には自然に向きが入ります．G の 3 重点の代数的な数を $t(G)$ と表すことにします．

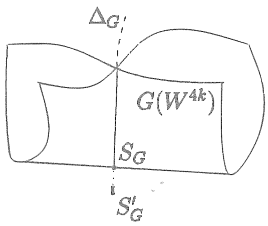


図 1:

また, G の 2 重点の集合 $\Delta_G \subset \mathbf{R}^{6k}$ は $2k$ 次元のはめ込まれた多様体になりますが, その境界には Whitney の傘と呼ばれる $(2k-1)$ 次元の特異点の集合 $S_G \subset \mathbf{R}^{6k}$ が現れます. 2 重点の集合 Δ_G にも自然に向きが入ることが知られているので, S_G を $\partial\Delta_G \subset \Delta_G$ の外向きの法ベクトル場に沿って少し押し出すことができます. これを $S'_G \subset \mathbf{R}^{6k} \setminus G(W^{4k})$ と表すことにします (図 1).

このとき, A. Szűcs [10] によって, <u>G の絡み数</u> $l(G)$ を

$$l(G) := G(W^{4k}) \text{ と } S'_G \text{の } (\mathbf{R}^{6k} \text{ 内での}) \text{ 絡み数}$$

と定義すると, 次の公式が成立します.

定理 3 (Szűcs [10], Ekholm-Szűcs [4]). $G\colon W^{4k} \to \mathbf{R}^{6k}$ を有向 $4k$ 次元多様体 W^{4k} から $6k$ 次元空間への安定写像とする. このとき,

$$-\bar{p}_k[W^{4k}] + 3t(G) - 3l(G) = 0,$$

ここで, $\bar{p}_k[W^{4k}]$ は W^{4k} の法 Pontrjagin 数とする.

特に, G がはめ込みである (つまり特異点を持たない) ときには, かつてよく研究されていた, 多様体の (自己横断的な) はめ込みの多重点の個数を多様体の (法) 特性数を使って評価するというタイプの公式を得ます (Herbert [8] など参照).

2.2 Haefliger の生成元

Haefliger が構成した $C^{2k+1}_{4k-1} \approx \mathbb{Z}$ の生成元は, 図 2 に表されています.

すなわち, $6k$ 次元球面 S^{6k} を $\mathbf{R}^{6k} \cup \{1\text{点}\}$ と考え,

$$\mathbf{R}^{6k} = \{(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = (x_1,\ldots,x_{2k},y_1,\ldots,y_{2k},z_1,\ldots,z_{2k})\}$$

に互いに交わらないように埋め込まれた 3 つの $(4k-1)$-球面

$$\begin{aligned}
S_1:&\quad \mathbf{x}=0, \frac{\mathbf{y}^2}{\alpha^2}+\frac{\mathbf{z}^2}{\beta^2}=1 \quad \subset \mathbf{R}^{4k}_1 := \{\mathbf{x}=0\},\\
S_2:&\quad \mathbf{y}=0, \frac{\mathbf{z}^2}{\alpha^2}+\frac{\mathbf{x}^2}{\beta^2}=1 \quad \subset \mathbf{R}^{4k}_2 := \{\mathbf{y}=0\},\\
S_3:&\quad \mathbf{z}=0, \frac{\mathbf{x}^2}{\alpha^2}+\frac{\mathbf{y}^2}{\beta^2}=1 \quad \subset \mathbf{R}^{4k}_3 := \{\mathbf{z}=0\},
\end{aligned}$$

($\alpha > \beta > 0$, また $\mathbf{x}^2 = x_1^2 + \cdots + x_{2k}^2$) を考えます. 図 2 は, この「高次元の Borromean rings」の 3 つの成分を 2 本の細いチューブで連結したものを表していて, このようなものを像に持つような埋め込み

$$E\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$$

が, $C^{2k+1}_{4k-1} \approx \mathbb{Z}$ の生成元を表しています.

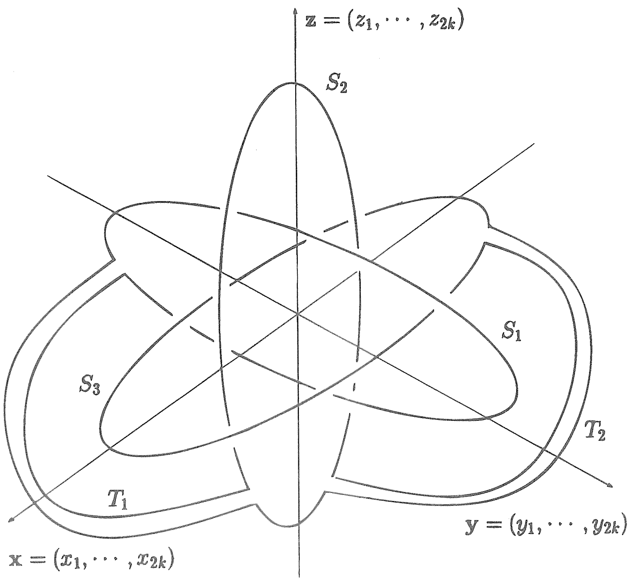


図 2:

3 主定理の証明の概略

主定理の証明は二つのステップで行われます．まず，与えられた埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対して，

$$\Theta(F) := -\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}] + 3t(\widetilde{F}) + 3[\Delta_{\widetilde{F}}] + 3H_{\widetilde{F}}$$

が Seifert はめ込み $\widetilde{F}$ の取り方によらず F のイソトピー類だけによることを示します (Step 1)．この Θ の各項が連結和や境界連結和に関して加法的であることはすぐ分かります．次に Θ が非自明であることを示します．つまり，Haefliger の生成元 E に対する Θ の値を計算し，

$$\Theta(E) = -24$$

を示します (Step 2)．

3.1 Step 1

補題 4. 埋め込み $F\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ の二つの Seifert はめ込み $\widetilde{F}_i\colon V_i^{4k} \hookrightarrow S^{6k}$ $(i = 0, 1)$ に対して，

$$-\bar{p}_k[\widehat{V}_0^{4k}] + 3t(\widetilde{F}_0) + 3[\Delta_{\widetilde{F}_0}] + 3H_{\widetilde{F}_0} = -\bar{p}_k[\widehat{V}_1^{4k}] + 3t(\widetilde{F}_1) + 3[\Delta_{\widetilde{F}_1}] + 3H_{\widetilde{F}_1}$$

である．

証明. 2 つの Seifert はめ込み F_0, F_1 を境界部分で貼り合わせ，適当な smoothing を行い，写像

$$G := \widetilde{F}_1 \cup (-\widetilde{F}_0)\colon W^{4k} \longrightarrow S^{6k}$$

を作ります．ここで，$W^{4k} := V_1^{4k} \cup_\partial (-V_0^{4k})$ です．

この写像 G はほとんど場所ではめ込みになっていますが, 貼り合わせのところでは特異点が生じているかもしれないので, 一般にははめ込みにはなりません. そこで, G に定理 3 の公式

$$-\bar{p}_k[W^{4k}]+3t(G)-3l(G)=0.$$

を適用し, 各項について,

$$\begin{aligned}\bar{p}_k[W^{4k}] &= \bar{p}_k[\widehat{V}_1^{4k}]-\bar{p}_k[\widehat{V}_0^{4k}],\\ t(G) &= t(\widetilde{F}_1)-t(\widetilde{F}_0)+[\Delta_{\widetilde{F}_1}]-[\Delta_{\widetilde{F}_0}],\\ -l(G) &= H_{\widetilde{F}_1}-H_{\widetilde{F}_0}\end{aligned}$$

を示そうというのが証明のアイディアです. このうち, $\bar{p}_k[W^{4k}]$ についてはすぐ分かりますが, $t(G)$ と $l(G)$ については, 符号 (向き) については詳しく述べられませんが, 大体以下のような議論です.

3 重点 $t(G)$ について. まず, G の 3 重点の数 $t(G)$ を調べます. G の 3 重点は $\widetilde{F}_0$ と $\widetilde{F}_1$ にもともとある 3 重点の他に, $\widetilde{F}_0$ の 2 重点集合が $\widetilde{F}_1$ の像とぶつかってできる 3 重点と $\widetilde{F}_1$ の 2 重点集合が $\widetilde{F}_0$ の像とぶつかってできる 3 重点があります. これらの新しくできる 3 重点は,

$$\widetilde{F}_1(\mathrm{Int}\,V_1^{4k})\cap\Delta_{\widetilde{F}_0}-\widetilde{F}_0(\mathrm{Int}\,V_0^{4k})\cap\Delta_{\widetilde{F}_1}$$

と書けます. ところが, $F(S^{4k-1})$ は $\widetilde{F}_i(\mathrm{Int}\,V_i^{4k})$ $(i=0,1)$ と交わらないので, $\widetilde{F}_i(\mathrm{Int}\,V_i^{4k})\cap\Delta_{\widetilde{F}_j}$ は,

$$\mathrm{lk}\,(F(S^{4k-1}),\Delta_{\widetilde{F}_j})=-\mathrm{lk}\,(\Delta_{\widetilde{F}_j},F(S^{4k-1}))=-[\Delta_{\widetilde{F}_j}]\quad\in H_{2k}(X)=\mathbb{Z}$$

$((i,j)=(0,1),(1,0))$ に等しくなります. 結局, 新しくできる 3 重点の代数的数は,

$$[\Delta_{\widetilde{F}_1}]-[\Delta_{\widetilde{F}_0}]\in H_{2k}(X)=\mathbb{Z}$$

となり,

$$t(G)=t(\widetilde{F}_1)-t(\widetilde{F}_0)+[\Delta_{\widetilde{F}_1}]-[\Delta_{\widetilde{F}_0}]$$

です.

Szűcs の linking $l(G)$ について. 次に, $\widetilde{F}_0$ と $\widetilde{F}_1$ を貼りあわせるときにできる特異点について調べます. まず, 各 $\widetilde{F}_i$ は境界の近くで埋め込みになっているとしてよいので, $F(S^{4k-1})\subset S^{6k}$ の管状近傍 $N\subset S^{6k}$ の自明化 $N\cong S^{4k-1}\times D^{2k+1}$ を一つとれば, $F(S^{4k-1})\subset\widetilde{F}_i(V_i^{4k})$ の内向きの法ベクトルはそれぞれ写像 $\nu_i\colon S^{4k-1}\to\partial N\cong S^{4k-1}\times S^{2k}\to S^{2k}$ $(i=0,1)$ を定めます. 以前に定義した $[\nu_{\widetilde{F}_i}]\in\pi_{4k-1}(X)=\pi_{4k-1}(S^{2k})$ は N の自明化などによらずにきまるものであったので, ここでの写像のホモトピー類 $[\nu_i]\in\pi_{4k-1}(S^{2k})$ とは異なるものですが, $[\nu_1]-[\nu_0]=[\nu_{\widetilde{F}_1}]-[\nu_{\widetilde{F}_0}]$ となることを注意しておきます.

S^{4k-1} の北半球, 南半球をそれぞれ NH, SH とし, $q_0,q_1\in S^{2k}$ を S^{2k} の点, $-q_0,-q_1\in S^{2k}$ をそれぞれの対蹠点とします. このとき, 写像 $\nu_i\colon S^{4k-1}\to\partial N\cong S^{4k-1}\times S^{2k}\to S^{2k}$ $(i=0,1)$ について次のように仮定することができます (図 3 は北半球の様子を描いています):

(1) $\nu_0(x)=q_0$ $(x\in\mathrm{NH})$,

(2) $\nu_1(x)=q_1$ $(x\in\mathrm{SH})$,

(3) q_1 と $-q_1$ は ν_0 の正則点,

(4) q_0 と $-q_0$ は ν_1 の正則点.

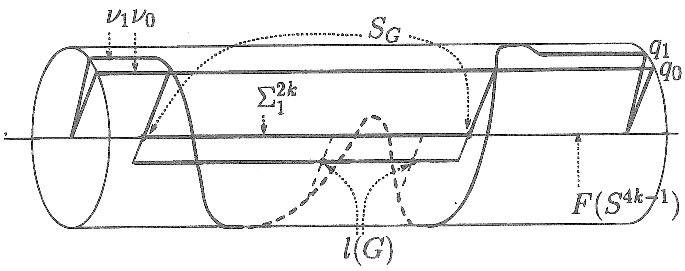


図 3:

このとき, 例えば境界の近くの北半球部分 $\mathrm{NH} \times [-1,0] \subset S^{4k-1} \times [-1,0] \subset V_0^{4k}$, $\mathrm{NH} \times [0,1] \subset S^{4k-1} \times [0,1] \subset V_1^{4k}$ での写像 $\widetilde{F}_0, \widetilde{F}_1$ の様子は次のように書けます:

$$\begin{array}{llcll} \widetilde{F}_0: & \mathrm{NH} \times [-1,0) & \to & S^{4k-1} \times D^{2k+1} & \subset S^{6k} \\ & (x,t) & \mapsto & (F(x),(q_0,-t)), & \\ \widetilde{F}_1: & \mathrm{NH} \times (0,1] & \to & S^{4k-1} \times D^{2k+1} & \subset S^{6k} \\ & (x,t) & \mapsto & (F(x),(\nu_1(x),t)), & \end{array}$$

$$\widetilde{F}_0(x,0) = \widetilde{F}_1(x,0) = F(x), \quad (x,0) \in \mathrm{NH} \times [0,1],$$

ここで, 右辺では D^{2k+1} を $S^{2k} \times (0,1] \cup \{0\}$ とみなしています (図 3 参照). 南半球では添え字を取り替えたようになっています.

従って, $S^{4k-1} \times D^{2k+1} \subset S^{6k}$ に, G の 2 重点集合 Δ_G の端の部分

$$F({\nu_1}^{-1}(q_0)) \times (\{q_0\} \times (0,1]) \ \cup\ -F({\nu_0}^{-1}(q_1)) \times (\{q_1\} \times (0,1]).$$

が見えています. よって, G の $(2k-1)$ 次元の特異点集合 S_G は

$$S_G = F({\nu_1}^{-1}(q_0)) \times \{0\} \ \cup\ -F({\nu_0}^{-1}(q_1)) \times \{0\} \quad \subset S^{4k-1} \times D^{2k+1}.$$

となります.

さてここで, Szűcs の絡み数 $l(G)$ を計算します. 定義から, $l(G)$ は $G(W^{4k})$ と各 $F({\nu_j}^{-1}(q_i)) \times \{0\}$ を $q_i \in S^{2k}$ の対蹠方向に押し出したものとの絡み数 $((i,j) = (0,1),(1,0))$ です. すなわち, $l(G)$ は充分小さい実数 $\epsilon \in (0,1)$ に対して

$$\begin{aligned} &\mathrm{lk}\,(\ G(W^{4k})\ ,\ F({\nu_1}^{-1}(q_0)) \times \{(-q_0,\epsilon)\} \cup -F({\nu_0}^{-1}(q_1)) \times \{(-q_1,\epsilon)\}\ ) \\ &= \mathrm{lk}\,(\ G(W^{4k})\ ,\ F({\nu_1}^{-1}(q_0)) \times \{(-q_0,\epsilon)\}\ ) \ -\ \mathrm{lk}\,(\ G(W^{4k})\ ,\ F({\nu_0}^{-1}(q_1)) \times \{(-q_1,\epsilon)\}\ ) \end{aligned}$$

に他なりません. つまり, Σ_1^{2k} を S^{4k-1} の $2k$ 次元チェインで ${\nu_1}^{-1}(q_0)$ を境界に持つものとすると,

$$\begin{aligned} &\mathrm{lk}\,(\ G(W^{4k})\ ,\ F({\nu_1}^{-1}(q_0)) \times \{(-q_0,\epsilon)\}\ ) \\ &= -\mathrm{lk}\,(\ F({\nu_1}^{-1}(q_0)) \times \{(-q_0,\epsilon)\}\ ,\ G(W^{4k})\ ) \\ &= -[\ F(\Sigma_1^{2k}) \times \{(-q_0,\epsilon)\} \cap \widetilde{F}_1(S^{4k-1} \times (0,1])\ ] && (\in H_0(F(S^{4k-1}) \times D^{2k+1})) \\ &= -[\ F(\Sigma_1^{2k}) \times \{(-q_0,\epsilon)\} \cap F({\nu_1}^{-1}(-q_0)) \times \{(-q_0,\epsilon)\}\ ] && (\in H_0(F(S^{4k-1}) \times \{(-q_0,\epsilon)\})) \\ &= -[\ F(\Sigma_1^{2k}) \cap F(\nu_1^{-1}(-q_0))\ ] && (\in H_0(F(S^{4k-1}))) \\ &= -[\ \Sigma_1^{2k} \cap \nu_1^{-1}(-q_0))\ ] && (\in H_0(S^{4k-1})) \\ &= -{\nu_1}^{-1}(q_0) \text{ と } {\nu_1}^{-1}(-q_0) \text{ の } S^{4k-1} \text{ 内での絡み数} \end{aligned}$$

となります. ここで, 最後の絡み数こそ $[\nu_1]$ の Hopf 不変量そのものです. 南半球でも同様の議論を行うことにより結局,

$$\begin{aligned} -l(G) &= \nu_1 \text{の Hopf 不変量} - \nu_0 \text{の Hopf 不変量} \\ &= H_{\widetilde{F}_1} - H_{\widetilde{F}_0}. \end{aligned}$$

となります.

Szűcs の公式. 従って, 定理 3 の公式 $-\bar{p}_k[W^{4k}] + 3t(G) - 3l(G) = 0$ を G に適用し,

$$\begin{aligned} \bar{p}_k[W^{4k}] &= \bar{p}_k[\widehat{V}_1^{4k}] - \bar{p}_k[\widehat{V}_0^{4k}], \\ t(G) &= t(\widetilde{F}_1) - t(\widetilde{F}_0) + [\Delta_{\widetilde{F}_1}] - [\Delta_{\widetilde{F}_0}], \\ -l(G) &= H_{\widetilde{F}_1} - H_{\widetilde{F}_0}. \end{aligned}$$

を代入して,

$$-\bar{p}_k[\widehat{V}_1^{4k}] + 3t(\widetilde{F}_1) + 3[\Delta_{\widetilde{F}_1}] + 3H_{\widetilde{F}_1} = -\bar{p}_k[\widehat{V}_0^{4k}] + 3t(\widetilde{F}_0) + 3[\Delta_{\widetilde{F}_0}] + 3H_{\widetilde{F}_0}.$$

を得ます. □

注. 上の命題は $\Theta(F)$ が F に対する Seifert はめ込みの取り方によらないことを示しています. また, イソトピーを微分同相のカテゴリーでのアンビエント・イソトピーと思えば明らかに, 写像 Θ は F のイソトピー類に関してうまく定義されています. さらに, Θ の各項は埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ の連結和またはそれらの Seifert はめ込みの境界連結和に関して加法的なので結局, 準同型 Θ: $C_{4k-1}^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ を得ます.

3.2 Step 2

上で得た準同型 Θ: $C_{4k-1}^{2k+1} \longrightarrow \mathbb{Z}$ が非自明であること見るため, 生成元に対する値を計算します.

補題 5. Haefliger の生成元 E に対して, $\Theta(E) = -24$. □

Θ の値を計算するために, 埋め込み E に対する Seifert はめ込み, すなわち E を拡張する $4k$ 次元多様体からのはめ込みであって,

$$\widetilde{F}(\mathrm{Int}\, V^{4k}) \cap F(S^{4k-1}) = \emptyset$$

であるものを構成しなければなりません.

まず考え付くのは, 図 2 の E の像に「当たり前に」— 3 つの $(4k-1)$ 次元球面 S_1, S_2, S_3 と 2 本のチューブに普通に — $4k$ 次元円盤を張ることでが, このはめ込み (の像) は $4k$ 次元円盤の境界と内点をぶつけているので, Seifert はめ込みにはなっていません. それを回避するように「手術」を施したものが図 4 です.

こうして得られた E に対する Seifert はめ込み $\widetilde{E}$ を用いて $\Theta(E)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} \Theta(E) &= 0 + 3t(\widetilde{E}) + 3[\Delta_{\widetilde{E}}] + 3H_{\widetilde{E}} \\ &= 0 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-3) + 3 \cdot (-6) \\ &= -24 \end{aligned}$$

という具合にして, 上の補題を得ます.

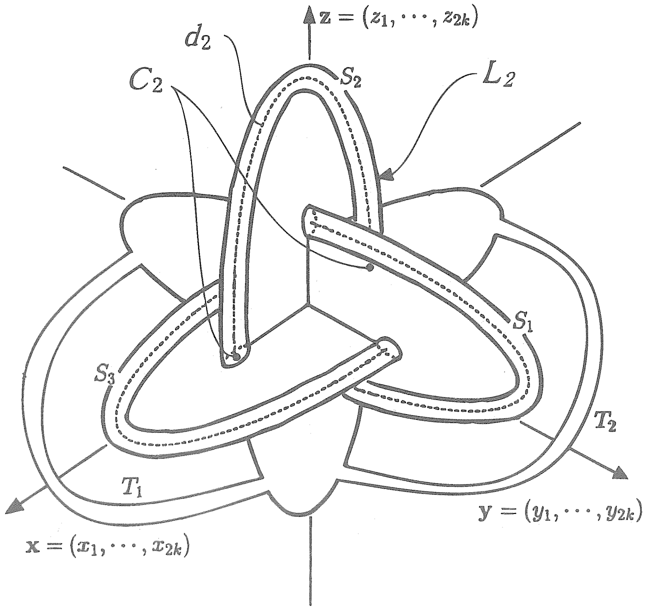


図 4:

実際の計算では，Hopf 不変量 $H_{\tilde{E}}$ の計算がかなり面倒で，「Steenrod の functional cup 積」という cohomology 上の量に読み替え，homology の交叉の話に持ち込むことで計算しました．が，後で Boéchat [2] の論文の中で実質的に $H_{\tilde{E}} = -6$ が得られているのを発見したので，詳しくは省略します．

4 系について

実は，定理 1 中の Seifert はめ込みはいつも埋め込みに取ることができます．すなわち，任意の埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ は有向 $4k$ 次元多様体の埋め込みに拡張することができるのます．しかし，このことを示すのに余次元 2 の埋め込みに Seifert 膜を張るときに用いるような方法はうまく使えません。通常の Seifert 膜を張る方法は "normally framed" な埋め込みへの拡張を与えていますが，今の場合 $6k$ 次元球面の中でこれをするのは必ずしも可能でないことが分かるからです．

証明は省きますが，系 2 は，次の二つの命題に従います．

命題 6. $\widehat{V}^{4k}$ を有向閉 $4k$ 次元多様体とし，$V^{4k} := \widehat{V}^{4k} \setminus \operatorname{Int} D^{4k}$ とする．$\widetilde{F}\colon V^{4k} \hookrightarrow S^{6k}$ を法 Euler 類 $e_{\widetilde{F}} \in H^{2k}(V^{4k}) = H^{2k}(\widehat{V}^{4k})$ を持つ埋め込みとするとき，$\widetilde{F}$ に付随する Hopf 不変量 $H_{\widetilde{F}}$ は，

$$e_{\widetilde{F}} \smile e_{\widetilde{F}} \in H^{4k}(\widehat{V}^{4k}) = \mathbb{Z}$$

に等しい．

命題 7. $M^{4k} := S^{2k} \times S^{2k} \setminus \operatorname{Int} D^{4k}$ と置く．このとき，はめ込み $M^{4k} \looparrowright \mathbb{R}^{6k}$ の法 Euler 類は $2c^{2k}$ ($c^{2k} \in H^{2k}(M^{4k})$) の形に書ける．また，任意の $c^{2k} \in H^{2k}(M^{4k})$ に対して，法 Euler 類が $2c^{2k}$ であるような埋め込み $M^{4k} \hookrightarrow \mathbb{R}^{6k}$ が存在する．

実際，上の二つの命題を合わせることにより，次を得ます．

系 8. $\widetilde{E}_{a,b}\colon M^{4k} \hookrightarrow S^{6k}$ を $(2a,2b) \in H^{2k}(M^{4k}) = H^{2k}(S^{2k}\times S^{2k}) \approx \mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ を法 Euler 類に持つような $M^{4k} := S^{2k}\times S^{2k} \setminus \operatorname{Int} D^{4k}$ の埋め込みとする．このとき，

$$E_{a,b} := \widetilde{E}_{a,b}|_{\partial M^{4k}}\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$$

は $-ab \in C^{2k+1}_{4k-1} = \mathbb{Z}$ を表す．特に，$E_{\pm1,\mp1}\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ は C^{2k+1}_{4k-1} の生成元を表す．

注. 上の系により，「任意の埋め込み $S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ は $S^{2k}\times S^{2k} \setminus \operatorname{Int} D^{4k}$ の埋め込みに拡張することができる (*)」ことが分かります．このことにより，定理 1 から直ちに系 2 を得ます．また，系 2 は Boéchat [2], Haefliger–Boéchat [3] の結果と (*) を合わせることでも得られるようです．

5 通常の結び目理論との関係

系 2 は，球面の余次元 2 の埋め込みの Smale 不変量，すなわち正則ホモトピー類に関する，Hughes–Melvin [9] の公式に非常によく似ています．実際このことに関する簡単な考察から，次の定理を得ます．

定理 9. 包含写像 $i\colon S^{4k+1} \hookrightarrow S^{6k}$ によって自然に誘導される準同型 $i_*\colon C^2_{4k-1} \to C^{2k+1}_{4k-1}$ の像は

$$\frac{j_k a_k (2k-1)!}{24}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \approx C^{2k+1}_{4k-1}$$

に一致する．ここで，j_k は Hopf–Whitehead J-準同型 $J\colon \pi_{4k-1}(SO(4k+1)) \to \pi_{8k}(S^{4k+1})$ の像の位数，$a_k = 2$ (k が奇数のとき) または $a_k = 1$ (k が偶数のとき) である．

証明．$f\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{4k+1}$ を埋め込み，$\widetilde{f}\colon V^{4k} \hookrightarrow S^{4k+1}$ を f に対する (通常の)Seifert 膜とします．このとき，Hughes and Melvin [9] によって，$\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}]$ は f の正則ホモトピーの不変量で，従って，イソトピーの不変量です．さらに，$\widehat{V}^{4k}$ は概平行化可能で，全射準同型

$$\begin{array}{cccc} \Omega'\colon & C^2_{4k-1} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & f & \longmapsto & \frac{1}{j_k a_k (2k-1)!}\,\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}] \end{array}$$

があることも分かっています．

また，$i\colon S^{4k+1} \hookrightarrow S^{6k}$ を包含写像とするとき，$i\circ\widetilde{f}\colon V^{4k} \hookrightarrow S^{6k}$ は，埋め込み $i\circ f\colon S^{4k-1} \hookrightarrow S^{6k}$ に対する Seifert はめ込みになっています．このとき，命題 6 から，$i\circ\widetilde{f}$ に付随する Hopf 不変量 $H_{i\circ\widetilde{f}}$ が消えることが分かるので，

$$\Omega(i\circ f) = \frac{1}{24}\bar{p}_k[\widehat{V}^{4k}]$$

を得ます．

従って，以下の可換図式

$$\begin{array}{ccc} C^2_{4k-1} & \xrightarrow[\text{epi.}]{\Omega'} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle i_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \times\frac{j_k a_k (2k-1)!}{24}} \\ C^{2k+1}_{4k-1} & \xrightarrow[\text{iso.}]{\Omega} & \mathbb{Z}, \end{array}$$

を見れば，$i_*\colon C^2_{4k-1} \to C^{2k+1}_{4k-1}$ の像は $\frac{j_k a_k (2k-1)!}{24}\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} = C^{2k+1}_{4k-1}$ に一致することが分かります．□

注. B_k を k 次 Bernoulli 数の既約分数表現とすると，Adams [1] によって，j_k は $|B_k|/4k$ の分母に等しくなります．さらに，Clausen–von Staudt の定理により，B_k の分母は 6 で割り切れることが分かるので，定理 9 中の $j_k a_k (2k-1)!$ は確かに 24 で割り切れることが分かります．

注. Haefliger [6, Corollary 6.7] によると, 各 C_{4k-1}^{q} $(2 < q \leq 2k+1)$ が一つの $\mathbb{Z}$ 成分を持つ以外は, C_{n}^{q} は有限群です. また, i_*: $C_{4k-1}^{3} \otimes \mathbb{Q} \to C_{4k-1}^{2k+1} \otimes \mathbb{Q}$ は同型になります.

注. $k=1$ のとき定理 9 は, 包含写像 $S^5 \hookrightarrow S^6$ に誘導された準同型 $C_3^2 \to C_3^3$ の像が $2\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z} \approx C_3^3$ に一致することを主張していますが, このことは Haefliger [6, Theorem 5.17] に書かれています.

参考文献

[1] J. F. Adams, On the groups $J(X)$. II., Topology 3 (1965), 137–171.

[2] J. Boéchat, Plongements de variétés différentiables orientées de dimension $4k$ dans $\mathbb{R}^{6k+1}$, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 141–161.

[3] J. Boéchat and A. Haefliger, Plongements différentiables des variétés orientées de dimension 4 dans $\mathbb{R}^7$, Essays on Topology and Related Topics (Mémoires dédiés à Georges de Rham) 156–166 (Springer, New York, 1970).

[4] T. Ekholm and A. Szűcs, Geometric formulas for Smale invariants of codimension two immersions, Topology 42 (2003), 171 - 196.

[5] A. Haefliger, Knotted $(4k-1)$-spheres in $6k$-space, Ann. of Math. 75 (1962), 452–466.

[6] A. Haefliger, Differential embeddings of S^n in S^{n+q} for $q \geq 2$, Ann. of Math. 83 (1966), 402–436.

[7] A. Haefliger, Sphère nouées, Atti della 2^a Riunione de Mathématiciens d'expression latine, Firenze (1961), 139–144.

[8] R. J. Herbert, Homology classes of immersed manifolds, Memoirs Amer. Math. Soc. 34 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1984).

[9] J. Hughes and P. Melvin, The Smale invariant of a knot, Comment. Math. Helv. 60 (1985), 615–627.

[10] A. Szűcs, The linking number of singular maps, Comment. Math. Helv. 60 (1986), 360–369.

[11] E. C. Zeeman, Unknotting combinatorial balls, Ann. of Math. 78 (1963), 501–526.

高瀬将道 (takase@ynu.ac.jp)
日本学術振興会特別研究員

平面幾何学における角の向きの活用

九州大学数理学研究院　加藤十吉

1．平面ユークリッド幾何学の基礎公理系

平面Πを全体集合とし，Πを平面と呼び，その部分集合を図形という．2つの図形X,Yについて，$X \neq Y$のとき，図形X,Yを2図形X,Yという．平面の要素を点という．平面Πには直線と呼ばれる図形が指定されていて，以下の公理をみたす．

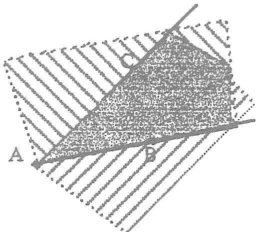
（公理Ⅰ）直線は2点を含み，任意の2点A,Bを含む直線が一意的に存在する ■

この直線をABと書く．2直線a,bが共有点Pをもてば，$a \cap b = P$であり，このとき，a,bはPで交わるといい，a,bが共有点をもたないとき，a,bは平行であるといい，$a /\!/ b$と書く．

（公理Ⅱ）任意の直線aに対し，$\Pi = a_+ \cup a_-$，$a_+ \cap a_- = a$ をみたす図形a_+，a_-が一意的に指定されていて，a外の任意の点Bに対し，$B \in a_+$のとき，a_+を直線aのB側の半平面といい，a_Bと書けば，直線AB外の任意の点Cに対し，図形$|AB = AB \cap AC_B$がCの取り方によらずに一意的に決まる ■

図形$|AB$を頂点Aの半直線といい，$|AB$の頂点以外の点を内点という．

図形$|AB| = |AB \cap |BA$を頂点A,Bの線分といい，$|AB|$の頂点以外の点を内点という．互いに異なる点A,B,Cを3点という．3点A,B,Cについて，点Cが直線AB上にないとき，その任意の点も残りの2点を通る直線上にはなく，A,B,Cは共線でないといい．そうでないとき，3点A,B,Cは共線であるという．共線でない3点A,B,Cに対し，直線ABのC側AB_C，直線ACのB側AC_Bが決まり，図形$AB_C \cap AC_B$が得られ，これを角BACといい，$\angle BAC$と表す．点Aを$\angle BAC$の頂点，

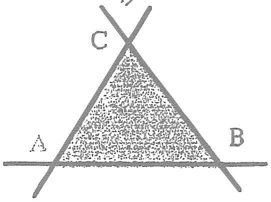


各半直線$|AB$，$|AC$を$\angle BAC$の辺，

辺上にない$\angle BAC$の点を$\angle BAC$の内点という．

また，直線BCのA側BC_Aも決まり，

図形$AB_C \cap BC_A \cap CA_B$が得られ，これを3角形ABCといい，$\triangle ABC$と表す．各点A,B,Cをその頂点，各線分$|AB|$，$|BC|$，$|CA|$を辺，$\triangle ABC$の辺外の点を$\triangle ABC$の内点，$\angle BAC$，$\angle CBA$，$\angle ACB$を$\triangle ABC$の頂角といい，辺$|AB|$を頂角$\angle ACB$に対する辺，頂角$\angle ACB$を辺$|AB|$に対する頂角等という．



平面の全単射である変換$\phi : \Pi \to \Pi$が任意の直線aを直線$\phi(a)$にうつし，a外の点Pに対し，aのP側a_Pを$\phi(a)$の$\phi(P)$側にうつすとき，保線変換という．

平面の保線変換$\phi : \Pi \to \Pi$がaをその不動点集合とし，$\phi(a_+) = a_-$をみた

すとき，直線aに関する鏡映といい，直線aを鏡映ϕの軸という．

（公理III）（1）任意の2点A,Bに対し，AをBにうつす特別な鏡映-合同鏡映- R(A,B)が存在し，（2）直線AB外の任意の点Pに対し，|PAを|PBにうつす合同鏡映R(|PA,|PB)が存在し，（3）有限個の合同鏡映の合成を合同変換といえば，Pおよび|PAを不変にする合同変換は恒等変換または合同鏡映R_{PA}である ■　公理IIIより，

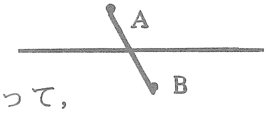
（1.1）（合同鏡映の対合性と合同変換群）合同鏡映は対合性をもつ．さらに，平面の合同変換の全体は群-合同変換群-をなし，平面の点どうしや直線とその 上の点の組どうしに推移的に作用し，任意の直線aを軸とする合同鏡映R_aが一意的に存在する．また，（合同鏡映の存在と一意性）任意の直線aを軸とする合同鏡映が一意的に存在する ■

図形X,Yについて，$\phi(X)=Y$をみたす合同変換$\phi:\Pi\to\Pi$が存在するとき，XとYは合同であるといい，$\phi:X\equiv Y$と書く．図形の間の合同であるという関係は同値関係で，Xと合同な図形の同値類 -合同類-を|X|と書く．同様に，図形の組$\{X_1,X_2\}$どうしについてもその合同類$|\{X_1,X_2\}|$が得られる．（1.1）より，1点Aに対し，$|A|=\Pi$であり，0と書く．点A,Bの組{A,B}については，A=Bのとき，$|\{A,A\}|=|A|=0$であり，$A\neq B$のとき，$|\{A,B\}|\neq|A|=0$．一般に，点A,Bの組{A,B}の合同類|{A,B}|をA,Bの距離といい，‖AB‖と書くと，線分|AB|は2点{A,B}で決まるから，

（1.2）$\|AB\|=\|CD\|\Rightarrow||AB||=||CD||$ ■

この逆が成り立つのを保証するのが次の公理である：

公理Ⅳ（Paschの公理） 直線a外の2点A,Bがaの反対側にあれば，aは線分|AB|と交わる．



（1.3）合同変換は半直線や線分の頂点を保ち，したがって，その内点を保つ．さらに，∠BACの頂点や辺や内点を保つ ■

よって，$||AB||=||CD||\Leftrightarrow\|AB\|=\|CD\|$がいえる．

線分|AB|に対し，‖AB‖を線分|AB|の長さ，∠BACの合同類|∠BAC|を∠BACの大きさという．

（1.4）（合同定理）2つの3角形の対応する部分図形，2辺挟角，2角挟辺または3辺，の合同類の相等により，3角形の合同が判定される ■　また，

（1.5）共線でない3点A,B,Cについて，|∠BAC|は∠BACの2辺の組の合同類|{|AB,|AC}|と同一視される ■

（1.6）（角の2等分線定理）合同鏡映$R(|PA,|PB)=R_g$の軸gは∠APBの頂点Pおよび内点Cを通り，g=PCと書け，|∠APC|=|∠BPC|をみたし，|∠APB|を2等分し，逆に，そのような直線PCはgしかない ■

A以外の点B,Cについて，AB=ACのとき，|AB=|AC ⇒ B,CはAの同じ側にあるといい，|AB≠|AC ⇒ B,CはAの反対側にあるという．

3点A,B,Cが共線でも，∠BACを半直線の組{|AB,|AC}と定義する．

B,CがAの同じ側にあれば，∠BAC={|AB,|AC}=|ABであり，反対側

にあれば，$\angle BAC=\{|AB,|AC\}$を平角という．
$\|AM\|=\|BM\|$をみたす直線AB上の点Mを$|AB|$の中点といい，
$|AB|$の中点Mを通る直線$h=PM$が平角$\angle PMB$を2等分する，つまり
$|\angle PMA|=|\angle PMB|$であるとき，PMを$|AB|$の垂直2等分線という．
平角を2等分する角の大きさ$|\angle PHB|$を直角といい，$\angle R$と表し，このとき，PHはHBに直交するといい，$PH\perp HB$ と書く．
線分$|AB|$の頂点A,Bは合同鏡映$R(A,B)=R_h$の軸hの反対側にあるから，交点$M=h\cap AB$が存在し，さらに，R_hは直線ABを不変にして，hを不動点集合とするから，$R_h:(\angle PMA,|AM|)\equiv(\angle PMB,|BM|)$をみたす．
(1.7)（線分の中点と垂直2等分線の一意性）$|AB|$の中点Mおよび線分$|AB|$の垂直2等分線hが一意的に存在する．さらに，（垂線の存在と一意性）任意の点Pと直線aに対し，Pを通りaに直交する直線が一意的に存在する ■
$|AB|$の垂直2等分線hは，$\|AP\|=\|BP\|$をみたす，つまりA,Bから等距離の点Pの全体のなす図形と特徴付けられ，
(1.8)（外心定理）△ABCの3辺の垂直2等分線が△ABCの外心と呼ばれる1点を共有する ■
1頂角の大きさが直角である3角形を直角3角形といい，直角である頂角に対する辺を斜辺という．△ABCにおいて，つぎの同値が成り立つ：
(1.9) $|\angle BAC|=\angle R \Leftrightarrow$ △ABCの外心が$|BC|$の中点である ■
直線PA上で$\|AP\|=\|PB\|$をみたし，AとはPの反対側にある点BをPに関しAと点対称な点といい，A^Pと書く．実際，$P^P=P$と定義すると，
(1.10) 合同変換$r_P=R(A,A^P)R_{PA}$は任意の点XをX^Pにうつす ■
合同変換r_PをPの周りの点対称変換という．点対称変換の存在により，
(1.11) 平面の任意の半直線どうしは合同になる ■

2.平行線公理と保向合同変換 - 回転と平行移動 -

任意の直線aとa外の任意の点Pに対し，aの点A，$|AP|$の中点Mを取れば，点対称変換r_Mは直線aをPを通るaと交わらない直線$r_M(a)$にうつすから，
(2.1) 直線a外の点Pを通るaに平行な直線bが存在する ■
逆に，そのような直線は$r_M(a)$しかないというのが平行線公理である：
公理V(平行線公理)　任意の直線aとa外の任意の点Pに対し，Pを通りaに平行な直線は一意的である ■
直線a,bについて，2つの合同鏡映R_bとR_aの合成で書ける合同変換を保向合同変換という．保向合同変換$\phi=R_bR_a$において，
aとb が点Pで交われば，ϕを点Pの周りの回転といい，
$a\parallel b$ ならば，ϕを平行移動という．$a=b$のとき，合同鏡映の対合性から，ϕは恒等変換で，恒等変換でない保向合同変換は回転か平行移動の2種類に分かれ，保向合同変換$\phi=R_bR_a$の逆変換$\phi^{-1}=R_aR_b$も同種の保向合同変換である．

(2.3) 平面の保向合同変換の全体は合成について群 - 保向合同変換群 - をなし，任意の半直線 $|PA$, $|QB$ に対し，$|PA$ を $|QB$ にうつす保向合同変換 $s(|PA,|QB)$ が一意的に存在し，$s(|QB,|RC)s(|PA,|QB)=s(|PA,|RC)$ をみたす．恒等変換を任意の点の周りの回転，任意の点を不動点とする平行移動とみなすと，点Pの周りの回転全体および平行移動の全体はそのアーベル部分群 - Pのまりの回転群および平行移動群 - をなしている ■

実際，回転 $R(|PA,|PB)R_{PA}$ は $|PA$ を $|PB$ にうつし，逆にそのような回転は $R(|PA,|PB)R_{PA}=R_{PB}\ R(|PA,|PB)$ と書けて，一意的だから，これを $r(|PA,|PB)$ と表せば，$r(|PB,|PC)r(|PA,|PB)=r(|PA,|PC)$ をみたす．ただし，$r(|PA,|PA)$ は恒等変換である．また，任意の2点P,Qに対し，線分 $|PQ|$, $|PP^{Q}|$ の垂直2等分線はともにPQに直交し，平行であるから，$R(P,Q)R(P,P^{Q})$ はPをQにうつす平行移動で，逆に，そのような平行移動は，$R(P,Q)R(P,P^{Q})=R(P,P^{Q})R(P,Q)$ と書けて，一意的に存在し，これを $\tau(P,Q)$ と表せば，$\tau(Q,R)\tau(P,Q)=\tau(P,R)$ をみたす．ただし，$\tau(P,P)$ は恒等変換である．

∠BACの合同類は半直線の組 $\{|AB,|AC\}$ の合同類と同一視された (1.5).

そこで，∠BACにその辺 $|AB$ を指定し，2つの辺の順序づけられた組 $(|AB,|AC)$ を有向角といい，改めて，$\angle BAC=(|AB,|AC)$ と書く．頂点Aの両隣のB,Cの順序で区別し，$\angle CAB=(|AC,|AB)$ を∠BACの逆向きの角といい，$\angle CAB=-\angle BAC$ と表す．$|\{|AB,|AC\}|$ を∠BACの大きさといい，$|\angle BAC|$ と表す．$|\angle CAB|=|-\angle BAC|=|\angle BAC|$ である．

さて，平面上に2点0,1を固定し，直線01を数直線といい，Rと書き，数直線の側 R_{+} と R_{-} を指定し，Rの正の側，負の側という．

半直線 $|01$ をo，1の0の周りの点対称点を-1とし，$|0(-1)=\pi$ と表す．

数直線の点を数，oの点を非負数，oの内点を正数という．非負数a,bについては，$a\in|0b|\Leftrightarrow a\leqq b$ とし，全順序≦が入る．また，A,Bの距離 $\|AB\|$ は非負数と一対一に対応し，それらの大小<が定義れる．

平面上の0以外の任意の点Pに対し半直線 $\alpha=|0P$ を度といい，その全体をSと書く．Pが R_{+} に属するとき，$\alpha=|0P$ を非負の度といえば，角の大きさは非負の度と一対一に対応し，非負の度どうしにも全順序≦が入り，角の大きさの大小<が定義される．

(2.4) 3角形の頂角の大きさの大小は対する辺の長さの大小に従う．

任意の度αとoをαにうつす0の周りの回転 $r_{\alpha}=r(o,\alpha)$ とが一対一に対応し，しかも，0の周りの回転はアーベル群をなすから，度α, βの和α+βが，$\gamma=\alpha+\beta\Leftrightarrow r_{\gamma}=r_{\alpha}r_{\beta}$ により定義され，この和+により，Sはアーベル群をなす．恒等変換 $r_{o}=r(o,o)$ に対応する度oが単位元であり，合同鏡映 R_{01} による度αの像が度αの+に関する逆元-αである．

一般に，∠BACに対し，$|AB$ を $o=|01$ にうつす保向合同変換 $s=s(|AB,o)$ が一意的に存在するから，度 $s(|AC)=\alpha$ が一意的に決まり，α

を∠BACの角度という．∠BACの角度αは，有向角(o,α)が∠BACの保向合同類，同じ記号∠BACで表す，を一意的に代表していて，∠BAC＝αと書く．このとき，実際に，∠CAB＝-∠BAC＝-αである．

A,B,Cが共線でないとき，∠BACを真角という．真角でない有向角は半直線$|PA$または平角$(|PA,|PA^P)$，つまり∠BAC＝oまたは∠BAC＝πである．∠BACが真角であれば，A,B,Cは共線でないから，△ABCをなす．このとき，∠BAC＝α＝$|0P$のとき，PがRの正の側の内点ならば，∠BACを正の角，PがRの負の側の内点ならば，∠BACを負の角といえば，

(2.5) 2つの真角が等しい ⇔ その大きさと正負が一致する ■

真角∠BACに対し△BACが得られ，∠ACB，∠CBAの正負は∠BACの正負に，∠CAB＝-∠BAC，∠BCA＝-∠BAC，∠CBA＝-∠ABCの正負は∠BACの正負の逆に一致する．こうして，真角∠BACの向きを頂点をB,A,Cの順にとった順序づけられた△BACの向きと定義すると，

(2.6) 2つの有向角が等しい ⇔ その大きささと向きが等しい．とくに，

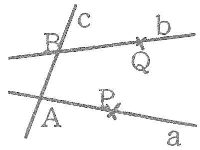
∠APB＝∠APC ⇔ $|PB=|PC$ ■

(2.7)（和公式）∠APB＋∠BPC＝∠APC が成り立つ ■

2直線のなす角：点Pで交わる2直線a＝PA,b＝PBに対し，同じ向きの角∠APB，$\angle BPA^P$，$\angle A^PPB^P$，$\angle B^PPA$を2直線a,bが点Pで交わってなす(同じ向きの)角という．$\angle BPA^P$，$\angle A^PPB^P$，$\angle B^PPA$を，それぞれ，∠APBのaに関する補角，対頂角，bに関する補角という．点対称変換r_Pにより，

(2.8)（対頂角相等）$\angle APB=\angle A^PPB^P$ が成り立つ ■

$\angle BPA^P=\angle B^PPA$だから，$\angle BPA^P$,$\angle B^PPA$を∠APBの単に，補角という．



2直線a,bに第3の直線cが交わってなす角：a∩c＝A，b∩c＝Bのとき，a,b上の直線c＝AB外の点P,Qに対し，$c_P=c_Q$ のとき，同じ向きの∠BAPと∠QBAを互いに同傍内角，∠BAPとその同傍内角∠ABQのb側の補角$\angle B^ABQ$を互いに同位角といい，

$c_P\neq c_Q$ のとき，同じ向きの∠BAPと∠ABQを互いに錯角という．

平行線公理より，次の同値が従う：

(2.9) a∥b ⇔ 同傍内角は互いに補角である ⇔ 錯角相等 ⇔ 同位角相等

さらに，△ABCの3頂角を同じ向きに取れば，その和がπである．つまり

(2.10) △ABCにおいて，∠ABC＋∠BAC＋∠ACB＝π．

ところで，$\pi+\pi(=2\pi)=o$であり，$\{o,\pi\}$はアーベルSの部分群をなし，商群$S/\{o,\pi]$が得られる．∠APBと∠CQDがこの商群で等しいとき，法πで等しいといい，$\angle APB =_{\pi} \angle CQD$と書く．すると，P以外の点A,Bについての共線条件は次のように，簡明になる：

(2.11) 3点P,A,Bが共線である ⇔ $\angle APB=_{\pi}o$.

∠BAPの補角$\angle B^AAP=\angle PAB^A$ は $\angle BAP+\angle PAB^A=\pi$をみたすから，

$\angle BAP=_{\pi}-\angle PAB^A=\angle B^AAP=\angle BAP^A$．つまり (2.6) より，

(2.12) AP＝AQ⇔|AP＝|AQまたは|AP＝|AQ^A ⇔∠BAP$=_\pi$∠BAQ ■

このように，互いに補角どうしを反対の向きにとれば，2直線のなす角の法πの合同類は一意的に決まる．以後，∠BACの法πの合同類を(BAC)と書くと，∠BAP$=_\pi$∠ABQと書くかわりに，(BAP)＝(ABQ) と書ける．(2.7)，(2.8')(2.10)，(2.11)，(2.12) は法πのもとで簡明になる：

(2.7') (和公式) (APB)+(BPC)＝(APC) ■

(2.9') AP // BQ ⇔ (BAP)＝(ABQ) ■

(2.10') △ABCにおいて，(ABC)+(BAC)＝(ACB) ■

(2.11') 3点P,A,Bが共線である ⇔ (APB)＝o＝oの法πの同値類 ■

(2.12') (共線条件) P，A，B が共線である ⇔ (BAP)＝(BAQ) ■ また，

(2.13) 真角∠BACに対し，∠BAC＝∠CAB ⇔ |∠BAC|＝∠R ■

が成り立ち，∠Rを正負いずれに向き付けても，法πのもとでは等しく，大きさ∠Rの有向角をそのまま∠Rと書く．

3.一般的円周角定理と円周に対するパスカルの定理の証明，

定点Oと正数rに対し，‖OX‖＝rをみたす点Xの全体をO中心，半径rの円周という．円周Cを固定したとき，その2点A,Bについて，線分|AB|を弦という．Cの中心Oを通る弦|AB|または直線ABを直径という．

△ABCの外心の存在と一意性から，3点A,B,Cに対し，

(3.1) A,B,Cが共線でない ⇔ A,B,Cを通る円周が一意的に存在する ■

そのような円周を◯ABCと表す．円周角定理は次の様に一般化される：

(3.2) (有向円周角定理) 直線AB外の点P,Qについて，

◯APB＝◯AQB ⇔ (APB)＝(AQB) ■

円周C＝◯APB が了解されているとき，Pを略して，(AB)と書く．

(3.3) |AB|が円周◯APBの直径である ⇔ (APB) ＝∠R ■

直線aが円周Cと交われば，aとCは2点または1点のみを共有する．

前者のとき，aを円周Cの割線，各共有点を交点といい，後者のとき，aとCの唯1つの共有点Aを接点といい，aをCの点Aでの接線という．

(3.4) 中心Oの円周Cの点Aでの接線は，その直径AA^O に直交する．

同様に，2円周が交われば，2交点をもつか，1点で接する．とくに，点Aで接するとき，Aでの一方の円周の接線は他方の接線でもあり，2円の共通の接線である ■

さて，2点A，Bを共有する2円周◯ABP，◯ABQで，BP＝BQ のとき，

(2.12')より，(ABP)＝(ABQ) であるから，

(3.5) それぞれの円周のA,B以外の任意の点C,Dに対し，

(ACP)＝ (ABP)＝(ABQ)＝(ADQ) であるから，(ACP)＝(ADQ) ■

このように，法πのもとでの円周角相等を直線ABを介して円周ABPCから円周ABQDにわたれる．また，

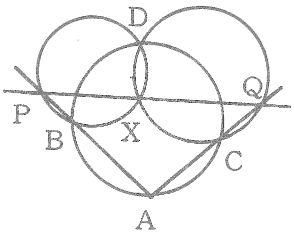
(3.6) 直線TAが円周◯APBに接する ⇔ (TAP)＝(ABP) ■

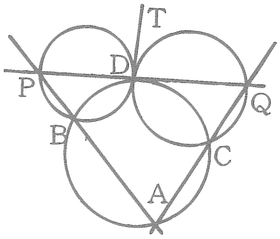
が成り立つ．こうして，2円周が接する場合も，その共通接線TAを介して円周角相等をわたらせることが出来る．次の(3.7)は円周角相等の割線を利用した渡りで示せる．

(3.7) 円周○ABCとその割線AP,AQがあり，A_P＝B，A_Q＝Cとする．○ABCのA,B,C以外の任意の点Dについて，

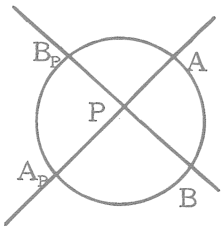
(1) ○BPDと○CQDがD以外の点Xで交われば，XP＝XQ，

(2) ○BPDと○CQDがDで接すれば，DP＝DQ





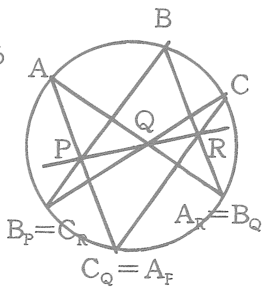
円周を1つ固定したとき，その上の任意の点Aおよび A以外の任意の点Pに対し，直線PAがCの割線のとき，A以外のもう1つの交点をA_P，接線のとき，A_P＝Aと書く．



(3.8)(補完則) ○ABCにおいて，任意のA,B以外の点Pに対し，(APB)＝(AB)＋(A_PB_P)．

((2.10')を使えば，証明は易しい．)

(3.9)(パスカルの定理) ○ABCおよびA,B,C以外の3点P,Q,Rがあり，B_P＝C_R，C_Q＝A_P，A_R＝B_Qとする．このとき，3点A，P,Bが共線ではないならば，3点P，Q，R は共線である



証明　3点A，P，Bは共線でないから，○APBがえられる．B＝C_Q ⇒B，Q，Cが共線で，C_Q＝A_Pであるから，A，P，Bは共線であり，仮定に反する．○BQCが，同様に，○ARCがえられ，(3.6)より，

(APB)＝(AB)＋(A_P B_P)＝(AB)＋(A_P C_R)，

(BQC)＝(BC)＋(B_QC_Q)＝(BC)＋(A_RA_P) であるから，

(APB)＋(BQC)＝(AB)＋(A_PC_R)＋(BC)＋(A_RA_P)＝(AC)＋(A_RC_R)＝(ARC)．

(1) ○APBと○BQCがB以外の点Xで交わるとき，(3.7)より，XP＝XQ．また，(AXC)＝(AXB)＋(BXC)＝(APB)＋(BQC)＝(ARC) であるから，○ARCも点Xを通る．よって，(3.7) より，XR＝XP＝XQ．

(2) ○APBと○BQCが点Bで接するとき，(3.7)より，BP＝BQ，また，BTを○APBと○BQCの共通接線とすると，

(ABC)＝(ABT)＋(TBC)＝(APB)＋(BQC)＝(ARC)

であるから，○ARCも点Bを通る．よって，(3.7)より，BR＝BP＝BQ，つまり3点P，Q，Rは共線である．　■　♡

Akbulutの手術による微分同相写像について

京都大学 丹下 基生

1 結び目手術の概要

C^∞ のカテゴリーにおいて楕円曲面には cusp 近傍と呼ばれる部分多様体 C が含まれる。その cusp 近傍を位相同型類を保ったまま手術する方法がある。対数変換することでも得られるが、ここでは Fintushel Stern の結び目を使った手術を扱う。Fintushel と Stern は次のような写像を定義した。

$$fs: \{\text{結び目のイソトピー類}\} \to \{\textit{cusp}\ \text{近傍の微分構造}\} \tag{1}$$

Akbulut はさらにこの写像を拡張して任意の結び目 K に対して

$$a_K: \{\text{結び目}\ K\ \text{の}\ \textit{concordance}\ \text{のイソトピー類}\} \to \{\textit{cusp}\ \text{近傍の微分構造}\} \tag{2}$$

という写像を作った。product concordance のイソトピー類を s_0 と書くことにすると $a_K(s_0) = fs(K)$ となる。この写像を調べることで cusp 近傍の微分構造としてどのようなものが得られるのか調べたい。(1) にはサイバーグウィッテン理論から次のような公式が知られている。ここで K3 曲面 X の中に自然に存在する cusp 近傍を $fs(K)$ で埋め直した多様体を X_K とする。このときそれらのサイバーグウィッテン不変量 $\mathcal{SW}_X, \mathcal{SW}_{X_K}$ には次のような関係がある。

Theorem 1.1 (Fintushel Stern) *K を任意の結び目とし、X を K3 曲面とすると*

$$\mathcal{SW}_{X_K} = \mathcal{SW}_X \cdot \Delta_K(t) \tag{3}$$

となる。

この事実から $fs(K) \neq C$ が分かる。(2) にも $\Delta_K(t)$ を拡張した不変量の出現が予想されるがその公式は知られていない。以下この章では (1) と (2) においてこの他、知られている事実を幾つか挙げ、その中の一つである Main Theorem を紹介し、4 章で証明する。そして 5 章で (2) のサイバーグウィッテン不変量について考察したい。

fs や a_K は一般には単射ではないことが知られている。Fintushel Stern の結び目手術では以下の結果がある。

Theorem 1.2 (Akbulut) $fs(K) = fs(-K)$

また

Theorem 1.3 (Akaho) $(X_K)_L = X_{K\#L}$

Cororally 1.1 $fs(K\#(-K)) = fs(K\#K)$

また Akbulut の手術では

Theorem 1.4 (Akbulut) K を *trefoil knot* として $s_1 \in C(K\#(-K))$ をある元（この定義は後に述べる）とすると

$a_{K\#(-K)}(s_1) = G$

となり、Main Theorem として

Theorem 1.5 (T.) K を任意の結び目として $s_1 \in C(K\#(-K))$ を *Akbulut* の定義と同じものをとると

$a_{K\#(-K)}(s_1) = C$

となる。4 章でこの証明を行う。

2 手術の定義

2.1 Fintushel Stern の手術

まず Fintushel Stern の結び目手術の方法を述べ、その Kirby diagram をかく。$M_K \times S^1$ という多様体を用意する。M_K とは S^3 を K に沿って 0-surgery して作られた多様体である。$M_K \times S^1$ には $m \times S^1$ という T^2 が含まれておりその近傍は自明な normal bundle を形成している。m は K の meridian である。cusp 近傍 C にも自明な normal bundle となる general fiber が含まれている。これらを使って fiber sum をすることで、

$$C_K = C\#_{T^2}(M_K \times S^1) = (C \setminus T^2) \cup_\phi (S^3 \setminus K) \times S^1$$

と定義し、C_K を C から Fintushel Stern の結び目手術をして得られたという。この多様体の微分同相類は fiber sum の写像のとり方によらず一意である。C_K の微分同相類は結び目のイソトピーで不変であるので $fs(K) = C_K$ とすることで (1) の写像が定義できる。

2.2 Akubult の手術

knot concordance の集合

$$C(K) = \{s : S^1 \times I \hookrightarrow S^3 \times I |\ s|_{S^1\times\{0\}} = s|_{S^1\times\{1\}} = K\}$$

の元 s を任意にとり、その s の像を $\tilde{U}_s$ とする。そのとき補空間 $S^3 \times I \setminus \tilde{U}_s$ の $S^3 \times \partial I$ を自然に同一視して多様体 $(S^3 \times S^1) \setminus U_s$ を作る。これを、cusp 近傍 C として、$C \setminus T^2$ に貼り付ける。そのとき

$$C_s = C \setminus T^2 \cup_\phi (S^3 \times S^1) \setminus U_s$$

と書き、Akbulut の手術といい、Fintushel Stern の手術と同様に $a_K(s) = C_s$ が定義できる。作り方から明らかに $a_K(s_0) = fs(K)$ である。

3 Kirby diagram

3.1 cusp 近傍の diagram

cusp 近傍の Kirby diagram を描く。まず D^2 上の自明な torus fibration は図 1 であり、cusp 近傍は図 2 である。cusp 近傍の 2 つの-1-framed knot は vanishig cycle である。

3.2 C_K の Kirby diagram

Fintushel Stern の結び目手術の Kirby calculus は図 3 のようになる。図 3 は K が trefoil knot の場合を描いた。その図で $K\#(-K)$ が破線部の中に現れていることが分かる。一般の knot でもこの位置に $K\#(-K)$ が現れる。

3.3 C_s の Kirby diagram

Akbulut の作った例を Kirby diagram で描くことにする。先ず $(S^3 \setminus K) \times I = (D^3 \setminus K') \times I = D^4 \setminus (K\#(-K)$ の slice disk) を考える (図 4)。ただし $K' = K \setminus pt$ とする。この slice disk を 2 つ、図 5 のように連結和したものは $D^3 \times I$ の中の $S^1 \times I$ になる。これを $S^3 \times I$ に埋め込むと $C(K\#(-K))$ の元を定める。この元を s_1 と書く。s_1 による Akbulut 手術の Kirby diagram は図 6 となる。

4 Main Theorem の証明

ここで Kirby diagram の簡略記号を導入する。簡単のため結び目は two-bridge knot を使う。$\boxed{a_1}$は 2 本の紐の横方向の a_i 回の半ひねりを表す。図 7 に対して、図 8 のような 2-handle の arc への簡略化を行うと 図 9 になる。図 9 の$\boxed{a_1}$のねじれをほどくことによって図 10 の (a) の図が得られる。この (a) の図を $(b), (c)$ に沿ってさらに簡略化する。実際この図は a_1 が正の偶数の場合である。この簡略化を使って$\boxed{a_2}$もほどいてさらに arc で簡略化した図が図 11 である。この操作を a_n まで続けていくと図 12 になる。

Theorem 4.1 K を任意の結び目として $a_{K\#(-K)}(s_1) = C$ である。

(Proof) 任意の結び目を braid B を使って図 13 のようにおく。concordance として s_1 をとったとき $(S^3 \times S^1) \setminus \tilde{U}_{s_1}$ を cusp 近傍に貼り付けた Kirby diagram は図 14 になる。これを上記の簡略化を使うと図 15 になる。これを handlesliding して図 16 になる。更に handlesliding して図 17 になる。これを→に沿って handlesliding すると図 18 となる。

ここで Alexander の定理から任意の結び目はある braid を縦に閉じることによって得られる。その結び目を図 19 のようにおく。ここで B' は braid であり図 14 から図 18 への変形を使うことで図 20 になる。この diagram を図 21 のように移動させる。図 21 に簡略化を適応させると図 22 となるがその図中の→で指し示した 2-handle と-1-framed 2-handle を使って handlesliding することで簡略化した絡みをほどくことができて図 23 になる。これは更に handle 消去で cusp 近傍、図 2 になる。 □

Remark

これから、ある slice knot に対してそれを対称に貼りあわせると cusp 近傍の中で自明になることが分かる。この証明の方法から図 27 のようにこの slice knot を少しひねって連結和をしたものも微分同相で

あることが分かる。

これから任意の slice knot K の任意の slice disk に対してそれと対称な slice disk を連結和してできる concordance s は $a_K(s) = C$ であると予想される。また一般の concordance についてはまだ何も分かっていない。

5 サイバーグウィッテン不変量

サイバーグウィッテン不変量に関する公式 (3) を a_K においても考えたい。ここでサイバーグウィッテン不変量 $\mathcal{SW}_X$ とはその non-zero 基本類を $\mathcal{B} = \{\pm\alpha_1, \cdots, \pm\alpha_n\}$ とすると、

$$\mathcal{SW}_X = SW(0) + \sum_{\alpha \in \mathcal{B}} SW(\alpha) \exp(\alpha)$$

と定義する。SW は α に対する $Spin^c$ 構造でのサイバーグウィッテン方程式の解の個数である。今 "$\mathcal{SW}_{X_s} = \mathcal{SW}_X \cdot \Delta_s(t)$" を満たす "$\Delta_s(t)$" の存在とその定義が問題であるが、その候補として s のアレクサンダー多項式が知られている。それは $(S^3 \times I) \setminus \tilde{U}_s$ の基本群に関して Fox の自由微分をするという方法である。ここでは $\Delta_s(t)$ をアレクサンダー多項式と定義しておく。次の事実を証明する。

Theorem 5.1 任意の結び目 K に対して $(S^3 \times I) \setminus \tilde{U}_{s_1}$ と $(S^3 \setminus K\#(-K)) \times I$ は微分同相である。

(Proof) $(S^3 \times I) \setminus \tilde{U}_{s_1}$ の Kirby diagram は図 24 であり、それを handlesliding した図 25 の右端の braid を矢印に沿って一回転させると図 26 になる。それは $(S^3 \setminus K\#(-K)) \times I$ である。 □

一般には $(S^3 \times S^1) \setminus U_{s_1}$ と $(S^3 \setminus K\#(-K)) \times S^1$ は微分同相ではないことに注意しておく。

Proposition 1 $\mathcal{SW}_{X_s} \neq \mathcal{SW}_X \cdot \Delta_s(t)$

(Proof) $\Delta_s(t) = \Delta_{K\#(-K)}(t) = \Delta_K(t)^2 \neq 1$ より従う。 □

今後、$a_K(s) \neq C$ となる K と s の例を作り、そのサイバーグウィッテン不変量を計算していきたい。

Reference

(1) S. Akbulut, *Variations on Fintushel-Stern Knot Surgery on 4-manifolds.* Turkish J. Math 26(2002), no. 1, 81-92.

(2) R. Fintushel and R. Stern, *Knots, links, and 4-manifolds.* Invent. Math. 134, no. 2(1998), 363-400.

(3) M. Akaho, *A Connected Sum of Knots and Fintushel-Stern Knot Surgery on 4-manifolds.*

(4) R. E. Gompf and A. I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Mathematics 20, (1999), American Mathematical Society.

(5) R. C. Kirby, *The Topology of 4-manifolds*, Lecture Notes in Mathematics 1374, (1989), Springer-Verlag.

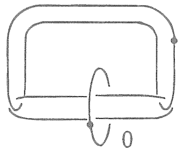


図 1:

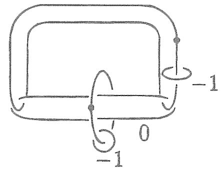


図 2:

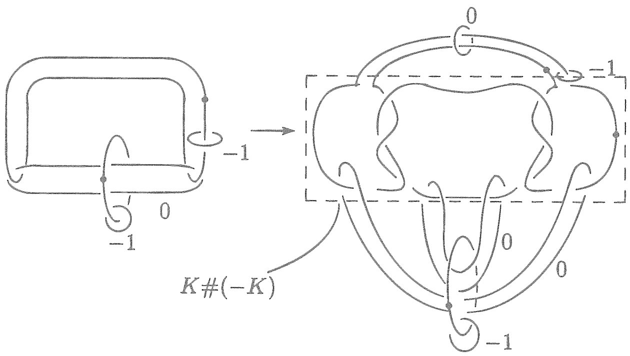


図 3: Fintushel Stern の手術

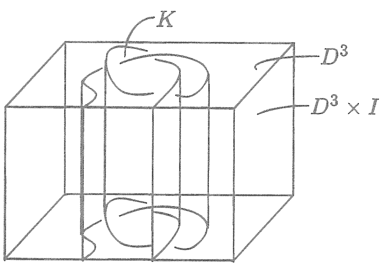


図 4:

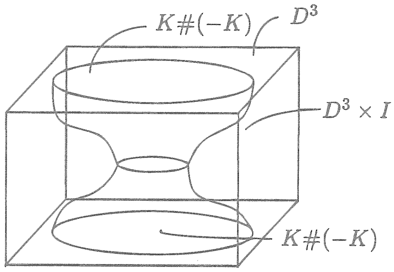


図 5:

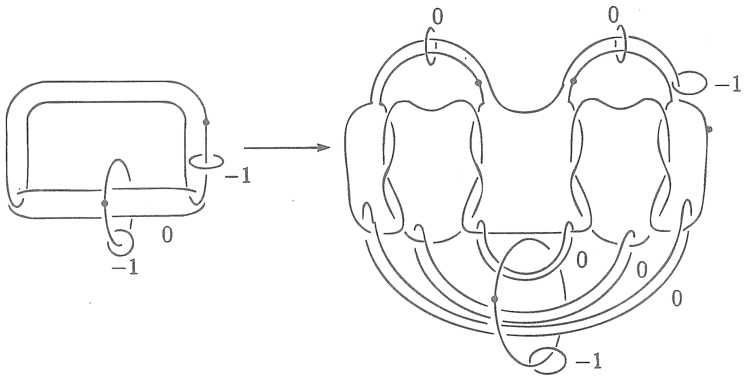


図 6: Akbulut の手術

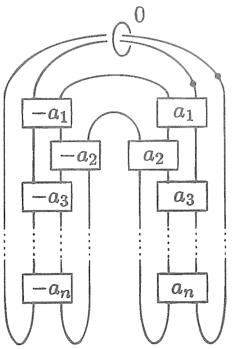


図 7:

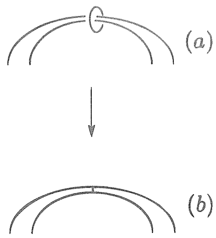


図 8:

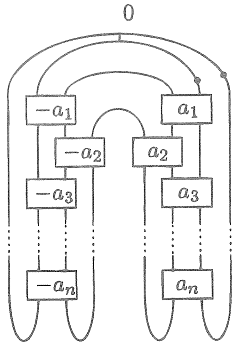
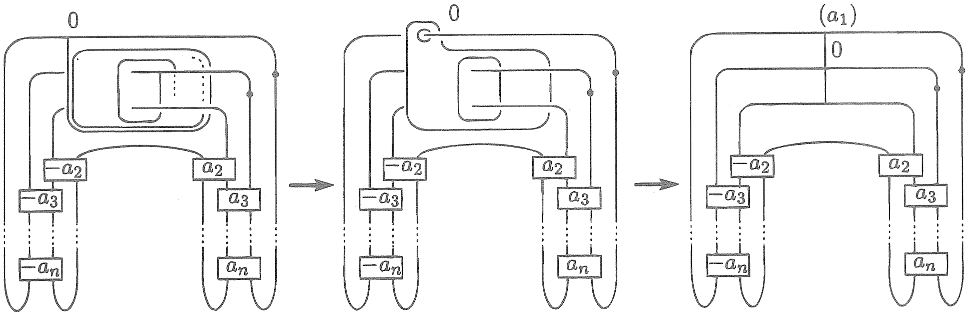


図 9:



(a) (b) (c)

図 10:

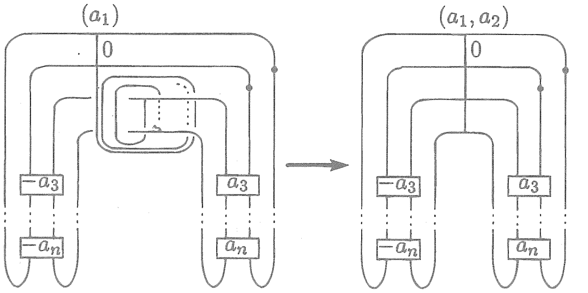


図 11:

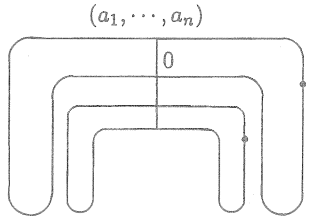


図 12:

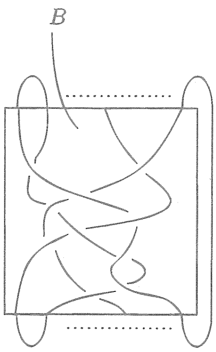


図 13:

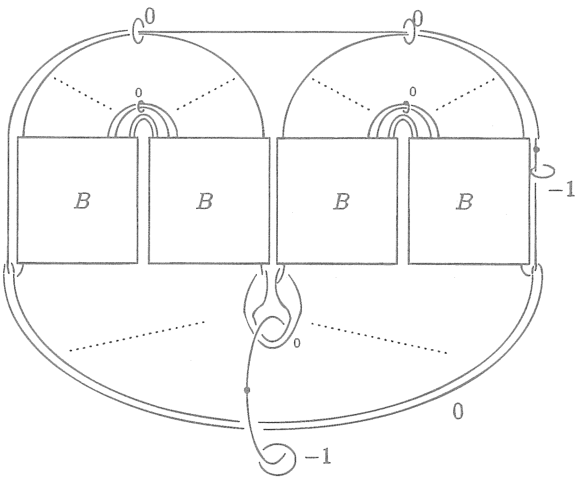


図 14:

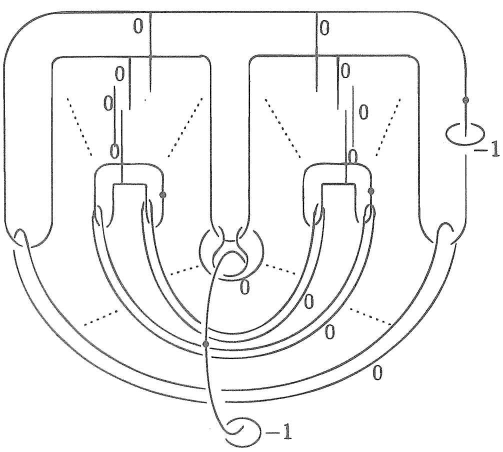


図 15:

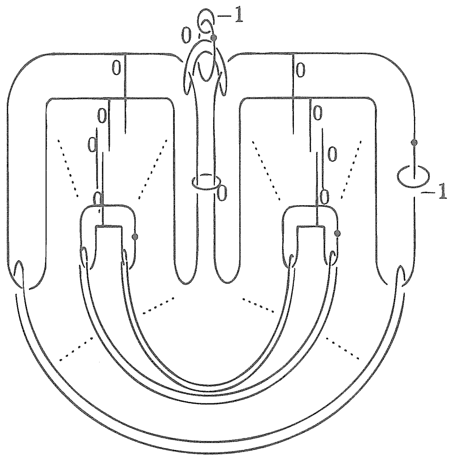


図 16:

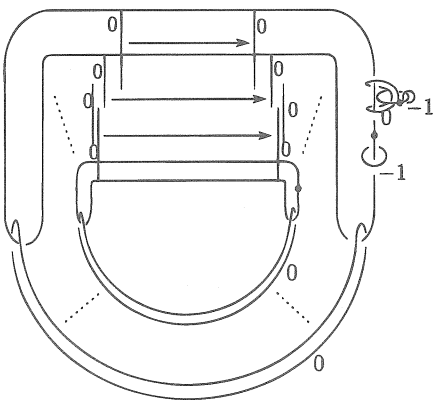


図 17:

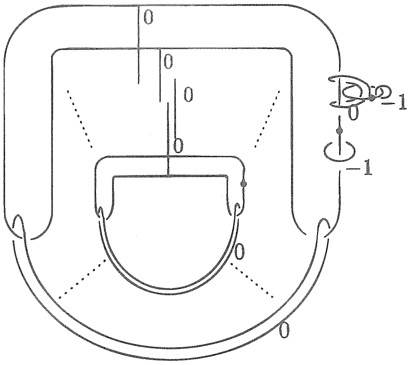


図 18:

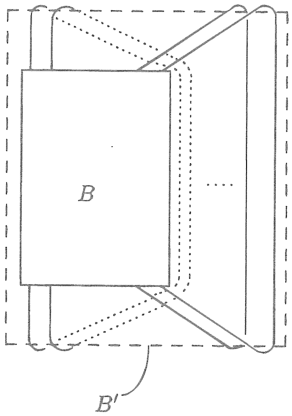


図 19:

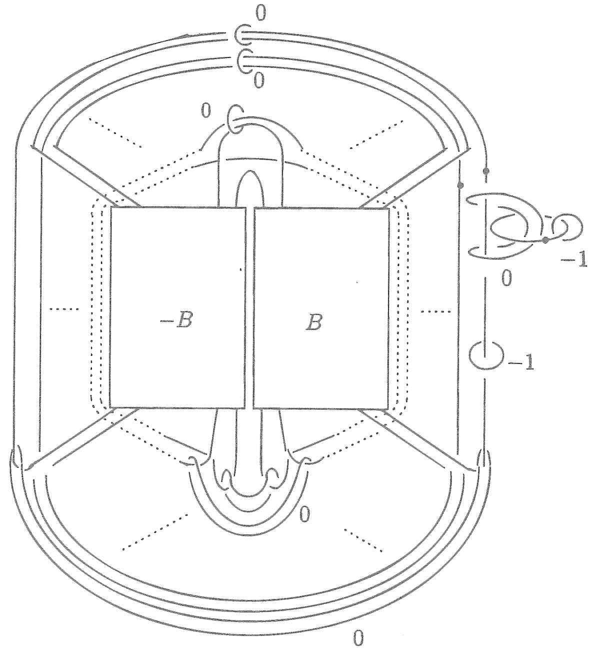


図 20:

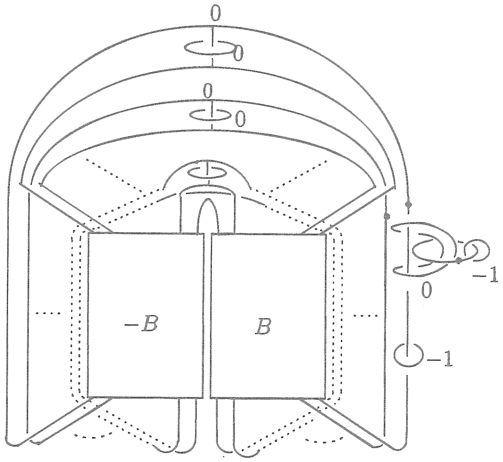


図 21:

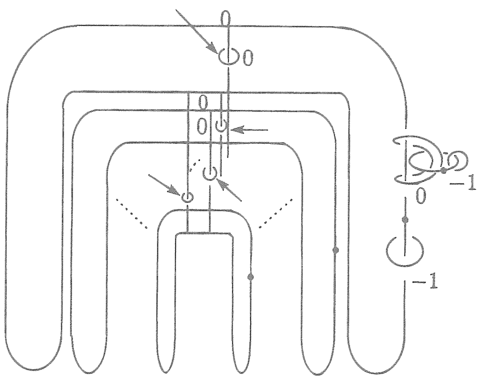


図 22:

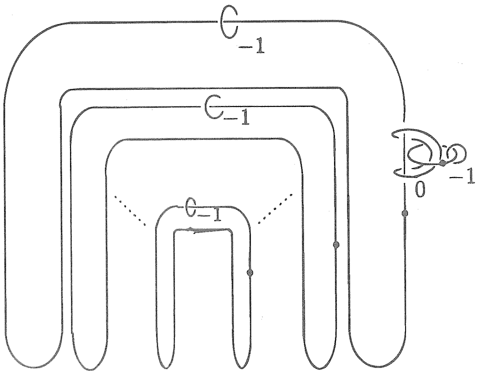


図 23:

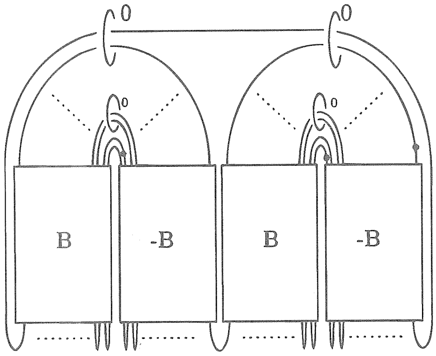


図 24:

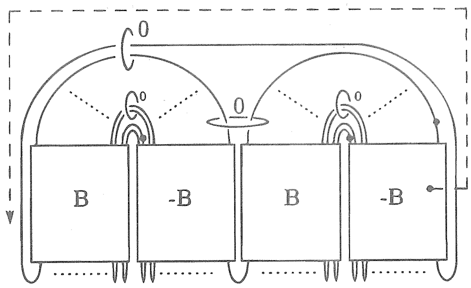


図 25:

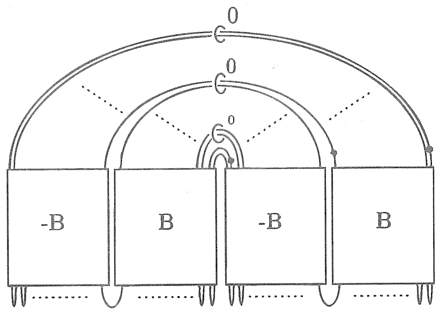


図 26:

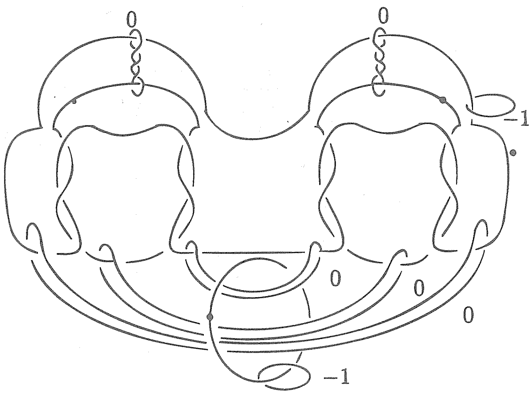


図 27:

GRAPH COHOMOLOGY AND ITS RELATIONSHIP TO MILLER-MORITA-MUMFORD CLASSES AND HIGHER FRANZ-REIDEMEISTER TORSION

KIYOSHI IGUSA

The title pretty much describes the content of this lecture. I will start with graph cohomology.

1. Graph Cohomology

1.1. **GRAPH COMPLEX: ORIGIN.** In 1993 Maxim Kontsevich defined three types of "graph complexes"

(1) (Commutative) graph complex (all graphs)
(2) Associative graph complex (ribbon graphs)
(3) Lie graph complex (using the cyclic *Lie operad*)

The original papers were:

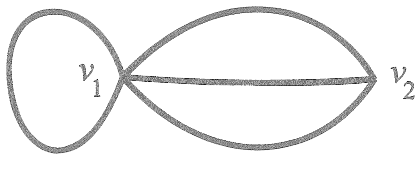
M. Kontsevich, *Formal (non)-commutative symplectic geometry* (1993).[Kon93]
M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low dimensional topology* (1994).[Kon94]

This talk will concentrate on the cohomology of the associative graph complex, giving basic definitions and statements. In particular, I will try to explain two of Kontsevich's basic theorems:

Theorem 1.1. Associative graph cohomology *is rationally isomorphic to the homology of the* mapping class group.

Theorem 1.2. Partition functions *on ribbon graphs coming from certain one dimensional* A_∞ algebras *give polynomials in the* Miller-Morita-Mumford classes.

1.2. **GRAPH TERMINOLOGY.** I will begin with some simple examples to explain the terminology.

$\Gamma =$ 

All of my graphs will be finite and connected. However, they might have loops and multiple edges as in this example. The graph consists of *vertices* and *half-edges*.

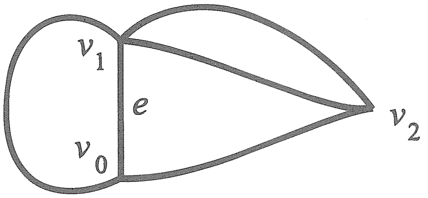
Supported by NSF grant DMS-0204386.

$$\#\text{half-edges} = \sum_v \text{valence of } v = 5+3 \geq 3+3$$

$$\text{codimension } \Gamma := \#\text{half-edges} - 3 \times \#\text{vertices} = 8 - 3 \times 2 = 2$$

Note that $\text{codim}(\Gamma) = 0 \Leftrightarrow \Gamma$ is trivalent.

Γ'=



In this second example, $\text{codim}(\Gamma') = 3+4+3-9 = 1$. Note that Γ is obtained from Γ' by collapsing the edge e to one point. Collapsing one edge always increases the codimension by one.

1.3. ORIENTATION of GRAPHS.

Definition 1.3 (Conant-Vogtmann[CV02], equivalent to Kontsevich for Γ connected). An *orientation* of a finite graph Γ is an ordering (up to even permutation) of the set consisting of the vertices and half-edges of Γ..

Example 1.4. Order the vertices and orient the edges:

$$v_1 v_2 \cdots v_n \, e_1 \bar{e}_1 \cdots e_m \bar{e}_m$$

($\bar{e}$ = other half of half-edge e)

Example 1.5. Order the vertices and the half-edges at each vertex:

$$v_0 \, abc \, v_1 \, e_{11} e_{12} e_{13} e_{14} \, v_2 \, xyz$$

Odd valent groups (in blue) go anywhere, with half-edges (abc,xyz) cyclically ordered.

1.4. (COMMUTATIVE) GRAPH COMPLEX.

Definition 1.6. $\mathcal{CG}^n$ is the free abelian group generated by isomorphism classes $[\Gamma]$ of oriented graphs (of codimension n) modulo the *anti-symmetry* (AS) relation

$$[-\Gamma] = -[\Gamma].$$

($-\Gamma$ is Γ with the opposite orientation.)

Definition 1.7. The boundary map $\partial : \mathcal{CG}^n \to \mathcal{CG}^{n+1}$ is given by

$$\partial[\Gamma] = \sum_e [\Gamma/e]$$

where the sum is over all (non-loop) edges e of Γ and Γ/e is Γ with e collapsed to a point with the *induced orientation* given as follows.

$$o(\Gamma) : v_1 v_2 e\bar{e}(\text{the rest})$$

$$o(\Gamma/(e,\bar{e})) : v_*(\text{the rest})$$

The chain complex $(\mathcal{CG}^*, \partial)$ is called the *(commutative) graph complex.*

1.5. ASSOCIATIVE GRAPH COMPLEX.

Definition 1.8. A ribbon graph is a graph together with a cyclic ordering of the half-edges incident to each vertex.

- Ribbon graph gives an oriented punctured surface Σ_g^s (genus g with s punctures).
- Odd valent ribbon graphs have natural orientations.
- Γ/e is a ribbon graph (if e is not a loop).

The associative graph complex $\mathcal{AG}^*$ is defined using ribbon graphs and we have a chain map

$$\mathcal{AG}^* \twoheadrightarrow \mathcal{CG}^*$$

Definition 1.9. The *integral (associative) graph cohomology complex* $\mathcal{AG}_*$ is the subcomplex

$$\mathcal{AG}_* \subset \operatorname{Hom}(\mathcal{AG}^*, \mathbb{Z})$$

generated by

$$\langle \Gamma \rangle := |\mathrm{Aut}(\Gamma)|[\Gamma]^*$$

Take the *double dual*

$$\mathcal{AG}^{**} := \operatorname{Hom}(\mathcal{AG}_*, \mathbb{Z})$$

Cycles in the double dual correspond to *infinite cycles* in graph homology.

1.6. KONTSEVICH CYCLES.

Definition 1.10. [Kon92] If $\lambda = \{\lambda_1, \cdots, \lambda_r\}$ is a partition of n with r parts, then the *Kontsevich cycle* W_λ is the (infinite) set of all ribbon graphs Γ so that

(1) All but r vertices of Γ are trivalent.
(2) The non-trivalent vertices v_i have codimension $2\lambda_i$ (valence $3 + 2\lambda_i$).
(3) So, $\operatorname{codim}(\Gamma) = \sum 2\lambda_i = 2n$.

Definition 1.11. If $r = 1$ then W_n is the *Witten cycle.* $\Gamma \in W_n$ has one vertex of valence $2n + 3$ (and all others are trivalent).

Definition 1.12. The *dual Kontsevich cycle*

$$W_\lambda^* : \mathcal{AG}_{2n} \to \mathbb{Z}$$

is the homomorphism

$$W_\lambda^* \langle \Gamma \rangle = \begin{cases} 0, & \text{if } \Gamma \notin W_\lambda; \\ 1, & \text{if } \Gamma \in W_\lambda \text{ with natural orientation;} \\ -1, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Kontsevich makes the following observations.

Theorem 1.13. *W_λ^* is a cocycle.*

Lemma 1.14. *The $\mathbb{Q}$ span of the W_λ^* is equal to the $\mathbb{Q}$ span of Kontsevich's partition functions Z_x.*

He also makes the following statement.

Statement of Kontsevich: *The linear span of these partition functions is equal to the space of polynomials in the Miller-Morita-Mumford classes.*

This is equivalent to what some people call the *Witten-Kontsevich conjecture.*

2. MAPPING CLASS GROUP

Let Σ_g^s be a fixed surface of genus g with s boundary components.

Definition 2.1. The *mapping class group* M_g^s ("M_g^s/Σ_s") is the group of isotopy classes of orientation preserving automorphisms of Σ_g^s. I.e.,

$$M_g^s := \pi_0 Diff_+(\Sigma_g^s)$$

Theorem 2.2 (Earle, Eells). *$M_g^s \simeq Diff_+(\Sigma_g^s)$ and, therefore, BM_g^s classifies oriented surface bundles with fiber Σ_g^s.*

2.1. **CATEGORY of RIBBON GRAPHS.** Assume: $s \geq 1$ ($s \geq 3$ if $g = 0$).

The following theorem is usually attributed to Strebel (using "quadratic differentials"). However, I learned it from Robert Penner who proved it using "decorated Teichmüller space" and I wrote a topological proof using the contractibility of "Outer Space" (Culler-Vogtmann[CV86]).

Theorem 2.3 (Strebel[Str84], Penner[Pen94]).

$$\coprod BM_g^s \simeq |Fat|$$

where Fat is the category of ribbon graphs.

I already defined ribbon graphs but I didn't define the morphisms.

Definition 2.4. A *morphism of graphs* $\Gamma \to \Gamma'$ is an isomorphism

$$f : \Gamma/F \cong \Gamma'$$

where F is a forest in Γ and Γ/F is given by collapse each tree in F to a point. (Recall that a *forest* is a disjoint union of trees without roots.)

If Γ is a ribbon graph, then Γ/F is also a ribbon graph so we require f to be an isomorphism of ribbon graphs.

Theorem 2.5 (of Kontsevich, proved by Conant-Vogtmann[CV02]).

$$\bigoplus_{g,s} H_n(M_g^s;\mathbb{Q}) \cong H_n(\mathcal{AG}_*;\mathbb{Q})$$

Here is my first theorem on graph cohomology.

Theorem 2.6 (I[Igu03]). *This rational equivalence is given by an integral chain map*

$$\phi : C_*(Fat) \to \mathcal{AG}_*$$

Corollary 2.7. *The dual Kontsevich cycles W_λ^* pull back to integral cohomology classes*

$$\phi^* W_\lambda^* \in H^{2|\lambda|}(M_g^s;\mathbb{Z})$$

2.2. **MILLER-MORITA-MUMFORD CLASSES.** These are cohomology classes for the mapping class group defined independently by D. Mumford[Mum83] and S. Morita[Mor84] with basic properties obtained independently by S. Morita[Mor87] and Ed Miller[Mil86].

Suppose that

$$p : E \to B$$

is an oriented surface bundle (with fiber Σ_g^s). Let

$T^v E$ = (2-dim) *vertical tangent bundle.*

$e_E \in H^2(E, \partial E; \mathbb{Z})$: *Euler class* of $T^v E$.
$p_* : H^{2n+2}(E, \partial E; \mathbb{Z}) \to H^{2n}(B; \mathbb{Z})$ the *push-down* = transfer.

Definition 2.8. The *Miller-Morita-Mumford class* is

$$\kappa_n = p_*(e_E^{n+1}) \in H^{2n}(B; \mathbb{Z})$$
$$\kappa_n \in H^{2n}(M_g^s; \mathbb{Z}) \text{ (universal case)}$$

2.3. CONJECTURES.

1991 E. Witten: conjectured that the MMM classes κ_n were Poincaré dual to the Witten cycles W_n (i.e., proportional to W_n^*).

1992 R. Penner[Pen94]: Proved Witten's conjecture for $k = 1$:

$$\text{“ } \widehat{\kappa}_1 = \frac{1}{6}[W_1]^* \text{ ”}$$

1994 Arbarello, Cornalba[AC96]: Gave the correct version:

$$\kappa_1 = \frac{1}{12}[W_1]^*$$

1992 M. Kontsevich[Kon92]: Conjectured that the dual Kontsevich cycles W_λ^* could be expressed in terms of MMM classes.

2.4. MY THEOREMS.

Theorem 2.9 (I[Igu02a]). *Dual Witten cycles are multiples of MMM classes:*

$$W_n^* = (-2)^{n+1}(2n+1)!!\kappa_n$$

Theorem 2.10 (I[Igu02a]). *Dual Kontsevich cycles are polynomials in the MMM classes with leading term:*

$$W^*_{n_1^{k_1}\cdots n_r^{k_r}} = \prod_{i=1}^{r} \frac{\left((-2)^{n_i+1}(2n_i+1)!!\kappa_{n_i}\right)^{k_i}}{k_i!} + \textit{lower terms}$$

Arbarello and Cornalba obtained the same leading term (up to sign) for the Kontsevich cycles using heuristic arguments.

“... our idea works in codimension 1 (and we are pretty sure it also works in codimension two).” -Arbarello-Cornalba[AC96]

-Codim 1 $$X_1 = 12\kappa_1$$
-Codim 2

$$X_2 = 120\kappa_2$$
$$X_{1,1} = 72\kappa_1^2 - 348\kappa_2$$

-Codim 3

$$X_3 = 1680\kappa_3$$
$$X_{1,2} = 1440\kappa_1\kappa_2 - 13680\kappa_3$$
$$X_{1,1,1} = 288\kappa_1^3 - 4176\kappa_1\kappa_2 + 20736\kappa_3$$

-Codim 4

$$X_4 = 30240\kappa_4$$
$$X_{1,3} = 20160\kappa_1\kappa_3 - 312480\kappa_4$$
$$X_{2,2} = 7200\kappa_2^2 - 159120\kappa_4$$

I verified all of these numbers. The ones in blue are joint work with Michael Kleber[Igu03],[IK03].

2.5. **Final results.** In March 2003, Michael Kleber and I[IK03] found an algorithm to compute the coefficients of W_λ^* when expressed as a polynomial in the MMM classes. We used *increasing trees.* At the same time, Gabriele Mondello[Mon03] has obtained a formula for these coefficients using results of Carel Faber.

3. HIGHER FRANZ-REIDEMEISTER TORSION

Given

$$M \to E \to B$$

a smooth bundle s.t. $\pi_1 B$ acts trivially on $H_*(M;\mathbb{Q})$, there are cohomology classes

$$\tau_{2k}(E) \in H^{4k}(B;\mathbb{R})$$

called the *higher Franz-Reidemeister (FR) torsion* invariants.

John Klein and I constructed these invariants using Morse theory, Volodin K-theory and Waldhausen K-theory. [Igu02b]

3.1. TORELLI GROUP.

Definition 3.1. The *Torelli group* T_g^s is the group of $f \in M_g^s$

$$f : \Sigma_g^s \to \Sigma_g^s$$

s.t. $f_* = id$ on $H_*(\Sigma_g^s;\mathbb{Z})$

On the Torelli group we have three cohomology classes in the same degree.

- $\tau_{2k}(T_g^s) \in H^{4k}(T_g^s;\mathbb{R})$ (higher FR torsion)
- $\kappa_{2k} \in H^{4k}(T_g^s;\mathbb{Z})$ (even deg MMM classes)
- $W_{2k}^* \in H^{4k}(\mathcal{IAG}_*;\mathbb{Z})$ (Dual Witten cycles)

John Klein[Kle93] conjectured that higher FR torsion $\tau_{2k}(T_g^s)$ is proportional to MMM κ_{2k} on the Torelli group.

(1992) R. Hain, R. Penner and I proved this.[Igu02b]

I found the proportionality constant:

(2001) $$\tau_{2k}(T_g^s) = (-1)^k\zeta(2k+1)\frac{\kappa_{2k}}{2(2k)!}$$

(2002) $$= (-1)^{k+1}\zeta(2k+1)\frac{W_{2k}^*}{4(4k+1)!}$$

3.2. HOMOLOGICALLY MARKED GRAPHS.

Definition 3.2. A *homological marking* of Γ is an isomorphism

$$h : H_1(\Gamma) \xrightarrow{\approx} \mathbb{Z}^n$$

Definition 3.3. $\mathcal{IAG}_*$ is the cohomology complex of homologically marked ribbon graphs.

$$\mathcal{IAG}_* \twoheadrightarrow \mathcal{AG}_* \xrightarrow{W_\lambda^*} \mathbb{Z}$$

3.3. **OPEN QUESTION.** On the mapping class group we know (by Morita and Miller) that the MMM classes are algebraically independent and more recently we have:

Theorem 3.4 (Ib Madsen, M. Weiss[MW02]). *The rational cohomology of the mapping class group is stably isomorphic to a polynomial ring in the MMM classes.*

For the Torelli group, this is unknown.

Question: *Are the even MMM classes (= higher FR torsion) rationally nontrivial on the Torelli group?*

Equivalently, is $W_{2k}^* \in H^{4k}(\mathcal{IAG}_*; \mathbb{Q})$ trivial?

4. Additional topics

If time permits, I will talk about two additional topics: A_∞ superalgebra and the duality between commutative and Lie graph cohomology.

4.1. **COMMUTATIVE AND LIE GRAPH COHOMOLOGY.** The theorem equating associative graph cohomology with the homology of the category of ribbon graphs is analogous to a pair of dual theorems about commutative and Lie graph cohomology.

An *algebraic cyclic operad* (definition by Getzler and Kapranov[GK95]) can be used as a system of coefficients for both graph cohomology and the category of graphs. If $\mathcal{L}$ denotes the cyclic Lie operad and $\mathcal{C}$ denotes the (trivial) commutative operad then:

Theorem 4.1 (Conant-Vogtmann[CV02]). *Graph cohomology with coefficients in $\mathcal{L}$ (i.e., Lie graph cohomology) is rationally isomorphic to the homology of the category of graphs with coefficients in $\mathcal{C}$.*

$$H_*(\mathcal{LG}_* \otimes \mathbb{Q}) \cong H_*(Gr; \mathbb{Q})$$

Theorem 4.2 (I-Goodwillie). *Graph cohomology with coefficients in $\mathcal{C}$ (i.e., commutative graph cohomology) is rationally isomorphic to the homology of the category of graphs with coefficients in $\mathcal{L}$.*

$$H_*(\mathcal{CG}_* \otimes \mathbb{Q}) \cong H_*(Gr; \mathcal{L}) \otimes \mathbb{Q}$$

I don't know if this type of duality extends to other pairs of cyclic operads.

4.2. A_∞ **SUPERALGEBRAS.**

Definition 4.3. An A_∞ *superalgebra* is a $\mathbb{Z}/2$ graded algebra $A = A_0 \oplus A_1$ together with a sequence of degree k linear maps

$$m_k : A^{\otimes k} \to A, \quad k \geq 1$$

so that

$$\sum_{r+s+t=n} (-1)^{r+st} m_{r+1+t}(1^r \otimes m_r \otimes 1^t) = 0$$

Given a finite dimensional A_∞ algebra with $m_1 = 0$ and a nondegenerate even pairing

$$\langle -, - \rangle : A \otimes A \to F \quad (F = \text{ground field})$$

Kontsevich[Kon94] defined a partition function $Z_A(\Gamma)$ for any oriented ribbon graph Γ.

$$Z_A(\Gamma) = \pm \sum_{\sigma} \pm \prod_{v_i} \langle m_{n_i}(\sigma(e_{i1}..), e_{i0}\rangle \prod_{e_j} \langle \sigma(\overline{e_j}), \sigma(e_j)\rangle$$

(Project the graph onto the plane and take the usual definition of a state sum. The planar projection has self crossings which give the inner signs (when odd edges cross). The orientation of Γ gives the outer sign.)

Theorem 4.4 (Kontsevich[Kon94]). *Z_A is a cocycle giving $[Z_A] \in \prod_n H^n(\mathcal{AG}_*; F)$.*

References

[AC96] E Arbarello and M Cornalba, *Combinatorial and algebro-geometric cohomology classes on the moduli spaces of curves*, J. Alg. Geom. **5** (1996), 705–749.

[CV86] Marc Culler and Karen Vogtmann, *Moduli of graphs and automorphisms of free groups*, Invent. Math. **84** (1986), no. 1, 91–119.

[CV02] James Conant and Karen Vogtmann, *On a theorem of Kontsevich*, math.QA/0208169.

[GK95] Ezra Gezler and M.M. Kapranov, *Cyclic operads and cyclic homology*, Geometry, topology and physics, Conference Proc. Lecture Notes Geometry, Topology IV, International Press, 1995, pp. 167–201.

[Igu02a] Kiyoshi Igusa, *Combinatorial Miller-Morita-Mumford classes and Witten cycles*, math.GT/0207042, 2002.

[Igu02b] ———, *Higher Franz-Reidemeister Torsion*, AMS/IP Studies in Advance Mathematics, vol. 31, International Press, 2002.

[Igu03] ———, *Graph cohomology and Kontsevich cycles*, math.AT/0303157, 2003.

[IK03] Kiyoshi Igusa and Michael Kleber, *Increasing trees and Kontsevich cycles*, preprint, math.AT/0303353, 2003.

[Kle93] John Klein, *Higher Franz-Reidemeister torsion and the Torelli group*, Mapping Class Groups and Moduli Spaces, Contemp. Math., vol. 150, American Math. Soc., 1993, pp. 195–204.

[Kon92] Maxim Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), no. 1, 1–23.

[Kon93] ———, *Formal (non)commutative symplectic geometry*, The Gelfand Mathematical Seminars, 1990-1992, Birkhäuser, Boston, 1993, pp. 173–187.

[Kon94] ———, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, First European Congress of Mathematics, Vol. II (Paris, 1992), Birkhäuser, Basel, 1994, pp. 97–121.

[Mil86] Edward Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Differential Geom. **24** (1986), no. 1, 1–14.

[Mon03] Gabriele Mondello, *Combinatorial classes on the moduli space of curves are tautological*, math.AT/0303207, 2003.

[Mor84] Shigeyuki Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **11** (1984), no. 2, 386–388.

[Mor87] ———, *Characteristic classes of surface bundles*, Invent. Math. **90** (1987), no. 3, 551–577.

[Mum83] David Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and geometry, Vol. II, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1983, pp. 271–328.

[MW02] Ib Madsen and Michael S. Weiss, *The stable moduli space of Riemann surfaces: Mumford's conjecture*, math.AT/0212321.

[Pen94] Robert C. Penner, *The Poincaré dual of the Weil-Petersson Kähler two-form*, Perspectives in mathematical physics, Internat. Press, Cambridge, MA, 1994, pp. 229–249.

[Str84] Kurt Strebel, *Quadratic Differentials*, Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Brandeis University
E-mail address: igusa@brandeis.edu

V-多様体の不変量

服部晶夫

1 序

V-多様体とは局所的には多様体の有限群による商空間となっている空間であり，典型的な例は多様体を不連続群で割った空間である．その意味で，具体例は古典的な不連続群の視点から研究されていたし，トポロジー関連でも，Seifert にる，後年彼の名を冠することになったファイバー空間の研究があった．一般的な V-多様体の概念は佐武 [Sa] により最初に導入された．[Sa] の主定理は Gauss-Bonnet-Chern の定理の V-多様体への拡張である．そこに出てくるオイラー数は通常のオイラー数と異なり，V-多様体の構造を反映し，一般には整数ではない．後年，Thurston は [Th] で orbifold という名前で (多分 [Sa] を知らずに)V-多様体を扱った．その中で導入された V-多様体基本群は V-多様体の位相空間としての基本群とは異なり，V-多様体の構造を反映したものである．また，川崎 [Ka2] は V-多様体上の符号指数定理を証明したが，そのとき川崎が導入した元の V-多様体に付随する新しい V-多様体が，V-多様体の不変量の定義に重要な意味をもつことが次第に明らかになってきた．筆者は最近 V-多様体をいじる機会があり，その際 V-多様体に関する基本的な情報を纏めたものが少なく，いささか不便を感じた経験がある．自分で纏めた資料を提供し，これから V-多様体を扱う機会がある人の便宜に供しようというのがこの講演の目的である．そのような意味で，アブストラクトでは，講演で正確に述べられないかもしれない定義や命題をきちんと書いておくことを主眼とする．内容的には本質的に新しいものはない．

これを書くに当たって教示をいただいた小野 薫氏に感謝する．

2 V-多様体

X をパラコンパクト位相空間とする．n 次元の滑らかな多様体 V, X の開集合 U, V に作用する有限群 H, 同相 $V/H \to U$ を誘導するような写像 $p : V \to U$ の四つ組 (V, U, H, p) を X 上の局所一意化座標 (local uniformizing system(佐武), orbifold chart(最近多く使われている)) という．[Sa] や [Th] では H の作用が効果的であることを仮定しているが，ここではその仮定は要求しない．以下，簡単のために局所一意化座標を単に座標と書く．

座標 (V, U, H, p) と座標 (V', U', H', p') に対して，$U \subset U'$ であり，単射準同型 $\rho : H \to H'$ と ρ に関して同変な滑らかな埋め込み $\phi : V \to V'$ で，条件

$$\{h' \in H' \mid h' \cdot \phi(V) \cap \phi(V) \neq \emptyset\} = \rho(H) \tag{1}$$

を満たすものがあるとき，$\Phi = (\rho, \phi)$ を座標 (V, U, H, p) から座標 (V', U', H', p') への単射といい，$\Phi : (V, U, H, p) \to (V', U', H', p')$ と書く．H と H' の作用の核をそれぞれ H_0, H'_0 と書くと，条

件 (1) は

$$\rho(H_0) = H_0'$$

と同値である．特に，座標の定義で群の作用が効果的であることを要求しておくと，条件 (1) は自動的に満たされる．$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ である二つの座標 (V_i, U_i, H_i, p_i)，(V_j, U_j, H_j, p_j)，および任意の点 $x \in U_i \cap U_j$ に対して，$x \in U$ となる座標 (V, U, H, p) と単射 $\Phi_i : (V, U, H, p) \to (V_i, U_i, H_i, p_i)$，$\Phi_j : (V, U, H, p) \to (V_j, U_j, H_j, p_j)$ が存在するとき (V_i, U_i, H_i, p_i) と (V_j, U_j, H_j, p_j) は両立するという．

空間 X 上の座標の族 $\mathcal{V} = \{(V_i, U_i, H_i, p_i)\}_{i\in\Lambda}$ があって，$\bigcup_{i\in\Lambda} U_i = X$ であり，$U_i \cap U_j \neq \emptyset$ となる二つの座標 $(V_i, U_i, H_i, p_i) \in \mathcal{V}$ と $(V_j, U_j, H_j, p_j) \in \mathcal{V}$ は必ず両立しているとき，族 $\mathcal{V}$ は X に n 次元 V-多様体の構造を定めるといい，族 $\mathcal{V}$ を V-多様体 X の座標系という． 正確には，極大な座標系 $\mathcal{V}$ と X の組 $(X, \mathcal{V})$ を V-多様体と呼ぶ．点 $x \in X$ に対し，$x \in U$ となる座標を x の周りの座標と呼ぶことにする．

(V, U, H, p) を x の周りの座標とする．$v \in p^{-1}(x) \subset V$ に対し，v における H の等方群 (isotropy group) H_x の同型類は x だけによるが，条件 (1) を用いると，その同型類は x の周りの座標のとりかたによらず，x だけで決まることが分かる．これを点 $x \in X$ の等方群といい，H_x と書く．任意の x に対して，$p^{-1}(x)$ が 1 点となり，したがって $H = H_x$ であるような x の周りの座標 (V, U, H, p) が存在する．そのような座標を x を中心とする簡約座標 (reduced chart) という．また，簡約座標 (V, U, H, p) として，V が n 次元球体，H が V に作用する線形群であるものがとれる (このような座標を線形座標という)．このことから，一定の有限群 H と同型になる等方群 H_x をもつ $x \in X$ は多様体 (連結とは限らない) となり，H を動かすことにより滑層分割 (stratification) が得られる．特に，X が連結であるとき，最小の等方群 H が存在し，$H_0 = H$ であり，対応する滑層 (stratum) は稠密な開集合になる．これを主滑層という．主滑層の点の等方群の位数を V-多様体 X の重複度といい，$d(X)$ と書くことにする．$d(X) > 1$ のときには，総ての等方群を最小の等方群で割ることにより，$d(X) = 1$ となる新しい V-多様体構造が得られる．自明でない H_0 も許すのは便宜上である．主滑層以外に含まれる点を V-多様体の特異点という．

部分 V-多様体，V-多様体の積など通常の多様体で用いられる概念は V-多様体にも自然に拡張される．例えば，V-多様体 X の部分集合 N がどの座標 (V, U, H, p) に対しても $V' = p^{-1}(U \cap N)$ が V の H 不変な部分多様体になっているとき，族 $\{(V', U \cap N, H, p|V')\}$ は N の V-多様体構造を定める．通常，この構造の下に N を V-多様体と考え，X の部分 V-多様体という．H の V への作用が効果的であっても，H の V' への作用は効果的とは限らないことに注意しておく．

3 V-多様体写像，V-多様体ベクトル束，群作用

X, X' を V-多様体 $f : X \to X'$ を連続写像とする．各点 $x \in X$ と $y = f(x)$ に対し，x の周りの座標 (V, U, H, p) と y の周りの座標 (V', U', H', p') で $f(U) \subset U'$ となるものをとったとき，準同型 $\lambda : H \to H'$ と λ に関し同変な写像 $\tilde{f} : V \to V'$ で，その誘導する写像 $U \to U'$ が f と一致するものが存在するとき，f を V-多様体写像という．$\tilde{f}$ が連続 (滑らか) であるとき f は連続 (滑らか) であるという．上の λ と $\tilde{f}$ を併せて $\Phi = (\lambda, \tilde{f}) : (V, U, H, p) \to (V', U', H', p')$ と書き，二つの座標の間の射という．射 Φ を f の座標への持ち上げということにする．

次に V-多様体ベクトル束を定義する．一般の V-多様体ファイバー束の定義も同様であるが詳細は

省略する．V-多様体写像 $\pi: E \to X$ が条件：

「各点 $x \in X$ に対して x の周りの座標 (V,U,H,p) と $\pi^{-1}(U)=\tilde{U}$ となる E の座標 $(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{H},\tilde{p})$，および $\lambda: \tilde{H}=H$ であるような π の座標への持ち上げ $\Phi=(\lambda,\tilde{\pi}):(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{H},\tilde{p}) \to (V,U,H,p)$ で，$\tilde{\pi}: \tilde{V} \to V$ が H-ベクトル束となるものが存在する」

を満たしているとき，$\pi: E \to X$ は V-多様体ベクトル束であるという．例として，V-多様体の接ベクトル束，部分 V-多様体の法ベクトル束を挙げておく．定義はどちらもほぼ明らかであろう．また，ベクトル束の計量も，各座標 $(\tilde{V},\tilde{U},\tilde{H},\tilde{p})$ で H 不変な $\tilde{V}$ の計量として定義する．向きづけ可能性，接続，曲率などについても同様である．V-多様体 X のリーマン計量に関する正規直交枠のファイバー束 $B \to X$ は多様体になることが簡単に示すことができる ([Ka2])．これにより，任意の V-多様体は多様体の直交群による商として表わされることが分かる．

G をリー群，X を V-多様体とする．V-多様体写像 $\mu: G \times X \to X$ で通常の作用の規則を満たしているものを，G の X への作用という．$x \in X$ を作用の不動点とし，U が G 不変となるような x の周りの座標 (V,U,H,p) をとる．G の作用は一般には V にもち上がらないが，G が連続であれば，G の適当な有限被覆群をとると，その作用は V にもち上がる．

4 川崎の構成

X を V-多様体とする．これに付随して，[Ka2] に従い新しい V-多様体 $\hat{X}$ と写像 $\pi: \hat{X} \to X$ を導入する．一般に，群 G に対してその共役類の全体の集合を $Conj(G)$ と書く．π は全射で $\pi^{-1}(x)=Conj(H_x)$ となる．すなわち，集合としては

$$\hat{X} = \bigsqcup_{x \in X} Conj(H_x)$$

で，$\pi(Conj(H_x)) = x$ である．これに対して位相と V-多様体構造を次のように入れる．座標 (V,U,H,p) に対し，

$$\hat{V} = \{(v,h) \mid v \in V, h \in H, hv = v\}$$

とおき，$\hat{V}$ に H を

$$g(v,h) = (gv, gvg^{-1})$$

で作用させる．また，

$$\hat{U} = \bigsqcup_{x \in U} Conj(H_x) \subset \hat{X}$$

とおき，$\hat{p}: \hat{V} \to \hat{U}$ を $\hat{p}(v,h) = [h] \in H_{p(v)}$ で定義する．$\hat{p}$ は全単射 $\hat{V}/H \to \hat{U}$ を誘導する．さらに，写像 $\pi: \hat{V} \to V$，$\pi: \hat{U} \to U$ を

$$\pi(v,h) = v,\ \pi(\hat{p}(v,h)) = p(v)$$

で定義する．$[h]$ は $H_{p(v)}$ での h の共役類を表わす．すると，図式

$$\begin{array}{ccccc}
\hat{V} & \xrightarrow{\hat{p}} & \hat{U} & \xrightarrow{i} & \hat{X} \\
{\scriptstyle \hat{\pi}}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow \\
V & \xrightarrow{p} & U & \xrightarrow{i} & X
\end{array}$$

は可換である．

$h \in H$ に対し，$C(h)$ を h の中心化群 とする．$C(h)$ は h の不動点集合 V^h に作用し，しかも $V^h/C(h)$ は h の H での共役類 $[h]$ だけに依存し，直和分解

$$\hat{V}/H = \bigsqcup_{[h] \in Conj(H)} V^h/C(h)$$

が存在する．しかも，$x \in X$ を中心とする線形の簡約座標 (V_x, U_x, H_x, p_x) をとると，V_x^h は連結である．そこで，任意の $x \in X$ と任意の $h \in H_x$ に対して，$\hat{p}(V_x^h/C(h))$ が X の開集合となり，$(V_x^h, \hat{p}(V_x^h/C(h)), C(h), \hat{p}|V_x^h)$ が $[h] \in Conj(H_x) \subset \hat{X}$ を中心とする局所一意化座標になるような位相と V-多様体の構造を $\hat{X}$ に入れる．$\hat{X}$ は一般には連結でなく，$[h]$ を含む $\hat{X}$ の連結成分の次元は $\dim V_x^h$ に等しい．X の座標 (V, U, H, p) に対して $(\hat{V}, \hat{U}, H, \hat{p})$ は $\hat{X}$ の座標である．

一般には $V_x^h/C(h) \to V_x/H_x$ は単射ではないから，$\pi : \hat{X} \to X$ ははめ込み (immersion) であるが，埋め込みとは限らない．$s(x) = 1 \in H_x$ とおくと，s は $\pi : \hat{X} \to X$ の切断であり，通常その像を X と同一視する．$\hat{X}$ は，感じとしては，等方群の大きい方から特異点集合を解きほぐし，より簡単な V-多様体の和に分解しているものといってよい．$\hat{X}$ には定まった呼び名がないようである．[ChR] では，X 以外の連結成分を twisted sector と呼んでいる．また，C^* 環関連の文献では Brylinski space と呼んでいる (例えば [Fa] 参照)．後に述べる delocalized equivariant cohomology もその関連で定義された．

例 4.1. 多様体 M に有限群 G が作用しているとき，$X = M/G$ に (M, X, G, p) が一意化座標となるような V-多様体構造がはいる．$p : M \to X$ は射影である．そのとき，

$$\hat{M} = \{(y, g) \in M \times G \mid gy = y\}$$

とおいて，$\hat{X} = \hat{M}/G$ と同一視できる．例の例として，$a > 1$, $b > 1$ を互いに素な整数とし，群 $G = \{(g_1, g_2) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C} \mid g_1^a = 1, g_2^b = 1\}$ が複素射影平面 $\mathbb{C}P^2$ に

$$(g_1, g_2)[z_0, z_1, z_2] = [z_0, g_1 z_1, g_2 z_2]$$

で作用する場合を考える．

$$\begin{aligned} M_1 &= \{[z_0, 0, z_2]\} \subset \mathbb{C}P^2,\ X_1 = M_1/G \\ M_2 &= \{[z_0, z_1, 0]\} \subset \mathbb{C}P^2,\ X_2 = M_2/G \\ P_0 &= [1, 0, 0],\ P_1 = [0, 1, 0],\ P_2 = [0, 0, 1] \end{aligned}$$

とおく．P_i の X での像も P_i と書く．X の特異点集合は X_1, X_2 の和集合で両者は P_0 で交わっている．$\hat{X}$ の X 以外の連結成分は π によってそれぞれ X_1, X_2, P_0, P_1, P_2 の上に全単射に写る X_1 の $a-1$ 個のコピー，X_2 の $b-1$ 個のコピー，P_0 の $(a-1)(b-1)$ 個のコピー，P_1 の $a(b-1)$ 個ののコピー，P_2 の $b(a-1)$ 個のコピーである．

5　V-多様体被覆，V-多様体基本群

不連続群の自由な作用は通常の意味の被覆であるが，V-多様体被覆では必ずしも自由でない作用も許容する ([Th] 参照)．$\tilde{X}, X$ を連結な n 次元 V-多様体，$\pi : \tilde{X} \to X$ を V-多様体写像とする．

(i) 各点 $x \in X$ に対して x の周りの座標 (V, U, H, p) で $\pi^{-1}(U) = \coprod_i \tilde{U}_i$ と直和分解があり，

(ii) 各 i に対して $\tilde{X}$ の座標 $(\tilde{V}_i, \tilde{U}_i, \tilde{H}_i, \tilde{p}_i)$ と $\pi|\tilde{U}_i$ の座標への持ち上げ $\Phi = (\tilde{\rho}_i, \tilde{\pi}_i)$: $(\tilde{V}_i, \tilde{U}_i, \tilde{H}_i, \tilde{p}_i) \to (V, U, H, p)$ で，$\tilde{\rho}_i : \tilde{H}_i \to H$ は単射かつ $\tilde{\rho}_i((\tilde{H}_i)_0) = H_0$ を満たし，$\tilde{\pi}_i$ は全単射

となるものがあるとき，$\pi : \tilde{X} \to X$ は V-多様体被覆であるという．条件 (ii) から X の主滑層の上では π は分岐のない通常の被覆になっている．その次数が有限のとき，それを V-多様体被覆 $\pi : \tilde{X} \to X$ の被覆次数という．被覆次数は，また，座標 $(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{H}, \tilde{p})$ 上で

$$\sum_i |H|/|\tilde{H}_i| \tag{2}$$

とも書ける．

X の V-多様体被覆 $\tilde{X}$, $\tilde{X}'$ の間の被覆写像は，もちろん V-多様体写像 $\tilde{X} \to \tilde{X}'$ で射影と可換になるものと定義する．任意の V-多様体被覆 $\tilde{X}' \to X$ に対して被覆写像 $\tilde{X} \to \tilde{X}'$ が存在するとき $\tilde{X}$ は X の (V-多様体) 普遍被覆であるという．普遍被覆は存在し，定義からわかるように同型を除いて一意的である ([Th])．例えば，X が多様体 M の不連続群の固有な作用による商であるとき，M の通常の意味での普遍被覆が X の V-多様体普遍被覆になる．普遍被覆の存在証明は，Chevalley のリー群の本にあるように，総ての X 上の V-多様体被覆の同型類を一つづつ含むような射影系の極限として普遍被覆を構成することにより得られる．射影系を作るとき注意すべき点は，X 上の V-多様体被覆と V-多様体被覆のファイバー積をとるとき，通常の意味のファイバー積は一般には V-多様体被覆にならないことである．その代わりに，それをもう少しほどいた V-多様体ファイバー積とでもいうべきものを用いる必要がある．なお，通常の被覆の場合と同様に，V-多様体道 (区間からの V-多様体写像) を用いる方法もある．

X 上の普遍 V-多様体被覆の自己同型群を X の V-多様体基本群といい，$\pi_1^V(X)$ または $\pi_1^{orbi}(X)$ と書く．普遍被覆はガロア被覆である．すなわち，基本群は被覆のファイバーに推移的に作用する．通常の被覆の場合と同様に，X 上の V-多様体被覆の同型類と $\pi_1^V(X)$ の間にガロア対応が成り立つ．なお，V-多様体基本群を閉じた V-多様体道を用いて定義することもできる．ただし，基点は主滑層の中にとる必要がある．

6 V-多様体オイラー数

コンパクトな V-多様体 X の単体分割で，各開単体 σ_j は一つの滑層の中に含まれているようなものに対し，

$$\chi_V(X) = \sum_j (-1)^{\dim \sigma_j} \frac{1}{|H_j|}$$

を V-多様体 X の V-多様体オイラー数という．ここで，H_j は σ_j を含む滑層の点に共通な等方群である．これは一般には整数ではない．これが単体分割によらないことは後に述べる V-多様体オイラー数の積分表示によって保証される．

補題 6.1. $\tilde{X} \to X$ を被覆次数 d の V-多様体被覆とする．そのとき

$$\chi_V(\tilde{X}) = d\chi_V(X)$$

が成り立つ．

(i) 各点 $x \in X$ に対して x の周りの座標 (V, U, H, p) で $\pi^{-1}(U) = \bigsqcup_i \tilde{U}_i$ と直和分解があり，

(ii) 各 i に対して $\tilde{X}$ の座標 $(\tilde{V}_i, \tilde{U}_i, \tilde{H}_i, \tilde{p}_i)$ と $\pi|\tilde{U}_i$ の座標への持ち上げ $\Phi = (\tilde{\rho}_i, \tilde{\pi}_i) : (\tilde{V}_i, \tilde{U}_i, \tilde{H}_i, \tilde{p}_i) \to (V, U, H, p)$ で，$\tilde{\rho}_i : \tilde{H}_i \to H$ は単射かつ $\tilde{\rho}_i((\tilde{H}_i)_0) = H_0$ を満たし，$\tilde{\pi}_i$ は全単射

となるものがあるとき，$\pi : \tilde{X} \to X$ は V-多様体被覆であるという．条件 (ii) から X の主滑層の上では π は分岐のない通常の被覆になっている．その次数が有限のとき，それを V-多様体被覆 $\pi : \tilde{X} \to X$ の被覆次数という．被覆次数は，また，座標 $(\tilde{V}, \tilde{U}, \tilde{H}, \tilde{p})$ 上で

$$\sum_i |H|/|\tilde{H}_i| \tag{2}$$

とも書ける．

X の V-多様体被覆 $\tilde{X}$, $\tilde{X}'$ の間の被覆写像は，もちろん V-多様体写像 $\tilde{X} \to \tilde{X}'$ で射影と可換になるものと定義する．任意の V-多様体被覆 $\tilde{X}' \to X$ に対して被覆写像 $\tilde{X} \to \tilde{X}'$ が存在するとき $\tilde{X}$ は X の (V-多様体) 普遍被覆であるという．普遍被覆は存在し，定義からわかるように同型を除いて一意的である ([Th])．例えば，X が多様体 M の不連続群の固有な作用による商であるとき，M の通常の意味での普遍被覆が X の V-多様体普遍被覆になる．普遍被覆の存在証明は，Chevalley のリー群の本にあるように，総ての X 上の V-多様体被覆の同型類を一つづつ含むような射影系の極限として普遍被覆を構成することにより得られる．射影系を作るとき注意すべき点は，X 上の V-多様体被覆と V-多様体被覆のファイバー積をとるとき，通常の意味のファイバー積は一般には V-多様体被覆にならないことである．その代わりに，それをもう少しほどいた V-多様体ファイバー積とでもいうべきものを用いる必要がある．なお，通常の被覆の場合と同様に，V-多様体道 (区間からの V-多様体写像) を用いる方法もある．

X 上の普遍 V-多様体被覆の自己同型群を X の V-多様体基本群といい，$\pi_1^V(X)$ または $\pi_1^{orbi}(X)$ と書く．普遍被覆はガロア被覆である．すなわち，基本群は被覆のファイバーに推移的に作用する．通常の被覆の場合と同様に，X 上の V-多様体被覆の同型類と $\pi_1^V(X)$ の間にガロア対応が成り立つ．なお，V-多様体基本群を閉じた V-多様体道を用いて定義することもできる．ただし，基点は主滑層の中にとる必要がある．

6 V-多様体オイラー数

コンパクトな V-多様体 X の単体分割で，各開単体 σ_j は一つの滑層の中に含まれているようなものに対し，

$$\chi_V(X) = \sum_j (-1)^{\dim \sigma_j} \frac{1}{|H_j|}$$

を V-多様体 X の V-多様体オイラー数という．ここで，H_j は σ_j を含む滑層の点に共通な等方群である．これは一般には整数ではない．これが単体分割によらないことは後に述べる V-多様体オイラー数の積分表示によって保証される．

補題 6.1. $\tilde{X} \to X$ を被覆次数 d の V-多様体被覆とする．そのとき

$$\chi_V(\tilde{X}) = d\chi_V(X)$$

が成り立つ．

コホモロジー

向きのついた V-多様体は $\mathbb{Q}$ 上のホモロジー多様体である．したがって，$\mathbb{Q}$ 係数のホモロジー，コホモロジーの間で Poincaré 双対性が成り立つ．また，de Rham の定理も成り立つ．V-多様体 X 上の微分形式 ω とは各座標 (V, U, H, p) ごとに与えられた H 不変な微分形式 $\omega_V \in \Omega^*(V)^H$ で，任意の座標の間の単射 $\Phi = (\rho, \phi) : (V_i, U_i, H_i, p_i) \to (V_j, U_j, H_j, p_j)$ に対して $\phi^*\omega_{V_j} = \omega_{V_i}$ となるものを指す．

有限群 G の作用する多様体 M に対する同変 K 群 $K_G(M)$ や同変コホモロジー $H_G^*(M)$ を M/G の不変量とみたときの V-多様体での対応物として，まず，V-多様体 X 上の V-多様体複素ベクトル束の Grothendieck 群として V-多様体 K 群 $K_V(X)$ を定義する．同変コホモロジーに対応するものは次のように定義する ([StW])．X の座標系 $\mathcal{V} = \{(V_i, U_i, H_i, p_i)\}$ をとり，V_i の群 H_i に関する Borel 構成 $BV_i = (EH_i \times V_i)/H_i$ の貼り合わせを $BX = \bigcup_i BV_i$ とおく．貼り合わせは，座標間の単射 $\Phi = (\rho, \phi) : (V_i, U_i, H_i, p_i) \to (V_j, U_j, H_j, p_j)$ の誘導する $\rho \times \phi : BV_i = (EH_i \times V_i)/H_i \to BV_j = (EH_j \times V_j)/H_j$ による．$H^*(BX)$ を X の V-多様体コホモロジーといい，$H_V^*(X)$ と書く．$X = M/G$ のときは

$$K_V(X) = K_G(M),\ H_V^*(X) = H_G^*(M)$$

である．Haefliger [Hae] は V-多様体を位相亜群 (topological groupoid) とみて，そのコホモロジーとして $H_V^*(X)$ を定義している．[StW] はこれにまた別の解釈を与えている．[ChR] では概複素 V-多様体 X に対して，上の $H_V^*(X)$ とは異なるコホモロジー理論をを展開している．

V-多様体 X 上の V-多様体複素線束の Picard 群を $Pic_V(X)$ と書く．$\mathcal{C}_X^*$ で X 上の零をとらない滑らかな V-多様体関数の芽の作る層とすると，通常の線束の場合と同様に

$$Pic_V(X) \cong H_V^1(X, \mathcal{C}_X^*) \cong H_V^2(X, \mathbb{Z})$$

が成り立つ．$\xi \in Pic_V(X)$ に対応する $H_V^2(X, \mathbb{Z})$ のコホモロジー類を $c_1(\xi)$ と書き，ξ の 1 次チャーン類という．これから，階数 k の V-多様体複素ベクトル束 ξ に対しても，チャーン類 $c_i(\xi)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ が $H_V^{2i}(X, \mathbb{Z})$ の類として定義される．自然な写像 $BX \to X$ は同型 $H^*(X, \mathbb{R}) \to H_V^*(X, \mathbb{R})$ を導くから，$\mathbb{R}$ 係数では $c_i(\xi)$ は $H^{2i}(X, \mathbb{R})$ したがって de Rham 群 $H_{DR}^{2i}(X)$ の類とみることができる．そのようにみると，通常のベクトル束の場合と同様に，ξ の接続をとり，その曲率を用いて表わされるチャーン形式が $c_i(\xi)$ を代表する．同様のことは V-多様体実ベクトル束のポントリャーギン類，オイラー類についてもいえる．X を向きづけられた V-多様体，TX をその接ベクトル束，$e(TX)$ をオイラー形式とすると，佐武 [Sa] の主定理は

$$\frac{1}{d(X)} \int_X e(TX) = \chi_V(X)$$

と書ける．

6 節に戻って，(4) の証明は，$X = M/G$ とおいて，自然な同型

$$K_G^*(M) \otimes \mathbb{C} \cong K^*(\hat{X}) \otimes \mathbb{C} \cong H^*(\hat{X}, \mathbb{C})$$

の存在から導かれる ([BaC],[AtS])．その同型の証明と同様の考察により次の定理を得る．

定理 7.1. X をコンパクトな V-多様体とする．そのとき，自然な同型

$$K_V^*(X)\otimes\mathbb{C}\cong K^*(\hat{X})\otimes\mathbb{C}$$

が存在する．

系 7.2.

$$\dim K_V^0(X)-\dim K_V^1(X)=\chi(\hat{X}).$$

$ch: K^*(\hat{X})\otimes\mathbb{C}\to H^*(\hat{X},\mathbb{C})$ は同型であり，したがって，それと定理 7.1 の同型の合成として $\mathrm{ch}: K_V^*(X)\otimes\mathbb{C}\to H^*(\hat{X},\mathbb{C})$ は同型である．X は一つの連結成分として $\hat{X}$ に含まれているから，$H^*(X,\mathbb{C})$ は $H^*(\hat{X},\mathbb{C})$ の直和因子として含まれている．よって，$ch: K_V^*(X)\otimes\mathbb{C}\to H^*(X,\mathbb{C})$ は全射ではあるが，単射ではない．$X=M/G$ に対して $H^*(\hat{X},\mathbb{C})$ は M の delocalized equivariant cohomology と呼ばれている ([BaC])．[BBM] ではコンパクト群 G が多様体 M に作用しているときにも delocalized equivariant cohomology $H^*(G,M)$ とチャーン指標 $ch: K_G(M)\otimes\mathbb{C}\to H^*(G,M)$ を定義し，それが同型であることを示している．なお，川崎の指数定理は，X 上の楕円型微分作用素の指数を $\hat{X}$ の各連結成分上の適当な微分形式の積分として表わすものであるが，上の定理と比較するとその意味はさらに明らかになる．

V-多様体にコンパクト群が作用しているときには，同変 V-多様体 K 群，同変 V-多様体コホモロジーが同様に定義される．また，対応する Atiyah-Singer 型の不動点公式も得られている ([Ve])．

8 特性数，V-多様体楕円種数

向きづけられた V-多様体 X の特性類の X 上の積分として特性数は定義されるが，多様体の場合には整数となるようなものでも，一般には整数とならない．オイラー類が典型的な例である．楕円型微分作用素の指数は定義により整数であるが，指数定理によりその積分表示は $\hat{X}$ の上の積分として表わされる．定理 6.3 が典型的な例である．通常のオイラー数 $\chi(X)$ は $K^*(X)$ のオイラー数と考えられるが，系 7.2 によりオイラー数 $\hat{\chi}$ は $K_V^*(X)$ のオイラー数であった．これと同じような意味で，$K_V(X)$ と関連しているとみられる複素種数に V-多様体楕円種数がある．$\hat{\chi}$ と同様に弦理論から発生したものである．これについては [Ha] で解説してある．そこでは $X=M/G$ のときの V-多様体楕円種数の定義を与えてあるが，一般の V-多様体に拡張するのは容易である．関連した文献として [BoL1], [BoL2], [HaM] を挙げておく．

参考文献

[AtS] M. Atiyah and G. Segal, *On equivariant Euler characteristics*, J. Geom. Phys., **6** (1989), 671–677.

[BBM] P. Baum, J.-L. Brylinski and R. MacPherson, *Cohomologie équivariante délocalisée*, C. R. Acad. Sc. Paris, **300** (1985), 605–608.

[BaC] P. Baum and A. Connes, *Chern character for discrete groups*, A Fête of Topology, Academic Press, 1988, 163–232.

[BoL1] L. A. Borisov and A. Libgober, *Elliptic genera of toric varieties and applications to mirror symmetry*, Invent. math., **140** (2000), 453–485.

[BoL2] ———, *Elliptic genera of singular varieties*, Duke Math. J., **116** (2003), 319–351.

[ChR] W. Chen and Y. Ruan, *A new cohomology theory of orbifold*, preprint, 2001, AG/0004129v3.

[Fa] C. Farci, *K-theoretical index theorems for orbifolds*, Quart. J. Math. Oxford, **43** (1992), 183–200.

[Hae] A. Haefliger, *Cohomology theory for etale topological groupoids*, Notes from University of Geneva, 1992.

[Ha] 服部晶夫, 楕円種数と楕円コホモロジー, 数学, **55** (2003).

[HaM] A. Hattori and M. Masuda, *Elliptic genera, torus orbifolds and multi-fans*, preprint, 2003.

[HiH] F. Hirzebruch and T. Höfer, *On the Euler number of an orbifold*, Math. Ann., **286** (1990), 255–260.

[Ka1] T. Kawasaki, *Cohomology of twisted projective spaces and lens complexes*, Math. Ann., **206** (1973), 243–248.

[Ka2] ———, *The signature theorem for V-manifolds*, Topology, **17** (1978), 75–83.

[Ka3] ———, *The index of elliptic operators over V-manifolds*, Nagoya Math. J., **84** (1981), 135–157.

[Sa] I. Satake, *The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds*, J. Math. Soc. Japan, **9** (1957), 464–492.

[StW] B. Steer and A. Wren, *Grothendieck topology and the Picard group of a complex orbifold*, Contemp. Math., **239** (1999), 251–262.

[Th] W. P. Thurston, *the Geometry and Topology of 3-manifolds*, Lecture Notes, Princeton,

[Ve] M. Vergne, *Equivariant index formula for orbifolds*, Duke Math. J., **82** (1996), 637–652.

幾何の離散群への応用
- 群のCAT(0)次元 -

藤原 耕二 (東北大学 数学)
fujiwara@math.tohoku.ac.jp
http://www.math.tohoku.ac.jp/~fujiwara/

トポロジーシンポジウム (松本)
2003年7月19日～22日

1 イントロダクション

離散群（ここでは有限生成とする）の研究課題、方法、動機付けは色々あるが、ここでは"幾何学的"に考えたい。具体的には群 G がある距離空間 X に等長的に作用する状況を考える。例を挙げると

- 多様体 M の基本群 G の普遍被覆空間 X への作用。多様体に計量を与えれば作用は等長的になる。
- 我々はsingularな空間も許容する。有限生成群 G にある生成元集合を定めると、「Cayleyグラフ」と呼ばれる局所有限なグラフが定まり、その上の自然な距離（「語距離」）について G は等長的に作用する。

一方、位相的な観点からの古典的な問題意識として、離散群 G が与えられたとき、それを基本群に持つ空間 X を考える（または探す）のは自然である。さらに X がasphericalであること（すなわち普遍被覆が可縮）を要請するのもリーズナブルである。実際、そのような空間はCW複体として常に存在しホモトピーを除いて一意であることが古くから知られている。従って群 G の（コ）ホモロジーを X の（コ）ホモロジーと定義することができる。X は「$K(G,1)$ 空間」と呼ばれるが、群 G の不変量として $K(G,1)$ 複体の最小次元を考え、それを「geometric dimension」と

呼び geom dim(G) とかく。明かに群 G のコホモロジーは geom dim(G) を越えると消えるが、geom dim は有限とは限らない ([Br])。

ところで一般的な問題として、単連結な空間 X が可縮であるかを判定するのは容易ではない。すなわち、空間 X がある仕方で与えられて、その全体の形が一目で見て取れない状況である。そのような問題に対する一般的で強力な道具（の 1 つ）は Morse 理論だろう。

1 つの例として、曲面（2 次元コンパクト多様体）の Teichmuller 空間を考えよう。Teichmuller 空間 T は、あるモジュライ空間の普遍被覆として与えられるので単連結である。T には曲面の写像類群（有限表示群）が作用するので我々の設定に当てはまる。実際、T は有限次元のユークリッド空間に位相同型であることが知られていて特に可縮である。しかし T が可縮であることを直接示すのは容易ではない。

そもそもユークリッド空間は、なぜ可縮なのだろうか？　Morse 理論の立場に立てば、ユークリッド空間のある基点からの距離関数 f には特異点がないからと言うことが出きる。すなわち、f のグラジエントベクトルに沿って空間を基点につぶせばよい。本質的に同じ例として次の Cartan-Hadamard 定理がある。「完備な n 次元リーマン多様体 M の断面曲率が ≤ 0 なら、その普遍被覆は n 次元ユークリッド空間に微分同型であり特に可縮」。この場合、明かに M の基本群の geom dim は $\leq n$ である。

以上のことから次のような問題を考えたい。

群 G に対して、$K(G,1)$ 空間 X で"曲率が ≤ 0" であるものを見つけよ。またその最小次元（不変量）は何か？

我々は singular な空間も許容するから、X はリーマン多様体とは限らない。よって曲率 ≤ 0 を一般化した概念、「CAT(0)」を次章で導入し、それに対して上のように決まる不変量を「CAT(0) 次元」と呼ぶ。定義より geom dim $\leq$CAT(0) 次元である。

2　CAT(k) 空間

この章では CAT(k) 空間の定義と例、基本的な性質を [Ba],[BriH] から述べる。このノートでは距離空間における 2 点間の距離を $|x-y|$ と表す事がある。

2.1 定義と例

距離空間 X の任意の 2 点間の距離が 2 点を結ぶ X 内のある道の長さで実現されるとき、X を「測地空間」という。距離を実現する道を「測地線」という。たとえばリーマン多様体は測地空間である。

リーマン多様体にはリーマン計量から定まる（断面）曲率があるが、一般の測地空間に「モデル空間」との比較によって"曲率"を定義する。ここでは、モデル空間 $M(k)$ として 2 次元の完備、単連結なリーマン多様体で、その断面曲率が $k = 0, 1, -1$ であるものを考える。すなわち、ユークリッド平面 $\mathbf{E}^2$、2 次元球面 $\mathbf{S}^2$、双曲平面 $\mathbf{H}^2$ である。

測地空間 X の測地三角形（すなわち三辺が全て測地線）Δ に対して、モデル空間内の測地三角形で、その三辺の長さが Δ の三辺と同じものを「比較三角形」と呼び $\bar{\Delta}$ と書く。ただし、モデルが $\mathbf{S}^2$ の時は Δ の三辺の長さの合計が 2π 未満の場合だけ比較三角形を考える。Δ の 3 頂点を p, q, r とし、対応する $\bar{\Delta}$ の頂点を $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ と書く。Δ の辺上の点 x に対応する $\bar{\Delta}$ の点を $\bar{x}$ と書く。ここで対応する点とは、x を含む辺が頂点 p, q を結ぶ測地線 $[p, q]$ であるとき、モデル空間の $\bar{p}, \bar{q}$ を結ぶ測地線 $[\bar{p}, \bar{q}]$（これは $\bar{\Delta}$ の辺である）上の点で、$|p - x| = |\bar{p} - \bar{x}|$ を満たす点 $\bar{x}$ のことである。

定数 k を固定して X について次が成り立つとき X は「CAT(k) 空間」と言う。CAT は Cartan,Alexandrov,Toponogov の頭文字である。

X の任意の測地三角形 Δ の周上の任意の 2 点 x, y と、$M(k)$ 内の比較三角形上の対応する 2 点 $\bar{x}, \bar{y}$ について

$$|x - y| \leq |\bar{x} - \bar{y}|.$$

明らかに CAT(-1) 空間は CAT(0) 空間であり、CAT(0) 空間は CAT(1) 空間である。

例。(i) CAT(1) 空間：$\mathbf{S}^n, (n > 0)$. $\mathbf{S}^n$ の中の凸集合。二つの $\mathbf{S}^2$ を赤道で貼り合わせたもの。

(ii) CAT(0) 空間：$\mathbf{E}^n$. 断面曲率 ≤ 0 の完備、単連結なリーマン多様体。Euclidean ビルディング。次の 2 つの操作で得られる空間 (1) 2 つの CAT(0) 空間のプロダクト。(2) 2 つの CAT(0) 空間 X, Y の完備凸集合 $A \subset X, B \subset Y$ が等長的であるとき、X, Y を A, B で貼り合わせたもの。特に、A, B が無限測地線の場合など。

(iii) CAT(-1) 空間：$\mathbf{H}^n, (n > 0)$. 断面曲率 ≤ -1 の完備、単連結なリーマン多様体。単体的、または $\mathbf{R}$ ツリー。

次の結果はイントロで述べた問題設定を裏付ける意味でも重要である。

定理 2.1 X を *CAT(0)* 空間とする。任意の *2* 点 $x, y \in X$ を結ぶ測地線はただ *1* つで（$[x, y]$ とかく）、端点 x, y に連続に依存する。特に X は可縮。

比較空間 $\mathbf{E}^2$ において測地線の一意性と連続性は自明だが、比較三角形を使っての簡単な考察から X においても成立することが分かる。可縮性は基点 x を決めて、任意の点 $y \in X$ は測地線 $[x, y]$ に沿って縮めてくればよい。

2.2 CAT(0) 空間の等長変換の分類

CAT(0) 空間について考えるとき、その代表的かつ極端な例であるユークリッド平面、双曲平面、ツリーを頭に置いておくのは助けになる。

完備な CAT(0) 空間 X の等長変換 $f : X \to X$ の分類について述べる。

- f が固定点を持つとき、「エリプティック」という。固定点の集合は凸である（すなわち任意の 2 点が内部で測地線により結ばれる）
- f がエリプティックでなく、不変な無限測地線 γ を持つとき、「ハイパボリック」という。γ を f の「軸」という。軸は唯 1 つとは限らないが軸の集合は凸集合で $A \times \gamma$ に等長的。各 $a \times \gamma$ は軸である。特に 2 つの軸は互いに”平行”である。
- f がエリプティックでもハイパボリックでもないとき、「パラボリック」と呼ぶ。

f について、その「移動距離」 $t(f)$ を次で定義する。

$$t(f) = \inf_{x \in X} |x - f(x)|.$$

上の分類は次のように言い換えられる。

- $t(f) = 0$ で、ある点 x で移動距離 (=0) が実現される（すなわち固定点）ときエリプティック
- $t(f) > 0$ であるときハイパボリック
- $t(f) = 0$ だが固定点が存在しないときパラボリックである。

さらに、ハイパボリックの時、移動距離を実現する x は軸上にあり、それに限る。すなわち $A \times \gamma = \{x \in X : |x - f(x)| = t(f)\}$。

もちろん、この分類はCAT(-1) 空間にも適用できる。この場合、さらにハイパボリックな等長変換の軸は唯1つである。これは双曲空間 $\mathbf{H}^n$ の等長変換の通常の分類の拡張になっている。

エリプティックまたはハイパボリックな等長変換を、「セミシンプル」と呼ぶ。ユークリッド平面、ツリーの等長変換は全てセミシンプルである。

一般に距離空間 X に群 G が等長的に作用しているとき、任意の $x \in X$ と任意の $r > 0$ について、集合 $\{g \in G : |x - g(x)| \leq r\} \subset G$ が有限集合のとき、作用は「不連続的」という。次の事実は基本的である。

定理 2.2 *CAT(0)* 空間 X に群 G が等長的に作用しているとする。作用は不連続的とする。このとき、$g \in G$ がトージョンであることと、エリプテックであることは同値。さらに、商空間 X/G がコンパクトなら G の各元はセミシンプル。

従って、X/G がコンパクトで G にトージョンがなければ、単位元以外はハイパボリックである。

定理 2.3 (Flat torus theorem) *CAT(0)* 空間 X に階数 n の自由アーベル群 G が等長的、不連続的に作用しているとする。各元はセミシンプルとする。このとき、n 次ユークリッド空間と等長的、G-不変で凸な部分空間 $\mathbf{E}^n \subset X$ が存在し、$\mathbf{E}^n/G$ は n 次元トーラスである。

この結果は X がリーマン多様体で断面曲率が ≤ 0 のとき、Lawson-Yau の定理として古くから知られているが、それは次のように述べることも出きる。「断面曲率 ≤ 0 の閉じたリーマン多様体 M において、その基本群が $\mathbf{Z}^n$ を含むことと、M が測地的な n 次元 flat トーラスを含むことは同値」。

3 群の CAT(0) 次元

イントロダクションで述べたように、群 G と CAT(0) 幾何との関連を考えよう。まず、G が等長変換で不連続的に作用する完備 CAT(0) 空間 X の最小次元を「CAT(0) 次元」と呼び、CAT(0)-dim(G) と書く。X/G は $K(G,1)$ 空間である。

上で G の X への作用はセミシンプルとは限らない。一般にセミシンプルな変換は軸や固定点の存在、Flat torus 定理など手がかりが多い。ということで上の CAT(0) 次元の定義に更に作用がセミシンプルという条件

も加えて、そのようなGの作用を許すXの最小次元をCAT(0)-dim$_{ss}(G)$と書くことにする。空間Xの次元はtopological次元、Hausdorff次元など適当に考える。

明かにgeom dim $\leq$ CAT(0)-dim $\leq$ CAT(0)-dim$_{ss}$である。例えば、$\mathbf{Z}^n$では、どれもnで等号が成立している。自由群については全て1である。我々は、むしろ等号が成立しないようなGに興味がある。まず、次のような例を考えよう。

$$G = < a, b | aba^{-1} = b^2 > .$$

これはSolvableな群で、Baumslag-Solitar群と呼ばれる群の一例である。このGについてgeom dim =2は容易に確かめられる。一方、Gは完備なCAT(0)空間にセミシンプルな等長変換では作用しない。このような場合CAT(0)-dim$_{ss} = \infty$とする。実際、セミシンプルな作用があったとしよう。一般に$t(xyx^{-1}) = t(y), t(x^n) = n \cdot t(x)$であるから、$t(b) = t(b^2) = 2t(b)$. よって$t(b) = 0$。よって$b$はエリプティック。しかし、$b$はトージョンでないことが知られている。これは作用の不連続性に矛盾。

3.1 Artin群についてのBrady-Crispの定理

CAT(0)-dim$_{ss}$がgeom dimより1だけ大きくなる群Gの例を2つ挙げる。まずBrady-Crispの論文[BC]からの結果を紹介する。$A(m,n,p)$は次の表示で与えられる有限表示群で、「Artin群」と呼ばれる群の例である。

$$A(m,n,p) = < a, b, c | (a,b)_m = (b,a)_m, (b,c)_n = (c,b)_n, (a,c)_p = (c,a)_p >$$

ここで$(a,b)_m$は、aで始まりa, bが交互に現れる長さmの語とする. 例えば$(a,b)_3 = aba$. $1/m + 1/n + 1/p \leq 1$が成り立つなら、$A(m,n,p)$は2次元の有限な$K(A,1)$-complexを持つ事が知られていて([CD])、geom dim(A)=2である。

定理 3.1 (Brady-Crisp) $m, n \geq 3$を奇数整数とし、$A = A(m,n,2)$とする。

(1) Aは完備な2次元のCAT(0)空間にセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用できない。

(2) ある3次元のプロパーなCAT(0)空間Xが存在し、Aはセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用し、X/Aはコンパクト。

つまり CAT(0)-dim$_{ss}$=3で、geom dim=2と1の差がある。CAT(0)-dim については不明である。すなわち上の定理 (1) で「セミシンプル」の仮定を除いて結論が成り立つかはわからない。

証明の概略は次のようである。$A(m,n,p)$ がセミシンプルに2次元CAT(0) 空間 X に作用するとして矛盾を導く。まず、

$$A(m) =< a, b|(a,b)_m = (b,a)_m >$$

と定義する。$A(m)$ は $A(m,n,p)$ の部分群になることが知られている。$A(2) = \mathbf{Z}^2$ である。$m > 2$ のときは、中心 Z を考える。$\Delta = (a,b)_m$ と置く。このとき

- m が奇数なら、$Z =< \Delta^2 >$.
- m が偶数なら、$Z =< \Delta >$.

以下、$z_{a,b}$ を $A(m)$ の中心 Z の生成元とする。すなわち、Δ^2 または Δ である。二つの部分群 $< a, z_{a,b} >, < b, z_{a,b} >$ は、$\mathbf{Z}^2$ に同型になる。

次に $A(m,n,2)$ の中に次の5つの部分群を考える。

$$< a, z_{a,b} >, < b, z_{a,b} >, < b, z_{b,c} >, < c, z_{b,c} >, < a, c > .$$

これらは全て $\mathbf{Z}^2$ に同型であり、よって Flat torus 定理により空間 X の中に、5つの部分群に対応する不変な平面が5つ存在する。これらは、ある特定の仕方で配置している。すなわち、1番目の平面と2番目の平面は $z_{a,b}$ の軸、2番目と3番目は b の軸というように、隣同士の2つの平面（5番目と1番目も）は、あるハイパボリック変換の軸の直線を共有し、全体としてチェインのようになっている。一方 X は2次元で単連結であることと合わせて矛盾が導かれる。

3.2 Bridsonの例

次に Bridson の論文 [Bri] からの結果を紹介する。次のような有限表示群を考える。

$$G = \{a, b, \gamma, s, t | \gamma a \gamma^{-1} = a^{-1}, \gamma b \gamma^{-1} = b^{-1}, sas^{-1} = [a,b] = tbt^{-1}\}.$$

定理 3.2 (Bridson) *(1) geom dim (G)=2.*

(2) G は完備な2次元の CAT(0) 空間にセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用できない。

(3) ある 3 次元のプロパーな *CAT(0)* 空間 X が存在し、G はセミシンプルな等長変換によって不連続的に作用し、X/G はコンパクト。

従って CAT(0)-dim$_{ss}$=3、geom dim=2 である。この例も CAT(0)-dim については不明である。(2) の証明は $t(\gamma^2)$ に着目する背理法で Baumslag-Solitar 群についての議論とやや似ている。

4 CAT(0) 空間の理想境界

我々は CAT(0)-dim$_{ss}$ と geom dim のギャップについて見たが、作用のセミシンプル性は geom dim の定義に現れない「余分な仮定」であり、できれば CAT(0)-dim と geom dim の関係について考えたい。そのためには CAT(0) 空間 X のパラボリックな変換を扱う必要がある。ハイパボリックな作用を見るとき、その手がかりは軸の集合であった。一方、パラボリックな変換に関しては X 内に自然な不変集合は見当たらない。よって X の「境界」を見る事にしよう。この章では CAT(0) 空間の境界についての基本的な性質を再び [Ba],[BriH] から述べる。

4.1 理想境界、角度、Tits 距離

距離空間 X の二つの測地線 $\gamma(t), \gamma'(t), t \geq 0$ が「asymptotic」とは、ある定数 K が存在して、すべての $t \geq 0$ に対して、$|\gamma(t) - \gamma'(t)| \leq K$ が成り立つこと。(このノートでは測地線のパラメータは弧長とする)。二つの測地線が asymptotic のとき同値とし、その同値類を X の「理想境界点」と呼び $\gamma(\infty)$ と書く。それらの集合を $X(\infty)$、集合 $X \cup X(\infty)$ を $\bar{X}$ と書く。ここでは定義は述べないが、$\bar{X}$ には自然なトポロジーが存在し、完備な CAT(0) 空間 X の等長変換は測地線を測地線に移し同値関係を保つから $\bar{X}$ の変換に自然に拡張するが、これは同相写像になる。

命題 4.1 X を完備な *CAT(0)* 空間とする。任意の測地線 $\gamma(t), t \geq 0$ と任意の点 x について、x を始点とする γ と同値な測地線がただ一つ存在する。

この命題で存在が保証される測地線を x と $\gamma(\infty)$ を結ぶ測地線という。

例。(i) $\mathbf{E}^n$ の測地線は直線だが、2 つの測地線が同値とは平行であること。よって上の命題も明らか。

(ii) $\mathbf{E}^n$ と $\mathbf{H}^n$ の理想境界は $\mathbf{S}^{n-1}$ に同相。

ここで測地空間 X に「角度」を導入する。$c(t), c'(t)$ を測地線とし、$c(0) = c'(0) = x$ とする。c, c' の（x における）角度 $\angle(c, c')$ を次で定義する。

$$\angle(c, c') = \lim_{t,t' \to 0} \bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t')).$$

ただしここで、$\bar{\angle}_{c(0)}(c(t), c'(t'))$ は、X の測地三角形 $(c(0), c(t), c'(t'))$ の $\mathbf{E}^2$ における比較三角形 $(\overline{c(0)}, \overline{c(t)}, \overline{c'(t')})$ の頂点 $\overline{c(0)}$ における内角である。

次に、点 $x \in X, p, q \in X(\infty)$ について、x と p, q を結ぶ測地線をそれぞれ $\gamma(t), \delta(t)$ とし、「角度」$\angle_x(p, q)$ を $\angle_x(\gamma, \delta)$ で定義する。ただし、$\gamma(0) = \delta(0) = x$ である。さらに、p, q の角度を

$$\angle(p, q) = \sup_{x \in X} \angle_x(p, q)$$

と定義する。これは距離になる。

例。(i) $\mathbf{E}^n$ の理想境界の 2 点 p, q の角度 $\angle(p, q)$ は内部の点 x と p, q を「結ぶ」直線の x における角度。

(ii) $\mathbf{H}^n$ の理想境界の異なる 2 点 p, q の角度は常に π。理由は、p, q を結ぶ測地線 γ が存在するという事実による。(γ 上の点 x で角度を実現している)。

定理 4.1 *(1) 完備 CAT(0) 空間 X の理想境界 $X(\infty)$ は、角度距離 $\angle$ に関して完備 CAT(1) 空間になる。*

(2) X の等長変換 f が $X(\infty)$ に定める変換は、$\angle$ に関して等長変換である。

$X(\infty)$ は角度距離 $\angle$ に関して一般に測地空間にはならない。$\angle$ が定める測地距離を「Tits 距離」といい、d_T で表す。ただし、$d_T(p, q) = \infty$ も許容する。たとえば、p, q が $X(\infty)$ の中の道（角度距離について連続ということ）で結べないときは ∞ と考える。もちろん X の等長変換 f は $(X(\infty), d_T)$ の等長変換を与える。

例。(i) $\mathbf{E}^n (n > 1)$ において、$\angle = d_T$. よって $(\mathbf{E}^n(\infty), d_T)$ は $\mathbf{S}^{n-1}$ に等長的。一方、$n = 1$ の場合（すなわち直線）理想境界は 2 点あるが、$\angle = \pi, d_T = \infty$ である。

(ii) $\mathbf{H}^n (n > 1)$ において、理想境界の任意の異なる 2 点の $\angle = \pi$ であることは述べたが、これより $d_T = \infty$ である。これは任意の CAT(-1) 空間で正しい。特に $(\mathbf{H}^n(\infty), d_T)$ は位相空間としても $\mathbf{S}^{n-1}$ と異なる。

定理 4.2 X を完備 *CAT(0)* 空間とすると、$(X(\infty), d_T)$ は完備な *CAT(1)* 空間である。さらに、もし X がプロパーなら $d_T(p,q) < \infty$ を満たす任意の $p, q \in X(\infty)$ は $(X(\infty), d_T)$ の中の測地線で結ばれる。

X がプロパーでも理想境界はプロパーとは限らない。

4.2 Busemann 関数とホロ球面

X を CAT(0) 空間とし $\gamma(t), t \geq 0$ を測地線とする。関数 $b_\gamma : X \to \mathbf{R}$ を次で定義し、γ についての「Busemann 関数」と呼ぶ。

$$b_\gamma(x) = \lim_{t\to\infty}(|x - \gamma(t)| - t).$$

命題 4.2 上の定義で極限は存在する。γ' を γ と同値な測地線とすると、ある定数 C が存在して任意の x について $b_\gamma(x) - b_{\gamma'}(x) = C$.

上の命題より、X の理想境界の点 $p = \gamma(\infty)$ についての Busemann 関数 b_p が定数差を除いて定まる。よって b_p のレベルセットの族 $H_t = \{x \in X | b_p(x) = t\}$ は γ のとり方のよらず定まる。それらを p についての（または p を中心とする）「ホロ球面」という。ホロ球面のパラメータ t は Busemann 関数を定義するときの測地線 γ による。

例。(i) $\mathbf{E}^n$ において、測地線 (すなわち直線) γ が定める理想境界の点 $p = \gamma(\infty)$ についてのホロ球面は、γ に直行する $(n-1)$ 次元ユークリッド空間の族である。

(ii) $\mathbf{H}^2$ の上半平面モデルを考えるとき、y 軸に平行は直線は同値な測地線だが、その理想境界点についてのホロ球面は x 軸に平行な直線の族である。

4.3 パラボリックな変換

パラボリックな変換を扱うとき、次は手がかりとなる結果である。ただし、X がプロパーでないと結果が成立しない例がある。

定理 4.3 X をプロパーな *CAT(0)* 空間とし、f をそのパラボリックな等長変換とする。このとき理想境界 $X(\infty)$ に f の固定点が存在する。

パラボリックな元 f の固定点全体を $F(f) \subset X(\infty)$ と書く。f と可換な任意の等長変換 g は $F(f)$ を不変にする。一般には CAT(0) 空間のパラボリックな等長変換の固定点は 1 点とは限らないが、CAT(-1) 空間、特に双曲空間では 1 点に限る。これは理想境界の任意の 2 点が X の無限測地線で結ばれるという性質による。このような性質を「visibility 条件」と呼ぶ。これから次の性質が従う。

命題 4.3 *CAT(0)* 空間 X が *visibility* 条件を満たすとする。自由アーベル群 A が X に等長変換で作用しているとし、パラボリックな変換を含むとする。このとき、$X(\infty)$ のある点は A で固定される。

実際、パラボリックな元 $a \in A$ の固定点を $p \in X(\infty)$ とする。これはただ一つの固定点だから A の任意の元は p を固定する。

命題 4.4 *CAT(0)* 空間 X の等長変換 f が点 $p \in X(\infty)$ を固定するとする。p についてのホロ球面の集合を $\{H_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ とする。このとき、f は集合 $\{H_t\}_{t\in\mathbf{R}}$ に作用する。さらに f がハイパボリックでなければ作用は自明である（各ホロ球面への作用は自明ではない）。

以上より、群の CAT(0) 次元を考えるときパラボリックな作用を許すなら、CAT(0) 空間 X にプロパーという仮定を置くのは手始めとして適当だろう。一方、X に visibility を仮定するのは強すぎると考える。なぜなら、それは空間を CAT(-1) と仮定するのに近く別の問題意識になってしまうからである。従って、リーズナブルな設定として次の問題を考え、講演では解決に向けたアプローチについて話す。

Brady-Crisp, Bridson の群は、プロパーな 2 次元 CAT(0) 空間 X に等長的、不連続的に作用するか？

答えが否定的なら、geom dim と CAT(0)-dim の（有限の）ギャップが、空間 X への群作用がセミシンプルという仮定なしに存在し興味深い。ただし空間 X がプロパーという仮定の下にである。ゆくゆくは、プロパーの仮定なしに CAT(0)-dim と geom dim とのギャップの有無を確かめたい。それにはプロパーとは限らない CAT(0) 空間のパラボリック変換に関する新たな結果が必要そうである。

参考文献

[Ba] Werner Ballmann, "Lectures on spaces of nonpositive curvature". DMV Seminar, 25. Birkhauser, 1995

[BC] Noel Brady, John Crisp. Two-Dimensional Artin Groups with CAT(0) Dimension Three Geometriae Dedicata 94, No1 (2002), 185-214.

[Bri] Martin R. Bridson, Length functions, curvature and the dimension of discrete groups. Math. Res. Lett. 8 (2001), no. 4, 557-567.

[BriH] Martin R. Bridson, Andre Haefliger, "Metric spaces of non-positive curvature". Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 319. Springer, 1999.

[Br] Kenneth S. Brown, "Cohomology of groups". Graduate Texts in Mathematics, 87. Springer, 1982.

[CD] Ruth Charney, Michael W. Davis. Finite $K(\pi, 1)$s for Artin groups. in "Prospects in topology", 110-124, Ann. of Math. Stud. 138, Princeton Univ. Press, 1995.

ホモトピー論の進展

戸田　宏

２００３年7月２１日

1　昔ばなし「球面写像」

トポロジー分科会が生まれてから５０年だそうです。トポロジー・シンポジウムはその２，３年前に始まったと思います。当時の様子を御存知の先生方も数少なくなり，私自身の記憶も曖昧になりましたので，直接関係したホモトピー論，とくに球面写像論を中心とした昔話をメモとして残しておきたいと思います。

学生の頃，トポロジーという面白そうな学問があることを知りましたが，本格的な教科書として Alexandroff-Hopf の "Topology I"(1935) がありました。この本は，前半は位相空間論，後半は多面体のホモロジー論や次元論，写像論などが書かれていて，どの分野に興味を持ったかによって，学生の将来の研究分野が決まったのでしょう。

このなかで，ホモトピー論らしきものは，同次元多様体間の写像類に関する Brouwer の写像度と多面体から円周への写像類でしょう。同次元球面間の写像のホモトピー類は写像度で特徴付けられます。r-次元球面 S^r から n-次元球面 S^n への写像類の全体 $\pi_r(S^n)$ を考えると，Brouwer の写像度によって $\pi_n(S^n) \cong \mathbf{Z}$，単体近似を使って $r < n$ のとき $\pi_r(S^n) = 0$，また円周 S^1 について $r > 1$ のとき $\pi_r(S^1) = 0$ がわかります。

Hopf 先生は本を書きながら $\pi_3(S^2)$ を次の研究目標としたのでしょう。1931 年の論文 (Math.Ann.104) で，いわゆる Hopf の不変量 $\gamma : \pi_3(S^2) \to \mathbf{Z}$ を導入し，これが同型であることを証明しました。続いて，1935 年の論文 (Fun.Math.25) では次元を一般化して準同型 $\gamma : \pi_{2n-1}(S^n) \to \mathbf{Z}$ を定義し，$n = 2, 4, 8$ のとき γ は全射，偶数の n については $\gamma(w) = 2$ となる w があり，奇数の n については $\gamma = 0$ などを示しました。なお，$n = 2, 4, 8$ のときに，Hopf の与えた $\gamma(h) = 1$ の写像 h は Hopf のファイバー写像です。

Hopf の不変量 γ は次のようにして導入されたのではないでしょうか。写像 $f : S^{2n-1} \to S^n$ をとり，当時の唯一の手段である f の単体近似で置き換えると，S^n の１点 p の逆像 $f^{-1}(p)$ は (n-1)-次元閉多様体 M になる。さらに，他の１点 q とその逆像 N を考えると，M と N は共通点が

ない。いま，$f \simeq 0$ と仮定し，それを示すホモトピーを考えると，M と N は共通点のないまま連続的に（コボルダントに）変化して消滅する。このようなことは M と N が絡んでいるときにはあり得ない。したがって，γ は M と N の link 係数として定義すればよい。

Hurewicz は 1935-36 年の論文 (Proc.Acad.Amsterdam 38-39) でホモトピー群を定義して，ホモロジー群との関係を示す定理などを発表し，また，リー群の対 (G, H) について，$\pi_r(H) \to \pi_r(G) \to \pi_r(G/H) \to \pi_{r-1}(H)$ の完全性，とくに，$r \geq 3$ のとき $\pi_r(S^3) \cong \pi_r(S^2)$ を示しました。

次に登場する Freudentahl の論文 "球面写像類について" (1938)(Comp. Math.5) は，16 ページの短いものですが，内容豊富，証明難解で，研究者を悩まし，証明がおかしいのではないかとの声も聞こえてきました。

彼は，懸垂（suspension, Einhängung）という準同型 $E : \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$ を導入しました。$g : S^{r-1} \to S^{n-1}$ に対してその懸垂 $Eg : S^r \to S^n$ は赤道上では g と一致し，上（下）半球はそれぞれ上（下）半球へ写るように拡大したものとして与えられました。

Freudenthal は以下のように考えたのではないでしょうか。まず、写像 $f : S^{2n-1} \to S^n$ が $\gamma(f) = 0$ をみたすとすると，$M = f^{-1}(p)$ を底とする錐体の近傍だけを変形して $f^{-1}(p)$ を 1 点にすることができる。同じことが，$r < 2n-1$ のときの写像 $f : S^r \to S^n$ についてもいえる。そのような「1 点の逆像が 1 点である」写像 f を調べてこれが懸垂 Eg とホモトープであることを発見したのでしょう。

まず，次の懸垂定理が証明されました。懸垂 $E : \pi_{r-1}(S^{n-1}) \to \pi_r(S^n)$ は，$r = 2n-1$ のとき $\mathrm{Im}E = \mathrm{Ker}\gamma$ をみたし，$r < 2n-1$ のとき全射，$r < 2n-2$ のとき同型。この結果，整数 k について $\pi_{n+k}(S^n)$ は $n > k+1$ のとき互いに同型となって k-stem の安定群と呼ばれ，π_k^S で表されます。

Freudenthal はさらに $E : \pi_{2n-1}(S^n) \to \pi_{2n}(S^{n+1})$ の核 $\mathrm{Ker}E$ を調べるために 2 つの不変量 $\gamma', \gamma'' : \mathrm{Ker}E \to \mathbf{Z}$ を定義し，$\gamma = \gamma' - \gamma''$ および $\gamma'' = (-1)^{n-1}\gamma'$ を証明しました。とくに，n が偶数で $\gamma(h) = 1$ となる h が存在するときには Eh は $\pi_{2n}(S^{n+1}) \otimes \mathbf{Z}/2 \neq 0$ を示す元です。ここは当時一番難解な部分でした。

これらのことを使って Freudenthal は 1-stem 群 $\pi_1^S \cong \mathbf{Z}/2$ を決定し，$k = 3, 7$ のときの k-stem 群 について $\pi_k^S \otimes \mathbf{Z}/2 \neq 0$ を示しました。

Pontrjagin は同じ頃 $\pi_1^S \cong \mathbf{Z}/2$ の他に $\pi_2^S = 0$ という結果を簡単な証明付きで発表しました。その後の 10 年間は $\pi_{n+2}(S^n) = 0$ $(n > 2)$ という応用上非常に都合よい結果が使われていました。

2 ホモトピー論の近代化

1930年代に華々しく始まった球面写像論は，1940年代には沈滞期に入ったようにみえます。世界大戦の影響もあるでしょうが，研究手段が単体近似のような直感的なものであったことも一因でしょう。いわば，ホモトピー論はまだ石器時代にあったといえるでしょう。そのころ，球面のホモトピー群の結果を予想することはなかなか困難で，なかには $\mathbf{Z}$ と $\mathbf{Z}/2$ の直和であろうと勝手な予想をする人があったり，別の人はこれを評して「群盲象を撫でる」とはこのことであるといったりしました。とにかく，定義は易しいが，どのようにして調べればよいか判らないという，誰でも素手で研究者になれる古き良き時代でした。

沈滞期とはいいましたが，その間ホモトピー論の近代化の準備は着実になされ，1950年代に入るとそれらの成果が次々と本や論文に掲載されるようになりました。Steenrod のファイバーバンドル，Eilenberg-Steenrod のホモロジーの公理系，Eilenberg-MacLane 空間，Steenrod の Sq-作用素，Blaker-Massey の triad ホモトピー群などです。

しかし，一番驚かされたのは Serre のスペクトル系列による斬新な結果 (Ann.Math.54(1951),Comm.Math.Helv.27(1953),Ann.Math.58(1953)) でした。たとえば，単連結有限複体のホモトピー群は有限生成，球面のホモトピー群 $\pi_r(S^n)$ は $r=n$ または $r=2n-1$ (n : 偶数) の場合を除いて有限であるとか，$\pi_{n+2p-3}(S^n)$ の p-成分は $n \geq 3$ のとき $\mathbf{Z}/p$ であるといった結果は,「群盲」の目を開かせるに十分だったでしょう。

ここで，昔話を一席。Serre は猛烈な勢いで球面写像類を決定していきました。遂に一般的な結果を得たと思ったらしいという話です。ある日 Cartan セミナーにK氏が出席すると黒板一面に結果が書いてあったが，やがて，Serre がやってきて，黒板を黙って消して去ったという，さる著名な数学者K氏の帰国土産話を聞きました。残念ながらK氏はトポロジストではないので詳しいことは判りません。私が渡仏したときの Cartan セミナーに Serre は出席していましたが，ホモトピー論の話は一切せず，College de France では代数幾何の講義をしていました。

その年の Cartan セミナーは、Eilenberg-MacLane 空間の Mod p （コ）ホモロジー（p : 奇素数）の決定に費やされました。$p=2$ の場合は Serre によって決定され，いわゆる killing methods を使って (非) 安定群の 2-成分が計算されました。このセミナーの結果は，奇素数 p について，安定群の p-成分の計算への重要な一歩となりました。

これに関する失敗談を一つ。ある日，Cartan 先生のお宅を訪問した際，

ノートを取り出されて，安定群の p-成分の計算結果を示されました。そこには，Adams のスペクトル系列とよく似た図式があって，$b = 2p(p-1)-1$ のとき $\pi_{b-1}^S \cong \mathbb{Z}/p^{p-1}$, $\pi_b^S \cong \mathbb{Z}/p^p$ となっていました。$p=3$ の場合の結果を使ったので，$\pi_{10}(SU) = \mathbb{Z}/3$ となりました。これは Bott の周期性と矛盾することがあとで判明しましたが、後の祭りでした。

さて，近代化の波は，K-理論とその応用，Adams のスペクトル系列，コボルディズムを応用した Novikov のスペクトル系列などと安定群の方向で著しいものがありました。K-理論は Adams スペクトル系列が自明でないことを示していますが，Novikov のスペクトル系列はそれをカバーしているのでこの新しい系列は自明でないかと期待されました。この自明性から２つの生成元 $\alpha_1 \in \pi_{2p-3}^S$ と $\beta_1 \in \pi_{2p(p-1)-2}^S$ について，$\alpha_1\beta_1^p \neq 0$ が導かれます。

ある研究者は，$\alpha_1\beta_1^p = 0$ と仮定して，彼独自の方法で計算を続行し，矛盾に達したとして，$\alpha_1\beta_1^p \neq 0$ であると主張しました。この結論を背理法によらず写像の構成で示そうとしたところ，$\alpha_1\beta_1^p = 0$ という逆の結果に到達してしまいました。その後、西田の公式の助けを借りて、Mod 3 コホモロジー論の非結合性や多くの安定元の積が０であることがでてきました。さらに，西田による安定環の巾零性へと発展しました。

現在では、安定群の研究はコボルディズム環を分解して得られる BP が主役になっています。

k-stem 群決定の歴史を見るとき，$k = 2p^t(p-1)-2$ の前後でトラブルが発生するようです。$t=3$ のときはどんなドラマがあるのでしょうか？

3　EHP 系列

話を非安定群 $\pi_r(S^n)$ の方に戻します。卒業前のゼミの教材は G.Whitehead (1950) による Hopf 不変量を一般化した準同型 $H : \pi_{r+1}(S^{n+1}) \to \pi_{r+1}(S^{2n+1})$ でした。また， Freudenthal の不変量も一般化されました。ただし，$r < 3n-3$ のような制限付きなので，いくつかの新しい０でない元を与えたが，群の決定までには至りませんでした。

彼は，引き続く３ページの論文で，上の制限を少しゆるめることによって，$\pi_{n+2}(S^n) \cong \mathbb{Z}/2$, $(n>2)$ であることを証明しました。Pontrjagin も訂正版をだしました。いずれの証明も難解ですが，現在では Adem の関係式 $Sq^2Sq^2 = Sq^3Sq^1$ を使って簡単に証明できます。

H における次元の制限を克服したのが James です。S^{n+1} の loop 空間

ΩS^{n+1} へ S^n の標準的射入の誘導する準同型は $\pi_r(\Omega S^{n+1}) = \pi_{r+1}(S^{n+1})$ を通して懸垂 E と同値になるので，次の完全系列がえられます。
$\cdots \xrightarrow{\partial} \pi_r(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{r+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H'} \pi_r(\Omega S^{n+1}, S^n) \xrightarrow{\partial} \pi_{r-1}(S^n) \xrightarrow{E} \cdots$.

James(Ann.Math.62(1955)) はまず、ΩS^{n+1} をホモトピー同値な S^n の約積空間 CW-複体 $S^n_\infty = S^n \cup e^{2n} \cup e^{3n} \cup \cdots$ で置き換えます。ΩS^{n+1} を定値写像 $*$ を単位元とする結合的な H-空間とみなすと，S^n_∞ は $e^n = S^n - *$ で生成される自由 monoid です。$S^n_k = S^n \cup \cdots \cup e^{kn}$ を S^n_∞ の kn-skeleton とします。James は，S^n_k から結合的な H-空間 X への写像 f で $f(S^n_{k-1}) = *$ を満たすものに対して，その拡張 $\overline{f} : S^n_\infty \to X$ を構成しました。とくに，$X = S^{kn}_\infty$ で $\overline{f}$ が kn-次元ホモロジーの同型を誘導する場合を

$$h_k = \overline{f} : (S^n_\infty, S^n_{k-1}) \longrightarrow (S^{kn}_\infty, *)$$

で表して James の写像ということにしましょう。

$k = 2$ の場合，$h_2 : S^n_\infty \to S^{kn}_\infty$ の誘導する

$$H = h_{2*} : \pi_{r+1}(S^{n+1}) = \pi_r(S^n_\infty) \longrightarrow \pi_r(S^{2n}_\infty) = \pi_{r+1}(S^{2n+1})$$

は，James 流の一般化された Hopf 不変量です。

James(Ann.Math.63(1956)) はさらに

$$h_{2*} : \pi_r(\Omega S^{n+1}, S^n) \cong \pi_r(S^n_\infty, S^n) \longrightarrow \pi_r(S^{2n}_\infty) \cong \pi_{r+1}(S^{2n+1})$$

は n が奇数のときは同型，n が偶数のときは 2-成分の同型であることを証明しました。上の完全系列から次の EHP-系列がえられます。
$\cdots \xrightarrow{P} \pi_r(S^n) \xrightarrow{E} \pi_{r+1}(S^{n+1}) \xrightarrow{H} \pi_{r+1}(S^{2n+1}) \xrightarrow{P} \pi_{r-1}(S^n) \xrightarrow{E} \cdots$.

非安定群の 2-成分は，EHP-系列を主要手段とし，合成や二次的な合成である bracket を補助手段として計算できます。このやり方は，どちらかといえば手工芸的といえるでしょう。結果を載せた赤本 (1962) は，昨年復刻版がでて，古典の仲間に入ったようです。

4　二重懸垂

以下，奇素数 p について，ホモトピー群の p-成分を考えます。

James の EHP-系列は，n が奇数の場合には split し，Serre の分解

$$E + w_* : \pi_r(S^n) \oplus \pi_{r+1}(S^{2n+1}) \cong_p \pi_{r+1}(S^{n+1})$$

が成り立ちます。したがって，ホモトピー群 $\pi_r(S^n)$ の p-成分 ${}_p\pi_r(S^n)$ を求めるには，$n = 2m-1$ が奇数の場合のみを考え，二重懸垂 $E^2 = E \circ E$ に関する次の EHP-完全系列を調べるとよいことになります。
$\cdots \xrightarrow{P} \pi_r(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \pi_{r+2}(S^{2m+1}) \xrightarrow{H} \pi_{r-1}(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{P} \pi_{r-1}(S^{2m-1}) \xrightarrow{E^2} \cdots$.

ここで，Q_2^{2m-1} は標準的射入 $i^2 : S^{2m-1} \to \Omega^2 S^{2m+1}$ のホモトピーファ

イバーで，そのホモトピー群は次の IJΔ-系列で調べられます。
$$\cdots \xrightarrow{\Delta} \pi_{r+1}(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \pi_{r-1}(Q_2^{2m-1}) \xrightarrow{J} \pi_{r+2}(S^{2pm+1}) \xrightarrow{\Delta} \pi_r(S^{2pm-1}) \xrightarrow{I} \cdots$$
とくに，$r < 2pm - 3$ のときは，${}_p\pi_r(Q_2^{2m-1}) = {}_p\pi_{r-1}(Q_2^{2m-1}) = 0$ より $E^2 : {}_p\pi_r(S^{2m-1}) \to {}_p\pi_{r+2}(S^{2m+1})$ は同型で，安定群の p-成分 ${}_p\pi^S_{r-2m+1}$ とも同型となります。これらは安定域にあるといいます。

また，$\pi_r(S^{2mp-1})$ が安定域にあるとき，つまり $r < 2mp^2 - 3$ のときは，$\Delta \circ E^{2r} = p\cdot$ という関係式を使って，${}_p\pi_{r-1}(Q_2^{2m-1})$ が定まるので，$\pi_r(S^{2m-1})$ は準安定域（それ以上は deep 域）にあるといいます。

非安定群の p-成分を計算するには，EHP-系列を積み重ねてできる次の EHP-計算図表を使います。

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & \pi_{2+k}(S^3) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{4+k}(S^5) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{6+k}(S^7) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{8+k}(S^9) & \xrightarrow{E^2} & \cdots & \\
 & \nwarrow P & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & \cdots & \\
\pi_k(Q_2^1) & & \pi_{2+k}(Q_2^3) & & \pi_{4+k}(Q_2^5) & & \pi_{6+k}(Q_2^7) & & \pi_{8+k}(Q_2^9) & & \cdots \\
\cong\nwarrow H & & \nwarrow H & & \nwarrow H & & \nwarrow H & & \cdots & & \\
 & \pi_{3+k}(S^3) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{5+k}(S^5) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{7+k}(S^7) & \xrightarrow{E^2} & \pi_{9+k}(S^9) & \xrightarrow{E^2} & \cdots & \\
 & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & \cdots \\
 & & \pi_{3+k}(Q_2^3) & & \pi_{5+k}(Q_2^5) & & \pi_{7+k}(Q_2^7) & & \pi_{9+k}(Q_2^9) & & \cdots
\end{array}$$

計算は k に関する帰納法によりますが，不変量群 ${}_p\pi_{2m-2+k}(Q_2^{2m-1})$ を IJΔ-系列を使って予め計算しておく必要があります。そのとき，上の $\Delta \circ E^2 = \cdot p$ の外に

「$E^2(x) = py$ ならば $x \in \mathrm{Im}\Delta$」

という予想が使えると便利です。実際には，代わりの補題を使います。

5 非安定 Alpha 族

$q = 2(p-1)$ とします。安定群の中には，Alpha-族と呼ばれる位数 p の元の集まり $\{\alpha_r \in \pi^S_{rq-1}\}$, $r = 1, 2, 3, \cdots$ で $\alpha_{r+1} \in \{\alpha_1, p, \alpha_r\}$ を満たすものがあります。さらに，$\alpha_r = p^\nu \alpha_r^{(\nu)}$ を満たす $\alpha_r^{(\nu)}$ があるための必要十分条件は r の p-因子が p^ν のときです。$\alpha_r^{(\nu)}$ で生成される π^S_{rq-1} の部分群を A^S_{rq-1} であらわし，$i \not\equiv -1\,(q)$ のときは $A^S_i = 0$ とします。

α_r は非安定群の元 $\alpha_r(3) \in \pi_{rq+2}(S^3)$ の極限で，$\alpha_r(n) = E^{n-3}\alpha_r(3)$ の位数も p です。IJΔ-系列の完全性によって，$J(A_r) = \alpha_r(2mp+1)$ となる元 $A_r \in \pi_{2pm+rq-3}(Q_2^{2m-1})$ があります。ただし，$A_0 = I(\iota_{2pm-1})$。S^3 では，$H(\alpha_r(3)) = A_{r-1} \in \pi_{rq-1}(Q_2^1)$ となります。

非安定群の中で，Alpha-族と関係する元の集まりで，EHP-系列および IJΔ-系列に関してなるべく閉じたものを考えて，非安定 Alpha 族ということにし，それらの生成する ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ の部分群を A_i^{2m+1} で表します。生成元は，Gray(Proc. Camb.Phil.Soc.96(1984)) で与えられています。

また， A_i^{2m+1} から IJΔ-系列を使ってえられる $\pi_i(Q_2^{2m-1})$ の部分群を AQ_i^{2m-1} で表します。AQ_i^{2m-1} の生成元は上記の A_r と $a_r = A_{r-1} \circ \alpha_1 \in \pi_{2pm+rq-4}(Q_2^{2m-1})$ からなります。

これらを EHP-計算図表の中に生成元を使って表示してみましょう。

$r = sp > p$, $s \not\equiv 0\,(p)$ の場合は下のようになります。

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{r-1} & & a_{r-2} & & a_{r-3} & & \cdots & & a_2 & & (a_1) & & \\
\cong\nwarrow H & & \nwarrow H & & \nwarrow H & & & & \nwarrow H & & & & \\
\alpha_r^*(3) & \hookrightarrow & \alpha_r^{*\prime}(5) & \xrightarrow{\times p} & \alpha_r^{*\prime}(7) & \xrightarrow{\times p} & \cdots & \xrightarrow{\times p} & \alpha_r^{*\prime}(2r-3) & \xrightarrow{on} & \alpha_r^*(2r-1) & \to & 0 \\
 & & & \nwarrow P & & \nwarrow P & & & & \nwarrow P & & \nwarrow P & \\
A_{r-1} & & A_{r-2} & & A_{r-3} & & \cdots & & & A_1 & & A_0 & \\
\cong\nwarrow H & & \nwarrow H & & & & & & & & & & \\
\alpha_r(3) & \hookrightarrow & \alpha_r'(5) & \xrightarrow{\equiv} & \alpha_r'(7) & \xrightarrow{\equiv} & \cdots & \xrightarrow{\equiv} & \alpha_r'(2r-3) & \xrightarrow{\equiv} & \alpha_r'(2r-1) & \xrightarrow{\equiv} & \cdots
\end{array}
$$

ここで，$\alpha_r^{*\prime}(2m+1), 2 \le m \le r-2$ と $\alpha_r'(2m+1), 2 \le m$ の位数は p^2 で，$\xrightarrow{\times p}$ は p 倍，$\xrightarrow{\equiv}$ は同型を表します。この場合，a_1 は AQ から除外します。なお，$r = p$ の場合は例外的に位数 p^2 の $\beta_1(2p-1) = \alpha_p^{*\prime}(2p-1)$ が存在します。

$r \not\equiv 0\,(p)$ の場合は，上で $\alpha_r^{*\prime}(\cdot)$ と $\alpha_r'(\cdot)$ をすべて位数 p の元 $\alpha_r^*(\cdot)$ と $\alpha_r(\cdot)$ で置き換えたものになり，$E^2(\alpha_r^*(\cdot)) = 0$ となります。

また，$r = sp^2, s \not\equiv 0\,(p)$ の場合は， p^3 の元 $\alpha_r''(2m+1)$ を $m \ge 3$ ，$\alpha_r^{*\prime\prime}(2m+1)$ を $r-3 \ge m \ge 3$ の範囲で置き換えたものになり，a_2 も AQ から除外されます。

ここでは，EHP-系列を mod A で計算して，p-成分を直和分解

$$
{}_p\pi_i(S^{2m+1}) = A_i^{2m-1} \oplus {}_p\pi_i(S^{2m+1})/A_i^{2m+1}
$$

で求めます。ただし，$(i, m) = (2p^2-2, 2p-1)$ の場合は例外です。

EHP-計算図表 mod A は，${}_p\pi_i^S$, ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$, ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})$ をそれぞれ，${}_p\pi_i^S/A_i^S$, ${}_p\pi_i(S^{2m+1})/A_i^{2m+1}$, ${}_p\pi_i(Q_2^{2m-1})/AQ_i^{2m-1}$ で置き換えたものを使います。ただし，上記の $a_1\,(r \equiv 0\,(p))$, $a_2\,(r \equiv 0\,(p^2))$ のような元を付け加える必要があります。さらに，$r \equiv 0\,(p)$ のとき，$I(w) = \alpha_r^*(2r-1)$ となる deep 域の (Whitehead) 元 w も付け加える必要があります。

6　除去可能な非安定元

ある非安定元またはその集まりとそれらに関連する不変量を取り除いて p-成分を計算した後に，これらの非安定元を復活できるとき，これらは除去可能な非安定元といいます。非安定 Alpha 族のうちの α_r^*, $r \not\equiv 0\,(p)$ はその例です。ここでは，Alpha 族以外の例を考えます。

mod A の安定群 ${}_p\pi_*^S/A_*^S$ の生成元で次数の低いものは，Beta-系列 $\{\beta_s \in \pi^S_{(sp+s-1)q-2},\ s \geq 1\}$ の各元やそれらの積，および それらと α_1 との積で与えられ，その後に $\epsilon', \epsilon_1, \alpha_1\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{p-2}, \alpha_1\epsilon_{p-2}, \epsilon'_{p-1}, \varphi, \cdots$ と続きます。

安定元 $\xi \in \pi_k^S$ に収束する非安定元を $\xi(n) \in \pi_{n+k}(S^n)$ で表します。IJΔ-系列において ξ に対応する元として，$x = I(\xi(2pm-1)) \in \pi_{2pm-3+k}(Q_2^{2m-1})$ と $J(X) = \xi(2pm+1)$ を満たす $X \in \pi_{2pm-2+k}(Q_2^{2m-1})$ を考え，安定型の不変量といいます。例えば，$\xi = \alpha_1\beta_1^2\beta_2$ のときには添数の 1 を省略して $x = ab^2b_2$, $X = AB^2B_2$ とします。

${}_p\pi_i(Q_2^{2m+1})$ の元 v_m が $E^2(v_m) = 0$ および $v_m \notin \mathrm{Im}E^2$ を満たすとき，$v_m = P(z)$ となる $z \in \pi_i(Q_2^{2m+1}))$ があって $H(P(z)) \neq 0$ となります。EHP-系列に関して，$\{v, P(v), H(P(v))\}$ はまとめて除去可能で，さらに $m \not\equiv 0, -1\,(p)$ ならば，IJΔ-系列もこめて除去可能です。

$$H(P(x)) = (m+1)ax \quad \text{および} \quad H(P(X)) = -m \cdot AX$$

が成り立つので，多くの除去可能な元 v がえられます。

次の種類の除去可能元は $\beta_1 = \{\alpha_1, \alpha_1, \cdots, \alpha_1\}$ に起因するものです。$l > 1$ とすると，$\pi_{2pl+pq-3}(S^{2pl+1})$ の元 v_{pl} で $H(v_{pl}) = b$ かつ $v_{pl+p-2} = E^{2p-4}v_{pl} = P(a)$ を満たすものがあります。また，$H(\Delta(\xi)) = H(P(B)) = AB$ もいえるので，$\{a, b, B, AB; P(B), v_{pl}, \cdots, v_{pl+p-2}\}$ は除去可能です。

この例をもとにして，右からいくつかの β_s を合成すると多くの除去可能元がえられます。

また，左から α_1 を合成して Serre の分解の逆 E^{-1} を施すと，もう 1 種類の除去可能元 $\{B^2, AB, ab, b; \Upsilon_{pl-p+1}, \cdots, \Upsilon_{pl-1}, P(b)\}$ がえられ，さらに，右からの β_s の合成によって増やすことも出来ます。

以上のほか，$\epsilon' = \{\alpha_1, \alpha_1, \beta_1^p\}$ に起因する除去可能な $\{e', b^p; v_m, v_{m+1}\}$, $m \not\equiv -1, -2\,(p)$ や $\{E', B^p; \Upsilon_m, \Upsilon_{m+1}\}$, $m \not\equiv -1, 0\,(p)$ などもあります。

このような安定型の不変量をもつ除去可能な v_m や Υ_m で生成される $\pi_i(S^{2m+1})$ の部分群を U_i^{2m+1} と書けば，除去可能な元と Alpha 族を除いた，より簡単な計算図表をつかって ${}_p\pi_i(S^{2m+1})/(A_i^{2m+1} + U_i^{2m+1})$ が求められることになります。

7 非安定群の分解

${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ の直和因子として予め用意できるものとして，A_i^{2m+1} や U_i^{2m+1} のほかに，安定元に収束する非安定元の列が考えられます。

1つの安定元 ξ に収束する非安定元 $\xi(2m+1)$ のうち，m が最小のものを ξ の起源 (origin) といい，その次元を $u(\xi)=2m+1$ で表します。ξ が直和因子を生成すれば $\xi(2m+1), (2m+1\geq u(\xi))$ も同様です。このような非安定元 $\xi(2m+1)$ が生成する ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ の部分群を S_i^{2m+1} で表します。

ξ の起源 $\xi(u(\xi))$ の Hopf 不変量 x は $\neq 0$ で，ξ とその起源の位数が p のとき $\{x;\xi(2m+1)\,(m\geq u(\xi))\}$ は除外可能となります。ξ の位数が p^2 のときは，$p\cdot\xi$ について同様のものを考えて付け加えます。

$p\geq 5$ の場合，$u(\xi)$ の値は次のようになります。

$u(\alpha_1)=3,\ u(\beta_1)=2p-1,\ u(\beta_s)=2p+3\ (2\leq s\leq p)$

$u(\epsilon')=2(p-2)p+1,\ u(\epsilon_i)=2(p-i)p+3\ (1\leq i\leq p-1)$

$u(\alpha_1\epsilon_i)=2(p-i-2)p+1\ (1\leq i\leq p-3)$.

ただし，$\beta_p=\epsilon_{p-1}$ で，$p=3$ の場合は本来の β_3 は存在せず $u(\epsilon_2)=11$, $H(\epsilon_2(11))=ab^2$ となります。

非安定群 ${}_p\pi_i(S^{2m+1})$ を計算するには，まず，${}_p\pi_*(S^{odd})$ の計算図表にある不変量から，A_*^{odd} と U_*^{odd} に対応する不変量を取り去り，残った不変量をもとに計算して，S_*^{odd} と 残りの部分 R_*^{odd} を求めます。

stem k が $<p^3q-3$ の範囲では，２つの例外的場合を除い次の直和分解がえられます。

$${}_p\pi_i(S^{2m+1})=A_i^{2m+1}\oplus U_i^{2m+1}\oplus S_i^{2m+1}\oplus R_i^{2m+1}.$$

第１の例外は ${}_p\pi_{2p^2-3}(S^{2p-1})=<\beta_1(2p-1)>\cong \mathbf{Z}/p^2$ です。

第２の例外は，前出の $\{v_{pl},\cdots,v_{pl+p-3},v_{pl+p-2}\}$ において $l+1\equiv 0\ (p)$ の場合です。このとき，$v_{pl+i}\ (0\leq i\leq p-3)$ の位数は p^2 でその p 倍は R_*^{odd} の元であり，$p\cdot v_{pl+p-3}=P(a_2)$ となっています。

8 φ の周辺

非安定群の 3-成分の決定は 5-成分以上の決定と比べて特殊な条件が加わるので一見複雑なように思えますが，実はその条件が有利に働いて 77-stem を除いて 79-stem まで決定できました。この事情は 2-成分の決定がかなり高い stem まで行われたのと似ています。

$p \geq 5$ のときと $p = 3$ のときとの特徴的な違いは $\varphi \in \pi^S_{(p^2+p)q-3}$ の起源の決定の難易にあります。

まず，$p = 3$ の場合の mod A+U の計算図表は，非安定群 ${}_3\pi_{n+k}(S^n)$ を $*$ で表し不変量群を生成元で表して，次のようになります。

n=	3		5		7		9		11		13	*stable*
k=44	*		*		*		*		*		*	
				w		b^3						
k=45	*		*		*		*		*		*	$<\varphi>$
		abb_2										
k=46	*		*		*		*		*		*	$<\beta_1^2\beta_2>$

φ の位数は p^2 なので，容易に $u(\varphi) = 9$，$u(p \cdot \varphi) = 7$ がえられます。

一方，$p = 5$ の場合の mod A+U の計算図表は次のようになります。

n=		3		5		7		9		11		13		15	*stable*
	b^6														
k=235		*		*		*		*		*		*		*	
	B^6		ae_2		ae_1		e'								
k=236		*		*		*		*		*		*		*	
			AE_2		AE_1		E'		w		b^5				
k=237		*		*		*		*		*		*		*	$<\varphi>$
							ab^3b_2								
k=238		*		*		*		*		*		*		*	$<\beta_1^4\beta_2>$

問題点の第 1 は (I) $u(\varphi) = 7$ か？ということです。

$\varphi(n)$ は $\{\alpha_1(n), \alpha_1(n+7), \epsilon_3(n+14)\}$ で与えられますが，$u(\epsilon_3) = 23$ だから n は 9 までしか下げられません。しかも，$\alpha_1(16) \circ \epsilon_3(23) = 0$ をいうのは簡単ではありません。

そこで，Oka(J.Sci.Hiroshima U.33(1969)) の球バンドル $B_\alpha/S^{15} = S^{23}$ と $\alpha_1(8)$ の拡張 $\overline{\alpha_1} : B_\alpha \to S^8$ を利用します。さらに，$H(\Xi) = B^6$ を満たす Ξ について $E^4(\Xi) = P(E') \neq 0$ も用意する必要があります。これらを使って，$\varphi(8)$ したがって $\varphi(7)$ がえられ (I) がいえます。

第 2 の問題点は 236-stem 群の構造です。上と同様に，$H(\xi) = b^6$ を満たす ξ について $E^4(\xi) = P(e') \neq 0$ がいえて，$\Xi, E^2\Xi, E^4\Xi, \xi, E^2\xi, E^4\xi$ は位数 p の直和因子を生成します。残りの因子は S^5 から S^{11} まで $\mathbb{Z}/p \to \mathbb{Z}/p^2 \to \mathbb{Z}/p^2 \to \mathbb{Z}/p$ となります。この場合も特殊な考察が必要です。

この線を突破すると，3-成分と同様に p-成分も決定できそうですが，まだ精密検査に時間がかかりそうです。

点付き RIEMANN 面上のフラットバンドルのモジュライの幾何学的量子化について

吉田　尚彦
東京大学大学院数理科学研究科

1. はじめに

運動量写像の幾何は半安定ベクトル束のモジュライの研究において、背景にあるシンプレクティック幾何的側面、およびその代数幾何的側面との関係を明確にし、有力な手法を提供した [2, 9, 11]。特に、モジュライが接続のなす無限次元アフィン空間のゲージ群作用によるシンプレクティック簡約で記述できることは幾何学的量子化やコホモロジーを調べる上で大きな利点であった [2, 17]。

本講演では、運動量写像の幾何の観点からパラボリックベクトル束のモジュライを捉えることで、半安定ベクトル束のモジュライの場合に得られた幾何やトポロジーに関する結果 [2, 17] を自然に拡張することを試みる。パラボリックベクトル束のモジュライは既にさまざまな方法で研究されているが [3, 14, 16]、運動量写像の幾何を前面に出すことによって、安定ベクトル束のモジュライの場合と同様に、これらのシンプレクティック幾何的側面、および他の方法との関係も見通しよく理解できるのではないかと考えている。

2. 定義

この節では、点付き Riemann 面上のフラットバンドルのモジュライを定義する。このモジュライは Mehta-Seshadri によって、パラボリック次数 0 のパラボリックベクトル束のモジュライと同一視される [14]。

2.1. **ルート系からの準備**. ここでは、ルート系に関して後で必要となる事柄をまとめておく。参考文献として [5, 6] を挙げる。G を $SU(n)$、T を対角行列からなる G の極大トーラス、$\mathfrak{g}$、$\mathfrak{h}$ をそれぞれ G、T の Lie 環とする。T に関する Weyl 群を W とする。$\mathfrak{g}$ 上の**正規化された Killing 形式** $\langle\ ,\ \rangle$ を ξ、$\eta \in \mathfrak{g}$ に対して

$$\langle \xi, \eta \rangle = \frac{1}{(2\pi\sqrt{-1})^2}\mathrm{tr}(\xi \cdot \eta)$$

で定義する。$\langle\ ,\ \rangle$ の $\mathfrak{h}$ への制限は正定値であるので、これにより $\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}$ の双対空間 $\mathfrak{h}^*$ を同一視する。また、$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}$ の自然なペアリングも同じ記号 $\langle\ ,\ \rangle$ で表す。

$1 \leq i \neq j \leq n$ に対して G の**ルート**を $\alpha_{ij} \in \mathfrak{h}^*$ で表す。ここで α_{ij} は、$\begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{h}$ に対して、

$$\alpha_{ij}(\begin{pmatrix} \sqrt{-1}x_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sqrt{-1}x_n \end{pmatrix}) = \frac{1}{2\pi}(x_i - x_j)$$

であった。$R = \{\alpha_{ij}\}_{1\leq i\neq j\leq n}$ を G の**ルート系**という。また、**正のルート系**として $R_+ = \{\alpha_{ij}\}_{1\leq i<j\leq n}$ を固定する。さらに、α_{ij} に関する**コルート**を h_{ij} で表す、すなわち

$$h_{ij} = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} i & j \end{array} \\ \begin{array}{c} i \\ j \end{array} & \begin{pmatrix} 2\pi\sqrt{-1} & \\ & -2\pi\sqrt{-1} \end{pmatrix} \end{array}$$

である。

この講演では、**アルコーヴ** $\Delta \subset \mathfrak{h}$ を

$$\Delta = \{h \in \mathfrak{h} | \text{任意の } \alpha \in R_+ \text{ に対して } 0 < \langle h, \alpha \rangle < 1 \}$$

のように固定する。このとき、次の命題が成り立つ。

命題 2.1 ([5, 6]). $\lambda \in \overline{\Delta}$ に $e^\lambda (\in G)$ の共役類 $\mathcal{O}_{e^\lambda}$ を対応させることによって、Δ の閉包 $\overline{\Delta}$ と G の共役類全体の集合は同一視される。

k を正の整数とする。$\mathfrak{h}$ と $\mathfrak{h}^*$ の同一視の下、集合 P_k を

$$P_k = I^* \cap k\overline{\Delta}$$

で定義する。ここで I^* は G のウェイト格子。P_k の元を**レベル k の支配的ウェイト**という。レベル k の支配的ウェイトは、アフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}}$ のレベル k 最高ウェイト表現に対応していることがよく知られている [10]。

2.2. 点付き Riemann 面上のフラットバンドルのモジュライ.

$\overline{\Sigma}$ を種数 g の閉 Riemann 面、$\overline{\Sigma}$ から相異なる m 個の点 p_1、...、p_m を取り除いてできる曲面を Σ とする。

$P_\Sigma = \Sigma \times G$ を Σ 上の自明な主 G 束、$\mathcal{A}_\Sigma$ を P_Σ 上の接続全体の空間とする。自明な接続を基点にとることにより $\mathcal{A}_\Sigma$ を Σ 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 形式の空間 $\Omega^1(\Sigma;\mathfrak{g})$ と同一視する。$\mathcal{G}_\Sigma$ を P_Σ のゲージ群とする。P_Σ が自明なため、$\mathcal{G}_\Sigma$ は Σ から G への滑らかな写像全体の空間 $C^\infty(\Sigma, G)$ と自然に同一視できる。

ゲージ群 $\mathcal{G}_\Sigma$ は接続の空間 $\mathcal{A}_\Sigma$ に右から引き戻しによって作用する。上の同一視の下、作用は $A \in \mathcal{A}_\Sigma$、$g \in \mathcal{G}_\Sigma$ に対して

$$A \cdot g = g^{-1}Ag + g^{-1}dg \tag{1}$$

と書ける。

Σ 上のフラットバンドルのモジュライを定義する。

定義 2.2. $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m) \in (\overline{\Delta})^m$ に対して、Σ **上のフラットバンドルのモジュライ**を

$$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}) = \{A \in \mathcal{A}_\Sigma | F_A = 0,\ \mathrm{hol}_A(p_j) \in \mathcal{O}_{e^{\lambda_j}}\}/\mathcal{G}_\Sigma,$$

で定める。ここで、$F_A = dA + \frac{1}{2}[A, A]$ は A の曲率、$\mathrm{hol}_A(p_j)$ は A の p_j の周りのホロノミーである。

注 2.3. 補題 2.1 により、共役類を固定するためには λ_j を $\overline{\Delta}$ から取れば十分である。

よく知られているように、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ は有限次元、コンパクトな代数多様体である [14]。後に、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ はあるゲージ群作用によるシンプレクティック簡約で得られることをみる。$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ のシンプレクティック形式を ω と書く。

$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ が滑らかになるための条件を λ_j を用いて述べておく。

命題 2.4 ([18]). $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \overline{\Delta}$ が次の条件を満たすとする：任意の w_1、…、$w_m \in W$ に対して、$\displaystyle\sum_{k=1}^{m} w_k\lambda_k$ は集合

$$\{ \sum_{1 \leq i \neq j \leq n} a_{ij}h_{ij} \in \mathfrak{h} |\ 係数\ a_{ij}\ が\ 0\ でない\ h_{ij}\ は\ \mathfrak{h}\ を張る\ \}$$

に含まれる。このとき、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ は滑らかである。特に λ_1、…、$\lambda_m \in \Delta$ のとき、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ の次元は

$$\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}_g(\vec{\lambda}) = (2g-2)(n^2-1) + mn(n-1).$$

で与えられる。

3. 主定理

次がこの講演の主定理である。

定理 3.1 ([18]). k を正の整数とする。もし、$k\lambda_1$、…、$k\lambda_m$ がすべてレベル k の支配的ウェイトならば、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ 上のエルミート直線束 $\mathcal{L}^k_{\vec{\lambda}}$ と曲率が $-2\pi\sqrt{-1}k\omega$ であるような $\mathcal{L}^k_{\vec{\lambda}}$ のユニタリー接続 ∇^k が存在する。$(\mathcal{L}^k_{\vec{\lambda}}, \nabla^k)$ は具体的に構成できる。

$(\mathcal{L}^k_{\vec{\lambda}}, \nabla^k)$ を $(\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}), k\omega)$ 上の**前量子化束**という。

注 3.2. (1) 定理 3.1 の構成は、閉 Riemann 面上のフラットバンドルのモジュライの場合の Atiyah-Bott、Ramadas-Singer-Weitsman による構成 [2, 17] の自然な一般化になっている（$(\mathcal{L}^k_{\vec{\lambda}}, \nabla^k) \to (\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}), k\omega)$ の構成については 4 節を参照）。尚、$G = SU(2)$ の場合には、前量子化束は今野宏氏によって、もう少し解析的な方法で構成されている [13]。
(2) 2.1 節の最後で述べたように、レベル k の支配的ウェイトはアフィン Lie 環 $\widehat{\mathfrak{sl}_n\mathbb{C}}$ のレベル k、最高ウエイト表現に対応している。アフィン Lie 環の表現は、共形場理論において重要な役割を果たす。

(3) 定理 3.1 の構成は、一般のコンパクト、連結、単連結な Lie 群の場合にも拡張できると思われる。
(4) Σ の複素構造を一つ固定すると、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ に ω と整合的な概複素構造を入れることができる。これは積分可能であると思われるがまだ検証中である。

4. 前量子化束の構成

4.1. **運動量写像.** この節では、運動量写像について簡単に復習しておく。詳しくは文献 [1, 8] を当たられたい。滑らかな多様体 M とその上の非退化な閉 2 形式 ω の組 (M,ω) を**シンプレクティック多様体**、ω をシンプレクティック形式という。4.1 節でのみ、G を一般の Lie 群、$\mathfrak{g}$ をその Lie 環とする。M に G が ω を保って右から作用しているとする。このとき、運動量写像とは以下で定義されるものである。

定義 4.1. (M,ω) への G 作用に対する**運動量写像**とは、M から $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ への写像 $\mu : M \to \mathfrak{g}^*$ で以下の条件を満たすものである。$\xi \in \mathfrak{g}$、$x \in M$、$g \in G$ に対して

(1) $\iota(X_\xi)\omega = d\langle \mu, \xi\rangle$,
(2) $\mu(x \cdot g) = \mathrm{Ad}^*(g) \circ \mu(x)$,

ここで $\langle\ ,\ \rangle$ は $\mathfrak{g}^*$ と $\mathfrak{g}$ の自然なペアリング、X_ξ は ξ の無限小作用、すなわち $p \in M$ に対して

$$X_\xi(p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p \cdot e^{t\xi}$$

で定義される M 上のベクトル場、Ad^* は G の $\mathfrak{g}^*$ への余随伴作用である。

(M,ω) への G 作用が運動量写像 μ を持つとき、シンプレクティック簡約と呼ばれる新しいシンプレクティック多様体を構成する方法がある。$0 \in \mathfrak{g}^*$ を μ の正則値とする。0 は余随伴作用の固定点なので、G 作用は $\mu^{-1}(0)$ を保つが、この G の $\mu^{-1}(0)$ への作用が自由であると仮定すると、商空間 $\mu^{-1}(0)/G$ は滑らかな多様体になる。このとき、次の命題がよく知られている。

命題 4.2 ([15]). 商空間 $\mu^{-1}(0)/G$ には、以下を満たすようなシンプレクティック形式 ω_0 が自然に入る。

$$\iota^*\omega = \pi^*\omega_0,$$

ここで ι は自然な包含写像、π は射影である。

$$\begin{array}{ccc} \mu^{-1}(0) & \overset{\iota}{\hookrightarrow} & M \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \\ \mu^{-1}(0)/G & & \end{array}$$

$(\mu^{-1}(0)/G, \omega_0)$ を**シンプレクティック商**という。

4.2. **局所的な記述.** この節では、穴あき円盤上の接続とゲージ変換を調べる。この節で得られた結果は、次節でモジュライと前量子化束を構成する際に必要である。原点に穴の開いた円盤 D^* を

$$D^* = \{z = re^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \in \mathbb{C} | 0 < r < 1\},$$

で定める。$P_{D^*} = D^* \times G$ を D^* 上の自明な主 G 束とする。先程と同様

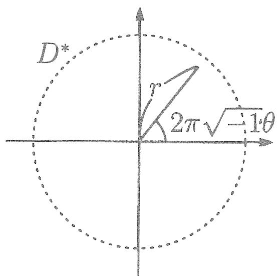


FIGURE 1. D^*

P_{D^*} 上の接続の空間 $\mathcal{A}_{D^*}$ を D^* 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 形式の空間 $\Omega^1(D^*;\mathfrak{g})$ と、ゲージ群 $\mathcal{G}_{D^*}$ を D^* から G への写像の空間 $C^\infty(D^*;G)$ とそれぞれ同一視する。このとき、次の補題は重要である。

補題 4.3. 任意の平坦接続 $A \in \mathcal{A}_{D^*}$ に対して, $\overline{\Delta}$ の元 λ で、A と接続 $\lambda d\theta$ がゲージ同値になるようなものが一意に存在する。ここで、θ は D^* の局座標である。

$Z(e^\lambda)$ を $e^\lambda(\in G)$ の中心化群、$Z(\lambda d\theta)$ を接続 $\lambda d\theta$ を保つような $\mathcal{G}_{D^*}$ の部分群とする、すなわち

$$Z(e^\lambda) = \{\ g \in G \mid ge^\lambda g^{-1} = e^\lambda\ \}$$
$$Z(\lambda d\theta) = \{\ h \in \mathcal{G}_{D^*} \mid (\lambda d\theta)\cdot h = h^{-1}(\lambda d\theta)h + h^{-1}dh = \lambda d\theta\ \}$$

である。$Z(e^\lambda)$ の元 g に対してゲージ変換 $\delta_g \in Z(\lambda d\theta)(\subset C^\infty(D^*;G))$ を、$z = re^{2\pi\sqrt{-1}\theta} \in D^*$ に対して

$$\delta_g(z) = e^{-\theta\lambda} g e^{\theta\lambda}$$

で定めることにより、$Z(e^\lambda)$ から $Z(\lambda d\theta)$ への写像 $\delta : Z(e^\lambda) \to Z(\lambda d\theta)$ を得る。このとき、次が成り立つことが分かる。

補題 4.4. 写像 $\delta : Z(e^\lambda) \to Z(\lambda d\theta)$ は群の同型である。

注 4.5. $Z(\lambda d\theta)$ は常に定値写像から成るわけではない。例えば、$\lambda = \begin{pmatrix} \pi\sqrt{-1} & 0 \\ 0 & -\pi\sqrt{-1} \end{pmatrix} \in \mathfrak{su}(2)$ とする。$g = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in Z(e^\lambda)$ に対応するゲージ変換 $\delta_g \in Z(\lambda d\theta)$ は

$$\begin{array}{cccc} \delta_g : & D^* & \to & G \\ & \cup & & \cup \\ & re^{2\pi\sqrt{-1}\theta} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & -e^{-2\pi\sqrt{-1}\theta} \\ e^{2\pi\sqrt{-1}\theta} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

となる。明らかに δ_g は定値写像ではない。

しかし、命題2.1と δ の構成から次が分かる。

系 4.6. Δ の元 λ に対しては、

$$Z(\lambda d\theta) = T.$$

特に、$Z(\lambda d\theta)$ は定値写像から成る。

4.3. **前量子化束の構成.** $\overline{\Sigma}$ は種数 g の閉 Riemann 面、p_1、...、p_m は $\overline{\Sigma}$ の上の m 個の異なる点であった。D_j を p_j を中心とする十分小さな開円盤とし、その上の極座標を $z_j = r_j e^{2\pi\sqrt{-1}}$ とする。極座標は D_j の閉包を含むある近傍で定義されていると仮定する。

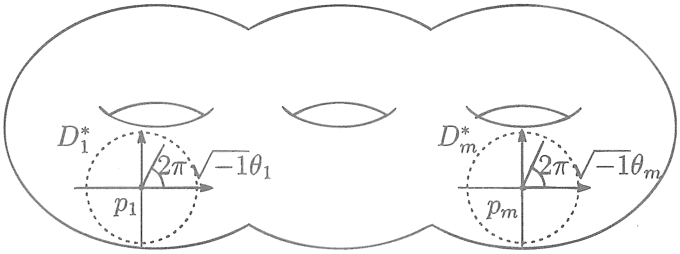


FIGURE 2. Σ の極座標

Σ は $\Sigma = \overline{\Sigma}\backslash\{p_1, \ldots, p_m\}$ で定義される曲面、$P_\Sigma = \Sigma \times G$ は Σ 上の自明な主 G 束であった。λ_1、...、$\lambda_m \in \overline{\Delta}$ に対して、各 p_j の近傍で標準的な形を持つ P_Σ 上の接続のなす空間 $\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ を

$$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} = \{\ A \in \mathcal{A}_\Sigma \mid A_j = A\big|_{D_j^*} = \lambda_j d\theta_j\ (j = 1,\ \ldots,\ m)\ \}$$

で定める。ここで、D_j^* は穴あき円盤 $D_j\backslash\{p_j\}$ である。$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ は、Σ 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる1形式で各 p_j の近傍で消えるものの空間

$$\Omega_c^1(\Sigma;\mathfrak{g}) = \{\ a \in \Omega^1(\Sigma;\mathfrak{g}) \mid a_j = a\big|_{D_j^*} = 0\ (j = 1,\ \ldots,\ m)\ \}$$

をモデルとするアフィン空間なので、$A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ での接空間 $T_A\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ は $\Omega_c^1(\Sigma;\mathfrak{g})$ とみなせる。$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ のシンプレクティック形式 ω を、$A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ と $a,\ a' \in T_A\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} \cong \Omega_c^1(\Sigma;\mathfrak{g})$ に対して

$$\begin{aligned}\omega_A(a,a') &= -\int_\Sigma \langle a, a'\rangle \\ &= -\int_{\overline{\Sigma}\backslash\cup_{j=1}^m D_j} \langle a, a'\rangle\end{aligned}$$

で定めることにより、$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ は無限次元シンプレクティック空間になる。ここで、任意の接ベクトル $a(\in T_A\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}})$ は $\cup_{j=1}^m D_j$ で消えていることに注意する。

各 p_j の近傍で標準的な接続 $\lambda_j d\theta_j$ を保つゲージ変換のなす群 $\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ を

$$\mathcal{G}_{\Sigma,Z} = \{\ g \in \mathcal{G}_\Sigma \mid g_j = g\big|_{D_j^*} \in Z(\lambda_j d\theta_j) \subset C^\infty(D_j^*, G)\ (j = 1, \ldots, m)\ \}$$

で定める。$\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の Lie 環 $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ は

$$\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z} = \{\ \xi \in \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_\Sigma = C^\infty(\Sigma; \mathfrak{g}) \mid \xi_j = \xi\big|_{D_j^*} \in \mathfrak{z}(\lambda_j d\theta_j) \subset C^\infty(D_j^*, \mathfrak{g})\ (j = 1, \ldots, m)\ \}$$

と書くことができる。ここで、$\mathfrak{z}(\lambda_j d\theta_j)$ は $Z(\lambda_j d\theta_j)$ の Lie 環

$$\mathfrak{z}(\lambda_j d\theta_j) = \{\ \xi \in C^\infty(D_j^*, \mathfrak{g}) \mid d\xi + [\lambda_j d\theta_j, \xi] = 0\ \}$$

である。

$\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ は $\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ に (1) で右から作用する。このとき、次が分かる。

命題 4.7. $\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の $\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ への作用は ω を保つ。

写像 $\mu : \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} \to (\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z})^*$ を $A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ と $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ に対して、

$$\langle\langle \mu(A), \xi \rangle\rangle = \int_\Sigma \langle F_A, \xi \rangle \tag{2}$$

で定める。ここで $\langle\langle\ ,\ \rangle\rangle$ は $(\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z})^*$ と $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の自然なペアリングである。また、$A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ の曲率 F_A は各 p_j の近傍で消えていることに注意する。次の定理は前量子化束の構成において重要である。

定理 4.8. (2) で定義した写像 μ は、$(\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \omega)$ への $\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ に対する運動量写像である。

系 4.9. $\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ はシンプレクティック簡約で得られる、すなわち

$$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda}) = \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_{\Sigma,Z}.$$

注 4.10. Atiyah-Bott は $m = 0$ の場合、すなわち閉 Riemann 面の場合にこの系を示している [2]。

k を正の整数とする。系 4.9 を利用して、$\mathcal{M}_g(\vec{\lambda})$ 上の前量子化束 $(\mathcal{L}^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \nabla^k)$ を構成する。$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ はアフィン空間であったので、$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ 上の自明なエルミート直線束 $L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}} = \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} \times \mathbb{C}$ には曲率が $-2\pi\sqrt{-1}k\omega$ となるようなユニタリー接続 ∇^k が存在する。実際、接続形式 α を $A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ と $a \in \Omega^1_c(\Sigma, \mathfrak{g})$ に対して

$$\alpha_A(a) = \frac{1}{2}\int_\Sigma \langle a, A \rangle$$

で定義し、$\nabla^k = d - 2\pi\sqrt{-1}k\alpha$ とおけばよい。

$\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ には、$\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ が曲率 $-2\pi\sqrt{-1}k\omega$ を保って作用していた。この作用がいつエルミート内積とユニタリー接続 ∇^k を保つ $L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ への作用に持ち上がるか考える。一般に、前量子化束があるシンプレクティック多様体に Lie 群がシンプレクティック形式を保って作用しているとき、運

動量写像は作用の前量子化束への無限小持ち上げに対応する [7, 18]。今の場合、$\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の $L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ の切断の空間 $\Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})$ への作用 $\rho : \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathrm{End}\big(\Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})\big)$ を、Lie 環 $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の元 ξ と $L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ の切断 s に対して、

$$\rho_\xi(s) = \nabla^k_{X_\xi} s - 2\pi\sqrt{-1}k \left\langle\langle \mu, \xi \rangle\right\rangle s \tag{3}$$

で定義できる。

補題 4.11. $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$、$s \in \Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})$、$A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ に対して、(3) で定めた作用 ρ は

$$\big(\rho_\xi(s)\big)(A) = X_\xi s(A) - 2\pi\sqrt{-1}k\Big(\frac{1}{2}\int_\Sigma \langle A, d\xi\rangle - \sum_{j=1}^m \langle \lambda_j, \xi_j\rangle\Big)s(A)$$

と書ける。ここで、ξ_j は ξ の D^*_j への制限 $\xi\big|_{D^*_j}$ である。

次の定理は $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の作用 $\rho : \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathrm{End}\big(\Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})\big)$ の可積分条件を与える。

定理 4.12. もし $k\lambda_1$、...、$k\lambda_m$ がレベル k の支配的ウェイトならば、$(\mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}, -2\pi\sqrt{-1}k\omega)$ への $\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の作用はエルミート内積とユニタリー接続 ∇^k を保つ $L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ への作用 $\widetilde{\psi} : \mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathrm{Aut}(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \nabla^k)$ に持ち上がる。この作用 $\widetilde{\psi}$ は $g \in \mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ と $(A, z) \in L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}} = \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} \times \mathbb{C}$ に対して、

$$\widetilde{\psi}_g\big((A, z)\big) = (A \cdot g, e^{2\pi\sqrt{-1}C_{\Sigma,k}(A,g)}z) \tag{4}$$

と書ける。(4) において、持ち上げのコサイクル $C_{\Sigma,k} : \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} \times \mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ は $(A, g) \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}} \times \mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ に対して、

$$\begin{aligned} &C_{\Sigma,k}(A, g) \\ &= \frac{k}{2}\int_{[0,1]}\int_\Sigma \Big\langle A \cdot \widetilde{g}, d\big(\widetilde{g}(s)^{-1}\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial s}(s)\big)\Big\rangle ds - k\sum_{j=1}^m \langle \lambda_j, \xi_j\rangle \mod \mathbb{Z} \end{aligned}$$

で定義される。ここで、ξ_j は $g\big|_{D^*_j} = e^{-\theta_j\lambda_j}e^{\xi_j}e^{\theta_j\lambda_j} \in Z(\lambda_j d\theta_j)$ を満たす $Z(e^{\lambda_j})$ の Lie 環 $z(e^{\lambda_j})$ の元、$\widetilde{g}$ は単位元 I_n と g を結ぶゲージ群の道、すなわち $\widetilde{g} : [0, 1] \to \mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ で

$$\widetilde{g}(0) = I_n \qquad \widetilde{g}(1) = g,$$

をみたすもの、各 $s \in [0, 1]$ に対して $\widetilde{g}(s)^{-1}\frac{\partial \widetilde{g}}{\partial s}(s)$ は $\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の元とみなしている。

作用 $\widetilde{\psi} : \mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathrm{Aut}(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \nabla^k)$ は、$\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ の $\Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})$ への作用を導く，すなわち $g \in \mathcal{G}_{\Sigma,Z}$、$s \in \Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})$、$A \in \mathcal{A}_{\Sigma,\vec{\lambda}}$ に対して、引き戻し

$$\widetilde{\psi}^*_g s(A) = \widetilde{\psi}_{g^{-1}}\big(s(A \cdot g)\big)$$

で作用する。このとき、次の系を示すことができる。

系 4.13. $\widetilde{\psi}^* : \mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathrm{Aut}(\Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}))$ の無限小作用は (3) で定義した $\rho : \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z} \to \mathrm{End}\big(\Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})\big)$ に等しい、すなわち $\xi \in \mathrm{Lie}\,\mathcal{G}_{\Sigma,Z}$ と $s \in \Gamma(L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}})$ に対して、

$$\frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \widetilde{\psi}^*_{e^{t\xi}} s = \rho_\xi(s)$$

が成り立つ。

系 4.9 と定理 4.12 の直接の帰結として定理 3.1 を示すことができる。

定理 3.1 の証明：$k\lambda_1$、...、$k\lambda_m \in k\overline{\Delta} \cap I^*$ とする。このとき、前量子化束 $(\mathcal{L}^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \nabla^k)$ は

$$\begin{array}{ccc} (\mathcal{L}^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \nabla^k) & = & \big((L^k_{\Sigma,\vec{\lambda}}, \nabla^k)\big|_{\mu^{-1}(0)}\big)/\mathcal{G}_{\Sigma,Z} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{M}_g(\vec{\lambda}) & = & \mu^{-1}(0)/\mathcal{G}_{\Sigma,Z}. \end{array}$$

によって、構成することができる。 □

References

[1] M.Audin: *The topology of torus actions on symplectic manifolds*, Progress in Mathematics vol.93, Birkhäuser Verlag, Basel, 1991.

[2] M.F.Atiyah, R.Bott: *The Yang-Mills equations over Riemannian surfaces*, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 308 (1982), 523–615.

[3] A.Alekseev, A.Malkin, E.Meinrenken: *Lie group valued moment maps*, dg-ga/9707021 (1997).

[4] S.Axelrod, S.Della Pietra, E.Witten: *Geometric quantization of Chern-Simons gauge theory*, J. Diff. Geom. 33 (1991), no.3, 787–902.

[5] N.Bourbaki: *Lie groups and Lie algebras. Chapter 4–6*, Elements of Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2002.

[6] T.Bröcker, T.tom Dieck: *Representations of compact Lie groups*, Graduate texts in Math. vol. 98, Springer-Verlag, New York, 1985.

[7] T.Gocho: *Connection 付きの hermitian line bundle をめぐって*, in SURVEYS IN GEOMETRY "共型場の理論と幾何学" (1992/93), 35–104.

[8] V.Guillemin, S.Sternberg: *Symplectic techniques in physics*, Second edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[9] L.Jeffrey, F.C.Kirwan: *Intersection theory on moduli spaces of holomorphic bundles of arbitrary rank on a Riemann surface*, Ann. of Math. (2) 148 (1998), no.1, 109–196.

[10] V.Kac: *Infinite-dimensional Lie algebras* , Third edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[11] F.C.Kirwan: *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Math. Note 31 Princeton University Press, Princeton, NJ, (1984).

[12] S.Kobayashi, K.Nomizu: *Foundations of differential geometry*, vol.1 Wiley Classics Library. A Wiley-interscience Publication. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1996.

[13] H.Konno: *On the natural line bundle on the moduli space of stable parabolic bundles*, Comm. Math. Phys. 155 (1993), no.2, 311–324.

[14] V.B.Mehta, C.S.Seshadri: *Moduli of vector bundles on curves with parabolic structures*, Math. Ann. 248 (1980), no.3, 205–239.

[15] J.Marsden, A.Weinstein: *Reduction of symplectic manifolds with symmetry*, Reports on Mathematical physics 5 (1974), 121–130.

[16] N.Nitsure: *Cohomology of the moduli of parabolic vector bundles*, Proc. Indian Acad. Sci. (Math Sci.) 95 (1986), no.1, 61–77.
[17] T.R.Ramadas, I.M.Singer, J.Weitsman: *Some Comments on Chern-Simons Gauge Theory*, Comm. Math. Phys. 126 (1989), no.2, 409–420.
[18] Takahiko Yoshida: Quantization of the moduli space of flat connections on a punctured Riemann surface based on symplectic geometry, PhD thesis at the Graduate school of Mathematical Sciences, University of Tokyo (2003).

〒153-8914　東京都目黒区駒場 3-8-1
東京大学大学院数理科学研究科
Email: takahiko@ms.u-tokyo.ac.jp

GEOMETRY OF FLAT MANIFOLDS ; PAST 20 YEARS

YOSHINOBU KAMISHIMA

ABSTRACT. 130 年経った今でも Klein のエルランゲン目録 (1872 年) における "幾何は変換群のもとで不変な空間の性質を研究することである" という彼自身の数学観はいろいろな形で現代に受け継がれている。Klein の 射影幾何 (projective geometry) は空間形問題 (space form problem) 等多様体上の変換群と幾何構造を研究する上で欠かせないものである。この講演では古典的射影幾何学に現れる様々な (部分) 幾何学に対して多様体上の幾何構造の存在と一意化、変形について考える。

INTRODUCTION

20 世紀代表的空間 (コンパクト) 実双曲多様体 $\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}/\Gamma$ を一つとり、その上の共形平坦構造を考えると Thurston bending ($n \geq 2$) により異なるものが沢山あることが示される。これは Developing pair

$$(\rho, \mathrm{dev}) : (\Gamma, \mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}) \longrightarrow (\mathrm{PO}(n+1,1), S^n)$$

に対して、$\mathbb{H}^n_{\mathbb{R}}$ を S^n の上半球面とみる標準的な展開写像 dev_0 以外に同値とならない沢山の展開写像 dev があることを意味する。(包含準同型 $\rho_0 : \Gamma \subset \mathrm{PO}(n,1) \subset \mathrm{PO}(n+1,1)$ 以外に $\mathrm{PO}(n+1,1)$ の元のもとで共役とはならないホロノミー表現 ρ が沢山あることも意味する。) また、Seifert 多様体に代表されるもう一方での空間コンパクト infrasolv 多様体 $\mathcal{S}/\Gamma$ をとるとき、その上に共形平坦構造が存在するならば $\mathcal{S}/\Gamma$ はユークリッド空間形 (リーマン平坦多様体) $\mathbb{R}^n/\Gamma$ に限ることが知られ (可解リー群 $\mathcal{S} = \mathbb{R}^n$ ベクトル空間)、その共形平坦構造は共役を除いて一意的である。これは Developing pair の topological rigidity. といって:

$$(\rho, \mathrm{dev}) : (\Gamma, \mathbb{R}^n) \longrightarrow (\mathrm{PO}(n+1,1), S^n)$$

は $\mathbb{R}^n$ を S^n から無限遠点 $\{\infty\}$ を除いた空間とみる標準的な展開写像 dev_0 に共役になってしまうということを示す。

リーマン計量の共形 (平坦) 性を表す基本的不変量は Weyl の共形曲率形式であることはよく知られている。Bochner は 1949 年、複素バージョンとしての Weyl の共形曲率形式に対応するものを構成した (果たしてそういうつもりで見つけたかはわからないが)。それをケーラー多様体上の Bochner 共形曲率形式と呼んでいる。それが消滅する時、そのエルミート計量は Bochner 平坦計量、ケーラー多様体は Bochner 平坦ケーラー多様体といわれる。上に対応する問題として、複素双曲ケーラー多様体 $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}/\Gamma$ と infrasolv 複素多様体 $\mathcal{S}/\Gamma$ (例えば、

Date: 19th~22nd July 2003, Topology Sympozium in Matsumoto.

Department of Mathematics, Tokyo Metropolitan University, Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji, Tokyo 192-0397, JAPAN. email: kami@comp.metro-u.ac.jp.

複素ユークリッド空間形 $\mathbb{C}^n/\Gamma$) を考え、その Bochner 平坦構造を調べた。(共形平坦多様体と同様 holomorphic sectional curvature が一定であるようなケーラー多様体は Bochner 平坦多様体である。)

定理 *H.* 複素双曲ケーラー空間 $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}$ の完備 Bochner 平坦構造は定数倍を除いて一意的である。

定理 *C.*

(1) コンパクト infrasolv 多様体 $\mathcal{S}/\Gamma$ に Bochner 平坦構造が存在するならば $\mathcal{S}/\Gamma$ は通常のユークリッド計量を備えた複素ユークリッド空間形 $\mathbb{C}^n/\Gamma$ に限る。

(2) 複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上の完備計量をもつ Bochner 平坦構造の同型類 (変形空間) は定数倍を除いて凸集合 $\{(a_1,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n|\ 0\le a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\}$ になる。

この結果 (2) は R. Bryant が最初に証明した (2000 年)。特徴的なことは上の共形構造の場合と異なり、展開写像の行き先であるモデル空間がひとつだけとは限らないことである。一方、共形構造を球面は双曲空間の境界という観点からみるならば同様に多様体上の Spherical CR 幾何 $(\mathrm{PU}(n+1,1),S^{2n+1})$, Quaternionic CR 幾何 $(\mathrm{PSp}(n+1,1),S^{4n+3})$ が得られる。展開写像を使ってこの幾何構造の変形等が考えられるがこの場合、奇数次元のため、複素双曲ケーラー多様体 $\mathbb{H}^n_{\mathbb{C}}/\Gamma$ の代わりに複素 hyperboloid (4 元数 hyperboloid) $V^{c(n+1)-1}_{-1}=\{z\in\mathbb{F}^{n+1}-\{0\}|\ \mathcal{B}(z,z)=-1\}$ をとる。ここで、$\mathbb{F}=\mathbb{C},\mathbb{H}$, $c=2,4$. $\mathcal{B}(z,w)=-\bar{z}_1w_1+\bar{z}_2w_2+\cdots+\bar{z}_{n+1}w_{n+1}$. (実際、実 hyperboloid の連結成分は実双曲空間として定義される。)

コンパクト複素 hyperboloid V^{2n+1}_{-1}/Γ $(\Gamma\subset\mathrm{U}(n,1))$ に対する spherical CR-構造が一意的 (Developing pair の rigidity) かあるいは Thurston の bending に対応するような結果ができるかは知られていない (変形があれば、complex non-Fuchsian representation ができる)。一方、コンパクト 4 元数 hyperboloid V^{4n+3}_{-1}/Γ $(\Gamma\subset\mathrm{Sp}(n,1)\cdot\mathrm{Sp}(1))$ のときは Margulis の superrigidity を使って、Quaternionic CR-構造は共役を除いて一意的 (Developing pair は rigid) となることが証明される。

アブストラクトにはこのような、過去 20 年間の間の多様体の平坦性とそれに対する結果を書いた。この講演では上の定理に焦点を当て、話すつもりである。

1. Borel Conjecture – 1980

基本群が同型である閉 Aspherical 多様体は同相か？
Farrell-Hsiang, Farrell-Jones 等により Novikov 予想と関連して、いくつかの Aspherical 多様体に対して反例のないまま肯定的に解かれている。出発点は次の Bieberbach の二つの定理 (1911,1912) である。

Existence. n 次元コンパクトリーマン平坦多様体 (compact euclidean space form) の基本群は階数 n の自由アーベル群を有限指数の部分群として持つ。

Rigidity. 二つの n 次元コンパクトリーマン平坦多様体は基本群が同型ならば、アファイン同型である。

コンパクトユークリッド空間形 (euclidean space form) $N = \mathbb{R}^n/\pi$ を一つとり、固定する。Farrell と Hsiang は N にホモトピックな任意の n 次元コンパクト aspherical 位相多様体 M はいつ同相となるかという問題を提起し、Topological euclidean space form problem と名づけた。結果として次元 $n \neq 3, 4$ のとき、肯定的にとかれた。その後、このボレル予想は空間形をノンコンパクト単連結リー群 G と G に作用する離散部分群 Γ によるコンパクト商空間 $N = G/\Gamma$ に置き換えられ、Topological infrahomogeneous space form problem として、拡張していった。より具体的に書くと $\mathrm{Aut}(G)$ を G の自己同型群とするとき、半直積 $\mathrm{Aff}(G) = G \rtimes \mathrm{Aut}(G)$ を考え、元 $(a, A) \in \mathrm{Aff}(G)$ は空間としての G に

$$(a, A)x = a \cdot A(x) \quad (x \in G)$$

と作用させることによりアファイン群 $\mathrm{Aff}(G)$ が定義される。$\mathrm{Aff}(G)$ は自然にリー群となり、その極大コンパクト群を K とすれば、ユークリッド部分群 $E(G) = G \rtimes K$ ができる。一つの infrahomogeneous space G/Γ とは Γ が $E(G) = G \rtimes K$ の離散部分群のときをさす。実際、K がコンパクトより、Γ は properly discontinuously に作用する。特に、Γ が torsionfree (有限位数の元をもたない) ならば商 G/Γ は多様体である。$G = \mathbb{R}^n$ のとき、$\mathbb{R}^n/\Gamma$ は Riemannian flat manifold(euclidean space form) に帰着する。Bieberbach の定理に習って、infrahomogeneous space の問題は次のようになる。

(i) コンパクト aspherical 多様体 G/Γ の基本群 Γ を特徴づけよ。

(ii) G/Γ, G'/Γ' に対して, $\Gamma \approx \Gamma'$ ならば微分同型か? さらに, その時の微分同相写像はどのような幾何的性質を保つ写像にとれるか。

(iii) G/Γ にホモトピックなコンパクト位相多様体は同相か (Topological infrahomogeneous space form problem)。

G が単連結 nilpotent Lie 群 $\mathcal{N}$ のとき $\mathcal{N}/\Gamma$ は Auslander の結果より、infranilmanifold である。(i),(ii) は次のようになる。Γ は有限指数の有限生成 torsionfree nilpotent 部分群を持つ。また、二つの infranilmanifold $\mathcal{N}/\Gamma$, $\mathcal{N}'/\Gamma'$ は $\Gamma \approx \Gamma'$ ならばアファイン同型である (Γ と Γ' の共役を与える同相写像が $\mathrm{Aff}(\mathcal{N}) = \mathcal{N} \rtimes \mathrm{Aut}(\mathcal{N})$ の元からとれる。)

この頃、Gromov により、Almost flat リーマン多様体が導入された。微分幾何的な立場からはリーマン平坦多様体の一般化とみなされる。コンパクト almost flat リーマン多様体は infranilmanifold に微分同相になることが示され、また infranilmanifold は almost flat Riemannian manifold の構造をもつことも分かっているので、infranilmanifold の幾何構造の特徴づけが得られた。(iii) は Farrell-Hsiang により、次元 $n \neq 3, 4$ のとき、肯定的にとかれた。

当然、G が単連結 solvable Lie 群 $\mathcal{S}$ のとき、同様に $\mathcal{S}/\Gamma$ が考えられる。しかし、この場合 Γ は必ずしも、有限指数の部分群をとっても $\mathcal{S}$ の部分群となるとは限らない。(一般に $\mathcal{S}/\Gamma$ は有限被覆に solvmanifold をもつといえないので infrasolvmanifold にならない。) しかし群 $\mathrm{E}(\mathcal{S})$ は Amenable Lie 群だからその離散部分群は Tits の結果より virtually polycyclic である。(i) に関しては、Γ は有限指数の有限生成 polycyclic (poly-$\mathbb{Z}$) 部分群を持つことがいえる。$\mathcal{S}/\Gamma$ が infrasolvmanifold の場合には、最近 O. Baues により任意の torsionfree virtually polycyclic group Γ に対して canonical な方法で infrasolvmanifold $\mathcal{S}/\Gamma$ が構成

できることが示された。(Auslander-Johnson の構成は G が $\mathcal{S}$ でなくコンパクト群を含んでいる場合での構成。) (ii) に対しては、二つの infrasolvmanifold $\mathcal{S}/\Gamma$, $\mathcal{S}'/\Gamma'$ は $\Gamma \approx \Gamma'$ ならば微分同型であるが示されている。(iii) は Farrell と Jones により、次元 $n \neq 3,4$ のとき、肯定的にとかれた。

2. Affine flat geometry — Auslander-Milnor Conjecture 1983

上に出てきた infrasolvmanifold $\mathcal{S}/\Gamma$ がどのような幾何構造をもつかは §1 の結果からも興味ある問題である。今の所、left invariant metric をもつこと以外には、一般的な幾何構造の存在は知られていない。Auslander - Milnor 予想とは、コンパクト測地的完備アファイン平坦多様体の基本群は virtually solvable かというものである。もしこれが正しいなら、基本群 Γ は $\mathrm{Aff}(n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ の virtually solvable 離散部分群である。このとき、Γ の Hull G が $\mathrm{Aff}(n)$ の中でとれて、$K\backslash G = \mathbb{R}^n$ (K はコンパクト群) となる。$\mathbb{R}^n/\Gamma = K\backslash G/\Gamma$ から、コンパクト測地的完備アファイン平坦多様体は infrasolvmanifold の構造をもつことが出る。今のところ、$(\mathrm{O}(1,n-1;\mathbb{F}) \subset \mathrm{GL}(cn,\mathbb{R})$ $(c = 1,2,4)$ を体 $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{H}(=$ 4 元数体) のそれぞれに対するローレンツ群とするとき、$\mathrm{Aff}(n)$ の真部分群 $\mathrm{E}(n,\mathbb{F}) = \mathbb{F}^n \rtimes \mathrm{O}(1,n-1;\mathbb{F})$ ができるが、このコンパクト測地的完備ローレンツ平坦多様体 $\mathbb{F}^n/\Gamma$ に対して、Auslander - Milnor 予想は正しいことが知られている。また $\mathrm{Aff}(6)$ までは正しいことが証明されている。最近、$\mathrm{E}(2,n-2) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(2,n-2)$ に対しても、予想が正しいことが Abels-Margulis-Soifer により証明された。(すでに、$\mathrm{O}(2,2)$ の時は、証明されている)。まだ、一般の $\mathrm{E}(p,q) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(p,q)$ $(p+q=n)$ に対しては分かっていない。

この分野の一つの問題として, $\mathbb{H}$ に対する 4 元数ユークリッド平坦群 $\mathrm{E}_{\mathbb{H}}(n) = \mathbb{H}^n \rtimes \mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$ を考えるとき、$\mathrm{E}_{\mathbb{H}}(n)$ の離散ココンパクト部分群 Γ からできるコンパクト測地的完備アファイン平坦多様体 $\mathbb{H}^n/\Gamma$ は勿論、$\Gamma \subset \mathrm{E}(4n) = \mathbb{R}^n \rtimes \mathrm{O}(4n)$ だから Bieberbach 群である—(Virtually free abelian discrete uniform group)。一方、Split-4 元数環 $\mathbb{H}' = \{1,i,j,k \mid i^2 = -1, j^2 = k^2 = 1, jk = -kj = -i\}$ を考えるとき、群 $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{H}') = \{A \in M(n,\mathbb{H}') \mid AA^* = E\}$ ができる。(これは、実 symplectic group $\mathrm{Sp}(n,\mathbb{R})$ と群同型である。特に、$\mathrm{Sp}(1,\mathbb{H}') = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$ である。) このとき、同様に Para-4 元数ユークリッド平坦群 $\mathrm{E}_{\mathbb{H}'}(n) = \mathbb{H}'^n \rtimes \mathrm{Sp}(n,\mathbb{H}')\cdot\mathrm{Sp}(1,\mathbb{H}')$ が構成される。

問題１：測地的完備 Para-4 元数ユークリッド平坦多様体 $\mathbb{H}'^n/\Gamma$ がコンパクトならば Γ は virtually solvable か？

$n=1$ のときは、$\mathrm{Sp}(1,\mathbb{H}')\cdot\mathrm{Sp}(1,\mathbb{H}') = \mathrm{SL}(2,\mathbb{R})\cdot\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) = \mathrm{O}(2,2)^0$ から $\mathrm{E}_{\mathbb{H}'}(1) = \mathrm{E}(2,2)^0$ となり上の結果を使って主張は正しい。

残念ながら、virtually solvable(nilpotent) 群でコンパクト完備アファイン平坦多様体の基本群になりえないものがあるので、例え、Auslander - Milnor 予想は正しくても、一部の infrasolvmanifold に対して幾何構造 (平坦構造) を与えたことにしかならない。最後に、(iii) に関しては、Farrell-Jones により、予想の如何に関係なく、次元 3, 4 を除いて、基本群が同型であるようなコンパクト完備アファイン平坦多様体は同相になる。この種の閉 aspherical 多様体の rigidity に関して、この節の最後に Farrell-Jones の topological space form problem の

結果を述べておく (次元 3, 4 を除く)。

(a) コンパクト non-positively curved manifold (例えば、hyperbolic manifold) はホモトピックなら同相である。

(b) ホモトピックな閉 aspherical 多様体の基本群が $\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ (n は大) の離散部分群と (代数的に) 同型ならば、それらは同相である。

(注. 上のコンパクト完備アファイン平坦多様体の rigidity は (b) から出る。)

3. Conformally flat geometry, conformal geometry – 1985

G-構造、Geometric structure を学ぶ上で格好の材料と言えば conformal (共形) 構造、conformaly flat (共形平坦) 構造がある。(M,g) をリーマン多様体とする。M 上のリーマン計量 g', g が共形同値とはある関数 $\lambda > 0$ があり、$g' = \lambda \cdot g$ となることをいう。g がユークリッド計量と局所共形同値になるとき、(M,g) を共形平坦多様体と言う。 $G \subset \mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ を閉部分群とする。M の接束 TM の構造群が G にまで簡約 (reduction) できるとき、M は G-構造を持つという。M 上の共形構造とは $G = \mathrm{O}(n) \times \mathbb{R}^+$ - 構造である。$G \to P \to M$ を G-構造を表す M の主 G-束とする。G-構造が integrable とは各点で座標近傍 $(x_1, \cdots, x_n)$ からできる frame $\{\partial/\partial x_1, \cdots, \partial/\partial x_n\}$ が P に属することである。特に共形構造が integrable とは、各点の近傍 U で $g|_U = \lambda(dx_1^2 + \cdots + dx_n^2)$ とかけることを意味するから、定義より (M,g) が共形平坦であることを示す。(M,g) 上の共形構造の不変量として、Weyl 曲率テンサー (Weyl-Schouten 曲率テンサー) W がある ($W(g') = W(g)$)。$W(g) = 0$ ならば (M,g) は共形平坦多様体である ($\dim M \geq 4$)。さて n 次元球面 S^n は立体射影により共形平坦である (通常の球面計量 g_0 に関して、$W(g_0) = 0$ である)。(M,g) において、$W(g) = 0$ とすると、したがって共形構造が integrable ならば、各点の近傍 U_α から S^n の中への conformal immersion $\varphi_\alpha : U_\alpha \to S^n$ ができる。($\varphi_\alpha^* g_0 = \lambda \cdot g$). もう一つの conformal immersion $\varphi_\beta : U_\beta \to S^n$ に対して、$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ ならば S^n の開集合上で定義された局所共形変換 $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ ができるが Liouville の定理より，局所共形変換 $g_{\alpha\beta}$ は S^n の共形変換に一意的に拡大される。ここで $\mathrm{Conf}(S^n)$ によって S^n 上の共形変換群を表すとき、$\mathrm{Conf}(S^n)$ はローレンツ群 $\mathrm{PO}(n+1,1)$ と同型である。M の各開集合とその共通部分にわたってこの操作をおこなうと、局所変換 $g_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ が $\mathrm{Conf}(S^n)$ の元の制限となっているようなチヤートの family $\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ がとれる。$\{U_\alpha, \varphi_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ は M の共形構造 $[g]$ に対する一意化 (uniformization) とよばれる (正しくは、その細分による同値類のことを指す)。M 上に一意化が与えられると、パッチワークの方法により、M の普遍被覆空間 $\tilde{M}$ から S^n への conformal immersion $\mathrm{dev} : \tilde{M} \to S^n$ ができる。M のそれから $\tilde{M}$ に自然にリフトされる共形構造に関して、M の基本群 π の各元 γ は共形変換 (共形構造を保つ変換) として作用しているから、合成 $\mathrm{dev} \circ \gamma$ も $\tilde{M}$ の同じ共形構造を表す conformal immersion になる。二つは $\mathrm{Conf}(S^n)$ のもとで同値となるからある元 $\rho(\gamma) \in \mathrm{Conf}(S^n)$ がとれて、$\mathrm{dev} \circ \gamma = \rho(\gamma) \circ \mathrm{dev}$ となる。 よって conformal immersion dev は、dev と同変な準同型 $\rho : \pi \to \mathrm{Conf}(S^n)$ を一つ誘導する。明らかに、対 (ρ, dev) は M の一つの共形平坦構造に対する不変量である。ここで $\mathrm{Conf}(S^2)^0 = \mathrm{PSL}(2,\mathbb{C})$

を意識して表現 ρ が離散ならば、$\rho(\pi)$ は高次の Klein 群と呼ばれる。さらに、共形平坦多様体 $(M,[g])$ は $(\mathrm{Conf}(S^n),S^n)$-多様体ともいう。ほかに位相的性質としては, Chern-Simons により Pontryagin form は共形不変だから、共形平坦多様体 $(M,[g])$ の Pontryagin 類は消滅する。また、古典的 Chern-Simons 不変量の消滅は M 上の共形構造全体の中で停留的 (stationary) になっている—M が共形平坦である。

この節の結論は一般に M 上に一つ G-構造が与えられると、$G\subset \mathrm{GL}(k,\mathbb{R})$ が有限型 (finite type) なら, G-構造を保つ不変量が存在して、その消滅は G-構造の integrability を表す。このとき、Liouville の定理より、Frobenius の意味で flat な幾何学 $(\mathcal{G},X)$ が出現して、M は $(\mathcal{G},X)$-構造を持つ (($\mathcal{G},X)$ に一意化される。ここで $\mathcal{G}$ は推移的 Lie 群であって X はその n 次元等質空間である。) この種の integrability をサポートする例として、他に 4 元数射影 (平坦) 構造 $(\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{H}),\mathbb{HP}^n)$ がある。($G=\mathrm{GL}(n,\mathbb{H})\cdot\mathrm{GL}(1,\mathbb{H})$-構造をもつ $4n$ 次元多様体を 4 元数射影多様体という。Weyl 曲率と同様の性質をもつ不変量 (それも Weyl 形式と呼ぶ) が存在してその消滅が G-構造の integrability を表す。結果として integrable な 4 元数射影多様体は射影平坦、$(\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{H}),\mathbb{HP}^n)$-構造をもつ。

一方, $G\subset\mathrm{GL}(n,\mathbb{R})$ が非有限型 (infinite type) の時は, G-構造の integrability は対象となる幾何不変量を与えるであろうがその消滅を意味するわけではない。(概複素構造と複素構造、複素射影 (平坦) 構造 $(\mathrm{PGL}(n+1,\mathbb{C}),\mathbb{CP}^n)$ 等が明らかな例 $(n\neq 1)$。)

4. Spherical CR-geometry, CR-geometry – 1989

リーマン計量 (幾何) における Weyl の共形性のアイデアは多様体上の微分形式に対して展開してみることは新たに種々の幾何構造を与え、共形不変性を与える不変量が出来ると思われる (具体的には有限型とは限らない部分群 G と G-構造を使って共形同値を与える接続形式、それからでてくる曲率形式 (テンサー) の構成、局所不変量 (local invariant) の存在。結果としてその不変量が消滅するとき、多様体の一意化を与えるモデル空間 $(\mathcal{G},X)$ を見つけること。)

$2n+1$ 次元多様体の (強擬凸)CR-構造とは接触形式が与える余次元 1 の接触部分束 B 上の複素構造のことである。(複素構造を忘れるならばコンタクト構造である。)

CR-多様体の共形性は複素構造 J は固定して、与えられた接触構造 B を表す接触形式 ω,ω' を取るとき、 M 上の関数 $u>0$ が存在して $\omega'=u\cdot\omega$ として定義される。この共形構造に関する不変量は Chern-Moser-Webster CR 曲率テンサー S と呼ばれる (接触形式の取りかたによらずに (B,J) は決まる — $S(\omega,J)=S(\omega',J)$)。その曲率テンサー S の消滅は M が spherical CR 幾何学 $(\mathrm{PU}(n+1,1),S^{2n+1})$ に一意化されることを意味する。

M 上の CR-構造 $(\mathrm{Ker}\,\theta,J)$ は coframes$\{\theta,\theta^\alpha,\theta^{\bar\alpha},\alpha=1,\cdots,n\}$ からなる主 G-束として与えられる:

$$G\to P\to M.$$

ここで G は $\mathrm{GL}(2n+1,\mathbb{R})$ に含まれる群で次の形を持つ。

$$\left\{\begin{pmatrix} u & v^{\alpha} & v^{\bar\alpha} \\ 0 & \sqrt{u}U^{\alpha}_{\beta} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{u}U^{\bar\alpha}_{\bar\beta}\end{pmatrix} \mid u\in\mathbb{R}^{+}, v^{\alpha}\in\mathbb{C}, (U^{\alpha}_{\beta})\in\mathrm{U}(n)\right\}.$$

さらに、J が複素構造であるために、1形式 θ,θ^{α} は次を満たしている。

$$d\theta = i\delta_{\alpha\bar\beta}\theta^{\alpha}\wedge\theta^{\bar\beta}+\theta\wedge\phi.$$
$$d\theta^{\alpha} = \theta^{\beta}\wedge{\omega_{\beta}}^{\alpha}+\theta\wedge\phi^{\alpha}.$$
$$d\mathrm{g}_{\alpha\bar\beta}+\mathrm{g}_{\alpha\bar\beta}\phi = {\omega_{\alpha}}^{\gamma}\mathrm{g}_{\gamma\bar\beta}+\mathrm{g}_{\alpha\bar\gamma}{\omega_{\bar\beta}}^{\bar\gamma}.$$

一方、共形平坦多様体のときは分かっているが、まだ CR のときは分かっていないものとして:

問題2. 3次元 Spherical CR-多様体 M の developing pair

$$(\rho,\mathrm{dev}):(\pi_1(M),\tilde{M})\longrightarrow(\mathrm{PU}(4,1),S^3)$$

で展開写像 dev が S^n に surjective となるものを構成せよ。ホロノミー表現 $\rho:\pi\to\mathrm{PU}(4,1)$ に対しその像 $\rho(\pi)$ が $\mathrm{PU}(4,1)$ の中で dense (あるいは indiscrete) となるものを構成せよ。

5. Bochner flat geometry, Kähler geometry – 1992

Bochner はケーラー多様体 (エルミート多様体) M において Weyl 共形曲率テンサー W にならって Bochner 曲率テンサー B を与えた。ケーラー計量の関数倍がまたケーラー計量になるときは関数は定数となるから ($\dim M\geq 4$)、ケーラー計量のもとで共形性は意味がない。したがって Bochner 曲率テンサーが与える不変量は何か、また久しくその消滅はどのような幾何学を実現するかということが問題となっていた。コンパクト共形平坦多様体、Spherical CR-多様体では分類も存在も3次元ですらまだまだであるが、コンパクト Bochner 平坦ケーラー多様体は分類でき、それらは局所等質空間 $\mathbb{H}^m\times\mathbb{CP}^{n-m}/\Gamma$ ($m=0,1,\cdots,n$), $\mathbb{C}^n/\Gamma$ に限ることが分かっている。また興味あることは、モデル空間が球面のときのように一つではなく、いくつかのモデル Bochner 平坦ケーラー幾何 $(\mathcal{G},X)$ に分類され、Bochner 平坦ケーラー多様体はそれぞれモデルのどれかに一意化されることが証明できる。ここで $\mathcal{G}$ は X の full isometry 群ではあるが必ずしも推移的でない。またモデル X もすべてが完備ケーラー多様体になっているわけではない。特筆すべきは、複素ユークリッド空間 $\mathbb{C}^n$ 上の Bochner 平坦ケーラー計量の集合 (homothety を除く相異なる同形類) は凸集合 $\{(a_1,a_2,\cdots,a_n)\in\mathbb{R}^n\mid 0\leq a_1\leq a_2\leq\cdots\leq a_n\}$ になることである。(上の結果より $\mathbb{C}^n/\Gamma$ がコンパクトになる時だけが Bochner 平坦ケーラー計量は標準的な計量であることを意味する。)

また不変量に関しては、Tricerri と Vanhecke がエルミート (複素) 多様体上に一般化された Bochner 曲率テンサーを定義し、一般化された Bochner 曲率テンサーがエルミート計量上の共形不変量であることを示した。このテンサーはエルミート多様体がケーラー多様体のとき Bochner 曲率テンサー と一致する。このことに注目し、エルミート多様体でケーラー多様体でないものを調べると

きにでてくる局所共形ケーラー多様体（例えば、Hopf 曲面、井上曲面) を考え、一般に複素曲面に局所共形ケーラー構造が存在するかまたその中で Bochner 平坦局所共形複素曲面はどのようなものか（もっと強く Bochner 平坦局所共形ケーラー多様体）分類まで決定されている。

また, 複素構造を忘れるならばこの多様体は局所共形 Symplectic 多様体となり、その位相的性質、 基本群の表現を symplectic 多様体のそれらと比較してみるのも興味がある: ここで $2n$ 次元多様体 W 上の局所共形 symplectic 構造とは局所形式の族 $\{U_\alpha, \Omega_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ で $\{U_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ は W の開被覆、Ω_α は各 U_α 上で定義された symplectic 形式である。さらに、 空でない共通部分 $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ では $\Omega_\beta = \lambda_{\beta\alpha}\Omega_\alpha$ を満たす正定数 $\lambda_{\beta\alpha}$ が存在する。加えて、 もし W に複素構造 J が存在して各 Ω_α は J-不変であるとき、それは局所共形ケーラー構造という。そのような構造をもつ複素多様体 (W, J) は局所共形ケーラー多様体といわれる。明らかにケーラー多様体はその例であるが, ケーラーには決してなりえない例として Hopf 多様体 $S^{2n-1} \times S^1$ がある. 実は Hopf 多様体はコンパクト Bochner 平坦局所共形ケーラー多様体であってケーラー構造を持たない唯一のものである。

この節の上の結果に関する証明の方法は複素構造を保つ局所 Symplectic 構造の局所コンタクト化である。Ω を (局所共形) ケーラー多様体 (U, g, J) 上のケーラー形式で exact とすると $d\theta = \Omega$ となる 1 形式 θ が存在、このとき積 $M = U \times \mathbb{R}$ に $\omega = dt + p^*\theta$ とおくことにより M 上にコンタクト形式 ω が定義される。明らかに複素構造 J は射影 $p : M \to U$ により Ker ω 上の複素構造 J を誘導する。自明な主束 $\mathbb{R} \to (M, \{\mathrm{Ker}\,\omega, J\}) \xrightarrow{p} (U, J, \Omega)$ は M 上の CR 構造を U 上のケーラー構造に移すものである。このとき、曲率形式が

$$p^*B(g) = S(\omega, J)$$

として特徴づけられる (Webster)。つまり、Bochner 曲率形式は Weyl 曲率形式のアナロジーというよりも Chern-Moser 曲率形式を表している。この幾何学的理由は Weyl 曲率テンサーの消滅が実現する幾何は実双曲空間 $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$ とその Isometry 群 $\mathrm{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1})$ のコンパクト化としての共形平坦幾何 $(\mathrm{PO}(n+1,1), S^n)$ であるのに対して、複素双曲幾何 $(\mathrm{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}), \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1})$ の階数 1 の半単純対称空間としてのコンパクト化が spherical CR 幾何 $(\mathrm{PU}(n+1,1), S^{2n+1})$ という事実である。

余談だが 4 次元リーマン多様体 M の場合、Weyl 曲率テンサー W は二つの曲率テンサー $W = W^+ \oplus W^-$ に分かれる。もし M がケーラー多様体ならば Bochner 曲率テンサー B は $B = W^-$ である。これを使って、実 4 次元共形平坦ケーラー多様体は Similarity 幾何 $(\mathbb{C}^2 \rtimes (\mathrm{U}(2) \times \mathbb{R}^+), \mathbb{C}^2)$ か projective-hyperbolic 幾何 $(\mathrm{PU}(1,1) \times \mathrm{PU}(2), \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{CP}^1)$ に一意化される。従ってコンパクト実 4 次元共形平坦ケーラー多様体 M は complex euclidean space form $T_{\mathbb{C}}^2/F$ か fiber space $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \times \mathbb{CP}^1/\Gamma$ に holomorphically isometric である。

6. Quaternionic Carnot-Carathéodory geometry — 1996

上の考えにしたがって、4 元数双曲幾何 $(\mathrm{Iso}(\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^{n+1}), \mathbb{H}_{\mathbb{H}}^{n+1})$ のコンパクト化として Quaternionic CR 幾何 $(\mathrm{PSp}(n+1,1), S^{4n+3})$ が誘導される。実, 複と同様, S^{4n+3} は 4 元数射影空間 $\mathbb{HP}^{n+1}$ の超曲面であることから、$\mathbb{HP}^{n+1}$ の射影

変換群 PGL$(n+2,\mathbb{H})$ の部分群として S^{4n+3} 上に作用している。しかし共形変換、Cauchy-Riemann 変換といったようにこの場合どのような解析的変換として作用するかは知られていない。これがわかれば等長変換の境界挙動の特徴づけが可能になり階数 1 の半単純対称空間のコンパクト化としての境界上の共形幾何学を確立することになる.

さて、Quaternionic CR 幾何の共形構造とその不変量（テンサー）は何であろうか。

接触構造と複素構造を持つ CR 部分束のアナロジーとして、$4n+3$ 次元多様体 M 上に 4 元数構造をもつ余次元 3 の部分束を導入する。これを 4 元数 Carnot-Carathéodory 構造とよぶことにすると, 4 元数 Carnot-Carathéodory 構造を実現する微分形式はリー環 $\mathfrak{sp}(1)$ に値をもつ 1 形式であり、共形性は関数 $\lambda : M \to \mathbb{H}^* \ (= \mathbb{H} - \{0\})$ が存在して共役 $\omega' = \bar{\lambda}\cdot\omega\cdot\lambda$ として定義される。($\bar{\lambda}$ は λ の $\mathbb{H}$ における共役。) このとき我々はこの共形同値の不変量– 共形曲率テンサーを求めた。さらにその消滅は M を spherical QCC 幾何学 $(\mathrm{PSp}(n+1,1), S^{4n+3})$ に局所的にモデル (一意化) する— M は spherical QCC 多様体となる。実際、次のようにまとめられる。

定理 *Q.* 4 元数 Carnot-Carathéodory 構造をもつ $4n+3$ 次元多様体 M に対し、リッチ零の表現空間 $\mathcal{R}_0(\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1))$ に値を持つ 4 次の曲率テンサー $T=(T^i_{jk\ell})$ が存在して、もし T が消滅すれば M は spherical QCC 幾何 $(\mathrm{PSp}(n+1,1), S^{4n+3})$ に一意化される。

証明に関して、CR との違いで注意したいことは CR 構造はその概複素構造が余次元 1 の部分束上 integrable であるということがそもそも定義であったが Quaternionic C-C 構造のときには余次元 3 の部分束上に存在する 4 元数構造は単に三つの概複素構造 I, J, K に他ならない。したがって、CR の時と同じ議論をしていくにはこれらの概複素構造の integrability が問題となる。ところが Hitchin のアイデアを使ってこれらは同時に integrable(複素構造) になることが証明できる。(この種の integrability を必要としていたとき、結果的には integrable であるという事実に気づいたのは柏田の Sasakian 3-structure の integrability の観察である。)

一方、Spherical QCC-多様体 M の developing pair

$$(\rho, \mathrm{dev}) : (\pi_1(M), \tilde{M}) \longrightarrow (\mathrm{PSp}(n+1,1), S^{4n+3})$$

に関しては 4 元数双曲群 $\mathrm{PSp}(n+1,1)$ の Margulis の superrigidity があるため、かなりの部分で topological rigidity が成り立つ。

7. Quaternionic CR geometry と Para quaternionic CR geometry

4 元数で与えられる algebra を二つ復習する。$\mathbb{H}_\varepsilon$ を標準基 $1,\ i,\ j,\ k$ をもつ $\mathbb{R}$ 上の 4 次元 algebra で、次の積構造をもつものとする:

$$i^2=-1,\ j^2=k^2=\varepsilon,\ jk=-kj=-\varepsilon i\ (ij=k,\ ki=j).$$

ただし $\varepsilon = \pm 1$. $\varepsilon=-1$ に対して得られる algebra $\mathbb{H}_{-1}$ は 4 元数体 $\mathbb{H}$、$\varepsilon = +1$ に対しては algebra $\mathbb{H}_{+1}$ は split-4 元数環 $\mathbb{H}'$ と言われる。(この algebra $\mathbb{H}'$ を paraquaternions と呼ぶこともある。) Algebra $\mathbb{H}_\varepsilon$ 上のエルミート内積 <

$x, y >= x\bar{y}$ ($\bar{x} = x_0 - x_1 i - x_2 j - x_3 k$ は $x = x_0 + x_1 i + x_2 j + x_3 k$ の共役) は $\varepsilon = -1$ に対し正定値、$\varepsilon = +1$ のときは指数 $(2, 2)$ の不定値である。Algebra $\mathbb{H}_\varepsilon$ 上の "norm" $|x| = \sqrt{(x\bar{x})}$ は $|xy| = |x||y|$ を満たす。群 $\mathbb{H}_\varepsilon^1 = \{x \in \mathbb{H}_\varepsilon \mid |x| = 1\}$ は それぞれ $\mathrm{Sp}(1)$ $(\varepsilon = -1)$, $\mathrm{SO}^0(2, 1) = \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ $(\varepsilon = 1)$ に同型である。$\mathbb{H}_\varepsilon^1$ の Lie 環 $\mathfrak{h}_\varepsilon^1$ は $\mathrm{Im}\,\mathbb{H}_\varepsilon$ と同一視でき Lie bracket は次を満たす:

$$[i, j] = 2k, \quad [j, k] = -2\varepsilon i \quad [k, i] = 2j.$$

このとき主束 $\mathbb{H}_\varepsilon^1 \to M \xrightarrow{\pi} B$ を考える。この主束の接続は M 上の horizontal $\mathfrak{h}_\varepsilon^1$-値 1-形式 ω である。$\mathfrak{h}_\varepsilon^1$ の基 i, j, k に関して $\omega = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k$ と書けるから三つの実 1-形式 $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ が得られる。同様に曲率形式 $\rho = d\omega + [\omega \wedge \omega]$ も三つの実 2-形式 (ρ_1, ρ_2, ρ_3) を与える。ρ_α $(\alpha = 1, 2, 3)$ の非退化性を仮定するとき、これらを使って自然に $H = \mathrm{Ker}\ \omega$ 上で定義された三つの endomorphisms $\{J_1, J_2, J_3\}$ ができる。特にそれらが 4 元数関係をつくるときに興味をもつ– 具体的に、ω_α, $\alpha = 1, 2, 3$ を $4n + 3$ 次元多様体 M 上の独立な 3 個の実 1-形式とする (M 上至る所、$\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \omega_3 \neq 0$)。次の 2-形式を考える:

$$\begin{aligned}
\rho_1 &= d\omega_1 - 2\varepsilon\omega_2 \wedge \omega_3, \quad (\varepsilon = \pm 1), \\
\rho_2 &= d\omega_2 + 2\omega_3 \wedge \omega_1, \\
\rho_3 &= d\omega_3 + 2\omega_1 \wedge \omega_2.
\end{aligned}$$

定義. 3 個の独立 1-形式 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ はつぎの条件を満たす時、ε-quaternionic CR 構造という ($\varepsilon = +1$ あるいは -1)。

(1) $H = \mathrm{Ker}\,\omega_1 \cap \mathrm{Ker}\,\omega_2 \cap \mathrm{Ker}\,\omega_3$ は非退化余次元 3 distribution であり、2-形式 ρ_α, $\alpha = 1, 2, 3$ は共通の 3 次元核 $V = \mathrm{Ker}\ \rho_1 = \mathrm{Ker}\ \rho_2 = \mathrm{Ker}\ \rho_3$ をもつ。

(2) H 上で 3 個の写像 J_α を次のように定義する:

$$J_1 = -\varepsilon(\rho_3|_H)^{-1} \circ \rho_2|_H, \quad J_2 = (\rho_1|_H)^{-1} \circ \rho_3|_H, \quad J_3 = (\rho_2|_H)^{-1} \circ \rho_1|_H$$

この時、4 元数関係

$$J_1^2 = -\varepsilon J_2^2 = -\varepsilon J_3^2 = -1, \quad J_2 J_3 = -J_3 J_2 = -\varepsilon J_1.$$

を満たす。$\varepsilon = -1$ のとき、(-1)-quaternionic CR 構造は通常 quaternionic CR 構造といい、$\varepsilon = +1$ のとき、$(+1)$-quaternionic CR 構造は para-quaternionic CR 構造という。

注意. QCC 幾何の global version が正定値 quaternionic CR geometry ($\varepsilon = -1$) である。

この条件 **(2)** から他の関係も出てくる:

$$\begin{aligned}
&J_1 = \varepsilon(\rho_2|_H)^{-1} \circ \rho_3|_H, \quad J_2 = \varepsilon(\rho_3|_H)^{-1} \circ \rho_1|_H, \\
&J_3 = \varepsilon(\rho_1|_H)^{-1} \circ \rho_2|_H. \\
&J_1 J_2 = -J_2 J_1 = J_3, \quad J_3 J_1 = -J_1 J_3 = J_2.
\end{aligned}$$

さらに、条件 (2) は次を導く。

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & \rho_1|H(J_1\cdot,\cdot) = \rho_2|H(J_2\cdot,\cdot) = \rho_3|H(J_3\cdot,\cdot). \\ +1 & \rho_1|H(J_1\cdot,\cdot) = \rho_2|H(J_2\cdot,\cdot) = -\rho_3|H(J_3\cdot,\cdot). \end{cases}$$

$$\varepsilon = \begin{cases} -1 & \rho_\alpha(J_\alpha\cdot, J_\alpha\cdot) = \rho_\alpha(\cdot,\cdot). \\ +1 & \rho_1(J_1\cdot, J_1\cdot) = \rho_1(\cdot,\cdot), \quad \rho_\beta(J_\beta\cdot, J_\beta\cdot) = -\rho_\beta(\cdot,\cdot). \end{cases}$$

$(\beta = 2, 3.)$ M の接束は horizontal distribution H と vertical distribution V に分解される: $TM = V \oplus H$。これを使って ε-quaternionic CR manifold M 上に pseudo-Riemannian 計量 $g^{(\varepsilon)}$ が定義される。

$$g^{(\varepsilon)} = -\varepsilon\omega_1 \otimes \omega_1 + \omega_2 \otimes \omega_2 + \omega_3 \otimes \omega_3 + \rho_1(J_1\cdot^H, \cdot^H).$$

X^H は $X \in TM$ の horizontal 成分を表す。ξ_α, $\alpha = 1, 2, 3$ を $\omega_\beta(\xi_\alpha) = \delta_{\alpha\beta}$ を満たすベクトル場とすると、これらはそれぞれ特性ベクトル場 (Reeb field) となり、結果として V は具体的に条件 (1) より

$$V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = \{\xi \in TM \mid \rho_\alpha(\xi, v) = 0 \ (\alpha = 1, 2, 3),\ \forall v \in TM\}$$

となる。この時、従来の Sasakian 3-構造は次のように一般化される。

定理 *P*.
I. $4n + 3$ 次元多様体上の幾何構造に関して次は同値である: (1) (Pseudo-Riemannian) contact metric 3-structure $g^{(-1)}$ (2) Quaternionic CR structure (3) Pseudo-Sasakian 3-structure.

II. $4n + 3$ 次元多様体上の幾何構造に関して次は同値である: (1) (Pseudo-Riemannian) contact metric para-3-structure $g^{(+1)}$ (2) Para-quaternionic CR structure (3) Pseudo-Sasakian Para-3-structure.

ここで言っていることはリーマン幾何から佐々木構造が調べられてきたが、本質的には計量にはよらない概念であることである。佐々木構造は CR 多様体において、特性ベクトル場が CR-ベクトル場になる場合として特徴付けられる。両方の分野がコンタクト構造に関連するのに研究の場では相互にコンタクトしていない現実がある。

References

[1] D. A. Alekseevsky and Y. Kamishima, "Quaternionic and para - quaternionic CR structure on (4n+3)-dimensional manifolds."
[2] S. Bochner, "Curvature and Betti numbers. II," *Ann. of Math.*, vol. 50 (1949) 77–93.
[3] R. Bryant, "Bochner-Kähler metrics," *Jour. of A.M.S.*, vol. 14(3) (2001) 623–715.
[4] T. Farrell, "The Borel Conjecture," *Topology of high-dimensional manifolds, no. 1, the abdus salam international centre for theoretical physics*, eds. T. Farrell, L. Göttsche, W. Lück, vol. 9 (2002).
[5] R. Kulkarni, "On the principle of uniformization," *J. Diff. Geom.*, vol. 13 (1978) 109-138.
[6] S. Webster, "Pseudo-Hermitian structures on a real hypersurface," *J. Diff. Geom.*, vol. 13 (1978) 25–41.
[7] H. Weyl, 'Classical groups, their invariants and representations,' *Princeton Univ. Press.*, 1946.

トポロジーシンポジウム５０回までの講演者および講演タイトル

第１回 (1951)　東大駒場　第２回 (1952)　東北大　第３回 (1953)　大阪市大
第４回 (1954)　新潟大　第５回 (1955)　九大

第１回は河田敬義氏の御世話で東大教養学部の一室で行われ，大阪から小松，工藤，中岡，戸田の各氏，名古屋大から静間，上原，島田の各氏，東北大学から青木，和田の両氏などで，当時の若手研究者の殆どすべてであったようです．この他に東京からは「学生」の参加者も数多くあったといわれています．第３回には S. Eilenberg 氏，第５回には，J.P. Serre 氏の参加などもありました．当時は位相幾何学もはじまって間もない頃（幼児期？）で，Steenrod による cup 積の利用，$\pi_{n+2}(S^n)$，homology exact sequence, Singular homology theory の出現などが見られた時期のようです．　（以上，TOPOLOGY NEWS(NO.3 1978 年 4 月) から抜粋.）

第６回 (1956, 8/29-9/1)　信州大　約 40 名

(1) 和田秀三（東北大）: S^n から S^n への写像空間について
(2) 戸田　宏（阪市大）: S^{31} から S^{16} への Hopf invariant 1 の写像が存在しないことについて
(3) 中岡　稔（阪市大）: Symmetric group G_p の operate する complex
(4) 山ノ下常与（東大）: 或る cohomological operation について
(5) 横田一郎（阪市大）: 古典 Lie 群のホモロジー
(6) 島田信夫（名大）: Adem の relation の証明
(7) 山菅　弘（阪市大）: 3 次元 real analytic compact Riemannian manifold の分類について
(8) 荒木捷朗（九大）: H-squaring operation について
(9) 村上信吾（阪大）: Characteristic class について
(10) 寺阪英孝（阪大）: Knot に関する一予想

第７回 (1957, 9/5-9/7)　愛媛大　約 30 名

(1) 戸田　宏（京大）: Steenrod algebra における exact sequence
(2) 樹下真一（阪大）: Knots と periodic transformation
(3) 村杉邦男（法政大）: Knot の genus について
(4) 菅原正博（岡山大）: H-space について
(5) 横田一郎（阪市大）: Homogeneous space の cell 分割
(6) 荒木捷朗（九大）: Fiber spaces の spectral sequences 中で定義された reduced power
(7) 中岡　稔（阪市大）: 球面の p^r-重対称積について
(8) 山ノ下常与（武蔵工大）: Suspension homomorphism について

第８回 (1958, 8/28-8/30)　山形大　約 50 名

(1) 工藤達二（九大）: Cotransgression theorem について
(2) 水野克彦（阪市大）: Classification theorem について
(3) 山菅　弘（阪市大）: 3 次元の manifold
(4) 菅原正博（岡山大）: H^*-spaces and group-like spaces
(5) 白岩謙一（名大）: Postnikov system と obstruction について
(6) 島田信夫（名大）: Differentiable structure と isotopy
(7) 服部晶夫（東大）: Solvable Lie algebra の cohomology
(8) 山ノ下常与（武蔵工大）: Cohomology operation について
(9) 鈴木治夫（東北大）: Kummer manifold の topology

第９回 (1959, 8/25-8/27)　富山大　約 50 名

(1) 島田信夫（名大）: Adams の secondary cohomology operations について

(2) 横田一郎（阪市大）：射影空間の楕円 Lie 群への埋蔵
(3) 中村得之（東大）：コホモロジー作用素の定義について
(4) 高橋典大（武蔵工大）：On the stable cohomology of $K(\prod, n; k; G, n+1)$
(5) 笹尾靖也（東大）：On James' conjecture
(6) 和田　達（東海大）：Suspension triad 上の exact couple II
(7) 樹下真一（阪大），細川藤次（神戸大）：Link で branch する cyclic covering space について
(8) 静間良次（立命館大）：関数空間のホモロジー．(Morse の理論との関連.)
(9) 青木　清，本間栄一郎，金子哲夫（新潟大）：Semi-simplicial complex の homotopy group について
(10) 野口　広（早大）：On the smoothing of combinatorial n-manifolds in $(n+1)$-space
(11) 斎藤喜宥（阪市大）：Cobordism group の p-component

第１０回 (1960, 9/13-9/15)　神戸市六甲山頂にある新三菱重工，丸紅飯田の山荘　約 60 名
(1) 小松醇郎（京大）：30 年代の多様体
(2) 田尾鶉三（阪大）：3 次元多様体の構造
(3) 白岩謙一（名大）：第一種コホモロジー作用素 (I)
(4) 中村得之（東大）：第一種コホモロジー作用素 (II)
(5) 斎藤喜宥（阪市大）：3 次元多様体の分解
(6) 野口　広（早大）：3 次元多様体の 2、3 の話題
(7) 山菅　弘（阪市大）：一般次元の Poincaré 予想について
(8) 工藤達二（九大）：高次のコホモロジー作用素 (I)
(9) 水野克彦（阪市大）：高次のコホモロジー作用素 (II)
(10) 山ノ下常与（武蔵工大）：第二種コホモロジー作用素
(11) 島田信夫（名大）：函数的コホモロジー作用素

第１１回 (1961, 8/29-8/31)　信州大　約 60 名
(1) 竹内　勝（東大）：Lie 群，対称空間および Diagrams
(2) 静間良次（立命館大）：Morse の理論について
(3) 松永弘道（九大）：Unitary 群の非安定 homotopy 群について
(4) 伊勢幹夫（阪大）：Bott-Samelson の理論 I
(5) 四方義啓（阪市大）：Bott-Samelson の理論 II
(6) 荒木捷朗（九大）：Bott の periodicity
(7) 横田一郎（阪市大）：Bott の周期性の位相的証明

第１２回 (1962, 9/5-9/7)　金沢大　約 160 名（位相幾何学，微分幾何学，解析多様体合同シンポジウム）
(1) 戸田　宏（京大）：Real projective space の位相とその応用
(2) 斎藤喜宥（京大）：Differentiable manifold についての H.Whitney の仕事
(3) 足立正久（名大）：多様体の immersion について
(4) 栗田　稔（名大）：Kähler 多様体の解析写像
(5) 佐々木重夫（東北大）：接触変換に関連した二つの問題
(6) 茂木　勇（教育大）：Foliated manifold について
(7) 岩橋亮輔（名市大）：連接的解析層の順像と複素構造の規制空間
(8) 梶原譲二（金沢大）：領域の不正則量について
(9) 浅見健夫（阪大）：一般化された convexity について

第１３回 (1963, 8/27-8/29)　青森県浅虫中学校　約 100 名
(1) 三村　護（京大）：On iterated suspension
(2) 松川リヱ子（日本女子大）：多様体の分類
(3) 小林貞一（東京教育大）：実射影空間のユークリッド空間への imbedding について

(4) 安藤　豊（名大）：複体のユークリッド空間への imbedding について
(5) 石川暢洋（福岡学芸大）：Differential Hopf algebra について
(6) 工藤慶子（早大）：Smoothing problem

第１４回 (1964, 10/13-10/15)　山口大　約 90 名
(1) 戸田　宏（京大）：ホモトピー論の現状と問題点
(2) 荒木捷朗（阪市大）：K-理論の現状と問題点
(3) 足立正久（名大）：Differential topology の現状と問題点
(4) 小林貞一（京大）：多様体の埋めこみとはめこみ
(5) 野口　広（早大）：Combinatorial topology の過去，現在と？

第１５回 (1965, 7/20-7/22)　北大　約 60 名
(1) 野村泰敏（名工大）：Homotopy equivalences の群について
(2) 渡部　剛（新潟大）：Bundle space の immbedding と immersion，その応用
(3) 児玉之宏（東京教育大）：General topology の最近の結果について
(4) 竹内　勝（東大），志賀浩二（東工大）：Atiyah-Singer の理論
(5) 可知偉行（名大），上部恒和（京大）：Mod q cohomology theory における multiplication について

第１６回 (1966, 7/18-7/20)　静岡県御殿場市東山荘　約 100 名
(1) 四方義啓：Lipschitz manifolds について
(2) 渡部　剛：4-dim manifolds の埋め込み
(3) 鈴木治夫：KO-theory での characteristic classes
(4) 笹尾靖也：Homotopy type of certain smooth manifolds
(5) 小林一章：Hauptvermutung をめぐって
(6) 可知偉行：例外 Lie 群のホモトピー群
(7) 垣内伸彦：Microbundles のオイラー類と応用
(8) 上部恒和：レンズ空間とその応用
(9) 内田伏一：レンズ空間の immersion
(10) 小林貞一：レンズ空間の immersion

第１７回 (1967, 7/18-7/20)　新潟県妙高々原町簡易保険保養センター　約 120 名
(1) F. Peterson（M.I.T.）：Sullivan's Proof of the Hauptvermutung for simply connected manifold
(2) 鎌田正良（阪市大）：Weakly complex bordism
(3) 秋葉忠利（東大）：$\pi_i(PL_2)$ について
(4) 佐藤　肇（東大）：Diff$(S^p \times S^q)$ etc.
(5) 白岩謙一（名大）：多様体上のベクトル場
(6) 末松熙子（岐阜大）：Novikov-Browder の理論
(7) 鈴木晋一（上智大）：On 2-spheres in 4-manifolds
(8) 小林一章（神戸大）：A construction of a transverse k-plane field
(9) 加藤十吉（都立大）：Higher dimensional knots について
(10) 柳川高明（神戸大）：2-knot の 2nd homotopy group について

第１８回 (1968, 10/28-10/30)　熊本大　約 100 名
(1) 白岩謙一（名大）：特集 '力学系' I
(2) 池上宣弘（神戸大）：特集 '力学系' II
(3) 四方義啓（名大）：特集 '力学系' III
(4) 荒木捷朗（阪市大）：Differential Hopf algebra
(5) 土屋昭博（京大）：BSF の cohomology
(6) 福田征子（東工大）：Immersed knot cobordism and immersion

(7) 野口　広（早大）：PL-submanifolds with codimension 2

第１９回 (1969, 7/23-7/25)　群馬県婦人青年センター　約 130 名

(1) 島田信夫（京大）：Categorical homology theory
(2) 石川暢洋（九大）：Multiplicative structure in cohomology theories with coefficient maps
(3) 松田智充（信州大）：A relative form of equivariant K-theory
(4) 松本堯生（東大）：Equivariant K-theory の representation space
(5) 松本幸夫（東大）：Hauptvermutung for $\pi_1 = \mathbb{Z}$
(6) 一楽重雄（東大）：Abstract homotopy neighbourhoods and Hauptvermutung
(7) 池田裕司（上智大）：Acyclic fake surface と 3-manifolds
(8) 松江広文（東大）：Free differentiable action on S^7
(9) 鈴木晋一（神戸大）：4 次元の knot theory

第２０回 (1970, 7/28-7/30)　信州大　約 150 名

(1) 川久保勝夫（阪大）：Surgery of compact manifold
(2) 松本幸夫（東大）：Wall の surgery について
(3) 岡部恒治（東大）：Kirby の結果について
(4) 一楽重雄（阪大）：Low dimensional handle body theory
(5) 三村　護（京大）：On p-equivalence in the sense of Serre
(6) 土屋昭博（名大）：Iterated loop space の homology operation
(7) 内田伏一（阪大）：Immersion および Differentiable action の Cobordism 理論による考察

第２１回 (1971, 7/20-7/22)　北大　約 170 名

(1) 加藤十吉（都立大）：代数的集合の組合せ位相幾何学 (Milnor-Plücker の公式について)
(2) 戸田　宏（京大）：ホモトピー論とその周辺
(3) 四方義啓（名大）：Foliation の理論における，ある代数的手法について
(4) 石本浩康（金沢大）：Representing Handlebodies by Plumbing and Surgeries
(5) 松本幸夫（東大）：Knot Cobordism と Codimension 2 の幾何学問題
(6) 福原真二（東大）：Exotic PL-homeomorphism とその応用
(7) 倉田雅弘（北大）：Immersions of topological manifolds
(8) 池上宣弘（名大）：多様体上の Vinograd の定理について
(9) 大和一夫（名大）：Foliated structure of codimension one
(10) 三村　護，西田吾郎，戸田　宏（京大）：On the classification problem of H-space of rank 2
(11) 森杉　馨（京大）：Brown-Peterson spectrum and stable homotopy group of sphere
(12) 越川浩明（北大）：$B(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p)$ の Steenrod 表現について
(13) 安藤良文（北大）：Oriented cobordism と oriented homotopy type に関する invariant について
(14) 阿部孝順，渡部　剛（新潟大）：Stiefel manifold に推移的に作用するリー群
(15) 松江広文（東大）：Homotopy spheres 上の $\mathbb{Z}_r$-action について

1972 年，1973 年は多様体国際会議のため開催せず.

第２２回 (1974, 7/11-7/13)　沖縄県立教育研修センター

(1) 福井和彦（京産大）・宇敷重広（京大）：FDiff$(S^3, \mathcal{F}_R)$ のホモトピー型について
(2) 渡辺　正（東京教育大）：Shape の理論
(3) 島田信夫（京大）：代数的 K-群（Quillen の定義について）
(4) 田中　昇（京大）・成木勇夫（京大）：複素超曲面の特異点について
(5) 福田拓生（千葉大）：多項式写像の位相型について
(6) 大和健二（阪大）：0 でない特性類をもつ葉層構造の例

第２３回 (1975, 7/17-7/19)　　宮城教育大

(1) 河内明夫（阪市大）：On $\tilde{H}$-cobordism between 3 dimensional homology handles
(2) 岡　睦雄（東大）：On the non-abelian fundamental group of the complement of an algebraic curve in $\mathbb{P}^2$
(3) Lê Dũng Tráng (Ecole Polytechnique)：Topology of stable mappings
(4) 南　春男（阪市大）：対称空間の K 群について
(5) 河野　明（京大）：例外 Lie 群の Hopf algebra structure について
(6) 佐藤　肇（東北大）：2 次の特性類と幾何構造
(7) 川久保勝夫（阪大）：同変ギシン写像と同変うめこみ
(8) 内田伏一（阪大）：Cohomology 射影空間上のコンパクト変換群について

第２４回 (1976, 7/19-7/21)　信州大

(1) 川崎徹郎（東大）：解析的な Lefschetz の不動点公式とその応用
(2) 松本堯生（京大）：ホモロジー多様体と位相多様体
(3) 小田信行（九大）：球面のホモトピー群の 2-成分における非安定周期族とその応用
(4) 工藤達二（九大）：ホモトピー公理とその効用
(5) 島田信夫（京大）・柳田伸顕（東工大）：Multiplications in the Bass-Sullivan bordism theory
(6) 砂田利一（東大）：Fundamental group of a family of certain holomorphic curves
(7) 足立正久（京大）：開多様体上の複素構造
(8) 麻生　透（広島大）：連結次元閉多様体上の S^3-作用の分類
(9) 倉田雅弘（北大）：Hartman's theorem for hyperbolic sets

第２５回 (1977, 7/19-7/21)　島根大

(1) 西川青季（東大）：葉層構造の特性類について
(2) 森田茂之（阪市大）：カルタン接続と foliation の特性類
(3) 福井和彦（京産大）：余次元 1 の 3 次元葉層多様体のコボルディズム
(4) 小野　仁（静岡大）：Fine shape theory
(5) 児玉之宏（筑波大）：Pointed FANR
(6) 川久保勝夫（阪大）：G-homotopy invariance of G-fiber homotopy types of stable tangent sphere bundles
(7) 西田吾郎（京大）：Equivariant J-homomorphism について
(8) James Lin (U.C.L.)：有限 H-空間について
(9) 桜井　稔（京大）：Adams-Novikov spectral sequence の計算
(10) 荒木捷朗（阪市大）：Coefficients of MR-theory
(11) 中川洋子（阪府大）：多変数アレキサンダー多項式
(12) 戸川美郎（東京理大）：C^1-diffeomorphisms の Centralizer

第２６回 (1978, 7/18-7/20)　　新潟大

(1) 土屋信雄（東大）：余次元 1 の葉層構造の growth について
(2) 坪井　俊（東大）：Foliated 3-manifolds with trivial F-subgroups
(3) 松元重則（日大）：Simple arc で結べない Morse-Smale 微分同相について
(4) 加藤昭男（大阪教育大）：Real compactification について
(5) 寺沢　順（ニューヨーク州立大）：Δ-space について
(6) 大川哲介（広島大）：4 次元多様体における $\pi_2(M^4)$ の元の separating について
(7) 押切源一（東北大）：$\mathcal{F}\Omega_n(1) \to \Omega_n(BP_1)$ について
(8) 中村　治（高知大）：Matric Massey product
(9) 島川和久（京大）：Categorical delooping
(10) 内田伏一（阪大）：$SL(n, \mathbb{R})$-action について
(11) 鈴木晋一（神戸大）：閉曲面の写像類群
(12) Birman（Columbia Univ.）：Special Heegaard splittings

第２７回 (1979, 7/18-7/21)　北大　約 150 名

(1) 河野　明（京大）：Bspin の infinite loop structure の一意性
(2) 入江幸右衛門（阪市大）：τ-cohomotopy group について
(3) 松岡　隆（阪大）：S^1-同変作用素の分岐点
(4) 福井和彦（京産大）：Diff$^\infty(\mathbb{R}^n, 0)$ とその部分群のホモロジー
(5) J. Dupont (Aarhus Univ.)：Algebra of polyhedra and homology of flag complexes
(6) 水谷忠良（埼玉大）：Compact な葉にしかホロノミーを持たない余次元１の葉層の GV 特性類
(7) 古池時日児（京大）：曲面上の力学系
(8) T.C. Kuo (Univ. of Sydney)：A classification of real singularities
(9) 加藤十吉（東大）：Geometrical methods in topology
(10) 永瀬輝男：On the signature of involution and links
(11) 寺田俊司（横浜国大）：Čech compact 化の剰余空間について
(12) 加藤久男（筑波大）：Shape 理論における pseudo-isomorphism について
(13) 村杉邦男 (Univ. of Tronto)：Abelian coverings of link manifolds

第２８回 (1980, 7/21-7/24)　茨城大　約 200 名

(1) 野倉嗣紀（愛媛大）：Ultrafilter の積空間への埋めこみ
(2) 矢島幸信（神奈川大）：位相ゲームと積空間について
(3) 郡山　彬（東海大）：Expansiveness and entropy-expansiveness on compact manifolds
(4) 落合豊行（阪大）：Heegaard diagrams of 3-manifolds
(5) 矢野公一（東大）：Topological entropy について
(6) 河内明夫（阪市大）：ロッホリン不変量の消滅
(7) 上　正明（東大）：F^4 多様体と cell-like resolution
(8) 柴田勝征（埼玉大）：球面上のベクトル場のリー環のコホモロジー
(9) 服部晶夫（東大）：コンパクト変換群に関するいくつかの話題（対称度を中心として）
(10) F.D. Peterson (M.I.T.)：Immersions of manifolds in Euclidean spaces
(11) 吉田敏男（広島大）：Wu 類とその応用について
(12) 角谷信一郎（阪大）：On pseudofree S^1-actions on homotopy $(4m+1)$-spheres
(13) 坪井堅二（京大）：η-不変量と共形はめこみ
(14) 藤井一幸（九大）：K 群の分類空間のバナッハ代数的考察

第２９回 (1981, 7/20-7/23)　高知大　約 180 名

(1) 永見啓応（愛媛大）：General topology 瞥見
(2) 澤下教親（徳島大）：自己ホモトピー同値写像の群について
(3) 三波篤郎（北大）：安定性予想について
(4) 稲葉尚志（千葉大）：Generalized Reeb stability の反例について
(5) 渡部　剛（新潟大）：コンパクト群の作用と aspherical 多様体への写像
(6) 円山憲子（津田塾大）：Knots, links and low dimensional manifolds
(7) J. Hubbuck (Aberdeen U.K.)：Finite dimensional H-spaces
(8) 酒井克郎（筑波大）：写像空間について
(9) 浅野考平（関西学院大）：One-sided Heegaard splittings and involutions of lens space
(10) 西森敏之（東北大）：Transverse foliation の存在問題

第３０回 (1982, 7/20-7/22)　山梨大　約 280 名

(1) 寺坂英孝：古典を読む ― Gauss とトポロジー ―
(2) 小松醇郎：昭和初期までのトポロジーの話
(3) 白岩謙一（名大）：力学系の発展
(4) 松岡　隆（阪大）：周期的常微分方程式の周期解の個数について
(5) J. Dupont (Aarhus Univ.)：Scissors congruence and homology of Lie groups
(6) 戸田　宏（京大）：ホモトピー論の発展

(7) 河野　明（京大）：群の表現論と同変 K-理論
(8) 泉屋周一（奈良女大）：C^∞-写像とその特異性－ Codimensions, Unfoldings and Stability －
(9) 荒木捷朗（阪市大）：一般コホモロジーの発展
(10) 児玉之宏（筑波大）：General topology における問題点
(11) 田村一郎（東大）：微分位相幾何学におけるある展望（大域 Knot 理論について）
(12) 松元重則（日大）：Bifurcation of periodic points of maps of the interval
(13) 本間龍雄（東工大）：低次元トポロジーの発展
(14) 作間　誠（阪市大）：Covering spaces of links

第３１回 (1983, 7/19-7/21)　金沢大　約 220 名

(1) 玉野研一（筑波大）：層空間論 －局所有限性から閉包保存性への推移－
(2) 加藤十吉（九大）：Uniformizations of orbifolds
(3) 青木統夫（都立大）：The existence of expansive maps in group spaces
(4) 根上生也（東工大），　沖田一雄（学習院大）：Recognizable 3-bridge link types and genus 2 Heegaard splitting classes
(5) 丸山研一（九大）：Self H-maps の周辺
(6) 小山　晃（大阪教育大）：連続体の可縮性について
(7) 西田吾郎（京大）：同変安定ホモトピー論
(8) Ted Petrie (Rutgers Univ.)：A survey of Smith equivalent representations
(9) 佐藤篤之（東大）：全葉層に昇格しない横断葉層
(10) 市川文男（都立大）：ベクトル場の特異点の周辺
(11) 神島芳宣（北大）：On the fundamental groups of closed aspherical manifolds and related topics
(12) 小島定吉（都立大）：Symmetries on 3-manifolds
(13) 樹下真一 (Florida State Univ.)：Elementary ideals in knot theory

第３２回 (1984, 7/17-7/19)　山形大　208 名

(1) 吉田朋好（岡山大）：３次元双曲型多様体の η-不変量と twisted index
(2) 志賀博雄（琉球大）手塚康誠（東工大）：Fiber が正の Euler 標数をもつ等質空間の fibration と Jacobian
(3) 中居　功（京大）：Involutive な写像の位相構造：Projective Curve の Web 幾何，位相不安定性定理
(4) 小林　毅（阪大）：曲面上の同相写像の定める link と位相的エントロピー
(5) 岡　七郎（九大）：球面の安定ホモトピー群，最近の 10 年
(6) 南　範彦（広島大）：On Evens type theorems
(7) 加藤久男（筑波大）：Structure of hyperspaces of continua
(8) 二木昭人（千葉大）：Invariant polynomials characteristic to compact complex manifolds and compact group actions
(9) 森田茂之（東大）：A survey on surface diffeomorphisms
(10) 鈴木康正 (M.S.R.I.，東大)：３次元多様体上の幾何学的構造の存在について (W.P. Thurston の結果を中心に)
(11) 枡田幹也（東大）：G surgery 理論の応用について

第３３回 (1985, 7/18-7/20)　信州大

(1) 森杉　馨（和歌山大）：James 数とその周辺について
(2) 丸山研一（九大）：岡七郎氏の業績について
(3) 金信泰造（九大）：Infinitely Many Knots with the Same Polynomial invariants
(4) 酒井克郎（筑波大）：On triangulated infinite-dimensional manifolds
(5) 山崎正之（城西大）：Controlled surgery theory
(6) 川久保勝夫（阪大）：Stable and unstable equivalences of G-manifolds
(7) 坪井　俊（東大）：C^1 級葉層構造の存在について

(8) 古田幹雄（東大）：Orbifold 上の self-dual connection
(9) 石川剛郎（奈良女大）：実有理関数の臨界点と Hilbert 第 16 問題

第３４回 (1986, 7/17-7/19)　福井大　約 200 名
(1) 松元重則（日大）：曲面群表現の柔い剛体性
(2) 入江幸右衛門（京大）：On the rank of the homotopy groups of a space
(3) 垣水　修（広島大）：Ends and cores of non-compact 3-manifolds
(4) 矢ヶ崎達彦（筑波大）：写像による次元とＡＮＲの保存について
(5) 土屋昭博（名大）：Virasoro 代数と Braid 群の Monodromy 表現
(6) 長崎生光（阪大）：同じ次元関数をもつホモトピー表現
(7) 河部裕子（東工大）：無限接触している微分同相写像の共役性について
(8) 河内明夫（阪市大）：The imbedding problem of 3-manifolds into 4-manifolds
(9) 藤井一幸（九大）：Topology, Geometry and Non-linear Sigma Model
(10) 森吉仁志（東大）：正のスカラー曲率と高次 $\hat{A}$-種数

第３５回 (1987, 7/15-7/17)　琉球大
(1) 長瀬正義（東工大）：L^2-Cohomology of singular varieties
(2) 佐伯　修（東大）：S^5 内のホモロジー３球面と３変数複素多項式の特異点
(3) 佐藤　肇（名大）：Lie の接触幾何学と Lie 多様体
(4) R. Wong (UC Santa Barbara)：Homeomorphism space of compact manifolds, an infinite dimensional viewpoint
(5) 森本雅治（岡山大）：One fixed point actions on spheres
(6) 深谷賢治（東大）：Riemann 多様体の極限
(7) 宍倉光広（京大）：Riemann 球面上の複素力学系について
(8) 吉田朋好（岡山大）：Hyperbolic 3-manifolds の deformation
(9) 手塚康誠（琉球大）：等質空間のコホモロジー環の自己同型群
(10) 村上　斉（阪市大）：A formula for the two variable link polynomial

第３６回 (1988, 7/18-7/20)　静岡大
(1) 岡　睦雄（東工大）：On the stratification of good hypersurfaces
(2) 吉田正章 (九大)：複素射影平面の九頂点単体分割
(3) 小野　薫 (東北大)：Symplectic 多様体上の群作用について
(4) 河野　明（京大）：Formal group と elliptic cohomology
(5) De Witt Sumners (Florida 州立大)：Applications of Knot theory in chemistry and molecular biology
(6) 伊藤光弘（筑波大）：モノポールの幾何学
(7) 大田春外（静岡大）：連続関数の群と非アルキメデス バナッハ空間
(8) 小島定吉（東工大）：Nonorientable 4-manifold の homotopy 不変量

第３７回 (1989, 7/19-7/22)　福島大
(1) 稲葉尚志（千葉大）：余次元１の (G,X)-葉層構造
(2) 服部晶夫（東大）：シンプレクティック構造と変換群
(3) 平出耕一（筑波大）：拡大的写像の力学系
(4) 渡辺　正（山口大）：Approximate Shape と応用について
(5) 泉屋周一（北大）：１階偏微分方程式系と特異点
(6) 牛瀧文宏（阪大）：球面上の free action について
(7) 河澄響矢（東大）：S^2 上の電荷の配置
(8) 小林　毅（阪大）：縫い目付多様体の理論と unknotting 作用について
(9) 吉永悦男（横浜国大）：実特異点の modified analytic equivalence classes
(10) 逸見　豊（高知大）：Hopf 空間に関連したある種の構造について
(11) 大原　淳（東大）：結び目のエネルギー汎関数の族

(12) 高倉　樹（東大）：Representation Spaces of Seifert Homology Spheres
(13) 竹内義啓（愛知教育大）：On 3-orbifolds, links and tangles
(14) 岩瀬則夫（岡山大）：ホモトピー結合的ホップ空間

1990 年は ICM のため開催せず.

第３８回 (1991, 7/18-7/20)　熊本大

(1) 加藤昭男（防衛大）：Topology via set theory
(2) 小林一章（東京女大）：Standard Spatial Graph
(3) 河野俊丈（九大）：Orbifold models and 3-manifold invariants
(4) 辻井正人（京大）：Margulis-Pesin のエントロピー等式をめぐって
(5) 枡田幹也（阪市大）：同変 Serre 問題と線形性問題
(6) 皆川宏之（北大）：Piecewise linear homeomorphisms of a circle and examples of exceptional homomorphisms
(7) 松本幸夫（東大）：リーマン面の退化：非アーベルモノドロミーと一般商空間
(8) 谷山公規（早大）：結び目の半順序とその応用
(9) 大場　清（東大）：安定曲線のモジュライ空間におけるサイクルの構成
(10) 田辺理正（京大）：有限群の分類空間の Morava K 理論について
(11) 三松佳彦（中央大）：葉層構造の amenability と横断オイラー類
(12) 鎌田聖一（阪市大）：２次元ブレイドについて
(13) 宮本洋介（佐賀大）：双曲的多様体とその境界の体積の関係

第３９回 (1992, 7/21-7/24)　岩手大

(1) 服部泰直（山口大）：位相的性質を導く距離関数について
(2) 江頭信二（東大）：葉層構造の expansion growth
(3) 福田拓生（東工大）：Milnor-number-link invariant for Real Singularities
(4) F. Sergeraert（グルノーブル大）：Toward effective algebraic topology
(5) 大本　亨（東工大）：Topology of singular Lagrange varieties
(6) 三波篤郎（北大）：最も単純な非線形の微分同相写像：Hénon map をめぐって
(7) 山崎正之（城西大）：『幾何的』な代数的トポロジー
(8) 吉田朋好（都立大）：$M^3 \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンと pseudo-holomorphic curve
(9) 上　正明（京大）：楕円曲面上の微分構造と関連話題
(10) 張替俊夫（関学大）：空間内のグラフの分岐被覆
(11) 島川和久（岡山大）：代数的 K 理論と変換群
(12) 鳥羽智佳子（東京女大）：The Topological Symmetry Group of Special Graphs
(13) 河内明夫（阪市大）：Topological imitations of 3-manifolds and the quantum invariant
(14) 森吉仁志（東工大）：K 理論と巡回コホモロジーのトポロジーへの応用について
(15) 林　忠一郎（東大）：(続) 超単純結び目のタングル分解について
(16) 宮崎　桂（津田塾大）：ファイバー結び目のリボン同境
(17) 森本雅治（岡山大）：配置写像を伴う K－理論とその応用

第４０回 (1993, 7/20-7/23)　信州大

(1) 山田耕三（大阪教育大）：Topological structures of free topological groups
(2) 河野　進（阪大）：Stable homotopy types of stunted lens spaces mod 4
(3) 河澄響矢（東大）：Riemann 面の moduli 空間と複素解析的 Gel'fand Fuks cohomology
(4) 玉木　大（信州大）：On the convergence problem of Cobar-type spectral sequences
(5) 小池敏司（兵庫教育大）：実代数的集合族の modified Nash triviality について
(6) 角　俊雄（福岡大）：ファイブレーションと有限性障害
(7) 松元重則（日大）：３次元多様体上の流れ
(8) 坪井　俊（東大）：葉層の有理性，非有理性
(9) 山口耕平（電通大）：Topology of spaces of rational functions and configuration spaces

(10) 合田　洋（阪大）：結び目の最小種数ザイフェルト膜に付随する finite depth foliation と Heegaard 分解
(11) 森元勘治（拓殖大）：結び目のトンネル数と連結和
(12) 藤井道彦（横浜市大）：全測地的境界をもつ双曲的３次元多様体とその構造変形について
(13) 村上　斉（阪市大）：Quantum SU(2)-invariants dominate Casson's SU(2)-invariant あるいは，Quantum SO(3)-invariants dominate Walker's SU(2)-invariant?
(14) 坂内悦子（九大）：Association scheme, Spin model, invariant of links
(15) 相馬輝彦（東京電機大）：On finitely generated subgroups of 3-manifold groups
(16) 和田昌昭（奈良女大）：結び目群の表現

第４１回 (1994, 7/19-7/22)　愛媛大

(1) 秋田利之（阪大）：離散群と G-空間の有理 Euler 標数
(2) 長瀬昭子（大阪経済大）：Algebraic G vector bundle over adjoint representation
(3) 小島定吉（東工大）：３次元多様体の幾何化の現状
(4) 神島芳宣（熊本大）：Global rigidity of manifolds with symmetry
(5) 田村　誠（阪大）：３次元多様体の単体分割の average edge order について
(6) 後藤達生（埼玉大）：ϵ-translations and dimension
(7) 酒井政美（神奈川大）：各点収束位相をもつ関数空間の位相的性質について
(8) 大山淑之（名工大）：Vassiliev 不変量と knot diagrams
(9) 河野俊丈（東大）：Vassiliev invariants, graph complex and differential forms on the space of knots
(10) 太田啓史（東大）：An integral lift of the Roch1in invariant and gauge theory
(11) 大槻知忠（東大）：HOMFLY polynomial via an invariant of colored planar graphs
(12) 宮沢康行（山口大）：The Jones polynomial of an unknotting number one knot
(13) Martin Guest (Univ. of Rochester, 東工大)：Applications of labelled configuration spaces
(14) 竹田雄一郎（都立大）：同変代数的Ｋ理論の局所化定理とその応用
(15) 福井敏純（名工大）：実代数曲線のトポロジーとニュートン図形
(16) 鎌田聖一（阪市大）：Survey on 2-dimensional braids
(17) 関根光弘（広市大）：Homologically antipodal locally linear involutions on 4-manifolds

第４２回 (1995, 7/24-7/27)　弘前大

(1) 柏原拓志（京大）：On generalized cohomology of infinite loop spaces
(2) 石黒賢士（福岡大）：コンパクト Lie 群の分類空間と有限ループ空間
(3) 皆川宏之（北大）：S^1 のＰＬ同相群について
(4) 辻井正人（東工大）：一次元力学系における単調性について
(5) 中居　功（北大）：Moduli of first order PDE and web geometry of their solutions
(6) 藤井敏純（阪市大）：結び目多項式の実現問題について
(7) 北野晃朗（東工大）：３次元多様体および結び目の Reidemeister torsion について
(8) 石川剛郎（北大）：シンプレクティック幾何における特異点論
(9) 太田啓史（名大）：Monopole equation on 4-manifold
(10) 古田幹雄（東大）：11/8 予想とモノポール方程式
(11) 加藤　毅（京大）：Asymptotic method in higher signature problem
(12) Alexandre D. Mednykh (Novosibirsk State Univ.，東工大)：The geometry and topology of the Fibonacci manifolds
(13) 家本宣幸（大分大）：積空間の正規性とその周辺
(14) 川上智博（大阪府高専）：コンパクト $C^\infty G$ 多様体の Nash G 多様体構造について
(15) 吉田敏男（広島大）：$H^*(BO;\mathbb{Z}_2)$ の自己準同形写像と普遍Ｗｕ類
(16) 酒井克郎（筑波大）：無限次元多様体における帰納的極限の位相と距離位相
(17) 三好重明（駒沢大）：２、３次元多様体上の葉層 S^1 束について

第４３回 (1996, 7/16-7/19)　鳥取大

(1) 内田吉昭（山形大）：Unknotting operations
(2) 鳥巣伊知郎（阪大）：The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one
(3) 谷川晴美（名大）：Hyperbolic geometry, harmonic maps and $\mathbb{C}P^1$-structures on surfaces
(4) 神山靖彦（琉球大）：Topology of equilateral polygon linkages
(5) 小笠英志（東大）：On the intersection of spheres in a sphere
(6) 岩本　豊（筑波大）：メンガー多様体の座標構造と位相変換群
(7) 森下和彦（足利工大）：On linear topological classification of certain function spaces
(8) 大崎隆夫（阪大）：Digital Topology について
(9) 下村克巳（鳥取大）：Chromatic の視点からみたホモトピー群について
(10) 塚田孝治（北大）：網状ラグランジアン写像とその安定性について
(11) 神田雄高（北大）：３次元接触多様体の Topology について
(12) 深谷賢治（京大）：アーノルド予想
(13) 塩田昌弘（名大）：Nash 多様体
(14) 吉田朋好（名大）：rank 2 のテータ関数の構成

第４４回 (1997, 7/28-7/31)　阪市大

(1) 合田　洋（神戸大）：３次元多様体上の essential lamination とその応用について
(2) 大場　清（お茶の水女大）：井桁崩しによるリーマン面の構成について（橋本義武（阪市大）との共同研究）
(3) 足助太郎（広島大）：余次元の高い葉層の特性類
(4) 島田伊知朗（北大）：平面曲線の補集合の基本群について
(5) 葉広和夫（東大）：Claspers and the Vassiliev invariants
(6) 加藤久男（筑波大）：カオス的同相写像とそれを許容する空間について
(7) 山田耕三（静岡大）：Free topological groups and the inductive limit topology
(8) Nguyen Viet Dung (Hanoi Institute of Mathematics)：Braid monodromy of arrangements of complex lines
(9) 大本　亨（鹿児島大）：Generic 写像の次数１ Vassiliev 型不変量
(10) 松本三郎（東工大）：３次元多様体内の圧縮不能な正則曲面
(11) 佃　修一（京大）：ゲージ群とその分類空間のホモトピー型
(12) 木村　孝（埼玉大）：無限次元とコンパクト化
(13) 志摩亜希子（東大）：曲面結び目の３次元空間への射影について
(14) 金信泰造（阪市大）：Vassiliev invariants of knots

第４５回 (1998, 7/22-7/25)　山口大

(1) 泉屋周一（北大）：特異点論と古典的微分幾何学
(2) 平澤美可三（阪大）：Construction of essential laminations in link complements using branched surfaces
(3) 佐伯　修（広島大）：微分可能写像の特異点の消去問題について
(4) 小沢哲也（名城大）：平面曲線のトポロジー
(5) 竹田雄一郎（都立大）：Milnor 予想について（Voevodsky の仕事の紹介）
(6) 知念直紹（筑波大）：Maps from $(n+2)$-manifolds whose fibers have the homotopy type of closed n-manifolds
(7) 松本　眞（慶応大）：写像類群のアルティン群による簡明な表示
(8) 村上　斉（早大）：３次元多様体の不変量の近況
(9) 赤穂まなぶ（京大）：Seiberg-Witten 不変量を使った絡み目の種数の評価について
(10) Jerzy Dydak (Univ. of Tennessee)：Epimorphisms and monomorphisms in proper homotopy
(11) 野田健夫（東大）：C^2 級の不安定葉層および安定葉層を持つ射影的アノソフ流について
(12) 秋田利之（福岡大）：Torelli 群と Torelli 空間のホモロジー

(13) 三松佳彦（中央大）：Projective Anosov flows (= bi-contact structures) on 3-manifolds
(14) 山下　靖（奈良女大）：重みつき配置空間の幾何

第４６回 (1999, 7/26-7/29)　北大

(1) 枡田幹也（阪市大）：トポロジーから見たトーリック多様体論
(2) 河本裕介（広島大）：ループ空間の高次ホモトピー可換性について
(3) Stephan Wilson (Johns Hopkins 大)：The impossible made easy: Learning to calculate with generalized cohomology
(4) 鳥居　猛（京大）：Topological realization of level structures over Johnson-Wilson theory
(5) Victor Goruynov (Liverpool 大)：Enumeration of meromorphic functions on the line
(6) Jozef Przytycki (George Washington 大)：The Kauffman bracket skein algebra of a surface times the interval has no zero divisors
(7) Andrew Kricker（東工大）：Calculations of Kontsevich's universal finite type invariant of knots via surgery formulae and Habiro's clasper moves
(8) 安原　晃（学芸大）：Local moves on spatial graphs（谷山公規氏との共同研究）
(9) 佐藤　進（阪市大）：Projections in 2-knot theory
(10) 江田勝哉（早大）：Hawaiian earring の基本群について（１次元ペアノ空間の基本群）
(11) 笠川良司（東工大）：曲面の写像類群と指数コサイクルと ρ-不変量
(12) 寺嶋郁二（東大）：量子コホモロジーと共形場理論 (Quantum cohomology and conformal field theory)
(13) 足立二郎（阪大）：接分布と曲線の幾何学
(14) 西村尚史（横浜国大）：可微分写像芽の右左同値の判定法

第４７回 (2000, 7/24-7/27)　鹿児島大

(1) 坪井　俊（東大）：葉層の交叉について
(2) 山川あい子（国際基督教大）：一般アフィン群の余次元１作用について（土屋信雄（桐蔭横浜大）との共同研究）
(3) 広瀬　進（佐賀大）：Presentation of mapping class groups of surfaces
(4) 高沢光彦（東工大）：Computing invariants of a mapping class group of surface
(5) 横田佳之（九大）：On the volume conjecture for hyperbolic knots
(6) 小沢　誠（早大）：Tangle decompositions of knots and links
(7) 寺田敏司（横浜国大）：Topological lattices $C_p(X)$ and continuous lattice-homomorphisms
(8) 南　範彦（名工大）：Seiberg-Witten homotopy invariant の幾つかの応用
(9) 岩瀬則夫（九大）：ガネア予想とその反例
(10) 小池敏司（兵庫教育大）：実代数的特異点族の同程度特異性問題
(11) 小林真人（秋田大）：特異値集合から眺めた写像と多様体
(12) 望月拓郎（阪市大）：The theory of twisted deformations and some invariants given by moduli stacks
(13) 川村友美（東大）：On unknotting numbers and four-dimensional clasp numbers of links
(14) 福本善洋（東大）：ザイフェルトホモロジー３球面のホモロジーコボルディズム不変量（上正明（京大），古田幹雄（東大）との共同研究）

第４８回 (2001, 7/18-7/21)　秋田大

(1) 山本亮介（阪大）：Fiber surfaces and plumbing Hopf bands
(2) 今藤紀子（奈良女大）：3-dimensional drawing of Heegaard diagrams with 3-connected Whitehead graph
(3) 中村拓司（神戸大）：Positive diagrams of positive knots
(4) 倉蘭一二（広島大）：局所係数コボルディズム群と多様体論への応用
(5) 内田伏一（山形大）：非コンパクト半単純リイ群の球面への作用で，極大コンパクト部分群への制限作用が余次元１の軌道を持つものについて
(6) 志賀博雄（琉球大）：有理ホモトピー型のモジュライ問題

(7) 栗林勝彦（岡山理大）：加群微分子による Eilenberg-Moore スペクトル系列の解析（随伴バンドルのコホモロジカル分解について）
(8) 森吉仁志（慶応大）：解析的K理論と指数定理
(9) Lazlo Feher (Renyi Institute (Hungary math. Acad.))：Calculation of Thom polynomials
(10) 泉　修蔵（近大）：テイラー展開を決定する小さな集合
(11) 福井和彦（京産大）：同相群の構造について
(12) 目時伸哉（東大）：On the cohomology of Lie algebras of volume preserving formal vector fields
(13) 小山　晃（大阪教育大）：Compact ANR のコホモロジー次元について
(14) 入江幸右衛門（大阪女子大）：幽霊写像

第４９回 (2002, 7/24-7/27)　沖縄県青年会館

(1) 高橋雅朋（北大）：クレロー型方程式の分岐について
(2) 児玉大樹（東大）：ルジャンドリアンなベクトル場を持つ複素３次元接触多様体
(3) 森山哲裕（東大）：Mapping class groups and the configuration spaces of surfaces
(4) 平澤美可三（学習院大）：On fibered knots in a genus 2 Heegaard surface for the 3-sphere
(5) 新國　亮（東北大）：空間グラフの不変量と局所変形
(6) 五味清紀（東大）：Chern-Simons 理論と gerbe の幾何
(7) 村上　斉（東工大）：プロジェクト 2001～京に結集した低次元トポロジスト達～
(8) 佃　修一（琉球大）：ゲージ群のトポロジーについて
(9) 矢ヶ崎達彦（京都工芸繊維大）：多様体の同相群の無限次元位相多様体としての性質について
(10) 森　淳秀（阪大）：三次元接触構造・接触形式とオープン・ブック分解
(11) 浅岡正幸（徳島大）：２次元射影的アノソフ力学系の不変量とその応用
(12) 太田啓史（名大）：特異点と symplectic filling
(13) 荻原洋右（埼玉大）：ポアソン構造，葉層構造，ライプニッツ代数
(14) 浴本　憲（北大）：The Reeb component of a codimension-1 totally geodesic foliation of a Lorentzian 3-manifold

第５０回 (2003, 7/19-7/22)　松本市中央公民館

(1) 作間　誠（阪大）：Markoff triples, quasifuchsian groups, and 2-bridge knot groups
(2) 小野　薫（北大）：Symplectic Floer homology について
(3) 保坂哲也（宇都宮大）：Coxeter groups and their boundaries
(4) 泉屋周一（北大）：ルジャンドル特異点論と微分幾何学
(5) 松元重則（日大）：極小集合をもたない力学系
(6) 高瀬将道（横浜国大）：Haefliger 結び目の幾何公式
(7) 加藤十吉（九大）：平面幾何学における有向角の活用
(8) 丹下基生（京大）：Akbulut の knot 手術による微分同相写像について
(9) 井草　潔（Brandeis Univ）：Graph cohomology and its relationship to Miller-Morita-Mumford classes and higher Franz-Reidemeister torsion
(10) 服部晶夫（東大）：V-多様体の不変量
(11) 藤原耕二（東北大）：幾何の離散群への応用　－群の CAT(0) 次元－
(12) 戸田　宏（京大）：ホモトピー論の進展
(13) 吉田尚彦（東大）：点付きリーマン面上の平坦接続のモジュライの幾何学的量子化について
(14) 神島芳宣（都立大）：Geometry of flat manifolds； past 20 years

注．（１）第１回から第２１回までは「位相幾何学シンポジウム」，第２２回以降は「トポロジーシンポジウム」(または「全日本トポロジーシンポジウム」) と呼ばれています．

（２）以上の資料は，第１回から第５回までは「TOPOLOGY NEWS(NO.3 1978年4月)」から，第６回から第３２回までは雑誌「数学」にある記録から，第３３回以降は報告集からの抜粋です．大半の資料を提供して下さった山口大の小宮克弘氏に感謝致します．

（３）このファイルは

http://www.sci.osaka-cu.ac.jp/ hashimot/topsy2003.htm

に掲載してあります．誤りまたは詳しい情報が分かれば，お知らせ下さい．改訂版をそこに掲載していく予定です．