

第 49 回
トポロジーシンポジウム
講演集

2002 年 7 月
於 沖縄県青年会館

平成 14 年度科学研究費 基盤研究(A)
課題番号 12304003

第49回トポロジーシンポジウム

7月24日(水)

- 14:00-15:00 高橋 雅朋(北海道大学大学院理学研究科)
クレロー型方程式の分岐について
..... 1-10
- 15:20-16:20 児玉 大樹(東京大学大学院数理科学研究科)
ルジャンドリアンなベクトル場を持つ複素3次元接触多様体
..... 11-18

7月25日(木)

- 9:20-10:20 森山 哲裕(東京大学大学院数理科学研究科)
Mapping class groups and the configuration spaces of surfaces
..... 19-29
- 10:40-11:40 平澤美可三(学習院大学理学部)
On fibered knots in a genus 2 Heegaard surface for the 3-sphere
..... 31-37
- 13:10-14:10 新國 亮(東北大学大学院情報科学研究科)
空間グラフの不変量と局所変形
..... 39-48
- 14:30-15:30 五味 清紀(東京大学大学院数理科学研究科)
Chern-Simons 理論と gerbe の幾何
..... 49-56
- 15:50-16:50 村上 斉(東京工業大学大学院理工学研究科)
プロジェクト2001~京に結集した低次元トポロジスト達~
..... 57-60

7月26日(金)

- 9:20-10:20 佃 修一(琉球大学理学部)
ゲージ群のトポロジーについて
..... 61-66
- 10:40-11:40 矢ヶ崎達彦(京都工芸繊維大学工芸学部)
多様体の同相群の無限次元位相多様体としての性質について
..... 67-77
- 13:10-14:10 森 淳秀(大阪大学大学院理学研究科)
三次元接触構造・接触形式とオープン・ブック分解
..... 79-88
- 14:30-15:30 浅岡 正幸(徳島大学総合科学部)
2次元射影的アノソフ力学系の不変量とその応用
..... 89-97
- 15:50-16:50 太田 啓史(名古屋大学大学院多元数理科学研究科)
特異点と symplectic filling
..... 99-117

7月27日(土)

- 9:20-10:20 萩原 洋右(埼玉大学大学院理工学研究科)
ディラック構造とその拡張について
..... 119-129
- 10:40-11:40 浴本 憲(北海道大学大学院理学研究科)
The Reeb component of a codimension-1 totally geodesic
foliation of a Lorentzian 3-manifold
..... 131-140

クレロー型方程式の分岐について

北海道大学大学院理学研究科

高橋 雅朋¹

1 序

本講演では特異点論の応用として“クレロー型方程式の分岐²”について最新の研究成果を報告します。基本的な考え方として、ある種の1階常微分方程式を自然にルジャンドル部分多様体とみなし、ルジャンドル特異点論を応用することによって自然な同値関係の下で、分類するのが目的である。クレロー型方程式は自然な同値関係により、分類できることが分かっているので ([11]), 次の問題としてパラメーターに依存してクレロー型方程式を動かしたときどのように変化(分岐)するかを研究した成果を解説するのが本講演の内容である。

まずはじめになじみ深いと思われるクレロー方程式を考えてみる。クレロー方程式は特異解をもっていて、それが一般解の包絡線となっている方程式として導入される。具体的には

$$y = xy' + f(y')$$

(ただし $y' = dy/dx$) という形の微分方程式がクレロー方程式と呼ばれる。この方程式の一般解は任意定数 c に依存して $y = cx + f(c)$ の形をしている。さらに、その特異解はこの一般解のつくる直線族の包絡線となっている。実際、 $f(c) = c^3$ の場合を考えてみると、一般解は $y = cx + c^3$ でその包絡線は関係式 $y = cx + c^3, x + 3c^2 = 0$ から c を消去すればいいので、 $27y^2 + 4x^3 = 0$ となる。この様子を図に書くと図1のようになる。さらにこれと似た性質を持つ方程式として $y - (y')^2 = 0$ がある、この場合、一般解は $y = (x + c)^2/4$ であり、その特異解は一般解の包絡線 $y = 0$ である。この様子を図に書くと図2のようになる。

この2つの方程式は一般解がすべて微分可能であることと一般解の包絡線が特異解になっていることが共通の性質である。ここでは、特異解が存在しない場合も含めてこのような方程式をクレロー型方程式³ という。ここで、一般解という言葉を使ってるが厳密な定義ではない。ここでは、より厳

¹e-mail address: takahashi@math.sci.hokudai.ac.jp

²分岐の問題について研究している論文は例えば [3, 4] などがある。

³詳しい性質などは [7, 8, 9, 10, 11] を参照。

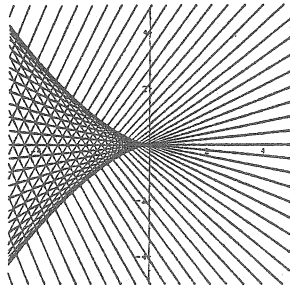


図 1

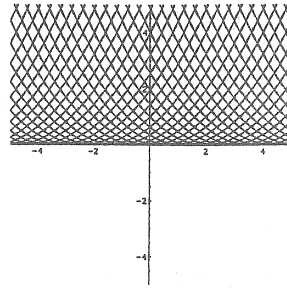


図 2

密な完全解という概念について解説する。その為にまず、解の概念を特異点を許容するものに拡張しておく。考える方程式は $F(x, y, y') = 0$ の形の常微分方程式である。この方程式の微分可能な解とは可微分関数 $y = f(x)$ で $F(x, f(x), f'(x)) = 0$ を満たすものである。ここでは、この解の概念を一般化として、幾何学的解というものを考える。方程式 $F(x, y, y') = 0$ の幾何学的解とは可微分曲線 $\gamma(s) = (x(s), y(s), p(s))$ で $\gamma'(s) \neq 0$ かつ $y'(s) = p(s)x'(s)$ を満たすものとする。

3次元空間の座標系を (x, y, p) とすると方程式は $F(x, y, p) = 0$ のことであると思える。さらに、 $\text{grad}F \neq 0$ を満たすとする。すると方程式は3次元空間内の滑らかな曲面 $S = \{(x, y, p) | F(x, y, p) = 0\}$ のことであると理解できる。しかし単純に3次元空間内の曲面とみなせるわけではなく、座標 p は関数の微分係数に対応している。それを微分形式の言葉でいうと $\theta = dy - p dx = 0$ という関係式を考えていることとなる。この関係式を接触構造と呼び、この微分形式を標準 1-形式という。このように考えると一階の微分方程式論とは接触幾何における曲面論といえる。したがって、幾何学的解はこの曲面 S 上の曲線で関係式 $dy - p dx = 0$ を満たすものである。接触幾何ではこのような曲線はルジャンドル部分多様体と呼ばれる。

例えば、クレローの方程式 $y = xy' + (y')^3$ をこの立場から考えてみると、この場合 $F(x, y, p) = y - xp - p^3$ であり、その幾何学的解は $(x, cx + c^3, c)$ (ただし、 c は任意の実数) と $(-3x^2, -2x^3, x)$ の2種類である。この場合、 $(x, cx + c^3, c)$ における x と c 両方を変数とみなすと3次元空間内の径数づけられた曲面 $\Gamma(x, s) = (x, sx + s^3, s)$ が考えられる。さらに、そのヤコビ行列は階数が2でこの曲面は方程式 $S = F^{-1}(0)$ に一致する。このように曲面が幾何学的解により敷き詰められる場合に完全積分可能という。

方程式 S の点 $z \in S$ における完全解とは可微分写像 $\Gamma : (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow \mathbb{R}^3$ で $\Gamma(0) = z$ かつそのヤコビ行列の階数は 2, さらに像が S の部分集合であり各 s を固定して得られる曲線がすべて S の幾何学的解になっているものとする.

言い換えると, 曲面 S の局所表示で一方の座標曲線が幾何学的解であるもののことである.

さらに, S が z 完全積分可能とは z における完全解が存在することとする.

曲面 $S = \{(x, y, p) \in PT^*\mathbb{R}^2 | F(x, y, p) = 0\}$ に対して, 方程式の判別集合を

$$D_F = \{(x, y) | \text{ある } p \in \mathbb{R} \text{ が存在して } F = F_p = 0\}$$

さらに

$$\Sigma_F = \{(x, y, p) | F = F_p = 0\}$$

とする. このとき Σ_F が方程式の特異解であるとは, Σ_F がルジャンドル部分多様体であることをいう. このとき D_F は解のグラフである.

2 クレロー型方程式

はじめに射影余接バンドル $PT^*\mathbb{R}^n$ について解説する. \mathbb{R}^n に対して, その余接バンドル $T^*\mathbb{R}^n$ からその零切断を取り除き, 0 でないスカラー倍を同一視してできる $2n + 1$ 次元多様体 $PT^*\mathbb{R}^n$ を \mathbb{R}^n の接触要素の作る多様体と呼ぶ. この多様体は自然に接触構造を持つ:

$c \in PT^*\mathbb{R}^n$ に対し, c は $\pi(c) \in \mathbb{R}^n$ における接触要素 $(T_{\pi(c)}^*\mathbb{R}^n - \{0\})$ の要素を 0 でないスカラー倍で同一視したもの, つまり $T_{\pi(c)}^*\mathbb{R}^n$ の余次元 1 の部分ベクトル空間) であるので, $K_c = \pi_*^{-1}(c)$ とおく. ここで, $\pi_* : T_c(PT^*\mathbb{R}^n) \rightarrow T_{\pi(c)}\mathbb{R}^n$ は微分写像である. この接触構造を標準的接触構造という.

(x_1, \dots, x_n) を \mathbb{R}^n の座標系とする. 対応する $T^*\mathbb{R}^n$ 上の座標系を

$$(x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$$

とする. すると, $PT^*\mathbb{R}^n$ 上の点は $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}P^{n-1}$ の点

$$(x_1, \dots, x_n, [\xi_1 : \dots : \xi_n])$$

で記述される. 例えば, $V = PT^*\mathbb{R}^n \cap \{\xi_n \neq 0\}$ では, $\xi_i/\xi_n = -p_i, 1 \leq i \leq n-1$ とおけば, $x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_{n-1}$ が局所座標系になる. このとき,

$$\alpha = dx_n - \sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i$$

とおけば, この局所座標近傍 V 上で $K = \{\alpha = 0\}$ と表される. 実際, $c \in V$ について, $v \in T_c(PT^*\mathbb{R}^n)$ をとると, $v \in K_c$ の条件は $\pi_* v$ が c の定める接触要素は $\sum_{i=1}^n \xi_i dx_i = 0$ すなわち, $-\sum_{i=1}^{n-1} p_i dx_i + dx_n = 0$ であり, これが, K_c を定めるからである.

さて前節より 1 階の微分方程式は曲面 $S = F^{-1}(0) \subset PT^*\mathbb{R}^2$ である. ここでは局所的に考えるので, はめ込み芽 (または, その像)

$$f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow PT^*\mathbb{R}^2$$

を, 1 階常微分方程式 (方程式) と呼ぶ.

f が完全積分可能であるとは, ある沈め込み芽 $\mu: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ があって $f^*\theta \wedge d\mu = 0$ を満たすことである. このとき, $f|_{\mu^{-1}(s)}$ は $(f|_{\mu^{-1}(s)})^*\theta = 0$ を満たしているので, ルジャンドルはめ込みである. よって前節の意味の完全解になっていることが分かる.

さらに, f がクレロー型方程式であるとは, ある沈め込み芽 $\mu: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ があって (μ, f) が完全積分可能であり, $\pi \circ f|_{\mu^{-1}(s)}$ が非特異であることである.

次のような発散図式を考える:

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{\mu} (\mathbb{R}^2, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^2, 0)$$

ただし, μ を沈め込みとする. 簡単に (μ, g) と書く.

(μ, g) が積分図式であるとは, ある方程式 $f: (\mathbb{R}^2, 0) \rightarrow PT^*\mathbb{R}^2$ があって, (μ, f) が完全積分可能な方程式で $\pi \circ f = g$ がなりたることと定義する.

ここで, 方程式と積分図式に対して同値関係を次のように自然に入れる. まずは方程式 f, f' が同値であることを図式

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{f} & (PT^*\mathbb{R}^2, z) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^2, \pi(z)) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \phi & & \downarrow \phi \\ (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{f'} & (PT^*\mathbb{R}^2, z') & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^2, \pi(z')) \end{array}$$

が可換であること, ここで ψ, ϕ は微分同相芽, $\hat{\phi}$ は ϕ のルジャンドルリフトである.

積分図式 $(\mu, g), (\mu', g')$ が (狭い意味で) 同値であることを図式

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{\mu} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{g} & (\mathbb{R}^2, 0) \\ \kappa \downarrow & & \psi \downarrow & & \phi \downarrow \\ (\mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{\mu'} & (\mathbb{R}^2, 0) & \xrightarrow{g'} & (\mathbb{R}^2, 0) \end{array}$$

が可換であること, ここで $\kappa(\kappa = id_{\mathbb{R}}), \psi, \phi$ は微分同相芽で定義する. するとこれらはうまく対応している.

Theorem 2.1 ジェネリック⁴ な完全積分可能である方程式 (μ, f) と (μ', f') に対して, f と f' が方程式として同値である必要十分条件は $(\mu, \pi \circ f)$ と $(\mu', \pi \circ f')$ が積分図式として同値であることである.

この定理より方程式を方程式の同値関係で分類することと, 積分図式を分類することは同値であるので, 方程式を分類するためには積分図式を分類すればよい.

Theorem 2.2 (泉屋, 黒川 [11]) ジェネリック⁵ なクレーロー型方程式

$$(\mu, f) : (\mathbb{R}^2, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \times PT^*\mathbb{R}^2$$

に対して, 積分図式 $(\mu, \pi \circ f)$ は次のリストのひとつに狭い意味で同値である:

- (1) $\mu = u_2,$
 $g = (u_1, u_2).$
- (2) $\mu = u_2 - \frac{1}{2}u_1,$
 $g = (u_1, u_2^2).$
- (3) $\mu = u_2 + \alpha \circ G$ for $\alpha \in \mathfrak{M}_{(x,y,t)},$
 $g = (u_1, u_2^3 + u_1u_2).$

(3) において, この標準形は関数 α に依存して変わることが分かる. この α を関数モジュライ (functional moduli) という.

⁴ある写像空間に Whitney C^∞ 位相を入れたとき, その空間内で開かつ稠密となる性質である.

⁵この意味は対応する写像が SP^+ -Lagrange stable であることである.

3 1パラメータクレロー型方程式

ここでは、クレロー型方程式の分岐を考える。

1 径数付けられた 1 階常微分方程式の族 (略して、1 径数付けられた方程式の族) とは、写像芽

$$f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow PT^*\mathbb{R}^2$$

で、 $f_t (\forall t \in (\mathbb{R}, 0))$ がはめ込みであるものとする。ここで、 $f_t(u_1, u_2) = f(u_1, u_2, t)$ 。

そして、 f が 1 径数付けられた完全積分可能な方程式とは、ある芽 $\mu : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0)$ が存在して、 $\mu_t (\forall t \in (\mathbb{R}, 0))$ が沈め込みで、 $d\mu_t \wedge f_t^*\theta = 0$ を満たすものとする。ここで、 θ は標準 1-形式である。すなわち、 (x, y, p) を $PT^*\mathbb{R}^2$ の座標系としたとき、 $\theta = dy - p dx$ である。

組 $(\mu, f) : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \times PT^*\mathbb{R}^2$ を 1 径数付けられた完全積分可能な方程式の族と呼ぶ。

さらに、 $\pi \circ f_t|_{\mu_t^{-1}(s)} (\forall t, s \in (\mathbb{R}, 0))$ が非特異のとき、 f を 1 径数付けられたクレロー型方程式の族と呼ぶ。

さて次のような発散図式を考える：

$$(\mathbb{R}, 0) \xleftarrow{\mu} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \xrightarrow{f} (\mathbb{R}^2, 0)$$

ただし、 μ_t は各 t に対して沈め込みとする。さらに (μ, g) と書く。

(μ, g) が 1 径数付けられた積分図式の族であるとは、ある 1 径数付けられた方程式の族 $f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow PT^*\mathbb{R}^2$ があって、 (μ, f) が 1 径数付けられた完全積分可能な方程式で $\pi \circ f = g$ がなりたることと定義する。

ここで、これらのパラメータ t による開折を考える。

$$F : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow PT^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \quad F(u_1, u_2, t) = (f(u_1, u_2, t), t)$$

を f に対応した 1 径数付けられた方程式の開折と呼ぶ。

また、

$$\hat{\mu} : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0), \quad \hat{\mu}(u_1, u_2, t) = (\mu(u_1, u_2, t), t)$$

とする。

この時、 $(\hat{\mu}, F)$ を 1 径数付けられた完全積分可能な方程式の開折と呼ぶ。開折についても発散図式を考える。すなわち、 μ_t を沈め込み

$$(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) \xleftarrow{\hat{\mu}} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \xrightarrow{F} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0)$$

この $(\hat{\mu}, G)$ が 1 径数付けられた積分関式の開折とは、ある 1 径数付けられた方程式の族 $f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \rightarrow PT^*\mathbb{R}^2$ が存在して、 $(\hat{\mu}, F)$ が 1 径数付けられた完全積分可能な方程式の族で $(\pi \times id) \circ F = G$ であることとする。

さらに (μ, f) が 1 係数付けられたクレロー型方程式の族であるとき、 $(\hat{\mu}, F)$ を 1 径数付けられたクレロー型方程式の開折という。

ここで、1 径数付けられた方程式と積分関式の開折に対して同値関係を次のように自然に定義する。まずは f, f' における 1 径数付けられた方程式の開折 F, F' が同値であることを図式

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{F} & (PT^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (z, 0)) & \xrightarrow{\pi \times id} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \pi(z, 0)) \\ \psi \downarrow & & \downarrow \Phi & & \downarrow \phi \\ (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{F'} & (PT^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, (z', 0)) & \xrightarrow{\pi \times id} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, \pi(z', 0)) \end{array}$$

が可換であることと定義する。ここで ψ, ϕ は微分同相芽で以下の形をしているものとする：

$$\begin{aligned} \psi(u_1, u_2, t) &= (\psi_1(u_1, u_2, t), \varphi(t)), \quad \phi(x_1, x_2, t) = (\phi_1(x_1, x_2, t), \varphi(t)), \\ \Phi(x, y, p, t) &= (\hat{\phi}_t(x, y, p), \varphi(t)), \quad \phi_t = \phi|_{\mathbb{R}^2 \times \{t\}}. \end{aligned}$$

1 径数付けられた積分関式の開折 $(\hat{\mu}, G), (\hat{\mu}', G')$ が (狭い意味で) 同値であることを図式

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{\hat{\mu}} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{G} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \\ \kappa \downarrow & & \psi \downarrow & & \phi \downarrow \\ (\mathbb{R} \times \mathbb{R}, 0) & \xleftarrow{\hat{\mu}'} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) & \xrightarrow{G'} & (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \end{array}$$

が可換であることと定義する、ここで κ, ψ, ϕ は微分同相芽で以下の形をしているものとする：

$$\begin{aligned} \kappa(s, t) &= (\kappa_1(s, t), \varphi(t)) \quad (\kappa_1(s, t) = s), \\ \psi(u_1, u_2, t) &= (\psi_1(u_1, u_2, t), \varphi(t)), \quad \phi(x_1, x_2, t) = (\phi_1(x_1, x_2, t), \varphi(t)). \end{aligned}$$

このときこれらはいまよく対応していることが分かる。

Theorem 3.1 ジェネリックな 1 径数付けられた完全積分可能である方程式の族 $(\hat{\mu}, F)$ と $(\hat{\mu}', F')$ に対して, F と F' が 1 径数付けられた方程式の開折として同値である必要十分条件は $(\hat{\mu}, (\pi \times id) \circ F)$ と $(\hat{\mu}', (\pi \times id) \circ F')$ が 1 径数付けられた積分関式の開折として同値であることである.

この定理より 1 径数付けられた方程式の開折を方程式の同値関係で分類することと, 1 径数付けられた積分関式の開折を分類することは同値であるので, 我々の目的のためには, 1 径数付けられた積分関式の開折を分類すればよい. 主要結果は以下のものである:

Theorem 3.2⁶ ジェネリックなクレロー型方程式

$$(\mu, F) : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow \mathbb{R} \times PT^*\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

に対して, 積分関式 $(\mu, (\pi \times id) \circ f)$ は次のリストのひとつに狭い意味で同値である:

- (1) $\mu = u_2,$
 $G = (u_1, u_2, t).$
- (2) $\mu = u_2 - \frac{1}{2}u_1,$
 $G = (u_1, u_2^2, t).$
- (3) $\mu = u_2 + \alpha \circ G$ for $\alpha \in \mathfrak{M}_{(x,y,t)},$
 $G = (u_1, u_2^3 + u_1u_2 + tu_2^2, t).$
- (4) $\mu = u_2 + \alpha \circ G$ for $\alpha \in \mathfrak{M}_{(x,y,t)},$
 $G = (u_1, u_2^4 + u_1u_2 + \beta(u_1, t)u_2^2, t)$ for $\beta \in \mathfrak{M}_{(u_1,t)}, \frac{\partial \beta}{\partial t}(0) \neq 0.$

α を first functional moduli, β を second functional moduli と呼ぶ.

(3) における functional moduli α の equivalence での分類は分かる. しかし (4) でも 2 つの functional moduli の分類は現在何も分かっていない.

⁶定理を証明するには関数族 (母関数) の開折理論を使う. 例えば, [1, 14] などを参照.

4 例

1 径数付けられたクレロー型方程式の例として 1 径数付けられたクレロー方程式をあげる. すなわち,

$$y = xy' + g_t(y'),$$

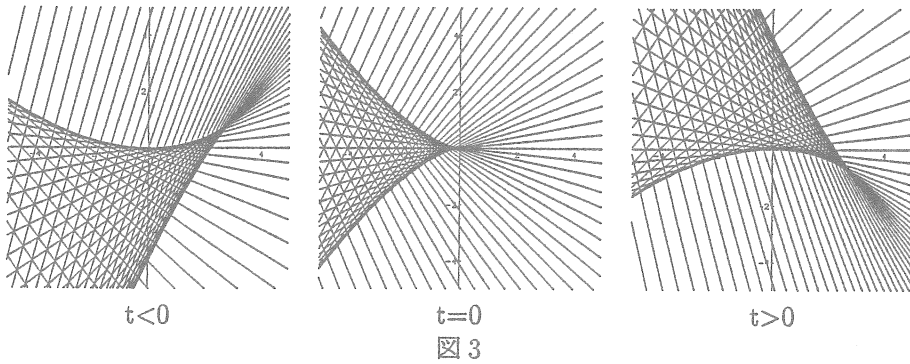
を考える.

$$f : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow PT^*\mathbb{R}^2 : f(u_1, u_2, t) = (u_1, u_1u_2 + g_t(u_2), u_2),$$

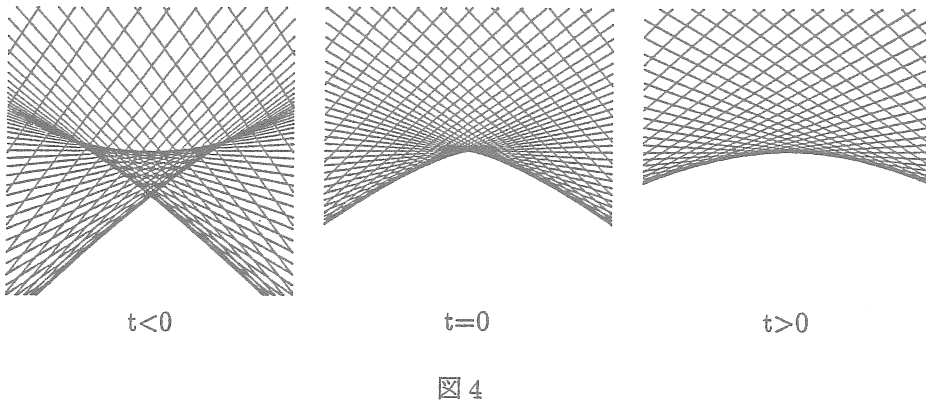
$$\mu : (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}, 0) \longrightarrow (\mathbb{R}, 0) : \mu(u_1, u_2, t) = u_2$$

とする. この時, (μ, f) は 1 径数付けられたクレロー型方程式である,

ここで, $g_t(p) = p^3 + tp^2$ とするとその完全解と特異解の分岐の様子は図 2 のようになる.



また $g_t(p) = p^4 + tp^2$ とすると図 3 のようになる.



この他の図は講演の際にお見せする。

参考文献

- [1] V.I. Arnol'd, S.M. Gusein-Zade and A.N Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps*, Vol. I (Birkhäuser, 1986).
- [2] J.W. Bruce, Isotopies of generic plane curves, *Glasgow Math. J.*, **24** (1983), 195-206.
- [3] J.W. Bruce and F. Tari, Generic one-parameter families of binary differential equations of morse type, *Discrete Continuous Dyn. Sys.*, **3** (1997), 79-90.
- [4] J.W. Bruce, G.J. Fletcher and F. Tari, Bifurcations of implicate differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, **130A** (2000), 485-506.
- [5] J. Damon, The unfolding and determinacy theorems for subgroups of \mathcal{A} and \mathcal{K} , *Memoirs AMS*. **50** (1984).
- [6] C.G. Gibson, *Singular Points of Smooth Mappings* (Pitman, London, 1979).
- [7] A.Hayakawa, G.Ishikawa, S.Izumiya and K.Yamaguchi, Classification of generic integral diagram and first order ordinary differential equations, *Int. J. Math.* **5** (1994), 447-489.
- [8] S. Izumiya, The theory of Legendrian unfoldings and first-order differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **123** (1993), 517-532.
- [9] S. Izumiya, Completely integrable holonomic systems of first order differential equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **125** (1994), 567-586.
- [10] S.Izumiya, On Clairayt-type equations *Publications Math.* (Debrecen), **45** (1994), 159-166
- [11] S. Izumiya and Y. Kurokawa, Holonomic systems of Clairaut type, *Diff. Geometry and App.* **5** (1995), 219-235.
- [12] P. Martin, Classification of two-parameter bifurcations, *Sing. Theory and its App. PartII* (1989), 294-300, Lecture Note in Math, 1463.
- [13] M. Takahashi, Bifurcations of Clairaut type equations, *preprint*.
- [14] V.M. Zakalyukin, Reconstructions of fronts and caustics depending on a parameter and versality of mappings, *Journal of Soviet Math.* **27** (1983), 2713-2735.

ルジャンドリアンなベクトル場を持つ複素 3 次元接触多様体

東大数理 児玉 大樹 (こだまひろき)

概要: ルジャンドリアンなベクトル場を持つ複素 3 次元接触多様体の局所的な構造を分類する。特に、そのような接触多様体が大域的な接触 1 形式を持つときについて分類を試みる。また、そのような多様体で大域的な接触 1 形式を持たないような例を構成する。

1 導入

複素 3 次元接触多様体とは次のようなものである; 3 次元の複素多様体上に、開被覆 $U = \{U\}$ があり、各開集合 U 上では複素解析的 1 形式 ω が与えられており、非可積分条件 $\omega \wedge d\omega \neq 0$ をみたす。さらに、開集合の共通部分 $U \cap U'$ においては、正則な関数 $f: U \cap U' \rightarrow \mathbb{C}^*$ が存在して、 $\omega = f\omega'$ をみたす。特に、 $\xi = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} (\ker \omega)$ は TM の well-defined なサブバンドルになる。このような複素 3 次元接触多様体を (M, ξ) で表す。

なお、非可積分条件 $\omega \wedge d\omega \neq 0$ をみたす複素解析的 1 形式のことを、接触 1 形式と呼ぶ。

(M, ξ) の非退化なルジャンドリアンベクトル場とは M 上の non-vanishing な複素解析的ベクトル場で各開集合 U 上で $\omega(X) = 0$ をみたすもののことである。

本講演の流れは、つぎのようになる。

まず、第 2 節ではルジャンドリアンベクトル場の局所的な構造が、双曲的(parabolic) と呼ばれるタイプと斜航的(loxodromic) と呼ばれるタイプとのどちらかであることを示す。

第 3 節でいくつかの例を挙げる。まず、3 次元リー群の等質空間上に定義される例を作る。この場合、 M 上に大域的に接触 1 形式がとれる。一方で、 M 上大域的には接触 1 形式がとれないような例も構成する。

第 4 節以降では、 M 上に大域的に接触 1 形式が存在する場合を扱う。

email address: kodama@ms.u-tokyo.ac.jp

address: Graduate School of Mathematical Sciences, University of Tokyo, 3-8-1 Komaba, Meguro-ku, Tokyo 153-9814, Japan.

2 局所的な構造

以下の定理は、ルジャンドリアンベクトル場の局所的な構造を二通りに分類する。

定理 1 (M, ξ) を連結な 3 次元接触多様体、 X を (M, ξ) 上のルジャンドリアンベクトル場とする。このとき、 (M, ξ, X) は双曲的 (P) または斜航的 (L) いずれかの局所構造を持つ。それぞれの局所構造は、座標近傍系 $\mathcal{U} = \{U = \{(x, y, z)\}\}$ によって以下のように表される。

(P) $\xi = \ker(dy - xdz)$, $X = \partial/\partial x$.

(L) $\xi = \ker(dy - \exp(ax)dz)$, $X = \partial/\partial x$. ここで、 $a \in \mathbb{C}^*$ は U によらない定数である。

証明のスケッチ. ベクトル場 X の定める複素解析的な \mathbb{C} 作用を $\phi: \mathbb{C} \times M \rightarrow M$; $(t, p) \mapsto \phi^t(p)$ で表す。

射影化バンドル PX とは、 M 上の $\mathbb{C}P^1$ -バンドルで、 M の各点 p においてファイバー $P_p X$ は $T_p M$ の 2 次元部分空間 ν_p で $X_p \in \nu_p$ をみたすものの全体である。

M 上の複素解析的 \mathbb{C} -作用 ϕ は PX 上の複素解析的 \mathbb{C} -作用 Φ を定める。

PX は自明化 $I: PX \rightarrow M \times \mathbb{C}P^1$ を持つ。これは $\text{Aut}(\mathbb{C}P^1)$ による共役を除いて一意である。 $PX \approx M \times \mathbb{C}P^1$ 上の作用 Φ は M 上の作用 ϕ と $\mathbb{C}P^1$ 上の作用 ψ とに分解する。

$\mathbb{C}P^1$ 上の複素解析的な \mathbb{C} -作用は零作用 ($x \mapsto x$)、放物的作用 ($x \mapsto x+t$ と共役) および斜航的作用 ($x \mapsto \exp(at)x$ と共役) に限られる。 ξ が接触構造を定めることから、零作用は起こりえないことが分かる。残りの二つはそれぞれ放物的なものとは斜航的なものとは対応する。 \square

3 例

接触構造を許容する等質空間には、以下の三つの種類がある。

例 2 $SL(2, \mathbb{C})$ を複素 2×2 行列で固有値が 1 になるもの全体のなすリー群とする。リー代数 $sl(2, \mathbb{C})$ は $SL(2, \mathbb{C})$ の左不変ベクトル場全体であり、トレースが 0 の複素 2×2 行列全体と見なせる。

$$T = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。これらは $sl(2, \mathbb{C})$ の基底を定め、

$$[T, U] = -U, \quad [T, S] = S, \quad [U, S] = -2T$$

をみたく。 Γ を $SL(2, \mathbb{C})$ のココンパクトな離散部分群とし、多様体 M を $M = \Gamma \backslash SL(2, \mathbb{C})$ で定める。ベクトル場 T, U, S は M 上でも well-defined である。

例 2-1 a と b を 0 でない複素数とする。1 形式 ω とベクトル場 X を $\omega(T) = 0, \omega(U) = \omega(S) = b, X = aT$ で定める。

例 2-2 a と b を 0 でない複素数とする。1 形式 ω とベクトル場 X を $\omega(T) = b, \omega(U) = \omega(S) = 0, X = aU$ で定める。

例 3 リー群 $\text{Solv} = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{C}\}$ を

$$(a, b, c) \cdot (x, y, z) = (x + a, e^{-a}y + b, e^a z + c)$$

で定める。対応するリー代数 solv は、次の左不変ベクトル場

$$H = \partial/\partial x, \quad U = e^{-x}\partial/\partial y, \quad S = e^x\partial/\partial z$$

で張られる。これらのベクトル場は

$$[H, U] = -U, \quad [H, S] = S, \quad [U, S] = 0$$

をみたく。 Γ を Solv のココンパクトな離散部分群とし、多様体 M を $M = \Gamma \backslash \text{Solv}$ で定める。ベクトル場 H, U, S は M 上でも well-defined である。

例 3-1 $a \in \mathbb{C}$ を 0 でない複素数とする。接触 1 形式 ω とベクトル場 X を $\omega(H) = 0, \omega(U) = \omega(S) = 1, X = aH$ で定める。

例 3-2 $a \in \mathbb{C}$ を 0 でない複素数とする。接触 1 形式 ω とベクトル場 X を $\omega(H) = 0, \omega(U) = \omega(S) = 1, X = (a/2)(U + S)$ で定める。

例 4 リー群

$$\text{Nil} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid x, y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

に対応するリー環 nil は

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

で張られる。これらの元は

$$[P, Q] = 0, \quad [P, R] = Q, \quad [Q, R] = 0$$

をみたく。 Γ を Nil のコンパクトな離散部分群とし、 $M = \Gamma \backslash \text{Nil}$ とする。 P, Q, R も M 上で well-defined である。 接触 1 形式 ω とベクトル場 X を $\omega(P) = \omega(R) = 0, \omega(Q) = 1, X = P$ で定める。

重要なノート: 等質空間上の接触構造は、 M 上の全域的な接触 1 形式 ω で定義される。

一方で、等質空間の例に属さないような例も作れる。以下の例においては、接触構造が大域的な接触 1 形式を許容しないので、これらの例は等質空間の例とは異なる。

例 5 \mathbb{C}^2 のラティス Λ で、行列 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \in \text{GL}(2, \mathbb{C})$ の作用で保たれるものを考える。ただし、 $|\lambda_1|, |\lambda_2| \neq 1$ とする。 \bar{A} を A によって定義される、複素トーラス $N = \mathbb{C}^2 / \Lambda$ 上の複素解析的同相写像とする。

$n \in \mathbb{Z}$ と $\eta \in \mathbb{C}$ を $\exp(n\eta) = \lambda_2 / \lambda_1$ であり、任意の整数 m に対して $\exp(m\eta) \neq \lambda_1$ をみたくように取る。

多様体 M を $M = \mathbb{C} \times N / \sim$ で定める。ここで、 \sim は以下のように定義される同値関係である。

$$(x, [y, z]) \sim (x - \eta, \bar{A}([y, z])) \sim (x - 2\pi i, [y, z]).$$

ベクトル場 $X = \partial / \partial x$ は M 上でも well-defined である。 M の普遍被覆 $\widetilde{M} \approx \mathbb{C}^3$ 上に、 $\tilde{\omega} = dy - \exp(nx)dz$ によって接触構造を定める。この接触構造は M 上でも well-defined であり、 X は接触多様体 (M, ξ) のルジャンドリアンベクトル場となる。

例 6 a^+, a^-, λ および η は 0 でない複素数、 n は正整数であり、 $\text{Re } \eta > 0, |\lambda| > 1$ および $a^- / a^+ = \exp(n\eta)$ をみたくとする。

$$\begin{aligned} \widetilde{M} &= \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid (y, z) \neq (0, 0)\} \\ &= \mathbb{C} \times (\mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}) \end{aligned}$$

とし、多様体 M を \widetilde{M} / \sim で定める。ここで、 \sim は次のような同値関係である:

$$(x, y, z) \sim (x, \lambda y, \lambda z) \sim (x - \eta, a^+ y, a^- z)$$

\widetilde{M} 上のベクトル場 $X = \partial / \partial x$ および接触構造 $\xi = \ker(dy - \exp(nx)dz)$ on \widetilde{M} は M 上でも well-defined であり、 X は接触多様体 (M, ξ) のルジャンドリアンベクトル場になる。

4 大域的に接触1形式がとれる場合

これ以降は、 ξ が M 上で大域的に一つの接触形式 ω で与えられているときについて考える。このようなとき、接触多様体を (M, ω) であらわす。

等質空間上の例はそのようになっている。一方で、他にそのような例はしられていない。ここでは、部分的な分類を与える。

接触1形式 ω のレーブベクトル場とは、 M 上のベクトル場 Y であって、 $\omega(Y) = 1$ および $Y \lrcorner d\omega = 0$ をみたすものである。 ω のレーブベクトル場 Y は唯一定まり、複素解析的である。二番目の条件は、 Y による作用により ω が不変であることに相当する。

命題 7 ルジャンドリアンベクトル場 X と、レーブベクトル場 Y は、次のいずれかの性質をみたす。

- (i) $[X, Y] = Z$ かつ $TM = \mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y \oplus \mathbb{C}Z$.
- (ii) $[X, Y] = cX$ ($c \neq 0$).
- (iii) $[X, Y] = 0$.

注 8 M がコンパクトなので、最大値原理より、任意の複素解析的写像 $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ は定数写像である。この事実は非常に重要で、以後の議論に何度も現れる。それ故、以後の議論は他の(たとえば実解析的などの)カテゴリーではうまくいかない。

次の補題は、(ii)と(iii)の場合を調べるときに用いる。

補題 9 任意の複素解析的作用 $f: \mathbb{C} \times M \rightarrow M$ に対して、non-vanishingな $(3, 0)$ 形式 $\omega \wedge d\omega$ は f の作用により保たれる。

4.1 (i); $[X, Y] = Z$ の場合

明らかに、 M は等質空間になる。多少の計算により、 (M, ω, X) は例 3-1 または例 2-1 になることが分かる。

4.2 (ii); $[X, Y] = cX$ の場合

ω を $c\omega$ で置き換え、 $[X, Y] = X$ と仮定することが出来る。Étienne Ghys と Alberto Verjovsky は、 Y の作用のアノソフ性を用いることによって以下の命題を示した。

命題 10 ([GV]) M を閉 3 次元複素多様体、 X と Y をその上の non-vanishing な複素解析的ベクトル場で $[X, Y] = X$ をみたすものとし、 X, Y いずれの作用も M の体積形式を保つとする。このとき、以下をみたすような複素解析的ラインフィールド E^s が唯一存在する; E^s は $\mathbb{C}X \oplus \mathbb{C}Y$ に至るところ横断的であり、 Y の作用で不変である。

複素解析的ベクトル場 Z を $E^s = \mathbb{C}Z$ および $\omega \wedge d\omega(X, Y, Z) = 1$ で定めることが出来るので M は等質空間である。これは例 2-2 に相当する。

4.3 (iii); $[X, Y] = 0$ の場合

この場合、もし M が等質空間ならば、例 4 または例 3-2 に相当する。一般の場合を考えよう。まず、局所的構造から調べる。

命題 11 各座標近傍上で $\omega = dy - xdz$, $X = \partial/\partial x$, $Y = \partial/\partial y$ となるように座標近傍 $U = \{U = \{(x, y, z)\}\}$ を定めることが出来る。

この命題は補題 9 と定理 1 を使って示すことが出来る。

大域的な構造を考えよう。1 形式 α を $\alpha = \omega - \phi^{1*}(\omega)$ で定める。命題 11 より、各座標近傍 U 上で $\alpha = dz$ となっている。

一点 $p \in M$ を固定する。点 p を始点とする道 γ に対して、 $\pi(\gamma) = \int_\gamma \alpha$ と定めると、これは普遍被覆 \widetilde{M} から \mathbb{C} への写像を定める。この写像は全射であり、 \widetilde{M} の \mathbb{C}^2 -バンドル構造を定める。

以下、 $\widetilde{M} \approx \mathbb{C}^3$, $\omega = dy - xdz$, $X = \partial/\partial x$ とする。計算により、以下の命題を得る。

命題 12 \mathbb{C}^3 の複素解析的同相写像で、 $\omega = dy - xdz$ および $X = \partial/\partial x$ を保つものを $\text{Aut}(\mathbb{C}^3, \omega, X)$ と書く。 $\text{Aut}(\mathbb{C}^3, \omega, X)$ の元は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \text{Aut}(\mathbb{C}^3, \omega, X) &= \{(f, C) \mid f \in \mathcal{O}(\mathbb{C}), C \in \mathbb{C}\}, \\ (f, C) &: (x, y, z) \mapsto (x + f'(z), y + f(z), z + C). \end{aligned}$$

M を分類するためには、 $\Gamma \backslash \mathbb{C}^3$ が複素 3 次元閉多様体になるような部分群 $\Gamma \subset \text{Aut}(\mathbb{C}^3, \omega, X)$ を分類すればよい。

次の結果は、そのような部分群に対して、うまく共役を取ってやると、全ての元が有限個の指数関数と多項式で表されることを示している。

定理 13 Γ が $\text{Aut}(\mathbb{C}^3, \omega, X)$ の部分群で $\Gamma \backslash \mathbb{C}^3$ が複素 3 次元閉多様体となるとする。このとき、ある元 $\sigma \in \text{Aut}(\mathbb{C}^3, \omega, X)$ 、正整数 $N \leq 16$ および複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_N$ が存在して、任意の $(f, C) \in \sigma^{-1}\Gamma\sigma$ に対して関数 f が

$$f(z) = \sum_{k=1}^N r_k(z) \exp(\alpha_k z) + b_0$$

と表される。ここで、 r_k は高々 4 次の多項式であり、 b_0 は定数である。

この定理を示すために、以下のような補題を用いる。

補題 14 ([Gu]) 任意の複素解析的関数 $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ および 0 でない任意の複素数 η に対して、 $g(x + \eta) - g(x) = f(x)$ をみたす複素解析的関数 $g: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ が存在する。

補題 15 $(f_1, \eta_1), (f_2, \eta_2) \in \Gamma$ かつ $\eta_1\mathbb{Z} \oplus \eta_2\mathbb{Z}$ が \mathbb{C} のラティスを為すと仮定する。このとき、 $(f, 0) \in \Gamma$ ならば関数 f は

$$f(z) = \sum_{k=1}^N p_k(z) \exp(\alpha_k z)$$

と表される。ここで、 p_k は高々 3 次の多項式、 N は 16 以下の正整数、 α_k は複素数である。

以下、例 4 および 3-2 が実際に現れる例を見る。

例 16 $\Gamma = \{(az + b, c) \mid a, b, c \in \mathbb{Z}[\sqrt{-1}]\}$. とおけば、例 4 となる。

例 17 n_1, n_2 を $|n_1| < 2 < |n_2|$ をみたす整数、 α_j, β_j を二次方程式 $t^2 - n_j t + 1 = 0$ の解 ($j = 1, 2$) とし、 η_1, η_2 を $\exp(\eta_1) = \alpha_1, \exp(\eta_2) = \alpha_2$ をみたす複素数とする。 $\eta_1\mathbb{Z} \oplus \eta_2\mathbb{Z}$ が \mathbb{C} のラティスになっていると仮定する。

四つの関数 f_0, \dots, f_3 を

$$\begin{aligned} f_0(z) &= e^z + e^{-z}, \\ f_1(z) &= \alpha_1 e^z + \beta_1 e^{-z}, \\ f_2(z) &= \alpha_2 e^z + \beta_2 e^{-z}, \\ f_3(z) &= \alpha_1 \alpha_2 e^z + \beta_1 \beta_2 e^{-z}. \end{aligned}$$

で定める。 $\Gamma = \{(a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 + a_3 f_3, b_1 \eta_1 + b_2 \eta_2) \mid a_j, b_k \in \mathbb{Z}\}$ とおけば、例 3-2 に相当する例が出来る。

References

- [Gu] M. C. Guichard, *L'équation aux Différences Fines* (French), Ann. de l'Éc. Normale, 3^e Série, Tome IV, 1887, 361-380.
- [GV] E. Ghys and A. Verjovsky, *Locally free holomorphic actions of the complex affine group*, Proceedings of Geometric Study of Foliations, held in Tokyo, November 1993, World Scientific, Singapore, 1994, 201-217.
- [K] Hiroki Kodama, *Complex contact three manifolds with Legendrian vector fields*, Proc. Japan Acad., 78, Ser. A, 2002, 51-54.

MAPPING CLASS GROUP AND THE CONFIGURATION SPACES OF SURFACES

森山 哲裕

1. はじめに

この報告では曲面上の点の配置空間のホモロジー群への写像類群の作用の kernel や基本群との関係 (Johnson 準同型, マグナス展開), そして写像類群の (ある係数を持つ) コホモロジー群との関係について, 最近得られた結果を紹介したいと思います.

Bott-Cattaneo([1], [2]) や Kuperberg-Thurston([16]) らにより 3 次元多様体上の点の配置空間上の微分形式やコホモロジーを用いた 3 次元多様体の位相不変量が定義されています. Heegaard 分解を用いてこれらの不変量を考察しようとした場合, Heegaard 曲面上の同相写像によって空間をひねって新しい多様体を作る際に不変量がどのようにふるまうのかを調べる必要があります. これが動機となり, 現在曲面上の点の配置空間の (コ) ホモロジー群への写像類群の自然な作用について調べています.

2. 定義

2.1. 写像類群. $\Sigma_{g,1}$ を種数 g の境界 $\partial\Sigma_{g,1} \cong S^1$ を持つコンパクトな曲面とする. $p_0 \in \partial\Sigma_{g,1}$ を基点とする. $\partial\Sigma_{g,1}$ 上で恒等的となるような $\Sigma_{g,1}$ の向きを保つ微分同相群 $\text{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1})$ のイソトピー類全体の成す群 $\mathcal{M}_{g,1}$ を写像類群 (mapping class group) とする. つまり $\text{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma)$ に C^∞ 位相を与えれば

$$\mathcal{M}_{g,1} = \pi_0(\text{Diff}_+(\Sigma, \partial\Sigma))$$

である. $H_1 = H_1(\Sigma_{g,1}; \mathbb{Z})$ を $\Sigma_{g,1}$ の 1 次元ホモロジー群とする. $\mathcal{M}_{g,1}$ の H_1 への自然な表現

$$\rho_1: \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow GL(H_1)$$

は H_1 の交点形式を保つので, シンプレクティック基底を固定すればその像は Siegel モジュラー群 $Sp(2g; \mathbb{Z})$ である. $\mathcal{M}_{g,1}$ の正規部分群 $\text{Ker } \rho_1$ は Torelli 群とよばれ, 以下これを $\mathcal{I}_{g,1}$ と表す:

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow Sp(2g; \mathbb{Z}) \rightarrow 1.$$

Torelli 群は

2.2. $\mathcal{M}_{g,1}$ の部分群 $\mathcal{M}_{g,1}(n)$. $\mathcal{M}_{g,1}$ は $\Sigma_{g,1}$ の基本群の降中心列を用いて定義されるある部分群の列 $\{\mathcal{M}_{g,1}(n)\}_{n \geq 0}$ を持つ ([17], [18], [19]). これは次のように定義される. まず $\{\Gamma_n\}_{n \geq 0}$ を $\pi_1(\Sigma, p_0)$ の降中心列とする:

$$\Gamma_0 = \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0), \quad \Gamma_{n+1} = [\Gamma_n, \Gamma_0], \quad (n \geq 1).$$

$\mathcal{M}_{g,1}(n)$ を Γ_0/Γ_n への自然な作用の kernel, つまり

$$\mathcal{M}_{g,1}(n) = \text{Ker}(\mathcal{M}_{g,1} \rightarrow \text{Aut}(\Gamma_0/\Gamma_n))$$

と定義すると、部分群の列

$$\mathcal{M}_{g,1} = \mathcal{M}_{g,1}(0) \supset \mathcal{M}_{g,1}(1) \supset \mathcal{M}_{g,1}(2) \supset \mathcal{M}_{g,1}(3) \supset \cdots$$

が得られる。例えば $\Gamma_0/\Gamma_0 = \{1\}$, $\Gamma_0/\Gamma_1 \cong H_1$ だから、

$$\mathcal{M}_{g,1}(0) = \mathcal{M}_{g,1}, \quad \mathcal{M}_{g,1}(1) = \mathcal{I}_{g,1}$$

となる。

$\mathcal{M}_{g,1}(3)$ は $\mathcal{K}_{g,1}$ と書かれ、 $\mathcal{K}_{g,1}$ の有理係数コホモロジー類は曲面束の二次特性類と見なすことができ、これは Casson 不変量と深く関連する ([17], [18], [20])、また Torelli 群に関してはこの降中心列を用いてホモロジー球面の有限系不変量の空間のフィルトレーションを記述することができる。

2.3. 配置空間のホモロジー群. 表現 ρ_1 の定義を次のように一般化する. $\Sigma_{g,1}$ の n 個 (n は正整数) の直積 $\Sigma_{g,1}^n$ の部分空間 Δ_n, A_n を以下のように定義する:

$$\begin{aligned} \Delta_n &= \Delta_n(\Sigma_{g,1}) = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i = x_j \text{ for some } i \neq j \} \\ A_n &= A_n(\Sigma_{g,1}, p_0) = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i = p_0 \text{ for some } i. \} \end{aligned}$$

容易に分かるように $\mathcal{M}_{g,1}$ の表現として同型 $H_n((\Sigma_{g,1}, A_n)^n; \mathbb{Z}) \cong H_1^{\otimes n}$ が得られる。つまりここへの表現は $\rho_1^{\otimes n}$ である。次に

$$H_n \stackrel{\text{def}}{=} H_n(\Sigma_{g,1}^n, \Delta_n \cup A_n; \mathbb{Z})$$

への $\mathcal{M}_{g,1}$ の表現

$$\rho_n: \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow GL(H_n)$$

を考える。 $n=0$ の場合には、 $(\Sigma_{g,1}^0, \Delta_0 \cup A_0)$ を一点集合と定義する。すると $H_0 \cong \mathbb{Z}$ であり、 $\rho_0: \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow GL(H_0)$ は自明な表現になる。実は $n \geq 2$ の場合は、 ρ_n は ρ_1 よりも深い作用になる、つまり $\text{Ker } \rho_n \subsetneq \mathcal{I}_{g,1}$ となる。 $\text{Ker } \rho_n$ が一体どのような部分群になるのかを述べたのが定理 2 である。

$C_n(X)$ を空間 X 上の相異なる順序付けられた n 点の成す配置空間とする:

$$C_n(X) = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n \mid x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j \}.$$

X にある位相群が作用していれば $C_n(X)$ への作用も自然に導かれる。 $X = \Sigma'_{g,1} = \Sigma_{g,1} \setminus \{p_0\}$ とおくと、 $\Sigma'_{g,1}$ に $\text{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial_* \Sigma_{g,1})$ が作用するから、この配置空間の (コ)ホモロジー群には $\mathcal{M}_{g,1}$ が作用する。 $\mathcal{M}_{g,1}$ 上の加群として、 H_n はコンパクト台を持つコホモロジー群 $H_c^n(C_n(\Sigma'_{g,1}); \mathbb{Z})$ の双対に同型である。

Chen の反復積分の理論 [3] によると、空間上の点の配置空間はもとの空間のループ空間の近似みたいなものとも言える。もう少し詳しく言うと、 i 番目と $i+1$ 番目が一致しているような X^n の点全体から成るある種の対角線集合を Δ'_n とするとき、 X の基点 x_0 を持つループ空間上の微分形式は $(X^n, \Delta'_n A_n(X, x_0))$ 上の積分により表される。 $X = \Sigma_{g,1}$ の場合には、 J を $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ の被約イデアルとすると、 $H_n(\Sigma_{g,1}^n, \Delta'_n \cup A_n; \mathbb{Z}) \cong J/J^{n+1}$ なる同型が成り立つ ([9]) から、この報告で見るとように Δ'_n を Δ_n に置き換えた場合に当たる H_n への表現も基本群と同様の関係がつくのは自然なことと思われる。写像類群やその部分群と Johnson 準同型やマグナス展開との基本的な関係は既に知られてる ([15]) が、今回の報告ではその多くの部分を曲面上の点の配置空間を用いてその間形成をみることができることを見る。

2.4. **Johnson 準同型.** Johnson 準同型 $\tau_n: \mathcal{M}_{g,1}(n) \rightarrow \text{Hom}(H_1, H_1^{\otimes(n+1)})$ は次のように定義される ([17], [18]). $\mathcal{L} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}_n$ を \mathbb{Z} 上 H_1 により生成される自由リー代数とする. ここで \mathcal{L}_n は次数 n の元から成る部分加群であり, $H_1^{\otimes n}$ に自然に埋め込められる $([u, v] = u \otimes v - v \otimes u)$. ひとつの元 $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}(n)$ を固定する. 定義により任意の $\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ に対して $\varphi(\gamma)\gamma^{-1} \in \Gamma_n$ が成り立つ. そこで自然な同型と包含関係 $\Gamma_n/\Gamma_{n+1} = \mathcal{L}_n \subset H_1^{\otimes(n+1)}$ を用いて準同型

$$\tau_n(\varphi): H_1 \rightarrow H_1^{\otimes(n+1)}$$

を $\tau_n(\varphi)([\gamma]) = \varphi(\gamma)\gamma^{-1}$ と定義する. ここで $[\gamma] \in H_1$ は γ のホモロジー類である. $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}(n+1)$ なら $\tau_n(\varphi) = 0$ である. そして Johnson 準同型 τ_n は

$$\tau_n: \mathcal{M}_{g,1}(n)/\mathcal{M}_{g,1}(n+1) \rightarrow \text{Hom}(H_1, H_1^{\otimes(n+1)}), \quad \varphi \mapsto \tau_n(\varphi)$$

と定義され, これは $\mathcal{M}_{g,1}$ の共役作用に関して同変な準同型である.

Johnson 準同型の像は全て決定されているわけではない. \mathbb{Q} 上 n が小さい場合には結果が知られている ([21] に Johnson 準同型の像が載った表がある).

2.5. **Hyper コホモロジー群.** $T[H_1]$ を \mathbb{Z} 上 H_1 により生成されるテンソル代数とする. 後の章で自明な複体 $0 \rightarrow T[H_1] \rightarrow 0$ と擬同型 (quasi-isomorphism) となるような $\mathcal{M}_{g,1}$ -加群から成るある複体

$$K^\bullet: 0 \xrightarrow{\partial_*} K^{\bullet,0} \xrightarrow{\partial_*} K^{\bullet,1} \xrightarrow{\partial_*} K^{\bullet,2} \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

が登場する. $K^{\bullet,l}$ を $\mathcal{M}_{g,1}$ の分類空間 $K(\mathcal{M}_{g,1}, 1)$ 上の局所系と思うことにすると, (K^\bullet, ∂_*) は $K(\mathcal{M}_{g,1}, 1)$ 上の局所系から成る複体と考えられる. 局所系の複体 (K^\bullet, ∂_*) の hyper コホモロジー群 $\mathbb{H}(K^\bullet, \partial_*)$ とは次のようなものである ([10]). まず $C^{m,l} = C^m(K(\mathcal{M}_{g,1}, 1); K^{\bullet,l})$ を $K(\mathcal{M}_{g,1}, 1)$ の $K^{\bullet,l}$ -係数の特異コチェイン複体, $\delta: C^{m,l} \rightarrow C^{m+1,l}$ をコバウンダリ作用素とする. ∂_* は自然に準同型 $C^{m,l} \rightarrow C^{m,l+1}$ を導き, この準同型を d と表わすことにする. よって, 二重複体 $(C^{\bullet,\bullet}, \delta, d)$ が得られる. $\mathbb{H}(K^\bullet, \partial_*)$ とは $(C^{\bullet,\bullet}, \delta, d)$ に関連する一重複体のコホモロジー群のことである.

複体 $0 \rightarrow T[H_1] \rightarrow 0$ の hyper コホモロジー群は $T[H_1]$ を (捻れた) 係数を持つ $\mathcal{M}_{g,1}$ のコホモロジー群 $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; T[H_1])$ に他ならない. 河澄響矢助教授 ([14]) は $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; T[H_1])$ の安定な部分の構造を, $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$ 上の代数として決定し, その系として extended mapping class group $\mathcal{M}_{g,1} \times H_1$ の \mathbb{Q} 係数安定コホモロジー代数が一般森田-Mumford 類 ([13]) によって, $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Q})$ 上生成されることを示した.

2.6. **マグナス展開.** (ここではでは明記しない限り係数は \mathbb{Z} に限らず, \mathbb{Q} や \mathbb{R} や \mathbb{C} でもかまわない.) $T[H_1]$ を完備化した代数 $\prod_{n=0}^{\infty} H_1^{\otimes n}$ を $\widehat{T}[H_1]$ と書くことにする. マグナス展開 $\theta: \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) \rightarrow \widehat{T}[H_1]$ とは, 任意の $\gamma, \delta \in \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ に対して以下を満すものである:

$$\theta(\gamma) = 1 + [\gamma] \pmod{\widehat{T}_{\geq 2}}, \quad \theta(\gamma\delta) = \theta(\gamma)\theta(\delta)$$

ここで $\widehat{T}_{\geq 2}$ は次数が 2 以上の元全体から成る $\widehat{T}[H_1]$ のイデアルである.

典型的なマグナス展開は Fox 微分を用いたもの ([5]) θ_{Fox} と, Chen による反復積分を用いたもの θ_{Chen} である ([3]). θ_{Fox} は, ある固定された自由生成元 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g} \in \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ に対して $\theta_{\text{Fox}}(\alpha_i) = 1 + [\alpha_i]$ を満す. θ_{Chen} は de-Rham コホモロジー群 $H_{\text{DR}}^1(\Sigma_{g,1})$ の基底を代表する微分 1-形式 $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{2g}$ とその双対基底 X_1, X_2, \dots, X_{2g} を用いて

$$\theta_{\text{Chen}}(\gamma) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\gamma} \overbrace{\omega \omega \cdots \omega}^n, \quad \omega = \sum_{i=1}^{2g} \omega_i X_i$$

と定義される.

3. 主結果

3.1. $\mathcal{M}_{g,1}$ のコホモロジー群と点の配置空間. 整数 $n \geq k \geq 0$ に対し, 部分空間 $\Delta_{n,k} \subset \Sigma_{g,1}^n$ を次のように定義する:

$$\Delta_{n,k} = \{ (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid \#\{x_1, x_2, \dots, x_n\} \leq k \}$$

ここで $\#$ は $\Sigma_{g,1}$ の部分集合としての元の個数を意味する. だから例えば $\Delta_{n,n} = \Sigma_{g,1}^n$, $\Delta_{n,n-1} = \Delta_n$ である. $Y_{n,k} = \Delta_{n,k} \cup A_n$ とおくと次のような $\text{Diff}_+(\Sigma_{g,1}, \partial\Sigma_{g,1})$ の作用で保たれるフィルトレーションが得られる:

$$A_n = Y_{n,0} \subset Y_{n,1} \subset \dots \subset Y_{n,n-1} \subset Y_{n,n} = \Sigma_{g,1}^n.$$

そして

$$\partial_*: H_k(Y_{n,k}, Y_{n,k-1}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_{k-1}(Y_{n,k-1}, Y_{n,k-2}; \mathbb{Z})$$

をホモロジー境界準同型とする. さらに記号を準備する:

$$K^{n,l} = H_{n-l}(Y_{n,n-l}, Y_{n,n-l-1}; \mathbb{Z}),$$

$$K^{\bullet,l} = \bigoplus_{n=l}^{\infty} K^{n,l}, \quad K^{\bullet} = \bigoplus_{l=0}^{\infty} K^{\bullet,l}, \quad K^{\bullet,\bullet} = \bigoplus_{n,l=0}^{\infty} K^{n,l}.$$

自然な写像 $Y_{m,k} \times Y_{n,l} \rightarrow Y_{m+n,k+l}$ により, $K^{\bullet,\bullet}$ は二次数付き代数になり, 特に $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n = \bigoplus_{n=0}^{\infty} K^{n,0}$ は $K^{\bullet,\bullet}$ の部分代数になる. 次のような複体 $(K^{\bullet,\bullet}, \partial_*)$ が得られる:

$$0 \rightarrow K^{\bullet,0} \xrightarrow{\partial_*} K^{\bullet,1} \xrightarrow{\partial_*} K^{\bullet,2} \xrightarrow{\partial_*} K^{\bullet,3} \xrightarrow{\partial_*} \dots$$

∂_* は $\mathcal{M}_{g,1}$ の K^{\bullet} への作用と可換である. だから $(K^{\bullet,\bullet}, \partial_*)$ を $K(\mathcal{M}_{g,1}, 1)$ 上の局所系の複体と思って, hyper コホモロジー群 $\mathbb{H}(K^{\bullet,\bullet}, \partial_*)$ を定義できる.

定理 1 ([22]). $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$ 上の代数として, $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; T[H_1])$ は $\mathbb{H}(K^{\bullet,\bullet}, \partial_*)$ に同型である.

定理 1 の同型を与える写像は次のように定義される. まず自然な写像 $(\Sigma_{g,1}^n, A_n) \hookrightarrow (\Sigma_{g,1}^n, \Delta_n \cup A_n)$ から導かれるホモロジー準同型を

$$\iota_*: H_1^{\otimes n} \rightarrow H_n$$

とし, ι_* を次のように $K(\mathcal{M}_{g,1}, 1)$ 上の局所系の複体の間の写像と思う (全ての n をまとめて考えている):

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & T[H_1] & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dots \\ & & \downarrow \iota_* & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & K^{\bullet,0} & \xrightarrow{\partial_*} & K^{\bullet,1} & \xrightarrow{\partial_*} & K^{\bullet,2} & \xrightarrow{\partial_*} & K^{\bullet,3} & \xrightarrow{\partial_*} & \dots \end{array}$$

ι_* から導かれる複体の hyper コホモロジー群の間の準同型が定理の同型を与える. 証明の概略などもっと細かいことは §4 で述べられる.

3.2. 表現 $\rho_n: \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow GL(H_n)$ の kernel. $n = 0, 1$ の場合は, 定義により $\text{Ker } \rho_0 = \mathcal{M}_{g,1}$, $\text{Ker } \rho_1 = \mathcal{I}_{g,1}$ であることが分かる. 一般の n に対しては次がなりたつ.

定理 2 ([22]). 任意の整数 $n \geq 0$ に対して $\text{Ker } \rho_n = \mathcal{M}_{g,1}(n)$ が成り立つ.

証明は §7 で与えられる. 任意の n に対して $\mathcal{M}_{g,1}(n) \supsetneq \{1\}$ だからどんなに点の数 n を増やしても ρ_n 忠実な表現にはならないことが分かる.

$\Sigma_{g,1}$ 上の $n+1$ 番目の点が n 番目の点と一致している部分を取り出すことを意味する境界準同型 $H_{n+1} \rightarrow H_n$ に関する射影極限 $\varinjlim_n H_n$ を H_∞ と書くことにする. $\mathcal{M}_{g,1}$ の作用は射影と可換だから, (\mathbb{Z} 上の無限次元の) 表現

$$\rho_\infty: \mathcal{M}_{g,1} \rightarrow GL(H_\infty)$$

を自然に定義できる. Γ_0 が自由群であるから $\bigcap_{n=0}^\infty \Gamma_n$ は単位群であり, このことから次の系が得られる.

系 3 ([22]). 次の二つの表現は忠実である:

$$\begin{aligned} \bigoplus_{n=0}^\infty \rho_n: \mathcal{M}_{g,1} &\rightarrow GL\left(\bigoplus_{n=0}^\infty H_n\right), \\ \rho_\infty: \mathcal{M}_{g,1} &\rightarrow GL(H_\infty). \end{aligned}$$

3.3. Johnson 準同型. §6 において, 各 n に対して H_{n+1} への $\mathcal{M}_{g,1}$ の作用を用いて Johnson 準同型の類似物

$$\tau'_n: \mathcal{M}_{g,1}(n)/\mathcal{M}_{g,1}(n+1) \rightarrow \text{Hom}(H_1, H_1^{\otimes(n+1)})$$

を定義する. 簡単に言うと, τ'_n は作用 $\mathcal{M}_{g,1}(n) \rightarrow \text{End}(H_{n+1})$, $\varphi \mapsto \varphi_* - 1_*$ から直接導かれるものである.

定理 4 ([23]). τ'_n は Johnson 準同型 τ_n に等しい.

3.4. マグナス展開. 後に写像 $\iota_*: \widehat{T}[H_1] \rightarrow \prod_{n=0}^\infty H_n$ が単射であることを見る (Remark 4.3). ここで ι_* の左逆写像 (環準同型) $r: \prod_{n=0}^\infty H_n \rightarrow \widehat{T}[H_1]$ が与えられたと仮定する:

$$R \circ \iota_* = \text{identity}: \widehat{T}[H_1] \rightarrow \prod_{n=0}^\infty H_n \rightarrow \widehat{T}[H_1].$$

左逆写像は一意には存在しないが, R を決めるごとにそれに対応したマグナス展開

$$\theta_R = R \circ \Phi: \mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) \rightarrow \widehat{T}[H_1]$$

が得られる. ここで写像 $\Phi: \mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) \rightarrow \prod_{n=0}^\infty H_n$ は §6 で定義されるある自然

な環準同型で, 一言で言うなら, Chen の反復積分 $\int_\gamma \overbrace{\omega\omega \cdots \omega}^n$ の積分域を表すサイクルのホモロジー類のことである ($\mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ は群環). θ_R がマグナス展開であることは容易に確かめられる. 実際 Φ と R が乗法的だから θ_R もそうであり, 次数が 0 と 1 の部分に限れば R は ι_* の本当の逆写像だから, θ_R がマグナス展開であるための二つの条件は満たされる. §8 において, $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ の自由生成元を固定した上である左逆写像 R_{Fox} を具体的に構成し, 次の定理を示す.

定理 5 ([23]). R_{Fox} に対応するマグナス展開 $\theta_{R_{\text{Fox}}} = R_{\text{Fox}} \circ \Phi$ は Fox 微分を用いて定義したマグナス展開 θ_{Fox} に一致する.

だから 写像 $\Phi: \mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) \rightarrow \prod_{n=0}^\infty H_n$ は, $\mathcal{M}_{g,1}$ -同変になるようなマグナス展開の持ち上げであると言える. ちなみにマグナス展開は $\mathcal{M}_{g,1}$ -同変ではない.

4. H_n に関するある完全系列

この章と次の章では H_n に (写像類群の作用で保たれる) ある構造を持つことを紹介する. この章では H_n たちがある完全系列で互いに関連していることを紹介し, つぎの章では H_n にフィルトレーションの構造をいれ, H_n が $H_1^{\otimes k}$ ($1 \leq k \leq n$) たちの積み重ねで得られることを紹介する. そしてこの章の最後に定理1の証明の概略を述べる.

n 点集合 $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ の k 個の成分への (集合としての) 直和分解全体の成す集合を $\mathbf{S}(n, k)$ と書くことにする. 例えば $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\} \in \mathbf{S}(5, 3)$ である. そして

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \#\mathbf{S}(n, k), \quad (\text{第二種スターリング数})$$

とおく. また $\{\{1, 3\}, \{2, 4\}, \{5\}\}$ のように分割に順序を与えたもの全体から成る集合を $\tilde{\mathbf{S}}(n, k)$ とする. $\tilde{\mathbf{S}}$ へは k 次対称群 \mathfrak{S}_k が自由に作用し, $\mathbf{S}(n, k) = \tilde{\mathbf{S}}(n, k)/\mathfrak{S}_k$ が成り立つ. 写像

$$f: \tilde{\mathbf{S}}(n, k) \times_{\mathfrak{S}_k} \Sigma_{g,1}^k \rightarrow \Delta_{n,k}$$

を $f(J, (x_1, x_2, \dots, x_k)) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $y_i = x_j$ if $i \in J_j$ によって定義する. ここで $J = (J_1, J_2, \dots, J_k)$ と表示した. f と切除同型

$$H_*(Y_{n,k}, Y_{n,k-1}; \mathbb{Z}) \cong H_*(\Delta_{n,k}, \Delta_{n,k-1} \cup (\Delta_{n,k} \cap A_n); \mathbb{Z})$$

を用いて

$$H_m(Y_{n,k}, Y_{n,k-1}; \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k, & \text{if } m = k, \\ 0, & \text{if } m \neq k \end{cases}$$

と計算できる. 簡単のために $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k$ (H_k の $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ 個の直和) なる書き方をしているが, 対称群の作用まで考えると, $\mathbb{Z}\tilde{\mathbf{S}}(n, k) \otimes_{\mathbb{Z}\mathfrak{S}_k} H_k$ と書き表す方が実は正確である. そして, §3.1 の境界準同型 $\partial_*: K^{n, n-k} \rightarrow K^{n, n-(k-1)}$ は

$$\partial_*: \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} H_k \rightarrow \left\{ \begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right\} H_{k-1}$$

と書ける.

命題 1. 次のような $\mathcal{M}_{g,1}$ -加群としての完全系列が存在する:

$$0 \rightarrow H_1^{\otimes n} \rightarrow H_n \xrightarrow{\partial_*} \left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} H_{n-1} \xrightarrow{\partial_*} \left\{ \begin{matrix} n \\ n-2 \end{matrix} \right\} H_{n-2} \xrightarrow{\partial_*} \dots \xrightarrow{\partial_*} \left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} H_2 \xrightarrow{\partial_*} \left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} H_1 \rightarrow 0.$$

命題1の証明の概略を述べる. §3.1 のフィルトレーション $\{Y_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ のホモロジースペクトル系列 $\{(E^l, d^l)\}_{l \geq 1}$ を考えよう:

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(Y_{n,p}, Y_{n,p-1}; \mathbb{Z}) \Rightarrow H_*(\Sigma_{g,1}^n, A_n; \mathbb{Z}).$$

$q \neq 0$ ならば $E_{p,q}^1 = 0$ だから, $l \geq 2$ ならば $d^l = 0$. そして, E^∞ -項は

$$E_{p,q}^\infty = \begin{cases} H_1^{\otimes n}, & \text{if } (p, q) = (n, 0), \\ 0, & \text{if } (p, q) \neq (n, 0) \end{cases}$$

となる. これらの事実から得られる完全系列

$$0 \rightarrow E_{n,0}^\infty \rightarrow E_{n,0}^1 \rightarrow E_{n-1,0}^1 \rightarrow \dots \rightarrow E_{2,0}^1 \rightarrow E_{1,0}^1 \rightarrow 0$$

は求めるべき完全系列に他ならない.

Remark 4.1. 命題1の完全系列は, 基点を考えている点異なるが, Totaro による [25] のスペクトル系列と本質的には同じものである.

命題1を用いて定理1を容易に証明できる. 上の命題はつまり二つの複体

$$\begin{aligned} 0 \rightarrow K^{n,0} \rightarrow K^{n,1} \rightarrow K^{n,2} \rightarrow \dots \rightarrow K^{n,n} \rightarrow 0 \\ 0 \rightarrow H_1^{\otimes n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

が単射 $\iota_*: H_1^{\otimes n} \hookrightarrow K^{n,0} = H_n$ のもとで擬同型であることを意味している. だからこれらの hyper コホモロジー群は互いに同型である ([10]). 前者の複体を $K^{n\bullet}$ と表わすことにする. 後者の hyper cohomology は他ならぬ $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; H_1^{\otimes n})$ であり,

$$H^*(\mathcal{M}_{g,1}; H_1^{\otimes n}) \cong \mathbb{H}(K^{n\bullet}, \partial_*).$$

ι_* が導くコチェイン写像は $C^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$ 上の代数としての射であるから, この同型は $H^*(\mathcal{M}_{g,1}; \mathbb{Z})$ 上の代数としての同型となる. 全ての n について直和をとると, 定理1の同型が得られる.

Remark 4.2. 命題1から得られる (完全系列のオイラー数) = 0 という式は, 多項式の恒等式

$$x^n - \sum_{i=1}^n (-1)^{n-i} \binom{n}{i} x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)) = 0$$

に $x = 2g$ を代入したものに等しい.

Remark 4.3. 命題1により $\iota_*: T[H_1] \rightarrow \bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ は単射である.

5. H_n のあるフィルトレーション

$\Sigma_{g,1}$ を代数多様体と思うことにより $\Sigma_{g,1}$ やその配置空間の \mathbb{Q} 係数コホモロジー群は混合ホッジ構造 ([4]) をもつ (必要に応じて $\Sigma_{g,1}$ を閉曲面から1点を除いた曲面と考えるようにする). その双対として $H_{n,\mathbb{Q}} = H_n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ も混合ホッジ構造を持つ. ここではその重みフィルトレーションに注目する. ホモロジーで考えているから各元は負の重みを持つ.

$H_{n,\mathbb{Q}}$ の重み $-k$ ($k \geq 0$) の重みフィルトレーションを $F_{n,-k} (\subset H_{n,\mathbb{Q}})$ と表し, その grading を $G_{n,-k} = F_{n,-k}/F_{n,-(k+1)}$ と書くことにする. $H_{1,\mathbb{Q}}$ は重みが -1 の元しか含まないため,

$$H_{1,\mathbb{Q}} = F_{1,-1} \supset F_{1,-2} = 0$$

となる. 一般に $H_1^{\otimes n}$ は重み $-n$ の元のみから成る. だから H_2 の場合は, 命題1の完全系列

$$0 \rightarrow H_1^{\otimes 2} \rightarrow H_2 \rightarrow H_1 \rightarrow 0$$

を次のように見ることができる:

$$0 \rightarrow F_{2,-2} \rightarrow H_{2,\mathbb{Q}} \rightarrow G_{2,-1} \rightarrow 0.$$

だから, 重みフィルトレーションは次のようになっていることが分かる.

$$\begin{aligned} H_{2,\mathbb{Q}} &= F_{2,-1} \supset F_{2,-2} \supset F_{2,-3} = 0, \\ G_{2,-2} &\cong H_{1,\mathbb{Q}}^{\otimes 2}, \quad G_{2,-1} \cong H_{1,\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

H_3 の場合にも同様にして, 命題1の完全系列

$$0 \rightarrow H_1^{\otimes 3} \rightarrow H_3 \rightarrow 3H_2 \rightarrow H_1 \rightarrow 0$$

の grading を考えることにより, 3 つの完全系列 (重み = $-3, -2, -1$ に対応) が得られる.

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & H_1^{\otimes 3} & \longrightarrow & G_{3,-3} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & G_{3,-2} & \longrightarrow & 3G_{2,-2} & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0, \\ 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & G_{3,-1} & \longrightarrow & 3G_{2,-1} & \longrightarrow & G_{1,-1} & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

よって次を得る.

$$\begin{aligned} H_{3,\mathbb{Q}} &= F_{3,-1} \supset F_{3,-2} \supset F_{3,-3} \supset F_{3,-4} = 0, \\ G_{3,-3} &\cong H_{1,\mathbb{Q}}^{\otimes 3}, \quad G_{3,-2} \cong 3H_{1,\mathbb{Q}}^{\otimes 2}, \quad G_{3,-1} \cong 2H_{1,\mathbb{Q}} \end{aligned}$$

一般には, 次のようになる.

命題 2. 各正整数 n に対して, H_n は $\mathcal{M}_{g,1}$ 作用によって保たれるあるフィルトレーション

$$H_n = F_{n,-1} \supset F_{n,-2} \supset F_{n,-3} \supset \cdots \supset F_{n,-n} \supset F_{n,-(n+1)} = 0$$

を持ち, $G_{n,-k} = F_{n,-k}/F_{n,-(k+1)}$ は $c(n,k)H_1^{\otimes k}$ に同型である.

ここで $c(n,k)$ は第一種スターリング数 $[n]_k$ の絶対値である: $c(n,k) = (-1)^k [n]_k$.

Remark 5.1. 実は命題は \mathbb{Z} 上で成り立つ. $F_{n,-k}$ も \mathbb{Z} 上で定義でき, \mathbb{Q} 上の議論は \mathbb{Z} 上の議論に \mathbb{Q} をテンソルすれば得られる. 煩雑さを避けるために, 主に \mathbb{Q} 上で述べている. \mathbb{Q} 上でなら, 証明は上の例のように重みフィルトレーションに関する grading の完全系列を繰り返し用いると得られる.

Remark 5.2. 第一種スターリング数に関する恒等式

$$x(x+1)(x+2)\cdots(x+(n-1)) = \sum_{i=1}^n (-1)^i [n]_i x^i$$

に $x = 2g$ を代入したものが, 命題 2 のフィルトレーションを用いた次元の計算に対応している. この恒等式と Remark 4.2 の式は互いに逆 (行列) の式になっている ([24]).

$c(n,k)H_k$ は次のようにも述べられる. $I = \bigoplus_{n=1}^{\infty} H_n$ ($\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ の被約イデアル) とおき, $I_{\mathbb{Q}} = I \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ とする. I^k の次数 n の元のみから成る部分加群を $(I^k)_n$ と表わすことにする: $I^k = \bigoplus_{n=0}^{\infty} (I^k)_n$. 重みフィルトレーションの考察により次が得られる.

補題 3. $(I_{\mathbb{Q}}^k/I_{\mathbb{Q}}^{k+1})_n \cong G_{n,-k} (= c(n,k)H_{1,\mathbb{Q}}^{\otimes k})$.

ここで逆に \mathbb{Z} 上においてフィルトレーション $\{F_{n,-k}\}$ を

$$F_{n,-k} \stackrel{\text{def}}{=} (I^k)_n$$

とあらためて定義すると, 命題 2 の \mathbb{Z} 上のフィルトレーションが得られる. また, \mathfrak{S}_n の $c(n,k)H_k$ への作用はこれで明確になる.

Remark 5.3. 命題を \mathbb{Z} で証明のするためには $\{Y_{n,k}\}_{0 \leq k \leq n}$ に関するある ([8] の前半にある方法と同じ仕組みの) ホモロジースペクトル系列を計算する必要がある. ところがこの E_1 -term は “ぎゅうぎゅう” なために少々やっかいであり, スペクトル系列の微分を組合わせたにきちんと表示する必要がある. \mathbb{Q} 上でならば混合ホッジ構造の重みフィルトレーションによる grading を用いることにより, 問題を分割することができ, (多くの部分が次元の考察ですむ程度にまで) 計算を容易にできる.

6. JOHNSON 準同型 τ_n と τ'_n

さて次に, H_n を用いて τ_n の類似 τ'_n を定義する. $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}(n)$ を固定する. 命題 1 により $H_{n+1}/H_1^{\otimes(n+1)} \subset \{^n H_n\}$ だからここへは φ は自明に作用する. また, $F_{n+1,-2}$ へも自明に作用する, なぜなら $F_{n+1,-2} = (I^2)_{n+1}$ は $u_1 u_2$, ($u_i \in H_i$, $i+j = n$, $i, j \leq n-1$) なる形の元により生成され, $\varphi_*(u_1 u_2) = \varphi_*(u_1) \varphi_*(u_2) = u_1 u_2$ となるからである. だから, 任意の $u \in H_{n+1}$ に対し, $\varphi_*(u) - u$ は $[u] = u \pmod{F_{n+1,-2}}$ にしか依存しない. したがって $\tau'_n(\varphi)$ を

$$\tau'_n(\varphi): G_{n,-1} = c(n, 1)H_1 \rightarrow H_1^{\otimes n+1}, \quad [u] \mapsto \varphi_*(u) - u$$

と定義することにより, 準同型

$$\tau'_n: \mathcal{M}_{g,1}(n) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathfrak{S}_{n+1}}(c(n, 1)H_1, H_1^{\otimes n+1})$$

を定義できる. また, $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}(n+1)$ なら明らかに $\tau'_n(\varphi) = 0$ である.

ところで, $f \in \text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathfrak{S}_{n+1}}(c(n, 1)H_1, H_1^{\otimes n+1})$ に対し, f を $c(n, 1)H_1$ のひとつの直和成分 H_1 へ制限することにより, $f|_{H_1} \in \text{Hom}(H_1, H_1^{\otimes n+1})$ が得られる. この対応により, 同型 $\text{Hom}_{\mathbb{Z}\mathfrak{S}_{n+1}}(c(n, 1)H_1, H_1^{\otimes n+1}) \cong \text{Hom}(H_1, H_1^{\otimes n+1})$ が得られる. この同型のもとで, τ'_n は

$$\tau'_n: \mathcal{M}_{g,1}(n)/\mathcal{M}_{g,1}(n+1) \rightarrow \text{Hom}(H_1, H_1^{\otimes n+1})$$

と書ける. つまりオリジナルの Johnson 準同型 τ_n と比較が可能になる.

 7. 基本群と $\prod_{n=0}^{\infty} H_n$

この章では, $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ を $\prod_{n=0}^{\infty} H_n$ に乗法的に埋め込めること, そして H_n には本質的にはそのような種類の元しか持たないことを述べる.

Δ^n を次のような座標を持つ n 次元単体とする:

$$\Delta^n = \{ (t_1, t_2, \dots, t_n) \mid 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n \}.$$

端点が p_0 であるような path $\tilde{\gamma}: [0, 1] \rightarrow \Sigma_{g,1}$ ($\gamma \in \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ をそのホモトピー類とする) に対し, 写像

$$\Delta^n \ni (t_1, t_2, \dots, t_n) \mapsto (\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\gamma}(t_2), \dots, \tilde{\gamma}(t_n)) \in \Sigma_{g,1}^n$$

は γ にしか依らないホモロジー類 $\phi_n(\gamma) \in H_n$ をひとつ定める. この $\phi_n(\gamma)$ が H_n の最も典型的な元である. 次のような準同型が定義される:

$$\begin{aligned} \phi_n: \mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) &\rightarrow H_n, \\ \Phi = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_n: \mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) &\rightarrow \prod_{n=0}^{\infty} H_n. \end{aligned}$$

特に Φ は環準同形になる ($\prod_{n=0}^{\infty} H_n$ は $\bigoplus_{n=0}^{\infty} H_n$ の完備化).

命題 4. Φ は単射である. 特に $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ は $\prod_{n=0}^{\infty} H_n$ に乗法的に埋め込まれる.

これは次のようにして確かめられる. $\gamma = [[[\dots[\gamma_1, \gamma_2], \dots], \gamma_{n-1}], \gamma_n] \in \Gamma_n$ なる形の元をひとつ固定する. 自然な写像

$$\Gamma_n/\Gamma_{n+1} \cong \mathcal{L}_n \hookrightarrow H_1^{\otimes n} \hookrightarrow H_n$$

のもとで, ϕ_n は

$$\begin{aligned} \phi_n(\gamma) &= [[[\dots[\phi_1(\gamma_1), \phi_1(\gamma_2)], \dots], \phi_1(\gamma_{n-1})]] \\ &= [[\dots[u_1, u_2], \dots], u_n] \end{aligned}$$

と表せる ($u_i = [\gamma_i] \in H_1$, $[u, v] = uv - vu$). だから, ϕ_n から自然に導かれる写像 $\Gamma_n/\Gamma_{n+1} \rightarrow H_n$ は単射である. 言い換えると, $J \subset \mathbb{Z}\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ を被約イデアルとすると, $\text{Ker } \phi_n = J^{n+1}$ である. $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ は自由群だから $\bigcap_{n=0}^{\infty} J^n = \{0\}$ であり, $\text{Ker } \Phi = \bigcap_{n=0}^{\infty} \text{Ker } \phi_n = \{0\}$, つまり Φ は単射である. そして乗法的部分集合

$$\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0) \cong \Phi(\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)) \subset \prod_{n=0}^{\infty} H_n$$

が得られる.

自由群 $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ の自由基底 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}$ を固定する. 実は H_n の任意の元は次のような形の元の和として表される:

$$\sigma_*(\phi_{n_1}(\alpha_1)\phi_{n_2}(\alpha_2)\cdots\phi_{n_{2g}}(\alpha_{2g}))$$

($\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $\sum_i n_i = n$, $\alpha_i \in \pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$). さらにこれらの元が H_n の \mathbb{Z} 上の基底を成している ([22]).

上記のような事実から, 定理 2 の証明が次のように得られる. $\varphi \in \mathcal{M}_{g,1}(n)$ ならば, 基底の表示から

$$\text{Ker } \rho_n \supset \mathcal{M}_{g,1}(n)$$

が分かる. そして $\text{Ker } \phi_n = J^{n+1}$ なる事実から, $\mathcal{M}_{g,1}$ の作用を保つ埋め込み $\Gamma_0/\Gamma_{n+1} \subset H_n$ が存在しすることが分かり,

$$\text{Ker } \rho_n \subset \mathcal{M}_{g,1}(n)$$

が言える. よって $\text{Ker } \rho_n = \mathcal{M}_{g,1}(n)$ である.

また, 上のような具体的な γ に対して $\tau_n(\varphi)(\gamma) = \tau'_n(\varphi)(\gamma)$ となることは容易に確かめられるから, 定理 4 がえられる.

8. マグナス展開

この章では, 完備化された代数 $\prod_{n=0}^{\infty} H_n$ と自由群 $\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ のマグナス展開との関係を述べる.

$\pi_1(\Sigma_{g,1}, p_0)$ の自由基底 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}$ を固定する. $\mathfrak{S}_{n,k} \subset \mathfrak{S}_n$ を 1 から n までの数字を全て一回ずつ用いてちょうど k 個の巡回置換の積によって表される置換全体の成す部分集合とする. このとき $\#\mathfrak{S}_{n,k} = c(n, k)$ であることを注意しておく. また, 各置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_{n,k}$ は, 全ての数字が一回ずつ登場し, 可能な限り昇順に並ぶような一意的な表示 (たとえば, $(15)(24)(3) \in \mathfrak{S}_5$) を持つ. $\sigma = c_1 c_2 \cdots c_k$, (c_i は長さ 1 以上の巡回置換) をそのような一意的な表示とする. c_i の長さを n_i とする. そして次のような元を構成する:

$$\begin{aligned} \sigma_*(\phi_{n_1}(\alpha_{i_1})\phi_{n_2}(\alpha_{i_2})\phi_{n_3}(\alpha_{i_3})\cdots\phi_{n_{2g}}(\alpha_{i_{2g}})) &\in F_{n,-k}, \\ 1 \leq k \leq n, \quad \sigma \in \mathfrak{S}_{n,k}, \quad 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_{2g} \leq 2g. \end{aligned}$$

これが H_n の基底を成す ([23]). 前章の後半において H_n の基底を具体的に記述したが, それとは別の表示方法である.

だから自由生成系をひとつ指定するごとに同型対応

$$H_n \cong G_{n,-1} \oplus G_{n,-2} \oplus \cdots \oplus G_{n,-n}$$

をひとつ与えることができる. この直和分解により与えられる射影 $H_n \rightarrow G_{n,-n} = H_1^{\otimes n}$ を全ての n に関して考えることにより $\iota_*: T[H_1] \rightarrow \prod_{n=0}^{\infty} H_n$ の左逆写像 $R_{\text{Fox}}: \prod_{n=0}^{\infty} H_n \rightarrow \widehat{T}[H_1]$ が得られる. R_{Fox} が環準同型であることも定義から直接確かめられる. この H_n の直和分解のもとでは $\phi_n(\alpha_i) \in G_{n,-1}$ だから,

$$R_{\text{Fox}}(1 + \phi_1(\alpha_i) + \phi_2(\alpha_i) + \phi_3(\alpha_i) + \cdots) = 1 + [\alpha_i]$$

である。よって $R_{\text{Fox}} \circ \Phi$ は、自由生成系 $\{\alpha_i\}$ に関して Fox 微分を用いて定義されたマグナス展開である。つまり、定理 5 がえられる。

REFERENCES

- [1] Bott R, Cattaneo A S, *Integral invariants of 3-manifolds*, J. Differential Geom. 48 (1998), no. 1, 91–133.
- [2] Bott R, Cattaneo, A S, *Integral invariants of 3-manifolds. II*, J. Differential Geom. 53 (1999), no. 1, 1–13.
- [3] Chen K.-T., *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. 83 (1977) 831–876.
- [4] P. Deligne, *Théorie de Hodge II, III*. Publ. IHES No. 40 (1971), 5–57; No. 44 (1974), 5–77.
- [5] R Fox, *Free differential calculus. I*, Ann. of Math. 57 (1953) 547–560.
- [6] S Garoufalidis, J Levine, *Finite type 3-manifolds invariants, the mapping class group and blinks*, J. Diff. Geom. 47 (1997) 257–320.
- [7] S Garoufalidis, J Levine, *Finite type 3-manifolds invariants and the structure of the Torelli group I*, Invent. Math. 131 (1998) 541–594.
- [8] Getzler E, *Resolving mixed Hodge modules on configuration spaces*, Duke Math. J. 96 (1999), no. 1, 175–203.
- [9] Goncharov A. B, *Multiple polylogarithms and mixed Tate motives*, math.AG/0103059 2001.
- [10] P. Griffiths, J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley & Sons, New York 1978.
- [11] D Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , Math. Ann. 249 (1980) 225–242.
- [12] D Johnson, *A survey of the Torelli group*, Contemporary Mathematics 20 (Amer. Math. Soc., Providence, RI 1983) 165–179.
- [13] N Kawazumi, *A generalization of the Morita-Mumford classes to extended mapping class group for surfaces*, Invent. Math. 131 (1998) 137–149.
- [14] N Kawazumi, *On the stable cohomology algebra of extended mapping class group for surfaces*, preprint, (1995).
- [15] T Kitano, *Johnson’s homomorphisms of subgroups of the mapping class group, the Magnus expansion and Massey higher products of mapping tori*, Topology Appl. 69 (1996) 165–172.
- [16] Greg Kuperberg, Dylan P. Thurston, *Perturbative 3-manifold invariants by cut-and-paste topology*, math.GT/9912167, (1999).
- [17] S Morita, *Casson’s invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles I*, Topology, 28 (1989) 305–323.
- [18] S Morita, *On the structure of the Torelli group and the Casson invariant*, Topology, 30 (1991) 603–621.
- [19] S Morita, *Abelian quotients of subgroups of the mapping class group of surfaces*, Duke Math. J. 70 (1993) 699–726.
- [20] S Morita. *Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles*, J. Diff. Geom. 47 (1997), no. 3, 560–599.
- [21] S Morita. *Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect*, Geom. Topol. Monogr., 2, Proceedings of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), 349–406 (electronic).
- [22] T Moriyama, *The mapping class group action on the homology of the configuration spaces of surfaces*, preprint, (2001).
- [23] T Moriyama, *On the homology of the configuration spaces*, D. Thesis, (2002).
- [24] Rota G-C, *On the foundations of combinatorial theory. I. Theory of Möbius functions*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie und Verw. Gebiete 2 1964 340–368 (1964).
- [25] Totaro B, *Configuration spaces of algebraic varieties*, Topology 35 (1996), no. 4, 1057–1067.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES. UNIVERSITY OF TOKYO, KOMABA, TOKYO 153-8914, JAPAN

E-mail address: tetsuhir@ms.u-tokyo.ac.jp

On fibered knots in a genus 2 Heegaard surface for the 3-sphere¹

平澤 美可三 Mikami Hirasawa (学習院大学 数学科)

村杉 邦男 Kunio Murasugi (トロント大学 数学科)

1. INTRODUCTION

三次元球面に標準的に埋め込まれた種数 2 の閉曲面に埋め込まれている結び目をダブルトラス結び目といいます。本講演では、そのような結び目のファイバー性の研究について、その背景、考えられる手法、また最近の結果について述べます。

結び目 K がファイバー結び目であるとは、 K の S^3 における補空間が K のあるザイフェルト曲面をファイバーとした S^1 上の曲面束になっていることをいいます。またファイバーとなるザイフェルト曲面のことをファイバー曲面といいます。

研究の動機の一つとして、次の予想があります。以下で、 K のトンネル数が 1 であるとは、 K にあるアーク (結び目解消トンネル) を付け加えて得られるシーターカーブの補空間が標準的なハンドル体になることをいいます。

予想 1.1. 三次元球面 S^3 内の結び目 K に沿ったデーモン手術によって、基本群が有限な多様体を得られたとしたら、 K はトンネル数が 1 のファイバー結び目であろう。

Berge [1](1990 頃) や Dean [5] (1996) によって与えられた、有限基本群の多様体(レンズ空間や、特別なザイフェルト多様体)を産み出す結び目の構成法に従ったものがその例で、宮崎-茂手木 [18] の捻りトラス結び目を含め、現在までに知られている例が全てそうになっています。

結び目の 特性 P 予想とは、非自明結び目のデーモン手術では基本群が自明な多様体は生じないであろうというもので、その反例はポアンカレ予想の反例となることが、Gordon-Luecke [9] (1989) によって示されています。近年内外の研究者により、ラミネーションや葉層構造を用いて、結び目の様々なクラスに対して、特性 P 予想が証明されましたが ([7], [13]参照)、そこでは、その様な結び目から得られる多様体は無限基本群を持つことが示されており、ぎりぎりの有限部分が取り残されています。特性 P 予想は、最近では拡張されてされ、「有限基本群をもつ多様体を産み出す結び目のデーモン手術の決定」という問題になっています。ちなみにダブルトラス結び目については、強可逆結び目になるか、または、種数 1 で、自由周期 2 をもつものになるので、特性 P 予想が証明されています。

そのような状況から、トンネル数 1 のファイバー結び目を決定し、そのファイバー曲面や結び目解消トンネルがどのように振る舞っているのかを調べることに興味もたれます。

定義から明らかのように、トンネル数が 1 の結び目はダブルトラス結び目になります。(逆にダブルトラス結び目のトンネル数は高々 2 であることが知られています。) 今回は、「ダブルトラス結び目がいつトンネル数 1 になるか」という問題にはひとまず触れず、「いつファイバーになるか」を考

¹第 49 回 トポロジーシンポジウム 報告集 (2002 年 7 月)

えます。セクション2では、バンド和になっているものを、またセクション3では、トンネル数1のサテライト結び目を扱います。

ダブルトラス結び目を一括して扱うのは困難なため、以下のように六つに場合分けします。まず、ダブルトラス結び目の表記法を述べます。結び目 K をダブルトラスごと下図の様にカットして二つの一穴トラス上のアークに切り分けます。すると、左右のトラスには高々三種の平行クラスが生じます。それぞれの本数を n_1, \dots, n_3 と表し、さらにそれぞれのクラスのスロープを下図の慣例に従って表記します。左右のトラスそれぞれについて、二つのクラスのスロープを決めると残りの一つのスロープは自動的に決まります。左右のトラスを張り合わせると元の K が復元できますが、そのときにアークが何本分捨られるかを ρ で表します。

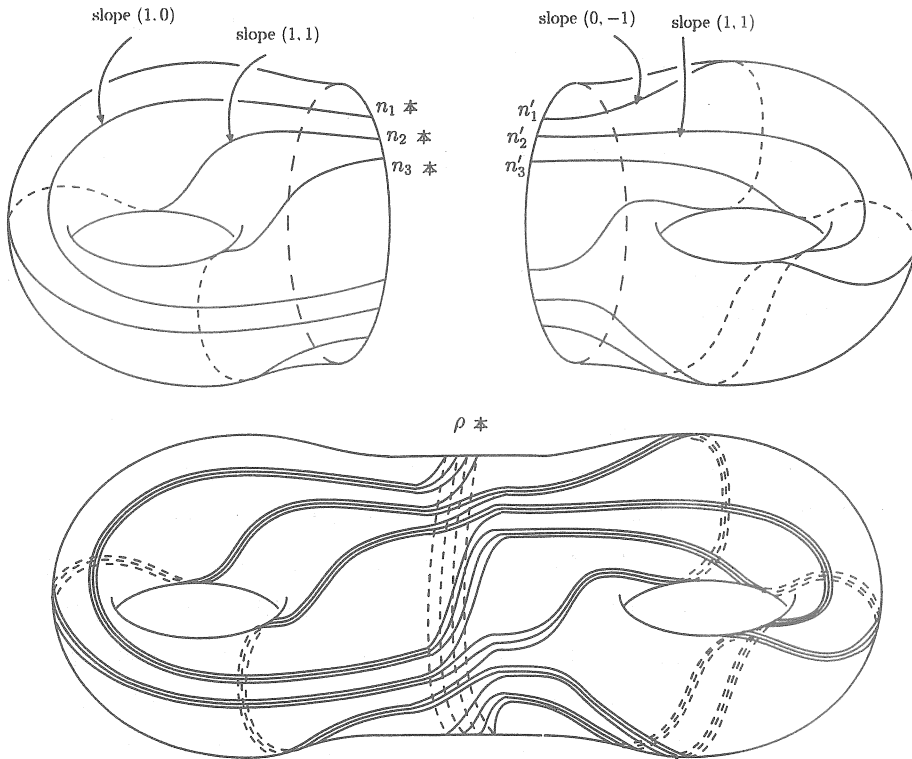


Figure 1: ダブルトラス結び目

$$K\{n_1, n_2, n_3; n'_1, n'_2, n'_3 | \rho\}(p, q, r, s)(p', q', r', s') = K\{(3, 3, 3; 3, 3, 3 | 4)(1, 0, 1, 1)(0, -1, 1, 1)\}$$

ダブルトラス結び目は、上の様にして得られる平行クラスが何種類ずつあるかに応じて、(1,1)-型、から (3,3)-型まで六種類に分類されます。

今回は (1,1)-型の全て、と (1,2)-型のあるクラスについて述べます。

ちなみに最近のダブルトラス結び目の研究としては、[11], [12], [4], [22] ([23] 参照), [10] などが上げられます。

本セクションの結び目として、ファイバー結び目と、そのアレクサンダー多項式について少し述べておきます。

ファイバー結び目の概念が初めて現れたのは 1959 年の Neuwirth の博士論文 [21] でした。そこでは、結び目補空間の基本群の言葉で定義されています。その後 Stallings [25] によって、ファイバー曲面を用いた幾何的な再定義が行われ、ファイバー結び目の概念が定着しました。一般に与えられた結び目がファイバー結び目かどうかを決定することは難しい問題です。この問題は Murasugi によるファイバーな交代結び目の代数的な特徴付け[20]を経て、1980年代に Gabai の縫い目付多様体の理論[6]や、Stallings のストーリングス捻りの操作[26]などの新しい概念の導入により、飛躍的に進歩しました。80年代末には T. Kobayashi がプレファイバー曲面と呼ばれる新しい概念を提唱し[15]、続いて結び目のバンド和がファイバー結び目になるための必要十分条件[16](1992)を証明しました。我々の最初の結果は、このプレファイバー曲面とバンド和に関する Kobayashi の結果の十年を経ての初めての応用です。

本研究では、ファイバー曲面の構成と、アレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ の計算が重要な役割を担います。次のことが知られています。

定理 1.2. [21] K をファイバー結び目とすると、次が成立する。

- (1) $\Delta_K(t)$ はモニック、即ち、 $\Delta_K(0) = \pm 1$.
- (2) $\deg \Delta_K(t) = 2g(K)$. (ただし $g(K)$ は K の種数)

アレクサンダー多項式が 1 でも幾らでも高い種数をもつ結び目があることから分かるように、この定理の逆は一般には成立しません。また結び目の種数を決定することもやはり困難です。具体的に最小種数曲面の候補が構成できた場合には、村杉和分解や、Gabai の縫い目付多様体の分解を使って調べることができます。

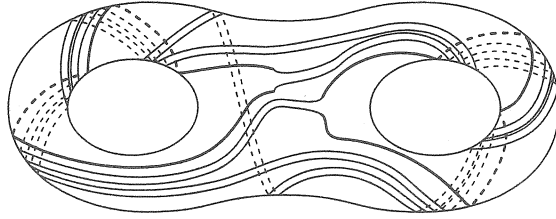
2. 結果の紹介 I

まず、(1,1)-型のものについて、いつファイバー結び目になるかが完全に決定できました。

定理 2.1. K を (1,1)-型のダブルトールス結び目で、ダブルトールスを二つの領域に分離しないものとする。このとき、 K がファイバー結び目になる $\Leftrightarrow \Delta_K(t)$ がモニック。

ちなみに、 K がダブルトールスを二つの領域に分離するときには、分離されたピースが種数 1 のザイフェルト曲面になることから、ファイバー結び目は自明結び目、三葉結び目、8の字結び目のいずれかになります。

(1,1)-型の非分離ダブルトールス結び目は二つのトールス結び目のバンド和になっており、そのファイバー性の決定は、トールス結び目が自明な時に帰着できます。典型的な例とその模式図を挙げておきます。



白明結び目二つのバンド和

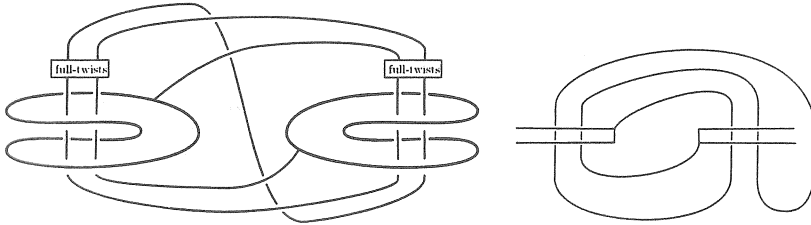


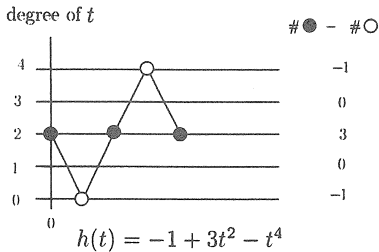
Figure 2.1: (1, 1)-型のもは、二つのトーラス結び目のバンド和

問題は次の二つのステップに分かれます。

- (1) いかにして、最小種数曲面、特にファイバー曲面を構成するか。
- (2) いかにしてアレクサンダー多項式を算出するか。

これらに関しては、手作業で実行可能なアルゴリズムが構成できました。詳しくは、[14] 及び今後公表しますプレプリントを参照下さい。

以下では、アレクサンダー多項式がどのように算出できるかの例を述べます。Figure 2.1 の模式図(右下)において、左右の線を繋いでいるカーブを左端から右端までフォローして、左右の水平線を突き抜けるときに、カーブが上昇するか、下降するかを記録するグラフを描きます。



ただし、グラフが二歩ずつ上下しているのは、左右に二本ずつ水平線があることに対応します。そうして得られたグラフの頂点を白黒交互にぬり、レベル g にある、黒 (resp. 白) 頂点は、 t^g (resp. $-t^g$) 貢献するとして、全頂点の貢献の合計を $h(t)$ で表します。

定理 2.2. その時、 K のアレクサンダー多項式は $h(t)h(t^{-1})$ で得られる。

例. Figure 2.1 の K に対して、 $\Delta_K(t) \doteq (-1 + 3t^2 - t^5)(-1 + 3t^{-2} - t^{-5})$

Remark 2.3. ちなみに、この方法で二橋結び目のアレクサンダー多項式が簡単に計算できることがわかりました。 $K\{(n, 0, 0; n, 0, 0|p)(1, 1, -, -)(1, 1, -, -)\}$ に対して、先の模式図を構成すると、ちょうど二橋結び目 $B(n, p)$ のシューベルト図の半分が現れ、 $\Delta_{B(n,p)}(t) \doteq h(t)$ となります。

3. 結果の紹介 II

次に (1, 2)-型のものに関する結果を述べます。

その型ものは、一般に $K\{(n_1, 0, 0; n'_1, n'_2, 0|p)(a, b, -, -)(c, d, e, f)\}$ と書けます。今回は、

$$K = K\{(n, 0, 0; 1, n-1, 0|p)(a, b, -, -)(0, -1, 1, 0)\}$$

と書けるものについて述べます。このクラスは、森元-作間 [19] (1991)によって決定された、トンネル数 1 のサテライト結び目のクラスに一致します。合田-寺垣内 [8] (1999) はそのような結び目の内、種数 1 のものを決定しました。今ではそのような結び目の種数を決定することができます。ちなみに、その後、Scharlemann [24] によって、種数 1、トンネル数 1 の結び目は、[8] までで知られたものだけであることが示されました。

まず上記のトンネル数 1 のサテライト結び目 K がいかにして得られるかを説明します。大雑把にいうと、 K は二橋絡み目の一方の成分を他方によって捻って得られた結び目をトーラス結び目によってサテライト化したものになります。

絵で説明すると以下のようになります。(a) シューベルト表記による二橋絡み目 $B(2n, 2p+1) = K_1 \cup K_2$ のシューベルト図を描きます。(b) 二橋絡み目なので各成分は自明結び目となり、 K_2 を自明な形に変形します。(c) その時点で K_1 はまだ自明結び目ですが、ダブルトーラスに乗ります。(d) 図の左部分ではアークの平行クラスが一種類になっていて、そこがダブルトーラスにちょうど乗るように捻りながらトーラス結び目 $T(a, b)$ に沿って置き直します。

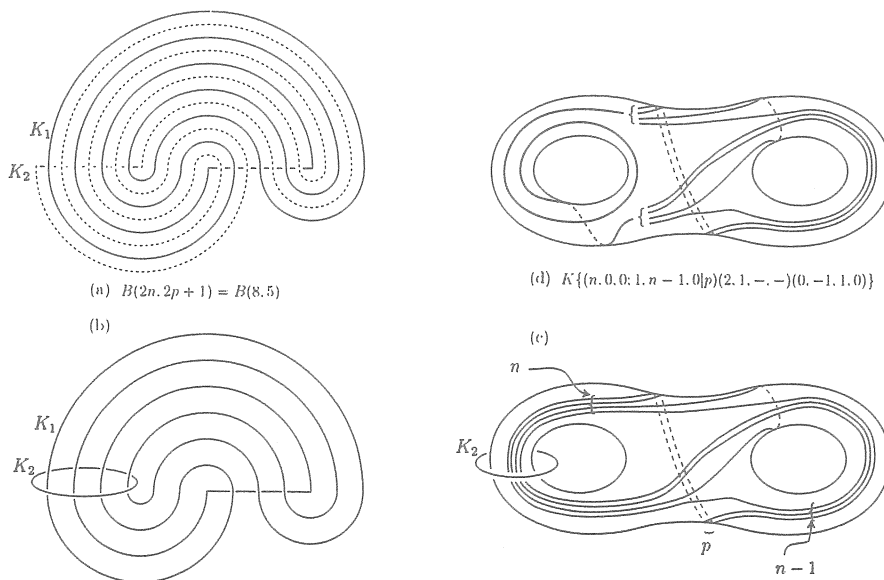


Figure 3.1: (c) を K_2 に沿って r 回捻ったものが、 $K(n, p|r)$

ここで、その様な結び目 K は‘サテライト結び目’と呼ばれるものになっており、そのファイバー性と、そのアレクサンダー多項式のモニック性は、‘コンパニオン結び目’と‘パターン結び目’のそれに帰着できます [3, Propositions 4.15 and 8.23]. ここではコンパニオンはトーラス結び目で、任意のトーラス結び目はファイバー結び目です. パターンは、(c) の結び目を K_2 に沿って ab 回捻ったものになります. 図 3.1 (c) のように、二橋絡み目 $B(2n, 2p+1)$ の一方の成分を他方によって r 回捻って得られた結び目を $K(n, p|r)$ と表すことにします. また、有理数 α/β で、 $\alpha > \beta > 0$, α は偶数、 $\gcd(\alpha, \beta) = 1$ のものについて、それを以下のように連分数展開できます.

$$\alpha/\beta = 2a_1 - (2a_2 - (\cdots - (2a_{m-1} - (2a_m)^{-1})^{-1} \cdots)^{-1})^{-1}$$

しかも、この展開は一意的で、 $a_1 > 0$ となります. そこで、これを $\alpha/\beta = [2a_1, 2a_2, \dots, 2a_m]$ と書くことにします. $B(\alpha, \beta)$ が絡み目になっているときには、 β と m は奇数になります.

定理 3.1. $K = K\{(n, 0, 0; 1, n-1, 0|p)(a, b, -, -)(0, -1, 1, 0)\}$ に対し、絡み数 $lk(K_1, K_2) = 0$ とする. この時、次が成り立つ.

(1) $T(a, b)$ が非自明ならば (即ち $|a|, |b| \geq 2$)、 K は決してファイバー結び目にならない.

(2) $T(a, b)$ が自明結び目とする. この時、

(i) $K(n, p|r)$ は $|r| > 1$ の時、決してファイバー結び目にならない.

(ii) $|r| = 1$ のとき、 $K(n, p|r)$ がファイバー結び目 $\iff b_i > 0, \sum_{i \leq p} b_i = \sum_{j > p} b_j$ かつ

$$2n/(2p+1) = [2b_1, 2, 2b_2, \dots, 2b_p, \pm 2, -2b_{p+1}, -2, -2b_{p+2}, \dots, -2, -2b_q]$$

例として、Figure 3.1 (c) で、 r を ± 1 としたものはファイバー結び目になり、 $|r| > 1$ の時にはファイバー結び目になりません.

証明の概略. (1) については、[3, Proposition 4.15] による. (2) について、 $K(n, p|r) = K(r)$ のアレクサンダー多項式は $\Delta_{K(r)}(t) = rf(t) + 1$ の形に書けることを示す. それにより、(i) $r > 1$ のとき、 $f(t) \neq 0$ ならば、 $\Delta_{K(r)}$ はモニックにならない. また $f(t) = 0$ ならば、 $\Delta_{K(r)} = 1$ 、しかし $K(r)$ は自明結び目ではない[17] ので、 $2g(K(r)) > 0 = \deg \Delta_{K(r)}$. 故にファイバー結び目にならない. 最後に (ii) $r = \pm 1$ とする. そのとき、 $K(r)$ に実際に最小種数曲面を構成し、Hopf band の de(plumbing) や、Gabai 流の縫い目付多様体分解によってファイバー性を決定する.

最後に $lk(K_1, K_2) \neq 0$ の場合を説明します. 定理 3.1 に比べて圧倒的に複雑になります. それでもなお、次が得られました.

定理 3.2. $K = K\{(n, 0, 0; 1, n-1, 0|p)(a, b, -, -)(0, -1, 1, 0)\}$ に対し、絡み数 $lk(K_1, K_2) \neq 0$ とする. この時、次が成り立つ.

K がファイバー結び目 $\iff K(n, p|r)$ がファイバー結び目 $\iff \Delta_{K(n, p|r)}$ がモニック.

この定理の主張そのものは至ってシンプルなのですが、証明はアレクサンダー多項式の公式を作ったり、なんとか張った曲面の上で圧縮円板を探したり、ホップバンドをプラミングしたり、はずした

り、縫い目付多様体に持ち上げて、曲面で分解したりと、様々なことをせねばなりませんでした。それでもなお、定理 2.1 の結果もそうでしたが、このように複雑に見える結び目のファイバー性がアレクサンダー多項式によって決定されるということは、大変以外で、また面白いことでした。講演では、その辺りの事情もお伝えしたいと思います。

REFERENCES

- [1] J. Berge, *Some knots with surgeries yielding lens spaces*, unpublished manuscript.
- [2] S. Bleiler and M. Scharlemann, *A projective plane in R^4 with three critical points is standard. Strongly invertible knots have property P*. *Topology* 27 (1988), 519–540.
- [3] G. Burde and H. Zieschang, *Knots*, de Gruyter Studies in Math., 5, Walter de Gruyter, 1985.
- [4] D. H. Choi and K. H. Ko, *Subfamily of 1-bridge torus knots*, preprint.
- [5] J. Dean, *Hyperbolic knots with small Seifert-fibered Dehn surgeries*, PH.D. thesis, University of Texas at Austin, May 1996.
- [6] D. Gabai, *Detecting fibred links in S^3* , *Comment. Math. Helv.*, 61 (1986), 519–555.
- [7] H. Goda, 三次元多様体上の essential lamination とその応用について。第 4 4 回 トポロジーシンポジウム講演集 (1997), 1–8.
- [8] H. Goda and M. Teragaito, *Tunnel number one genus one non-simple knots*, *Tokyo J. Math.* 22 (1999), 99–104.
- [9] C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*. *J. Amer. Math. Soc.* 2 (1989), 371–415.
- [10] C. Hayashi, *Trivial double-torus knots*, preprint.
- [11] P. Hill, *On boule-torus knots (I)*, *J. Knot Theory and its Ramifications* 8 (1999), No 8, 1009 – 1048.
- [12] P. Hill and K. Murasugi: *On double-torus knots (II)*, *J. Knot Theory Ramifications* 9 (2000), No. 5, 617 – 667.
- [13] M. Hirasawa, *Construction of essential laminations in link complements using branched surfaces*. 第 4 5 回 トポロジーシンポジウム講演集 (1998) 13–26.
- [14] M. Hirasawa and K. Murasugi, *On double torus fibered knots (Survey)*, 京都大学数理解析研究所 講究録 2 0 0 2 年, to appear
- [15] T. Kobayashi, *Fibered links and unknotting operations*, *Osaka J. Math.* 26 (1989), 699–752.
- [16] ———, *Fibered links which are band connected sum of two links*, *Knots 90* (Osaka, 1990), 9–23, de Gruyter, Berlin, 1992.
- [17] M. Kouno, K. Motegi and T. Shibuya, *Twisting and knot types*, *J. Math. Soc. Japan* 44 (1992), 199–216.
- [18] K. Miyazaki and K. Motegi, *Seifert fibered manifolds and Dehn surgery III.*, *Comm. Anal. Geom.* 7 (1999), No. 3, 551–582.
- [19] K. Morimoto and M. Sakuma, *On unknotting tunnels for knots*, *Math. Ann.* 289 (1991), 143–167.
- [20] K. Murasugi, *On a certain subgroup of an alternating link*, *Amer. J. Math.*, 85 (1963), 544–550.
- [21] L. P. Neuwirth, *knot groups*, Thesis, Princeton University 1959.
- [22] M. Ozawa, *Tangle decompositions of double torus knots and links*, *J. Knot Theory Ramifications* 8 (1999), 931–939.
- [23] ———, *Tangle decompositions of knots and links*, 第 4 7 回 トポロジーシンポジウム報告集 (2000) 45–54
- [24] M. Scharlemann, *The Goda-Teragaito Conjecture: an overview*, 京都大学数理解析研究所 講究録 1229 (2002) 87–102. available at: <http://www.math.ucsb.edu/~mgscharl/>
- [25] J. Stallings, *On fibering certain 3-manifolds*, In: *Topology of 3-manifolds and related topics*, Prentice-Hall (1962), 95–100.
- [26] J. Stallings: *Constructions of fibred knots and links*, *Algebraic and geometric topology* (Proc. Sympos. Pure Math., 1976), Part 2, pp. 55–60, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978.

空間グラフの不変量と局所変形

新國 亮* †

東北大学大学院情報科学研究科

2002年7月25日

1. はじめに

本稿では、グラフといえば有限グラフで、自然に位相空間と考えます。グラフ G の 3次元空間 \mathbf{R}^3 (もしくは3次元球面 S^3) への埋め込み $f: G \rightarrow \mathbf{R}^3$ を、空間グラフ、もしくは G の空間埋め込みといいます。特に G が、 S^1 もしくは幾つかの S^1 の非交和と同相なときは、 f は結び目及び絡み目に他なりません。

空間グラフ理論とは、空間グラフを、主に結び目理論の観点から調べる研究領域です。筆者は、特に不変量と局所変形の相互の結び付きに着目して、空間グラフの幾何学的な構造を捉えたいと思っています。その基本テーマは、結び目理論と同様に、グラフについてその空間埋め込みがどれぐらいあるかを分類することですが、対象を特に S^1 に限定していないので、統一的な取扱いが非常に難しく、また、結び目理論では見られない特有の現象が生じることがあります。研究方法としては、結び目理論の手法は勿論、グラフ理論の組み合わせの手法も用いられますが、こと全ての空間グラフの統一的な取扱いには、位相幾何学的手法が有効であるように思います。

2節では、現在知られている、位相幾何学的手法で全ての空間グラフに定義できる不変量と、幾何学的な分類問題との関わりについて述べます。3節では、結び目理論の手法を応用した空間グラフの研究、特に結び目の次数3の Vassiliev 不変量を応用して得られた結果について解説します。

2. Wu 不変量

全ての空間グラフに定義できる不変量は、まだそれほど多くありません。ここでは、空間グラフ、及びグラフの平面はめ込みについて、Wu 不変量と呼ばれる代数的な不変量と、分類問題との関わりについて説明します。

2.1. 空間グラフの Wu 不変量と、ホモロジー分類

空間グラフにおいて、緩やかではありますが、最も基本的な分類を与えるのは、ホモロジーという同値関係です。グラフ G の空間埋め込み f と g は、それらを繋ぐ局所平坦な埋め込み $\Phi: (G \times I) \# \bigcup_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbf{R}^3 \times I$ が存在するとき、ホモロガスであるといいます [34]。ここに $I = [0, 1]$,

* nick@ims.is.tohoku.ac.jp

† <http://www.ims.is.tohoku.ac.jp/~nick/index-e.html>

S_i は向き付け可能な閉曲面, $\#$ は S_i と G のある辺 e と I との積 $e \times I$ との連結和を表します. 空間グラフのホモロジー分類に関して, 次が知られています.

定理 2.1.1. (谷山 [36], 本橋-谷山 [12]) グラフ G の空間埋め込み f, g に対し, 次の条件はそれぞれ同値である.

- (1) f と g はホモロガス,
- (2) $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, ここで \mathcal{L} は Wu 不変量,
- (3) f と g は, Δ 変形 [11, 13] (図 2.1) で互いに移り合う. \square

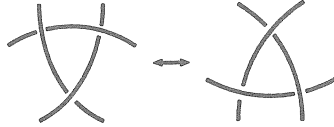


図 2.1.

ここで Wu 不変量とは, W.T. Wu により多面体のユークリッド空間への埋め込みに対して定義されたアイソトピー不変量で [42], 谷山 [36] において空間グラフに応用されました. それは以下のように定義されます. $\tilde{\Delta}(x) = (x, x)$ を位相空間 X の $X \times X$ への対角埋め込みとし, $\tilde{X}^* = X \times X - \tilde{\Delta}(X)$ とおきます. 対合 $\sigma(x, y) = (y, x)$ に対し, 特異複体 $S(\tilde{X}^*, \sigma) = \text{Ker}(1 + \sigma_{\#})$ の整係数コホモロジーを, \tilde{X}^* の歪対称コホモロジーといます. いま, f により誘導される準同型写像 $f^* : H^2(\tilde{\mathbf{R}}^3, \sigma) \rightarrow H^2(\tilde{G}^*, \sigma)$ において, $H^2(\tilde{\mathbf{R}}^3, \sigma) \cong \mathbf{Z}$ [42] の生成元への行き先を, f の Wu 不変量と呼び, $\mathcal{L}(f)$ と書きます.

定理 2.1.1 より, 空間グラフのホモロジー類は, Δ 変形という局所変形によって特徴付けられ, かつ, 代数的な不変量によって完全に分類されることがわかります. そこで具体的に同値類のリストを作成する為には, この不変量が計算可能であることが大切ですが, $L(G)$ の生成元と空間グラフのダイアグラムが与えられれば, Wu 不変量は計算可能で, 実際, 筆者により, n 頂点完全グラフ $^1 K_n$ などの空間埋め込みについては, Wu 不変量が全て計算されています [18].

空間グラフのホモロジー分類については, 他にも様々な分類定理があります [13, 43, 33, 31, 29].

2.2. グラフの平面はめ込みの Wu 不変量と, 局所アイソトピー分類

空間グラフの射影図として, グラフの平面はめ込みという対象が自然に現れます. knotted 射影 [38, 32] の現象などからも, グラフの平面はめ込みの捻れ具合は, もとの空間グラフの絡み具合と関係があると考えられますが, Wu は, はめ込みについても, 局所アイソトピー不変量を定義しています [41]. ここでは, グラフの平面はめ込みについて, Wu の不変量を応用することを考えます.

グラフの平面はめ込みで, 特に辺の内点同士の横断的 2 重点しか多重点に持たないものは, ジェネリックであるということにします. はめ込み $f_0, f_1 : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ は, f_0 から f_1 へのホモトピー $F : G \times I \rightarrow \mathbf{R}^2$ が存在し, かつ G のある開被覆 $\{U_\lambda\}$ が存在して, $f_i(x) = F(x, t)$ に対し, 任意の t で $f_i|_{U_\lambda}$ が埋め込みであるとき, 局所アイソトピックであるといいます.

$G \times G$ を σ による作用で割る射影を π とし, $\pi(\tilde{G}^*) = G^*$ と書きます. また, $\pi(\tilde{\Delta}(G)) = \Delta(G)$ とします. $G \times G$ における $\tilde{\Delta}(G)$ の近傍 \tilde{U} に対し, $\tilde{U}^* = \tilde{U} - \tilde{\Delta}(G)$ を \tilde{G}^* における $\tilde{\Delta}(G)$ の約近

¹ 頂点数が n で, どの 2 頂点もそれぞれ 1 本の辺で結ばれているグラフ.

傍といいます。σ 不変な近傍 \tilde{U} に対し、 \tilde{U}^* を σ による作用で割ったものを U^* と書いて、 G^* における $\Delta(G)$ の約近傍と呼ぶことにします。

いま、 G^* における $\Delta(G)$ の約近傍全体 $\{U_\lambda^*\}$ を、 $U_\lambda^* \cap U_\mu^*$ のとき $U_\lambda^* \prec U_\mu^*$ であると定義することで有向集合と考え、 U_λ^* に対して $H^1(U_\lambda^*; \mathbf{Z})$ を、更に $U_\lambda^* \prec U_\mu^*$ に対して、包含写像から定まる準同型写像 $i_{\lambda\mu}^* : H^1(U_\lambda^*; \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(U_\mu^*; \mathbf{Z})$ をそれぞれ対応させることによって、加群の帰納系 $\{H^q(U_\lambda^*; \mathbf{Z}), i_{\lambda\mu}^*\}$ を得ます。その帰納的極限 $\varinjlim H^1(U_\lambda^*)$ を $R(G)$ と書きます。

はめ込み $f : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対し、 G のある開被覆 $U = \{U_\nu\}$ が存在して、各 ν に対し $f|_{U_\nu}$ が埋め込みになっていますが、このとき

$$\tilde{W}_U = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2, \text{ある } U_\nu \text{ が存在して } x_1, x_2 \in U_\nu\}$$

とおくと、これは \tilde{G}^* における $\tilde{\Delta}(G)$ の σ 不変約近傍で、 $W_U = \pi(\tilde{W}_U)$ と書くとき、連続写像 $\tilde{f} : W_U \rightarrow (\mathbf{R}^2)^*$ が $\tilde{f}[x_1, x_2] = [f(x_1), f(x_2)]$ で定義されます。いま、 $(\mathbf{R}^2)_2^*$ から S^1 への σ 同変な変形レトラクションがあることに注意し、 $H^1(S^1; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元の

$$H^1(S^1; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H^1((\mathbf{R}^2)_2^*; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\tilde{f}^*} H^1(W_U; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_U} R(G)$$

による行き先を、 f の Wu 不変量と呼び、 $\mathcal{R}(f)$ と書きます。ここで \tilde{f}^* は \tilde{f} から誘導される準同型写像で、 i_U は自然な準同型写像を表します。このとき、次が成り立ちます。

定理 2.2.1. ([23]) グラフ G のジェネリックな平面はめ込み f, g に対し、次の条件は互いに同値である。

- (1) f と g は局所アイトピック、
- (2) $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$,
- (3) f と g は図 2.2 の変形で互いに移り合う。□

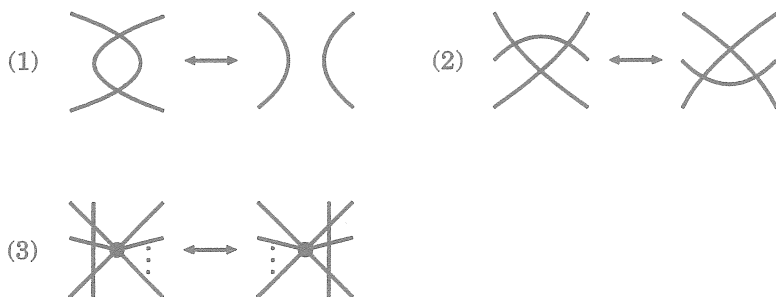


図 2.2.

従って、グラフのジェネリックな平面はめ込みの局所アイトピー類は、図 2.2 の局所変形によって特徴付けられ、かつ Wu 不変量によって完全に分類されます (特に $G \approx S^1$ の場合は、平面曲線の正則ホモトピー分類に対応しています [40, 8]). 更にこの場合は、全ての有限グラフのジェネリックな平面はめ込みについて、Wu 不変量は具体的に計算することができます [23].

実は、空間グラフの Wu 不変量、及びグラフの平面はめ込みの Wu 不変量は、それぞれ 2 成分絡み目の絡み数、及び平面曲線の回転数の一般化で、一種の特性類とも見做することができます。更により深い情報を抽出するような、位相幾何学的に自然な不変量を見出すことが今後の課題です。

3. 結び目の次数3の Vassiliev 不変量の, 空間グラフ理論への応用

結び目の次数2の Vassiliev 不変量 (= 結び目 K の Conway 多項式の2次の係数 $a_2(K)$) は, 空間グラフ理論において効果的に応用されて来ました. 例えば空間グラフの結び目内蔵性 [3, 4, 30], 結び目に関する実現問題 [39, 26], 空間グラフのホモトピー不変量 [35] などが挙げられます.

ここでは, 結び目の次数3の Vassiliev 不変量 (= 結び目 K の Jones 多項式の1における3階微分係数 $V_K^{(3)}(1)$) を応用した空間グラフの研究について紹介します.

3.1. 空間グラフの Δ 型ホモトピー

空間グラフ $f, g: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ は, 同一辺上の Δ 変形で移り合うとき, Δ 辺ホモトピックであるといひ, 隣接2辺上の Δ 変形で移り合うとき, Δ 頂点ホモトピックであるといひます. これらは, Δ 絡み目ホモトピー [14, 15, 16, 17, 27, 28] の, 空間グラフへの自然な一般化です.

これらが, どのくらい細かい分類を与えるのかを見ておきます. いま, G の空間埋め込み f, g は, それらを繋ぐレベルを保存する埋め込み $\Phi: G \times I \rightarrow \mathbb{R}^3 \times I$ が存在するとき, アイソトピックであるといひ², 同一辺上の交差交換で移り合うとき, ホモトピックであるといひます [34]. これらは前節で述べたホモロジーよりも強い同値関係です. このとき, 次が成り立ちます.

命題 3.1.1. ([20]) グラフ G の空間埋め込み f, g に対し,

- (1) f と g が Δ 辺ホモトピック $\Rightarrow f$ と g は Δ 頂点ホモトピック,
- (2) f と g がアイソトピック $\Rightarrow f$ と g は Δ 頂点ホモトピック $\Rightarrow f$ と g はホモトピック. \square

従って, 特に Δ 頂点ホモトピー分類は, アイソトピーとホモトピーの間の分類を与え, また, Δ 頂点ホモトピー不変量は自動的に Δ 辺ホモトピー不変量及びアイソトピー不変量になります.

絡み目の場合は, Conway 多項式を用いて Δ 絡み目ホモトピー不変量が構成され, 特に2成分の場合は分類も完了しています (中西 [14] 及び中西-大山 [14, 15, 16]). ここでは, 空間グラフを含む結び目 K の $V_K^{(3)}(1)$ を用いて, 空間グラフの Δ 型ホモトピー不変量を構成することを考えます.

空間グラフのホモトピー不変量は, 結び目理論では良く知られた次の関係式:

$$a_2(J_+) - a_2(J_-) = \text{lk}(J_0)$$

を応用することにより見出されました [35]. ここで J_+ , J_- 及び J_0 は図 3.1 で示されたような結び目及び2成分絡み目で, lk は絡み数です.

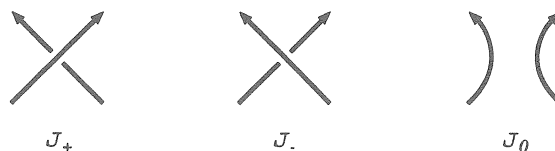


図 3.1.

一方, $V^{(3)}(1)$ と Δ 変形について, 次の関係が成り立ちます (より一般に, Δ 変形と HOMFLY 多項式との間の関係に拡張されます. 金信泰造氏と筆者による共同研究 [23] も参照して下さい).

² 局所平坦性は仮定しないので, アンビエント・アイソトピックとは限りません.

定理 3.1.2. ([22, 20, 7])

$$V_{K_+}^{(3)}(1) - V_{K_-}^{(3)}(1) = 36\text{Lk}(K_0) - 18.$$

ここで K_+ , K_- 及び K_0 は図 3.2 で示されたような結び目及び 3 成分絡み目で, Lk は全絡み数. \square

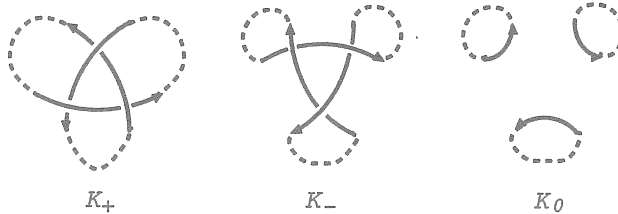


図 3.2.

これにより, a_2 を用いた空間グラフのホモトピー不変量の構成と全く平行に, $V^{(3)}(1)$ を用いた空間グラフの Δ 型ホモトピー不変量を構成することができます. 以下, それを説明します.

グラフ G に対し, $\Gamma(G)$ で G の全てのサイクル, G の辺 e に対して, $\Gamma_e(G)$ で e を含む G の全てのサイクル, G の 2 辺 e_1, e_2 に対して, $\Gamma_{e_1, e_2}(G)$ で e_1, e_2 を含む G の全てのサイクルの集合をそれぞれ表すことにします.

e を G の辺として, 勝手な向きを 1 つ与えておき, 更に $\Gamma_e(G)$ の各元に対しても, e から誘導される向きを与えておきます. $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ($n \in \mathbf{N}$) として, 写像 $\omega : \Gamma(G) \rightarrow \mathbf{Z}_n$ を $\Gamma(G)$ 上の重みと呼びます. 重み ω は, $H_1(G; \mathbf{Z}_n)$ において $\sum_{\gamma \in \Gamma_e(G)} \omega(\gamma)\gamma = 0$ を満たすとき, e 上でバランスが取れているといえます.

次に, e_1, e_2 を G の隣接辺の組として, e_1 に勝手な向きを 1 つ与えておき, 更に $\Gamma_{e_1, e_2}(G)$ の各元に対しても, e_1 から誘導される向きを与えておきます. いま, 重み ω は, $H_1(G; \mathbf{Z}_n)$ において $\sum_{\gamma \in \Gamma_{e_1, e_2}(G)} \omega(\gamma)\gamma = 0$ を満たすとき, e_1, e_2 上でバランスが取れているといえます.

そこで, G の空間埋め込み $f : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ と, 重み ω に対し,

$$n_\omega(f) \equiv \frac{1}{18} \sum_{\gamma \in \Gamma(G)} \omega(\gamma) V_{f(\gamma)}^{(3)}(1) \pmod{n}$$

とおくとき³, 次が成り立ちます.

定理 3.1.3. ([20]) $\omega : \Gamma(G) \rightarrow \mathbf{Z}_n$ を重みとすると,

(1) 重み ω が, G の全ての辺上でバランスが取れているなら, n_ω は Δ 辺ホモトピー不変量である.

(2) 重み ω が, G の全ての隣接辺上でバランスが取れているなら, n_ω は Δ 頂点ホモトピー不変量である. \square

例 3.1.4. 図 3.3 の空間グラフ f_m は, K_4 の空間埋め込みで, 任意の整数 m について, 自明な埋め込みと Δ 頂点ホモトピックです.

いま, 4 サイクルに対しては 1 を, 3 サイクルに対しては -1 を対応させる重み $\omega : K_4 \rightarrow \mathbf{Z}$ によって, Δ 辺ホモトピー不変量 n_ω が得られます. $n_\omega(f_m) = 2m$ となるので, 異なる i, j に対して

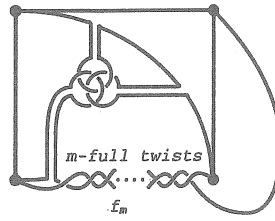


図 3.3.

f_i と f_j は Δ 辺ホモトピックでないことがわかります。これは命題 3.1.1 (1) の逆が成り立たない例にもなっています。

例 3.1.5. 図 3.4 の空間グラフ f_m は、 K_5 の空間埋め込みで、 f_i と f_j は互いにホモトピックです。いま、5 サイクルに対しては 1 を、4 サイクルに対しては -1 を、そして 3 サイクルに対しては 0 を対応させる重み $\omega: K_5 \rightarrow \mathbb{Z}$ によって、 Δ 頂点ホモトピー不変量 n_ω が得られます。 $n_\omega(f_m) = -2m$ となるので、異なる i, j に対して f_i と f_j が Δ 頂点ホモトピックでないことがわかります。従って命題 3.1.1 (2) より、 f_i と f_j はアイソトピックでもなく、図 3.4 は、互いにホモトピックですがアイソトピックでない空間グラフの無限族の例となっています。

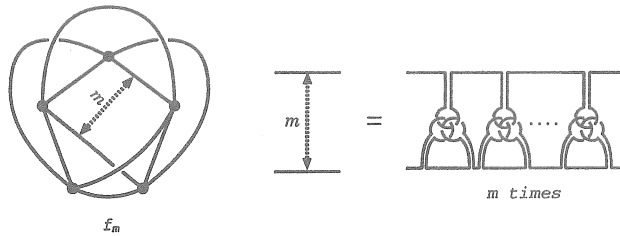


図 3.4.

3.2. 空間グラフにおける結び目の実現問題

空間グラフが含む結び目の集合は、一般には独立ではありません。即ち、次の定義が意味を持ちます：任意の $\gamma \in \Gamma(G)$ に対して、結び目 $\phi_\gamma: \gamma \rightarrow \mathbb{R}^3$ を与えた集合 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G)\}$ は、ある空間埋め込み $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$ が存在して、任意の $\gamma \in \Gamma(G)$ に対して $f|_\gamma$ と ϕ_γ がアンビエント・アイソトピックとなる時、実現可能であるといいます。任意の $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G)\}$ が実現可能なグラフ G は (結び目に関して) 順応性を持つといいます。

このような現象を捉える為には、その現象を持つ”極小な”グラフを見出すことが大切です。グラフ全体の集合に、辺の縮約及び部分グラフを取るという操作で張られる順序 \leq を入れるとき、順応性を持たないグラフ G で、 $H < G$ なる任意のグラフ H は順応性を持つようなもの全体の集合

³ 結び目 K に対し、 $\frac{1}{18}V_K^{(3)}(1)$ は常に整数値をとります。

Ω を、(順応性に関する) 障害集合と呼び、 Ω の元を禁止グラフと呼びます. 非平面的な禁止グラフは K_5 , $K_{3,3}$ のみで [44], 平面的な禁止グラフは現在のところ 8 個が発見されています⁴ [39] (図 3.5).

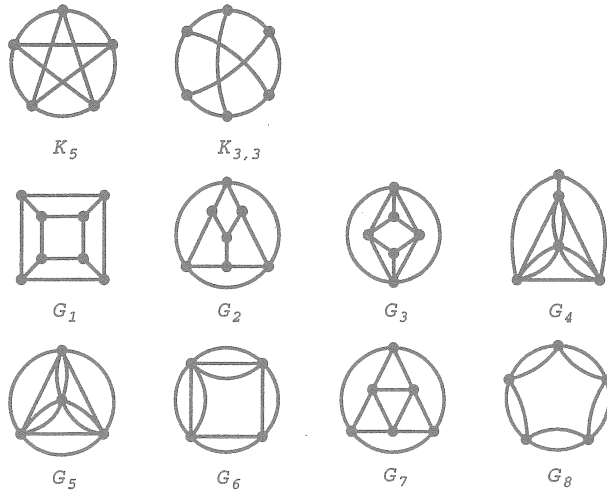


図 3.5.

さて、 Ω の元 G については、実現不可能な結び目集合 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G)\}$ が存在するわけですから、では、どのような結び目集合なら実現できるかという問題に興味を沸かします. 次の定理は、 K_5 についての 1 つの解答です.

定理 3.2.1. (本橋-谷山 [12], 谷山-安原 [39]) K_5 の全ての 4 サイクル、及び全ての 5 サイクルの集合を、それぞれ C_1 , C_2 とかくとき、 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(K_5)\}$ が実現可能である為の必要十分条件は、ある整数 m が存在して、

$$\sum_{\gamma \in C_2} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_1} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) = \frac{m(m-1)}{2}$$

が成り立つことである. \square

$K_{3,3}$ 及び G_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) についても、同様に a_2 を用いて、実現可能な結び目集合の特徴付けが得られています [12, 39, 26]. ところが、 G_8 については、 a_2 のみでは特徴付けることができません. 次は、筆者と遠田かず子氏による、 G_8 における 1 つの解答です.

定理 3.2.2. ([24]) $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G_8)\}$ が実現可能である為の必要十分条件は、次の (1), (2) が成り立つことである.

$$(1) \quad \sum_{\gamma \in C_{0,r}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,r}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) = 0,$$

⁴ 順応性を持たない平面的グラフで初めて発見されたのは、 G_8 でした [25].

(2) ある整数 m_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) が存在して,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}^{(i)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}^{(i)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) = m_i m_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ & \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} V_{\phi_\gamma(\gamma)}^{(3)}(1) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} V_{\phi_\gamma(\gamma)}^{(3)}(1) \\ &= -36 \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{\gamma \in C_{0,\tau}^{(i,i+2)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}^{(i,i+2)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) + m_{i+2} m_{i+3} \right) m_{i+4}. \end{aligned}$$

ここで $i+5 = i$ と考え、また $C_{k,\tau}$ 及び $C_{k,\tau}^{(i)}$ ($k = 0, 1, i = 1, 2, 3, 4, 5$) はある方法で定義される $\Gamma(G_8)$ の部分集合. □

従って、 G_8 の場合は、結び目の次数 2 と 3 の Vassiliev 不変量にまたがる複雑な障害が潜んでいるわけです. 実際に、 a_2 に関する条件は満たしますが、実現可能でない集合 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G_8)\}$ が存在します [24].

証明には、 C_k 変形 [6] を駆使します. ここで C_k 変形とは、交差交換を C_1 変形として、 $k \geq 2$ のときは図 3.6 で定義される局所変形です. 実は C_2 変形は Δ 変形のことで、 C_3 変形は **clasp-pass** 変形とも呼ばれます. Δ 変形が結び目解消操作であること [13, 11] や、結び目の低次の Vassiliev 不変量に関する結果 [2, 10, 1], 及び C_k 変形と Vassiliev 不変量に関する M.N. Goussarov-葉広和夫の定理 [5, 6] より、次がわかります.

定理 3.2.3.

- (1) 任意の 2 つの結び目 J, K は、 Δ 変形で移り合う.
- (2) 2 つの結び目 J, K が clasp-pass 変形で移り合う $\iff a_2(J) = a_2(K)$.
- (3) 2 つの結び目 J, K が C_4 変形で移り合う $\iff a_2(J) = a_2(K), V_J^{(3)}(1) = V_K^{(3)}(1)$. □

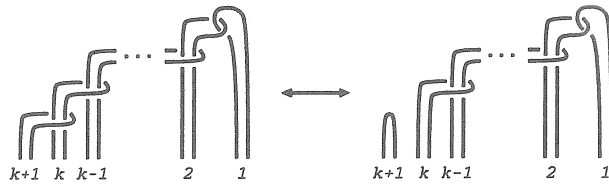


図 3.6.

定理 3.2.2 の証明は、十分性の方が大変で、その方針は、安原 [44] のアイデア及び [39] における方法に基づく構成的なものです. まず、空間埋め込み $f : G_8 \rightarrow \mathbb{R}^3$ に対し、

$$\begin{aligned} \lambda_\tau(f) &= \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} a_2(f(\gamma)), \\ \lambda_\tau^{(i)}(f) &= \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}^{(i)}} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}^{(i)}} a_2(f(\gamma)) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ \nu_\tau(f) &= \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} V_{f(\gamma)}^{(3)}(1) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} V_{f(\gamma)}^{(3)}(1). \end{aligned}$$

とおきます. このとき, いかなる f においても $\lambda_\tau(f) = 0$ であり, また, $\lambda_\tau^{(i)}(f)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) はホモロジー不変量で, 更に $\nu_\tau(f)$ は clasp-pass 変形で不変であることがわかります. このとき, それら不変量の具体的な値がわかることがポイントです.

そこで, 最初に Δ 変形を用いて, 大方の結び目を実現させてしまいます. このとき, $\lambda_\tau^{(i)}$ の値が変わらないことを利用して, $a_2(J) = a_2(\phi_\gamma(\gamma))$ なる結び目 J を見出すことができ, clasp-pass 変形を用いて実現を行います. 更にこのとき, λ_τ 及び ν_τ が変わっていないことを利用して, $a_2(K) = a_2(\phi_\gamma(\gamma))$, $V_K^{(3)}(1) = V_{\phi_\gamma(\gamma)}^{(3)}(1)$ なる結び目 K を見出すことができるので, C_4 変形で実現を完了します.

空間グラフ内の結び目の実現問題は, 自然に空間グラフ内の絡み目や部分空間グラフの実現問題に一般化されます [9, 39, 37].

参考文献

- [1] D. Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariant, *Topology*, **34** (1995), 423–472.
- [2] J.S. Birman and X.-S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev’s invariants. *Invent. Math.*, **111** (1993) 225–270.
- [3] J.H. Conway and McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory*, **7** (1983) 445–453.
- [4] Intrinsic knotting and linking of complete graphs, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002) 371–380.
(<http://www.maths.warwick.ac.uk/agt/AGTVol2/agt-2-17.abs.html>)
- [5] M.N. Goussarov, Knotted graphs and a geometrical technique of n -equivalences, POMI Sankt Petersburg preprint, circa 1995 (in Russian)
- [6] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.*, **4** (2000) 1–83.
(<http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/GTVol4/paper1.abs.html>)
- [7] T. Kanenobu and R. Nikkuni, Delta move and polynomial invariants of links, preprint.
- [8] L. Kauffman, Formal Knot Theory (Mathematical Notes **30**, Princeton Univ. Press, 1983).
- [9] S. Kinoshita, On spatial bipartite $K_{m,n}$ ’s and their constituent $K_{2,n}$ ’s, *Kobe J. Math.*, **8** (1991) 41–46.
- [10] J. Lannes, Sur les invariants de Vassiliev de degre inferieur ou egal a 3, *Enseign. Math.* (2), **39** (1993), 295–316.
- [11] S. Matveev, Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere (in Russian), *Mat. Zametki*, **42** (1987) 268–278, 345 (English translation: *Math. Notes* **42** (1987) 651–656.)
- [12] T. Motohashi and K. Taniyama, Delta unknotting operation and vertex homotopy of spatial graphs, In: S. Suzuki (ed.) *Proceedings of Knots '96 Tokyo* (World Scientific Publ. Co., 1997) 185–200.
- [13] H. Murakami and Y. Nakanishi, On a certain move generating link-homology, *Math. Ann.*, **284** (1989) 75–89.
- [14] Y. Nakanishi, Delta link homotopy for two component links, to appear in *Topology and its Applications*. (Proceedings of Mexico-Japan first joint meeting for Topology and its Applications.)
- [15] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, Delta link homotopy for two component links, II, to appear in *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*
- [16] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, Delta link homotopy for two component links, III, preprint
- [17] Y. Nakanishi and T. Shibuya, Link homotopy and quasi self delta-equivalence for links, *J. Knot Theory Ramifications*, **9** (2000), 683–691.
- [18] R. Nikkuni, The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory. Ramifications*, **9** (2000) 387–411.
- [19] R. Nikkuni, Clasp-pass moves on spatial graphs, *Interdiscip. Inform. Sci.*, **7**, No. 1 (2001) 113–121.
- [20] R. Nikkuni, Delta link-homotopy on spatial graphs, to appear in *Revista Matemática Complutense*.
- [21] R. Nikkuni, Triple linking module and clasp-pass moves on spatial graphs, preprint

- [22] R. Nikkuni, Delta move and Vassiliev knot invariants of order 3, preprint
- [23] R. Nikkuni, Local isotopy on plane immersions of graphs, preprint
- [24] R. Nikkuni and K. Onda, A characterization of knots in a spatial graph II, to appear in Journal of Knot theory and its Ramifications.
- [25] Y. Ohshima and K. Taniyama, Vassiliev invariants of knots in a spatial graph, *Pacific J. Math.*, **200** (2001) 191–205.
- [26] K. Onda, A characterization of knots in a spatial graph, *J. Knot Theory Ramifications.*, **9** (2000) 1069–1084.
- [27] T. Shibuya, Self Δ -equivalence of ribbon links, *Osaka J. Math.*, **33** (1996) 751–760.
- [28] T. Shibuya, On self Δ -equivalence of boundary links, *Osaka J. Math.*, **37** (2000) 37–55.
- [29] R. Shinjo and K. Taniyama, Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants, preprint.
- [30] M. Shirai and K. Taniyama, A large complete graph in a space contains a link with large link invariant, preprint.
- [31] T. Soma, H. Sugai and A. Yasuhara, Disk/band surfaces of spatial graphs, *Tokyo J. Math.*, **20** (1997) 1–11.
- [32] I. Sugiura and S. Suzuki, On a class of trivializable graphs, *Sci. Math.*, **3** (2000) 193–200.
- [33] M. Suzuki, Classification of the spatial-graph homology classes of a complete graph (in Japanese), Master Thesis, Department of Mathematical Sciences, Tokyo Denki Univ (1996)
- [34] K. Taniyama, Cobordism, homotopy and homology of graphs in \mathbb{R}^3 , *Topology*, **33** (1994) 509–523.
- [35] K. Taniyama, Link homotopy invariants of graphs in \mathbb{R}^3 , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid.*, **7** (1994) 129–144.
- [36] K. Taniyama, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topology Appl.*, **65** (1995) 205–228.
- [37] K. Taniyama, Knotted subgraphs in a spatial graph, *Kobe J. Math.*, **14** (1997) 207–212.
- [38] K. Taniyama, Knotted projections of planar graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995) 3575–3579.
- [39] K. Taniyama and A. Yasuhara, Realization of knots and links in a spatial graph, *Topology Appl.*, **112** (2001) 87–109.
- [40] H. Whitney, On regular closed curves on the plane, *Compositio Math.*, **4** (1937) 276–284.
- [41] W.T. Wu, A theory of Imbedding, Immersion, and Isotopy of Polytopes in a Euclidean Space (Science Press, Peking, 1965)
- [42] W.T. Wu, On the isotopy of complexes in a Euclidean space I, *Science Sinica*, **9** (1960) 21–46.
- [43] A. Yasuhara, Disk/band surface and spatial-graph homology, *Topology Appl.*, **69** (1996) 173–191.
- [44] A. Yasuhara, Delta-unknotting operation and adaptability of certain graphs. In: S. Suzuki (ed.) *Proceedings of Knots '96 Tokyo* (World Scientific Publ. Co., 1997) 115–121.

〒 980-8579

仙台市青葉区荒巻字青葉 09

東北大学大学院情報科学研究科 数学群

022-217-4636

Geometry of gerbes in Chern-Simons theory

五味 清紀*

東京大学大学院数理科学研究科

1 Introduction

本講演の目的は、境界がないコンパクトな1次元多様体上の主 $SU(2)$ 束の接続がなす空間上に定式化された gerbe の性質について説明することである。

はじめに、何故そのようなものを考えるのかについて説明する。コンパクトで向きづけられた3次元多様体 M 上に、構造群を $G = SU(2)$ とする主束 P が与えられたとする。 M に境界がないとき、 P の接続 A に対する Chern-Simons 汎関数 [6, 12] の値 $S_P(A)$ は \mathbb{R}/\mathbb{Z} の元として定まる。これより P の接続の空間 \mathcal{A}_P 上に、単位円 $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ に値をとる関数 $e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} : \mathcal{A}_P \rightarrow \mathbb{T}$ が得られる。

3次元多様体 M が境界を持つ場合、Chern-Simons 汎関数を定めるためにはある境界条件を固定しなければならない。つまり主束 $P \rightarrow M$ を境界に制限して得られる主束 $\partial P \rightarrow \partial M$ の切断を固定する必要がある。 ∂P の切断の空間を $\mathcal{S}_{\partial P}$ とおくと、関数 $e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_{\partial P} \rightarrow \mathbb{T}$ が得られる。

このように、 M に境界がある場合には Chern-Simons 汎関数はある境界条件に依存している。これはある複素直線束を導入することでうまく記述することができる。コンパクトで向きづけられた2次元多様体 Σ 上の主 G 束を Q とする。このとき Σ に境界がなければ、Chern-Simons 直線束と呼ばれる複素直線束 \mathcal{L}_Q を Q の接続の空間 \mathcal{A}_Q 上に構成することができる。

さて、境界をもつ3次元多様体上の主束 $P \rightarrow M$ があつたとき、接続の制限は $r : \mathcal{A}_P \rightarrow \mathcal{A}_{\partial P}$ という写像を導く。この写像によって、 ∂P に付随した Chern-Simons 直線束を引き戻したものを $r^*\mathcal{L}_{\partial P} \rightarrow \mathcal{A}_P$ と書く。すると、この場合の Chern-Simons 汎関数が定めていた関数 $e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_{\partial P} \rightarrow \mathbb{T}$ は $r^*\mathcal{L}_{\partial P}$ の切断として記述しなおすことができる。この記述は Chern-Simons 理論から $(2+1)$ 次元の位相的量子場の理論 [1] を与えるときに基本的な役割を果たしている。

次に2次元多様体 Σ に境界があつた場合を考える。するとこの場合の Chern-Simons 直線束は、 $\mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_{\partial Q}$ 上の複素直線束として定義される ([6])。つま

*The author's research is supported by Research Fellowship of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

り、3次元多様体に境界がある場合の Chern-Simons 汎関数と同様の境界条件を固定しなければならないことがわかる。ここで、Chern-Simons 汎関数と Chern-Simons 直線束との関係の類似として、次のようなものを考えることは自然である。

境界がなくコンパクトで向きづけられた1次元多様体上の主束の接続の空間上に定義された幾何学的対象で、境界がある場合の Chern-Simons 直線束をうまく記述するもの

一般に、このような幾何学的対象が gerbe というものであるということが Freed [7] によって指摘されている。有限群を構造群とする Chern-Simons 理論 [5] においては、1次元多様体に付随する gerbe は Freed [7] および Brylinski-McLaughlin [3] によって調べられている。特に gerbe を「量子化」することで、Verlinde 代数 [11] を得ている。ところが一般の構造群の場合にはこういった gerbe は殆ど調べられていなかった。本講演の主題は、 $G = SU(2)$ の場合における、上記のような gerbe の定式化とその性質である。

	境界なし	境界あり
$P \rightarrow M$ 3-dim	$e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} : \mathcal{A}_P \rightarrow \mathbb{T}$ Chern-Simons 汎関数	$e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} : \mathcal{A}_P \times \mathcal{S}_{\partial P} \rightarrow \mathbb{T}$ $e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} \in \Gamma(\mathcal{A}_P, r^*\mathcal{L}_{\partial P})$ $r : \mathcal{A}_P \rightarrow \mathcal{A}_{\partial P}$
$Q \rightarrow \Sigma$ 2-dim	$\mathcal{L}_Q \rightarrow \mathcal{A}_Q$ Chern-Simons 直線束	$\mathcal{L}_Q \rightarrow \mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_{\partial Q}$
$R \rightarrow S$ 1-dim	Gerbe on \mathcal{A}_R	

2 Gerbes

よく知られるように、複素直線束は2次の整係数コホモロジー類をあらわす幾何学的な対象の一つである。Gerbe とは3次の整係数コホモロジー類をあらわす幾何学的な対象の一つである。Gerbe は、もともと Giraud [8] によって導入されたもので、Brylinski [2] によって詳しく調べられている。

非常に大雑把に言えば、gerbe とは圏をファイバーとするようなファイバー束である。数学的な定義は、いくつかの条件を満たす圏の層として定義される。しかし、ここではその条件を列挙することはせず、系統的に gerbe を与える方法の一つを説明することにする。

円周 S^1 から群 G への写像全体 LG は群をなしループ群と呼ばれる ([10])。ここで G が $SU(2)$ の場合、整数 k を与えるごとに LG の単位円周 \mathbb{T} による中心拡大 \widehat{LG}_k が構成できる。

$$1 \longrightarrow \mathbb{T} \longrightarrow \widehat{LG}_k \xrightarrow{q} LG \longrightarrow 1.$$

一方で多様体 X 上に構造群を LG とするような主束 $P \rightarrow X$ が与えられたとする。開集合 $U \subset X$ に対して、 P の U への制限 $P|_U$ の持ち上げを、対 $(\widehat{P}, \widehat{q})$ によってあらわすことにする。ここで、 $\widehat{P} \rightarrow U$ は構造群を \widehat{LG}_k とする主束である。また $\widehat{q}: \widehat{P} \rightarrow P|_U$ は各主束の射影と可換であって、各構造群の右作用のもとで同変な写像である。すなわち、任意の $\widehat{p} \in \widehat{P}$ と $\widehat{\gamma} \in \widehat{LG}_k$ に対して $\widehat{q}(\widehat{p}\widehat{\gamma}) = \widehat{q}(\widehat{p})\widehat{q}(\widehat{\gamma})$ を満たす。

ここで、 X の任意の開集合 U に、 $P|_U$ の持ち上げ全体がなす圏 $\underline{\mathcal{C}}(U)$ を対応させることを考える。この対応づけ $\underline{\mathcal{C}}$ は圏の (前) 層を与え、特に $\underline{\mathcal{C}}$ は gerbe になる。一般に、ある主束とその構造群の中心拡大が与えられると、上と同じ方法により gerbe が得られる。このように与えられる gerbe は lifting gerbe と呼ばれる。本講演の主題である gerbe も lifting gerbe として定式化される。

複素直線束の同型類は Chern 類という特性類を通して、2 次の整係数コホモロジー群と同型であることはよく知られている。同様に、多様体 X 上の gerbe の同型類がなす群は、gerbe の特性類を通して、3 次の整係数コホモロジー群と同型である ([2, 8])。

主 LG 束 $P \rightarrow X$ と中心拡大 \widehat{LG}_k に付随した lifting gerbe の特性類は、 P の大域的な持ち上げが存在するための障害類と一致することが知られている ([2])。この障害類を $\lambda(P, \widehat{LG}_k) \in H^3(X, \mathbb{Z})$ とあらわすことにする。

3 Chern-Simons gerbe の定式化

境界のない向きづけられたコンパクト 1 次元多様体を S とする。これは単に有限個の円周の直和である。 S から $G := SU(2)$ への写像全体 G_S は群をなす。これもループ群と呼ぶことにする。任意の整数 k に対して G_S には \mathbb{T} による非自明な中心拡大 \widehat{G}_S がある。さて、 S 上に主 G 束 R が与えられたとする。 R の接続の空間を \mathcal{A}_R とし、 R の断面の空間を \mathcal{S}_R と書く。直積空間 $\mathcal{P}_R := \mathcal{A}_R \times \mathcal{S}_R$ に、 G_S を \mathcal{S}_R にのみ作用させると、 \mathcal{A}_R 上の主 G_S 束が定義される。

定義 3.1. \mathcal{A}_R 上の gerbe $\underline{\mathcal{C}}_R$ を、 \mathcal{P}_R と \widehat{G}_S に付随する lifting gerbe として定義し、Chern-Simons gerbe と呼ぶ。

明らかに \mathcal{P}_R は位相的に自明な主束であるので、大域的に持ち上げを構成することができる。すなわち、 $\underline{\mathcal{C}}_R$ は (位相的に) 自明な gerbe である。しかしながら、この gerbe は以下で説明するように非自明な性質を持っている。

4 Chern-Simons gerbe の性質

4.1 2次元多様体上の主 G 束に付随した対象

コンパクトで向きづけられた2次元多様体 Σ であって、境界を持つものを考える。この2次元多様体の上に主 G 束 Q が与えられたとする。このとき、接続の制限は写像 $r: \mathcal{A}_Q \rightarrow \mathcal{A}_{\partial Q}$ を導く。ここで、次の3点に注意する。

1. 定義より $\mathcal{P}_{\partial Q} = \mathcal{A}_{\partial Q} \times \mathcal{S}_{\partial Q}$ であったので、 r による引き戻し $r^*\mathcal{P}_{\partial Q}$ は $\mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_{\partial Q}$ と同一視できる。
2. 主束 $r^*\mathcal{P}_{\partial Q}$ の持ち上げ $(\widehat{\mathcal{P}}, \widehat{q})$ があったとする。このとき $\widehat{\mathcal{P}}$ の構造群を中心に制限することで $\widehat{q}: \widehat{\mathcal{P}} \rightarrow r^*\mathcal{P}_{\partial Q}$ は主 \mathbb{T} 束になる。これより $r^*\mathcal{P}_{\partial Q}$ 上の複素直線束が得られる。
3. 境界がある2次元多様体を考えているので、 Q に付随する Chern-Simons 直線束は $\mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_{\partial Q}$ 上に定義された複素直線束である (§1)。

定理 4.1. $r^*\mathcal{P}_{\partial Q}$ の持ち上げ $(\widehat{\mathcal{P}}_Q, \widehat{q}_Q)$ が存在して、これが導く $\mathcal{A}_Q \times \mathcal{S}_{\partial Q}$ 上の複素直線束は Q に付随する Chern-Simons 直線束と自然に同型である。

証明の概略. 持ち上げ $(\widehat{\mathcal{P}}_Q, \widehat{q}_Q)$ は具体的に構成することができる。一方で、Chern-Simons 直線束 \mathcal{L}_Q も具体的な構成がわかっている。それらを見比べることにより自然な同型が得られる。□

Chern-Simons gerbe の引き戻し $r^*\mathcal{L}_{\partial Q}$ は、 $r^*\mathcal{P}_{\partial Q}$ に付随する lifting gerbe と自然に同型である。従って、定理 4.1 の持ち上げは $r^*\mathcal{L}_{\partial Q}$ の大域的な切断のなす圏の対象である。

$$(\widehat{\mathcal{P}}_Q, \widehat{q}_Q) \in \Gamma(\mathcal{A}_Q, r^*\mathcal{L}_{\partial Q}) := r^*\mathcal{L}_{\partial Q}(\mathcal{A}_Q).$$

これは、Chern-Simons 汎関数と Chern-Simons 直線束の関係 (§1)

$$e^{2\pi\sqrt{-1}S_P} \in \Gamma(\mathcal{A}_P, r^*\mathcal{L}_{\partial P})$$

とちようど平行している。

4.2 Gluing law

境界がなく向きづけられた1次元多様体 S から、コンパクトで向きづけられた2次元多様体 Σ への埋め込みがあったとする (図 1)。このとき、埋め込まれた S に沿って、 Σ を切り開いて得られる2次元多様体を Σ_c とする。また、 Σ 上に与えられた主 G 束 Q が導く Σ_c 上の主 G 束を Q_c とする。

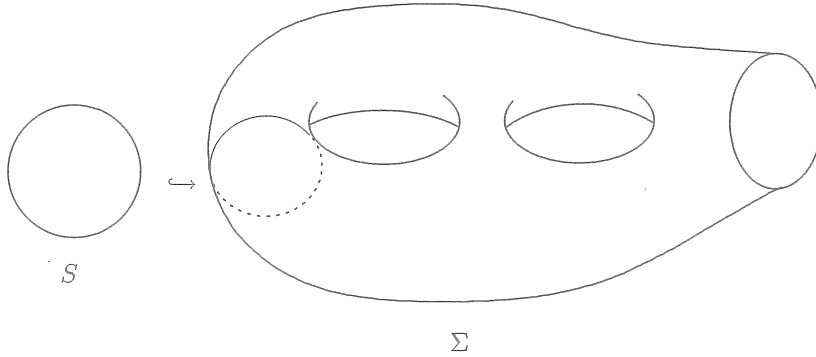


図 1: 1次元多様体 S と 2次元多様体 Σ

このとき接続の空間の間に次の写像が導かれる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_Q & \xrightarrow{c} & \mathcal{A}_{Q_c} \\ r \downarrow & & \downarrow r_c \\ \mathcal{A}_{\partial Q} & & \mathcal{A}_{\partial Q_c} \end{array}$$

定理 4.2. (a) 次の gerbe の間に自然な同型が存在する。

$$\mathrm{Tr} : c^* r_c^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q_c} \rightarrow r^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q}.$$

(b) 次の $r^* \mathcal{P}_{\partial Q} \rightarrow \mathcal{A}_Q$ の持ち上げの間に自然な同型が存在する。

$$\mathrm{Tr} \left(c^* (\widehat{\mathcal{P}}_{Q_c}, \widehat{q}_{Q_c}) \right) \cong (\widehat{\mathcal{P}}_Q, \widehat{q}_Q).$$

注意. $(\widehat{\mathcal{P}}_{Q_c}, \widehat{q}_{Q_c})$ は主 $G_{\partial \Sigma_c}$ 束 $r_c^* \mathcal{P}_{\partial Q_c} \rightarrow \mathcal{A}_{Q_c}$ の持ち上げである。この持ち上げを c によって引き戻すと主 $G_{\partial \Sigma_c}$ 束 $c^* r_c^* \mathcal{P}_{\partial Q_c} \rightarrow \mathcal{A}_Q$ の持ち上げが得られる。ここで定理 4.2 (a) の gerbe の同型を使うと、主 $G_{\partial \Sigma_c}$ 束 $c^* r_c^* \mathcal{P}_{\partial Q_c} \rightarrow \mathcal{A}_Q$ の持ち上げから、主 $G_{\partial \Sigma}$ 束 $r^* \mathcal{P}_{\partial Q} \rightarrow \mathcal{A}_Q$ の持ち上げが得られる。定理 4.2 (b) の左側が意味するのはこの持ち上げである。

$$\begin{array}{ccccc} r^* \mathcal{P}_{\partial Q} & & c^* r_c^* \mathcal{P}_{\partial Q_c} & \longrightarrow & r_c^* \mathcal{P}_{\partial Q_c} \\ \downarrow G_{\partial \Sigma} & & \downarrow G_{\partial \Sigma_c} & & \downarrow G_{\partial \Sigma_c} \\ \mathcal{A}_Q & \xlongequal{\quad} & \mathcal{A}_Q & \xrightarrow{c} & \mathcal{A}_{Q_c} \end{array}$$

証明の概略. 埋め込み写像 $S \hookrightarrow \Sigma$ による Q の引き戻しにより、 S 上に主 G 束 $R \rightarrow S$ を定義する。また、自然な接続の制限が導く写像を $\rho : \mathcal{A}_Q \rightarrow \mathcal{A}_R$ とする。このとき次の図式が可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_Q & \xrightarrow{c} & \mathcal{A}_{Q_c} \\ r \times \rho \downarrow & & \downarrow r_c \\ \mathcal{A}_{\partial Q} \times \mathcal{A}_R & \xrightarrow{\mathrm{id} \times \Delta} & \mathcal{A}_{\partial Q_c} \end{array}$$

ここで $\Delta : \mathcal{A}_R \rightarrow \mathcal{A}_R \times \mathcal{A}_R$ は対角写像であり、 $\mathcal{A}_{Q_c} = \mathcal{A}_{\partial Q} \times \mathcal{A}_R \times \mathcal{A}_R$ という同一視を用いた。すると次の自然な同型が得られる。

$$\begin{aligned} c^* r_c^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q_c} &\cong (r \times \rho)^*(\text{id} \times \Delta)^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q_c} \\ &\cong r^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q} \otimes \rho^* \underline{\mathcal{C}}_R^* \otimes \rho^* \underline{\mathcal{C}}_R \\ &\cong r^* \underline{\mathcal{C}}_{\partial Q} \end{aligned}$$

ここで、 \otimes は gerbe の積をとる操作であり、 $\underline{\mathcal{C}}_R^*$ は $\underline{\mathcal{C}}_R$ の gerbe としての逆である。これらの同型の合成が (a) における gerbe の同型である。(b) における持ち上げの間の同型写像は、 $\text{Tr} \left(c^*(\widehat{\mathcal{P}}_{Q_c}, \widehat{q}_{Q_c}) \right)$ を具体的に書き下すことで見つけることができる。□

Chern-Simons 直線束と Chern-Simons 汎関数に対して定理 4.2 と同様の性質が成り立つことが知られている ([6])。その性質は Chern-Simons 理論から位相的量子場の理論 [1] が得られる理由の一つと考えることができる。

4.3 Chern-Simons gerbe の“接続”

Gerbe に対し、“接続”にあたるものは connective structure と curving と呼ばれるものであり、“曲率”にあたるものは 3-curvature と呼ばれる 3 次微分形式である ([2])。

定理 4.3. *Chern-Simons gerbe* には、自然な *connective structure* と *curving* があり、その *3-curvature* は恒等的に消えている。

証明の概略. Chern-Simons gerbe が lifting gerbe として定義されていた。主束 \mathcal{P}_R には自然な平坦接続と分裂を具体的に与えることができる。ここで、分裂とは次のもののことをいう。ループ群 G_S と中心拡大 \widehat{G}_S の Lie 環をそれぞれ \mathfrak{g}_S と $\widehat{\mathfrak{g}}_S$ によって表す。このとき G_S は随伴表現により次の Lie 環の短完全系列に作用する。

$$0 \longrightarrow \sqrt{-1}\mathbb{R} \longrightarrow \widehat{\mathfrak{g}}_S \longrightarrow \mathfrak{g}_S \longrightarrow 0.$$

すると \mathcal{P}_R とこれらの随伴表現から次のベクトル束の短完全系列が得られる。

$$\begin{aligned} 0 &\longrightarrow \mathcal{P}_R \times_{\text{Ad}} (\sqrt{-1}\mathbb{R}) \\ &\longrightarrow \mathcal{P}_R \times_{\text{Ad}} \widehat{\mathfrak{g}}_S \longrightarrow \mathcal{P}_R \times_{\text{Ad}} \mathfrak{g}_S \longrightarrow 0. \end{aligned}$$

この完全系列の分裂のことを \mathcal{P}_R の分裂という。一般に主束の接続と分裂から、付随する lifting gerbe の connective structure と curving を与えることができる ([2])。従って、Chern-Simons gerbe の自然な connective structure と curving が得られることになる。また、lifting gerbe の connective structure が平坦な接続により与えられている時には、結果として得られる 3-curvature は 0 になっている。これにより証明が完了する。□

注意. Chern-Simons 直線束 ($\partial\Sigma = \emptyset$) 上に定義される自然な接続の曲率は、接続の空間の上の symplectic 形式であり ([6, 12])、恒等的に 0 ではない。

4.4 ゲージ変換群の作用

よく知られるように、接続の空間にはゲージ変換群が作用している。

定理 4.4. Chern-Simons gerbe $\underline{\mathcal{C}}_R$ は、接続の空間 \mathcal{A}_R へのゲージ変換群 \mathcal{G}_R の作用のもとで同変な gerbe である。

証明の概略. Chern-Simons gerbe が lifting gerbe として定義されていたことを使う。ゲージ変換群の作用が主束 \mathcal{P}_R に、束同型として持ちあがることは容易に示すことができる。このような状況のもとでは、結果として得られる lifting gerbe は同変 gerbe になる。 \square

ここで、 \mathcal{G}_R の \mathcal{A}_R の作用が主束 \mathcal{P}_R に持ち上がっていることを用いると、構造群がループ群であるような主束 $(E\mathcal{G}_R \times \mathcal{P}_R)/\mathcal{G}_R \rightarrow (E\mathcal{G}_R \times \mathcal{A}_R)/\mathcal{G}_R$ が得られる。ここで、 $E\mathcal{G}_R$ は \mathcal{G}_R の普遍束であり、商は対角作用についてとっている。この主束の持ち上げが存在するための障害類として、次の同変コホモロジー類を導入する。

$$\lambda_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{P}_R, \widehat{G}_S) \in H_{\mathcal{G}_R}^3(\mathcal{A}_R, \mathbb{Z}).$$

この同変コホモロジー群は、商空間 $(E\mathcal{G}_R \times \mathcal{A}_R)/\mathcal{G}_R$ のコホモロジー群である。次の補題は定義より明らかである。

補題 4.5. もし \mathcal{P}_R の同変持ち上げが存在すれば、上の同変コホモロジー類は消えている。

次の結果は、上の同変コホモロジー類の具体的な計算結果である。

定理 4.6. $S = S^1$ であるとする $H_{\mathcal{G}_R}^3(\mathcal{A}_R, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ であり、同変コホモロジー類 $\lambda_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{P}_R, \widehat{G}_S)$ は中心拡大 \widehat{G}_S を定めるときに固定した整数 k に対応する。

証明の概略. 切断 $s \in S_R$ を一つ固定する。すると群の同一視 $\mathcal{G}_R = G_S = LG$ が得られる。このとき、同変コホモロジー群 $H_{\mathcal{G}_R}^3(\mathcal{A}_R, \mathbb{Z})$ は $H^3(LBG, \mathbb{Z})$ と同型になる。ここで LBG は、 $G = SU(2)$ の分類空間のループ空間である。このコホモロジー群は、代数的位相幾何学の基本的な定理をいくつか組み合わせることで、 $H^4(BG, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ と同型であることがわかる。また、この同型のもとで $\lambda_{\mathcal{G}_R}(\mathcal{P}_R, \widehat{G}_S) \in H_{\mathcal{G}_R}^3(\mathcal{A}_R, \mathbb{Z})$ は $\lambda(LEG, \widehat{LG}_k) \in H^3(LBG, \mathbb{Z})$ に対応することがわかる。このコホモロジー類は、 $H^4(BG, \mathbb{Z})$ の生成元の k 倍になることが知られている ([4, 9])。従って、定理の結果を得る。 \square

先の補題を組み合わせることで、次の系が直ちに得られる。

系 4.7. $k \neq 0$ ならば、 \underline{C}_R は同変 *gerbe* として非自明である。

これにより Chern-Simons *gerbe* は位相的には自明であるが、同変 *gerbe* として見ると非自明であることがわかる。

参考文献

- [1] M. Atiyah, *Topological quantum field theories*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 68, (1988), 175-186 (1989).
- [2] J-L. Brylinski, *Loop spaces, Characteristic Classes and Geometric Quantization*, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 1993.
- [3] J-L. Brylinski and D. A. McLaughlin, *A geometric construction of the first Pontryagin class*, Quantum topology, 209-220, Ser. Knots Everything, 3, World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1993.
- [4] J-L. Brylinski and D. A. McLaughlin, *The geometry of degree-four characteristic classes and of line bundles on loop spaces. I*, Duke Math. J. 75 (1994), no. 3, 603-638.
- [5] R. Dijkgraaf and E. Witten, *Topological gauge theories and group cohomology*, Comm. Math. Phys. 129(1990), no.2, 393-429.
- [6] D. S. Freed, *Classical Chern-Simons Theory. I*, Adv. Math. 113(1995), no.2, 237-303.
- [7] D. S. Freed, *Higher algebraic structures and quantization*, Comm. Math. Phys. 159 (1994), no.2, 343-398.
- [8] J. Giraud, *Cohomologie non-abélienne*, Grundle. 179, Springer Verlag (1971).
- [9] T. P. Killingback, *World-sheet anomalies and loop geometry*, Nucl. Phys. B 288 (1987), no.3-4, 578-588.
- [10] A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, Oxford Univ. Press, New York, 1986.
- [11] E. Verlinde, *Fusion rules and modular transformations in 2D conformal field theory*, Nuclear Phys. B 300 (1988), no. 3, 360-376.
- [12] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Comm. Math. Phys. 121 (1989), no. 3, 351-399.

〒 153-8914 東京都目黒区駒場 3-8-1 東京大学大学院数理科学研究科
e-mail: kgomi@ms.u-tokyo.ac.jp

プロジェクト 2001

～京に結集した低次元トポロジスト達～

東京工業大学 大学院理工学研究科 村上 斉

2001 年度

京都大学数理解析研究所プロジェクト研究として
「21 世紀の低次元トポロジー」が開催された。

組織委員は、
大槻知忠、
小林毅、
齋藤恭司、
作間誠、
谷山公規、
村上順、
村上斉
の 7 名であった。

これは、
2001 年から 2002 年にかけて
京に集まった低次元トポロジスト達の
記録である。

予算

i) プロジェクトに伴い（ほぼ）自動的に使えたもの

	金額	主な使用目的
数理解析研究所 共同利用	150 万円	・共同研究集会, 短期共同研究, 長期研究員などの国内旅費
数理研 外国人研究員	3 ヶ月×4 人	・外国からの客員教授の招聘
数理研 COE 外国人研究員	3 ヶ月×2 人	・外国からの客員教授の招聘
数理科学振興会	100 万円	・外国からの研究者の招聘

ii) その他

科学研究費補助金	総額約 920 万円 (トポロジープロジェクトからの補助 100 万円を 含む.)	・外国からの研究者の招聘 ・国内旅費 (約 140 万円)
三菱財団	220 万円	・外国からの研究者の招聘 ・宿舎代 (35 万円)
住友財団	100 万円	・外国からの研究者の招聘
井上科学振興財団	80 万円	・外国からの研究者の招聘
文部科学省国際シン ポジウム開催経費	164 万 6 千円	・外国からの研究者の招聘 ・国内旅費 ・アルバイト代

海外からの参加状況（当時の所属機関の所在地による）

イスラエル	2
イタリア	1
英国	2
オーストラリア	2
カナダ	1
韓国	6
スウェーデン	1
中国	4
チュニジア	1
ドイツ	1
ニュージーランド	1
フランス	4
米国	18
ロシア	1
計	45

主な活動

研究題目	研究代表者	期間
短期研究員（個別）		
3次元多様体の Heegaard 分解と Dehn 手術及びそれらに関連した話題について	小林 毅	6月11日～6月15日
「4次元多様体と曲面の埋め込み」	鎌田 聖一	7月23日～7月25日
結び目と3次元多様体の不変量に関するトポロジー	大槻 知忠	9月17日～9月21日
低次元トポロジーと接触幾何	三松 佳彦	10月29日～11月2日
3次元多様体および結び目の不変量の研究Ⅰ	村上 斉	10月12日～10月26日
3次元多様体および結び目の不変量の研究Ⅱ	村上 斉	11月2日～11月16日
共同研究集会		
明日の低次元トポロジー	村上 斉	1月7日～1月10日

上記のほか、ほぼ毎週セミナーを開催した。特に9月には集中的に行なった。

ゲージ群のトポロジーについて

佃 修一 (琉球大学理学部)

1 Introduction

G をコンパクト連結リー群, K を連結な有限 CW 複体, P を K 上の主 G 束とする. P の自己同型すなわち P から P への G 同変写像で K 上の恒等写像を誘導するもの全体のなす群をゲージ群とよび \mathcal{G} あるいは $\mathcal{G}(P)$ であらわす. $\mathcal{G}(P)$ の分類空間は P を分類する写像を含む $\text{Map}(K, BG)$ の弧状連結成分 $\text{Map}_P(K, BG)$ であることが知られている ([1], [8], [2]).

G および K を固定したとき K 上の主 G 束は $\text{Map}(K, BG)$ の弧状連結成分で分類されるが, \mathcal{G} についてはなにがいえるであろうかという問題を考えてみる.

G の G 自身への adjoint 作用による P の随伴束を $AdP = P \times_G G$ と書く. G の積は AdP の fibrewise な積 $AdP \times_K AdP \rightarrow AdP$ を定め, これにより AdP の切断全体 $\Gamma(AdP)$ は群になり $\mathcal{G}(P)$ と自然に同一視される.

K 上の主 G 束 P, P' に対し K 上の写像 $f: AdP \rightarrow AdP'$ はそれが fibrewise な群準同型であればゲージ群の間の準同型写像 $\mathcal{G}(P) \rightarrow \mathcal{G}(P')$ を, fibrewise な H 写像であれば H 写像を誘導する. ゲージ群をなんらかの意味で分類しようとする際 AdP を分類することは重要であるように思われる.

実際ある場合にはゲージ群はリー群としては随伴束によって分類される. 底空間 K が連結閉 C^∞ 多様体のとき, ゲージ群には Fréchet リー群の構造がはいる. この場合に次が成り立つ.

定理 1.1 ([7], [17]). G をセミスピノル群以外のコンパクト連結単純リー群またはユニタリ群とする. 連結閉 C^∞ 多様体 K 上の主 G 束 P, P' のゲージ群の単位元を含む連結成分が Fréchet リー群として同型になるための必要十分条件は fibrewise な同型 $f: AdP \rightarrow AdP'$ で K 上微分同相となるものが存在することである.

この証明には底空間が多様体であるということとゲージ群がリー群となるということとを本質的に用いており位相群として同型ならどうなるかといったことはよくわからない.

本講演では G と K を固定したときの G のホモトピー型に関する M.C.Crabb-W.A.Sutherland の結果及びそれに関連した筆者と河野明氏の共同研究を中心にお話ししたい。

2

はじめに fibrewise な写像と切断の空間についてまとめておく([5]). K 上の空間 X ($p: X \rightarrow K$) が切断 $s: K \rightarrow X$ を指定されているとき X は pointed であるといい s を基点という. K 上の空間 X, Y の間の K 上の写像を fibrewise map とよび, 基点を保つとき pointed fibrewise map という.

$I = [0, 1]$ と X に対し $I \times X$ は射影と p の合成により K 上の空間となる. K 上の写像 $H: I \times X \rightarrow Y$ は fibre homotopy とよばれる. X, Y がともに pointed であるとき, 各 $t \in I$ で H が基点を保つとき pointed fibre homotopy という. X, Y が (pointed) fibre homotopy 同値であれば切断の空間 $\Gamma(X), \Gamma(Y)$ は (基点付き空間として) ホモトピー同値となる.

X が pointed であるとき $X \times_K X$ も自然に pointed となる. X の fibrewise な積すなわち pointed fibrewise map $m: X \times_K X \rightarrow X$ が pointed fibrewise homotopy を除き次の図式を可換にするとき (X, m) を fibrewise H 空間 という.

$$\begin{array}{ccc}
 & & X \\
 & \nearrow 1 & \uparrow 1 \times c \\
 X & \xrightarrow{\Delta} & X \times_K X \\
 & \searrow 1 & \downarrow c \times 1 \\
 & & X
 \end{array}$$

ただし Δ は対角線写像, c は定値写像すなわち $c = s \circ p$. X が fibrewise H 空間 のとき m の定める積により $\Gamma(X)$ は H 空間となる. ふたつの fibrewise H 空間 の間の pointed fibre homotopy 同値 $f: X \rightarrow Y$ は次の図式が pointed

fibrewise homotopy を除き可換であるとき fibrewise H-同値という。

$$\begin{array}{ccc}
 X \times_K X & \xrightarrow{f \times_K f} & Y \times_K Y \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

X, Y が fibrewise H-同値であれば切断の空間 $\Gamma(X), \Gamma(Y)$ は H-同値 (ホモトピーを除いて積を保つような基点付きホモトピー同値写像がある) となる。

$F \rightarrow E \rightarrow K$ をファイバー F が nilpotent であるファイブレーション, p を素数とすると fibrewise な p -局所化が存在する。すなわちファイブレーション $F_{(p)} \rightarrow E_{(p)}^f \rightarrow K$ とファイブレーションの写像

$$\begin{array}{ccccc}
 F & \longrightarrow & E & \longrightarrow & K \\
 \downarrow & & \downarrow & & \parallel \\
 F_{(p)} & \longrightarrow & E_{(p)}^f & \longrightarrow & K
 \end{array}$$

でファイバーでは p -局所化になっているものが存在する ([3], [14], [15])。fibrewise な局所化が誘導する写像 $\Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E_{(p)}^f)$ は切断の空間の局所化を与える ([16])。

主束の随伴束について次の M.C.Crabb-W.A.Sutherland の基本的な結果がある。

命題 2.1 (Crabb-Sutherland [6]). $EG \times_{Ad} BG$ と $BG \times BG$ は BG 上 pointed fibre ホモトピー同値である。ここで $EG \times_{Ad} BG$ は BG の基点, $BG \times BG$ は対角線写像を基点とする。

命題 2.2 (Crabb-Sutherland [6]). $BG \times BG_{(0)}$ と $BG \times BG_{(0)}$ は BG 上 pointed fibre ホモトピー同値である。ここで一方は $BG_{(0)}$ の基点, 一方は対角線写像を基点とする。

すなわち $EG \times_{Ad} BG$ を fibrewise に有理化したものは自明なものと pointed fibre ホモトピー同値である。それぞれ fibrewise ループ空間を考えると次を与える。

系 2.3 (Crabb-Sutherland [6]). AdP を fibrewise 有理化したものは自明なものに fibre H-同値である。

また fibrewise 写像空間を考えることで $BG(P) = \text{Map}_P(K, BG)$ となることもわかる ([6], [9]).

底空間が有限複体のときは AdP は十分大きな素数 p で局所化すると fibrewise H 空間として自明になることがわかる.

命題 2.4 ([13]). 十分大きな素数 p で fibrewise に局所化すると AdP は自明なものに fibre H 同値である.

G が p 正則すなわち自然数の列 $0 \leq n_1 \leq \dots \leq n_l$ と p 同値 $\prod S^{2n_j+1} \rightarrow G$ が存在するときは, AdP を p で局所化したときに自明になるような底空間の次元を評価することが出来る.

命題 2.5 ([13]). $\dim K < 2p - 2n_l$ ならば AdP を fibrewise に p で局所化すると自明なものに fibre ホモトピー同値である.

以上をまとめて次をえる.

命題 2.6. 有限複体 K 上の主 G 束 P のゲージ群 $\mathcal{G}(P)$ は十分大きな素数 p で局所化すると自明束のゲージ群と H 同値である.

G が p 正則であるときは $\dim K < 2p - 2n_l$ ならば全ての主 G 束のゲージ群は p で局所化すると自明束のゲージ群にホモトピー同値である.

さらに Crabb-Sutherland は次の結果を示した.

定理 2.7 (Crabb-Sutherland[6]). K と G を固定したときゲージ群の H 空間としてのホモトピー型は有限個しかない.

3 例

底空間 K が単連結 4 次元閉多様体, 構造群が $SU(2)$ の場合を考える. このとき K 上の主 $SU(2)$ 束は $c_2 \in \mathbb{Z}$ で分類される. P_k を $c_2(P_k) = k \in \mathbb{Z}$ となる主束, $\mathcal{G}_k = \mathcal{G}(P_k)$ とする.

定理 3.1 ([10],[11]). \mathcal{G}_k が $\mathcal{G}_{k'}$ とホモトピー同値になるための必要十分条件は $(12/d(K), k) = (12/d(K), k')$ となることである. ここで K の交叉形式が even のとき $d(K) = 1$, odd のとき $d(K) = 2$. また $(12/d(K), k)$ は $12/d(K)$ と k の最大公約数 ($(12/d(K), 0) = 12/d(K)$).

すなわちこの場合ゲージ群のホモトピー型は $d(X) = 1$ のとき 6 個, $d(X) = 2$ のとき 4 個ある.

Crabb-Sutherland は H 空間としての分類を与えた.

定理 3.2 (Crabb-Sutherland [6]). $K = S^4$ の場合 \mathcal{G}_k が $\mathcal{G}_{k'}$ と H 同値になるための必要十分条件は $(180, k) = (180, k')$ となることである.

この場合 H 空間としてのホモトピー型は 18 個ある.
分類空間については次が成り立つ.

定理 3.3 ([18], [12]). $B\mathcal{G}_k$ が $B\mathcal{G}_{k'}$ とホモトピー同値になるための必要十分条件は, K が向きを反対にするホモトピー同値をもつとき $|k| = |k'|$, もたないとき $k = k'$ となることである.

以上見てきたようにゲージ群の位相を調べる際 fibrewise topology の手法は非常に有効であるが, コホモロジー環を調べる際にも非常に有効であるように思われる. 実際 Crabb は [4] で $\text{Map}(S^2, \text{BU}(n))$ の整係数コホモロジー環を fibrewise homology を用いて計算し簡明で美しい結果を与えている.

最後に次の問をあげてこの稿を終えたい. $B\mathcal{G}(P)$ が $B\mathcal{G}(P')$ とホモトピー同値, すなわち $\text{Map}_P(K, B\mathcal{G}) \simeq \text{Map}_{P'}(K, B\mathcal{G})$ ならば AdP と AdP' はなんらかの意味で同型であるうか.

References

- [1] M. F. Atiyah and R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Proc. Royal Soc. London **A308** (1982), 523-615
- [2] R. Bencivenga, Approximating groups of bundle automorphisms by loop spaces, Trans. Amer. Math. Soc. **285** (1984), 703-715
- [3] A. K. Bousfield and D. M. Kan, Homotopy limits, completions and localizations, Lecture Notes in Math., 304, Springer, Berlin, (1972)
- [4] M. C. Crabb, Fibrewise homology, Glasg. Math. J. **43** (2001), 199-208
- [5] M. Crabb and I. James, Fibrewise homotopy theory, Mathematical Monographs (Springer, Berlin, 1998)
- [6] M. C. Crabb and W. A. Sutherland, Counting homotopy types of gauge groups, Proc. London Math. Soc. **81** (2000), 747-768.
- [7] W. D. Curtis and F. R. Miller, Gauge groups and classification of bundles with simple structural group, Pacific JMath **68** (1977), 331-338

- [8] D. H. Gottlieb, Applications of bundle map theory, *Trans. Amer. Math. Soc.* **7** (1972), 23-50
- [9] I. M. James and P. Zhang, Fibrewise transformation groups and fibre bundles, *Northeast Chinese Math. J.* **8** (1992), 263–274
- [10] A. Kono, A note on the homotopy type of certain gauge groups, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A* **117** (1991), 295–297.
- [11] A. Kono and S. Tsukuda, A remark on the homotopy type of certain gauge groups, *J. of Math. of Kyoto University* **36** (1996), 115-121
- [12] A. Kono and S. Tsukuda, 4-manifolds X over $BSU(2)$ and the corresponding homotopy types $\text{Map}(X, BSU(2))$, *J. Pure Appl. Algebra* **151** (2000), 227–237
- [13] A. Kono and S. Tsukuda, preprint
- [14] I. Llerena, Localization of fibrations with nilpotent fibre, *Math. Z.* **188** (1985), 397–410.
- [15] J. P. May, Fibrewise localization and completion, *Trans. Amer. Math. Soc.* **258** (1980), 127–146
- [16] J. M. Møller, Nilpotent spaces of sections, *Trans. Amer. Math. Soc.* **303** (1987), 733–741.
- [17] S. Tsukuda, On Isomorphism Classes of Gauge Groups, *Topology and Its Appl.* **87** (1998), 173-187
- [18] S. Tsukuda, Comparing the homotopy types of the components of $\text{Map}(S^4, BSU(2))$, *J. Pure Appl. Algebra* **161** (2001), 235–243

多様体の同相群の無限次元位相多様体としての性質について

矢ヶ崎達彦 (京都工芸繊維大・工芸)

1. 同相群予想

Geometric Topology における古典的な問題として『多様体の同相群が l_2 -多様体になる事を示せ』という問題がある. M をコンパクト n -次元位相多様体とし, $\mathcal{H}(M)$ を M の同相写像全体の成す群にコンパクト-開位相を導入したものとする.

予想. $\mathcal{H}(M)$ は位相的 l_2 -多様体である (i.e., 局所的に l_2 と同相である).

微分同相群の場合と異なり, 同相群の場合は, 直接 l_2 -座標系を導入する方法が無いため, この予想を解決するためには, l_2 -多様体を位相空間として識別するための『 l_2 -多様体の位相的特徴付け』が必要となる. この l_2 -多様体の理論は 1980 年頃までに整備され, l_2 -多様体の特徴付けも驚くほど簡潔な命題として述べられている. この結果, 現在では, 次の事が知られている:

命題 1. $\mathcal{H}(M)$ が l_2 -多様体 $\iff \mathcal{H}(M)$ が ANR (ノルム空間の近傍レトラクト)

A.V.Černavskii [7], R.D.Edwards-R.C.Kirby [13] により, $\mathcal{H}(M)$ は常に局所可縮であることが示されている. 有限次元空間に対しては, 局所可縮性と ANR 性は同値であるが, 無限次元空間では差があり, この ANR の判定問題が, 無限次元の困難を表している.

同相群予想は, $n = 1, 2$ の場合に実際に正しい事が, 既に知られている:

- (i) $M = [0, 1]$ の場合: 1960 年代に R. D. Anderson によって, 直接的に $\mathcal{H}(M)$ が l_2 自身と同相であることが示された. これが, 同相群予想の出発点である.
- (ii) M がコンパクト曲面の場合: 1970 年頃に R. Luke - W. K. Mason [26] は, まず円板の場合に $\mathcal{H}(M)$ が ANR となる事を直接示し, さらに, 等角写像の理論を巧みに用いて, 一般の曲面の場合にも $\mathcal{H}(M)$ が ANR となる事を示した. その後, l_2 -多様体の特徴付けが得られ, $\mathcal{H}(M)$ が l_2 -多様体になることが最終的に示された.

曲面の同相群の研究への等角写像の理論の応用は, 既に 1950 年代から見受けられ, これが, 2 次元での問題解決に大きな役割を果たしている.

一方, $n \geq 3$ の場合は, 多くの人々の努力にも拘わらず, 依然未解決のままである.

この講演では, 同相群 $\mathcal{H}(M)$ や PL-同相 / Lipschitz-同相の成す部分群に関して知られている事柄を紹介する. 以下, 第 2 節では, 無限次元位相多様体の特徴付けに関して一般論を説明し, 第 3 節でコンパクト多様体の同相群に関する結果を, 第 4 節では, 非コンパクト曲面の同相群に関する結果を紹介する.

2. 無限次元位相多様体の特徴付け

モデル空間 E と局所的に同相な位相空間を E -多様体とよぶ。以下、空間はすべて可分で距離化可能であるとする。

2.1. l_2 -多様体.

無限次元線形空間の中で最も基本的なモデル空間は、ヒルベルト空間 l_2 である。 l_2 の位相的性質を局所的に張合わせることにより、 l_2 -多様体 X が次の性質を持つことがわかる。

- (i) X は完備距離化可能な ANR である。
- (ii) (Stability) $X \times l_2 \cong X$
- (iii) (Z -埋め込み近似) 完備距離空間から X への任意の写像は Z -埋め込みで相対的に近似できる。
- (iv) Strong Discrete Approximation Property (SDAP) を持つ。

性質 (i) は、 X の属する空間のクラスを規定している。これに対して、(ii), (iii), (iv) は X の厚み (均質な無限次元性) を示す性質である。(ii) は $(l_2)^2 \cong l_2$ を X 上で張合わせて得られる。(iii) は、(ii) の l_2 -factor を用いて示され、無限次元空間における general position property を表現している。以下で定義されるように、 Z -埋め込みは非常に薄い像を持ち、性質 (iii) は、 X が均質に無限次元の厚みを持つ事を意味する。

定義.

- (i) X の閉集合 C は任意の写像 $f: Y \rightarrow X$ が写像 $g: Y \rightarrow X \setminus C$ で近似できるとき X の Z -集合であると言われる。 Z -埋め込みは、像が Z -集合であるような埋め込みである。
- (ii) 『写像 $f: Y \rightarrow X$ が Z -埋め込みで相対的に近似できる』とは、 X 上の任意の正値関数 ε に対して、 Z -埋め込みで f と ε の近さにあり、かつ、 f が既に Z -埋め込みになっている部分では f と一致するものが存在することである。
- (iii) 性質 (iii) で、特にテスト空間 $Y = \bigoplus_{n=1}^{\infty} I^n$ (n -cube I^n ($n \geq 1$) の disjoint union) をとれば、任意の写像 $f: Y \rightarrow X$ は写像 $g: Y \rightarrow X$ で $\{g(I^n)\}_n$ が X において離散となるもので近似される。この性質を SDAP と呼ぶ。

これらの性質は l_2 -多様体に対して本質的であり、次の様な l_2 -多様体の位相的特徴付けが与えられている [33]:

定理 1. X が l_2 -多様体 $\iff X$ は完備距離化可能な ANR で SDAP を満たす

この定理は、Edwards' Program に基づき、 X に対して l_2 -多様体からの fine homotopy equivalence (評価付きホモトピー同値写像) を構成し、それを同相写像で近似することで示される。

l_2 -多様体 X の分類に関しては、 X の位相型はそのホモトピー型で決まることが知られている [22]。特に、 $X \simeq P$ (局所コンパクト多面体) ならば $X \cong P \times l_2$ である。

2.2. Σ -多様体 及び σ -多様体.

ℓ_2 は \mathbb{R} の可算積 $s = \mathbb{R}^\infty$ と同相であることが知られている [1]. s はすべての実数列からなる線形空間であり, 次の2つの稠密な部分空間を含んでいる:

有界点列の空間 $\Sigma = \{(x_n) \in s : \sup_n |x_n| < \infty\}$

有限点列の空間 $\sigma = \{(x_n) \in s : \text{有限個の } n \text{ を除いて } x_n = 0\}$

Σ -多様体 や σ -多様体 の特徴付けは [8, 5, 28] において与えられている.

- 定義.** (i) 空間 X が 可算 (有限次元) コンパクト
 $\iff X$ は (有限次元) コンパクト部分集合の可算和として表わされる.
(ii) X の閉集合 C が Strong Z -集合 \iff 任意の写像 $f: Y \rightarrow X$ が
写像 $g: Y \rightarrow X$ で $cl g(Y) \subset X - C$ となるもので近似できる.
(iii) 空間のクラス \mathcal{C} に対して, X は Strongly \mathcal{C} -Universal である
 \iff 任意の $Y \in \mathcal{C}$ から X への写像が Z -埋め込みで相対的に近似できる.

定理 2. X が Σ -多様体 (σ -多様体) \iff

- (i) X は 可算 (有限次元) コンパクト ANR で, Strong Z -集合の可算和として表わされる.
(ii) X は (有限次元) コンパクト距離空間のクラスに対して Strongly Universal である.

性質 (i) は X の属する空間のクラスを規定しており, 性質 (ii) は X の持つ general position property を述べることにより無限次元の均一な厚みの程度を規定している.

s 中の一般のクラスの線形部分空間をモデルとする多様体の特徴付けも [5] で与えられている. これらの多様体も, ホモトピー型により位相型が分類される.

2.3. (s, s_1, s_2) -多様体.

次に無限次元位相多様体とその稠密な部分多様体の組みを考察する. 3組 (X, X_1, X_2) とは, 空間 X とその部分空間 $X_1 \supset X_2$ からなる組のことである.

定義. (X, X_1, X_2) が (E, E_1, E_2) -多様体
 \iff 各点 $x \in X$ に対して x の開近傍 U が存在して $(U, U \cap X_1, U \cap X_2) \cong (E, E_1, E_2)$

代表的なモデル空間として次の3組を上げることができる:

$$(E, E_1, E_2) = (s, \Sigma, \sigma), (s^2, s \times \sigma, \sigma^2), (s^\infty, \Sigma^\infty, \Sigma_f^\infty), (s^\infty, \sigma^\infty, \sigma_f^\infty)$$

但し, 記号 s^∞, Σ^∞ etc. は可算積を表わし, $\Sigma_f^\infty, \sigma_f^\infty$ etc. は次のように定義される:

$$\Sigma_f^\infty = \{(x_n) \in \Sigma^\infty : \text{有限個の } n \text{ を除いて } x_n = 0\}.$$

$(s^\infty, \Sigma_f^\infty, \sigma_f^\infty) \cong (s, \Sigma, \sigma)$ であり, 本質的には, s の5つの部分空間 $\Sigma^\infty, \sigma^\infty, \Sigma, \sigma, s \times \sigma$ が現われているに過ぎない.

(E, E_1, E_2) -多様体に対しては, 次の形の特徴付け定理が得られる [34]:

定理 3. (X, X_1, \dots, X_ℓ) が (E, E_1, E_2) -多様体 \iff

- (i) X は完備距離化可能な ANR
(ii) $(X, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(E, E_1, E_2)$

(iii) X_2 は X においてホモトピー吸収性を持つ

(ホモトピー $h_t : X \rightarrow X$ で $h_0 = id_X$, $h_t(X) \subset X_2$ ($0 < t \leq 1$) を満たすものが存在する)

(iv) (X, X_1, X_2) は (E, E_1, E_2) -stable $((X \times E, X \times E_1, X \times E_2) \cong (X, X_1, X_2))$

ここで、クラス $\mathcal{M}(E, E_1, E_2)$ は、各々の場合に応じて、次の形になる：

$(X, X_1, X_2) \in \mathcal{M}(E, E_1, E_2)$

$\iff X$ は完備距離化可能 かつ X_1, X_2 は次の条件を満たす：

(E, E_1, E_2)	X_1	X_2
(s, Σ, σ)	可算 コンパクト	可算 有限次元 コンパクト
$(s^2, s \times \sigma, \sigma^2)$	F_σ in X	可算 有限次元 コンパクト
$(s^\infty, \sigma^\infty, \sigma_f^\infty)$	$F_{\sigma\delta}$ in X	可算 有限次元 コンパクト
$(s^\infty, \Sigma^\infty, \Sigma_f^\infty)$	$F_{\sigma\delta}$ in X	可算 コンパクト

(E, E_1, E_2) -多様体の分類定理は、次の形になる：

定理 4. (E, E_1, E_2) -多様体 $(X, X_1, X_2), (Y, Y_1, Y_2)$ に対して

$$(X, X_1, X_2) \cong (Y, Y_1, Y_2) \iff X \simeq Y.$$

特徴付け定理の証明は、 s -多様体における Strong $\mathcal{M}(E, E_1, E_2)$ -Universality を持つ部分空間の一意的性定理に基づいている。Strong Universality は、 Z -埋め込みによる近似と部分空間への吸収性とを同時に考慮した概念である。歴史的には、まず、 (s, Σ) -多様体や (s, σ) -多様体の特徴付けるため、T. A. Chapman 等により capset 及び fd-capset という形で導入され [8]、その後、 s の様々な稠密線形部分空間をモデルとする部分多様体を扱うため、一般のクラス \mathcal{M} に対して、以下に述べる形で拡張された [5, 3, 6]

定義. 組の写像 $f : (X, X_1, X_2) \rightarrow (Y, Y_1, Y_2)$ が層を保つ

$$\iff f(X \setminus X_1) \subset Y \setminus Y_1, f(X_1 \setminus X_2) \subset Y_1 \setminus Y_2, f(X_2) \subset Y_2$$

\mathcal{M} を空間の 3 組のあるクラスとする。

定義. (Y, Y_1, Y_2) が Strongly \mathcal{M} -Universal

\iff 任意の $(X, X_1, X_2) \in \mathcal{M}$ に対して、任意の写像 $f : X \rightarrow Y$ は層を保つ Z -埋め込み $g : (X, X_1, X_2) \rightarrow (Y, Y_1, Y_2)$ で相対的に近似される。

次の条件を考える。

条件 (*) (1) (X, X_1, X_2) は Strongly \mathcal{M} -Universal

(2) X の Z -集合の列 Z_n ($n \geq 1$) が存在して

(i) $X_1 \subset \cup_n Z_n$, (ii) 各 $n \geq 1$ に対して $(Z_n, Z_n \cap X_1, Z_n \cap X_2) \in \mathcal{M}$

定理 5. [6] X が s -多様体で、 $(X, X_1, X_2), (X, X'_1, X'_2)$ が共に条件 (*) を満たす

$\implies id_X$ は同相写像 $f : (X, X_1, X_2) \rightarrow (X, X'_1, X'_2)$ で近似される。

特徴付け定理 3 の証明は次の手順に従う：

- (a) s -多様体の特徴付け定理 1 を条件 (i) 及び (iv) に適用して, X が s -多様体であることがわかる.
- (b) 条件 (iii) ホモトピー吸収性 及び (iv) Stability から, (X, X_1, X_2) が条件 (*) を満たすことを示す.
- (c) 一意性定理 5 を X の局所座標近傍 $U \cong s$ に適用して, $(U, U \cap X_1, U \cap X_2) \cong (E, E_1, E_2)$ が示される.

分類定理 4 は, 一意性定理 5 と s -多様体の位相型がホモトピー型で決まる事から従う.

3. コンパクト多様体の同相群

本節では, 無限次元多様体の位相的特徴付けの応用として, コンパクト多様体の同相群及びその部分群に関して現在までに分かっている性質をまとめる.

3.1. 同相群 $\mathcal{H}(M)$.

M をコンパクト n -次元多様体とする.

命題 2. 同相群 $\mathcal{H}(M)$ は次の性質を持つ:

- (i) 位相群, (ii) 完備距離化可能, (iii) 局所可縮, (iv) s -stable [17, 24]

従って, s -多様体の特徴付け (定理 1) より 第 1 節の命題 1 が従う. 同相群予想に関して現在までに知られている結果については, 第 1 節で説明した通りである.

3.2. PL-同相群 $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$.

M をコンパクト PL-多様体とする. $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ を, M の PL-同相写像全体の成す $\mathcal{H}(M)$ の部分群とする.

命題 3. $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ は次の性質を持つ:

- (i) 可算有限次元コンパクト [18], (ii) 局所可縮 [16], (iii) σ -stable [25]

無限次元の中でも, 特に, 可算次元のときには, ANR と局所可縮性は同値であり [21], 従って, σ -多様体の特徴付け (定理 2) により, 次の結果が得られる [25]:

定理 6. $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ は σ -多様体である.

3.3. 3 組み $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}^{\text{LIP}}(M), \mathcal{H}^{\text{PL}}(M))$.

M をユークリッド空間の PL-部分多様体とする. M はユークリッド距離から定義される自然な距離を持つ. $\mathcal{H}^{\text{LIP}}(M)$ を, この距離に関する M のリップシッツ同相写像全体の成す $\mathcal{H}(M)$ の部分群とする.

命題 4. $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}^{\text{LIP}}(M), \mathcal{H}^{\text{PL}}(M))$ は次の性質を持つ:

- (i) $\mathcal{H}(M)$ は完備距離化可能, $\mathcal{H}^{\text{LIP}}(M)$ は可算コンパクト, $\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ は可算有限次元コンパクト
- (ii) $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}^{\text{LIP}}(M), \mathcal{H}^{\text{PL}}(M))$ は (s, Σ, σ) -stable [18, 31].

この命題は、(リプシッツ条件, PL-条件) が (有界性条件, 有限性条件) であって、(有界点列, 有限点列) と組として正確に対応していることを示している。

$\mathcal{H}^{\text{PL}}(M)$ は $\mathcal{H}(M)$ の中で稠密とは限らないので、次の部分群を考える

$$\mathcal{H}(M)^* = \text{cl } \mathcal{H}^{\text{PL}}(M) \quad \mathcal{H}^{\text{LIP}}(X)^* = \mathcal{H}^{\text{LIP}}(X) \cap \mathcal{H}(M)^*$$

次の条件の下で、 $\mathcal{H}(M)^*$ は $\mathcal{H}(M)$ の幾つかの連結成分の和になる (cf.[19])

$$(*) \quad n \neq 4 \quad \text{かつ} \quad n = 5 \quad \text{のときは} \quad \partial M = \emptyset$$

$\mathcal{H}(M)$ が s -多様体 になる場合、無限次元多様体の 3 組の位相的特徴付け (定理 4) を適用して次の結論を得る：

定理 7. [19, 31, 34] M が $(*)$ を満たし、 $\mathcal{H}(M)$ が s -多様体
 $\implies (\mathcal{H}(M)^*, \mathcal{H}^{\text{LIP}}(M)^*, \mathcal{H}^{\text{PL}}(M))$ は (s, Σ, σ) -多様体

3.4. コンパクト 1 次元 / 2 次元 多様体の場合.

次元 $n = 1, 2$ では、同相群予想が成り立つので、定理 7 が無条件で成り立つ。

定理 8. [19, 31, 34] cf. [23] 任意のコンパクト 1 次元 / 2 次元 ユークリッド PL-多様体 M に対して $(\mathcal{H}(M), \mathcal{H}^{\text{LIP}}(M), \mathcal{H}^{\text{PL}}(M))$ は (s, Σ, σ) -多様体になる。

M がリーマン面のときには、 M の擬等角同型のなす部分群 $\mathcal{H}^{\text{QC}}(M)$ を考えることができる。擬等角性も有界条件の一種であり、リプシッツ同相群の場合と類似の議論で Σ -多様体になることが示される [36]。

定理 9. M がコンパクトリーマン面のとき、 $(\mathcal{H}_+(M), \mathcal{H}^{\text{QC}}(M))$ は (s, Σ) -多様体である。

M. E. Hamstrom [20] は、コンパクト 2 次元多様体 M に対して、 $\mathcal{H}(M)$ の単位連結成分 $\mathcal{H}(M)_0$ のホモトピー型を分類している。無限次元多様体の 3 組の分類 (定理 5) により次の結論を得る。

命題 5. $\mathcal{H}(M)_0 \simeq P$ (コンパクト多面体)
 $\implies (\mathcal{H}(M)_0, \mathcal{H}^{\text{LIP}}(M)_0, \mathcal{H}^{\text{PL}}(M)_0) \cong P \times (s, \Sigma, \sigma)$, $(\mathcal{H}(M)_0, \mathcal{H}^{\text{QC}}(M)_0) \cong P \times (s, \Sigma)$

4. 非コンパクト 1 次元 / 2 次元 多様体の場合

『非コンパクト多様体の無限遠での性質が、その多様体の同相群にどのように影響するか (しないのか)』という問題は考察に値する。 M を非コンパクト n 次元多様体とし、 $\mathcal{H}(M)$ をその同相群とする。

まず問題になるのが、 $\mathcal{H}(M)$ にどの位相を導入するかということである。強位相は、写像の近似定理を述べるのに適しているが、距離化可能でなく、また、この位相の下で任意の path h_t は共通のコンパクト台を持つなど、強い制約を持つ。(困難を避けるため、コンパクト台をもつ同相写像のみを扱うという立場もある。) 一方、コンパクト-開位相では、遠方で写像が大きく変形しても距離的には近いという常識に反する面を持つが、位相空間としては、コンパクト多様体の同相群と多くの性質を共有している。この理由により、ここでは、コンパクト-開位相の下で同相群の性質を考察する。

$X \subset M$ に対して, $\mathcal{H}_X(M) = \{h \in \mathcal{H}(M) \mid h|_X = id_X\}$ とする. M が PL-構造や距離を持つ場合には, PL-同相群 $\mathcal{H}_X^{PL}(M)$, リプシッツ同相群 $\mathcal{H}_X^{LIP}(M)$ 等の部分群を考慮することができる. 添字 0 は, id_M の連結成分, c はコンパクト台を表す.

命題 6. $\mathcal{H}_X(M)$ は次の性質をもつ: (i) 位相群 (ii) 完備距離化可能 (iii) s -stable.

$\mathcal{H}_X(M)$ は一般に局所連結にならないので, 以下, 単位連結成分 $\mathcal{H}_X(M)_0$ を考察する.

4.1. 1 次元の場合.

定理 10. [34] $(\mathcal{H}_+(\mathbb{R}), \mathcal{H}_+^{PL}(\mathbb{R}), \mathcal{H}^{PL,c}(\mathbb{R})) \cong (s^\infty, \sigma^\infty, \sigma_f^\infty)$.

4.2. 2 次元の場合.

M を非コンパクト連結 2次元 多様体とし, X を M のコンパクト部分多面体 (i.e., ある三角形分割で部分複体) とする.

定理 11. [38] $\mathcal{H}_X(M)_0$ は ℓ_2 -多様体である.

定理 12. (ホモトピー型の分類) [38]

- (i) $\mathcal{H}_X(M)_0 \simeq S^1$ if $(M, X) \cong (\mathbb{R}^2, \emptyset), (\mathbb{R}^2, 1pt), (S^1 \times \mathbb{R}^1, \emptyset), (S^1 \times [0, 1], \emptyset), (\mathbb{P}^2 \setminus 1pt, \emptyset)$
- (ii) $\mathcal{H}_X(M)_0 \simeq *$ in all other cases.

$\mathcal{H}_X(M)_0$ の位相型は, このホモトピー型により分類される.

これらの定理の証明には, バンドル定理と相対イソトピーに関する定理を用いる. これらは, それ自身興味ある結果である. 以下, M を連結 2次元 多様体とし, 記号を簡略化するため, $\partial M = \emptyset$ と仮定する.

4.2.1. バンドル定理. [37]

バンドル定理は, 同相群から埋め込みの空間への制限写像がバンドル又はファイブレーションになるという結果で, 微分同相群の場合は, 次元に関係なく既に良く知られた結果である. 同相群の場合, 一般の次元では, 対応する結果を示す手立てがないが, 2次元では等角写像が利用できる [12, 29]. 等角写像の 2次元トポロジーへの応用は古くから見られ, バンドル定理も円周の埋め込み空間や arc の proper な埋め込みの空間への制限写像の場合には, (バンドル という用語は使われていないが) 既に知られていたことである. 筆者は, これを, 一般のコンパクト多面体の埋め込み空間の場合に拡張した.

M のコンパクト部分多面体 $K \subset X$ に対して, $\mathcal{E}_K(X, M)$ は, 埋め込み $f: X \hookrightarrow M$ で $f|_K = id$ を満たすもの全体の空間にコンパクト-開位相を入れたものを表し, $\mathcal{E}_K(X, M)_0$ は包含写像 $i_X: X \subset M$ の連結成分を表す.

命題 7. 任意の $f \in \mathcal{E}_K(X, M)$ に対して, f の近傍 U と写像 $\varphi: U \rightarrow \mathcal{H}_K(M)_0$ で, $\varphi(g)f = g$ ($g \in U$) かつ $\varphi(f) = id_M$ を満たすものが存在する.

定理 13. 制限写像 $\pi: \mathcal{H}_K(M)_0 \rightarrow \mathcal{E}_K(X, M)_0$, $\pi(h) = h|_X$ は主バンドルで, その構造群は $\mathcal{G} = \mathcal{H}_K(M)_0 \cap \mathcal{H}_X(M)$ である (\mathcal{G} は $\mathcal{H}_K(M)_0$ に右からの合成で作用する).

命題 7 の拡張写像 φ が定理 13 の制限写像 π の局所 section を与える.

命題 7 の証明.

X がグラフの場合が本質的である. グラフは各頂点での放射上の tree とそれらを結ぶ辺に分解する. それらの円板近傍を考えれば, 結局, 複素平面 \mathbb{C} 上での次の問題に帰着する:

D を \mathbb{C} の単位円板, T を $\text{Int } D$ に埋め込まれた tree, A を D に proper に埋め込まれた arc とする.

- (i) T の $\text{Int } D$ への埋め込み f を標準的な方法で D の同相写像 $\varphi(f)$ に拡張せよ.
- (ii) A の D への端点を固定した proper 埋め込み g を標準的な方法で D の同相写像 $\psi(g)$ に拡張せよ.

(i) 二重連結領域上の等角写像定理により, $D - T$ 及び $D - f(T)$ には, 標準的な放射状の座標系が入る. これを用いて f を同相写像 $\varphi(f)$ に拡張する.

(ii) 単連結領域上の等角写像定理により, $D - A$ 及び $D - g(A)$ の2つの連結成分には, 標準的な錐構造が入る. これを用いて g を同相写像 $\psi(g)$ に拡張する. \square

4.2.2. 相対イソトピー定理. [38]

バンドル定理 (定理 13) で現れた群 \mathcal{G} が連結になる条件を求めたい. これは, バンドルの全空間と底空間のホモトピー型を比較する際に必要となる. N を M のコンパクト 2-次元部分多様体, X を N の部分集合として, 群 $\mathcal{G} = \mathcal{H}_N(M) \cap \mathcal{H}_X(M)_0$ を考察する.

\mathcal{G} が連結 $\iff \mathcal{H}_N(M) \cap \mathcal{H}_X(M)_0 = \mathcal{H}_N(M)_0$

$\iff h \in \mathcal{H}(M), h|_N = id_N, h \simeq id_M \text{ rel. } X \text{ ならば } h \simeq id_M \text{ rel. } N \quad (\simeq: \text{イソトピー})$

これは, 曲面上の相対イソトピーに関する問題である. 曲面上ではイソトピーの動きに大きな制約があり, N や $cl(M - N)$ の回転を許す連結成分 (円板, アニュラス, メービウス帯) が X の点を含む (ピンで刺して回転を止める) という条件をおけば良いことがわかる.

定理 14. (M, N, X) が次の条件を満たせば, $\mathcal{H}_N(M) \cap \mathcal{H}_X(M)_0 = \mathcal{H}_N(M)_0$ となる:

- (i) N の連結成分 H に関して,
 - (a) H が円板 $\implies H \cap X \ni 2$ 点
 - (b) H がアニュラス, メービウス帯 $\implies H \cap X \ni 1$ 点
- (ii) $cl(M - N)$ の連結成分 L に関して,
 - (a) L が円板 $\implies L \cap X \ni 2$ 点
 - (b) L がメービウス帯 $\implies L \cap X \ni 1$ 点

D. B. Epstein [14] は, 曲面上の2つの同相写像がホモトピックならばイソトピックになる事を示している. 定理 14 の証明はこの議論の変型であり, 最終的には, π_1 の計算に帰着する.

4.2.3. 定理 11, 12 の証明.

定理 11 では, ℓ_2 -多様体の特徴付け (定理 1) により, $\mathcal{H}_X(M)_0$ が ANR になる事を示せば十分である. M がコンパクトの場合には ($\partial M \neq \emptyset$ の場合も含めて), $\mathcal{H}_X(M)_0$ が ANR

になること [26] 及び $\mathcal{H}_X(M)_0$ のホモトピー型は既に知られている (わずかな例外を除いて可縮であった) [20, 30]. 非コンパクトの場合は, 以下のようにしてコンパクトの場合に帰着される.

定理 12 の Case (i) に現れた例外的な曲面の場合は, エンドコンパクト化により, コンパクトの場合に帰着できる. 従って, Case (ii) の一般的な場合に $\mathcal{H}_X(M)_0$ が可縮 ANR になることを示せばよい.

まず, M をコンパクト連結 2次元部分多様体の拡大列 M_i ($i \geq 1$) の和として表す. 但し $M_0 = X$ とし, Case (i) の曲面を除いたので各 M_i ($i \geq 1$) は円板, アニュラス, メーピウス帯 でないとしてよい. バンドル定理より, 次の様なバンドルの列が得られる

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_{M_i}(M)_0 & & \mathcal{H}_{M_i \cup \partial M_k}(M_k)_0 \\ \pi_{ij} \downarrow & & \pi_{ij}^k \downarrow \\ \mathcal{E}_{M_i}(M_j, M)_0 & = \bigcup_{k>j} & \mathcal{E}_{M_i}(M_j, \text{Int } M_k)_0 \quad (j > i \geq 0) \end{array}$$

右側のバンドルにおいて, 相対イソトピー定理 (定理 14) よりファイバーは連結, 従って, コンパクトの場合の結果より 全空間/ファイバー 共に 可縮 ANR になり, 底空間 $\mathcal{E}_{M_i}(M_j, \text{Int } M_k)_0$ も 可縮 ANR になる. その拡大和として, $\mathcal{E}_{M_i}(M_j, M)_0$ も 可縮 ANR となる. 左側のバンドルにおいて, 底空間が可縮だから, バンドルは自明で, 全空間はファイバーに強変型レトラクトする. 結果として, 次の強変型レトラクトの列が得られ, $\mathcal{H}_X(M)_0$ の可縮性が従う.

$$\mathcal{H}_X(M)_0 \searrow \mathcal{H}_{M_1}(M)_0 \searrow \mathcal{H}_{M_2}(M)_0 \searrow \cdots \searrow \{id_M\}.$$

左側のバンドルは section s_{ij} を持ち, ファイバーが可縮だから, $s_{ij}\pi_{ij}$ は id とファイバーを保ってホモトピックになる. j を大きくすれば, ファイバーの直径は幾らでも小さくなり, 従って, $\mathcal{H}_{M_i}(M)_0$ は, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して ANR $\mathcal{E}_{M_i}(M_j, M)_0$ によって ε -homotopy dominate される. 従って, $\mathcal{H}_{M_i}(M)_0$ 自身 ANR になる. 特に, $\mathcal{H}_X(M)_0$ は ANR である.

4.3. $\mathcal{H}_X(M)_0$ の部分群.

$\mathcal{H}_X(M)_0$ の様々な部分群に関して得ている結果を説明する.

以下, M は非コンパクト連結 2次元多様体とする.

4.3.1. PL-同相群 / Lipschitz-同相群.

定理 15. [41]

- (1) M が PL-多様体のとき $(\mathcal{H}_X(M)_0, \mathcal{H}_X^{\text{PL}}(M)_0, \mathcal{H}_X^{\text{PL},c}(M)_0)$ は $(s^\infty, \sigma^\infty, \sigma_f^\infty)$ -多様体である
- (2) M が ユークリッド PL-多様体 又は 完備リーマン多様体で C^1 -三角形分割を持つとき, $(\mathcal{H}_X(M)_0, \mathcal{H}_X^{\text{LIP}}(M)_0, \mathcal{H}_X^{\text{PL},c}(M)_0)$ は (s, Σ, σ) -多様体である.

4.3.2. 擬等角同相群.

定理 16. [36] M が非コンパクト連結リーマン面のとき, $(\mathcal{H}(M)_0, \mathcal{H}^{QC}(M)_0)$ は (s, Σ) -多様体である.

4.3.3. 微分同相群. M を C^∞ -多様体とし, $\mathcal{D}(M)$ は M の微分同相写像全体にコンパクト-開 C^∞ -位相を入れたものとする. $\mathcal{D}(M)_0$ は id_M の連結成分を表し, $\mathcal{D}(M)_0'$ は, コンパクトな台を持つ C^∞ -イソトピーで id_M とイソトピックな M の微分同相写像全体の成す $\mathcal{D}(M)_0$ の部分群を表す.

定理 17. [42] M は非コンパクト連結 2次元 C^∞ -多様体で $\partial M = \emptyset$ とする.

(1) $\mathcal{D}(M)_0$ は位相的 l_2 -多様体である.

(2) $\mathcal{D}(M)_0 \simeq \begin{cases} S^1 & \text{if } M \cong \text{平面, 開アニュラス, 開メービウス帯} \\ * & \text{in all other cases.} \end{cases}$

(3) $\mathcal{D}(M)_0'$ は $\mathcal{D}(M)_0$ においてホモトピー吸収性を持つ.

5. 最後に

同相群予想の次の目標は, 3次元での解決である. コンパクト n 次元多様体をファイバーに持つ Serre fibration は局所自明バンドルか? という問題に対して, 最近, $n = 2$ の場合が証明されたようであるが, こう言った切り口から, 3次元への糸口が見つかるのかも知れません.

REFERENCES

- [1] Anderson, R. D., Hilbert space is homeomorphic to the countable infinite product of lines, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 72 (1966) 515 - 519.
- [2] ———, Spaces of homeomorphisms of finite graphs, (*unpublished manuscript*).
- [3] Baars, J., Gladdines, H. and van Mill, J., Absorbing systems in infinite-dimensional manifolds, *Topology Appl.*, 50 (1993) 147 - 182.
- [4] Bessaga, C. and Pełczyński, A., *Selected Topics in Infinite-Dimensional Topology*, PWN, Warsaw, 1975.
- [5] Bestvina, M. and Mogilski, J., Characterizing certain incomplete infinite-dimensional retracts, *Michigan Math. J.*, 33 (1986) 291 - 313.
- [6] Cauty, R., Sur deux espaces de fonctions non dérivables, *Fund. Math.* 141 (1992) 195 - 214.
- [7] Černavskii, A. V., Local contractibility of the homeomorphism group of a manifold, *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 182 (1968), 510 - 513 = *Soviet Math. Dokl.*, 9 (1968) 1171 - 1174. MR 38 # 5241.
- [8] Chapman, T. A., Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 154 (1971) 399 - 426.
- [9] Chapman, T. A., *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS 28, American Mathematical Society, Providence, RI, 1975.
- [10] Chigogidze, A., *Inverse spectra*, North-Holland, Amsterdam, 1996.
- [11] ———, Infinite dimensional topology and shape theory, *Handbook of Geometric Topology*, R. J. Daverman and R. B. Sher ed., North-Holland, Amsterdam, 2001, 307 - 372.
- [12] Courant, R., *Dirichlet's principle, conformal mapping, and minimal surfaces*, Pure and Applied Math., Interscience Publishers Inc., New York, 1950.
- [13] Edwards, R. D. and Kirby, R. C., Deformations of spaces of embeddings, *Ann. Math.*, 93 (1971) 63 - 88.

- [14] Epstein, D. B. A., Curves on 2-manifolds and isotopies, *Acta Math.*, 155 (1966) 83 - 107.
- [15] Fabel, P., Self-homeomorphisms of the 2-sphere which fix pointwise a nonseparating continuum, *Fund. Math.*, 155 (1998), 201 - 214.
- [16] Gauld, D. B., Local contractibility of spaces of homeomorphisms, *Compositio Math.*, 32 (1976) 3 - 11.
- [17] Geoghegan, R., On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions I, *Topology*, 11 (1972) 159 - 177.
- [18] Geoghegan, R., On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions, II: The piecewise linear case, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 27 (1973) 463 - 483.
- [19] Geoghegan, R. and Haver, W. E., On the space of piecewise linear homeomorphisms of a manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 55 (1976) 145 - 151.
- [20] Hamstrom, M. E., Homotopy groups of the space of homeomorphisms on a 2-manifold, *Illinois J. Math.*, 10 (1966) 563 - 573.
- [21] Haver, W. E., Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 40 (1973) 280 - 284.
- [22] Henderson, D. W. and Schori, R. M., Topological classification of infinite-dimensional manifolds by homotopy type, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 76 (1970) 121 - 124.
- [23] Jakobsche, W., The space of homeomorphisms of a 2-dimensional polyhedron is an ℓ_2 -manifold, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math.*, 28 (1980) 71 - 75.
- [24] Keesling, J., Using flows to construct Hilbert space factors of function spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 161 (1971) 1 - 24.
- [25] ——— and Wilson, D., The group of PL-homeomorphisms of a compact PL-manifold is an ℓ_2^f -manifold, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 193 (1974) 249 - 256.
- [26] Luke, R. and Mason, W. K., The space of homeomorphisms on a compact two - manifold is an absolute neighborhood retract, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 164 (1972), 275 - 285.
- [27] van Mill, J., *Infinite-Dimensional Topology: Prerequisites and Introduction*, North-Holland, Math. Library 43, Elsevier Sci. Publ. B.V., Amsterdam, 1989.
- [28] Mogilski, J., Characterizing the topology of infinite-dimensional σ -compact manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 92 (1984) 111 - 118.
- [29] Pommerenke, Ch., *Boundary Behaviour of Conformal Maps*, GMW 299, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [30] Scott, G. P., The space of homeomorphisms of 2-manifold, *Topology*, 9 (1970) 97 - 109.
- [31] Sakai, K. and Wong, R. Y., On the space of Lipschitz homeomorphisms of compact polyhedron, *Pacific J. Math.*, 139 (1989) 195 - 207.
- [32] ———, On infinite-dimensional manifold triples, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 318 (1990), 545 - 555.
- [33] Toruńczyk, H., Characterizing Hilbert space topology, *Fund. Math.*, 111 (1981) 247 - 262.
- [34] Yagasaki, T., Infinite-dimensional manifold triples of homeomorphism groups, *Topology Appl.*, 76 (1997) 261 - 281.
- [35] ———, Characterizations of infinite dimensional manifold triples and their applications to homeomorphism groups, Proceedings of the conference on Surgery and Geometric Topology, 1996, *Science Bulletin of Josai Univ.*, (1997) No2, 145-159.
- [36] ———, The groups of quasiconformal homeomorphisms on Riemann surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 127 (1999) 2727 - 2734.
- [37] ———, Spaces of embeddings of compact polyhedra into 2-manifolds, *Topology Appl.*, 108 (2000) 107 - 122.
- [38] ———, Homotopy types of homeomorphism groups of noncompact 2-manifolds, *Topology Appl.*, 108 (2000) 123 - 136.
- [39] ———, Hyperspaces of Peano and ANR continua, *Topology Appl.*, 113 (2001) 309 - 320.
- [40] ———, Embedding spaces and hyperspaces of polyhedra in 2-manifolds, *Topology Appl.*, 121 (2002) 247 - 254.
- [41] ———, The groups of PL and Lipschitz homeomorphisms of noncompact 2-manifolds, preprint (math.GT/0010224)
- [42] ———, Homotopy types of diffeomorphism groups of noncompact 2-manifolds, preprint (math.GT/0109183)

3次元接触構造・接触形式とオープン・ブック分解

大阪大学理学研究科研究生 森 淳秀

1 接触多様体内の凸超曲面

奇数次元有向多様体 M^{2n+1} 上の**接触形式**とは、 $\alpha \wedge (d\alpha)^n > 0$ を満たす1-形式 α である。 M^{2n+1} 上の**接触構造**とは、最も非可積分な超平面場 ξ であり、局所的にはある接触形式の核として表される。以下では ξ は横断的な向きを持ち、ある大域的接触形式の核であるとする。接触多様体 (M^{2n+1}, α) 上には、 $\iota_{X_\alpha} d\alpha = 0$, $\iota_{X_\alpha} \alpha = 1$ により **Reeb 場** X_α が定まる。接触構造或いは接触形式を保つベクトル場は**接触ベクトル場**あるいは**狭義接触ベクトル場**と呼ばれる。Reeb 場は狭義接触ベクトル場であり、局所断面 S 上に1-形式 λ を導く。 $X_\alpha = \partial/\partial t$, $t|_S = 0$ によって t を定めれば、 $\alpha = \lambda + dt$ である。一般に、偶数次元多様体 Σ 上の1-形式 λ は、 $\omega = d\lambda$ が symplectic 形式であるとき、**Liouville 形式**と呼ばれる。また、 $\iota_Z \omega = \lambda$ となる Z は $\mathcal{L}_Z \omega = \omega$ を満たし、**Liouville 場**と呼ばれる。このとき $(\Sigma \times \mathbf{R}, \lambda + dt)$ は接触多様体であり、 (Σ, ω) の**接触化**と呼ばれる。 $t' = t + g$ とした場合の Liouville 形式は $\lambda' = \lambda + dg$ であり、接触化は接触多様体としては ω から定まる。よって接触形式は symplectic 形式と同様に局所モデルを持つ (共に Darboux の定理)。閉多様体上の接触構造のホモトピーは多様体のイソトピーによって追跡できる (Gray の安定性)。しかし、接触形式の変形は Reeb 場を固定しない限り大域的安定性を持たない。この意味では symplectic 構造に関する Moser の定理の類似は存在しない。また超曲面 Σ 上に Liouville 場が存在しない場合でも、 $\Sigma \times \mathbf{R}$ 上に \mathbf{R} -不変な接触構造が与えられれば、 Σ 上には $d\alpha|_{T\Sigma \cap \ker \alpha}$ が退化する方向に1次元特異葉層が定まる。これは**特性葉層**と呼ばれ、Liouville 場の流線の一般化である。接触多様体内の超曲面は、横断的な接触ベクトル場を持つとき**凸超曲面**と呼ばれる。

次に、 (W, ω) を $2n+2$ 次元 symplectic 多様体とする。 ω を保つベクトル場 X は、局所的には関数 H を用いて $\iota_X \omega = dH$ と表わされる。 H が大域的に定義される場合には、Hamilton 関数といい、 $X = X_H$ を **Hamilton ベクトル場**と呼ぶ。 H は

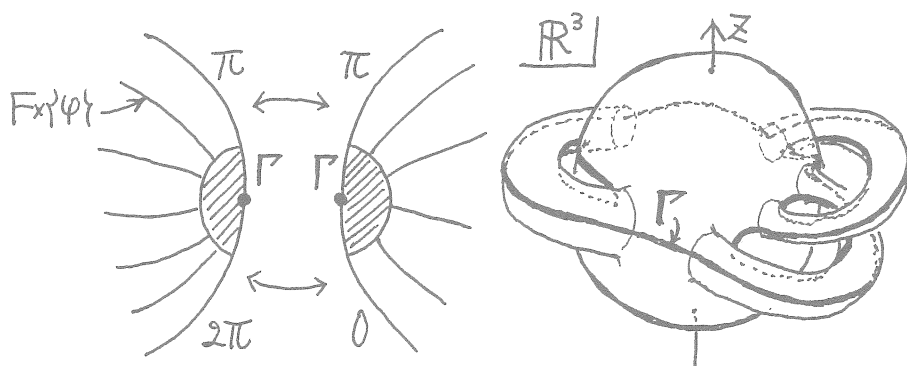
X_H の第一積分であるが、反対に超曲面 M を水平集合 $H^{-1}(0)$ とする任意の H に対して、 $X_H|_M$ は正の関数倍を除いて同一である。今、 ω は完全形式とし、Liouville 形式 λ は M 上で消えない (Liouville 場は M と横断的) と仮定すると、 $\alpha = \lambda|_M$ は接触形式であり、 M を接触型超曲面という。 M の近傍には Liouville 場が H 座標を定め、 $d(e^H\alpha) = \omega$ 及び $X_H|_M = X_\alpha$ が成り立つ。これを $H = \pm\infty$ に伸ばしたものが、 (M, α) の symplectization である。Weinstein は X_H の周期解の存在予想を定式化するため、上の設定を考案した。Viterbo は \mathbf{R}^{2n+2} 上の標準的 symplectic 構造について、任意の接触型超曲面 M 上で X_α が周期軌道を持つことを示した。これは \mathbf{R}^{2n+2} の星状領域に関する Rabinowitz の定理を大幅に拡張したものである。

接触型境界を持つコンパクト symplectic 多様体は、Liouville 場が境界で外向きのとき、強 symplectic filling と呼ばれる (多変数複素解析の強擬凸領域の類似物である)。境界の凸性は Liouville 場の向きに依存しているため、接触型超曲面に沿う切断を行えば凹凸 2 種類の境界を得る。逆に、凹凸の境界が接触構造を込めて微分同相なら、それらを貼り合わせることができる。一方の symplectization ($M^{2n+1} \times \mathbf{R}, d(e^H\alpha)$) において他方の接触形式 $e^f\alpha$ は関数 $t = f$ のグラフである。そこで、symplectic 形式に定数を掛けることは許すことにすれば、凹凸の境界はそれらの間に挟むべき糊代を symplectization の中で既に挟んでいるとしてよい。

Eliashberg, Giroux, 神田 雄高, 本田 公らをはじめ多くの研究者が同様の切り貼りを 3 次元接触多様体内の凸曲面で行って重要な諸結果を得た。接触ベクトル場による凸性の定式化は Eliashberg と Gromov による。ある Morse 関数 f の勾配状ベクトル場 X が接触ベクトル場であるとき、接触多様体は凸であるという。 f の等位面が凸曲面である。接触ベクトル場全体は、 $X \mapsto \iota_X\alpha$ によって $C^\infty(M)$ と同一視されるため、分離的曲面については一般的な設定である。また、ジェネリックには特性曲面 $C_X = \{\iota_X\alpha = 0\}$ は滑らかな曲面である。 C_X の外では、 X は $\alpha' = \frac{1}{\iota_X\alpha}\alpha$ の Reeb 場である。凸曲面 S には C_X との交わりが分割を定めており、 $da'|_S$ の符号に応じて正負の領域に分かれる。一つの凸曲面の任意に薄い近傍には、同じ分割を持つ任意の凸曲面がグラフとして描かれる。更に曲面は C^∞ -ジェネリックに凸である。よって接触多様体の切り貼りは分割の情報以外は全く位相的である。

2 凸 Heegaard 分解とオープン・ブック分解

勾配状接触ベクトル場 X は C_X 上にのみ特異点を持つ。 C_X 自身も凸であり、特性葉層は X に接する。今、 X の特異点が乗る C_X の領域の正負が、3次元での指数から定まっているとする。すなわち、指数が0または1ならば正、その他は負とする。この仮定を**真空条件**と呼ぶ。閉多様体 M^3 については、 C_X を Γ で分割したものはどちらもある連結曲面 F に同相である。 Γ における f の等位面 S も Γ によって F と同相な領域に分割され、 S は**凸 Heegaard 分解**を定める。すなわち、ハンドル体の一方は直積 $F \times [0, \pi]$ に $\Gamma (= \partial F)$ の法半円盤束 $\Gamma \times (D/2)$ を $[0, \pi]$ が $D/2$ の中心角であるように貼り合わせたものであり、他方は同じ Γ に対して残りの角 $[\pi, 2\pi]$ を用いて同様に構成されるものである (下図左)。逆にこのような状況が位相的に与えられれば、上の接触構造がイソトピーを法として一意的に復元される。Giroux は上の C_X を **f -本質的曲面**と呼び、open-book 分解を利用してその存在を示した。鳥巢 伊知郎は、これを凸 Heegaard 分解として解釈し、然るべき条件の下で接触構造の一意性を示した。なお、接触構造の凸 Heegaard 分解におけるハンドル体は $(\mathbb{R}^3, \ker(dz + xdy))$ 上に実現されることに注意する (下図右)。



Giroux は更に、任意の3次元有向閉多様体 M^3 上の任意の接触構造は、ある凸 Heegaard 分解から定まり、同じ接触構造を定める凸 Heegaard 分解は、特殊な **stabilization/destabilization** を繰り返すことで互いに移りあうことを示した。凸 Heegaard 分解は **open-book 分解** と同値な概念である。open-book 分解とは、ある Seifert 曲面 F が ∂F を軸として回転できる状況を意味するものであり、回転可能構造とも呼ばれる。つまり $F \times [0, 2\pi]/f$ と $\partial F \times D^2$ を自然に貼り合せたものであり、まさに上図の状況である。 $f : F \times \{2\pi\} \rightarrow F \times \{0\}$ は境界の近くを動かさない自己微分同相であり、位相的**モノドロミー**と呼ばれる。

S^3 は円盤による自明な open-book 分解 (D^2, Id) を持つ。 $S^3 = \partial(D^2 \times D^2)$ とし、 $D^2 \times \{p\}$ をファイバーと考える (p は第 2 成分の境界を動く)。任意の閉有向 3 次元多様体 M^3 は、 (D^2, Id) をファイバーごとに単純分岐被覆する open-book 分解を持つ (Alexander の定理)。分岐点はファイバーに横断的な閉組紐をなし、持ち上がった open-book 分解は一般には非自明なモノドロミーを持つ。逆に、open-book 分解のファイバーを F とし、境界成分の個数を d とするとき、 F から D^2 への任意の $\max\{d, 3\}$ 重単純分岐被覆は勝手なモノドロミー写像 f を分岐点のなすある組み紐からの持ち上げとして実現する (Montesinos-Morton)。更にこの場合、曲面組み紐 $\Sigma(\subset D^2 \times D^2)$ が存在し、 Σ で分岐するファイバーごとの分岐被覆として、与えられた open-book 分解を充填する特異曲面束 $F_p(p \in D^2)$ が得られる。曲面組み紐 Σ とは、第 2 成分への自然な射影により D^2 を単純に分岐被覆する埋め込まれた曲面である。 $D^2 \times \{p\}$ と Σ が接するところでは F_p は特異ファイバーであり、自己交差を持つ。この交差の正負は、 p の周りのモノドロミー Dehn 捻りの左右に対応しており、曲面組み紐が p 上で振れる向きから自動的に定まる。特に全ての Dehn 捻りが右である場合、 Σ は正であり、閉組み紐 $\partial\Sigma$ は準正であるという。

Roudolph は $B^4(\subset \mathbb{C}^2)$ と複素正則曲線との交わりを正曲面組み紐として位相的に特徴付け、 B^4 の解析的分岐被覆をその分岐被覆として特徴付けた。このとき open-book 分解のモノドロミーは正、即ち右 Dehn 捻りの合成である。Lyon の定理により、 S^3 の標準的接触構造 ξ_0 に接する Legendre 絡み目は、正のモノドロミーを持つ torus knot の一つのファイバー上にあるとしてよく、Thurston-Bennequin 不変量 TB はファイバーから定まる枠である。つまり、 (S^3, ξ_0) の $(\text{TB} - 1)$ -手術は torus knot のモノドロミーに右 Dehn 捻りを加えることと同じである。 ξ_0 は元々 $B^4 \subset \mathbb{C}^2$ の境界の複素接線であり、 $(\text{TB} - 1)$ -手術は複素構造つき 4 次元 2-ハンドルの強擬凸接着を位相的に特徴付けているので、これは Stein 領域 (Stein 曲面の強擬凸領域) を位相的に定める。複素構造を持つ 1-ハンドルの強擬凸接着は torus knot のモノドロミーの観点からは既にある右 Dehn 捻りを取り除くことに相当する。Eliashberg の定理 (Stein 多様体の位相的特徴づけ) から、これは任意の Stein 領域をその境界の接触構造を込めて特徴付けていることが分かる。Loi-Piergallini は Roudolph の定理と 2 次元の Eliashberg の定理の等価性を確認した。上述のように Lyon の定理を用いて整理したのは Akbulut-Ozbagci である。

閉組み紐の準正性は、正 Markov 移動 (stabilization と destabilization) に関して閉じた (今のところ唯一の) 性質である (Orevkov の定理)。Markov stabilization は持ち

上げられた open-book 分解に幾つかの Hopf-plumbing を行うことに等しい。準正閉組み紐を正 Markov 移動によって変化させても、決して負 Markov destabilization を行うことはできない。接触構造の tight 性との関連が想起される訳である。Orevkov は Roudolph の結果の精密化として、symplectic filling B^4 内の J -曲線の境界を準正閉組み紐として特徴付けた。Orevkov は更に J -曲線の理論を利用することによって上の定理を示した。与えられた閉組み紐が準正かどうかを実際に判定するのは、与えられた接触多様体が tight かどうかを判定するのと同程度に困難である。準正閉組み紐で分岐する分岐被覆が、正曲面組み紐で分岐する分岐被覆に拡張する場合には、Stein 領域が得られる。もっと一般的な tight 接触構造を準正閉組み紐から特徴付けようとする、Montesinos-Morton の単純分岐被覆では不十分である。じじつ、3-重以上の任意の単純分岐被覆に対して、持ち上げた open-book 分解が OT 接触構造を定めるような準正閉組み紐が存在する。原因は分岐点の逆像に正則な点が含まれることに集約される。他方、2-重分岐被覆の場合は、いつでも Stein 領域を構成することができる。そこで、分岐点の逆像が全て被覆度 2 の点であるような特殊分岐被覆を考えてみれば、準正性と tight 性とがより一般的に関連付けられそうである。じじつ、 T^3 上に Eliashberg が見出した真に弱い意味で fillable な接触構造の例を、open-book 分解と特殊分岐被覆を経由して、全て準正閉組み紐に関連付けることができる。

Thurston と Winkelnkemper は、与えられた open-book 分解から一意的に定まる接触構造を、既に '76 年に接触形式として構成していた。ファイバー上に境界で消える面積形式 Ω を与え、 f は Ω を保つとする。 Ω は完全形式だから、 M^3 上の 1 次微分形式 λ をとって、 $d\lambda$ の各ファイバーへの制限が Ω であるようにできる。底空間 $\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z}$ の座標を t として dt の引き戻しを τ とする。更に τ を軸において 0 となるように修正し、 M^3 上の微分形式としておく。このとき $\alpha = \lambda + K\tau$ は少なくとも定数 K が十分大きいならば接触形式である。Reeb 場 X_α は open-book 分解の各ファイバーに横断的であり、この場合の接触多様体は TW 型といわれる。例えば、単位球面 $S^3 = \partial B^4 \subset \mathbf{C}^2$ 上では、Hopf 束の一つのファイバーが軸となり、 S^3 の標準的接触構造が得られる。接触形式の観点からは、TW 型というのは一見特殊である。しかし、例えば S^3 の標準的接触構造を与える任意の接触形式は適切に配置された (D^2, Id) に関して TW 型である (Hofer の定理)。また、平坦 2-トーラスの単位接円周束、及びそのファイバー方向の有限被覆に自然に定まる接触形式は TW 型である。以下で試みたいことは、Giroux の定理を精密化して、与えられた接触多様体が TW 型であることを示すための準備である。

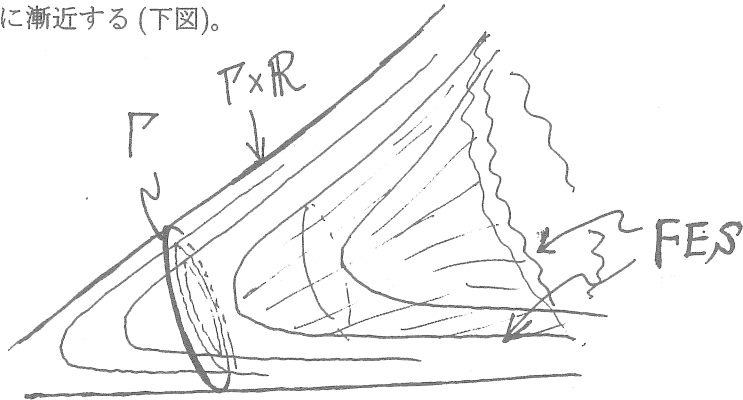
3 接触連結和と Reeb 場の閉軌道

3次元接触多様体の連結和は、接触構造のレベルでは凸球面による切り貼りから容易に構成される。しかし、接触形式が固定されている場合には一般には不可能である。任意の接触形式は局所的には $\alpha = xdy - ydx + dz$ と書ける。 xy -平面上では、Liouville 形式が $\lambda = xdy - ydx$ 、横断的 symplectic 構造が $d\lambda = 2dx \wedge dy$ によって与えられ、Liouville 場が $Z = \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y}$ となっている。このとき、 $\iota_X \alpha = z$ となる接触ベクトル場 X は $X = \frac{x}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{y}{2} \frac{\partial}{\partial y} + z \frac{\partial}{\partial z}$ である。 $S_h = \{x^2 + y^2 + e^{-h}z^2 = e^h\}$ は X が生成する流れによる単位球面 S_0 の時刻 h における像である。 S_h が囲む球体は高々定数倍を除いて小さな球体に等しい。小さな球体を除いた2つの接触多様体は接触形式のレベルでは決して貼り合わない。貼り合わせようとする、赤道 ($z = 0$) において Reeb 場が逆を向くからである。

2つの接触多様体の接触形式のレベルでの連結和を考えたいならば、予め大きな球体が存在していなければならないように思われる。大きな球体とは、例えば $\alpha' = R \frac{e^{-h}}{2 \cosh h} \alpha$ (R はある正の定数) とした場合の単位球体である。 $x = e^{h/2} \cos \varphi \cos \theta$, $y = e^{h/2} \cos \varphi \sin \theta$, $z = e^h \sin \varphi$ とおくと、 $\alpha' = \frac{R}{2 \cosh h} (\sin \varphi dh + \cos^2 \varphi d\theta + \cos \varphi d\varphi)$ と書けるので、 α' は h と z の符号を同時に入れ替える変換によって不変である。この変換は原点と無限遠方を入れ替え、自然に S^3 の TW 型接触形式を定める。軸は単位球面の赤道であって、 xy -平面が特性曲面、単位球面が凸 Heggard 曲面である。単位球体から赤道を除いたものは、南半球から北半球へと貫く軌道によって葉層化され、補空間の球体も同様である。Hofer は4次元の場合の Rabinowitz の定理を \mathbb{C} からの概正則写像の存在として解釈し、接触構造として標準的な任意の接触 S^3 が、ある大きな球面によって2つの大きな球体へと分解されることを示した。Hofer は更に接触多様体の π_2 が非自明であるか、または接触構造が OT と呼ばれる最も一般的なクラスに属している場合には、このような大きな球面が必ず存在することを示している。従って、特に連結和は、少なくとも張り合わされた球面の π_2 が非自明な場合には、大きな球体で行ったとみなすことができる。

(\mathbb{R}^3, α') において、 xy -平面の単位開円盤 D は Reeb 場 $X_{\alpha'}$ に横断的であり、Liouville 場は $Z' = -\coth h \frac{\partial}{\partial h}$ となっている。symplectic 化 $(M^3 \times \mathbb{R}, d(e^H \alpha'))$ において、例えば $H = -\coth h + c$ のグラフ Σ は \mathbb{C} からの固有 J -曲線とみなせる (c は任意の定数)。ただし、 J は ω と同調する H -不変概複素構造であり、 $J(\partial/\partial H) = X_{\alpha'}$ 及び $J(\xi) = \xi$ を満たすとする。今の場合、更に $J(e^h \sinh^2 h Z') = \coth h (e^h \partial/\partial \theta - X_{\alpha'})$ とすることにより、 Σ は実際に J -曲線である。一般に、穴あき固有 J -曲線は $H = 0$

への射影を da' によって測った面積が有限であるとき、FES(有限エネルギー曲面)と呼ばれる。TW型凸接触多様体の特性曲面の正負の領域、及び任意のファイバーは、ある FES の射影とみなすことができる。J構造は H -不変であるから、 Σ を平行移動することができる。逆に、平行移動された Σ は $H=0$ と高々1次元の集合で交わり、その軌跡として各ファイバーが描きなおされる(このことから、open-book分解のファイバーは予め全て FES の射影であるとして一般性を失わない)。この平行移動によって葉層化された Levi-平坦超曲面は、丁度 Reeb 成分のように J -シリンダー $\Gamma \times \mathbb{R}$ に漸近する(下図)。



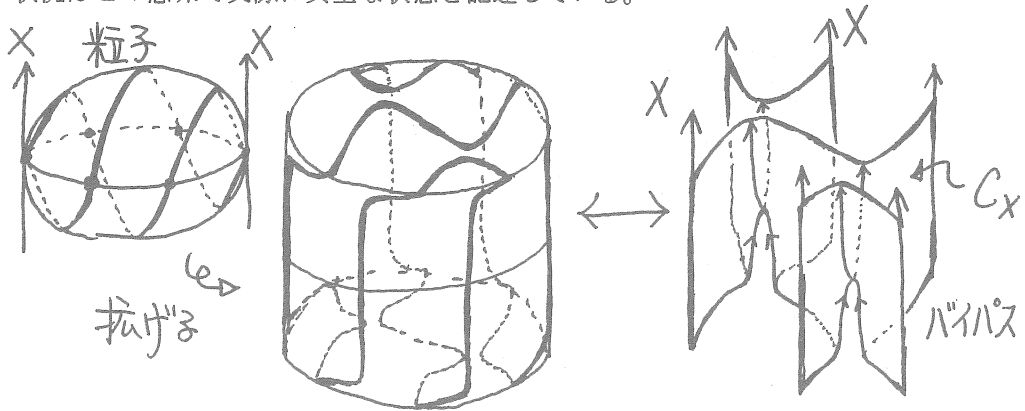
接触構造のイソトピー分類において、OT(over-twisted)とtightを区別することは重要である。接触多様体に埋め込まれたある円盤の特性葉層が非特異閉軌道を持つとき、接触構造はOTであるという。EliashbergはOT接触構造のイソトピー分類を平面場としてのホモトピー分類に帰着した。他方Bennequinは S^3 の標準接触構造がOTでないことを示した。OTでない接触構造はBennequinの不等式によって完全に特徴付けられ、tightといわれる特殊なクラスを形成する(Eliashberg)。tight接触構造 ξ のopen-book分解に負Hopf-plumbingを行ってできる接触構造はOTである。また、この操作がsupportされている球体内で上手く正Hopf-plumbing/deplumbingを繰り返せば、負Hopf-deplumbingが繰り返し可能になる。1回目の負のdeplumbingは ξ と同じホモトピー類に属するOT接触構造を与える。この操作は全Lutz捻りと呼ばれる操作をopen-book分解の言葉で述べたものである。 ξ のopen-book分解に正Hopf-plumbing/deplumbingを幾ら施しても負Hopf-deplumbingが可能でないという状況は、接触構造のtight性を言い換えたものである。tight接触構造の重要な例はStein曲面や強symplectic fillingの境界に現われるものである。これを大胆に拡張したものが弱symplectic fillingであり、境界の接触平面場がsymplectic部分束であることのみを要求する。このとき境界の接触

構造の tight 性は J -曲線の族を用いて示される (Gromov, Eliashberg)。Giroux と神田は独立に T^3 上の tight 接触構造を分類した。これらは全て弱 symplectic filling を持ち、唯一の例外を除いて最も弱い意味でしか fillable でない (Eliashberg)。本田はバイパスと呼ばれる凸曲面の手術を考案して tight 接触構造論を大きく進展させた。この方法により、tight であるが弱 fillable でない接触構造の例や、tight な接触構造を持たない多様体の例が見出された。後者の例は元々 Lisca と太田-小野が、symplectic filling の Seiberg-Witten 理論の研究において指摘していたものである。また最近では、Hofer が行ったように非コンパクトなものまで射程に入れた J -曲線の理論が盛んに研究されている。Eliashberg-Givental'-Hofer は Reeb 場の閉軌道に関して FES を境界作用素として数えるホモロジー理論を Symplectic Field Theory という大きな枠組みの中で考え、tight 接触構造の強力な不変量を得ている。

4 バイパスと Hopf 鉛管工事

バイパスとは凸曲面の埋め込み型を変えずに分割だけを取り替える技法である。ところが、例えば凸 Heegaard 分解における Morse 関数の等位面を考えてみると、特性曲面 C_X の臨界点で必ず凸曲面の位相的な変化が起こることに気付く。つまり、真空というのはバイパスがないことである。以下では特性曲面の分割における水平集合に沿って凸接触多様体を切り分け、正の領域の方だけを問題にする。このとき、バイパスとは X が持つ指数 1 と指数 2 の特異点がキャンセルする位置にある状況を意味する。これらは特性曲面上では共に 1-ハンドルの接着に対応するため、凸曲面がこれらを飛び越えることによって分割は変化する。バイパスは標準的な凸球体の中に現われるものであるが、この周りでは非特異な接触ベクトル場 X が指定されている状況を前提としている。 X と凸球体 B の境界は一つの閉曲線 c において接し、 c を除いたところでは X は B を貫いているように見える。 c はこの凸球面の分割とは横断的に交わっているとしてよいが、この交わりの位相的な情報は X を球体内部に非特異接触ベクトル場として拡張するときの障害を表す。この拡張が不可能であるとき、球体には幾つもの基本的な「粒子」が含まれている。各々の粒子は一つのバイパスを囲み得る幾らでも小さな球体であり、粒子の外部には、 X は非特異に拡張する。粒子とは、具体的には下図のようなものである。分割の一部を 3本の線分として囲む小円盤が粒子を通過するたびに $\pi/3$ ずつ左ねじの向きに振れて置き換わることが見て取れるであろう。バイパスが存在

するのは分割が曲面の平行移動に伴って変化する場合であり、凸 Heegaard 分解の状況はこの意味で実際に真空な状態を記述している。



バイパスの議論では特性曲面の分岐が問題となったのであるが、正 Hopf-plumbing はこの類似をシンプレクティック化の上で open-book の軸について行うことに相当する。正 Hopf-plumbing とは次のような操作であった。すなわち、先ず特性曲面 C_X の正の領域の境界に 1-ハンドルを接着する。これは接触ベクトル場 X に 3 次元での指数が 1 であるような特異点を発生させたことに他ならない。 M^3 の中でこれとキャンセルする指数 2 の特異点を C_X の負の領域に発生させる。この結果、 C_X 及び Heegaard 分解の種数が 1 だけ増し、真空の仮定は損なわれない。凸 Heegaard 分解の立場から言えば、双方のハンドル体に分割上の 2 点において 1-ハンドルを接着する stabilization である。TW 型接触多様体のシンプレクティック化の上で考えるなら、以下のように両 end の open-book 分解を繋ぐ正ファイバー同境を構成することである。なお、一般のファイバー同境とは、両 end の軸がある曲面で繋がれる以外は、 S^1 上のファイバー束としての同境のことであり、両 end において別々の open-book 分解に収束するものである。

正ファイバー同境を構成するためには、先ず $H = 0$ における open-book 分解の軸 Γ 上に 2 点を取り、 $\{H \leq 0\}$ にこれらの点で symplectic 1-ハンドルを接着する。このとき、open-book 分解のファイバーにも 1-ハンドルが接着されたことになる。一つのファイバー上にこの新たなハンドルを通過する Legendre 閉曲線 c を取っておく。次に、この symplectic 1-ハンドルを消去するように c に沿って symplectic 2-ハンドルを接着する。このとき、ファイバーのモノドロミーには c に沿う右 Dehn 捻りが加わる。これは、元の open-book 分解に正 Hopf-plumbing が施されたことを意味している。得られた 4 次元 symplectic 多様体の強擬凸境界をそのまま伸ばせば、元の symplectization と symplectic 同相な多様体を得られる。実際、以上の

手術は単に Liouville 場をホモトピー変形して、指数が 1 と 2 の特異点を対生成させたことと同じである。軸をつなぐ曲面は少なくとも symplectic 曲面である。

凸 Heegaard 分解における特性曲面 C においては、 $\gamma = \{d\alpha|_C = 0\}$ は特性葉層に横断的な閉曲線の非交和であるとしてよい。 γ が C の分割 Γ を含み、この近くで $d\alpha|_C$ の符号が C の領域としての正負と一致している場合には、 C をイソトピーで動かして γ の他の成分を消去することができる。つまり、 $\gamma = \Gamma$ であるようにできる。他方、 γ が Γ と本質的に交わる場合には、一般には正 Hopf-deplumbing に相当する操作を行なって open-book 分解を取り替えなければならないが、それでも結局は同様の状況になるようである。逆に、このような状況になれば、分割は Reeb 場の閉軌道であるとしてよい。 C の正負の領域が symplectization 上に FES として持ち上がるからである。従って、問題は γ と Γ の交差を解消してゆくという殆ど組み合わせ論的な問題を如何にして一般的に解くかということになる。

文献: 関連する結果・文献の全般は次を参照。

三松 佳彦: 3次元接触構造のトポロジー (付) 小野 薫: Hamilton 系の周期解の存在問題と J-正則曲線, 日本数学会日本語メモアール **1**(2000).

ここで補っておきたいものは(書かなかったことも含めて)、

S. Akbulut and B. Ozbagci: *Lefschetz fibrations on compact Stein surfaces*, Geom. Topol. **5**(2001), 319-334.

A. Loi and R. Piergallini: *Compact Stein surfaces with boundary as branched covers of B^4* , Invent. Math. **143** (2001), 325-348.

H. Lyon: *Torus knots in the complements of links and surfaces*, Michigan Math. J. **27** (1980), 30-46.

C. Meckert: *Forme de contact sur la somme connexe de deux variétés de contact de dimension impaire*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble **32** (1982), 251-260.

J. Montesinos-Amilibia and H. Morton: *Fibred link from closed braids*, Proc. L.M.S. **62**(1991), 167-201.

S. Orevkov: *Markov moves for quasipositive braids*, C. R. Acad. Sci. Paris **331**(2000), 557-562

L. Rudolph: *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191-202.

A. Mori: *A note on Thurston-Winkelnkemper's construction of contact forms on 3-manifolds*, Osaka J. Math. **39**(2002).

2次元射影的アノソフ微分同相写像の 不変量とその応用

浅岡 正幸

本稿では、まず低次元射影的アノソフ力学系について知られている結果と典型的な例について概観する。その後、2次元射影的アノソフ微分同相写像に対して力学系理論の立場からその不変量を構成し、さらにそれを用いて得られる、周期軌道の存在定理や不変葉層の非一意可積分性定理といった応用について述べる。

1 低次元射影的アノソフ力学系

滑らかな多様体 M 上の微分同相写像 f とコンパクトな f の不変集合 Λ に対して、 $TM|_{\Lambda}$ の連続な分解 $E^u \oplus E^s$ が **hyperbolic splitting** である、とは (1) E^u, E^s は Df 不変、かつ (2) ある定数 $C > 0, \lambda \in (0, 1)$ に対して

$$\|Df^n|_{E^s(z)}\| < C\lambda^n \quad \|Df^{-n}|_{E^u(z)}\| < C\lambda^n$$

がすべての $n \geq 1, z \in \Lambda$ について成り立つことを言う。また、 $E^u \oplus E^s$ が **dominated splitting** である、とは E^u, E^s は Df 不変、かつある定数 $C > 0, \lambda \in (0, 1)$ に対して

$$\|Df^n|_{E^s(z)}\| \cdot \|Df^{-n}|_{E^u(f^{-n}(z))}\| < C\lambda^n$$

がすべての $n \geq 1, z \in \Lambda$ について成り立つことを言う。なお、以下では **dominated splitting** としては $\dim E^u, \dim E^s \neq 0$ である非自明なもののみを考えるものとする。 f が多様体全体の上の **hyperbolic splitting**、または **dominated splitting** を許すとき、それぞれ、 f は **アノソフ微分同相写像** (Anosov diffeomorphism) または **射影的アノソフ微分同相写像** (projectively Anosov diffeomorphism) と言う。

多様体上の flow についても、flow を生成するベクトル場 v に対して法バンドル $TM/\mathbb{R}v$ の flow で不変な分解を考えることで、**hyperbolic splitting**、**dominated splitting**、**アノソフ流**¹、**射影的アノソフ流** という概念が定義され

¹ベクトル場 X が生成する flow $\{\phi^t\}$ がアノソフであるということを定義する際には、 $D\phi^t$

る².

hyperbolic splitting は力学系理論のもっとも中心的な概念のひとつであり、アノソフ力学系は Anosov による負曲率多様体上の測地流の研究の中で発見されて以来、多くの研究者によって研究されてきた。dominated splitting は hyperbolic splitting の拡張になっており、Pujals-Sambarino による曲面上の C^1 微分同相写像についての Palis 予想の解決 [8] において基本的な道具として用いられるなど、力学系の分類問題において中心的な役割を果たしている。

論文 [4] において三松佳彦氏は、3次元射影的アノソフ流は接触構造の組 (ξ, η) で ξ は正、 η は負の接触構造でかつ ξ と η が横断的に交わるものが付随することを示し、このような接触構造の組を双接触構造 (bi-contact structure) と名付けた。また同じ論文の中で、3次元多様体上の双接触構造 (ξ, η) に対して $\xi \cap \eta$ は射影的アノソフ流を定めることを示した。つまり、dominated splitting という力学系理論において重要な対象と、接触構造という幾何学における重要な構造が3次元においては射影的アノソフ流によってつながったのである。三松氏とは独立に、Eliashberg と Thurston も [1] において、葉層構造と接触構造を結び付ける confoliation という概念を提唱し、葉層からの変形として自然に得られる構造として双接触構造とそれに付随して現れる射影的アノソフ流³ の概念に到達している。また、三松氏は [5] において、すべての向きづけ可能な3次元多様体上に射影的アノソフ流が存在することを指摘しているが、これは例えば3次元球面上にはアノソフ流が存在しないことと好対象をなしている。

低次元射影的アノソフ力学系についてこれまでに知られている主な結果は dominated splitting $E^u \oplus E^s$ に微分可能性を仮定し、 E^u や E^s に沿った葉層構造を用いたものである。[5] において三松氏は、 E^u, E^s が C^1 級である場合はこれらに沿う葉層は Reeb 成分を持たないことを示している。一方、論文 [6] において、野田健夫氏は E^u, E^s がともに C^2 級である3次元トーラス上の射影的アノソフ流の完全な分類を行なっている。また、野田氏と坪井俊氏は論文 [7] において、いくつかの多様体においては E^u, E^s がともに C^∞ である射影的アノソフ流がコンパクトな葉を持たなければ実はアノソフになるという結果を証明している。

本稿で扱う対象は、3次元射影的アノソフ流の離散力学系における対応物である2次元多様体上の射影的アノソフ微分同相写像である。特に、dominated splitting の微分可能性が期待できない一般の場合の分類に焦点を当てる。後で述べる例からもわかるように一般には射影的アノソフ力学系は力学系とし

不変な分解 $TM = E^{uu} \oplus E^{ss} \oplus \mathbb{R}X$ があり、ある定数 $C > 0, \lambda \in (0, 1)$ に対して、

$$\|D\varphi^t|_{E^{ss}(z)}\| < C\lambda^t, \quad \|D\varphi^{-t}|_{E^{uu}(z)}\| < C\lambda^{-t}$$

がすべての z, t について成り立つとするのが一般的であるが、上のような $\mathbb{R}X$ の法バンドルのうえの条件で書くこともできる。

²詳しくは [5] を参照

³彼らは共形的アノソフ流 (conformally Anosov flow) と呼んでいる

で構造安定ではなく、不変葉層の微分可能性のもとでの分類におけるような「剛性」は期待できない。したがって、射影的アノソフ力学系の連続的な変形を定式化し、その変形による同値類によって分類を行なうのが妥当とだけといえる。そこで、区間 $[0, 1]$ から C^1 微分同相写像の空間 $\text{Diff}^1(M)$ への連続写像 H で $H(t)$ が常に射影的アノソフ微分同相写像であるようなものを PA-ホモトピーと呼び、このときふたつの写像 $H(0)$ と $H(1)$ は PA-ホモトピックであると定め、PA-ホモトピーで保たれる量を探すことにする。

オイラー数を考えると向きづけ可能な曲面で射影的アノソフ力学系を許すものは 2次元トーラス \mathbb{T}^2 のみである。そこで、以下では 2次元トーラス上の射影的アノソフ微分同相写像に対象を絞る。

2 2次元射影的アノソフ微分同相写像の例

2.1 アノソフ自己同型写像

A を $SL(2, \mathbb{Z})$ の元とする。2次元トーラス \mathbb{T}^2 を $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ と同一視すると、 A は $f_A(v + \mathbb{Z}^2) = Av + \mathbb{Z}^2$ として \mathbb{T}^2 上の微分同相写像 f_A を定める。もし、 A の固有値 λ_1, λ_2 の絶対値がともに 1 でないとすると、 $|\lambda_1| < 1 < |\lambda_2|$ と考えることができる。固有値 λ_i の固有空間 E_i を用いて \mathbb{T}^2 の接バンドルの分解 $E_1 \oplus E_2$ を作ると、これは \mathbb{T}^2 上の hyperbolic splitting となる。すなわち f_A はアノソフ微分同相写像である。

このようにして Lie 群上の自己同型として得られるアノソフ微分同相写像をアノソフ自己同型写像という。トーラス上のアノソフ微分同相写像はあるアノソフ自己同型と位相共役になることが 2次元の場合は Franks[2]、一般次元の場合は Manning[3] によって示されている。特に恒等写像とホモトピックなアノソフ微分同相写像は \mathbb{T}^2 上には存在しない。

2.2 Eliashberg-Thurston の例

以下の例は Eliashberg-Thurston[1] によるものである。

2次元トーラス \mathbb{T}^2 を $\mathbb{R} \setminus \{0\} / (x, y) \sim (2x, 2y)$ と同一視する。実数 $\alpha > 1$ に対して $f_\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^{-1}y)$ とすると、 f_α は \mathbb{T}^2 上の微分同相写像を定める。 E_x, E_y をそれぞれ x 軸, y 軸方向とすると、 $E_x \oplus E_y$ は \mathbb{T}^2 上の dominated splitting を定める。すなわち f_α は射影的アノソフ微分同相写像である。

α^n がすべての $n \geq 1$ に対して整数でないとき、 f_α は周期軌道を持たない。一方で $\alpha = 2$ のときは $\{x = 0\}$ や $\{y = 0\}$ から決まる円周上の点はすべて不動点となる。これは f_2 が構造安定ではないことを示している。

また α を 1 に近づけることで f_α は恒等写像に近づくため、 f_α は恒等写像とホモトピックであり、したがって任意のアノソフ微分同相写像とはホモト

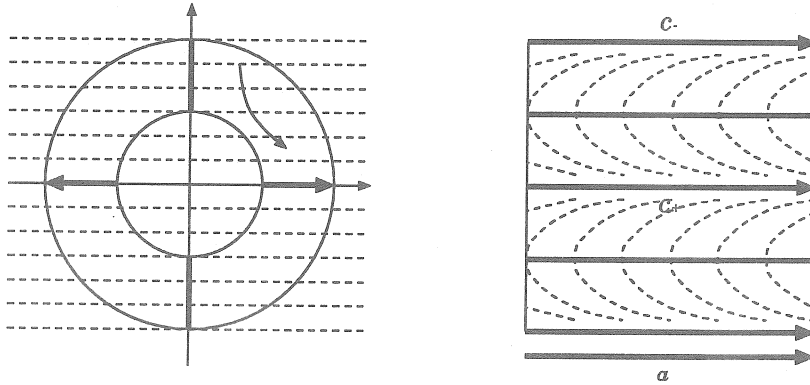


図 1: Eliashberg-Thurston の例

ピックではない, 特に PA-ホモトピックでないことがわかる.

2.3 野田の例

以下の例は野田健夫氏によるものである.

3次元トーラス上の双接触構造 $(\text{Ker } \alpha, \text{Ker } \beta)$ を

$$\alpha = dz - \epsilon \cos z dx + \sin z dy$$

$$\beta = dx + \epsilon \cos x dy + \sin x dz$$

で定める. 三松氏の結果 [4] から, $\text{Ker } \alpha \cap \text{Ker } \beta$ に含まれるベクトル場

$$v(x, y, z) = (-\sin x + \epsilon \cos x \sin z, 1 - \epsilon^2 \cos x \cos z, -\sin z - \epsilon \cos z \sin x)$$

は射影的アノソフ流 $\{\varphi^t\}$ を定める. 定数 ϵ が十分に小さいとき, $\{\varphi^t\}$ は $\mathbb{T}^2 \times \{0\}$ を global section として持つので, その上の return map g は射影的アノソフ微分同相写像となる.

g に対する dominated splitting を $T\mathbb{T}^2 = E^u \oplus E^s$ とすると, E^u の line field としてのホモトピー類は Eliashberg-thurston の例のそれとは異なる. g は恒等写像とホモトピックであるが, E^u は写像に対して連続に動くので, Eliashberg-Thurston の例とは PA-ホモトピックではない. また, あとで定める不変量の計算から, g と PA-ホモトピックな写像は常に 2 つの互いに異なる周期軌道を持ち E^u は一意可積分性を持たないことがわかる.

自然数 m, n に対して \mathbb{T}^2 上の被覆写像 $\pi_{m,n}$ を $\pi_{m,n}(x, y) = (mx, ny)$ で定める. $\pi_{m,n}(x, y)$ に対するリフトで不動点をもつものを $g_{m,n}$ とおくと, $g_{m,n}$ もまた射影的アノソフ微分同相写像になる. $g_{m,n}$ に対する dominated splitting を $T\mathbb{T}^2 = E_{m,n}^u \oplus E_{m,n}^s$ とすると, $E_{m,n}^u$ の line field としてのホモトピー類は

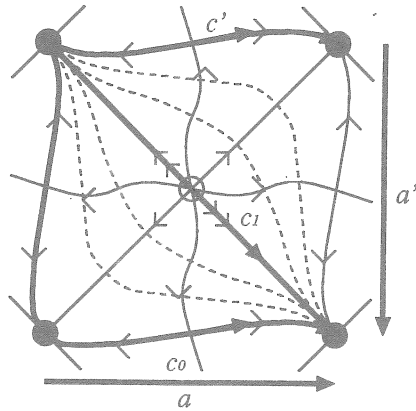


図 2: 野田の例

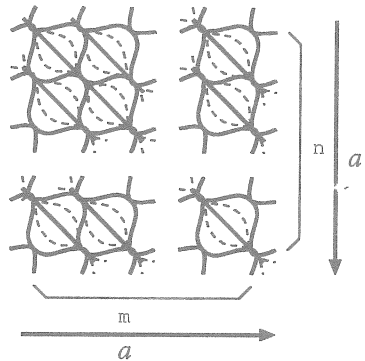


図 3: 野田の例の lift

は m, n によらないが、あとで定める不変量によってこれらは互いに PA-ホモトピー で移りあわないことがわかる。

3 2次元射影的アノソフ微分同相写像の不変量

今節では主結果である 2次元射影的アノソフ微分同相写像の不変量の構成について述べる。

$PA^r(\mathbb{T}^2)$ で \mathbb{T}^2 上の C^r 級射影的アノソフ微分同相写像全体を表すものとする。このとき、 $PA^r(\mathbb{T}^2)$ は C^r 級微分同相写像の空間 $\text{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ の開部分集合であり、 $PA^r(\mathbb{T}^2) \ni f \mapsto E^u, E^s$ は well-defined な連続写像であることが知られている。 $PA_0^r(\mathbb{T}^2)$ で $PA^r(\mathbb{T}^2)$ の元で付随する dominated splitting $T\mathbb{T}^2 = E^u \oplus E^s$ について、 E^u, E^s が向きづけ可能で、かつ、それらの向きが Df で保たれるもの全体とする。 E^u, E^s の写像に対する連続性から $f \in PA_0^1(\mathbb{T}^2)$

と PA-ホモトピック な写像はすべて $PA_0^1(\mathbb{T}^2)$ に含まれる.

微分同相写像 $f \in \text{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ に対して $\text{Per}(f)$ で周期点集合を, $\text{Per}_h(f)$ で双曲的周期点全体, つまり軌道 $\{f^i(p)\}$ が hyperbolic splitting を持つような周期点全体を表すものとする. また, $k = 0, 1, 2$ に対して $\text{Per}_h^k(f)$ で軌道上の hyperbolic splitting $E^u \oplus E^s$ が $\dim E^u = k$ をみたすような双曲的周期点全体を表すものとする. 微分同相写像 $f \in \text{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ が非退化であるとは, すべての周期点が双曲的, すなわち $\text{Per}(f) = \text{Per}_h(f)$ であることを言う. Kupka-Smale の定理により, すべての $r = 1, 2, \dots$ に対して $\text{Diff}^r(\mathbb{T}^2)$ の中で非退化な写像は通有的 (generic) である.

非退化な $f \in PA^r(\mathbb{T}^2)$ と整係数ホモロジー類 $a \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ を一つ固定する. $T\mathbb{T}^2 = E^u \oplus E^s$ を f に対する dominated splitting とする. S^1 から \mathbb{T}^2 への C^1 級写像全体 $C^1(S^1, \mathbb{T}^2)$ の部分集合 $\tilde{C}_a(E^u)$ を

$$\tilde{C}_a(E^u) = \{\gamma \in C^1(S^1, \mathbb{T}^2) \mid a \in \gamma, \dot{\gamma}(t) \in E^u(\gamma(t)) \setminus \{0\}\}$$

で定める. $\tilde{C}_a(E^u)$ には S^1 上の向きを保つ C^1 級微分同相写像のなす群 $\text{Diff}_+^1(S^1)$ が右からの合成によって作用する. この作用による商空間を $C_a(E^u)$, 商写像を π_c とする.

位相空間 $C_a(E^u)$ には f から誘導された同相写像 $C_a(f)$ が $C_a(\pi_c(\gamma)) = \pi_c(f \circ \gamma)$ によって定まる. $c = \pi_c(\gamma) \in \text{Per}(C_a(f))$ に対して, 指数 $\text{ind } c$ を

$$\text{ind } c = \#\{t \in S^1 \mid \gamma(t) \in \text{Per}_h^2(f)\}$$

で定める. また c の不安定集合 $W^u(c; C_a(f))$ を

$$W^u(c; C_a(f)) = \{c' \in C_a(E^u) \mid \lim_{n \rightarrow \infty} C_a(f)^{-kn}(c') = c\}$$

で定める. ただしここで k は c の周期とする.

整係数ホモロジー類 $a \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ が prime であるとは, すべての $a' \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$, $n \geq 2$ に対して, $a \neq na'$ が成り立つことを言う. また位相空間 X に対して一点コンパクト化を $X \cup \{\infty\}$ で表すものとする.

主結果の一つは $C_a(E^u) \cap \{\infty\}$ のホモトピー型が PA-ホモトピー で不変な量となることである.

Theorem A (不変性). $f_0, f_1 \in PA_0^2(\mathbb{T}^2)$ は非退化で互いに PA-ホモトピック, $a \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ は prime で f_0, f_1 で保たれるホモロジー類とする. f_i に対する dominated splitting を $T\mathbb{T}^2 = E_i^u \oplus E_i^s$ とすると, $C_a(E_0^u) \cup \{\infty\}$ と $C_a(E_1^u) \cup \{\infty\}$ はホモトピー同値. 特に,

$$H_c^*(C_a(E_0^u)) \cong H_c^*(C_a(E_1^u)).$$

ただし, $H_c^*(X)$ は位相空間 X のコンパクト台コホモロジーを表すものとする.

次の結果から, $H_c^*(C_a(E^u))$ が $\text{Per}(C_a(f))$ を生成元とする複体の上のコホモロジーとして書けることがわかる.

Theorem B (Morse 分解). $f \in \text{PA}_o^2(\mathbb{T}^2)$ は非退化, $a \in H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ は prime かつ f によって保たれるとする. このとき, すべての $c \in \text{Per}(C_a(f))$ について $W^u(c; C_a(f))$ は次元が $\text{ind } c$ の開円盤と同相. さらに分解

$$C_a(E^u) = \bigsqcup_{c \in \text{Per}_a(C_a(f))} W^u(c; C_a(f))$$

は $C_a(E^u)$ の CW 構造を与える.

Theorem A, B における写像の C^2 級という仮定は, 証明において Pujals-Sambarino による 2 次元力学系における dominated splitting を持つ力学系の双曲性に関する結果 [8] が必要となるため, 欠かせないものである.

4 不変量の計算例

4.1 アノソフ微分可能同相写像

\mathbb{T}^2 上のアノソフ微分可能同相写像によって保存される $H_1(\mathbb{T}^2, \mathbb{Z})$ の元は 0 のみ. 0 は prime ではないので, アノソフ微分可能同相写像に対しては上で定義された不変量は意味を持たない.

4.2 Eliashberg Thurston の例

すべての $n \geq 1$ にたいして $\alpha^n \notin \mathbb{Z}$ であるとき, f_α は周期点を持たないので非退化. 図 1 からわかるように, $C_\alpha(E^u) = \{c_+, c_-\}$ かつ $\text{ind } c_- = \text{ind } c_+ = 0$. したがって,

$$H_c^*(C_\alpha(E^u)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^2 & (* = 0) \\ \{0\} & (* \neq 0). \end{cases}$$

また $a' \notin \mathbb{Z}a$ に対して $C_{a'}(E^u) = \emptyset$ なので,

$$H_c^*(C_{a'}(E^u)) \cong \{0\}.$$

4.3 野田の例

図 2 からわかるように, $\text{Per}(C_{a+a'}(E^u)) = \{c_0, c_1\}$. また, $\text{ind } c_0 = 0$, $\text{ind } c_1 = 1$. よって, $C_{a+a'}(E^u)$ は 0 次元, 1 次元の胞体ひとつずつからなるので, S^1 と同相. したがって,

$$H_c^*(C_{a+a'}(E^u)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z} & (* = 0, 1) \\ \{0\} & (* \neq 0, 1). \end{cases}$$

一方, $C_a(E^u) = \{c'\}$ かつ $\text{ind } c' = 0$ なので,

$$H_C^*(C_a(E^u)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z} & (* = 0) \\ \{0\} & (* \neq 0). \end{cases}$$

野田の例のリフト $g_{m,n}$ については簡単な観察から以下のことがわかる.

$$H_C^*(C_a(E^u)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}^n & (* = 0) \\ \{0\} & (* \neq 0). \end{cases}$$

かつ

$$H_C^*(C_{a'}(E^u)) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}^m & (* = 0) \\ \{0\} & (* \neq 0) \end{cases}$$

したがって, $H_C^*(C_a(E^u))$ の不変性から $(m, n) \neq (m', n')$ のとき $g_{m,n}$ と $g_{m',n'}$ は PA-ホモトピックでない.

5 不変量の応用

第1節でも触れたように, dominated splitting $E^u \oplus E^s$ が微分可能性を持つときにはある種の剛性が存在し, 例えば野田氏の結果により, T^3 上では直接的な分類がなされている. そこで次のような問いが自然に浮かぶ.

Question. ある射影的アノソフ力学系の PA-ホモトピー類のなかに E^u, E^s が C^r ($r \geq 1$) 級であるものは存在するか. また存在しない場合にはその障害は何か

この問題に対して, 不変量 $H_C^*(C_a(E^u))$ の次のような応用がある.

Theorem C (*E^u の非一意可積分性*). $f \in \text{PA}_o^2(\mathbf{T}^2)$ は非退化で恒等写像とホモトピック, $a_1, a_2 \in H(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ はともに prime で $a_2 \neq \pm a_1$ であるとする. $T\mathbf{T}^2 = E^u \oplus E^s$ で f に対する dominated splitting を表す. 各 $i = 1, 2$ に対して, $H_C^{k_i}(C_{a_i}(E^u)) \neq \{0\}$ となる $k_i \geq 0$ があるとすると, 任意の f と PA-ホモトピックな $g \in \text{PA}^1(\mathbf{T}^2)$ に対して, E_g^u は一意可積分でなく, 特に Lipschitz ではない. ここで, $T\mathbf{T}^2 = E_g^u \oplus E_g^s$ は g に対する dominated splitting とする.

また不変量 $H_C^*(C_a(E^u))$ に関する情報から周期点の存在も示すことができる.

Theorem D (*周期軌道の存在*). $f \in \text{PA}_o^2(\mathbf{T}^2)$ は非退化, $a \in H(\mathbf{T}^2, \mathbf{Z})$ は prime で f で保存されるホモロジー類だとする. $T\mathbf{T}^2 = E^u \oplus E^s$ で f に対する dominated splitting を表す. $H_C^k(E^u) \neq \{0\}$ となる $k \geq 1$ があるとすると, 任意の f と PA-ホモトピックな $g \in \text{PA}^1(\mathbf{T}^2)$ に対して, g は互いに異なる 2 つの周期軌道を持つ.

前節の計算から, 野田の例は上の Theorem C, D の条件をみたしている. 特に野田の例と PA-ホモトピックなもので E^u が微分可能になるものは存在しない.

参考文献

- [1] Y. Eliashberg and W. Thurston, *Confoliations*, Amer. Math. Soc., 1998.
- [2] J. Franks, Anosov diffeomorphisms, *Global Analysis, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics*, vol. 14, pp. 61–93, AMS, 1970.
- [3] A. Manning, There are no new Anosov diffeomorphisms on tori, *Amer. J. Math.*, **96** (1974), 422–429.
- [4] Y. Mitsumatsu, Anosov flows and non-stein symplectic manifolds, *Ann. Inst. Fourier*, **45** (1995), 503 – 540.
- [5] 三松佳彦, 3次元接触構造のトポロジー, 数学メモアール 1 (2001), 日本数学会.
- [6] T. Noda, Projectively Anosov flows with differentiable (un)stable foliations, *Ann. Inst. Fourier* **50** (2000), 1617–1647.
- [7] T. Noda and T. Tsuboi, Regular projectively Anosov flows without compact leaves, *Foliations: geometry and dynamics (Warsaw, 2000)*, 403–419, World Sci. Publishing, 2002.
- [8] E. Pujals and M. Sambarino, Homoclinic tangencies and hyperbolicity for surfaces diffeomorphisms, *Ann. of Math.*, **151** (2000), 961 – 1023.

徳島大学総合科学部自然システム学科
e-mail: asaoka@ias.tokushima-u.ac.jp

特異点とsymplectic filling

太田 啓史

名古屋大学大学院多元数理科学研究科

§0 序.

これは、北海道大学の小野薫氏との共同研究に基づいています。

ここで「特異点」といえば、代数曲面における孤立特異点を指すこととする。

多様体の境界値問題を考える。即ち、 $(n-1)$ 次元 C^∞ 閉多様体 Y が与えられた時、それを境界とする n 次元 C^∞ 多様体 X は存在するか？するならば、それは一意か？存在問題はトポロジストなら誰でも（原理的には）答えることができるであろうし、また一意性についても、例えば微分同相類の意味で一意かと問うたところで、連結和などを考えれば、このままでは問いとして意味がないことは明らかであろう。多様体愛護協会¹の立場に立てば、上の問題に対する考察は以上で終わる。

さて、一方で、代数曲面 V の孤立特異点 P を考えると、特異点のさまざまな様相は、特異点の近傍の境界に表れる3次元多様体の幾何学に深く反映する。本講演では、特異点をシンプレクティック／接触幾何学の観点から、多様体の境界値問題をひとつの足場として考察する。粗くまとめれば、以下のようなストーリーである。孤立特異点の近傍の境界の3次元多様体 Y には、自然な（しかし特別な）接触構造がそなわっている。このとき、その接触構造と相性のよいシンプレクティック構造をもった4次元多様体 X であって、その境界が Y となるものが存在する。（これをシンプレクティックフィリングと呼ぶ）。これは一意ではない。典型的なものは、特異点の極小特異点解消と、もし、特異点が超曲面特異点ならそのMilnorファイバー（あるいは特異点のsmoothing）がある。これらは、殆どすべての特異点に対しては位相的にさえ異なり、これらの位相的性質は特異点の性質と密接に関係している。ところが、「単純特異点」と呼ばれる特徴ある個性をもった孤立特異点のクラスに対しては、シンプレクティックフィリングは（blow upの不定性を除いて）一意であることが示される

¹河澄響矢氏による。多様体に計量などの幾何構造を無闇に入れて考えることは多様体を虐待することになり、多様体は痛い痛いと言っている。これは人権蹂躪であり多様体をそのような軋轢から守らなければならない、という主張を掲げる協会。詳しくは河澄氏のweb page//www.ms.u-tokyo.ac.jp/~kawazumi/を御覧下さい。

(§3 定理A)。更に、「単純楕円型特異点」というクラスの特異点に対して、そのシンプレクティックファイリングの微分同相類を完全に決定する (§3 定理C)。これは、大体ちょうど上の二つの典型例、つまり極小特異点解消とsmoothingに限られる、というのが我々の最終的な結論である。最後にどうしてこのような特異点のクラスに対しシンプレクティックファイリングのある種の一意性がでてくるのかを、少し議論したい。

我々は、特異点の近傍の境界に接触構造が自然にある²ので、それに似合う服³(シンプレクティックファイリング)を探したら、単純特異点の場合は一着しかなかった、というわけで多様体愛護協会の方からはお叱りを受けるやもしれませんが、とてもよく似合う服が一着でも見つかって喜んでいるかもしれません。似合う似合わないを問わず、なんでもよいから服を着せるというのも、多様体にとっては可哀想なことかもしれません。

§1 背景

1.1) 単純特異点と同時特異点解消

単純特異点(simple singularities)の同値な定義は数多く知られており[Du]、また、それにまつわり種々の数学が交錯していて、なかなか話が尽きないほど豊かな数学が展開されている。ここでは、商特異点、および超曲面特異点としての記述を与え、その特異点解消、smoothing、変形及び、単純特異点の顕著な性質である同時特異点解消について述べる。

古典的なKleinの定理によれば、 SU_2 の有限部分群 Γ は $A_n(n \geq 1)$, $D_n(n \geq 4)$, E_6, E_7, E_8 型のDynkin図形によって分類される。それぞれ位数 $(n+1)$ の巡回群、位数 $2(n-2)$ の2項2面体群、2項4面体群、2項8面体群、2項20面体群である。 \mathbb{C}^2 を $\Gamma \subset SU_2$ の線形作用で割ったとき、原点 O に表れる商特異点を単純特異点と呼ぶ。 $\pi: \mathbb{C}^2/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$ をその極小特異点解消とする。この時例外集合 $\pi^{-1}(O)$ の既約成分は自己交叉数が (-2) の有理曲線であり、それら有理曲線のconfigurationは Γ に対応するDynkin図式で記述される。特に、単純特異点の極小特異点解消の交叉形式は、対応する A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 型の負定値Cartan行列になっている。更に、 $\pi: \mathbb{C}^2/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}^2/\Gamma$ は、crepant resolution になっており(これは単純特異点の顕著な性質である)、極小特異点解消の標準束 $K_{\mathbb{C}^2/\Gamma}$ は自明である。

一方、単純特異点は次のように超曲面特異点としても実現できる。 \mathbb{C}^2 上の Γ で不変な多項式環は $\mathbb{C}[x, y, z]/R_\Gamma$ の形をしており、イデアル R_Γ は次の(それぞれ一つの)多項式 f_Γ で生成されている。

²河澄氏によれば、自然に入っている構造を「ほくろ」といい、無理矢理入れる構造を「いれずみ」というそうです。例えば、リーマン面の場合、複素構造は「ほくろ」でシンプレクティック構造は「いれずみ」だそうです。私はその違いをよく理解していません。

³佐藤肇氏の表現。雑誌「数学」51巻 p.439-440 を参照。

Group Γ	Polynomial f_Γ	(p, q, r)	Weights (a, b, c)	rank Γ
A_n	$x^{n+1} + yz$	$(1, k, l)$	$(1, k, l)$	n
D_n	$x^2y + y^{n-1} + z^2$	$(2, 2, n-2)$	$(n-2, 2, n-1)$	n
E_6	$x^4 + y^3 + z^2$	$(2, 3, 3)$	$(3, 4, 6)$	6
E_7	$x^3y + y^3 + z^2$	$(2, 3, 4)$	$(4, 6, 9)$	7
E_8	$x^5 + y^3 + z^2$	$(2, 3, 5)$	$(6, 10, 15)$	8

表 1.1

(但し、 $k+l=n+1$ 。イデアルの生成元の取り方は一意ではなく、例えば A_n 型の場合、 $x^{n+1} + y^2 + z^2$ などでもよいが、後の都合上、表のものを採用する。表の3列以降については後述。) よって、単純特異点は、 $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f_\Gamma(x, y, z) = 0\}$ なる超曲面の原点における孤立特異点にもなっている。今、非ゼロな数 ϵ により定義方程式を変形したものの $\{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid f_\Gamma(x, y, z) = \epsilon\}$ を考えると、これは非特異な代数曲面になり、Milnor ファイバーと呼ばれ、単純特異点のsmoothingを与える。方程式を変形しているため、複素構造も変形されていることに注意されたい。ところがMilnorのファイブレーション定理によれば、 $|\epsilon|$ が十分小ならば、Milnorファイバーは ϵ によらず、微分同相になっており、その交叉形式は、単純特異点の場合、丁度対応する A, D, E 型の負定値Cartan行列で与えられる。従って、結果として、対応する極小特異点解消の交叉形式と同型になっている。

ここで、単純特異点が孤立特異点の中でいかに特別であるかを見るために、逆に一般の孤立(超曲面)特異点の場合の極小特異点解消とMilnorファイバーについて一般に成り立つ事柄を対比しながら復習しておく、

- (1.2.a) 孤立特異点の極小特異点解消の交叉形式は常に負定値である。
- (1.2.b) 孤立特異点の極小特異点解消の標準束は、一般には自明でなく、自明であるのは単純特異点の場合に限る。
- (1.3.a) 孤立超曲面特異点のMilnorファイバーの交叉形式は、一般には不定値であり、単純特異点の場合、負定値である⁴。
- (1.3.b) 孤立超曲面特異点のMilnorファイバーの接束は自明である。

このようにみると、単純特異点の場合に極小特異点解消とMilnorファイバーは只に交叉形式が同値であるのみならず、微分同相ではないかと思えるが、実際そうである。

⁴ $f(x, y, z) = x^p + y^q + z^r$ の場合で負定値になるのは、単純特異点の場合に限ることは私は証明できるが、多分一般の孤立超曲面特異点の場合でも正しいのではないかと思う。

定理 1.4. (Brieskorn). 単純特異点の極小特異点解消とMilnorファイバーは微分同相である。

先にも注意したように、これらは複素多様体としては同型ではない。この定理は次のようにも解釈できる。単純特異点の極小特異点解消および、Milnorファイバーには超ケーラー構造が入る。それぞれの超ケーラー構造は、回転（複素構造を S^2 パラメータで変形して）して繋がっており、従って複素構造は変形されているが、微分構造は同じである。

上のBrieskornの定理は、以下に述べる、単純特異点の同時特異点解消の存在 (Brieskornによる) という形でより根源的に理解でき、事実この一つの系である。

定理 1.5. (Brieskorn). 複素曲面の孤立特異点の中で、同時特異点解消が存在するのは、単純特異点の場合でありかつその場合に限る。

Brieskornのこの結果は、後にGrothendieckによるadjoint quotient singularityに対する同時特異点解消の存在に発展する。別にここで直接必要とするわけではないが、念のため同時特異点解消の定義を与えておく。

定義 1.6. X を代数多様体、 $x \in X$ をその特異点とする。特異点 (X, x) の変形 $\pi : (\mathcal{X}, x) \rightarrow (C, 0)$ に対し、射 $f : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ が π の同時特異点解消であるとは、 \mathcal{X}, C をそれぞれ $x, 0$ の十分小さな近傍としたとき、任意の $t \in C$ に対して

$$f_t = f|_{\mathcal{Y}_t} : \mathcal{Y}_t = (\pi \circ f)^{-1}(t) \longrightarrow \mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$$

が特異点解消になることをいう。ここで、特異点の変形⁵ $\pi : (\mathcal{X}, x) \rightarrow (C, 0)$ とは、各 $t \in C$ (C は変形の底空間) に対し、そのファイバーを $\mathcal{X}_t = \pi^{-1}(t)$ と書いた時、原点 $t = 0$ において、germ としての同型 $(\mathcal{X}_0, x) \simeq (X, x)$ があり、かつ、 $\pi : \mathcal{X} \rightarrow C$ が平坦射。(任意の $p \in \mathcal{X}$ に対して、 $\mathcal{O}_{\mathcal{X}, p}$ は平坦 $\mathcal{O}_{C, \pi(p)}$ -加群。 \mathcal{X}, C が滑らかなら、ファイバー \mathcal{X}_t は特異点をもっているもよいが、次元は一定。) 特に、 $t \neq 0$ の時各ファイバーが滑らかなとき、変形をsmoothingと呼ぶ。

1.2) 単純楕円型特異点とそのsmoothingの問題

単純特異点の特異点解消の例外集合は、有理曲線からなっていた。それが、種数1の滑らかな楕円曲線であるような特異点を単純楕円型特異点 (simple elliptic singularities) という。即ち、

定義 1.7. 代数曲面 V の孤立特異点 P が単純楕円型特異点であるとは、 $\pi : \tilde{V} \rightarrow V$ をその極小特異点解消としたとき、例外集合 $\pi^{-1}(P)$ が自己交叉数が負⁶ の滑ら

⁵ 曲面の孤立特異点はいつでも変形をもつと予想されている [Lo]。一方、変形を持たない特異点を剛な特異点と呼ぶが、余次元が3以上の商特異点は剛であることが知られている [Sch]。

⁶ 曲面の孤立特異点の極小特異点解消の交叉形式は、Mumford [Mu] により、常に負定値である。

かな楕円曲線であるときをいう。例外曲線の自己交叉数を $-k < 0$ としたとき、 $k > 0$ をその単純楕円型特異点の次数という。

楕円曲線 T^2 上の次数 $-k < 0$ の複素直線束 $L \rightarrow T^2$ のゼロ切断を一点に潰してできる特異点として、単純楕円型特異点は実現される。このとき、全空間が極小特異点解消で L のゼロ切断が例外集合になっている。単純楕円型特異点は、単純特異点にある意味近い特異点のクラスであるが、様々な点で異なった個性をもつ。例えば、前節では単純特異点に対し、2つの対象、即ち極小特異点解消と Milnor ファイバーを考察したが、単純楕円型特異点は、必ずしも超曲面特異点であるわけではなく、従って、対応する Milnor ファイバーがあるわけではない。実際、次の斎藤恭司氏の仕事は基本的である。

定理 1.8. (斎藤恭司) 次数 $k > 0$ の単純楕円型特異点が超曲面特異点であるのは、 $k = 1, 2, 3$ の時でありかつその時に限る。その時、定義方程式は次で与えられる。

Notation	Degree k	Defining equation
\widetilde{E}_8	1	$x^6 + y^3 + z^2 + \lambda xyz$
\widetilde{E}_7	2	$x^4 + y^4 + z^2 + \lambda xyz$
\widetilde{E}_6	3	$x^3 + y^3 + z^3 + \lambda xyz$
\widetilde{D}_5	4	$\begin{cases} x^2 + y^2 + \lambda zw \\ xy + z^2 + w^2 \end{cases}$

表 1.9

注：(1) 完全交叉特異点までゆると、 $k \leq 4$ となり、次数4 の単純楕円型特異点の定義方程式は上の表1.9の最下段で与えられる。この結果は誰の結果か知らない。(例えば[D]参照。)

(2) “Notation”の意味は、上の次数の単純楕円型特異点には、同様に Milnor ファイバーが存在するが、その交叉形式 (消滅サイクルの交叉の様子) が対応するアフィン Dynkin 図式で記述されることによる。これは、単純楕円型特異点が単純特異点に「近い」個性的な特異点であるという意味の一つの現象である。(しかし、この場合交叉形式はラディカルをもち、半負定値であり、明らかに極小特異点解消とは異なる)。

更に、Milnor ファイバーとは限らずに、一般に、単純楕円型特異点はいつ smoothing をもつか、という Brieskorn の問いに対し、次の結果も基本的である。

定理 1.10. (1) (Pinkham [P]) 単純楕円型特異点が smoothing をもつのは、次数 k が $0 < k \leq 9$ の場合に限る。

(2) (Looijenga and Wahl [L-W]) 更に、 $k = 8$ の時、smoothing の deformation

componentの個数は5つあり、そのうち微分同相類は2つある⁷。 $k \neq 8$ のときは、smoothing のdeformation componentは1つ。

§2 接触構造とシンプレクティックファイリング (境界値問題)

2.1) 定義など一般的事柄.

我々は、§1で説明した単純特異点、単純楕円型特異点にまつわるいくつかの現象をシンプレクティック/接触幾何学の立場で考察したい。この節では、問題設定を述べるに必要な、シンプレクティック/接触幾何の基本的な事柄を最小限度に復習する。詳しくは、例えば[三]参照。

定義 2.1. Y を滑らかな向き付けられた3次元多様体とする。

(1) Y 上の接触構造 ξ とは、 Y 上の完全非可積分な2平面場のことをいう。

(2) 接触構造 ξ に対し、 $\text{Ker}\theta = \xi$ なる1次微分形式を ξ の接触形式という。 ξ の非可積分性より、 $\theta \wedge d\theta \neq 0$ である。従って、これにより、 Y に向きが入る (θ の取り方によらず接触構造から決まる)。この向きは初めに与えられている Y の向きと無関係であり、一致している時、接触構造は正であるといい、反対になっている時、負であるという。

3次元多様体にはいつでも接触構造が存在する。接触構造は、タイト接触構造と呼ばれるものと、そうでないもの (over twisted 接触構造と呼ばれる) の2種類に類別される。ここではそれらを直接扱うわけではないので定義は省略するが、タイト接触構造はその3次元多様体の幾何学と密接に関係しており、より重要なクラスであると言うにとどめておく。我々が考察する、代数曲面の孤立特異点の近傍の境界である3次元多様体に現れる接触構造は、次のようなクラスであり、タイト接触構造の重要な例となっている。

定義 2.2. ξ を3次元多様体 Y 上の接触構造とする。

(1) ξ が弱い意味で (シンプレクティック) フィラブル (fillable) 接触構造であるとは、あるシンプレクティック4次元多様体 (X, ω) が存在し、以下が成り立つときをいう。

- (i) $\partial X = Y$ 。但し、 X にはシンプレクティック構造 ω から定まる向きが入っており、 Y には定義2.1 (2)により接触構造 ξ から定まる向きを入れた時、向きも込めて Y が X の境界になっているとする。(向きの問題は大切である。)

⁷[P] では、 $k = 8$ の時、smoothing のdeformation componentの個数は2つと主張していたが、これは[L-W]により、上のように訂正された。このことを教えて下さったWahl氏に感謝する。

- (ii) $\omega|_{\xi} > 0$ 。

この時、 (X, ω) を接触多様体 (Y, ξ) の弱い意味でのシンプレクティックファイリングという。

(2) 更に、 ξ の接触形式 θ で、 $\omega|_Y = d\theta$ なるものが存在する時、 ξ を (強い意味で) シンプレクティック) フィラブル (fillable) 接触構造であるといい、この時 (X, ω) をシンプレクティックファイリングという。

注 2.3. (1) 幾何学的には、シンプレクティックファイリングからみると、境界が「凸」に見えている。実際、正則(holomorphically)フィラブル、正則ファイリングという概念もあり、これは多変数関数論における擬凸領域を典型例としている。ここでは正則ファイリングは扱わないので、単にフィラブルなどということにする。

(2) (2) \Rightarrow (1) は明らかであるが、 Y が有理ホモロジー3球面の場合、(1)と(2)は同値になる。(例えば[E]、[O-O2]参照。) これは、弱い意味でのファイリングのシンプレクティック形式を境界の近くで変形して(2)の意味でのファイリングになるようにできる、ということである。単純特異点の場合はこの場合になる。

定理 2.4. (Gromov) (弱い意味での) フィラブル接触構造はタイトである。

これらの接触構造の典型例は、次節で説明するような特異点のリンクに現れるものである。

2.2) 特異点のリンクに現れる接触構造.

P を代数曲面 V の孤立特異点とした時、 P の近傍の (閉包の) 境界の実3次元多様体を特異点 P のリンクと呼ぶ。超曲面特異点、単純楕円型特異点の場合に特異点のリンクにフィラブル接触構造が自然に現れることをみる。

$f(x, y, z) \in \mathbf{C}[x, y, z]$ とし、原点 O が超曲面 $\{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0\}$ の孤立特異点になっているとする。そのリンク⁸

$$Y = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid f(x, y, z) = 0, |x|^2 + |y|^2 + |z|^2 = 1\}$$

上には

$$\xi = \{v \in TY \mid J_0 v \in TY\}$$

により、接触構造 ξ が定まる。ここで、 J_0 は \mathbf{C}^3 の標準的な複素構造である。これはフィラブル接触構造になっている。実際、Milnorファイバーのコンパクトな部分

$$M_f = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid f(x, y, z) = \epsilon\} \cap B^6$$

⁸単純特異点の場合、リンクは位相的には S^3/Γ (Γ は表1.1で対応するもの) であり、有理ホモロジー3球面である。

(B^6 は原点中心の単位閉円板) が、一つのシンプレクティックフィリングを与えている⁹。

単純楕円型特異点の場合は、次のように接触構造が現れる。 $\pi: L \rightarrow T^2$ を楕円曲線 T^2 上の次数 $-k < 0$ のエルミート複素直線束とする。ゼロ切断を潰してできる特異点が次数 k の単純楕円型特異点であり、 $\pi: L \rightarrow T^2$ の全空間がその極小特異点解消を与えていた。 $D(L)$ を L の単位閉円板束とすると、単位 S^1 束 $S(L) = \partial D(L)$ が特異点のリンクである。 L 上には曲率が $-2k\sigma$ (σ は T^2 の面積要素で全面積は 2π とする) なるユニタリ接続が存在する。 ξ を $S(L)$ におけるその水平分布とすれば、これは $S(L)$ 上のフィラブル接触構造を定める¹⁰。実際、 $D(L)$ 上にはシンプレクティック構造 $\frac{1}{2}d(r^2\alpha) + \pi^*\sigma$ (r はファイバーの半径方向の座標で α は $S(L)$ 上の接続形式) があり、これは $-k < 0$ の時、一つのシンプレクティックフィリングを与えている。

§3 結果

以下、単純特異点、及び単純楕円型特異点のリンクの接触構造は、2.2)節で与えた(定義2.2(2)の意味での)フィラブル接触構造とする。

定義 3.1. シンプレクティック4次元多様体が極小であるとは、シンプレクティックに埋め込まれた自己交叉数が -1 の球面が存在しない時をいう。

一つのシンプレクティックフィリングがあったとき、それをブローアップすれば新たなフィリングができるので、極小なフィリングを決定することが問題となる。

定理 A. [O-O3]. 単純特異点のリンクの極小なシンプレクティックフィリング¹¹の微分同相類は一意。

これより直ちにBrieskornの定理1.4が従う。

系 A'. 単純特異点の極小特異点解消とMilnorファイバーは微分同相。

定理 Aにおいては、単に微分同相類だけでなくシンプレクティック変形タイプの一意性もわかる。(つまり、シンプレクティック形式の道でつなげることができる。しかし、途中でシンプレクティック形式の定めるコホモロジー類は変わり、シンプレクティックの意味では同型ではない。)

⁹方程式を ϵ で摂動しているが、Grayの安定性定理より、境界の接触構造はアイソトピーの意味で変わらない。

¹⁰先の曲率の条件の下で接続を取りかえても、やはりGrayの安定性定理より、 ξ のアイソトピー類は変わらない。

¹¹注2.3により、この場合には弱い意味でのフィリングにもなっている。

次に、単純楕円型特異点の場合のシンプレクティックフィリングを考察する。まず、PinkhamおよびLooijenga-Wahlの定理1.10に対応するものとして、次がわかる。

定理 B. [O-O4] (1) 単純楕円型特異点のリンクのシンプレクティックフィリング X で $c_1(X) = 0$ なるもの¹² が存在するのは、単純楕円型特異点の次数 k が $0 < k \leq 9$ の場合に限る。

- (2) 更に、 X の微分同相類は $k \neq 8$ の時は一意で、 $k = 8$ の時は丁度2つある。
 (3) より詳しく、 X の微分同相類は以下のように記述される。

- $k \neq 8$ の時、 CP^2 の中の滑らかな3次曲線¹³ 上の $(9 - k)$ 点でブローアップした時、 X はその3次曲線のproper transformの補集合。
- $k = 8$ の時、(i) CP^2 の中の滑らかな3次曲線上の1点でブローアップした時、 X はその3次曲線のproper transformの補集合か、または(ii) $CP^1 \times CP^1$ の中で、ホモロジー類 $2([CP^1 \times pt] + [pt \times CP^1])$ を表す正則に埋め込まれた楕円曲線の補集合か、のどちらか。

注 3.2. $k = 8$ の時に現れる2つのフィリングは、シンプレクティックの意味でブローアップ/ブローダウンを行うと移りあっていることがわかる。つまり、「双有理同値」の範疇では同じである。これは、双有理幾何においては、有理曲面の極小モデルは1つしかないことに対応する。一方、「正則同値」の範疇では、有理曲面の極小モデルは、 CP^2 と Hirzebruch曲面 $F_n = \mathbf{P}(\mathcal{O}_{P^1} \oplus \mathcal{O}_{P^1}(n)) \rightarrow P^1$ ($n \neq 1$) であるが¹⁴、 n が奇数の時 F_n の中には自己交叉数 -1 のシンプレクティック2球面が埋め込まれており¹⁵、実はこれはシンプレクティックカテゴリーではブローダウンすることができ、 F_n はシンプレクティックの意味では極小とはならない。 n が偶数の時は、 F_n は適当なシンプレクティック形式をもった $CP^1 \times CP^1$ とシンプレクティック同型になる。シンプレクティックカテゴリーではこの2つの極小モデルが存在することが $k = 8$ の場合に反映している。

定理 Bは、 $c_1 = 0$ を仮定していたので、これはいわば単純楕円型特異点のsmoothingに対応するフィリングを調べたことに対応している。一方、極小特異点解消も一つのフィリングを与えていたわけであるが、単純楕円型特異点の場合は、単純特異点の場合とは異なり同時特異点解消を持たず、それらは微分同相ではない。実

¹²この場合 $c_1 = 0$ を仮定すると、自動的に極小になる。

¹³楕円曲線であり、反標準因子である。

¹⁴任意の n に対し、 F_n は互いに双正則同型ではなく、 $n \neq 1$ の時、正則カテゴリでは極小である。

¹⁵ F をファイバー類、 B をゼロ切断類とした時、 $-\frac{n+1}{2}F + B$ で表わされる類。(標準因子は $(n-2)F - 2B$ である。)

際、単純楕円型特異点の極小特異点解消は $c_1 = 0$ を満たさない。ところが、次のことがわかる。

定理 C. [O-04] 単純楕円型特異点のリンクの極小なシンプレクティックファイリングは、極小特異点解消か、または定理 B にあげたものに限る。即ち、次数が $k \geq 10$ ならば、ファイリングは、極小特異点解消（つまり T^2 上の次数 $-k$ の円板束 $D(L)$ ）に微分同相。 $0 < k \leq 9$ ならば、ファイリングは極小特異点解消か、または $c_1 = 0$ なるもの（つまり定理 B におけるもの）に限る。

更に、定理 A (E_8 の場合) とその証明を用いて次の副産物も得られる。

定理 D. M を閉シンプレクティック4次元多様体とする。今、 M の中に擬正則有理曲線 C であって、唯一つ $(2, 3)$ -カスプ特異点をもつものが存在したとする。 C の自己交叉数 k が 1 以上であれば、実は、 M は $\mathbf{C}P^2$ の（何点かの）ブローアップであり、かつ $k \leq 9$ でなければならない。

滑らかな曲線であれば、線織面の中にいくらかでも大きい自己交叉数をもって埋め込まれることを考えると、一つカスプを持つだけで、これだけ制限されることは、ちょっと不思議な気がするかもしれない。しかし、考えてみれば、後で説明する我々の定理 A の証明は、ファイリングを閉シンプレクティック多様体にコンパクト化し、（適当なブローダウンの後）その中である因子（これが丁度 $(2, 3)$ -カスプをもった有理曲線になる）の入り方の一意性を示し、これが所望のファイリングの一意性を導くので、いうなれば多様体の境界値問題を閉多様体とその中の特別な曲線の組みの問題と相対化され、ファイリングの一意性とは、上のような種類の現象を意味すると理解することはむしろ自然である。

§4 証明の方針

証明の構造は単純特異点、単純楕円型特異点の場合も同様である。

- ステップ1) シンプレクティックファイリングをある閉シンプレクティック多様体に「コンパクト化」し、コンパクト化を記述する。つまり、コンパクト化の微分同型類を記述し、コンパクト化する際に付け加えた無限遠における因子 (compactifying divisor) を記述する。
- ステップ2) シンプレクティックアイソトピーの問題を解く。つまり、ステップ1) でわかったコンパクト化と compactifying divisor の組みが、標準的なものとアイソトピックであることを示し、compactifying divisor の補集合としてファイリングを特徴付ける。

4.1) ステップ1)コンパクト化の記述.

単純特異点のリンクのフィリング X をコンパクト化するために、まず、Milnorファイバーを適当な重み付き射影空間に埋め込み、コンパクト化したものを考える。(この方法は斎藤恭司氏[Sai1]による。) f_Γ を表1.1で与えられる多項式とし、Milnorファイバーを

$$M_\Gamma = \{(x, y, z) \in \mathbf{C}^3 \mid f_\Gamma(x, y, z) = 1\}$$

とおく。(a, b, c) を表1.1で与えられた重みとし、重み付き射影空間 $\mathbf{P}(a, b, c, 1)$ に、 \mathbf{C}^3 を $\iota: (x, y, z) \rightarrow [x, y, z, 1]$ で埋め込む。 $\mathbf{P}(a, b, c, 1)$ における $\iota(M_\Gamma)$ の閉包 $\overline{M_\Gamma}$ をとると、これは滑らかな有理曲面 $C = \overline{M_\Gamma} \setminus \iota(M_\Gamma)$ 上に特異点をもつ。その極小特異点解消 $\widetilde{M_\Gamma} \rightarrow \overline{M_\Gamma}$ をとれば、滑らかなコンパクトケーラー曲面が得られる。この中にはMilnorファイバーが開稠密に含まれている。今、

$$M_\Gamma^{\text{out}} = \widetilde{M_\Gamma} \setminus \iota(M_\Gamma \cap B^6)$$

を考える。これはいわば、Milnorファイバーのコンパクト化の「外側」であり、境界は「凹」である。境界でシンプレクティック形式を張り合わせることににより、

$$Z(\Gamma) = X \cup_{S^3/\Gamma} M_\Gamma^{\text{out}}$$

なる閉シンプレクティック4次元多様体ができる。これをフィリング X の「コンパクト化」と我々は呼ぶ。 $Z(\Gamma)$ は次のように記述できる。

命題 4.1. (1) (ブローアップ/ダウンを除いて) $Z(\Gamma)$ は有理あるいは、線織(ruled)シンプレクティック4次元多様体である。

(2) 詳しくは、 $Z(\Gamma)$ は $\mathbf{C}P^2$ の $(n+3)$ 点ブローアップと微分同相。

Type of Γ	Diffeomorphism type of $Z(\Gamma)$
A_n	$\mathbf{C}P^2 \# (n+3)\overline{\mathbf{C}P^2}$
D_n	$\mathbf{C}P^2 \# (n+3)\overline{\mathbf{C}P^2}$
E_6	$\mathbf{C}P^2 \# 9\overline{\mathbf{C}P^2}$
E_7	$\mathbf{C}P^2 \# 10\overline{\mathbf{C}P^2}$
E_8	$\mathbf{C}P^2 \# 11\overline{\mathbf{C}P^2}$

証明は、次の有理または線織面のシンプレクティック幾何による特徴付け定理に帰着させる。これは、Seiberg-Wittenのモノポール方程式とTaubesによるモノポール解と擬正則曲線との対応を用いて示される。

命題 4.2. ([O-O1]¹⁶). (M, ω) を閉シンプレクティック4次元多様体とする。もし、

$$\int_M c_1(K_M) \wedge \omega < 0$$

が成り立てば、 M は (ブローアップ/ダウンを除いて) 有理または線織シンプレクティック4次元多様体である。

$K_{Z(\Gamma)}$ を計算せねばならないが、それにはまず次の定理に注意する。

命題 4.3. ([O-O2],[K]¹⁷). 単純特異点のリンクの任意の極小フィリングの標準束は常に自明である。

これより、 M_r^{out} の標準束を計算すればよいが、それは、Milnorファイバーのコンパクト化の際のcompactifying divisorを記述してやればよい。詳しくは省略するが ([Sai]参照)、compactifying divisorは4つの有理曲線を既約成分にもち、次のようなconfigurationをもっている。(各数字は、自己交叉数を表わし、 (p, q, r) は表1.1で与えられる。)

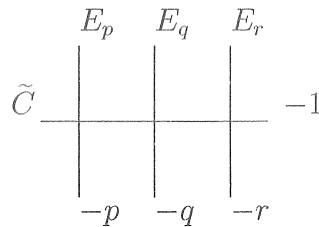


図 4.4.

この時、 $K_{\widetilde{M}_r} = -(2\widetilde{C} + E_p + E_q + E_r)$ となることがわかる。

以上により、 $Z(\Gamma)$ は有理かまたは線織面になることがわかったが、非有理線織面が排除されることが、次の補題からわかる。

補題 4.5. 単純特異点のリンクの任意のフィリング X は、 $b_1(X) = 0$ 。

これは、次の定理 (の後半) を応用することで示される。

命題 4.6. ([O-O2], [Lis]¹⁸). 連結なシンプレクティックフィリング4次元多様体の、ある境界の連結成分が正スカラー曲率を許容すれば、フィリングの交叉形式は負定値で、かつ境界は連結である。

¹⁶Li-Liu[L-L]も独立に証明している。

¹⁷我々は E_n や小さな n に対する A_n, D_n 型の場合に示したが、[K] では一般の単純特異点に対して示した。

¹⁸我々は境界が単純特異点のリンクの場合に示したが、証明はSeiberg-Witten不変量のある消滅定理に帰着し、境界のある連結成分が正スカラー曲率を許容するとしても証明は同じである。

あとは、 $K_{Z(\Gamma)}$ の情報といくつかの計算をすることで命題4.1が得られる。

次に、 $Z(\Gamma)$ に含まれる余分な -1 有理曲線を潰す。 $\Gamma = E_n$ ($n = 6, 7, 8$) の場合が一番簡単なので例にとろう。 $Z(\Gamma)$ の概複素構造 J として、compactifying divisorの近傍では可積分なものをとっておく。

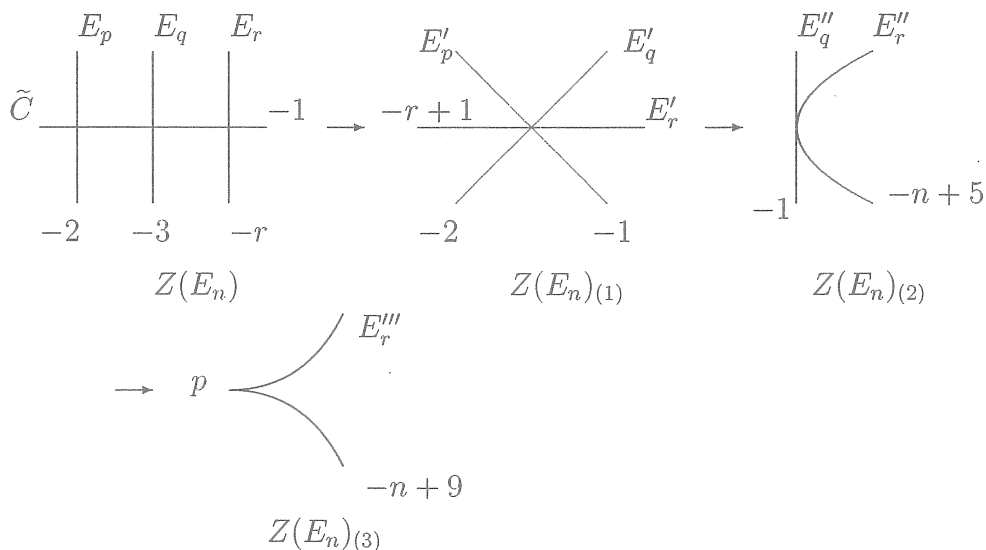


図 4.7.

このように、順に3回 (-1) 有理曲線を潰していくと、一つの特異点 $((2, 3)$ -カスプ特異点になる) をもった曲線が得られる。更に

命題 4.8.¹⁹ $Z(E_n)_{(3)}$ の中の n 個の互いに交わらない (-1) 有理曲線 からなる族 $\{e_j\}$ であって、各 e_j は E'''_r で滑らかな唯一点で横断的に交わり、それらを潰すと、 $\pi : Z(E_n)_{(3)} \rightarrow \mathbf{CP}^2$ となり、 $\pi(E'''_r)$ は \mathbf{CP}^2 の中の、唯一つカスプ特異点をもった次数3の擬正則曲線になる、ようなものが存在する。

他の A_n, D_n 型の時も同様に、まず、compactifying divisorの中で潰していき、 \mathbf{CP}^2 の何点かのブローアップの中でカスプ特異点をもつ反標準因子をみつける。更に、命題4.8と同様に (-1) 曲線を潰して、最終的に $\mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$ の中の唯一つカスプ特異点をもった次数 $[2, 2]$ の (反標準因子を表わす) 擬正則曲線に到達する。

¹⁹ $Z(E_n)_{(3)}$ の概複素構造 J' であって、 E'''_r の近傍では初めにとった J と一致しており、 e_j と E'''_r は J' -正則であるようなものの存在が技術的には鍵となる。 E'''_r は反標準因子であることに注意されたい。

かくして、我々は、最終的に (CP^2, D) または $(CP^1 \times CP^1, D')$ で D, D' はともに反標準因子を表わす擬正則曲線で唯一つカスプ特異点をもつもの、という状況に達する。

4.2) ステップ2) シンプレクティックアイソトピーの問題.

我々の至った状況はあくまで、擬正則な範囲であり、これが標準的な複素構造の場合と同じかどうかはわからない。 CP^2 中の次数1あるいは2のシンプレクティックに「埋め込まれた」擬正則曲線のシンプレクティックアイソトピー類は一意であることは Gromov[G]により知られており、次数3のシンプレクティックに「埋め込まれた」擬正則曲線に対しても一意性が Sikorav[Sik]²⁰ により得られている。高い次数に対しては、一般にはシンプレクティックアイソトピーの一意性は成り立たない。我々は、次数3の場合を扱うが、カスプ特異点をもつ場合にアイソトピーの問題を考えることになる²¹。 D_0 を CP^2 の標準的な複素構造 J_0 に関する 3次曲線で唯一つカスプ特異点をもつものとする。次の定理が目標となる。

定理 4.9. D を CP^2 中の3次の擬正則有理曲線²² で唯一つのカスプ特異点をもつものとする。この時、 $CP^2 \setminus D$ は $CP^2 \setminus D_0$ と微分同相である。

注 4.10. $(CP^1 \times CP^1, D')$ の場合は、1回ブローアップして、適切に2回ブローダウンすれば、 (CP^2, D) の場合に帰着される。

証明のアイデアは、概複素構造の道 J_t で標準的な複素構造 J_0 と J' をつなぐものを取り、コボルディズムの議論に持ち込むことである。即ち、しかるべきカスプ特異点をもった J_t -正則曲線の族を見つけることである。連続法で行うが、閉性は、擬正則写像の方程式の線形化作用素に対する横断正則性の議論であり、これは、基本的には Hofer-Lizan-Sikorav[H-L-S]の automatic regularityの議論に従い、それをカスプを持った場合の変種を行うことによる。即ち、我々の特異点の重複度は2であり、それに応じて、ある1点で値と1階微分が消えるある切断の空間を取り、automatic regularityの議論を援用する。閉性はコンパクト性に関わり、我々は種数0の安定写像のモジュライを用いる。色々議論が必要となるので詳細は省略する([O-O3]を御覧下さい)。

あとは、これを逆に辿れば、その補集合に元のシンプレクティックファイリング X が再現されるので、補集合の微分同相類の一意性 (定理4.9)から単純特異点のリンクのファイリングの一意性 (定理A) が出てくる。

²⁰後で、単純楕円型の場合に用いられる。

²¹関連する仕事として[Ba],[I-S]がある。

²²3次曲線なので、楕円曲線が退化したものとも考えられるが、ここでは有理曲線の特異点付きと考える。擬正則写像の理論を用いる際、有理曲線からの写像の方が解析し易いからである。

すでに紙数も、所定の枚数を越えている。単純楕円型特異点の場合の証明を極々簡単に説明して終わりたい。コンパクト化は、今度の場合、Milnorファイバーが必ずしも存在しないので、先のようにMilnorファイバーのコンパクト化は使えない。代わりに、極小特異点解消 $\pi: L \rightarrow T^2$ を用いる。 L に無限遠点の切断 E_∞ ²³ を付け加えて L をコンパクト化する。つまり、 $\mathbf{P}(L \oplus \underline{\mathbf{C}})$ を考え、 $Y = \mathbf{P}(L \oplus \underline{\mathbf{C}}) \setminus D(L)$ とおくと、これが単純楕円型特異点のリンクの「凹な外側」となる。 X を任意のフィリングとしたとき、 $Z = X \cup Y$ によってシンプレクティック構造が張り合い、 X のコンパクト化ができる。再び命題4.2の特徴付け定理を用いたいのであるが、単純楕円型の場合は命題4.3のように $K_X = 0$ とは言えない。ところが、 Z には無限遠切断 E_∞ が、シンプレクティックに滑らかに埋め込まれたトーラスとなっており、しかもその自己交叉数は正 ($k > 0$) である。よって、シンプレクティック構造のインフレーション(例えば[L-M]を参照)により、 $[E_\infty]$ (のポアンカレ双対) にいくらでも近いシンプレクティック構造が存在する。一方adjunction formulaにより $c_1(K_Z)[E_\infty] = -k < 0$ がわかるので、このシンプレクティック構造に関して命題4.2を使って、次を得る。

命題 4.11. 単純楕円型特異点のリンクの任意のシンプレクティックフィリング X に対し、そのコンパクト化 Z は、(ブローアップ/ダウンを除いて) 有理かまたは線織シンプレクティック4次元多様体である。

ところが、単純特異点の場合とは異なり、単純楕円型の場合には一般には非有理線織面になる場合は排除されない。実際、極小特異点解消(の射影化)そのものが非有理線織面となっている。ところが、もし $c_1(X) = 0$ を仮定すると、非有理線織面の場合が排除され、有理曲面(のブローアップ)となる。あとは簡単な数(ベッチ数や指数など)の計算をすれば、次がわかる。

命題 4.12. X を次数 $k > 0$ の単純楕円型特異点のリンクのシンプレクティックフィリングとする。 $c_1(X) = 0$ ならば、 X のコンパクト化 Z は、 $k \neq 8$ ならば $\mathbf{C}P^2$ の $(9-n)$ 点ブローアップ、 $k = 8$ ならば、 $\mathbf{C}P^2$ の1点ブローアップか、 $\mathbf{C}P^1 \times \mathbf{C}P^1$ に微分同相。

$c_1(X)$ が必ずしもゼロでない場合を考えよう。この場合はとりあえず、コンパクト化 Z はどっちになるかわからない。イ) 有理曲面 $\mathbf{C}P^2$ 、ロ) 有理線織面、ハ) 非有理線織面になる場合がある。しかし、我々はいずれにせよ、 Z に自己交叉数が正 $k > 0$ の滑らかに埋め込まれたシンプレクティックトーラス E_∞ をもっている。そこで、上のイ) ロ) ハ) の4次元シンプレクティック多様体の場合に、シンプレクティックに埋め込まれた曲面の自己交叉数と種数、および、線織面の場合は底空間のリーマン面の種数との間に一般にどのような制約があるか、を調べたくなる。実は、

²³これが compactifying divisor に他ならない。その意味では単純楕円型の場合の方が易しい。

これは、代数幾何ではHartshorne[H]²⁴により詳しく調べられている。これは、双有理幾何の範疇で行われているが、これをお手本にしてシンプレクティック幾何に翻訳することがちょっとがんばれば可能であることがわかり、ほぼ、同様の結果を得ることができる。大体の感じは、大きい自己交叉数をもったリーマン面が埋め込まれていたら、線織面の切断にならざるを得ない（そうでないと、自己交叉数が種数で上から評価されてしまう）、というものである。これらの結果を、我々の状況 (Z, E_∞) の場合に適応すれば、対は完全に記述できる。更に、ステップ2)のシンプレクティックアイソトピーの問題は、単純楕円型の場合、 CP^2 中の「滑らかな」3次曲線に対して考察すればよく、これは先のSikoravの結果がそのまま使える状況となっており、こちらはむしろ楽である。

§5 複素曲面の正規特異点の小平次元と特異点の分類

紙数は既に大幅に超過している。ここでは、簡単に我々のフィリングの一意性の結果を別の観点から見直したい。一般の超曲面孤立特異点に対しては、そのリンクの極小フィリングは様々なものができて柔軟であり、一意性あるいはフィリングを決めてしまうことはなかなか期待できないことと思われる²⁵。一意性は、特異点のどのような性質が反映しているのであろうか？我々の議論を反省すると、重要なステップは、コンパクト化が有理曲面か線織面になるということ、及びシンプレクティックアイソトピーの問題が肯定的に解ける、という2点に集約されると思われる。特に前者については、単純特異点、単純楕円型特異点の性質が大きく反映している²⁶。

曲面における小平の分類理論をモデルとして、次のような曲面の孤立特異点の分類理論の試みがある（例えば[石]参照）。

κ_δ	孤立Gorenstein特異点の種類	一般の孤立特異点の種類
$-\infty$	単純特異点	商特異点
0	単純楕円型特異点、カusp特異点	単純楕円型またはカusp特異点の有限巡回群による商特異点
2	それ以外	それ以外

表 5.1

²⁴種数が1の場合はより以前に永田雅宜氏[N]により詳しく調べられていた。

²⁵行列式特異点と呼ばれるクラスの中でいくつか似たようなことができそうなものがあることが、北大のBhupal、小野薫氏たちによって観察されている。

²⁶高い種数のリーマン面を例外集合にする特異点でも種数に対し次数が十分高いものに対しては同様の議論が行く。しかし、一方でアイソトピーの問題が崩れていく（[O-O4]参照）。

(詳しい単語の説明は省略する。) ここで、 κ_δ が特異点の小平次元に相当する不変量で、次のようにして定義される。 (X, x) を (正規) 孤立特異点とする。まず、多重種数に相当するものとして、自然数 m に対し、

$$\delta_m(X, x) := \dim_{\mathbb{C}} \omega_X^{[m]} / f_*(\omega_Y^{\otimes m}((m-1)E))$$

とおく。但し、 $f: Y \rightarrow X$ は特異点の解消で、 E はその例外因子。 $\omega_Y^{\otimes m} \cong \mathcal{O}(mK_Y)$ で $\omega_Y^{\otimes m}((m-1)E) \cong \mathcal{O}_Y(mK_Y + (m-1)E)$ 。一方、 $\omega_X^{[m]}$ は非特異な所では普通の $\omega_X^{\otimes m}$ であるが、特異点では direct image をとり、一般の特異点に対しては可逆層にならず単なる接続層であるが、正規特異点 (曲面では孤立特異点) のときは、可逆層 (直線束) になる。 δ_m は特異点解消の取り方によらず決まり、 $\delta_m < \infty$ である。これを特異点の多重種数と呼ぶ。この時、任意の正規孤立特異点 (X, x) に対し、

- (i) 任意の自然数 m に対し、 $\delta_m(X, x) = 0$ か、または
- (ii) ある $k = 0, 1, 2, \dots, n-2, n = \dim X$ が存在して、

$$0 < \limsup_{m \rightarrow \infty} \frac{\delta_m(X, x)}{m^k} < \infty$$

が成り立つ (石井)。(i) の時、 $\kappa_\delta(X, x) = -\infty$ と定義し、(ii) の時、 $\kappa_\delta(X, x) = k$ と定義する。

さて、表5.1に戻ろう。この分類によると、我々の扱った特異点に近いものは、カusp特異点である。カusp特異点のリンクのフィリングに対しては期待が持てるかもしれない。しかし、一方でカusp特異点が現れる面白い曲面として、いわゆるVII型曲面 (井上曲面) があり、これにはシンプレクティック構造は入らない。我々の結果を正則フィリングの範疇でできないだろうか²⁷? また、表5.1あるいはより一般に先の(ii)を見て頂ければわかるように、 $\kappa_\delta = \dim X - 1$ のところがない。この理由を筆者にはうまく説明できないが、曲面の分類と比した時、 κ_δ による正規孤立特異点の分類は、果たしてよい分類といえるか? という不満もないわけではない (と思われる、と、素人の筆者がいうと失礼かもしれないが)。シンプレクティック/接触幾何の視点から特異点を、そのリンクのフィリングを手がかりに見て来たが、このようなことに、何か説明がつけられるであろうか? (翻って、そもそもシンプレクティック4次元多様体に対して、小平次元に相当するものは何か、ということも筆者はかつて考えたことがあったが、よくわからなかった。シンプレクティックにおける一般型という概念もどう定式化すればよいか、よくわからない。)

²⁷これは、只にVII型曲面への応用だけではなく、筆者が昔インスタントンのモジュライの指数を用いて作った実3次元多様体の不変量への応用も期待している。

References.

- [Ba] J.-F. Barraud, Coubes pseudo-holomorphes equisingulieres en dimension 4, Bull. Soc. Math. France **128** (2000), 179-206.
- [B1] E. Brieskorn, Ueber die Auflösung gewisser Singularitäten von holomorphen Abbildungen, Math. Ann., **166** (1966), 76-102.
- [B2] E. Brieskorn, Die Auflösung der rationalen Singularitäten holomorpher Abbildungen, Math. Ann., **178** (1968), 255-270.
- [B3] E. Brieskorn, Singular elements of semi-simple algebraic groups, Proc. Internat. Congress Math. Nice, (1970), 279-284.
- [D] A. Dimca, *Singularities and topology of hypersurfaces*, Springer-Verlag, New-York, Berlin, Heidelberg, 1992.
- [Du] A. H. Durfee, Fifteen characterization of rational double points and simple critical points, L'Enseignement Math. **25** (1979), 131-163.
- [E] Y. Eliashberg, On symplectic manifolds with some contact properties, J. Diff. Geom., **33** (1991), 233-238.
- [G] M. Gromov, Pseudoholomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math. **82** (1985), 307-347.
- [H] R. Hartshorne, Curves with high self-intersection on algebraic surfaces, Publ. I.H.E.S., **36** (1969), 111-125.
- [H-L-S] H. Hofer, V. Lizan and J. C. Sikorav, On genericity for holomorphic curves in 4-dimensional almost-complex manifolds, J. Geom. Anal. **7** (1997), 149-159.
- [石] 石井志保子, 特異点入門. シュプリンガー.
- [I-S] S. Ivashkovich and V. Shevchishin, Structure of moduli space in a neighborhood of a cusp-curve and meromorphic hulls, Invent. Math. **136** (1999), 571-602.
- [K] Y. Kanda, The monopole equations and J -holomorphic curves on weakly convex almost Kahler 4-manifolds, Trans. A.M.S. **353** (2001), 2215-2243.
- [L-M] F. Lalonde and D. McDuff, The classification of ruled symplectic 4-manifolds, Math. Res. Letters **3** (1996), 769-778.
- [L-L] T. J. Li and A. Liu, Symplectic structure on ruled surfaces and a generalized adjunction formula, Math. Res. Lett. **2** (1995), 453-471.
- [Lis] P. Lisca, Symplectic fillings and positive scalar curvature, Geom. Topol. **2** (1998), 103-116.
- [Lo] E. Looijenga, *Isolated singular points on complete intersections*, London Math. Soc. Lect. Notes Series **77** (1984).
- [L-W] E. Looijenga and J. Wahl, Quadratic functions and smoothing surface singularities, Topology **25** (1986), 261-191.
- [M1] D. McDuff, The structure of rational and ruled symplectic 4-manifolds, Journ. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 679-712.

- [三] 三松佳彦, 3次元接触構造のトポロジー, 数学メモアール 1巻 (2001) 日本数学会.
- [Mu] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, *Publ. Math. I.H.E.S.* **9** (1961), 229-246.
- [N] M. Nagata, On rational surfaces I, *Memoirs of the College of Science, University of Kyoto*, **32**, No. 3 (1960).
- [O-O1] H. Ohta and K. Ono, Notes on symplectic 4-manifolds with $b_2^+ = 1$, II, *Inter. J. Math.*, **7**, (1996), 755-770.
- [O-O2] H. Ohta and K. Ono, Simple singularities and topology of symplectically filling 4-manifolds, *Comm. Math. Helv.*, **74**, (1999), 575-590.
- [O-O3] H. Ohta and K. Ono, Simple singularities and symplectic fillings, preprint, (2001).
- [O-O4] H. Ohta and K. Ono, Symplectic fillings of the link of simple elliptic singularities, preprint, (2001).
- [P] H. C. Pinkham, *Deformations of algebraic varieties with G_m -action*, *Asterisque* **20**, Societe Mathematique de France, 1974.
- [Sai1] K. Saito, A new relation among Cartan matrix and Coxeter matrix, *J. Algebra*, **105** (1987), 149-158.
- [Sai2] K. Saito, Einfach-elliptische Singularitäten, *Invent. Math.*, **23** (1974), 289-325.
- [Sai3] K. Saito, Around the theory of the generalized weight system: Relations with singularity theory, the generalized Weyl group and its invariant theory, etc., *Amer. Math. Soc. Transl.*, (2) **183** (1998), 101-143.
- [Sch] M. Schlessinger, Rigidity of quotient singularities, *Invent. Math.*, **14** (1971), 17-26.
- [Sik] J.-C. Sikorav, The gluing construction for normally generic J -holomorphic curves, ENS Lyon preprint, (2000).

2002年6月13日 (締めきりぎりぎり) 記

ディラック構造とその拡張について

埼玉大学大学院理工学研究科

萩原 洋右

1 序

対称性もしくは拘束のある力学系の研究および、ハミルトン系とラグランジェ系との相関において、Lie algebroid は基礎的な構造であることが認識されてきている。特に、ポアソン幾何と拘束系をともに記述する概念として導入されたディラック構造は重要な研究対象である。

ディラック構造は Courant algebroid の極大等方な部分束として定式化されるが、これは Lie bialgebroid に対する Manin triple の理論を与える。一方、Lie algebroid の概念の拡張に従って、ディラック構造のヤコビ構造・南部構造の方向への一般化が行われている。

本稿ではディラック構造、およびそのヤコビ構造・南部構造への拡張について紹介する。

2 ポアソン構造と Lie algebroid

シンプレクティック構造は、古典力学のハミルトン系としての定式化において基礎となる概念である。しかし、対称性や拘束をもつ系においては、むしろ関数のポアソン括弧積の概念がより根本的な役割を果たす。

多様体 P 上の 2-ベクトル場 π が P 上のポアソン構造であるとは、Schouten ブラケットによって

$$[\pi, \pi] = 0$$

となるときをいう。ポアソン構造 π は、 $C^\infty(P)$ 上の双線形な歪対称括弧積 $\{, \}$ で、任意の $f, g, h \in C^\infty(P)$ に対して

(1) (Leibniz rule)

$$\{f, gh\} = \{f, g\}h + g\{f, h\},$$

(2) (Jacobi identity)

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0,$$

を満たすものと、

$$\pi(df, dg) = \{f, g\}$$

という関係により同値となる。

ポアソン多様体は、各葉がシンプレクティック多様体となるような (特異) 葉層を付随させる。シンプレクティック多様体は、1枚の葉からなる葉層を持つポアソン多様体とみなせる。

この葉層構造の背後には、Lie algebroid と呼ばれる構造がある。

定義 2.1. P 上の Lie algebroid $(A, [\cdot, \cdot], \rho)$ とは、ベクトル束 $A \rightarrow P$ と、 $\Gamma(A)$ 上のリー括弧積 $[\cdot, \cdot]$ 、および束写像 $\rho: A \rightarrow TP$ の3つ組であって、次を満たすものをいう：

(1) (リー環準同型) 任意の $x, y \in \Gamma(A)$ に対して

$$\rho([x, y]) = [\rho(x), \rho(y)],$$

(2) (derivation law) 任意の $x, y \in \Gamma(A)$ および $f \in C^\infty(P)$ に対して

$$[x, fy] = ((\rho(x))f)y + f[x, y].$$

ただし、束写像 ρ の誘導する $\Gamma(A)$ から $\mathfrak{X}(P)$ への写像を同じ ρ で表す。

例 2.2. (1) リー環 \mathfrak{g} は、1点の上のベクトルバンドルと見なすことで Lie algebroid になる。

(2) 多様体 P の接バンドル TP は、ベクトル場のリー括弧積と自身への恒等写像により Lie algebroid の構造を持つ。

(3) ポアソン多様体 (P, π) の余接バンドル T^*P は、 π から定まる写像 $\pi: T^*P \rightarrow TP$ と括弧積

$$[\alpha, \beta] = \mathcal{L}_{\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)) \quad (2.1)$$

$(\alpha, \beta \in \Omega(M))$ により Lie algebroid となる。

写像 ρ は anchor と呼ばれ、この像 $\rho(A) \subset TP$ は積分可能な distribution となる。例 2.2(3) の場合、これにより得られる葉層の各葉に π から誘導されるシンプレクティック構造が入る。

3 ディラック構造

ポアソン多様体はそれ自身非常に重要な数学的対象であるが、拘束のある系の記述に必ずしも適したものではない。拘束系については、1978年に [6] によって拘束超曲面上のプレシンプレクティック構造を用いた定式化がおこなわれている。

ディラック構造は、ポアソン幾何と拘束系をともに記述する概念として Courant と Weinstein [4] により 1988 年に導入され、その後 Courant [3] によって基礎付けられた。これはポアソン括弧とそのハミルトンベクトル場に基づく幾何の統一的な描写を与えるものであった。

V を n 次元ベクトル空間とし、 $V \oplus V^*$ 上にペアリング

$$\langle (X, \omega), (Y, \mu) \rangle_+ = \frac{1}{2}(\omega(Y) + \mu(X))$$

$((X, \omega), (Y, \mu) \in V \oplus V^*)$ を考える。

定義 3.1. ([3]) P を滑らかな多様体とし、 $TP = TP \oplus T^*P$ とおく。このとき、部分束 $L \subset TP$ が P 上のディラック構造であるとは、 L の各ファイバーがペアリング \langle, \rangle_+ に関して極大等方であり、さらに L の切断全体のなす空間 $\Gamma(L)$ が、 TP 上の歪対称なブラケット

$$[(X, \omega), (Y, \mu)] = \left([X, Y], \mathcal{L}_X \mu - \mathcal{L}_Y \omega + \frac{1}{2}(\omega(Y) - \mu(X)) \right) \quad (3.1)$$

$((X, \omega), (Y, \mu) \in \Gamma(TP))$

で閉じている時をいう。

ここで、(3.1) は $\Gamma(L)$ 上では

$$[(X, \omega), (Y, \mu)] = ([X, Y], \mathcal{L}_X \mu - \iota_Y d\omega) \quad (3.2)$$

とも書けることに注意。ただしこれは $\Gamma(L)$ 上でしか歪対称にならない。

- 例 3.2.** (1) プレシンプレクティック多様体 (P, Ω) 、すなわち閉 2-形式 Ω を持つ多様体 P では、 $\Omega : TP \rightarrow T^*P$ のグラフがディラック構造になる。
 (2) ポアソン多様体 (P, π) でも、 $\pi : T^*P \rightarrow TP$ のグラフがディラック構造となる。

例 2.2(3) で見たように、ポアソン多様体には Lie algebroid の構造が付随するが、この事実は次の形に一般化される：

命題 3.3. ([3]) L が P 上のディラック構造であるとき、 $(L, [\cdot, \cdot], \rho|_L)$ は Lie algebroid となる。ここで、 ρ は TP から TP への射影を表す。

上の命題は、ポアソン括弧とそのハミルトンベクトル場に基づく幾何の背後には、Lie algebroid の構造があることを示している。後に見るように、実は TP 自身が Lie algebroid の double と捉えられる。

L が Lie algebroid であることから、anchor の像 $\rho(L) \subset TP$ は P 上の (特異) 葉層を生成する。さらに、この葉層の各葉には、 L によりプレシンプレクティック構造が誘導される。これは丁度、ポアソン多様体がシンプレクティックな葉からなる葉層構造を付随させたのに対応したものであり、プレシンプレクティック多様体は1枚の葉からなる葉層を持つディラック多様体、ポアソン多様体は各葉に入るプレシンプレクティック構造が非退化なディラック多様体ということができる。

ディラック多様体のこの他の例としては、ポアソン多様体の同変モーメント写像の正則値のレベル曲面が挙げられる [3]。この場合、誘導される葉層構造は、ポアソン多様体自身の葉層とこのレベル曲面との交わりとなる。

正則葉層と、各葉への引き戻しがシンプレクティックとなる概シンプレクティック構造 (すなわち、非退化な2次形式) との組はポアソン構造を定めることが知られているが、これは次のように拡張される。

定理 3.4. 正則葉層と、各葉への引き戻しがプレシンプレクティックとなる多様体上の2次形式との組は、ディラック構造を定める。

このことから、拘束のある力学系は以下のように捉えられる：拘束超曲面は、局所的には正則葉層の葉として表せる。そして相空間のシンプレクティック構造 (これは2次形式である) の制限として、この葉の上にプレシンプレクティック構造が入る。従って、相空間にはディラック構造が定められ、これが拘束のある系の運動を記述するものとなる。

ディラックは、拘束がすべて第2種である場合に運動を記述する相空間上のポアソン構造を導出しているが (ディラック括弧)、上の定理はこれを一般化したものである。

4 ヤコビ構造への拡張

ポアソン構造を拡張したものにヤコビ構造がある。多様体 P 上のヤコビ構造とは、 P 上の2-ベクトル場 Λ とベクトル場 E の組で、

$$[\Lambda, \Lambda] = 2E \wedge \Lambda, \quad [E, \Lambda] = 0$$

を満たすものをいう。これは、ポアソン括弧積の定義の中の条件のひとつである Leibniz rule を弱め、1階微分作用素であるとしたものになっている。

ヤコビ構造については、例 2.2(3) の拡張として、1-ジェットのパンドルに Lie algebroid の構造が入ることが知られている。

定理 4.1. [16] (P, Λ, E) をヤコビ多様体とすると、 $T^*P \times \mathbb{R}$ は次のブラケット $\{, \}_{(\Lambda, E)}$ と anchor Φ により Lie algebroid となる。

$$\begin{aligned} \{(\alpha, f), (\beta, g)\}_{(\Lambda, E)} &= \left(\mathcal{L}_{\Lambda(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\Lambda(\beta)}\alpha - d(\Lambda(\alpha, \beta)) + f\mathcal{L}_E\beta - g\mathcal{L}_E\alpha - \iota_E(\alpha \wedge \beta), \right. \\ &\quad \left. - \Lambda(\alpha, \beta) + \Lambda(\alpha, dg) - \Lambda(\beta, df) + fEg - gEf \right), \\ \Phi(\alpha, f) &= (\Lambda(\alpha) + fE, -\iota_E\alpha). \end{aligned}$$

Wade [31] はこの事実を拡張し、 $\mathcal{E}^1(P) = (TP \times \mathbb{R}) \oplus (T^*P \times \mathbb{R})$ の部分束として「 $\mathcal{E}^1(P)$ -ディラック構造」を定義した。この $\mathcal{E}^1(P)$ -ディラック構造は、ヤコビ構造、局所共形シンプレクティック構造、プレコンタクト構造（すなわち、多様体上の 1 次形式）、等質ポアソン構造を含む概念である。

Iglesias と Marrero [14] はこの $\mathcal{E}^1(P)$ -ディラック構造の葉層について調べ、各葉にはプレコンタクト構造もしくは局所共形プレシンプレクティック構造が入ることを示した。なお、彼らはこれに先立ち [15] で Lie algebroid のコホモロジー複体の 1-コサイクルから定まる外微分やリー微分、Schouten ブラケットを定義し、ヤコビ構造は「自身との（ある 1-コサイクルで定まる）Schouten ブラケットにより 0 となる $\wedge^2(T^*P \times \mathbb{R})$ の切断である」という条件により特徴付けられること、および、定理 4.1 のブラケットがこの 1-コサイクルで定まる外微分やリー微分により (2.1) の形で書けることを示している。これは、ヤコビ構造は“舞台をかえたポアソン構造”と捉えることができることを表しているように思われる。後述する Lie bialgebroid の拡張も行われており（Grabowski と Marmo [7] によっても同様の拡張がなされている）、今後“舞台をかえたディラック構造”としての $\mathcal{E}^1(P)$ -ディラック構造についての理解が深まっていくものと思われる。

5 南部ポアソン構造への拡張

南部ポアソン構造は、南部 [27] が 1973 年に提案したポアソン括弧の一般化を 1994 年に Takhtajan [30] が定式化したもので、その後多くの研究者によって詳しい研究がおこなわれている [5, 9, 10, 13, 25, 26]。

多様体 P 上の $p(\geq 2)$ -線形な歪対称括弧積 $\{, \dots, \}$ が P 上の p 次ポアソン構造であるとは、 $\{, \dots, \}$ が関数の積に対して Leibniz rule

$$\{f_1, \dots, f_{p-1}, g_1 g_2\} = \{f_1, \dots, f_{p-1}, g_1\} g_2 + g_1 \{f_1, \dots, f_{p-1}, g_2\}$$

を満たし、さらに Jacobi identity を一般化した“Fundamental identity”と呼ばれる式

$$\{f_1, \dots, f_{p-1}, \{g_1, \dots, g_p\}\} = \sum_{i=1}^p \{g_1, \dots, \{f_1, \dots, f_{p-1}, g_i\}, \dots, g_p\}$$

を満たすときをいう。これは P 上の p -ベクトル場で $\Pi(df_1, \dots, df_{p-1}) = 0$ を満たすものと

$$\Pi(df_1, \dots, df_{p-1}) = \{f_1, \dots, f_p\}$$

という関係により同値となる。

南部ポアソン構造は次数 2 の場合としてポアソン構造を含んだ概念であるが、次数 3 以上の構造はかなり様相が異なることが知られている。

定理 5.1. [5, 9, 26] P を n 次元多様体、 Π を P 上の p -ベクトル場とする。 $p \geq 3$ のとき、 P_i が P 上の南部ポアソン構造を定める必要十分条件は、 $\Pi \neq 0$ なる点のまわりで局所座標系 (x_1, \dots, x_n) により

$$\Pi = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x_p}.$$

と書けることである。

この定理からもわかるように、次数 $p \geq 3$ の南部ポアソン多様体は p 次元の葉と 0 次元の葉からなる葉層を持つ。各葉の上には、南部ポアソン構造から体積形式が誘導される。

このように、南部ポアソン構造は次数 $p \geq 3$ の場合と次数 2 の場合 (ポアソン構造) の性質が異なるが、Ibáñez らは [12] で、次数 $p \geq 3$ の南部ポアソン多様体について例 2.2(3) に類似する結果を示した。そこには、リー環の非可換版ともいえる Leibniz algebra が現れる。

(left) Leibniz algebra とは

$$[a_1, [a_2, a_3]] = [[a_1, a_2], a_3] + [a_2, [a_1, a_3]] \quad (5.1)$$

を満たす双線形写像を備えた R -module のことである (R は可換環)。括弧積 $[\ , \]$ が歪対称であれば (5.1) は Jacobi identity に一致し、従ってリー括弧積となる。Leibniz algebra は cyclic homology の研究の中で Loday [19] により導入されたもので、代数的 K 理論や特性類との関わりが研究されている [19, 21, 22, 23, 24]。

Ibáñez らが示したのは、次数 $p \geq 3$ の南部ポアソン多様体の $(p-1)$ 次形式全体のなすバンドルには Leibniz algebroid の構造が入るというものであった。ここで Leibniz algebroid とは Lie algebroid の定義 2.1 のリー環という部分をすべて Leibniz algebra に置き換えたものである。この事実は例 2.2(3) に「対応」するものではあったが、彼らの示した Leibniz 括弧積は次数 3 以上の特殊性に依存したもので、次数 2 の場合には一般には入らないものであった。しかしその後、このバンドルにこれとは異なる、例 2.2(3) を自然に拡張した Leibniz algebroid の構造が入ることが判明した。

定理 5.2. [8] 次数 $p \geq 2$ の南部ポアソン多様体 (P, Π) には、ブラケットが

$$[\omega, \mu] = \mathcal{L}_{\Pi(\omega)}\mu - \iota_{\Pi(\mu)}d\omega \quad (5.2)$$

で定まる Leibniz algebroid $(\wedge^{p-1}T^*P, [,], \Pi)$ が付随する。

(2.1) は(5.2) の形に表せることに注意。

なお、ヤコビ構造が高次化された南部ヤコビ構造 [11, 25] が南部ポアソン構造と同様に定義されるが、定義の上では、ヤコビ構造が「舞台をかえたポアソン構造」であったのと同様に「舞台をかえた南部ポアソン構造」と捉えることが出来た。しかし、次数 3 以上の特殊性から、この見方がヤコビ構造同様に有効かどうかははっきりしていない。

シンプレクティック構造を一般化した概念として、マルチシンプレクティック構造 [2] がある。これは多様体上の非退化な閉 p -形式として与えられるもので、場の理論において、古典力学でのシンプレクティック構造に類似する役割を果たしている。

同様の高次への拡張ではあるものの、マルチシンプレクティック構造と南部ポアソン構造はそれぞれ場の理論、南部幾何を定式化する枠組みであり、このふたつを統一した視点からとらえるという考察はおこなわれてこなかった。しかし、南部ポアソン多様体とマルチシンプレクティック多様体では、それぞれ接バンドルと $(p-1)$ 次形式のなすバンドルの一方から他方へのグラフが定まる。このことと上の定理から、両者をもとに記述する「南部ディラック構造」が [8] で定義された。これはマルチシンプレクティック構造、南部ポアソン構造を含む概念で、 $p=2$ でディラック構造に一致する。南部ディラック構造は自身 Leibniz algebroid の構造を持ち、多様体に、各葉に閉 p -形式の入った葉層を誘導する。

なお、南部ディラック構造の定義において、ブラケットは(3.1)ではなく(3.2)の拡張が用いられる (実は(3.2)は TP 上の Leibniz 括弧積である)。

南部ディラック構造の定義から“極大性”を除いても、多様体には閉 p -形式の入った葉層が誘導される。一般に南部ポアソン多様体の直積は南部ポアソン多様体ではないが、この“極大でない南部ディラック多様体”としての構造を持っている。

6 Courant algebroid

Lie bialgebroid とは、Lie algebroid A とその双対 A^* の組で、 A^* にも Lie algebroid の構造が入り、そのコバウンダリ作用素 $d_* : A \rightarrow \wedge^2 A$ が $\Gamma(A)$ に関するコサイクル条件、すなわち

$$d_*[X, Y] = \mathcal{L}_X d_* Y - \mathcal{L}_Y d_* X$$

を満たすものである。

Liu, Weinstein および Xu [17] は Courant algebroid の概念を導入し、ディラック構造を Courant algebroid の極大等方な部分束 (ディラック部分束) として定式化した。Courant algebroid はディラック多様体 P における $TP = TP \oplus T^*P$ を抽象化したもので、もとの定義は (3.1) に基づくものであったが、(3.2) に基づくより簡潔な定義が Roytenberg [28] により与えられた。

定義 6.1. P 上ベクトル束 E が Courant algebroid であるとは、 E の各ファイバー上の対称な双線形写像 (\cdot, \cdot) と、 E の切断のなす空間 $\Gamma(E)$ 上の双線形なブラケット $[\cdot, \cdot]$, および束写像 $\rho: E \rightarrow TM$ (“anchor”) が与えられ、以下を満たしているときをいう。

- (1) $e_1, e_2, e_3 \in \Gamma(E)$ に対し $[e_1, [e_2, e_3]] = [[e_1, e_2], e_3] + [e_2, [e_1, e_3]]$,
- (2) $e_1, e_2 \in \Gamma(E)$ に対し $\rho[e_1, e_2] = [\rho(e_1), \rho(e_2)]$,
- (3) $e_1, e_2 \in \Gamma(E)$, $f \in C^\infty(M)$ に対し $[e_1, fe_2] = f[e_1, e_2] + (\rho(e_1)f)e_2$,
- (4) $e, h_1, h_2 \in \Gamma(E)$ に対し $\rho(e)(h_1, h_2) = ([e, h_1], h_2) + (h_1, [e, h_2])$,
- (5) $e \in \Gamma(E)$ に対し $[e, e] = D(e, e)$.

ただし $D: C^\infty(M) \rightarrow \Gamma(E)$ は

$$(Df, e) = \frac{1}{2}\rho(e)f \quad (6.1)$$

により与えられる写像である。

いわば、Courant algebroid は「ペアリングを備えた Leibniz algebroid」というようなものである。

同じ [17] のなかで Liu, Weinstein および Xu は、Manin triple の理論を Lie bialgebroid へと拡張した。

定理 6.2. [17] Lie bialgebroid (A, A^*) に対して $E = A \oplus A^*$ は Courant algebroid であり A, A^* はともに E のディラック部分束である。逆に Courant algebroid E のふたつのディラック部分束 L, L' の直和が E であるとき (L, L') は Lie bialgebroid である。

このほか、彼らは [18] でディラック構造と Poisson homogeneous space の対応を明らかにしている。

最近、Ševera および Weinstein [29] は、弦理論で重要な役割を担う、背景に 3-形式が存在する下でのポアソン幾何が、Courant algebroid とディラック構造を枠組みとすることで理解できることを明らかにした。すなわち、閉 3-形式 ϕ により

$$[\pi, \pi] = \left(\bigwedge^3 \pi \right) (\phi)$$

となる 2-ベクトル場 π (twisted Poisson structure) はディラック構造を定め、結果として余接バンドルはブラケット

$$[\alpha, \beta] = \mathcal{L}_{\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\pi(\beta)}\alpha - d(\pi(\alpha, \beta)) + \phi(\pi(\alpha), \pi(\beta), \cdot)$$

により Lie algebroid となる。この事実は Courant algebroid が gerbe に付随する無限小の対象であるという興味深い主張につながるものであり、非常に興味深い。

彼らとは別に、Roytenburg がやはり最近、ホモロジカルなアプローチから twisted Poisson structure を quasi-Lie bialgebroid として捉えている。しかしながら、twisted Poisson structure のこの二つの見方の間の関係は明らかではない。また、twisted Poisson structure に関連すると思われる概念としては、群作用を持つ多様体に対して、群に値を持つ 3-ベクトルによりヤコビ恒等式を変形した quasi-Poisson structure が Alekseev らによって導入されている [1]。

参考文献

- [1] Alekseev A, Kosmann-Schwarzbach Y and Meinrenken E 2000 Quasi-Poisson manifolds *preprint*
- [2] Cantrijn F, Ibort A and de León M 1999 On the geometry of multisymplectic manifolds *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* **66** 303–330
- [3] Courant T 1990 Dirac manifolds *Trans. Amer. Math. Soc.* **319** 631–661
- [4] Courant T and Weinstein A 1988 Beyond Poisson structures *Action hamiltoniennes de groupes. Troisième théorème de Lie (Lyon, 1986)* 39–49 Travaux en Cours 27 Hermann Paris
- [5] Gautheron Ph 1996 Some remarks concerning Nambu mechanics *Lett. Math. Phys.* **37** 103–116
- [6] Gotay M J, Nester J M and Hinds G 1978 Presymplectic manifolds and the Dirac-Bergmann theory of constraints *J. Math. Phys.* **19** 2388–2399
- [7] Grabowski J and Marmo G 2001 Jacobi structures revisited *J. Phys. A* **34**, no. 49 10975–10990
- [8] Hagiwara Y *Nambu-Dirac Manifolds* 2002 *J. Phys. A: Math. Gen.* **35**, 1263–1281
- [9] Ibáñez R, de León M, Marrero J C and Martín de Diego D 1997 Dynamics of generalized Poisson and Nambu-Poisson brackets *J. Math. Phys.* **38** 2332–2344

- [10] Ibáñez R, de León M, Marrero J C and Martín de Diego D 1998 Reduction of generalized Poisson and Nambu-Poisson manifolds *Rep. Math. Phys.* **42** 71–89
- [11] Ibáñez R, de León M, Marrero J C and Padrón E 1998 Nambu-Jacobi and generalized Jacobi manifolds *J. Phys. A: Math. Gen.* **31** 1267–1286
- [12] Ibáñez R, de León M, Marrero J C and Padrón E 1999 Leibniz algebroid associated with a Nambu-Poisson structure *J. Phys. A: Math. Gen.* **32** 8129–8144
- [13] Ibáñez R, de León M, Marrero J C, Núñez B and Padrón E 2001 Duality and modular class of a Nambu-Poisson structure *J. Phys. A: Math. Gen.* **34** 3623–3650
- [14] Iglesias D and Marrero J C 2001 Lie algebroid foliations and $\mathcal{E}^1(M)$ -Dirac structures *preprint*
- [15] Iglesias D and Marrero J C 2001 Generalized Lie bialgebroids and Jacobi structures *J. Geom. Phys.* **40**, no. 2 176–199
- [16] Kerbrat Y and Souici-Benhammedi Z 1993 Variétés de Jacobi et groupoïdes de contact *C. R. Acad. Sci. Paris Série 1*, **317** 81–86
- [17] Liu Z-J, Weinstein A and Xu P 1997 Manin triples for Lie bialgebroids *J. Differential Geom.* **45** 547–574
- [18] Liu Z-J, Weinstein A and Xu P 1998 Dirac structures and Poisson homogeneous spaces, *Comm. Math. Phys.* **192** 121–144
- [19] Loday J L 1992 Cyclic Homology *Grund. Math. Wissen.* **301** Springer-Verlag, Berlin xviii+454 pp. ISBN: 3-540-53339-7
- [20] Loday J L 1993 Une version non commutative des algèbres de Lie: les algèbres de Leibniz *L'Enseignement Math.* **39** 269 – 293.
- [21] Loday J L 1997 Overview on Leibniz algebras, dialgebras and their homology *Cyclic cohomology and noncommutative geometry (Warterloo, ON, 1995)* 91–102 Fields Inst. Commun. **17** Amer. Math. Soc. Providence RI
- [22] Loday J L and Pirashvili T 1993 Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and (co)-homology *Math. Annalen.* **296** 139–158
- [23] Lodder J M 1998 Leibniz cohomology for differentiable manifolds 1998 *Ann, Inst. Fourier, Grenoble* **48** 73 – 95

- [24] Lodder J M 2001 Leibniz homology, characteristic classes and K-theory *preprint*
- [25] Mikami K and Mizutani T 2001 Foliations associated with Nambu-Jacobi structures *preprint*
- [26] Nakanishi N 1998 On Nambu-Poisson manifolds *Rev. Math. Phys.* **10** 499–510
- [27] Nambu Y 1973 Generalized Hamiltonian dynamics *Phys. Rev. D* **7** 2405–2412
- [28] Roytenberg D 1999 Courant algebroids, derived brackets and even symplectic supermanifolds *PhD thesis, UC Berkeley*
- [29] Ševera P and Weinstein A Poisson geometry with a 3-form background
- [30] Takhtajan L 1994 On foundations of the generalized Nambu mechanics *Comm. Math. Phys.* **160** 295–315
- [31] Wade I 2000 Conformal Dirac structures *Lett. Math. Phys.* **53** no. 4 331–348

The Reeb component of a codimension-1 totally geodesic foliation of a Lorentzian 3-manifold

浴本 憲*

2002年7月27日 於 沖縄県青年会館

1 導入

多様体上の余次元1葉層構造で, ある完備 Riemann 計量に対して, 全測地的であるようなもの(この性質を**complete Riemannian geodesible**とよぶ)を考える. すると, 次の Blumenthal-Hebda の定理により, 構造がよく分かっている.

定理 1 (Blumenthal-Hebda [BH]) (M, g) を完備 Riemann 多様体, \mathcal{F} を M の余次元1全測地的葉層とする. 多様体 M の普遍被覆を \tilde{M} としたとき,

$$(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}) \cong (\tilde{L} \times \mathbf{R}, \{\tilde{L} \times \{t\}\}_{t \in \mathbf{R}}),$$

ここで, \tilde{L} は \mathcal{F} の勝手な葉 L の普遍被覆である.

実は, 閉多様体上の余次元1葉層構造で, ある(完備)Riemann 計量に対して全測地的であるものは Carrière と Ghys により分類されている ([CG, Gh]).

ここで, 完備 Riemann 多様体上の余次元1全測地的葉層に関する結果を引用する.

*北海道大学大学院理学研究科 研究生
e-mail: yoku@math.sci.hokudai.ac.jp

定理 2 (Carrière-Ghys [CG]) \mathcal{F} を完備 Riemann 多様体 (M, g) 上の余次元 1 全測地的葉層とする. \mathcal{F} に g に関して直交する接ベクトル全体のつくる接分布を $(T\mathcal{F})^\perp$ とすると, $(T\mathcal{F})^\perp$ を積分したものは Riemannian foliation である.

定理 3 (Oshikiri [Os1, Os2]) \mathcal{F} を完備 Riemann 多様体 (M, g) 上の余次元 1 全測地的葉層とすると, 長さが有界な Killing field は \mathcal{F} を保つ.

さて, ここで Lorentz 計量に対して全測地的であるような葉層構造を考えてみる. Lorentz 計量は Riemann 計量と違って注意すべき点があるので次節で定義をしながら問題点を述べる.

2 定義

ここでは定義を述べる.

M を連結で向き付け可能な C^∞ -多様体とする.

定義 4 非退化対称テンソル $g \in \Gamma(T^*M \otimes T^*M)$ が Lorentz 計量であるとは, g の符号が $(+, \dots, +, -)$ の時をいう. 2つ組 (M, g) を Lorentz 多様体と呼ぶ.

注意 Lorentz 計量 g に対して Levi-Civita 接続 (振れがなく, g を保つ接続) が unique に定まることが知られている. ([ON] 参照)

(M, g) を Lorentz 多様体とする.

定義 5 接ベクトル $v \in T_x M$ が空間的 (resp. 時間的, 光的) であるとは, $g(v, v) > 0$ (resp. $g(v, v) < 0, g(v, v) = 0$) が成り立つときをいう. 部分空間 $E \subset T_x M$ が空間的 (resp. 時間的, 光的) であるとは, $g|_E$ の符号が $(+, \dots, +)$ (resp. $(+, \dots, +, -), (+, \dots, +, 0)$) となるときをいう.

定義 6 部分多様体 $N \subset M$ が空間的 (resp. 時間的, 光的) であるとは, すべての $x \in N$ に対して接空間 $T_x N$ が空間的 (resp. 時間的, 光的) であるときをいう.

定義 7 Lorentz 計量 g が完備 (resp. 光的完備) であるとは, 任意の $x \in M$ と任意の $v \in T_x M$ (resp. 任意の $x \in M$ と任意の光的ベクトル $v \in T_x M$) を初期条件とする測地線の affine parameter を \mathbf{R} 全体で定義できるときをいう.

注意 多様体 M が閉でも, Lorentz 計量 g は完備とは限らない.

定義 8 葉層構造 \mathcal{F} が全測地的葉層であるとは, 任意の葉 $L \in \mathcal{F}$ が全測地的部分多様体 (すなわち, L の勝手な接ベクトルを初期条件とする測地線は L に含まれる) のときをいう.

命題 9 全測地的葉層 \mathcal{F} の葉 L は, 空間的, 時間的, または 光的部分多様体のうちのどれかである.

この命題により, 全測地的葉層の葉を空間的葉, 時間的葉, 光的葉と呼んでも差し支えはないことになる.

Lorentz 計量は多様体が閉であっても完備であるとは限らないので, 葉層構造の geodesibility に関しては, 完備性に配慮して次のように定義する.

定義 10 葉層構造 \mathcal{F} が Lorentzian geodesible とは, Lorentz 計量が存在して \mathcal{F} がそれに関して全測地的であるときをいう. さらに, 完備 Lorentz 計量を選べるときは complete Lorentzian geodesible という.

3 Lorentz 多様体上の全測地的葉層

Lorentz 多様体上の余次元 1 全測地的葉層については, 次のようなことが知られている.

定理 11 (Zeghib [Z]) 次のような余次元 1 葉層構造 \mathcal{F} には Lorentz 計量を与えて光的な全測地的葉層にできる:

- (1) 1次元正規部分群を持つような Lie 群による余次元 1 の軌道を持つ局所自由作用から定まる葉層構造 \mathcal{F} ,
- (2) Riemann 多様体 (M, g) 上の余次元 1 葉層構造を \mathcal{L} とし, $f: M \rightarrow M$ を \mathcal{L} と $g|_{T\mathcal{L}}$ を保つ微分同相写像とし, 多様体 N を

$$N = M \times \mathbf{R} / (x, t + n) \sim (f^n(x), t)$$

で定め,

$$\mathcal{F} = \{L \times \mathbf{R}\}_{L \in \mathcal{L}} / \sim$$

で定まる葉層構造 \mathcal{F} .

これらの葉層構造 \mathcal{F} が光的な全測地的葉層になるように Lorentz 計量を具体的に構成して証明がなされるが、構成された計量が完備であるかどうかはよく分からない。

(M, g) を 2 次元 Lorentz 多様体とする。 M 上の光的なベクトル全体の集合は 2 つの直線束の和集合として書けるので、葉が光的な部分多様体となっているような 2 つの葉層構造が定まる。 これら 2 つだけが光的な全測地的葉層である。 これらを M の標準的な光的な全測地的葉層と呼ぶ。 次のことが知られている。

定理 12 (Carrière-Rozoy [CR]) 光的完備な Lorentz 2 次元トーラス上の標準的な光的な全測地的葉層たちは C^0 -線形化可能である。

これらの結果は光的な全測地的葉層に関してであるので、Lorentz 多様体上の全測地的葉層について考えてみる。 Lorentz 多様体上の全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉を同時に持つものは知られていないように思われる。 全測地的葉層でこの 3 種類の葉を同時に含むようなものはあるのでしょうか？ 具体的には次のような問題が考えられる。

問題 13 完備な閉 Lorentz 多様体上の余次元 1 の全測地的葉層で空間的、時間的、光的な葉のうち、2 種類以上を同時に持つようなものは存在するか？

注意 この問題に、完備、閉、余次元 1、という条件が何故ついているのかは 4 節を参照。

問題 14 基本群が有限群である閉多様体上の余次元 1 の Lorentzian geodesible foliation の例はあるか？

4 一般論と例

ここでは、与えられた葉層構造が全測地的葉層になるための必要十分条件と簡単な一般論を見たのち、いくつかの例を見る。

擬 Riemann 多様体上の葉層構造が全測地的であるかどうかを判定するのに次の命題は有用である。

命題 15 ([Y]) (M, g) を擬 Riemann 多様体とし、 \mathcal{F} を余次元 k の葉層構造とする。 このとき、「 \mathcal{F} が全測地的である」ことと「 $(\mathcal{L}_X g)(Y, Z) = 0$ が任意の $X \in \Gamma((T\mathcal{F})^\perp)$ と任意の $Y, Z \in \Gamma(T\mathcal{F})$ に対して成り立つ」こ

とは同値である。ここで \mathcal{L}_X は X による Lie 微分を表し, $(T\mathcal{F})^\perp$ は $T\mathcal{F}$ の g に関する直交方向のつくる接分布を表す。

おまけに, \mathcal{F} を全測地的葉層, $X \in \Gamma((T\mathcal{F})^\perp)$ を局所 1 パラメータ局所変換群が定義できるような“局所的”な foliation-preserving なベクトル場とすると, X の生成する局所 1 パラメータ局所変換群は plaque たちに導かれた計量を保つ。

注意 ベクトル場 X が foliation-preserving とは, 葉層構造 \mathcal{F} に接する勝手なベクトル場 Y に対して $[X, Y] \in \Gamma(T\mathcal{F})$ となることを意味する。

命題 16 ([Y]) Lorentz 多様体 (M, g) 上の全測地的葉層を \mathcal{F} とする。空間的な葉全体の和集合を \mathbf{S} , 時間的な葉全体の和集合を \mathbf{T} , 光的な葉全体の和集合を \mathbf{L} とおくと, $M = \mathbf{S} \sqcup \mathbf{T} \sqcup \mathbf{L}$ (交わらない和) であり, \mathbf{S} と \mathbf{T} は開集合で, \mathbf{L} は閉集合である (この分解を M の \mathcal{F} による STL-分解とよぶ)。

命題 15 を使うと以下にあげる例が全測地的葉層になっていることが分かる。例 17 は 3 種類の葉を含んでいる例である。例 18 は Reeb 成分を含んでいる例である。例 19 は完備閉 Lorentz 多様体上の余次元 2 全測地的葉層で 3 種類の葉を含んでいる例である。

例 17 ([Y], 光的完備でなく, 全測地的葉層が 3 種類の葉を含む例)

2 次元トーラス $\mathbb{T}^2 = \mathbb{R}^2/2\pi\mathbb{Z}^2$ を考える。 (x, y) で \mathbb{R}^2 の座標を表すとし, \mathbb{R}^2 上の Lorentz 計量 g と葉層構造 \mathcal{F} を

$$g = \frac{1}{2}dx^2 + (dx \otimes dy + dy \otimes dx) - \cos x dy^2,$$

$$T\mathcal{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y} + \cos x \frac{\partial}{\partial x} \right\}$$

で定める。すると, g と \mathcal{F} は \mathbb{Z}^2 作用で不変なので, \mathbb{T}^2 上に Lorentz 計量と葉層構造が導かれる。この Lorentz 計量は光的完備でない。

$$g \left(\frac{\partial}{\partial y} + \cos x \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} + \cos x \frac{\partial}{\partial x} \right) = \left(\frac{1}{2} \cos x + 1 \right) \cos x$$

なので, この全測地的葉層は 3 種類の葉を含む。

例 18 ([CR], 光的完備でなく, Reeb 成分を持つ例)
Lorentz 多様体

$$\left(\mathbf{R}^2 - \{0\}, \frac{1}{x^2 + y^2} (dx \otimes dy + dy \otimes dx) \right)$$

を考える. この計量は

$$\gamma : (x, y) \rightarrow (2x, 2y)$$

で不変である. 光的な全測地的葉層 $T\mathcal{F} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \right\}$ も不変である. よって, $\mathbf{R}^2 - \{0\} / \gamma \cong \mathbb{T}^2$ とその上の光的な全測地的葉層を得る. この葉層構造は Reeb 成分を持つ.

例 19 (本質的には [Y], 完備で 3 種類の葉をもつ余次元 2 の例)
 \mathbf{R}^3 を考え, Lorentz 計量を

$$\tilde{g} = dx \otimes dx + dy \otimes dy - dz \otimes dz$$

とし, ベクトル場

$$\cos x \frac{\partial}{\partial y} + \sin x \frac{\partial}{\partial z}$$

の定める葉層構造を $\tilde{\mathcal{F}}$ とする. この葉層は全測地的であり, 3 種類の葉をもつ. さらに, これらは $2\pi\mathbf{Z}^3$ -作用で普遍なので, 3 次元 Lorentz トーラス $\mathbf{T}^3 = \mathbf{R}^3 / 2\pi\mathbf{Z}^3$ とその上の葉層構造 \mathcal{F} を定める.

注意 これらの例から分かるように問題 13 では, 完備, 余次元 1, という条件は必要である.

5 \mathbb{T}^2 での はなし など

葉が何種類出てくるかという問題に対する部分的な解答として, 光的完備な Lorentz 2 次元 トーラス に対して 次の定理を得た.

定理 20 ([Y]) 光的完備な Lorentz 2 次元 トーラス 上の余次元 1 の全測地的葉層で, 空間的, 時間的, 光的な葉のうち, 2 種類以上を持つようなものは存在しない.

この定理の系として次を得た.

系 21 ([Y]) 光的完備な Lorentz 2次元トーラス上の余次元1の全測地的葉層で, Reeb 成分を持つようなものは存在しない.

系 22 ([Y2]) (M, g) を Lorentz 多様体とし, 時間的全測地的部分多様体 $N \subset M$ で次の2条件

- (1) N は2次元トーラスに微分同相である.
- (2) $(N, g|_N)$ 上には空間的, 時間的, 光的な葉のうち2種類以上を持つ全測地的葉層が存在する.

を満たすものが存在するとする. すると, M は光的完備でない (lightlike incomplete).

6 3次元でのほなし

$L(p, q)$ に次のような全測地的葉層の例を構成した. ただし, 計量は完備ではない. $V_1, V_2 = D^2 \times S^1$ とし, $f: \partial V_2 \rightarrow \partial V_1$ を $L(p, q)$ を定義するときの微分同相で “きれい” なものとする.

$$\begin{array}{rcll}
 \partial V_2 & \subset & V_2 & \text{Reeb 葉層} \quad \text{境界は光的, 中の葉は空間的} \\
 f \downarrow & & & \\
 \partial V_1 \times 1 & \subset & \partial V_1 \times I & \\
 & & \parallel & \{\partial V_1 \times \{*\}\} \quad \text{すべての葉は光的} \\
 \partial V_1 \times 0 & \subset & \partial V_1 \times I & \\
 \text{id} \uparrow & & & \\
 \partial V_1 & \subset & V_1 & \text{Reeb 葉層} \quad V_2 \text{と同じ}
 \end{array}$$

この例より, 次を得た.

定理 23 ([Y2]) 種数1の Heegaard 分解を持つ3次元閉多様体上に余次元1の Lorentzian geodesible な葉層構造が存在する.

上の例では, Reeb 成分の境界は光的な葉であり, その内部の葉は空間的であった. そこで, 3次元 Lorentz 多様体の全測地的葉層の Reeb 成分を考えてみる.

最初に, 必要な命題を述べる.

命題 24 ([Y2]) (M, g) をコンパクトな Lorentz 多様体とする. \mathcal{F} を空間的な葉からなる全測地的葉層とする. さらに, \mathcal{F} が ∂M に接していて,

$(T\mathcal{F})^\perp$ が完全積分可能ならば, $(T\mathcal{F})^\perp$ は Ehresmann connection for \mathcal{F} である.

注意 \mathcal{F} を多様体 M の葉層構造とする. 分布 \mathcal{D} が Ehresmann connection for \mathcal{F} であるとは, 次を満たすときをいう (この定義は [BH2] による):

- (1) $TM = T\mathcal{F} \oplus \mathcal{D}$;
- (2) 勝手な \mathcal{F} -曲線 $\tau: I \rightarrow M$ と勝手な \mathcal{D} -曲線 $\sigma: I \rightarrow M$ で $\sigma(0) = \tau(0)$ であるものに対して, 写像 $\delta: I \times I \rightarrow M$ で, 各 s に対して $\delta(\cdot, s)$ は \mathcal{D} -曲線で $\delta(\cdot, 0) = \sigma(\cdot)$, 各 t にたいして, $\delta(t, \cdot)$ は \mathcal{F} -曲線で $\delta(0, \cdot) = \tau(\cdot)$ を満たすものが存在する.

命題 25 ([Y2]) M を orientable な 3次元多様体とし, g を time-orientable な Lorentz 計量とし, \mathcal{F} を orientable な余次元 1 全測地的葉層で葉はすべて時間的とする. 分布 $(T\mathcal{F})^\perp$ の定める葉層構造を \mathcal{H} とする. このとき, 次の (1), (2) が成り立つ.

- (1) $T\mathcal{F}$ の光的なベクトル全体は \mathcal{F} の 2つの subfoliations $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1$ を定める.
- (2) 分布 $T\mathcal{H} \oplus T\mathcal{L}_i (i = 0, 1)$ は完全積分可能である. 従って, $T\mathcal{H} \oplus T\mathcal{L}_i$ の定める葉層構造を \mathcal{H}_i と表すと $(\mathcal{F}, \mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1)$ は M の total foliation である (これを total foliation associated with \mathcal{F} とよぶ).

命題 26 ([Z]) L を Lorentz 多様体の光的な全測地的部分多様体とし, \mathcal{N} を L の光的なベクトル全体から定まる 1次元葉層構造とする. すると, \mathcal{N} は L 上の 1次元 Riemannian foliation である.

注意 上で述べた Riemannian foliation は, L が開多様体のとき, 一般には complete Riemannian foliation (bundle-like metric を完備に選べる場合をいう) ではない. L が多様体として閉のときは, 上の命題は有用である (閉多様体上の Riemann 計量は完備だから).

4節で述べた一般論と上で述べた 3つの命題を使って次を得た.

定理 27 (M, g) を 3次元 Lorentz 多様体とし, \mathcal{F} を余次元 1 全測地的葉層とする. $(D^2 \times S^1, \mathcal{F}_R)$ を \mathcal{F} の Reeb 成分とすると, 境界の葉は光的であり, 内部の葉はすべて空間的である.

証明の概略 有限被覆を考えることにより, M は orientable, g は time-orientable, \mathcal{F} は orientable としてよい. M の \mathcal{F} による STL-分解の性質 (命題 16) より, 次の 3 つの場合が起こる:

$L \cap (D^2 \times S^1) = \emptyset$, または, $\supsetneq \partial(D^2 \times S^1)$, または, $= \partial(D^2 \times S^1)$.

この場合分けから, 次の 5 つの場合分けを得る:

- (1) \mathcal{F}_R のすべての葉は空間的;
- (2) \mathcal{F}_R のすべての葉は時間的;
- (3) 境界 $\partial(D^2 \times S^1)$ と内部の葉の少なくとも 1 枚が光的;
- (4) 境界 $\partial(D^2 \times S^1)$ は光的で内部の葉はすべて時間的;
- (5) 境界 $\partial(D^2 \times S^1)$ は光的で内部の葉はすべて空間的.

これらのうち, (1) から (4) の場合は起こらないことを, 背理法によって, この節で述べた命題などから示すことが出来る. 従って, (5) の場合だけが起こる. \square

参考文献

- [BH] R. A. Blumenthal and J. J. Hebda, *De Rham decomposition theorems for foliated manifolds*, Ann. Inst. Fourier, 33(1983), 225-235
- [BH2] R. A. Blumenthal and J. J. Hebda, *Ehresmann connections for foliations*, Indiana Math. J., 33(1984), 597-611
- [CG] Y. Carrière and E. Ghys, *Feuilletages totalement géodésiques*, An. Acad. brasil. Ciênc. 53(1981), 427-432
- [CR] Y. Carrière and L. Rozoy, *Complétude des Métriques Lorentziennes de \mathbb{T}^2 et Difféomorphismes du Cercle*, Bol. Soc. Bras. Mat. 25(1994), 223-235
- [Gh] E. Ghys, *Classification des feuilletages totalement géodésiques de codimension un*, Comm. Math. Helv. 58(1983), 543-572
- [ON] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic press 1983
- [Os1] G. Oshikiri, *Totally geodesic foliations and Killing fields*, Tôhoku Math. J. 35(1983), 387-392

- [Os2] G. Oshikiri, *Totally geodesic foliations and Killing fields, II*, Tôhoku Math. J. 38(1986), 351-356
- [Y] K. Yokumoto, *Mutual exclusiveness among spacelike, timelike, and lightlike leaves in totally geodesic foliations of lightlike complete Lorentzian two-dimensional tori*, to appear in Hokkaido Math. J.
- [Y2] K. Yokumoto, *Examples of Lorentzian geodesible foliations of closed 3-manifolds having Heegaard splittings of genus one*, preprint
- [Z] A. Zeghib, *Geodesic foliations in Lorentz 3-manifolds*, Comm. Math. Helv. 74(1999), 1-21

