第48回

トポロジーシンポジウム

講　演　集

2001年7月

於　秋田市文化会館

平成13年度科学研究費　基盤研究(A)
課題番号　12304003

序

この講演集は2001年7月18日から21日の間，秋田市文化会館において開催される第48回トポロジーシンポジウムに際し，あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである．

その目的は，参加者が各講演をより良く理解し，活発な研究討論を行うための一助とするとともに，記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある．

なお，この講演集は

平成13年度科学研究費 基盤研究(A)
研究代表者　坪井　俊（東京大学大学院数理科学研究科）
研究題目　　位相幾何学の総合的研究
課題番号　　12304003

により作成されたものである．

世話人：　島川　和久（岡山大学理学部）
坪井　俊　（東京大学大学院数理科学研究科）
小林　真人（秋田大学工学資源学部）

第４８回トポロジーシンポジウム

７月１８日（水）

１４：００－１５：００　山本 亮介（大阪大学大学院理学研究科）
Fiber surfaces and plumbing Hopf bands

１５：２０－１６：２０　今藤 紀子（奈良女子大学大学院人間文化研究科）
3-dimensional drawing of Heegaard diagrams with 3-connected Whitehead graph

７月１９日（木）

９：４０－１０：４０　中村 拓司（神戸大学大学院自然科学研究科）
Positive diagrams of positive knots

１１：００－１２：００　倉蘭 一二（広島大学大学院理学研究科）
局所係数コボルディスム群と多様体論への応用

１３：４０－１４：４０　内田 伏一（山形大学理学部）
非コンパクト半単純リイ群の球面への作用で，極大コンパクト部分群への制限作用が余次元１の軌道を持つものについて

１５：００－１６：００　志賀 博雄（琉球大学理学部）
有理ホモトピー型のモジュライ問題

１６：２０－１７：２０　栗林 勝彦（岡山理科大学理学部）
加群微分子による Eilenberg-Moore スペクトル系列の解析
（随伴バンドルのコホモロジカル分解について）

７月２０日（金）

９：４０－１０：４０　森吉 仁志（慶應義塾大学理工学部）
解析的 K 理論と指数定理

１１：００－１２：００　Lazlo Feher (Renyi Institute (Hungary math. Acad.))
Calculation of Thom polynomials

１３：４０－１４：４０　泉　修蔵（近畿大学理工学部）
テイラー展開を決定する小さな集合

１５：００－１６：００　福井 和彦（京都産業大学理学部）
同相群の構造について

１６：２０－１７：２０　目時 伸哉（東京大学大学院数理科学研究科）
On the cohomology of Lie algebras of volume preserving formal vector fields

７月２１日（土）

９：４０－１０：４０　小山　晃（大阪教育大学）
Compact ANR のコホモロジー次元について

１１：００－１２：００　入江 幸右衛門（大阪女子大学理学部）
幽霊写像

Fiber surfaces and plumbing Hopf bands

山本 亮介 (大阪大学大学院理学研究科 研究生)

3 次元球面 S^3 内の fiber surface が持つ幾何的な性質の研究において、これまで様々なアプローチの方法が開発されてきました。その中でも、ある fiber surface に Hopf band (とても単純な、ゆえに基本的な fiber surface) を plumbing と呼ばれる方法で張り付けて、新たな fiber surface を得るという操作が、非常に重要な役割を果たしてきました。

本稿は、Hopf band を plumbing するという操作が、fiber surface のいくつかの研究手法において、色々な姿を見せる様子についてまとめたものです。

1 Plumbing、Stallings twist

定義 1.1 (fibered link, fiber surface). 3 次元球面 S^3 内の link L が *fibered link* であるとは、ある fibration $f : E(L) \to S^1$ で、L の meridian curve を S^1 に移すものが存在するときをいう。ただし、$E(L) = \mathrm{cl}(S^3 - N(L))$ である ($N(L)$ は、L の S^3 における regular neighborhood)。この fibration における fiber は、L の Seifert surface (つまり、L が S^3 内に張る曲面) であり、L の *fiber surface* と呼ぶ。

定義より、fibered link L の fiber surface F によって、$E(L)$ を切り開いてできる多様体 $E' = \mathrm{cl}(S^3 - N(L))$ は、$F \times [-1, 1]$ と同相になる。逆に言うと、$F \times [-1, 1]$ の $F \times \{-1\}$ と $F \times \{1\}$ を F の境界を動かさない自己同相写像 $h : F \to F$ で、貼り合わせたものが $E(L)$ と同相である。すなわち、

$$E(L) \cong F \times [-1, 1] \Big/ (x, -1) \sim (h(x), 1)。$$

この h を F の monodromy map と呼ぶ。

例 1.2 (S^3 内の fibered knot (link)).

1. 自明な結び目は、最も単純な fibered knot である。その fiber surface は、disk。monodromy map は、identity。

2. 次に単純なのは、Hopf link。fiber surface は、full-twist を 1 回施した annulas で、Hopf band と呼ばれる。monodromy map は、core curve に沿っての Dehn twist (Fig. 1)。

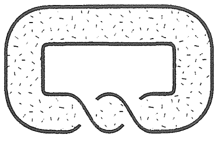


Fig. 1: right-handed Hopf band.

3. torus link は、全て fibered link である。

Fact 1.3. S^3 内の fibered link L の fiber surface を F とする。このとき、F は L の最小種数の Seifert surface である。また、L の任意の 2 つの fiber surface は、境界を止めた S^3 内の isotopy で移り合う (つまり、この意味で、L の fiber surface はただ 1 つしかない)。

J. Stallings [4] は、S^3 内の fiber surface をいくつも作り出す方法として、以下で定義する 2 つの操作を導入した。

定義 1.4 (plumbing). F_1,F_2 を S^3 内の 2 つの Seifert surface とする。また、a_i は、F_i 上の proper arc で、その F_i における近傍を D_i とする ($i = 1, 2$)。

このとき、以下の条件を満たすように、D_1 と D_2 を同一視することにより、新しい Seifert surface F を作り出す操作を曲面 F_1 と F_2 の *plumbing* と呼ぶ。

(条件 1) D_1 と D_2 は、a_1 と a_2 が一点で直交するように同一視する。

(条件 2) S^3 内の 3-ball B で、$B \cap F = F_1$, $\partial B \cap F = D_1$ となるものがとれる。

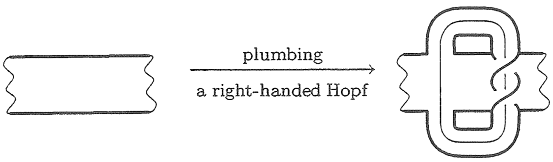


Fig. 2.

定義 1.5 (Stallings twist). S^3 内の fiber surface F 上の simple closed curve c で、以下の条件を満たすものとする。

(条件 1) c は、S^3 内の trivial knot。

(条件 2) $\mathrm{lk}(c, c^+) = \delta_1 - \delta_2$。

ただし、c^+ は、c を F の法線ベクトルの方向に浮かせて得られる、c と parallel な curve。また、δ_1, δ_2 は、± 1。(しがって、$\mathrm{lk}(c, c^+)$ は、$-2, 0, 2$ のいづれか)

このとき N として、c の F における正則近傍を F の法線ベクトルの方向へ厚みをつけて得られる solid torus とする。この N に対して、δ_1 を係数とする Dehn surgery を施す。つまり、S^3 から N を抜き取って、もう一度 N の meridian が meridian $+\ c^+$ と貼り合うように埋め直す (Fig. 3)。

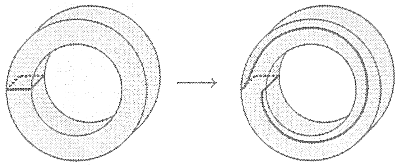


Fig. 3.

この surgery によって得られる多様体は、c が trivial knot であることと、surgery の係数が ± 1 であることから、再び S^3 であり、F は新たな fiber surface F' へと変形する。この操作を c に沿っての *Stallings twist* と呼ぶ。

Remark 1.6. (1) F が F_1 と F_2 の plumbing のとき、F の monodromy map h は、

$$h = h'_1 \circ h'_2。$$

ただし、h_i を F_i の monodromy map として、$h'_i : F \to F$ は、

$$h'_i = \begin{cases} h_i & (F_i \text{ に制限したとき}) \\ identity & (\text{その他}) \end{cases}$$

である $(i = 1, 2)$。

特に、F が fiber surface F' と positive Hopf band H との plumbing であるときは、F の monodromy map h は、

$$h = h' \circ D(c)$$

である。ただし、h' は、F' の monodromy で、$F - F'$ では identity。$D(c)$ は、H の core curve c に沿っての right-handed Dehn twist を表す。(H が negative Hopf band のときは、$h = h' \circ D^{-1}(c)$。)

(2) F 上の simple closed curve c に沿っての Stallings twist によって、F' を得たとするとき、F' の monodromy map h' は、

$$h' = h \circ D^{\delta_1}(c)$$

である。ただし h は、元々の F の monodromy map。

これら 2 つの操作に関して、J. Harer [2] により、次の定理が示されている。

定理 1.7. S^3 内の任意の fiber surface は、disk に以下の 3 つの操作を何回か施すことによって得られる。

1. Hopf band を plumbing する。
2. Hopf band を deplumbing する。(1. の逆操作)
3. Stallings twist を施す。

さらに彼は、同じ論文で次の問題を提出した。

問題 1.8. 上の定理において、Stallings twist は必要か? つまり、S^3 内の任意の fiber surface は、disk に Hopf band の plumbing または deplumbing を何回か施すことによって得られるか?

定理 1.7 によって、Hopf band の plumbing という操作が、fiber surface の幾何的な構造を表現するうえで、基本的な道具になりうると考えられる。そしてもちろん、Harer の問題が肯定的に解決すれば、さらに重要なものとなる。(筆者は最近、この問題が E. Giroux によって解かれたということを聞いたが、その論文はまだ公表されておらず、詳細は未確認である。ただ、少し聞きかじったことについて、本稿の最後で述べる。)

2 Product decomposition と plumbing Hopf band

S^3 内の fiber surface や、fibered link の補空間の幾何的な構造の研究は、D. Gabai によって導入された *sutured manifold* の理論によって大きく進んだ。

この章では、sutured manifold 理論の中心的役割を担う product decomposition と呼ばれる操作と、Hopf band の plumbing との関係について述べる。

定義 2.1 (fiber surface から得られる sutured manifold). F を S^3 内の fiber surface とする。このとき、$N = F\times[-1,1]$ とすると、N は S^3 内の handlebody であり、∂N には、annulus $\partial F\times[-1,1]$ が乗っている。この annulus の core $\delta = \partial F\times\{0\}$ を *suture* と呼び、多様体の対 (N,δ) を F より得られる *sutured manifold* と呼ぶ。また、多様体の対 $(M,\gamma) = (\mathrm{cl}(\mathrm{S}^3-\mathrm{N}),\delta)$ を F の *complementaly sutured manifold* と呼ぶ。以下で、$F\times\{-1\}$ を F_-、$F\times\{1\}$ を F_+ と書くことにする。

定義 2.2 (product disk, product decomposition). fiber surface F の complementaly sutured manifold (M,γ) に proper に埋め込まれた disk D で、∂D と γ がちょうど2点で transverse に交わるとき、D を product disk と呼ぶ。また、$\partial D\cap F_-$, $\partial D\cap F_+$ をそれぞれ、$\partial_- D$, $\partial_+ D$ と表すことにする。

(M,γ) をその product disk D で切り開いて、切断された suture を切口の 2 つの disk 上でそれぞれ自然につなげて、新しい sutured manifold を得る操作を D に沿っての product decomposition という (Fig. 4)。また、これを簡単のために、F の product decomposition と言ったりもする。

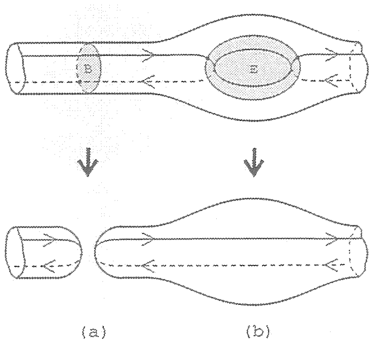


Fig. 4.

Gabai によって、次の定理が示されている [1]。

定理 2.3. S^3 内の Seifert surface F が fiber surface であるための必要十分条件は、F の complementaly sutured manifold が、つぎつぎと product decomposition を施していくことにより、いくつかの 3-ball で、各 ball は表面にただ1つのループである suture を持つという状態まで分解されることである。

fiber surface F のある product disk D について、$\partial_+ D$ を $[0,1]$ の構造に沿って F 上に射影することにより、F 上の proper arc d_+ を得るとする。d_- も同様に定義する。すると、D を F 上の2本の proper arc d_+, d_- によって特徴づけることができる。(2つの arc の端点は共通で、内部どうしは一般には何度も交わる。また、F の monodromy map を h すると、$d_+ = h(d_-)$ である。)

命題 2.4. Seifert surface F から Hopf band を deplumbing できるならば、F は以下の条件を満たす product disk D を持つ。また、逆も成り立つ。

(条件) d_+ の近傍での d_- の様子を見ると、Fig. 5 (a) のように、d_+ に対して、d_- が異なる方向に延びてゆき、d_+ と d_- は、端点以外では共有点を持たない。

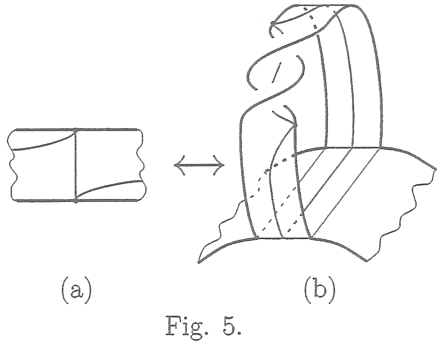


Fig. 5.

さらに、F の complemantaly sutured manifold をこの D に沿って product decompose して得られる sutured manifold は、F から対応する Hopf band を deplumb して得られる曲面 F' の complementaly sutured manifold に同相である。

以上で述べた概念を使って、筆者は Harer の問題の部分的な解答を得ている。

定理 2.5 ([6]). 次の性質を満たす Stallings twist は、Hopf band の plumbing と deplumbing を 1 回ずつ施すことによって実現される。

(性質) c を Stallings twist を施す fiber surface F 上の simple closed curve とすると、$\mathrm{lk}(c, c^{+}) = 0$ であり、c の張る disk D と F との交わりを 1 本の arc にできる。

略証. F 上で、上の性質をもつ Stallings twist を行なえることと、F が以下の条件を満たす product disk E を持つことが同値であることが示せる。

(条件) E の境界の F への射影 e_{+} と e_{-} が、Fig. 6 のように、e_{+} に対して、e_{-} が同じ方向に延びており、e_{+} と e_{-} は、端点以外では、共有点を持たない。

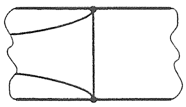


Fig. 6.

また、この Stallings twist によって、F は e_{+} のところで full twist されることを注意しておく。

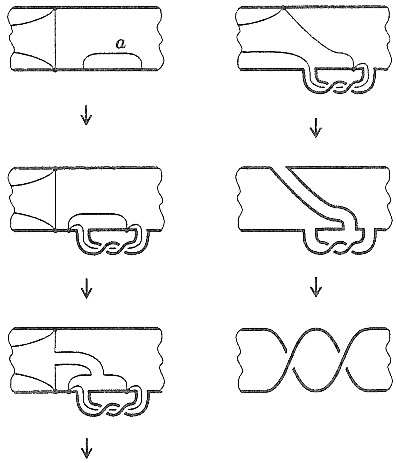


Fig. 7.

まず、e_{+} の近くで、e_{-} のない方に、left handed Hopf band を Fig. 7 のように arc a に沿って plumbing する。この Hopf band に対応した product disk と E を

ハーフパイプで合成して、新しい disk D を得る。D は、∂F と 4 点で交わっているが、そのうち 2 つはキャンセルできるので、D は、product disk となる。さらに、D は、Hopf band の存在を示す product disk である。そこで、対応する Hopf band を deplumb する。これは、Fig. 7 の proper arc d_+ で F を cut することと同じである。得られた surface を整形すると、F を e_+ のところで full-twist したものになっていることが分かる。 □

3 Markov move と Hopf band の plumbing

この章では、J. Montesinos と H. Morton [3] によって完成された、braid から fiber surface を構成する方法について述べ、ここで Hopf band の plumbing がどのように解釈され得るか見ていく。

定義 3.1 (simple cover). F を S^3 内の fiber surface、D を disk とする。写像 $\pi : F \to D$ が d-sheeted simple cover であるとは、D 上に branch set Q があり、D 上の点 x の D における近傍 U_x において、以下の条件が成り立つときをいう。

(1) $x \notin Q$ のときは、$\pi|_{\pi^{-1}(U_x)}$ は trivial d-sheeted cover であり、

(2) $x \in Q$ のときは、$\pi^{-1}(U_x)$ は $d-1$ 個の disk で、そのうちの 1 つで、U_x に x で branch する double cover として射影されている disk を除けば、それぞれ U_x に trivial に射影されている。

ほぼ同様にして、閉 3 次元多様体 M, N の間の d-sheeted simple cover も定義される。すなわち、写像 $\pi : M \to N$ が $C \subset N$ で branch する d-sheeted simple cover であるとは、N の点 x の N における近傍 B_x において、以下の条件が成り立つときをいう。

(1) $x \notin C$ のときは、$\pi|_{\pi^{-1}(B_x)}$ は trivial d-sheeted cover であり、

(2) $x \in C$ のときは、$\pi^{-1}(B_x)$ は $d-1$ 個の 3-ball で、そのうちの 1 つで、B_x に $B_x \cap C$ で branch する double cover として射影されている ball を除けば、それぞれ B_x に trivial に射影されている。

例 3.2. Fig. 8 は、4-sheeted simple cover $\pi : F \to D$ の一例を図示したものである。

D 上の各 branch point p_i と ∂D とを結ぶ arc a_i で D をカットしたものを D' とする。この D' のコピーを 4 枚用意して、各 a_i の切口 4 つのうち 2 つを適切に貼り合わせ、残り 2 つは元の通り貼り合わせることにより、F が得られている。

次の定理により、S^3 内の fiber surface を同じく S^3 内の closed braid から、ある simple cover π を通して構成することができる。

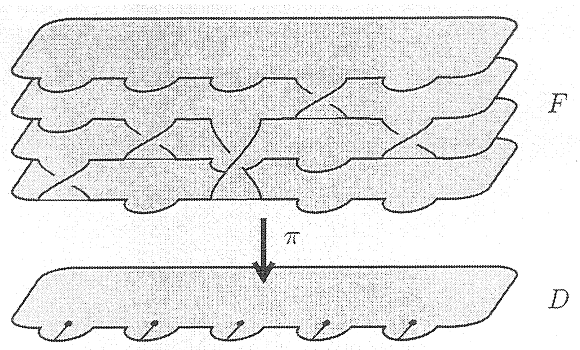


Fig. 8.

定理 3.3 ([3]). S^3 内の任意の fibered link L に対して、S^3 内のある closed braid $\hat{\beta}$ と、$\hat{\beta}$ で分岐するある simple cover $\pi : S^3 \to S^3$ がとれて、

$$L = \pi^{-1}(L_\beta)$$

である。ただし、L_β は $\hat{\beta}$ の軸とする。

証明のスケッチ. まず、L の fiber surface F から disk D への simple cover π を一つ選ぶと、F の monodromy map h を (必要なら isotopy の範囲で取り替えることによって) π によって h が cover する D 上の自己同相写像 β (β は、π の branch set Q を Q に移す) が存在することが示される。β は S^3 内の braid に自然に同一視できるので、その braid も β と書くことにする。このとき、π を自然に、$\hat{\beta}$ で branch する S^3 から S^3 への simple cover に拡張できることが分かり、定理が示される。 □

この定理 3.3 による fiber surface と closed braid との対応において、Hopf band の plumbing と Markov move が対応する。すなわち、

定理 3.4. simple cover $\pi : S^3 \to S^3$ を固定する。この π を通して、braid β から fiber surface F が構成されるとき、β に Markov move を 1 回施して得られる braid β' から構成される fiber surface F' は、F に Hopf band を 1 つ plumbing または deplumbing して得られる。

これにより、Harer の問題が次のように言い換えられる。

問題 1.8 (言い換え). S^3 内の全ての fiber surface は、unlink で branch する simple cover によって構成できるか?

Appendix. Contact structure と open book decomposition

閉 3 次元多様 M 上の contact structure と M 上の open book decomposition との対応で、同じ open book decomposition に対応する 2 つの contact structure は isotopic であるようなものがあって、次の定理が示された (そうである)。

定理 4.1 (E. Giroux). *M の全ての contact structure には、対応する open book decomposition が幾つか存在し、しかも、それらは right-handed Hopf band の plumbing と deplumbing 何回かで移り合う。*

そして、この定理の系として Harer の問題が肯定的に示される (そうだ)。
(S^3 内の 2 つの fiber surface に対応する contact structure が isotopic でなければ、一方の fiber surface に left-handed Hopf band の plumbing と depluming を何回か施して、contact structure が isotopic であるようにできるようだ。)
contact structure と open book decomposition の対応については、鳥巣氏による研究がある [5]。
おそらく以上の証明によっては、Hopf band の plumbing と deplumbing の操作の列が具体的に得られる訳ではないであろうから、定理 2.5 のような研究にも (多少弱まってはいても) まだ価値はあると考えている。特に、定理 2.5 の (性質) 中の"D と F との交わり" が 2 本の arc までしか落ちないときに、Hopf band の plumbing と deplumbing をどのように施していけばいいのか、Hopf band は幾つ plumbing する必要があるのか、等の問題に非常に興味がある。

参考文献

[1] David Gabai, *Detecting fibred links in S^3*, Comment. Math. Helv. **61** (1986), no. 4, 519–555.

[2] John Harer, *How to construct all fibered knots and links*, Topology **21** (1982), no. 3, 263–280.

[3] José M. Montesinos-Amilibia and H. R. Morton, *Fibred links from closed braids*, Proc. London Math. Soc. (3) **62** (1991), no. 1, 167–201.

[4] John Stallings, *Constructions of fibred knots and links*, Algebraic and geometric topology (Proc. Sympos. Pure Math., Stanford Univ., Stanford, Calif., 1976), Part 2 (Providence, R.I.), Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1978, pp. 55–60.

[5] Ichiro Torisu, *Convex contact structures and fibered links in 3-manifolds*, Internat. Math. Res. Notices (2000), no. 9, 441–454.

[6] Ryosuke Yamamoto, *Stallings twist and plumbing Hopf band*, preprint.

3-dimensional drawing of Heegaard diagrams with 3-connected Whitehead graphs

落合豊行、今藤紀子、森村則子、坂田宣子

概要：n 個の記号で生成される n 個の生成関係式（n ワード）がヘーゴード図式を与えるかどうかを決定することは、一般的に解くことは非常に難しい。しかし、n ワードＷが定める抽象 Whitehead ーグラフが３－連結である場合には比較的に簡単に判定可能である。更に、Ｗが実際にヘーゴード図式を与える場合には、W によって定まるヘーゴード図式を３次元コンピュータグラフィクスの機能 OpenGL を利用して３次元的に描画することが可能である。また、描画情報を利用して、Ｗの双対図式を描画することも、ウェーブ τ が存在する場合には、τ に沿った位相的変形も可能である。
このような研究は、３－球面判定のためのアルゴリズムを構築するために重要な役割を果たす拡張 Whitehead 予想の研究に極めて有用である。

1　有限生成群の Whitehead ーグラフ

n 個の生成元 $a, b, c....$（$A, B, C, ...$ を逆元）と n 個の生成関係式 $w_1, w_2, w_3, ...$ の作る有限生成群をＰとする。このとき、Ｐの抽象 Whitehead ーグラフ $W(P)$ とは、頂点 $a, b, c....A, B, C, ...$ を持ち、w_i に記号対 XY があるとき頂点 X^{-1} と頂点 X を隣接させることにより得られるグラフである。但し、X、Y は $\{a, b, c....A, B, C, ...\}$ の一つの要素で、X^{-1} は X の逆元に対応する頂点を表し、w_i は巡回的ワードとして考えるものとする。

2　ヘーゴード図式の定める Whitehead ーグラフ

ξ を３次元多様体Ｍから作られるヘーゴード図式（Ｆ；ｖ、ｗ）とする。このときｖを基底に取ると w から n 個の生成元 $a, b, c....$ から n 個の生成関係式Ｗ＝ $\{w_1, w_2, w_3, ...\}$（メリディアン v_i に i 番目の生成元が対応する）が、ｗを基底に取るとｎ個の生成元 $a', b', c'....$ からｎ個の生成関係式 $W' = \{w'_1, w'_2, w'_3, ...\}$ が作られる。このとき W と W' とは双対関係にある。

3　具体例

Ｐをｎ個の生成元とｎ個の生成関係式で定まる有限生成群とする。このときＷ（Ｐ）は隣接行列Ｍ（Ｗ（Ｐ））で表現できる。

Example 1. P_1=$\{a,b,c; abAbCbcabc = abca^2bc = abAcACBACBAC^2bcabc = e\}$
Example 2. P_2=$\{a,b,c; aCbaCbaCbc = aCbaCbaBac = aCbaCb^2 = e\}$
Example 3. P_3=$\{a,b,c; acb^2CA(BC)^3 = cb(ac)^2BCA^3 = acb^3CA(BC)^4 = e\}$
Example 4. P_4=$\{a,b,c; abc^2ABC^3 = (ab)^3ac(AB)^2AC = cabc^2ABCA(BA)^3 = e\}$
Example 5. P_5=$\{a,b; a^4BAB = b^2ABA = e\}$
Example 6. P_6=$\{a,b; abAbaB = a^2bABAb = e\}$
Example 7. P_7=$\{a,b; ab^2AB^3 = ba^2BA^3 = e\}$
Example 8. P_8=$\{a,b,c; a^2bcABC = b^2caBCA = c^2abCAB = e\}$
例えば、W (P_1) は次のような隣接行列

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & 0 & 8 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 8 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 8 & 0 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

を持つ。但し、頂点１，２，３，４，５，６はそれぞれ生成元 a,A,b,B,c,C にそれぞれ対応するものとする。一般的に $W(P)$ は多重グラフであり、行列の (i,j) は頂点 i 頂点 j とを結ぶ辺の数を表す。また、$W(P_1)$, $W(P_2)$, $W(P_3)$, と $W(P_4)$ は３－球面のヘーゴード図式を与え、$W(P_1)$ と $W(P_2)$ は３－連結であるが $W(P_3)$ と $W(P_4)$ は３－連結ではない。$W(P_5)$ と $W(P_6)$ はポアンカレ３－球面のヘーゴード図式を与え、$W(P_5)$ は３－連結であるが $W(P_6)$ は３－連結ではない。

4　判定、描画アルゴリズム

アルゴリズムＡ（３－連結 Whitehead －グラフを持つヘーゴード図式かどうかを判定する）
入力：有限生成群Ｐ
出力： ヘーゴード図式の３－連結 Whitehead －グラフ

- ステップ１．入力Ｐからそれの隣接行列Ｍ（Ｐ（Ｗ））を求める。隣接行列の定める単純生成台グラフをＧとする。
- ステップ２．Hopcroft-Tarjan アルゴリズム「４」を用いて、Ｇが３－連結かどうかを判定する。３－連結のとき次のステップに進み、そうでないときには終了する。
- ステップ３。Hopcroft-Tarjan の平面性判定アルゴリズム「５」をＧに適用して、Ｇが平面的グラフであるかどうかを判定する。平面グラフのときには次のステップに進み、そうでないときには終了する。
- ステップ４．アルゴリズムＣ（後述）を用いて、Ｇの面サイクルＣを探索する。

- ステップ5．アルゴリズムB（後述）を用いて、2次元平面 E^2 上に W（P）を平面グラフとして描画する。
- ステップ6．頂点 $2i-1$ と 頂点 $2i$ との間の n 個の同一視（ $(i=1,2,...,n)$ ）をすべて探索する。これらの同一視毎に、n 個の単純閉曲線が生成されるかどうかを判定する。n 個の単純閉曲線が作られる場合のみをリストに加える。すべての同一視が終了したときに、リストが空なら終了する。そうでないときには次のステップに進む。
- ステップ7．リスト内の一組の n 個の単純閉曲線が作るホモロジーを計算し、ホモロジーが消えればそれらをリストに残し、消えない場合にはリストから削除する。
- ステップ8．リストに残った一組の n 個の単純閉曲線が入力した P と巡回的ワードとして一致する場合にはリストに残す。そうでないときにはリストから削除する。
- ステップ9．リストを出力する。

ステップ6での同一視は合計 $r_1r_2...r_n$ 回行れる。但し、$r_i=\sum_{k=1}^{2n}A(2i,k)$ である。残念ながら、P_3, と P_4 はヘーゴード図式を与えるが、それらの Whitehead －グラフは3－連結ではないのでこの方法は適用不能である。P_8 については $W(P_8)$ が3－連結であるが非平面的であるので、ステップ3で終了する。P_7 については3－連結平面グラフであるが種数2のヘーゴード図式を与えないのでステップ6で終了する。

グラフが3－連結であるかどうかを判定することは、アルゴリズムの効率を無視すれば次のように深さ優先探索を用いて簡単に判定可能である。

```
dfs[v_Integer]:=(dfi[[v]]=cnt++;
    AppendTo[visit,v];
    Scan[(If[dfi[[#]]0,AppendTo[edges,{v,#}];dfs[#]])&,e[[v]]])
depthfirstsearch[mtx_List,start_Integer]:=
Block[{visit={},e,edges={},dfi=Table[0,{Length[mtx]}],cnt=1},
    e=Map[(Flatten[Position[#,_?(Function[n,n?0])]])&,mtx];
    dfs[start];
    Return[edges]]
spanningtree[edges_List]:=Block[{len,stree,i,j,m,n},
    len=Length[edges];
    stree=Table[0,{i,len+1},{j,len+1}];
    For[i=1,i?len,i++,
      m=edges[[i,1]];
      n=edges[[i,2]];
      (*Print[m,n,edges[[i]]];*)
      stree[[m,n]]=1;
      stree[[n,m]]=1];
    Return[stree]]
```

```
    ]
triconnected[mtx_List]:=Block[{i,j,d1,d2,len0,len,edges,subedges,subg,stree},
    len0=Length[mtx];
    edges=depthfirstsearch[mtx,1];
    len=Length[edges];
    If[len0?len+1,
      Print["This graph is disconnected."];
      Return[False]];
    stree=spanningtree[edges];
    For[i=1,i?len,i++,
      d1=Apply[Plus,mtx[[i]]];
      For[j=i+1,j?len0,j++,
        d2=Apply[Plus,mtx[[j]]];
        If[Not[d11 && d21],
          subg=Delete[Transpose[Delete[mtx,i]],i];
          subg=Delete[Transpose[Delete[subg,j-1]],j-1];
          subedges=depthfirstsearch[subg,1];
          If[Length[subedges]?len-2,
            Print["This graph has a separating pair: ",{i,j}];
            Return[False]]
          ]
        ]
      ];
    Return[True]
    ]
graph={
{0,1,0,1,0,1,1,0,0,0,0},{1,0,1,0,0,0,0,0,0,0,1},{0,1,0,1,0,0,0,1,0,0,1},
{1,0,1,0,0,0,1,1,0,0,0},{0,0,0,0,0,1,0,0,1,0,0},{1,0,0,0,1,0,1,0,0,0,0},
{1,0,0,1,0,1,0,0,0,0,0},{0,0,1,1,0,0,0,0,1,1,0},{0,0,0,0,1,0,0,1,0,1,1},
{0,0,0,0,0,0,0,1,1,0,1},{0,1,1,0,0,0,0,0,1,1,0}};
triconnected[graph]
```

アルゴリズムＢ（３ー連結平面的グラフの描画）
入力：３ー連結平面的グラフＧ、Ｇの面サイクルＣ
出力：Ｇの平面グラフ

- ステップ１．変換行列Ｆの作成。
  例えば、

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

に対して、

$$F = \begin{pmatrix} E_r & O \\ B & A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}$$

- ステップ２．Ｃ上のすべての頂点を単位円周上のｒ分割点に置き（ｒはＣの長さ）、Ｇのそれ以外の頂点を原点に置く。

- ステップ３． 方程式 $(E_{n-r} - A)x = Bx_0$ を LU 分解により解く。このとき、(x_0, x) は平面上の平面グラフのすべての頂点の座標を与える。

平面グラフの描画については他の方法もある、しかしここで述べた方法が最も簡単である（[1]）。

アルゴリズムＣ（３－連結平面的グラフの面探索）([13])

入力：３－連結平面的グラフ

出力：面サイクルＣ

- ステップ１．深さ優先探索により、Ｇの生成木Ｔと葉Ｓを求める。

- ステップ２．Ｓの最初の要素ｆ＝ｖｗに対して、Ｔ上のｖとｗと結ぶ最短経路Ｑを求め、サイクル $C{=}e\bigcup Q$ に対して、アルゴリズムＤ（後述）を適用し、結果が真であればＣを出力して終了し、そうでないときにはｆをＳから削除し、繰り返す。

アルゴリズムＤ（サイクルＣが面サイクルかどうかを判定）

入力：グラフＧとそのサイクルＣ

出力：Ｃが面サイクルのとき真を返し、そうでないとき偽を返す。

- ステップ１． count ＝ 0 と置く。

- ステップ２．ＧからＣ上のすべての頂点とそれらに接続する辺を除く。除くときに除かれる辺の両端点が共にＣに含まれる場合には count ＝ count ＋ 1 とし、得られるグラフをＧ’とする。

- ステップ３．もし count が０でないときには偽を返して終了する。そうでないときには次のステップに進む。

- ステップ４．Ｇ’に深さ優先探索を行いＧ’のすべての頂点を探索できる場合には真を返して終了する。そうでないときには、偽を返して終了する。

5　３－連結 Whitehead －グラフを持つヘーゴード図式の描画

アルゴリズムＥ（ヘーゴード図式の描画）
入力：３－連結 Whitehead －グラフＧを持つヘーゴード図式の隣接行列、Ｇの面サイクルＣ、種数ｎ個のハンドル同一視のための情報。

- ステップ１．ＧとＣにアルゴリズムＢを適用して、Ｇを平面グラフＧ’として描画する。

- ステップ２．Ｇ’を極射影を利用して単位球面上に射影する。Ｗ（Ｇ）の辺を単位球面上の直線として描画する。

- ステップ３．ｎ個のハンドル同一視のための情報を利用して、ｎ個の単純閉曲線ができるように２次元ハンドルを接着する。

6　拡張 Whitehead 予想について

３－球面判定のための Whitehead 予想については、種数２の場合には正しいことが既に証明されている、また３以上の場合には反例も与えられている (参照 [2,3,6,7,8,9,10,12])。
しかし、次のようにこの予想を拡張することにより新たな展開が可能であることが期待できる。
拡張 Whitehead 予想： $(F_n; v, w)$ **を標準的でない３－球面のヘーゴード図式とする。このとき、この図式の定める２つの Whitehead －グラフの内、少なくとも一つは３－連結ではない。**
これまで知られている３－球面のヘーゴード図式はすべて上の予想をみたし、２－連結な図式の方を利用して標準的な図式へと変形可能である。３－球面の２－連結な図式は単純化変形を許すかどうかについては、一般的にはまだ証明されていない。また、ポアンカレ３－球面の場合には２－連結図式で最小図式であるものが存在する。従って、２－連結図式を変形するための方法は３－球面であることに本質的に依存する ([11])。

7　まとめ

この論文で提案する方法については、記述したもの以外に双対図式の描画、ウェーブ変形の実行等ができるが講演時に紹介する。　また、このソフトウェアについては「結び目理論研究支援ソフトウェアＫ２Ｋ」(anoymous ftp ftp.ics.nara-wu.ac.jp /pub/ochiai 、http://amadeus.ics.nara-wu.ac.jp/ ochiai/download.html

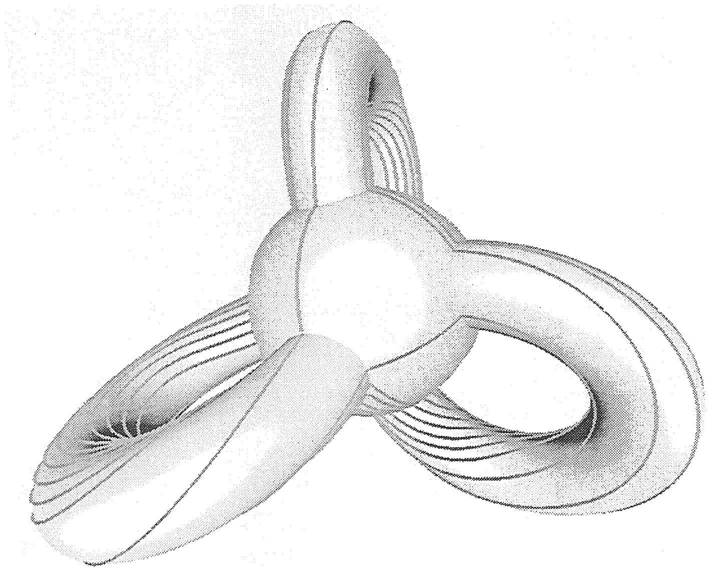


図 1: a 3D-drawing of P_1.

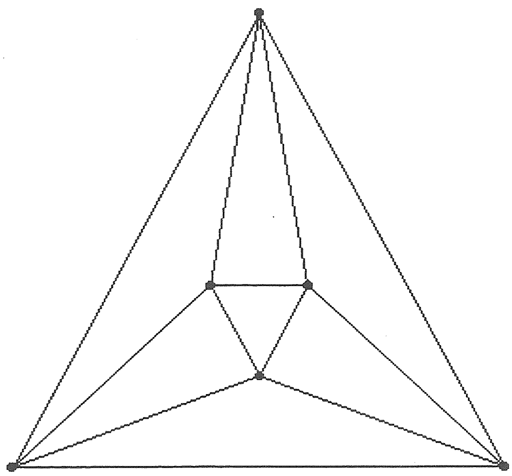


図 2: the triangular Whitehead graph of $W(P_1)$.

，平面的ヘーゴード図式の標準的写像への分解ソフトウェア（http://www.geocities.co.jp/CollegeLife-Labo/8168/）等と同様に将来ヘーゴード分解研究支援ソフトウェアとして公開する予定である。

参考文献

[1] N. Chiba, T. Yamanouchi, and T. Nishizeki, *Linear Algorithms for Convex Drawings of Planar Graphs*, Progress in Graph Theory, J.A. Bondy and U.S.R. Murty (Eds.), Academic Press (1984) 153–173.

[2] A.T. Fomenko and S.V. Matveev, *Algorithmic and Computer Methods for Three-Manifolds*, Kluwer Academic Publishers Mathematics and its Applications (Dec. 1996)

[3] T. Homma, M. Ochiai and M. Takahashi, *An Algorithm for recognizing S^3 in 3-manifolds with Heegaard splittings of genus two*, Osaka J. Math. **17** (1980) 625–4648.

[4] J.E. Hopcroft and R.E. Tarjan, *Dividing a graph into triconnected components*, SIAM J. Comput. **2** (1973) 135–158.

[5] J.E. Hopcroft and R.E. Tarjan, *Efficient planarity testing*, J. of ACM **21** (1974) 549–568.

[6] T. Kaneto, *On presentation of the fundamental group of the 3-sphere associated with Heegaard diagrams*, J. Math. Soc. Japan **33** (1981) 147–158.

[7] M. Ochiai, *Heegaard Diagrams and Whitehead Graphs*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **7** (1979) 573–591.

[8] M. Ochiai, *A counterexample to a conjecture of Whitehead and Volodin-Kuznetsov-Fomenko*, J. Math. Soc. Japan **31** (1979) 687–691.

[9] M. Ochiai, *A HEEGAARD-DIAGRAM OF THE 3-SPHERE*, Osaka J. Math. **22** (1985) 871–873.

[10] O.Ya. Viro and V.A. Kobel'sky, *Volodin-Kuznetsov-Fomenko Hypothesis on Heegaard Diagrams of a Three-Dimensional Sphere is Invalid*, Uspekhi Mat. Nauk **32** (1977) 175–176.

[11] F. Waldhausen, *Heegaard-Zerlegungen der 3-Sphere*, Topology **7** (1968) 195–203.

[12] J.H.C. Whitehead, *On certain sets of elements in a free group*, Proc. London Math. Soc. **41** (1979) 48–56.

[13] H.Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Amer. J. Math. **54** (1932) 150–168.

Positive diagrams of positive knots

中村拓司（神戸大学大学院自然科学研究科）

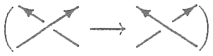
Abstract. positive knot とはすべての交点が正である positive diagram を許容する結び目である. alternating knot との類似だと思うと, その幾何的性質は "すべての交点が正" という diagram の特徴をしっかり反映しているかと思われる. 本稿では筆者の視点から見た positive knot の幾何的性質, 特に数量的幾何不変量について紹介する.

1 Introduction

S^3 内の有向結び目の diagram には一般に正  と負  の 2 種類の交点が現れる. 特に正の交点のみで描かれる diagram を positive diagram といい, そのような diagram を許容する結び目を positive knot という. 自明な結び目 (trivial knot) は明らかに positive knot であり, trivial knot を除いて最初に現れる positive knot はご存知 trefoil knot である. また, positive knot は typical type として torus knot を含んでいる. もちろん, positive knot でない knot も存在して, その一番簡単な例は figure-eight knot である. (このことは Przytycki [13] による「positive knot の signature は負」や Cromwell [1] による「positive knot の Conway 多項式の係数は正」という事実などから得られる.)

結び目の世界には positive knot と同様に diagram の言葉で定義される alternating knot というものがある. 結び目の diagram 上のある 1 点を出発しその diagram を辿って行くと交差の上下が交互に現れるとき, その diagram を alternating diagram という. そのような diagram を許容する結び目を alternating knot という. alternating knot は結び目理論創世紀から中心的役割を果たしてきた結び目で, "複雑なもの" であると認知されてきた. そして Jones 多項式の発見に端を発しその複雑さは数学的に証明されるに至った. しかし alternating knot は紐をしっかりと編み込んで人工的に複雑にした感があり, alternating という diagram の性質が結び目の幾何的性質 ("複雑さ") に見えるのは当然なことであると思われる. それに対し, positive knot はある意味, "自然" な結び目である. 例えば, Thurston の結果より, すべ

ての素な結び目は hyperbolic knot, satellite knot, torus knot の3つに大別される. 1984 年に W. Menasco [5] は素な alternating knot はすべて hyperbolic knot であることを示した. これに対し, positive knot は3つのタイプのすべてに現れる. (結び目のテーブル (例えば, [16]) で 5_2 や 7_4 などは hyperbolic positive knot, satellite knot は positive knot の positive-cabled knot などから得られる.) これから結び目理論の中だけでも positive knot が自然な存在であることが分かる.

このように positive knot は自然に現れ, 定義としては alternating knot と同様に簡明であるが, その positive knot という視点からの研究は結び目の不変量を diagram を使って計算する (skein 関係式 (§ 3 参照) など) ようになるまであまりなかったように思われる. (このあたりは筆者の勉強不足が多々あると思いますが, 御容赦下さい.) つまり, positive diagram からスタートして skein 関係式で多項式不変量などを計算すると, 交差交換がすべて正から負  で書けるということから結果が見えやすくなるということである. Van Buskirk [21] は上述の方法で closed positive braid の Conway 多項式はその係数がすべて正であることを示した. (前述の Cromwell の結果はこの拡張である.)

この positive knot に対して, すべての "交点が正" という diagram の性質がその幾何的性質にどのように反映しているかを数量的幾何不変量を通して考察してみる. 例えば, positive knot の結び目解消数に関して次のことが分かっている. 結び目解消数とはその結び目を解くために必要な交差交換の最小値である.

Theorem 1.1 (Przytycki-Taniyama [15], [10]). 結び目解消数1の positive knot は twist knot に限る.

ここで twist knot とは Figure 1 のような結び目で非自明であれば結び目解消数が1であることは明らかである.

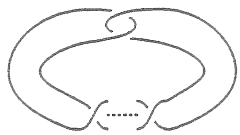


Figure 1

これは positive という性質が一般には "解きにくい" という性質に反映しているといえる.

2 Minimal diagram of positive knot

Definition 2.1. 結び目 K を表すすべての diagram を考え，その中で交点の数が最小なものを K の **minimal diagram** といい，その交点数を K の最小交点数（**crossing number**）という．

最小交点数（crossing number）は結び目理論においてもっとも基本的な幾何不変量の一つで，結び目のテーブルはこの値が小さい順に並んでいる．

１９世紀の終わりに Tait [19] は alternating knot に関する予想を提起した．そして，1985 年の Jones 多項式発見のすぐ後，Murasugi, Thislethwaite, Kauffman らによって独立に肯定的に解決された．

Theorem 2.2 (**The first Tait conjecture** [8, 20, 4]). 任意の既約な alternating diagram は minimal diagram である．

ここで diagram が既約であるとは Figure 2 のような交点を含まないときをいう．

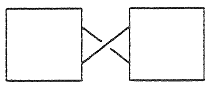


Figure 2

さらに，prime alternating knot の任意の minimal diagram は alternating であることも示されている．

しかし，positive knot に関しては Theorem 2.2 に対応する結果は知られていない．そこでそれを問題として考える．しかしながら，既約だが minimal ではない positive diagram が存在する．Figure 3 (a) の diagram がその例である．これが表す結び目は trefoil knot であり，その minimal diagram は Figure 3 (b) である．

Figure 3

さらに minimal diagram として positive なものも, non-positive なものも持つ positive knot も存在する. Figure 4 の結び目がその例である. Figure 4 の (a) と (b) はそれぞれ Rolfsen のテーブル [16] に 10_{161} と 10_{162} として載っている結び目達で, 長い間異なる結び目だと思われていた. しかし 1970 年代に Perko が同型な結び目であることを示した. （この２つは Perko's pair と呼ばれている.）これらはどちらも１０交点の結び目の minimal diagram であるが (a) は dotted circle 内の交点のみが負の non-positive diagram で, (b) は positive diagram である.

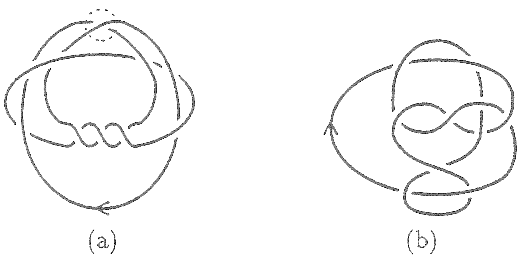


Figure 4

よって, 考えるべき問題は次のようになる.

Question 2.3. 任意の positive knot の minimal diagram は positive diagram で実現されるか？

この問題の解決への糸口として **positive alternating knot** という結び目を考える.

Definition 2.4. 結び目が positive alternating knot であるとは positive diagram と alternating diagram の両方を許容するときをいう.

例えば, Figure 3 (a) は positive diagram であり, (b) は alternating diagram である. この 2 つは同型な結び目を表しているのでこの結び目は positive alternating knot である.

Definition 2.4 からは positive diagram と alternating diagram を別々に持っていて構わないのであるが, Figure 3 (b) の alternating diagram はまた positive diagram でもある.

Figure 5 (a) の 2-bridge knot の diagram (Conway's notation で $C(1,2,1,1,-1,-3)$) は positive diagram である. すべての 2-bridge knot は alternating knot であることが知られているのでこの結び目は positive alternating knot である. そこでこの結び目の alternating diagram $C(1,2,5)$ (Figure 5 (b)) を見てみると, これもまた positive diagram である.

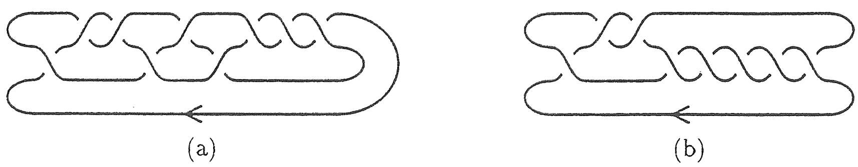


Figure 5

よって自然に次の問題が考えられる.

Question 2.5. 任意の positive alternating knot は常に positive かつ alternating である diagram を持ち得るか?

この問題に関して, 次を得た.

Theorem 2.6 ([11]). 任意の *positive alternating knot* の任意の既約な *alternating diagram* は *positive diagram* である.

証明は HOMFLY 多項式 (Jones 多項式の一般化として定義された 2 変数の多項式不変量) を positive と alternating の特徴を上手に抽出しながら計算することによる.

Question 2.3 に関して Theorem 2.2 と Theorem 2.6 によって次の系を得る.

Corollary 2.7 ([11]). 任意の *positive alternating knot* の *minimal diagram* は *positive diagram* で実現される.

Remark 2.8. Theorem 2.6 は Stoimenow [18] も独立に示している. また彼は Question 2.3 が種数 2 以下の positive knot に対して肯定的であることも示している ([17]).

3 The braid index of closed positive braid

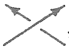
「すべての絡み目は braid を閉じたもので得られる」という事実はよく知られている. ここでは braid presentation と それを閉じて得られる絡み目の diagram (closed braid diagram) を同一のものとして見ている. そこで絡み目の幾何不変量として **braid index** なるものを考えることができる.

Definition 3.1. 絡み目 L の **braid index** $b(L)$ とは L を表すすべての braid presentation の中での string 数の最小値である.

この幾何不変量も crossing number と同様に与えられた絡み目に対して求めることは非常に厄介である. Yamada [22] は絡み目の braid index がその diagram の Seifert circle 数で上から押えられることを示した. Franks-Williams [2] と Morton [6] らはそれぞれ独立に HOMFLY 多項式の言葉で下から評価した. $P_L(v,z)$ を絡み目 L の HOMFLY 多項式 ([3, 14]) とする. つまり次の漸化式 ((2) は skein 関係式) で計算される不変量である.

(1) $P_O(v,z) = 1$,

(2) $v^{-1}P_{L_+}(v,z) - vP_{L_-}(v,z) = zP_{L_0}(v,z)$,

ここで, O は trivial knot であり, L_+, L_-, L_0 はそれぞれある一箇所のみが , ,  のように異なる diagram を持つ絡み目達である.

Franks-Williams [2] と Morton [6] が示したのは次の不等式が成立することである. これは **Franks-Williams-Morton** の不等式と呼ばれる (以下では FWM 不等式). v-span$P_L(v,z)$ と書いて, $P_L(v,z)$ の v の方の最大次数と最小次数の差とする.

Theorem 3.2 (FWM 不等式. [6, Theorem 2], [2, Corollary 1.10]). すべての絡み目 L に対して

$$e(L) = \frac{1}{2}v\text{-span}P_L(v,z) + 1 \leq b(L)$$

が成立する.

Fact 3.3. すべての torus link [2], 2-bridge link [9] に対しては等号が成立する.

絡み目の braid presentation において, 正の生成元のみで表せるものを positive braid presentation といい, その表示を持つ絡み目を closed positive braid という.

Franks-Williams は [2] において次を予想した.

Conjecture 3.4 (Franks-Williams conjecture [2]). 任意の closed positive braid に対して Theorem 3.2 の等号が成立する.

Fact 3.5. 任意の n-string の full twist を持つ closed positive n-braid に対しては等号が成立する.

しかしながら Morton-Short [7] によって Conjecture 3.4 の反例が見つけられた.

Example 3.6. 結び目 K を trefoil knot の $(2,7)$-cabled knot とすると, $e(K) = 3 < 4 = b(K)$. (Figure 6.)

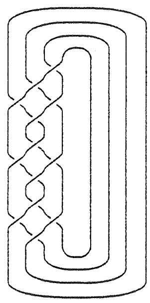


Figure 6

Question 2.3 に対するアプローチとして次の問題を考える.

Question 3.7. 任意の closed positive braid の braid index は positive braid presentation で実現されるか？

この問題が肯定的ならばすべての closed positive braid に対して Question 2.3 は肯定される．しかし, Question 3.8 を positive knot に拡張した問題,

Question 3.8. 任意の positive knot の braid index は positive diagram の 最小 Seifert circle 数と一致するか？

は否定される．例えば結び目 7_4 は 7 交点の positive alternating diagram を持つので, 最大オイラー標数から最小 Seifert circle 数は 6 であることが分かるが, これは 2-bridge knot であり, $e(L)$ を計算すると 4 となり, Fact 3.3 から braid index は 4 である．

Question 3.8 を考える上で Conjecture 3.4 に対し, 次が得られた.

Theorem 3.9 ([12]). L を closed positive braid とする．$e(L) = 2$ となるものは $b(L) = 2$, つまり $(2, n)$-torus link に限る．

つまり, Conjecture 3.4 のミニマム版である．証明は HOMFLY polynomial を計算する resolution tree にある制限を付けて詳細に観察することによる．初等的だが極めて煩雑である．

一方, Conjecture 3.4 の反例は Morton-Short による Example 3.6 以外には見当たらず, Question 3.8 へのアプローチとしても必要なので反例の大量生産を考え, 次を得た.

Theorem 3.10 ([12]). $b(L) - e(L) = 1$ を満たす prime closed positive braid が無限個存在する．

（絡み目が prime でなければ Example 3.6 の連結和をとれば簡単に無限個は作れる.）この無限族は $(n, n+1)$-torus knot の 2-cable からなる．

References

[1] P. R. Cromwell, *Homogeneous links*, J. London Math. Soc. (2) 39 (1989), 535–552.

[2] J. Franks and R. F. Williams, *Braids and the Jones polynomial*, Trans. Amer. Math. Soc. 303 (1987), 97–108.

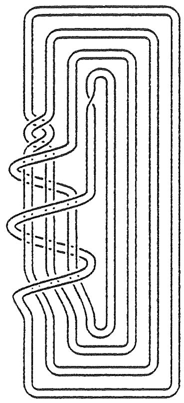


Figure 7 : 2-cabled knot of $(4, 5)$-torus knot

[3] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. B. R. Lickorish, K. Millett, and A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **12** (1985), 239–246.

[4] L. H. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395–407.

[5] W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology **23** (1984), 37–44.

[6] H. R. Morton, *Seifert circles and knot polynomials*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), 107–109.

[7] H. R. Morton and H. B. Short, *The 2-variable polynomial of cable knots*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **101** (1987), 267–278.

[8] K. Murasugi, *Jones polynomials and classical conjectures in knot theory*, Topology **26** (1987), 187–194.

[9] ______, *On the braid index of alternating links*, Trans. Amer. Math. Soc. **326** (1991), 237–260.

[10] T. Nakamura, *Four-genus and unknotting number of positive knots and links*, Osaka J. Math. **37** (2000), 441–451.

[11] ______, *Positive alternating links are positively alternating*, J. Knot Theory Ramifications 9 (2000), 107–112.

[12] ______, *Notes on the braid index of closed positive braids*, in preparation, 2001.

[13] J. H. Przytycki, *Positive knots have negative signature*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **37** (1989), 559–562 (1990).

[14] J. H. Przytycki and P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1988), 115–139.

[15] J.H. Przytycki and K. Taniyama, *Almost positive links have negative signature.*, preprint.

[16] D. Rolfsen, *Knots and links*, Publish or Perish Inc., Berkeley, Calif., 1976, Mathematics Lecture Series, No. 7.

[17] A. Stoimenow, *Knots of genus two*, preprint, 1999.

[18] ———, *On some restrictions to the values of the Jones polynomial*, preprint, 1999.

[19] P. G. Tait, *On knots I, II, III*, In: Scientific papers, I (1877–1885, London), pp.273–437, Cambridge Univ. Press., 1898.

[20] M. B. Thistlethwaite, *A spanning tree expansion of the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 297–309.

[21] J. M. Van Buskirk, *Positive knots have positive Conway polynomials*, Knot theory and manifolds (Vancouver, B.C., 1983) (Berlin), Springer, Berlin, 1985, pp. 146–159.

[22] S. Yamada, *The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link*, Invent. Math. **89** (1987), 347–356.

局所係数コボルディズム群と多様体論への応用

倉薗一二

1 はじめに

局所係数（コ）ホモロジー群は古くから知られており [11]、障害理論やファイバー空間のホモロジー理論、（向き付け不可能な場合も含めた）位相多様体における Poincaré-Lefschetz の双対定理などに応用され、その有用性が示されている [6], [15] 。一方、局所係数コホモロジー群が層係数コホモロジー群へと一般化されるに及んで、過渡的な概念としての意味合いが強く、その存在感は薄くなった。しかしながら、局所係数（コ）ホモロジー群は多くの場合に具体的に計算を実行することが可能であり、その役割の重要性は依然として変らない。。

本論文では、位相空間対 (X, A) および $H^1(X; \mathbf{Z}_2)$ の元 w に対して、w から決定される局所系 $\mathcal{S}_w$ と多様体上の向きの局所系と呼ばれる局所系を利用して, 局所係数コボルディズム群 $\Omega_n(X, A; \mathcal{S}_w)$ を定義し、その応用として、有限生成アーベル群を基本群にもつ向き付け不可能な連結４次元閉多様体の単連結な多様体との連結和を法とする分類問題を局所係数ホモロジー群によって記述し、いくつかの場合に同値類の個数を具体的に計算する。また、Lusternik-Schnirelmann π_1-カテゴリーとの関連についてもふれる。

2 局所係、局所係数ホモロジー群

局所系

位相空間 X の２点 x, y に対して、x から y への道の (端点を停めた) ホモトピー類を $\Gamma(y, x)$ とおく。次の条件を満たす族 $\mathcal{S} = \{\mathcal{S}(x), \mathcal{S}(\gamma)\}$ を X 上の（アーベル群の）局所系という。

(2.1) 各 $x \in X$ に対して、$\mathcal{S}(x)$ はアーベル群である。

(2.2) 各 $\gamma \in \Gamma(y, x)$ に対して、$\mathcal{S}(\gamma)$ は $\mathcal{S}(y)$ から $\mathcal{S}(x)$ への同型である。

(2.3) 任意の $\gamma \in \Gamma(y, x)$, $\gamma' \in \Gamma(z, y)$ に対して、$\mathcal{S}(\gamma\gamma') = \mathcal{S}(\gamma) \circ \mathcal{S}(\gamma')$ が成り立つ。

定義から $\mathcal{S}$ は各 $x \in X$ に対して、$\bar{\mathcal{S}}_x(\alpha) = \mathcal{S}(\alpha)$ $(\alpha \in \pi_1(X, x))$ によって定義される準同型 $\bar{\mathcal{S}}_x : \pi_1(X, x) \to \operatorname{Aut} \mathcal{S}(x)$ を誘導することが分かる。いま、$x_0 \in X$ を固定し、各 $x \in X$ に対して $\alpha_x \in \Gamma(x, x_0)$ を１つ選ぶ。このとき、各 $\gamma \in \Gamma(y, x)$ に対して、

$$\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{S}(\alpha_x)^{-1} \circ \bar{\mathcal{S}}_{x_0}(\alpha_x \gamma \alpha_y^{-1}) \circ \mathcal{S}(\alpha_y)$$

が成り立つことが分かる。

準同型によって決定される局所系

X が弧状連結で G がアーベル群ならば、任意の準同型 $\rho : \pi_1(X, x_0) \to \operatorname{Aut} G$ は、$\mathcal{S}(x_0) = G$、$\bar{\mathcal{S}}_{x_0} = \rho$ を満たすような X 上の一つしかもただ一つの局所系を誘導する [11]。これを ρ によって決定される局所系と呼ぶ。

$w \in H^1(X; \mathbf{Z}_2)$ に対して、$\mathcal{S}_w$ を次の条件を満たす X 上の局所系とする。

(2.4) 各 $x \in X$ に対して、$\mathcal{S}_w(x)$ は整数群 $\mathbf{Z}$ に同型である。

(2.5) $\mathcal{S}_w$ は準同型 $\rho_w : \pi_1(X, x_0) \to \operatorname{Aut} \mathbf{Z}$ によって決定される。ここで、ρ_w は Hurewicz の準同型 $\Xi : \pi_1(X, x_0) \to H_1(X; \mathbf{Z})$ と $H_1(X; \mathbf{Z})$ から $\operatorname{Aut} \mathbf{Z} = \mathbf{Z}_2$ への準同型とみた w との合成である。

連続写像から誘導される局所系

f を位相空間 X から位相空間 Y への連続写像とし、$\mathcal{S}$ を Y 上の局所系とする。このとき、

(2.6) 各 $x \in X$ に対して、$f^*\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(f(x))$ 、

(2.7) 各 $\gamma \in \Gamma(y, x)$ に対して、$f^*\mathcal{S}(\gamma) = \mathcal{S}(f_*\gamma)$

により定義される X 上の局所系 $f^*\mathcal{S}$ を f によって $\mathcal{S}$ から誘導される局所系という。

局所系の間の同値

位相空間 X 上の2つの局所系 $\mathcal{S}$ と $\mathcal{T}$ は、次の条件を満たすとき、同値であるといい、$\varphi : \mathcal{S} \xrightarrow{\sim} \mathcal{T}$ とかく。

(2.8) 各 $x \in X$ に対して、同型 $\varphi_x : \mathcal{S}(x) \to \mathcal{T}(x)$ が存在する。

(2.9) 任意の2点 $x, y \in X$ と任意の $\gamma \in \Gamma(y, x)$ に対して、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{S}(y) & \xrightarrow{\varphi_y} & \mathcal{T}(y) \\ {\scriptstyle \mathcal{S}(\gamma)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{T}(\gamma)} \\ \mathcal{S}(x) & \xrightarrow[\varphi_x]{} & \mathcal{T}(x) \end{array}$$

局所係数ホモロジー群

Δ^q を q 単体とし、$e_0, e_1, \cdots, e_q$ をその頂点とする。X の特異 q 単体 $\sigma : \Delta^q \to X$ に対し、$\sigma(e_1)$ を $\sigma(e_0)$ に結ぶ道 ω_σ を $\omega_\sigma = \sigma \circ (e_1 e_0)$ として定義し、そのホモトピー類を $\gamma_\sigma \in \Gamma(\sigma(e_0), \sigma(e_1))$ と表す。ここで、$(e_1 e_0)$ は e_1 を e_0 につなぐ Δ^q のアフィン1単体を表す。X 上の局所系 $\mathcal{S}$ が与えられたとき、$\mathcal{S}$ を係数とする特異チェイン複体 $S(X; \mathcal{S})$ を次のように定義する。: $S_q(X; \mathcal{S})$ は形式的な有限和

$$\sum_\sigma a_\sigma \sigma$$

の全体である。ここで、σ は X の特異 q 単体全体にわたり、$a_\sigma \in \mathcal{S}(\sigma(e_0))$ で、有限個の

σ を除き $a_\sigma = 0$ である。和を

$$\sum_\sigma a_\sigma \sigma + \sum_\sigma b_\sigma \sigma = \sum_\sigma (a_\sigma + b_\sigma)\sigma$$

で定める。$q > 0$ に対して、バウンダリ作用素 $\partial : S_q(X; \mathcal{S}) \to S_{q-1}(X; \mathcal{S})$ は

$$\partial\left(\sum_\sigma a_\sigma \sigma\right) = \sum_\sigma \left(\gamma_{\sigma *}(a_\sigma)\partial_0 \sigma + \sum_{0<i\leq q} (-1)^i a_\sigma \partial_i \sigma\right)$$

によって定義する。ただし、$\gamma_{\sigma *} = \mathcal{S}(\gamma_\sigma)$ である。

チェイン複体 $S(X; \mathcal{S})$ の q 次元ホモロジー群を $H_q(X; \mathcal{S})$ とかき、X の $\mathcal{S}$ 係数の q 次元（特異）ホモロジー群という。

CW 複体の局所係数ホモロジー群

(X, A) を CW 複体対、$\bar{X}^n$ を (X, A) の n-骨格、$\mathcal{S}$ を X 上の局所系とする。X の各胞体 e_λ に対して、点 x_λ を一つ固定し、$\mathcal{S}(x_\lambda)$ を $\mathcal{S}_\lambda$ とかく。形式的な有限和

$$\sum_{\dim e_\lambda = n} a_\lambda e_\lambda \quad (a_\lambda \in \mathcal{S}_\lambda,\ e_\lambda \text{は} A \text{に含まれない})$$

のなすアーベル群を $C_n(X, A; \mathcal{S})$ と表す。ここで、e_λ は向きのついた胞体を意味する。このとき、

$$H_n(\bar{X}_n, \bar{X}_{n-1}; \mathcal{S}) = C_n(X, A; \mathcal{S})$$

が成り立つ。バウンダリ作用素 $\partial : C_n(X, A; \mathcal{S}) \to C_{n-1}(X, A; \mathcal{S})$ を連結準同型 ∂_* で定義すれば、CW 複体対 (X, A) の $\mathcal{S}$ 係数のチェイン複体 $C_*(X, A; \mathcal{S})$ が得られる。これに対して、自然な同型

$$H_n(C_*(X, A; \mathcal{S})) \xrightarrow{\cong} H_n(X, A; \mathcal{S})$$

が存在する [15]。

Künneth の公式

位相空間 X 上の局所系 $\mathcal{S}$ と位相空間 Y 上の局所系 $\mathcal{T}$ に対して、$X \times Y$ 上の局所系 $\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}$ を

(2.10) 各 $(x, y) \in X \times Y$ に対して、$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}(x, y) = \mathcal{S}(x) \otimes \mathcal{T}(y)$、

(2.11) 各 $(\gamma, \delta) \in \Gamma((x', y'), (x, y))$ に対して、$\mathcal{S} \otimes \mathcal{T}(\gamma, \delta) = \mathcal{S}(\gamma) \otimes \mathcal{T}(\delta)$

によって定義する。

$\mathcal{S}$ が自由（任意の $x \in X$ に対して、$\mathcal{S}(x)$ が自由アーベル群）かまたは $\mathcal{T}$ が自由ならば、次の Künneth の公式が成り立つ [6]。

$$H_n(X \times Y; \mathcal{S} \otimes \mathcal{T}) = \sum_{p+q=n} H_p(X; \mathcal{S}) \otimes H_q(Y; \mathcal{T}) \oplus \sum_{p+q=n-1} \mathrm{Tor}(H_p(X; \mathcal{S}), H_q(Y; \mathcal{T}))$$

局所係数ホモロジー群の計算例

例 **2.1** $w \neq 0 \in H^1(S^1; \mathbf{Z}_2)$ のとき、

$$H_q(S^1; \mathcal{S}_w) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 & (q=0) \\ 0 & (q>0) \end{cases} 。$$

例 **2.2** $w \neq 0 \in H^1(S^1; \mathbf{Z}_2)$、$\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_0 \otimes \mathcal{S}_w$ のとき、上の例 2.1 と Künneth の公式を使うことによって

$$H_q(S^1 \times S^1 \times S^1 \times S^1; \mathcal{S}) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 & (q=0,\ 3) \\ \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 & (q=1,\ 2) \\ 0 & (q>3) \end{cases}$$

が得られる。

例 **2.3** $w \neq 0 \in H^1(P^2; \mathbf{Z}_2)$ のとき、

$$H_q(P^2; \mathcal{S}_w) = \begin{cases} \mathbf{Z}_2 & (q=0) \\ 0 & (q=1,\ q>2) \\ \mathbf{Z} & (q=2) 。\end{cases}$$

3 局所係数コボルディズム群

向きの局所系

n 次元多様体 M に対して、向きの局所系と呼ばれる M 上の局所系 $\mathcal{S}_M$ を次のように定義する。

(3.1) 各 $u \in M$ に対して、$u \in \mathrm{Int}\, M$ ならば $\mathcal{S}_M(u) = H_n(M, M-u; \mathbf{Z})$、$u \in \partial M$ ならば $\mathcal{S}_M(u) = H_{n-1}(\partial M, \partial M - u; \mathbf{Z})$。

(3.2) $\mathcal{S}_M$ は準同型 $\rho_M = w_1(M) \circ \Xi$ によって決定される。ここで、Ξ は Hurewicz の準同型で $w_1(M)$ は M の第 1 Stiefel-Whitney 類である。

$w-$ 特異多様体

位相空間対 (X, A) および $w \in H^1(X; \mathbf{Z}_2)$ に対して、(X, A) における n 次元 $w-$ 特異多様体 (M, f, φ) を次のように定義する。

(3.3) M はコンパクトな n 次元多様体である。

(3.4) $f : (M, \partial M) \to (X, A)$ は連続写像である。

(3.5) $\varphi : \mathcal{S}_M \to f^*\mathcal{S}_w$ は局所系の間の同値である。

局所向き付け

上の (3.5) を満たす φ を多様体 M の連続写像 f に付随する局所向き付けという。M が連結のときは $\pm\varphi$ の 2 つだけである。

$\mathcal{M}_n(X,A;\mathcal{S}_w)$

(X,A) における n 次元 $w-$ 特異多様体全体の集合を $\mathcal{M}_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ とかくことにする。(M,f,φ), $(N,g,\psi)\in\mathcal{M}_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ に対して、

$$-(M,f,\varphi)=(M,f,-\varphi),\quad (M,f,\varphi)+(N,g,\psi)=(M\cup N,f\cup g,\varphi\cup\psi)$$

と定義する。

コボルダント

もし $\mathcal{M}_{n+1}(X,X;\mathcal{S}_w)$ の元 (W,F,Φ) で次の 3 つの条件を満たすものが存在するとき、(M,f,φ) は零コボルダントであるといい、$(M,f,\varphi)\sim 0$ とかく。

(3.6) M は ∂W の正規部分多様体である。

(3.7) $F|M=f$ かつ $F(\partial W-M)\subset A$ である。

(3.8) 任意の $v\in\operatorname{Int}M$ に対して、$H_n(\partial W,\partial W-v;\mathbf{Z})$ を $H_n(\operatorname{Int}M,\operatorname{Int}M-v;\mathbf{Z})$ と同一視することにより $\dot{\Phi}|\operatorname{Int}M=\varphi$ である。ただし、$\dot{\Phi}=\Phi|\partial W:\mathcal{S}_{\partial W}\xrightarrow{\sim}F^*\mathcal{S}_w|\partial W$ である。

$(M,f,\varphi)+(N,g,-\psi)\sim 0$ であるとき (M,f,φ) と (N,g,ψ) はコボルダントであるといい、$(M,f,\varphi)\sim(N,g,\psi)$ とかく。

局所係数コボルディズム群

関係 $\sim$ は $\mathcal{M}_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ における同値関係を定め、さらに $\mathcal{M}_n(X,A;\mathcal{S}_w)/\sim$ は上の演算によって自然にアーベル群の構造をもつ。これを $\Omega_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ とかき、(X,A) における局所系 $\mathcal{S}_w$ を係数にもつコボルディズム群と呼ぶことにする。また、(M,f,φ) のコボルディズム類を $[M,f,\varphi]$ とかくことにする。

注意　$w=0$ のときは、φ と Φ がそれぞれ M と W の向き付けを与えるから、M と W は向き付け可能である。したがって、この場合、$\Omega_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ は (X,A) における向き付けられたコボルディズム群 $\Omega_n(X,A)$ と一致する。また、X が 1 点で $A=\phi$ のときは Thom 群 Ω_n である。

連続写像から誘導される準同型

$H^1(Y;\mathbf{Z}_2)$ の元 η および連続写像 $h:(X,A)\to(Y,B)$ を固定する。$\Omega_n(X,A;h^*\mathcal{S}_\eta)$ の各元 $[M,f,\varphi]$ に対して、φ は $\mathcal{S}_M$ と $(h\circ f)^*\mathcal{S}_\eta$ の間の同値を与えるから、準同型 $h_*:\Omega_n(X,A;h^*\mathcal{S}_\eta)\to\Omega_n(Y,B;\mathcal{S}_\eta)$ を

$$h_*([M,f,\varphi])=[M,h\circ f,\varphi]$$

により定義することができる。

境界準同型

$i:A\to X$ を包含写像とする。境界準同型 $\partial:\Omega_n(X,A;\mathcal{S}_w)\to\Omega_{n-1}(A;i^*\mathcal{S}_w)$ を

$$\partial([M,f,\varphi])=[\partial M,f|\partial M,\varphi|\partial M]$$

によって定義する。

命題 1 ([8]) 局所係数コボルディズム群はホモロジー理論に対する *Eilenberg-Steenrod* の公理のうち次元公理を除く 6 つの公理と同様な性質をもつ。

準同型 μ

$\Omega_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ の各元 $[M,f,\varphi]$ に対して、$\check{H}_n(\mathrm{Int}\,M;\mathcal{S}_{\mathrm{Int}M})$ を局所系 $\mathcal{S}_{\mathrm{Int}M}$ を係数にもつ無限チェインのホモロジー群とし、$\varphi_\#:\check{H}_n(\mathrm{Int}\,M;\mathcal{S}_{\mathrm{Int}M})\to\check{H}_n(\mathrm{Int}\,M;f^*\mathcal{S}_w)$ を $\varphi|\mathrm{Int}M$ によって誘導される同型とする。任意のコンパクトな多様体 M に対して、自然な同型 $\iota:\check{H}_n(\mathrm{Int}\,M;f^*\mathcal{S}_w)\to H_n(M,\partial M;f^*\mathcal{S}_w)$ が存在することが知られている [6]。そこで、 $\varphi_*=\iota\circ\varphi_\#$ とおき、準同型

$$\mu:\Omega_n(X,A;\mathcal{S}_w)\to H_n(X,A;\mathcal{S}_w)$$

を $\mu([M,f,\varphi])=f_*(\varphi_*(\sigma_M)))$ によって定義する。ここで、f_* は

$H_n(M,\partial M;f^*\mathcal{S}_w)$ から $H_n(X,A;\mathcal{S}_w)$ への準同型であり、σ_M は $\check{H}_n(\mathrm{Int}\,M;\mathcal{S}_{\mathrm{Int}M})$ の基本類である。

定理 2 ([8]) X をCW複体、w を $H^1(X;\mathbf{Z}_2)$ の元とする。このとき、収束するスペクトル系列

$$E^2_{p,q}=H_p(X;\Omega_q\otimes\mathcal{S}_w)\Rightarrow\Omega_{p+q}(X;\mathcal{S}_w)$$

が存在する。

定理 2 を使って、いくつかの具体的な空間に対して局所係数コボルディズム群を計算することができる。

局所係数コボルディズム群の計算例

例 3.1 $w\neq 0\in H^1(S^1;\mathbf{Z}_2)$ のとき、$n\leq 5$ に対して、$\Omega_n(S^1;\mathcal{S}_w)\cong\Omega_n\otimes\mathbf{Z}_2$。

例 3.2 $w\neq 0\in H^1(P^2;\mathbf{Z}_2)$ のとき、$\Omega_2(P^2;\mathcal{S}_w)\cong\Omega_0$、$n\neq 2,\ n\leq 5$ に対して、$\Omega_n(P^2;\mathcal{S}_w)\cong\Omega_n\otimes\mathbf{Z}_2$。

4　4次元多様体への応用

局所係数コボルディズム群を利用することによって、向き付け不可能な4次元多様体の単連結な多様体との連結和を法とする分類問題を基本群の分類空間の局所係数ホモロジー群を用いて記述できる。

$\mathcal{M}^4_{\pi,w}$ と $\overline{\mathcal{M}}_4(B\pi;\mathcal{S}_w)$

π を有限表示群、$B\pi = K(\pi,1)$ を Eilenberg-MacLane 複体とし、w を $H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ の元とする。$\mathcal{M}^4_{\pi,w}$ を $\pi_1(M)=\pi$ かつ $w_1(M)=w$ である、より正確には

(4.1) f は基本群上の同型を誘導する、

(4.2) $f^*w = w_1(M) \in H^1(M;\mathbf{Z}_2)$ である

という条件を満たす連続写像 $f: M \to B\pi$ が存在するような連結4次元閉多様体 M の全体とする。

また、$\overline{\mathcal{M}}_4(B\pi;\mathcal{S}_w)$ を f が基本群上の同型を誘導するような3組 (M,f,φ) から成る $\mathcal{M}_4(B\pi;\mathcal{S}_w)$ の部分集合とする。$\mathcal{M}^4_{\pi,w}$ の元 M に対しては、$(M,f,\varphi)\in\overline{\mathcal{M}}_4(B\pi;\mathcal{S}_w)$ となる (f,φ) が存在する.

$(\mathrm{Aut}\,\pi)^w$ を $\mathrm{Aut}\,\pi$ の部分群で、その対応する（基点を保つ）分類写像 $\lambda: B\pi \to B\pi$ が $H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ 上で $\lambda^*w = w$ を満たすものとする。

弱安定同値

4次元多様体 M と N は、単連結な多様体 M_0, N_0 で $M\#M_0$ と $N\#N_0$ が互いに微分同型であるようなものが存在するとき、弱安定同値であるということにする。

X を連結なCW複体、w を $H^1(X;\mathbf{Z}_2)$ の自明でない元とする。このとき、定理2を利用し、$\Omega_0\cong\mathbf{Z}$, $\Omega_1=\Omega_2=\Omega_3=0$, $\Omega_4\cong\mathbf{Z}$ (生成元は CP^2) というよく知られた結果を使うと、$\mu:\Omega_4(X;\mathcal{S}_w)\to H_4(X;\mathcal{S}_w)$ は全射で $\mathrm{Ker}\,\mu = \Omega_4\otimes\mathbf{Z}_2$ であることが分かる。これを有効に使うことによって、次の定理が得られる。

定理 3 (**[8]**) π を有限生成アーベル群とし、w を $H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ の自明でない元とする。このとき、$\mathcal{M}^4_{\pi,w}$ における弱安定同値類は、(M,f,φ) に $\mu([M,f,\varphi]) = f_*(\varphi_*(\sigma))$ を対応させることにより、商 $H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)/(\mathrm{Aut}\,\pi)^w_*$ の元と1：1に対応する。ただし、(M,f,φ) は $\overline{\mathcal{M}}_4(B\pi;\mathcal{S}_w)$ の元で σ は $H_4(M;\mathcal{S}_M)$ の基本ホモロジー類である。

π が必ずしもアーベル群でない場合については、一般に次の結果が成り立つ。

定理 4 (**[8]**) π を有限表示群、w を $H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ の元とする。$H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)/(\mathrm{Aut}\,\pi)^w_*$ の同値類 $[\xi]$ は $\xi=\mu([M,f,\varphi])$ となる $\overline{\mathcal{M}}_4(B\pi;\mathcal{S}_w)$ の元 (M,f,φ) で代表され、同じ同値類の他の代表元 (M',f',φ') に対して、M と M' は弱安定同値である。さらに、誘導された写

像 $H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)/(\mathrm{Aut}\,\pi)^w_* \to \mathcal{SM}^4_{\pi,w}$ は、$[\mu([M,f,\varphi])]=[\mu([M,f,-\varphi])]$ であるかそうでないかに従って１：１であるかまたは２：１である。ただし、$\mathcal{SM}^4_{\pi,w}$ は $\mathcal{M}^4_{\pi,w}$ における弱安定同値類の集合である。

注意　定理４は $w=0$ のときも成り立つ。このとき、対応 $H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)/(\mathrm{Aut}\,\pi)^w_* \to \mathcal{SM}^4_{\pi,w}$ は向きを忘れた写像になっている。

なお、$w=0$ の場合には、有限表示群を基本群にもつ４次元多様体の向きを込めた弱安定同値に関してすでに結果が得られていて、弱安定同値類の個数は $H_4(B\pi;\mathbf{Z})/(\mathrm{Aut}\,\pi)_*$ によって評価される [4]、[7]。

定理３を使って、有限生成アーベル群 π と $w \in H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ が与えられた場合の弱安定同値類の個数をいくつかの例について具体的に計算してみる。以下、便宜上 $A=H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)/(\mathrm{Aut}\,\pi)^w_*$ とおく。

例 4.1 $\pi=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ で w が $H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ の自明でない元の場合。$B\pi$ として、$S^1\times S^1\times S^1\times S^1$ をとる。任意の $\mathcal{S}_w$ は自明でない元 $\eta\in H^1(S^1;\mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}_2$ に対して $\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_\eta$ に同値である。このとき、$A=H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)=0$ より $|A|=1$ である。任意の $w\neq 0$ は π の自己同型を法として同値であるから、向き付け不可能な４次元閉多様体の弱安定同値類はただ一つである。

例 4.2 $\pi=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$ で w が $H^1(B\pi;\mathbf{Z}_2)$ の自明でない元の場合。$B\pi$ として、$S^1\times S^1\times S^1\times S^1\times S^1$ をとる。任意の $\mathcal{S}_w$ は自明でない元 $\eta\in H^1(S^1;\mathbf{Z}_2)=\mathbf{Z}_2$ に対して $\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_0\otimes\mathcal{S}_\eta$ に同値である。このとき、$A=H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)=\mathbf{Z}_2$ より、$|A|=2$ である。N を T^4 に向き付け不可能な 1-ハンドルを接着することによって得られる４次元閉多様体とし、$\tilde{T}^4_w$ を N に１次元の手術を何回か施すことによって得られる基本群が π である多様体とする。A の自明でない元は $\mu([\tilde{T}^4_w,f,\varphi])$ によって表される。

例 4.3 $\pi=\mathbf{Z}_2$、$w\neq 0$ とする。$B\pi$ として P^∞ をとる。このとき、$A=H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)=\mathbf{Z}_2$ で、自明でない元は $\mu([P^4,i,\varphi])$ によって表される。ただし、$i:P^4\to P^\infty$ は包含写像である。

例 4.4 $\pi=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$、$w\neq 0$ とする。$B\pi$ として $P^\infty\times P^\infty$ をとる。任意の $\mathcal{S}_w$ は自明でない元 $\eta\in H^1(P^\infty;\mathbf{Z}_2)$ に対して $\mathcal{S}_\eta\otimes\mathcal{S}_\eta$ に同値である。以後、最初の P^∞ と２番目の P^∞ を区別する。$f_1':N\to P_1^\infty\times P_2^\infty$ を $i_1:P^4\to P_1^\infty$ から向き付け不可能な 1-ハンドルを接着することによって得られる w-特異４次元閉多様体とし、$f_1:\tilde{P}^4_w\to P_1^\infty\times P_2^\infty$ を $f_1':N\to P_1^\infty\times P_2^\infty$ から１次元の手術によって得られる基本群が π である w-特異多様体とする。このとき、$H_4(B\pi;\mathcal{S}_w)=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$ は $\xi_0=\mu([P^2\times P^2,i\times i,\varphi])$, $\xi_1=\mu([\tilde{P}^4_w,f_1,\varphi_1])$, $\xi_2=\mu([\tilde{P}^4_w,\lambda\circ f_1,\varphi_2])$ によって生成される。ここで、λ は P_i^∞ $(i=1,2)$ を交換する自己同型である。$\pi=\mathbf{Z}_2\oplus\mathbf{Z}_2$ の標準基底の交換は $(\mathrm{Aut}\,\pi)^w$ の自明でない元

であるが、$\mathrm{Aut}\,\pi = \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ の他の自明でない元は $(\mathrm{Aut}\,\pi)^w$ に属さない。したがって、$(\mathrm{Aut}\,\pi)^w_*$ は生成元 ξ_1 と ξ_2 を同一視するのみである。したがって、$|A| = 6$ を得る。実際、A は $[0], [\xi_0], [\xi_1], [\xi_0 + \xi_1], [\xi_1 + \xi_2], [\xi_0 + \xi_1 + \xi_2]$ からなる。

5 Lusternik-Schnirelmann π_1-カテゴリーとの関連

Lusternik-Schnirelmann π_1-カテゴリー

位相空間 X の部分集合 U は、U 内の任意のループが X において1点に可縮であるとき、π_1- 可縮であるという。n を X において π_1- 可縮である $n+1$ 個の開集合 $U_0, U_1, \cdots, U_n$ によって X が被覆されるような最小の整数とするとき、$\mathrm{cat}_{\pi_1} X = n$ とかく。$\mathrm{cat}_{\pi_1} X$ は X の位相不変量である。

Lusternik-Schnirelmann π_1-カテゴリーについては、次の結果が知られている。

定理 5 ([9]) X を連結な CW 複体、$f : X \to B\pi = K(\pi, 1)$ を3次元以上の胞体を接着させることによって得られる CW 複体への連続写像とする。ただし、$\pi = \pi_1(X)$ である。$n \geq 2$ のとき、$\mathrm{cat}_{\pi_1} X \leq n$ であるための必要十分条件は、$k > n$ および $B\pi$ 上の任意の局所係数 $\mathcal{S}$ に対して準同型 $f^* : H^k(B\pi; \mathcal{S}) \to H^k(X; f^*\mathcal{S})$ が零写像になることである。

定理4、5を使うことによって次の結果が得られる。

定理 6 ([8]) 連結な4次元閉多様体 M の Lusternik-Schnirelmann π_1-カテゴリーが4でないならば、M は、$\mathbf{R}P^4 \times \mathbf{R}$ に埋め込まれた、基本群 $\pi = \pi_1(M)$ と準同型 $\rho_{w_1(M)} : \pi \to \mathrm{Aut}\mathbf{Z}$ を実現する有限2-複体 K^2 の正則近傍の境界 $\partial N(K^2)$ に弱安定同値である。

参考文献

[1] H. Cartan and S. Eilenberg, Homological Algebra, Princeton Math. Ser. 19, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956.

[2] P. E. Conner and E. E. Floyd, Differentiable Periodic Maps, Erg. Math. Gr. 33, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen, 1964.

[3] S. Eilenberg and N. E. Steenrod, Foundations of Algebraic Topology, Princeton Univ. Press, Princeton, 1952.

[4] I. Hambelton and M. Kreck, Cancellation results for 2-complexes and 4-manifolds and some applications, Two-dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory, London Mathematical Society Lecture Notes Series **197** (1993), 281-308.

[5] M. Kreck, Some closed 4-manifolds with exotic differentiable structure, Algebraic Topology, Aarhus 1982, 246-262.

[6] A. Hattori, Topology I, Ⅱ, Ⅲ (in Japanese), Iwanamishoten, Tokyo, 1977.

[7] I. Kurazono and T. Matumoto, Classification of closed oriented 4-manifolds modulo connected sum with simply connected manifolds, Hiroshima Math. J. **28** (1998), 207-212.

[8] I. Kurazono, Cobordism group with local coefficients and its application to 4-manifolds, Hiroshima Math. J. **31-2** (2001).

[9] E. Laitinen and T. Matumoto, A gap theorem for Lusternik-Schnirelmann π_1-category, Topology and its Applications **93** (1999), 35-40.

[10] T. Matumoto and A. Katanaga, On 4-dimensional closed manifolds with free fundamental groups, Hiroshima Math. J. **25** (1995), 367-370.

[11] N. E. Steenrod, Homology with local coefficients, Ann. of Math. **44** (1943), 610-627.

[12] ____________, The topology of fibre bundles, Princeton University Press, 1951.

[13] R. E. Stong, Notes on Cobordism Theory, Princeton University Press and The University of Tokyo Press, Princeton, 1968.

[14] R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables, Comment. Math. Helv. **28** (1954), 17-86.

[15] G. W. Whitehead, Elements of Homotopy Theory, Springer-Verlag, New York Inc. , 1978.

非コンパクト半単純リイ群の球面への作用で，極大コンパクト部分群への制限作用が余次元１の軌道を持つものについて

内田伏一 (山形大学)

はじめに

コンパクトリイ群の可微分作用について研究する際には、**可微分スライス定理**の存在 (cf.[4, 10]) が大きく、有力な研究手段になっている。これに対して、非コンパクトリイ群の可微分作用については同じような定理は成り立たず、この事実が非コンパクト変換群研究の大きな壁になっている。

このような状況に関して、S.Smale は彼の著書 [20, 21](1967,1980) において次のように述べている。

There is a vast literature on the subject of a Lie group G acting on a manifold M when G is compact. But if G acting on M is semi-simple, but neither compact nor acting transitively, there seems to be essentially no literature, at least that I know of. On the other hand, it would seem worthwhile to make efforts in this direction.

非コンパクト半単純リイ群の作用を考察するには、まず極大コンパクト部分群への制限作用について考察することが重要になる。逆に見れば、極大コンパクト部分群の作用についての十分な情報が得られないものについて研究することは、不可能に近いと思われる。

私の今までの研究では、極大コンパクト部分群の作用について、次のような2つの状況を出発点にしている。

1. 主軌道が球面で、特異軌道は不動点である場合。
2. 余次元１の軌道を持つ場合。

また、多くの作用について考察した過程において、ある種の作用が頻繁に出現することに気づき、それらを整理したのが **twisted linear action** [30] である。これは、非コンパクトリイ群の球面への具体的な作用を構成する１つの方法を与えたもので、非コンパクト群に対してのみ有効な方法である。

本稿では、極大コンパクト部分群への制限作用が余次元１の軌道を持つ場合について概説する。

1. 極大コンパクト部分群への制限作用

コンパクト連結リイ群の球面への線形作用で、余次元1の軌道を持つものについて例示しておこう。

K	ψ	$\dim\psi$
$\mathbf{SO}(m)\times\mathbf{SO}(n)$	$\rho_m\oplus\rho_n$	$m+n$
$\mathbf{U}(m)\times\mathbf{U}(n)$	$[\mu_m\oplus\mu_n]_{\mathbf{R}}$	$2m+2n$
$\mathbf{Sp}(m)\times\mathbf{Sp}(n)$	$[\nu_m\oplus\nu_n]_{\mathbf{R}}$	$4m+4n$
$\mathbf{SO}(2)\times\mathbf{SO}(n)$	$\rho_2\otimes\rho_n$	$2n$
$\mathbf{SU}(2)\times\mathbf{SU}(n)$	$[\mu_2\otimes_{\mathbf{C}}\mu_n]_{\mathbf{R}}$	$4n$
$\mathbf{Sp}(2)\times\mathbf{Sp}(n)$	$\nu_2\otimes_{\mathbf{H}}\nu_n^*$	$8n$

この他にも例外的なものが若干ある。詳しくは、W.Y.Hsiang-H.B.Lawson の論文中の表 [9] または麻生透の論文 [1] を参照して欲しい。

2. 非コンパクト半単純リイ群の例

先の表に現れたコンパクトリイ群を極大コンパクト部分群に持つような非コンパクト半単純リイ群の例を挙げておこう。

$$\mathbf{SO}(p,q)=\{A\in M_{p+q}(\mathbf{R}): {}^tAI_{p,q}A=I_{p,q}, \det A=1\}$$

$\mathbf{SO_0}(p,q):\mathbf{SO}(p,q)$ の単位元を含む連結成分

$$\mathbf{SO_0}(p,q)\cap\mathbf{SO}(p+q)=\mathbf{SO}(p)\times\mathbf{SO}(q)$$

$$\mathbf{SU}(p,q)=\{A\in M_{p+q}(\mathbf{C}): A^*I_{p,q}A=I_{p,q}, \det A=1\}$$

$$\mathbf{SU}(p,q)\cap\mathbf{U}(p+q)=\mathbf{S}(U(p)\times\mathbf{U}(q))$$

$$\mathbf{Sp}(p,q)=\{A\in M_{2p+2q}(\mathbf{C}): {}^tAJ_{p+q}A=J_{p+q}, {}^tAK_{p,q}\bar{A}=K_{p,q}\}$$

$$\mathbf{Sp}(p,q)\cap\mathbf{U}(2p+2q)=\mathbf{Sp}(p)\times\mathbf{Sp}(q)$$

$$I_{p,q}=\begin{bmatrix}-I_p & 0\\ 0 & I_q\end{bmatrix},\quad K_{p,q}=\begin{bmatrix}I_{p,q} & 0\\ 0 & I_{p,q}\end{bmatrix},\quad J_n=\begin{bmatrix}0 & I_n\\ -I_n & 0\end{bmatrix}$$

3. 非コンパクト半単純リイ群への拡張 (その 1)

まず、非コンパクト半単純リイ群 G とその極大コンパクト部分群 K の対が次の表にある場合について考察しよう。

G	K	H	$\dim F(H)$
$\mathbf{SO}_0(p,q)$	$\mathbf{SO}(p)\times\mathbf{SO}(q)$	$\mathbf{SO}(p-1)\times\mathbf{SO}(q-1)$	1
$\mathbf{SU}(p,q)$	$\mathbf{S}(\mathbf{U}(p)\times\mathbf{U}(q))$	$\mathbf{S}(\mathbf{U}(p-1)\times\mathbf{U}(q-1))$	3
$\mathbf{Sp}(p,q)$	$\mathbf{Sp}(p)\times\mathbf{Sp}(q)$	$\mathbf{Sp}(p-1)\times\mathbf{Sp}(q-1)$	3

この表において、標準的球面への極大コンパクト部分群の線形作用に関する主イソトロピー群を H で表し、群 H に制限した作用の不動点集合を $F(H)$ で表している。$F(H)$ は球面になる。

まず、群 G の線形作用、すなわち $\Phi(A,X)=\|AX\|^{-1}AX$ で与えられる可微分作用 $\Phi: G\times S^{k(p+q)-1}\to S^{k(p+q)-1}(k=1,2,4)$ 、について調べよう。

上記の 3 つの場合をまとめて記述するため、$G=G(p,q), K=K(p,q)$ と書き、点 X におけるイソトロピー部分群を G_X で表す。このような記号の下で、殆どの場合 (p,q が 2 または 3 以上の場合)、$H=K(p-1,q-1)$ と表示される。

群 G の線形作用について、次の等式が成り立つ。

$$\bigcap_{X\in F(H)} G_X = G(p-1,q-1).$$

また、$G(p-1,q-1)$ の $G(p,q)$ における中心化群を $N(p,q)$ と置けば、自然な対応を通じて、$N(p,q)\cong G(1,1)$ であり、次の等式が成り立つ。

$$G(p,q)=K(p,q)N(p,q)G_X;\ {}^{\forall}X\in F(H).$$

この情報をきちんと見ると、制限 K 作用に関する軌道空間は閉区間と同相で、その両端に対応するのが、特異軌道であるが、この 2 つの特異軌道は、線形 G 作用に関する開軌道に包まれている。さらに、線形 G 作用に関しては、この 2 つの開軌道の他に唯 1 つのコンパクト軌道を持つことが分かる。実は、線形 K 作用の拡張になっている如何なる可微分 G 作用についても、制限 K 作用の 2 つの特異軌道は、G 作用の開軌道に包まれることが、G の部分群の計算によって確かめられる。

さらに、線形 K 作用の拡張になっている如何なる可微分 G 作用についても、$F(H)$ の各点におけるイソトロピー群は、線形 G 作用に関する $F(H)$ の或る点の

イソトロピー群に一致するかその群を正規部分群に持つことを、リイ環の計算によって示すことができる。

これらの事実および上記の最後の等式が線形 K 作用の拡張になっている可微分 G 作用の分類を可能にしている。

本稿では解説しないが、麻生透 [2] のアイデアが有効である。後続の論文として、[12, 13, 33, 35, 36, 39] などがある。

4. 非コンパクト半単純リイ群への拡張 (その２)

次に、非コンパクト半単純リイ群 G とその極大コンパクト部分群 K の対が次の表にある場合について考察しよう。

G	K	H	$\dim F(H)$
$\mathbf{SL}(p,\mathbf{R})\times\mathbf{SL}(q,\mathbf{R})$	$\mathbf{SO}(p)\times\mathbf{SO}(q)$	$\mathbf{SO}(p-1)\times\mathbf{SO}(q-1)$	1
$\mathbf{SL}(p,\mathbf{C})\times\mathbf{SL}(q,\mathbf{C})$	$\mathbf{SU}(p)\times\mathbf{SU}(q)$	$\mathbf{SU}(p-1)\times\mathbf{SU}(q-1)$	3
$\mathbf{SL}(p,\mathbf{H})\times\mathbf{SL}(q,\mathbf{H})$	$\mathbf{Sp}(p)\times\mathbf{Sp}(q)$	$\mathbf{Sp}(p-1)\times\mathbf{Sp}(q-1)$	3

先の場合と同様に、群 G の線形作用、すなわち $\Phi(A,X)=\|AX\|^{-1}AX$ で与えられる可微分作用 $\Phi: G\times S^{k(p+q)-1}\to S^{k(p+q)-1}(k=1,2,4)$ 、について調べよう。上の表の３つの場合について全く同様に考察できるはずだが、ここでは第１の場合 $G=\mathbf{SL}(p,\mathbf{R})\times\mathbf{SL}(q,\mathbf{R})$ についてのみ考察を続けよう。

この場合の線形 G 作用については、制限 K 作用の２つの特異軌道はいずれも G-不変になり、**(その１)** の場合とは異なる様相を呈している。

G の閉部分群で或る条件を満たすものを数え上げた結果、制限 K 作用の２つの特異軌道は、線形 K 作用の拡張になっている可微分 G 作用について常に G-不変になることが分かる。

さらに、$F(H)$ の各点のイソトロピー部分群は $L=L(p)\times L(q)$ を包むことが分かる (必要なら、K の各元を不変にする G の自己同型で移す)。ここに、$L(p)$ は $\mathbf{SL}(p,\mathbf{R})$ の連結閉部分群で、次の形の行列の全体である。

$$\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & * & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

G における H の中心化群の連結成分を M とする。M は加法群 $\mathbf{R}^2$ と同型である。実際、M の元は次のように表示される。

$$(\mathrm{diag}(e^{\theta_1}, *, \cdots, *), \mathrm{diag}(e^{\theta_2}, *, \cdots, *))$$

ここで、線形 K 作用の拡張になっている可微分 G 作用を Ψ とする。$F(H)$ は M 不変な単位円周であり、G 作用を $F(H)$ 上の M 作用に制限したものは、M と $\mathbf{R}^2$ との自然な同型を通して次のように表示できる。

$$\Psi_M((\theta_1, \theta_2), (u, v)) = (\alpha u, \beta v).$$

ここに、α, β は θ_1, θ_2, u, v に関する可微分関数であり、特に u, v については偶関数になっている。

途中の計算は省略するが、関数 α, β を使うと、元の G 作用 Ψ は次のように表示できることが分かる。

$$\Psi((g_1, g_2), \mathbf{u} \oplus \mathbf{v}) = \alpha \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|g_1\mathbf{u}\|} g_1\mathbf{u} \oplus \beta \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|g_2\mathbf{v}\|} g_2\mathbf{v}$$

ただし、$\mathbf{u} \in \mathbf{R}^p, \mathbf{v} \in \mathbf{R}^q, \|\mathbf{u}\| \neq 0, \|\mathbf{v}\| \neq 0$ かつ $\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 = 1$ であり、

$$\alpha = \alpha\left(\left(\log \frac{\|g_1\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \log \frac{\|g_2\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\right), (\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|)\right),$$
$$\beta = \beta\left(\left(\log \frac{\|g_1\mathbf{u}\|}{\|\mathbf{u}\|}, \log \frac{\|g_2\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}\right), (\|\mathbf{u}\|, \|\mathbf{v}\|)\right)$$

とする。さらに、次式が成り立つ。

$$\Psi((g_1, g_2), \mathbf{u} \oplus \mathbf{0}) = \|g_1\mathbf{u}\|^{-1} g_1\mathbf{u} \oplus \mathbf{0},$$
$$\Psi((g_1, g_2), \mathbf{0} \oplus \mathbf{v}) = \mathbf{0} \oplus \|g_2\mathbf{v}\|^{-1} g_2\mathbf{v}.$$

この結果、線形 K 作用の拡張になっている可微分 G 作用 Ψ は $F(H)$ 上の制限 M 作用により記述できることが分かった。実は、$F(H)$ 上の可微分 M 作用で若干の条件を満たすものから、上記の式を使って抽象的な G 作用を構成できることも分かる。残る問題は、構成した G 作用がいつ可微分作用になるかを調べることである。この問題を完全に解決するには、Cairns-Ghys の論文 [5] が欠かせないも

のであり、先の表の他の２つの場合について同様の研究をするには、Cairns-Ghys の論文 [5] で考察しているものの類似の結果を示すことが求められる。

最も単純な $F(H)$ 上の M 作用として、$\alpha \equiv \beta \equiv 1$ がある。この M 作用から定まる G 作用は次式で与えられ、C^1-級でないことが分かる。

$$\Psi((g_1, g_2), (\mathbf{u}, \mathbf{v})) = \frac{\|\mathbf{u}\|}{\|g_1\mathbf{u}\|} g_1\mathbf{u} \oplus \frac{\|\mathbf{v}\|}{\|g_2\mathbf{v}\|} g_2\mathbf{v}.$$

非可算無限の可微分 G 作用を構成することができたが、詳細は省略する。文献 [37] を参照して欲しい。

5. 非コンパクト半単純リイ群への拡張（その３）

最後に、非コンパクト半単純リイ群 G とその極大コンパクト部分群 K の対が次の表にある場合について言及しよう。

G	K	ψ
$\mathbf{SL}(2,\mathbf{R}) \times \mathbf{SL}(n,\mathbf{R})$	$\mathbf{SO}(2) \times \mathbf{SO}(n)$	$\rho_2 \otimes \rho_n$
$\mathbf{SL}(2,\mathbf{C}) \times \mathbf{SL}(n,\mathbf{C})$	$\mathbf{SU}(2) \times \mathbf{SU}(n)$	$[\mu_2 \otimes_{\mathbf{C}} \mu_n]_{\mathbf{R}}$
$\mathbf{SL}(2,\mathbf{H}) \times \mathbf{SL}(n,\mathbf{H})$	$\mathbf{Sp}(2) \times \mathbf{Sp}(n)$	$\nu_2 \otimes_{\mathbf{H}} \nu_n^*$

先の場合と同様に、群 G の線形作用、すなわち $\Phi(A,X) = \|AX\|^{-1}AX$ で与えられる可微分作用 $\Phi : G \times S^{2kn-1} \to S^{2kn-1} (k = 1,2,4)$ 、について調べると、制限 K 作用の２つの特異軌道のうち、１つは G-不変であり、もう１つは G 作用の開軌道に包まれている。

線形 K 作用の拡張である可微分 G 作用のイソトロピー群として現れる可能性のある G の部分群を求める作業中であるが、**(その１),(その２)** の場合と違い、線形 G 作用のイソトロピー群として現れない型の部分群が見出され、この型の部分群の存在がどのような効果を生むのか予測できない状況にある。

おわりに

本稿では、非コンパクト半単純リイ群の球面への可微分作用で、極大コンパクト部分群の作用に制限すると余次元１の軌道を持つものについて考察してきたが、**はじめに**で述べたように、もう１つの出発点である「極大コンパクト部分群の作

用に制限した場合、主軌道が球面で、特異軌道は不動点である場合」についての研究には、文献[23, 24, 25, 29]などがある。

また、**twisted linear action** に関する文献には[3, 14, 15, 16, 30, 31, 32]などがある。

末尾の**参考文献表**には、この他にも非コンパクト変換群に関するものを載せておいた。

参考文献

[1] T.Asoh, *Compact transformation groups on Z_2-cohomology spheres with orbit of codimension* 1, Hiroshima Math. J. **11** (1981), 571–616.

[2] T.Asoh, *On smooth* $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$ *actions on 3-manifolds*, Osaka J. Math. **24** (1987), 271–298.

[3] T.Asoh, *A note on twisted linear actions on a sphere*, Interdisciplinary Information Sciences **2** (1996), 125–129.

[4] G.E.Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.

[5] G.Cairns and É.Ghys, *The local linearization problem for smooth* $\mathbf{SL}(n)$-*actions*, Enseign. Math. (2) **43** (1997), 133–171.

[6] V.W.Guillemin and S.Sternberg, *Remarks on a paper of Hermann*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 110–116.

[7] R.Hermann, *The formal linearization of a semisimple Lie algebra of vector fields about a singular point*, Trans. Amer. Math. Soc. **130** (1968), 105–109.

[8] W.Y.Hsiang, *Remarks on differentiable actions of non-compact semi- simple Lie groups on Euclidean spaces*, Amer. J. Math. **90** (1968), 781–788.

[9] W.Y.Hsiang and H.B.Lawson, *Minimal submanifolds of low cohomogeneity*, J. Diff. Geo. **5** (1971), 1–38.

[10] K.Kawakubo, *The theory of transformation groups*, Oxford Univ. Press, 1991.

[11] D.Montgomery, *Simply connected homogeneous spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 467–469.

[12] K.Mukōyama, *Smooth* $\mathbf{Sp}(2,\mathbf{R})$*-actions on the* 4*-sphere*, Tôhoku Math. J. **48** (1996), 543–560.

[13] K.Mukōyama, *Smooth* $\mathbf{SU}(p,q)$*-actions on the* $(2p+2q-1)$*-sphere and on the complex projective* $(p+q-1)$*-space*, Kyushu J. Math. to appear

[14] H.Ôike, *Twisted linear actions on projective spaces*, Hokkaido Math. J. **18** (1989), 339–354.

[15] H.Ôike, *Twisted linear actions on complex Grassmannians*, Hokkaido Math. J. **21** (1992), 25–37.

[16] M.Ômori, *Twisted linear actions of* $\mathbf{SL}(n,\mathbf{C})$ *and* $SL(n,\mathbf{H})$ *on spheres*, Osaka J. Math. **37** (2000), 23–35.

[17] R.Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups*, Memoirs, Amer. Math. Soc. **22** (1957).

[18] R.W.Richardson, *Deformations of Lie subgroups and the variation of isotropy subgroups*, Acta Math. **129** (1972), 35–73.

[19] C.R.Schneider, $\mathbf{SL}(2,\mathbf{R})$ *actions on surfaces*, Amer. J. Math. **96** (1974), 511–528.

[20] S.Smale, *Differentiable dynamical systems*, Bull. Amer. Math. Soc. **73** (1967), 747–817.

[21] S.Smale, *The Mathematics of Time*, Springer-Verlag, 1980.

[22] T.Tomuro, *Smooth* $\mathbf{SL}(n,\mathbf{H}),\mathbf{Sp}(n,\mathbf{C})$ *actions on* $(4n-1)$*-manifolds*, Tôhoku Math. J. **44** (1992), 243–250.

[23] F.Uchida, *Classification of real analytic* $\mathbf{SL}(n,\mathbf{R})$ *actions on n-sphere*, Osaka J. Math. **16** (1979), 561–579.

[24] F.Uchida, *Real analytic* $\mathbf{SL}(n,\mathbf{R})$ *actions on spheres*, Tôhoku Math. J. **33** (1981), 145–175.

[25] F.Uchida, *Real analytic* $\mathbf{SL}(n,\mathbf{C})$ *actions*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **10-1** (1980), 1–14.

[26] F.Uchida, *Actions of special linear groups on a product manifold*, Bull. Yamagata Univ. Nat. Sci. **10-3** (1982), 227–233.

[27] F.Uchida, *On the non-existence of smooth actions of complex symplectic group on cohomology quaternion projective spaces*, Hokkaido Math. J. **12** (1983), 226–236.

[28] F.Uchida, *Construction of a continuous* $\mathbf{SL}(3,\mathbf{R})$ *action on 4-sphere*, Publ. of RIMS **21** (1985), 425–431.

[29] F.Uchida, *Real analytic actions of complex symplectic groups and other classical Lie groups on spheres*, J. Math. Soc. Japan **38** (1986), 661–677.

[30] F.Uchida, *On a method to construct analytic actions of non-compact Lie groups on a sphere*, Tôhoku Math. J. **39** (1987), 61–69.

[31] F.Uchida, *Certain aspects of twisted linear actions*, Osaka J. Math. **25** (1988), 343–352.

[32] F.Uchida, *Certain aspects of twisted linear actions*,II, Tôhoku Math. J. **41** (1989), 561–573.

[33] F.Uchida, *On smooth* $\mathbf{SO}_0(p,q)$*-actions on* S^{p+q-1}, Osaka J. Math. **26** (1989), 775–787.

[34] F.Uchida, *Smooth* $\mathbf{SL}(n, \mathbf{C})$ *actions on* $(2n-1)$*-manifolds*, Hokkaido Math. J. **21** (1992), 79–86.

[35] F.Uchida, *On smooth* $\mathbf{SO_0}(p, q)$*-actions on* S^{p+q-1},II, Tôhoku Math. J. **49** (1997), 185–202.

[36] F.Uchida, *On smooth* $\mathbf{Sp}(p, q)$*-actions on* $S^{4p+4q-1}$, Osaka J. Math. to appear

[37] F.Uchida, *On smooth* $\mathbf{SL}(m, \mathbf{R}) \times \mathbf{SL}(n, \mathbf{R})$*-actions on* S^{m+n-1}, in preparation

[38] F.Uchida and K.Mukōyama, *Smooth actions of non-compact semi-simple Lie groups*, to appear elsewhere

[39] O.Yokoyama, *A note on smooth* $\mathbf{SL}(2, \mathbf{C})$*-actions on 3-dimensional closed manifolds*, Interdisciplinary Information Sciences, **2-1** (1996), 89–102.

有理ホモトピー型のモジュライ問題

琉球大学 理学部　志賀 博雄

1 序

本稿は山口俊博氏との共同研究 [7] の概要を述べたものである。ここでは、次の問題を考える。

「有理数体 Q 上の可換な 次数付き代数 (以後 G.A. と書く) A^* が与えられたとき

$$H^*(X;Q) \cong A^*$$

となる有理ホモトピー型 X の同型類の集合 $\mathcal{M}_{A^*}$ はどのようなものか？」

この問題は、我々とは異なる方法で [1],[2],[3],[4] らによって、いくつかの例が計算されていた。また任意の自然数 n に対し $\mathcal{M}_{A^*}$ の濃度が n となる G.A. A^* が存在することが [3] により示されている。我々は Sullivan([5]) の極小モデルに基づいて議論する。方法は [6] の一般化とみなすことができる。

2 主結果

A^* を G.A. とする。以後、微分次数付き代数 を D.G.A. と書く。

定義：A^* が k-instrically formal とは、$H^*(m) = A^*$ となる任意の極小モデル m に対し $m(k-1)$ は、D.G.A. の同型の意味で一意に定まる。(ここで、$m(k)$ は の次数が k 以下の元で生成された m の部分 D.G.A. を表す。)

以後、A^* は次を満たすもののみを考える。正の自然数nが存在して、

(1) A^* は $(n-1)$-instrically formal

(2) $A^1 = 0$ $A^j = 0$ for $j > n$

(3) $\dim_Q A^i < \infty$ for each i.

このような A^* に対し 次の条件を満たす極小モデル m_D が一意に存在する。D.G.A.map $\rho : m_D \to A^*$ があって、

(a) $H^i(\rho_D) = \rho_D^i : H^i(m_D) \to A^i$ は $i \leq n-1$ で同型

(b) ρ_D^n は $(H^+(m_D) \cdot H^+(m_D))^n$ に制限すると同型

今、 $\dim_Q H^n(m_D) = v,\ \dim_Q H^n(m_D)/H^+(m_D) \cdot H^+(m_D) = t,$

$$\dim_Q A^n = u,\ \dim_Q A^n/(A^+ \cdot A^+)^n = s$$

とおく。このとき、(b) より、

$$u - s = v - t$$

である。

$$max(0, t-s) \leq l \leq t,\ dim_Q W = l,\ W \cap (H^+(m_D) \cdot H^+(m_D))^n = \{0\}\ (*)$$

となる $H^n(m_D)$ の部分空間 W に対し $H^*(m_W) \cong A^*$ となる極小モデル m_W が構成できる。

このような 2 つの W_1, W_2 に対し、m_{W_1} と m_{W_2} が D.G.A. 同型になるための必要十分条件は、ある D.G.A. 同型 $\Phi : m_D \to m_D$ があって、$\Phi^*(W_1) = W_2$ となることである。

$(*)$ を満たす W の集合 $\mathcal{O}_l$ は v 次元空間の中の l 次元部分空間のなす Grassmann 多様体の有理点 $Gr(v, l)(Q)$ の Zariski 開集合になる。

$G = Aut\ m_D$ を m_D の D.G.A. automorphisms のなす群とする。これは Q 上定義された代数群の有理点である。G は $\mathcal{O}_l$ に $H^n(m_D)$ を通して作用する。

定理: $\mathcal{M}_{A^*}$ は、orbit space の disjoint union

$$\coprod_{l=max(t-s,0)}^{t} \mathcal{O}_l/G.$$

と bijiective な対応がある。A^* の formal model は $\mathcal{O}_t/G$ にある。

系: (1) $s = 0$ なら, $\mathcal{M}_{A^*}$ は $\mathcal{O}_t/G$ と bijective な対応がある。

(2) もし $u = s = 1$ なら $\mathcal{M}_{A^*}$ は

$$Gr(t, t-1)(Q)/G \coprod \{*\} = P^{t-1}(Q)/G \coprod \{*\}.$$

と bijective な対応がある。

3 いくつかの例

(1) $A^* = H^*(S^3 \vee S^5 \vee S^{10}; Q)$

A^* は 9-intrinsiclly formal で、

$$m_D = (\wedge(x, y, \theta_7), d)$$

$d(x) = d(y) = 0$, $d\theta_7 = xy$, $H^{10}(m_D) = Q\{[x_3\theta_7]\}$ ゆえ、$n = 10$ で $v = t = 1$, $u = s = 1$ となり、系（２）より、

$$\mathcal{M}_{A^*} = Gr(1,0)(Q)/G \coprod \{*\} = 2\ points$$

(2) $A^* = H^*(S^3 \vee S^5 \vee S^{16}; Q)$

A^* は 15-intrinsiclly formal で、

$$m_D = (\wedge(x, y, \theta_7, \theta_9, \theta_{11}^1, \theta_{11}^2, \theta_{13}^1, \theta_{13}^2), d)$$

$d(x) = d(y) = 0$, $d\theta_7 = xy$, $d\theta_9 = x\theta_7$, $d\theta_{11}^1 = y\theta_7$, $d\theta_{11}^2 = x\theta_9$, $d\theta_{13}^1 = x\theta_{11}^2$, $d\theta_{13}^2 = x\theta_{11}^1 + y\theta_9$.

$$H^{16}(m_D) = Q\{[x\theta_{13}^1], [y\theta_{11}^1], [x\theta_{13}^2 + \theta_7\theta_9], [y\theta_{11}^2 + \theta_7\theta_9]\}$$

したがって $n = 16$ で $u = s = 1$ $v = t = 4$。系（２）より

$$\mathcal{M}_{A^*} = Gr(4,3)(Q)/G \coprod \{*\}$$

$e_1 = [x\theta_{13}^1], e_2 = [y\theta_{11}^1], e_3 = [x\theta_{13}^2 + \theta_7\theta_9], e_4 = [y\theta_{11}^2 + \theta_7\theta_9]$ とおき、$W \in Gr(4,3)(Q)$ を

$$a_{1,i}e_1 + a_{2,i}e_2 + a_{3,i}e_3 + a_{4,i}e_4 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

で張られた３次元部分空間とする。ここで、$\mathrm{rank}(a_{j,i})_{1\le j\le 4, 1\le i\le 3} = 3$。$Gr(4,3)(Q)$ は Plücker embdding $\phi : Gr \to P^3(Q)$,

$$\phi(W) = [\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{3,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{3,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{3,3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & a_{4,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{4,2} \\ a_{1,3} & a_{2,3} & a_{4,3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{3,1} & a_{4,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & a_{4,2} \\ a_{1,3} & a_{3,3} & a_{4,3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_{2,1} & a_{3,3} & a_{4,1} \\ a_{2,2} & a_{3,2} & a_{4,2} \\ a_{2,3} & a_{3,3} & a_{4,3} \end{vmatrix}],$$

によって $P^3(Q)$ に同型になる。$f \in Aut\ m_D = G$ を

$$f(x) = \lambda x, \quad f(y) = \mu y, \qquad \lambda, \mu \in Q^*$$

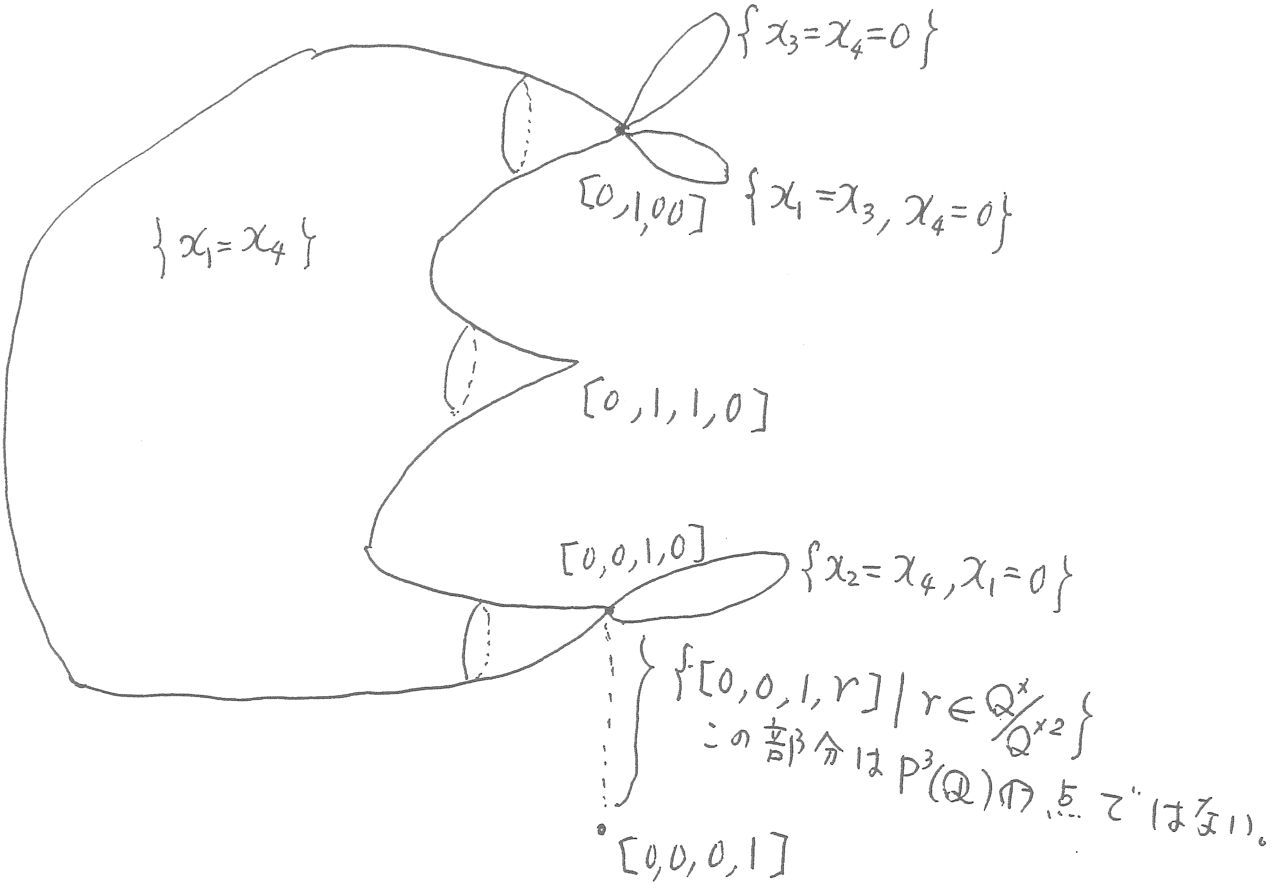
なる元とすると、

$$f(e_1) = \lambda^5 \mu e_1,\ f(e_2) = \lambda \mu^3 e_2,\ f(e_3) = \lambda^3 \mu^3 e_3,\ f(e_4) = \lambda^3 \mu^2 e_4.$$

このとき G は $P^3(Q)$ に $f \cdot [x_1, x_2, x_3, x_4] = [\lambda^9 \mu^6 x_1, \lambda^9 \mu^6 x_2, \lambda^{11} \mu^5 x_3, \lambda^7 \mu^7 x_4] = [\rho x_1, \rho x_2, \rho^2 x_3, x_4]$ により作用していることがわかる。ここで $\rho = \lambda^2 \mu^{-1}$。
したがって、

$$\mathcal{M}_{A^*} = P^3(Q)/Q^* \coprod \{*\} \ ; \ (\{*\} \text{ は formal space に対応})$$

がわかり、$P^3(Q)/Q^*$ は次の図で示されるような（点線の部分を除いた）$P^3(Q)$ の部分集合と bijective な対応がある。



$P^3(Q)/Q^*$ に商位相を入れるとこれは Hausdorff 空間にならない。その他いくつかの例が [7] で計算されている。

参考文献

[1] Felix, Y., [1979] *Classification homotopique des espaces rationals de cohomologie donnee*, Bull. Soc. Math. of Belgique, **31**, 75-86

[2] Halperin,S. and Stasheff,J., [1979] *Obstructions to homotopy equivalences*, Advance in Math., **32**, 233-279.

[3] Lupton, G., [1991] *Algebras realized by n rational homotopy types*, Proceedings of the A.M.S., **113**, 1179-1184.

[4] Schlessinger, M. and Stasheff, J., (1991) *Deformation theory and rational homotopy type*, to appear in Publ. Math. of I.H.E.S.

[5] Sullivan, D., [1978] *Infinitesimal computations in topology*, Publ. Math. of I.H.E.S. **47**, 269-331.

[6] Shiga, H. and Yagita, N., [1982] *Graded algebras having a unique rational homotopy type*, Proceedings of the A.M.S., **85**, 623-632.

[7] Shiga, H. and Yamaguchi, T., *The moduli problem for rational homotopy types*, preprint.

加群微分子による **EILENBERG-MOORE** スペクトル系列の解析
-随伴バンドルのコホモロジカル分解について-

栗林 勝彦 (岡山理科大学 理学部)

1. 序

次数つき代数[1] A から次数つき左 A-加群 L への次数 -1 の準同型 $\mathcal{D}: A \to L$ が A の任意の元 a, b に対して

$$\mathcal{D}(ab) = (-1)^{(\deg a+1)\deg b} b\mathcal{D}(a) + (-1)^{\deg a} a\mathcal{D}(b)$$

をみたすときこの写像 $\mathcal{D}$ を L に値を持つ A の加群微分子 (module derivation) という. 本稿では, 第 2 象限コホモロジカル型 Eilenberg-Moore スペクトル系列 (EMSS) $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ において定義される加群微分子が, その EMSS の第 1 列 $E_r^{-1,*}$ に現れるある性質を効果的に検出するということを説明する. また特にその応用として最近得られた随伴バンドルに関する結果について報告する. さて有理ホモトピー論 (それは以下の私達の考えの根幹を担っている) についての話から始めよう. 有理ホモトピー論は大雑把にいって空間の有理ホモトピー型[2] は完全に次数つき可換微分代数[3] により決定されるということを主張している. 特に単連結, 有限型の空間[4] の有理ホモトピー型から単連結, 有限型, 次数つき極小自由可換微分代数 $(\wedge V, d)$ [5] がつくる同型類への全単射があるということを述べている. すなわちホモロジーをとることにより多くのトポロジー的情報 (以後この言葉を多用するが, 厳密な意味はない. 空間を "分類する" 情報と考え頂きたい) は失われてしまうということであり, もしそうした情報を代数的対象から回復しようと思うのならば鎖複体のレベルで考えなければならないということである. したがって p-完備化された (mod p レベルの) 空間を考察対象とする場合であってもトポロジー的情報は特異鎖複体 $C^*(X; \mathbb{F}_p)$, またはその空間の代数的モデル[6] に隠されていると見ることは自然であろう (事実 Mandell [15] による E_∞ 代数からの試みはその成功例といえる). もし視点を鎖複体からスペクトル系列に移すならば, その収束先であるコホモロジーよりも鎖複体 (または微分代数) である各項 (E_r, d_r) に空間のトポロジー的情報が詰まっていると予想される.

---

[1] この稿では $A^i = 0$ $(i < 0)$ をみたす体上の次数つき代数のみを扱う.

[2] $\pi_*(f_i) \otimes \mathbb{Q}$ が同型となる写像 f_i の鎖 $X \xrightarrow{f_0} Z_1 \leftarrow Z_2 \cdots Z_m \xrightarrow{f_m} Y$ により繋げられる空間 X と Y は同じ有理ホモトピー型を持つという.

[3] A は次数つき代数, $d: A \to A$ は次数 $+1$ の微分, すなわち $d \circ d = 0$, $d(ab) = d(a)b + (-1)^{\deg a} a d(b)$, をみたすとき (A, d) を次数つき微分代数という.

[4] 任意の i に対して $\dim H^i(X; \mathbb{Q}) < \infty$ となる空間.

[5] V は $V^0 = 0 = V^1$, $\dim V^i < \infty$ をみたす次数つき $\mathbb{Q}$-ベクトル空間であり, $\wedge V$ は V^{odd} 上の外積代数と V^{even} 上の多項式環とのテンソル積を示す. さらに極小性は V の任意の元 v に対して dv が分解元であることを意味している.

[6] テンソル代数からなる微分代数 (TV, d) でホモロジー上同型を誘導する微分代数の射 $(TV, d) \to C^*(X; \mathbb{F}_p)$ が存在するとき (TV, d) を空間 X の代数的モデルという. X が単連結空間であるときその存在は [5], [18] で保証されている.

すなわち与えられた2つの空間がそれぞれの入力情報のもと自然に同型[7] であるならば各鎖複体 (E_r, d_r) 上にさえ違いはないはずである.

ここで以下私達が考察する Eilenberg-Moore スペクトル系列を思い起す.

定理 0.1 ([16] [2] [21], [4]). 連結なファイバーを持つファイブレーション $p: E \to B$ の写像 $f: X \to B$ によるプルバック

$$\begin{array}{ccc} E \times_B X & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

を考える. もし B が単連結, $H^*(E;\mathbb{F}_p)$, $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ そして $H^*(B;\mathbb{F}_p)$ が局所有限[8] であるとき $H^*(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$ に代数として収束する[9] 第2象限型スペクトル系列 (Eilenberg-Moore スペクトル系列) $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ で, 2重次数つき代数として,

$$E_2^{*,*} \cong Tor^{*,*}_{H^*(B;\mathbb{F}_p)}(H^*(E;\mathbb{F}_p), H^*(X;\mathbb{F}_p))$$

をみたすものが存在する.

この EMSS の古典的 (代数的) 構成方法においては微分トージョン積

$$Tor^*_{C^*(B;\mathbb{F}_p)}(C^*(E;\mathbb{F}_p), C^*(X;\mathbb{F}_p))$$

を与える鎖複体から $C^*(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$ への鎖複体としての射 (微分代数としての射ではない) でホモロジー上次数つき代数としての同型を誘導するものを与えることが非常に重要な点であった. したがって上述のような有理ホモトピー論的観点から眺めれば微分トージョン積 $Tor^*_{C^*(B;\mathbb{F}_p)}(C^*(E;\mathbb{F}_p), C^*(X;\mathbb{F}_p))$ を与える鎖複体そのものを解析することが[10], またはもっと "小さい" $Tor^{*,*}_{H^*(B;\mathbb{F}_p)}(H^*(E;\mathbb{F}_p), H^*(X;\mathbb{F}_p))$ を計算する棒構成から E_∞-項, さらに $H^*(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$ を再構成するその過程を考察することが $E \times_B X$ なる形で与えられる空間のトポロジー的性質を明らかにするために役立つと考えられる. 今回の私達の立場は後者である.

2. 加群微分子の例

まず棒分解の定義から始める. (A, d_A, ε) を添加写像 $\varepsilon: A \to \mathbb{F}_p$ をもつ添加次数付き微分代数, (N, d_N) を左 A-微分加群とする. このとき

$$B^{-q}(A, N) = A \otimes \overline{A}^{\otimes q} \otimes N$$

と定義する, ただし $\overline{A} = \mathrm{Ker}\varepsilon$. また $B^{-q}(A,N)$ の元 $a \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_q \otimes b$ を $a[a_1|\cdots|a_q]b$ と表す. さらに内微分 $\partial_{-q}: B^{-q}(A,N) \to B^{-q+1}(A,N)$, 外微分 d_{-q} :

---

[7] 例えば後述のファイバー積 $E \times_B X$ の場合, 入力情報は系列 $E \to B \leftarrow X$ であり自然に同型であるとはプルバックとしての射が同型であるということとみなす.

[8] コホモロジーは各次元で有限次元.

[9] $H^*(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$ にフィルトレーション $\{0\} \subset F^0 \subset F^{-1} \subset \cdots \subset H^*(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$ が定義されていて, 2重次数つき代数として $E_\infty^{*,*} \cong E_0^{*,*}$ である. ただし $E_0^{p,q} = F^pH^{p+q}(E \times_B X;\mathbb{F}_p)/F^{p+1}H^{p+q}(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$.

[10] この微分トージョン積の解析によるコホモロジー環 $H^*(E \times_B X;\mathbb{F}_p)$ へのアプローチは例えば [17], [13] で実行されている.

$B^{-q}(A,N) \to B^{-q}(A,N)$ をそれぞれ

$$\begin{aligned}
\partial_{-q}(a[a_1|\cdots|a_q]b) = \;& (-1)^{\deg a} a a_1[a_2|\cdots|a_q]b + \sum_i^{n-1} (-1)^{\deg a} a[\overline{a_1}|\cdots|\overline{a_i}a_{i+1}|\cdots|a_q]b \\
& -(-1)^{\deg a} a[\overline{a_1}|\cdots|\overline{a_{q-1}}]a_q b, \\
d_{-q}(a[a_1|\cdots|a_q]b) = \;& d_A a[a_1|\cdots|a_q]b + \sum_{i=1}^{n} \overline{a}[\overline{a_1}|\cdots|\overline{a_{i-1}}|d_A a_i|a_{i+1}|\cdots|a_q]b \\
& +\overline{a}[\overline{a_1}|\cdots|\overline{a_q}]d_N b
\end{aligned}$$

と定義する. ここで $\overline{a_l} = (-1)^{\deg a_l + 1} a_l$ である. このとき $\partial d_{-q} + d_{-q+1}\partial_{-q} = 0$ であることに注意する. 左 A-微分加群 L に対して $Tor_A(L,N)$ を計算する一つの微分複体は $(M \otimes_A B^\bullet(A,N), d_M \otimes 1 \pm 1 \otimes (d+\partial))$ で与えられる.

次に加群微分子の例を幾つか上げそれらの性質を述べる. A を次数付き可換代数, N を次数付き可換 A-代数とする.

命題 2.2 [12]. 次数 -1 の準同型

$$\mathcal{D}_{A,N} : A \to HH(A;N) = Tor_{A\otimes A}(N,A) = H(N \otimes_{A\otimes A} B^\bullet(A\otimes A, A), 1\otimes\partial)$$

を $x \mapsto 1_N[x\otimes 1 - 1\otimes x]1_A$ で定義する. このとき $\mathcal{D}$ は Hochschild ホモロジー $HH(A;N)$ に値をとる A の加群微分子である. ($A = N$ である場合 $\mathcal{D}_{A,N}$ を単に $\mathcal{D}_A$, $HH(A;A)$ を $HH(A)$ と表す.)

幾何学的にも加群微分子は定義される. 自由ループ空間 $LX (= X^{S^1})$ を S^1 から X への連続写像全体がなす空間とし, ループ空間 ΩX を LX の部分空間で基点を保つ連続写像全体がなす空間であると定義する.

命題 2.3 [12]. 評価写像 $ev : S^1 \times LX \to X$ を $ev(t,\gamma) = \gamma(t)$ と定義し S^1 に沿った積分写像 $\int_{S^1} : H^*(S^1 \times LX; \mathbb{F}_p) \to H^{*-1}(LX;\mathbb{F}_p)$ を $\int_{S^1}(e\otimes v) = v$ で定義する. ただし e は $id \in \pi_1(S^1)$ から Hurewicz 準同型を経由して得られる $H^1(S^1)$ の生成元である. このとき合成写像

$$\mathcal{D}_X := \int_{S^1} \circ ev^* : H^*(X;\mathbb{F}_p) \to H^{*-1}(LX;\mathbb{F}_p)$$

は $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ の加群微分子であり, Steenrod 代数の作用と可換である.

命題 2.2, 2.3 の加群微分子はある EMSS を用いて関連づけられる. その関連性をみるため, はじめに次の 2 つのプルバック図式 (前面と後面) とその間の射を考える.

$$\begin{tikzcd}
& \Omega X \arrow[rr] \arrow[dl, "j"'] \arrow[dd] & & PX \arrow[dl] \arrow[dd, "\varepsilon_0"] \\
LX \arrow[rr] \arrow[dd] & & X^I \arrow[dd, "\varepsilon_0\times\varepsilon_1" near start] & \\
& * \arrow[rr] \arrow[dl] & & X \arrow[dl, "i"] \\
X \arrow[rr, "\Delta"'] & & X\times X &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{aligned}
& PX = \{\gamma \in X^I | \gamma(1) = *\}, \\
& \varepsilon_t = \gamma(t), \\
& i(x) = (x,*) \\
& \Delta(x) = (x,x).
\end{aligned}$$

後面及び前面の図式から得られる EMSS をそれぞれ $\{E_r(\Omega X), d_r\}$ 及び $\{E_r(LX), d_r\}$ とし, i を含むプルバック図式の間の射が誘導するスペクトル系列の間の射を $\{f_r\}$: $\{E_r(LX), d_r\} \to \{E_r(\Omega X), d_r\}$ で表す.

命題 2.4 [12]. (1) $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ の加群微分子 $\mathcal{D}_X$ による像は EMSS のフィルター $F^{-1}H^{*-1}(LX;\mathbb{F}_p)$ に含まれる.

(2) 写像 η_{EM} と η_F をそれぞれ

$$H^*(X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathcal{D}_{H^*(X;\mathbb{F}_p)}} HH^{-1,*}(H^*(X;\mathbb{F}_p)) \cong E_2^{-1,*}(LX) \xrightarrow{r}$$
$$E_\infty^{-1,*}(LX) \xrightarrow{f_\infty} E_\infty^{-1,*}(\Omega X) = F^{-1}H^{*-1}(\Omega X;\mathbb{F}_p) \hookrightarrow H^{*-1}(\Omega X;\mathbb{F}_p),$$

$$H^*(X;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{\mathcal{D}_X} F^{-1}H^{*-1}(LX;\mathbb{F}_p) \xrightarrow{j^*} F^{-1}H^{*-1}(LX;\mathbb{F}_p) \hookrightarrow H^{*-1}(\Omega X;\mathbb{F}_p)$$

と定義する. このとき $\eta_{EM} = \eta_F$ であり, この写像はコホモロジカル懸垂写像 σ^* : $H^*(X;\mathbb{F}_p) \to H^{*-1}(X;\mathbb{F}_p)$ と一致する, ただし $r : E_2^{-1,*}(LX) \to E_\infty^{-1,*}(LX)$ は自然な射影.

(3) π を 射影 $F^{-1}H^*(LX;\mathbb{Z}/p) \to E_\infty^{-1,*}(LX)$ であるとする. そのとき

$$\pi \circ \mathcal{D}_X = r \circ \mathcal{D}_{H^*(X;\mathbb{F}_p)}.$$

上の命題は幾何学的に定義される加群微分子 $\mathcal{D}_X$ は EMSS 上代数的に定義される加群微分子 $\mathcal{D}_{H^*(X;\mathbb{F}_p)}$ を経由して分解されるということ, そしてコホモロジカル懸垂写像 $\sigma^* : H^*(X;\mathbb{F}_p) \to H^{*-1}(X;\mathbb{F}_p)$ はどちらの加群微分子も経由しているということを示している.

3. 随伴バンドルのコホモロジカル分解

同じファイバーと底空間をもつ2つのファイブレーション $F \to E \to M$ と $F \to E' \to M$ においてホモトピー同値写像 $\phi : E' \to E$ があって図式

$$\begin{array}{ccccc} F & \xrightarrow{j} & E & \longrightarrow & M \\ {\scriptstyle =}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi} & & \uparrow{\scriptstyle =} \\ F & \xrightarrow[j']{} & E' & \longrightarrow & M \end{array}$$

がホモトピー可換であるとき上の2つのファイブレーションはホモトピー同値であるという. 特に $F \to E' \to M$ が自明なファイブレーション $F \xrightarrow{in_2} M \times X \xrightarrow{pr_1} M$ である場合, コホモロジー上でその状況を代数的に考えれば次の概念もまた自然に定義される.

定義 3.1. p を素数または 0 とする. ファイブレーション $F \xrightarrow{j} E \to M$ において $H^*(M;\mathbb{F}_p)$-代数としての同型

$$\phi : H^*(E;\mathbb{F}_p) \cong H^*(M;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(F;\mathbb{F}_p)$$

で $in_2^* \circ \phi = j^*$ をみたすものが存在するときファイブレーション $F \xrightarrow{j} E \to M$ は mod p コホモロジカル分解するという. さらに ϕ が Steenrod 代数の作用を保つとき上のファイブレーションは $\mathcal{A}(p)$-コホモロジカル分解するという. ただし $p = 0$ の場合 $\mathbb{F}_0$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ を意味する.

以下私達が扱うファイブレーションは随伴バンドルに限る. さてその随伴バンドルの定義を思い起こす. まず G を有限ループ空間, すなわち有限 CW 複体のホモトピー型をもつ位相群とする[11]. $P \to M$ を連結有限ループ群 G を構造群にもつ主バンドルとする. このとき随伴作用 $ad : G \times G \to G; ad(g,h) = ghg^{-1}$ を用い定義される同伴バンドル $P \times_{ad} G \to M$ を随伴バンドルという. 特に $P \to M$ として普遍 G バンドル $EG \to BG$ を選ぶとき与えられる随伴バンドルはファイブ

[11]コンパクト Lie 群は有限ループ空間の例である

レーション $G \to BLG \to BG$ と見なされる. 実際, 位相群として LG は半直積 $\Omega G \rtimes G$ と同型である, ただし G の ΩG への作用は随伴作用 $Ad(g,\gamma) = g\gamma g^{-1}$ で与えられる. よって $G(\cong LG/\Omega G)$-バンドル $G \to B\Omega G \to BLG$ から同伴バンドル $EG \to EG \times_G B\Omega G \overset{\simeq}{\to} BLG$ が得られ, さらに随伴作用を考えれば弱ホモトピー同値 $E \times_G B\Omega G \overset{\simeq}{\to} EG \times_{ad} G$ の存在が示せる.

ここで $H^*(G;\mathbb{Z})$ が p-トージョンをもたない場合に EMSS を用いてコホモロジー環 $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ を計算する. ファイバー上恒等写像を誘導する Eschenburg[3] によるファイブレーションの射 (一番右) をさらに拡張して

$$\begin{array}{ccccccc}
P \times_{ad} G & \longrightarrow & EG \times_{ad} G & \xrightarrow{E\Delta\times 1} & EG^2 \times_{\delta G} G & \longrightarrow & BG \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \Delta} \\
M & \xrightarrow[f]{} & BG & \xrightarrow{B\Delta} & EG^2/\delta G & \xrightarrow[\rho]{} & BG \times BG.
\end{array}$$

を得る. ただし $\delta G = \{(g,g) \in G^2 | g \in G\}$ であり, ρ は包含準同型写像 $\delta G \to G \times G = G^2$ から誘導される分類空間の間の写像, f は 主バンドル $P \to M$ の分類写像である. このとき外側の図式はプルバック図式と考えられる. すなわち $P \times_{ad} G$ はファイブレーション $\Delta : BG \to BG \times BG$ の $\Delta \circ f : M \to BG \times BG$ によるプルバックである. よってこのプルバック図式に定理 0.1 を適用して $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ に収束する EMSS $\{E_r^{*,*}, d_r\}$ で

$$E_2^{*,*} \cong Tor^{*,*}_{H^*(BG;\mathbb{F}_p)\otimes H^*(BG;\mathbb{F}_p)}(H^*(M;\mathbb{F}_p), H^*(BG;\mathbb{F}_p))$$

をみたすものが得られる. 仮定から $H^*(G;\mathbb{Z})$ は p-トージョンをもたないからコホモロジー $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ は偶数次数をもつ生成元からなる多項式環となる: $H^*(BG;\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[y_1,...,y_l]$. トージョン積を計算するために $H^*(BG;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(BG;\mathbb{F}_p)$-加群としての $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ の Koszul-Tate 分解

$$\mathcal{K}^\bullet \xrightarrow{\varphi} H^*(BG;\mathbb{F}_p) \to 0$$

を考える. ただし $\mathcal{K}^\bullet = H^*(BG;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(BG;\mathbb{F}_p) \otimes \Lambda(\hat{y}_1,...,\hat{y}_l)$, $d(\hat{y}_i) = y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i$ であり, φ は $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ の積であり, さらに元の 2 重次数は bideg $\hat{y}_i = (-1, \deg y_i)$ で与えられる ([23, Proposition 3.5], [11, Proposition 1.1, 1.5]). よって先の EMSS の E_2-項は次のように計算される.

$$\begin{aligned}
E_2^{*,*} &\cong H(H^*(M;\mathbb{F}_p) \otimes_{H^*(BG;\mathbb{F}_p)\otimes H^*(BG;\mathbb{F}_p)} \mathcal{K}^\bullet; 1 \otimes d) \\
&\cong H(H^*(M;\mathbb{F}_p) \otimes \Lambda(\hat{y}_1,...,\hat{y}_l)\ ;\ d(\hat{y}_i) = (\Delta f)^*(y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i)),
\end{aligned}$$

ただし $x \in H^*(M;\mathbb{F}_p)$ のとき bideg $x = (0, \deg x)$ そして bideg $\hat{y}_i = (-1, \deg y_i)$ である. $(\Delta f)^*(y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i) = 0$ であるから, 結果として $E_2^{*,*} \cong H^*(M;\mathbb{F}_p) \otimes \Lambda(\hat{y}_1,...,\hat{y}_l)$ となる. E_2-項の生成元として $E_2^{-1,*}$, $E_2^{0,*}$ 上に存在するものが選べるから, この EMSS E_2-項で潰れることが判る. さらに拡張問題も解けて次を得る.

定理 3.3 [10]. $p=0$ または $H^*(G;\mathbb{Z})$ が p-トージョンをもたないなら随伴バンドル $G \to P \times_{ad} G \to M$ は mod p コホモロジカル分解する.

こうして $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ の環構造は主バンドル $P \to M$ の分類写像に関係なく完全に決定される. しかしながらファイブレーションのホモトピー同値による分類という立場から見ればこの事実は幸運とはいえない. すなわち $H^*(G)$ がトージョンをもたない場合はコホモロジー環の環構造のみで随伴バンドルを自明なバンドルと区別することは不可能となるからである. それとも mod p コホモロジカル分解は代数的には綺麗な分解であるから (少なくとも p-完備化後に) 空間的としても分解して

しまうのだろうか．有理ホモトピー論的にはこれは正しい．実際，私達は Halperin-Thomas による [6, Theorem II] から「2-ステージのファイバー[12] をもつファイブレーションが自明なファイブレーションに有理ホモトピー的に狭義同値[13] であるための必要十分条件は mod 0 コホモロジカル分解することである．」ということを知る．よって定理 3.3 からすべての随伴バンドルは有理ホモトピー的に自明バンドルと狭義同値になる．

pが 0 でない場合はどうであろうか．結果から言うと $H^*(P\times_{ad}G;\mathbb{F}_p)$ 上の Steenrod 作用素を考察することによりある随伴バンドルは自明なバンドルとコホモロジーの世界でも（したがってホモトピー同値のもとでも）区別できる．すなわちその場合，mod p コホモロジカル分解はするが $\mathcal{A}(p)$-コホモロジカル分解は許されないのである．Steenrod 代数 $\mathcal{A}(p)$ の作用の決定に貢献するのが私達が先に定義した加群微分子（命題 2.2）である．その詳細を述べる前にファイブレーション $G\xrightarrow{j}BLG\to BG$ に関する mod p コホモロジカル分解の特徴付けについて述べる．

定理 3.4 [9], [7], [8], [12].[14] G を単連結有限ループ空間とする．このとき次の 3 条件は同値である．

(1) $H^*(G;\mathbb{Z})$ は p ートージョンをもたない．

(2) $Ad^*=pr_2^*:H^*(\Omega G;\mathbb{F}_p)\to H^*(G\times\Omega G;\mathbb{F}_p)$.

(3) $G\xrightarrow{j}BLG\to BG$ は mod p コホモロジカル分解する．

定理 3.3 は上の主張 (1) ならば (2) の一般化であることがわかる．一方，自明バンドルの随伴バンドルは自明バンドルより定理 3.3 の逆は一般には成立しない．ループ群の分類空間 BLG に関する幾何学的特徴付けとして次のことが知られている．

事実 1[8, Iwase-Kono]. G を有限ループ群とする．このとき $\phi\circ j\simeq in_2$ をみたすホモトピー同値写像 $\phi:BLG\to BG\times G$ が存在するための必要十分条件は $G\simeq T$ である．

事実 2[1, Castellana-Kichloo]. G がコンパクト Lie 群であるとき任意の素数で完備化しても BLG は $BG\times G$ とホモトピー同値にはならない．

こうしてコホモロジー環の環構造のみでは随伴バンドルを自明なバンドルと区別できない例を身近に見つけることが出来る．

$\mathcal{A}(p)$-コホモロジカル分解，随伴バンドルのホモトピー同値の下での分類に関する私達の結果をここで述べる．

定理 3.5 [10]. p を奇素数，G を連結有限ループ空間でその有理コホモロジーが

$$H^*(G;\mathbb{Q})\cong\Lambda(x_{2m_1-1},\dots,x_{2m_l-1})$$

をみたすとする．ただし $\deg x_{2m_i-1}=2m_i-1$, $m_1\le m_2\le\cdots\le m_l$. さらに $m_1,\dots,m_l$ のうち 1 よりも大なる数（もし存在すれば）は p と素であると仮定する[15] このときファイブレーション $G\to BLG\to BG$ が $\mathcal{A}(p)$-コホモロジカル分解する

[12] 極小モデル $(\wedge V,d)$ において $d(V_0)=0$, $d(X_1)\subset\wedge V_0$ をみたす分解 $V=V_0\oplus V_1$ が存在する．

[13] 2 つのファイブレーション $F\to E\to M$ と $F\to E'\to M$ に対して $M_{\mathbb{Q}}$ 上の恒等写像を覆うホモトピー同値写像 $f:E_{\mathbb{Q}}\simeq E'_{\mathbb{Q}}$ が存在してそれはファイバー上恒等写像であるとき与えられた 2 つのファイブレーションは有理ホモトピー的に狭義同値という．

[14] 歴史的に言うと Kono-Kozima[9] により G がコンパクト単連結 Lie 群の場合に定理の 3 条件の同値性がはじめて明らかにされた．その後 Iwase[7] により p が奇素数という仮定のもと G が単連結有限ループ群である場合に定理の主張は拡張された．$p=2$ の場合は Iwase-Kono[8], 著者 [12] により証明され現在は定理 3.4 のかたちに整理されている．

[15] コンパクト単連結 Lie 群はこの仮定をみたす．

ための必要十分条件は $\mathbb{F}_p$-代数として $H^*(G;\mathbb{F}_p) \cong H^*(T;\mathbb{F}_p)$ となることである．ここで T は $\#\{m_i \mid m_i = 1\}$-次元トーラスである．

系 3.6 [10]. G を単連結有限ループ群とする．このとき任意の n に対してホモトピー同値写像 $\phi: \Sigma^n BLG \to \Sigma^n(BG \times G)$ で $\phi \circ \Sigma^n j \simeq \Sigma^n in_2$ をみたすものは存在しない．

定理 3.7 [10]. H をコンパクト単連結単純 Lie 群とする．G を H 型の fake Lie 群 (Notbohm-Smith[19] の意味での) である有限ループ空間と仮定する[16]．このときバンドル $G \to BLG \to BG$ が $\mathcal{A}(p)$-コホモロジカル分解するための必要十分条件は G が S^3 型の fake Lie 群であることである．

定理 3.8 [10]. M を 4 または 5 次元の CW 複体で $H^4(M;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}/p$ をみたすとする, ただし p は奇素数. このとき $n = p$ または $p-1$ であるならば自然な射

$$\beta : \{M \text{ 上の } SU(n)\text{-随伴バンドルの同型類}\} \to \{M \text{ 上の } SU(n)\text{-随伴バンドルのホモトピー同値類}\}$$

は全単射である．ここでバンドルのホモトピー同値類とは第 3 章で定義したファイブレーションのホモトピー同値を意味する．

$SU(n)$-随伴バンドルの同型類は今の場合 $[M, BSU(n)] \approx H^4(M;\mathbb{Z})$ に同型であるということに注意されたい．定理 3.8 は構造群の作用さえ無視した分類においても同型類は潰れることなく保たれるということを主張している．

4. $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ の $\mathcal{A}(p)$-代数上の環構造

序で述べたように与えられた 2 つの空間を区別するために私達はスペクトル系列の各 E_r-項を比較し (収束先では消えてしまうかも知れない) その違いを見出すという方法を選んだ．しかしながら随伴バンドルを考察する場合, 特に構造群 G の整数係数コホモロジーが p-トージョンを持たない場合, EMSS の環構造そして Steenrod 代数の作用もまた消えることなく $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ に現われる．すなわち $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ の $\mathcal{A}(p)$ 上の環構造は完全に EMSS から決まってしまう．これが期待以上の結果, 定理 3.5, 3.7, 3.8 そして系 3.6 をもたらした所以である．この章では前章の定理を証明するために鍵となる重要な定理とその証明の概略を与える．以下 $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ は多項式環で, $p=2$ の場合は奇数次数の生成元も許すものとする: $H^*(BG;\mathbb{F}_p) \cong \mathbb{F}_p[y_1, ..., y_l]$. 第 3 章の EMSS の計算から $H^*(M;\mathbb{F}_p)$-代数として

$$H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p) \cong H^*(M;\mathbb{F}_p) \otimes \Lambda(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_l) \quad (p \neq 2),$$

$$H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_2) \cong H^*(M;\mathbb{F}_2) \otimes \Delta(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_l)$$

となる．ここで $\Delta(\bar{y}_1, ..., \bar{y}_l)$ は $\{\bar{y}_{i_1} \cdots \bar{y}_{i_s} | i_1 < \cdots < i_s\}$ を基底にもつベクトル空間を意味する．

次の定理は EMSS 上 E_2-項で定義される加群微分子 (命題 2.2) $\mathcal{D}_{H^*(BG;\mathbb{F}_p), H^*(M;\mathbb{F}_p)}$ が $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ に持ち上がるということを示している．同時に環構造上では消えてしまう主バンドルの分類写像の情報は Steenrod 代数の作用を通じて表に現れるということがわかる．

定理 4.1 [10]. 加群微分子 $\mathcal{D}_f : H^*(BG;\mathbb{F}_p) \to H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ で Steenrod 作用素と可換であるものが存在する．特に, $Sq^i \bar{y}_j = \mathcal{D}_f Sq^i y_j$, そして $p \neq 2$ のとき $\wp^i \bar{y}_j = \mathcal{D}_f \wp^i y_j$, $\beta \wp^i \bar{y}_j = 0$. ただし $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ の $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$-加群構造は

[16] 任意の p に対して p-完備化後 BG と BH はホモトピー同値: $BG_p^\wedge \simeq BH_p^\wedge$

$(fq)^*$ で与えられる; $q : P \times_{ad} G \to M$ はバンドルの射影であり $f : M \to BG$ は主バンドル $P \to M$ の分類写像である.

証明の概略. まず $\mathcal{D}_f(y_j) = \bar{y}_j$ と定義しこれを $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ の $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ に値を取る加群微分子に拡張する. $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$ の $H^*(BG;\mathbb{F}_p) \otimes H^*(BG;\mathbb{F}_p)$-加群としての棒分解から Koszul-Tate 分解への射で $1[y_i \otimes 1 - 1 \otimes y_i]1$ を $\tilde{y}_i$ に写すものが構成できる ([11, Lemma 1.5]). したがって加群微分子の一意性により $E_\infty^{-1,*}$ 上で $\mathcal{D}_{H^*(BG;\mathbb{F}_p),H^*(M;\mathbb{F}_p)} = \pi\mathcal{D}_f$ が成り立つ. ただし $\pi : F^{-1}H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p) \to E_\infty^{-1,*}$ は自然な射影. EMSS 上で Steenrod 代数の作用 ([22]) を考えれば定理 1.4 の式は $E_\infty^{-1,*}$ に値を取る加群微分子 $\mathcal{D}_{H^*(BG;\mathbb{F}_p),H^*(M;\mathbb{F}_p)}$ に対して成立する. 随伴バンドル $P \times_{ad} G \to M$ は切断 $s : M \to P \times_{ad} G$ を持つから $s^*(y_j) = 0$ をみたす $\hat{y}_i \in E_\infty^{-1,*}$ の代表元のと仮定することができる. こうして $\mathcal{D}_f$ は要求された式をみたす. 実際

$$
\begin{aligned}
\pi\wp^i\bar{y}_j &= \pi\wp^i\mathcal{D}_f y_j = \wp^i\pi\mathcal{D}_f y_j = \wp^i\mathcal{D}_{H^*(BG;\mathbb{F}_p),H^*(M;\mathbb{F}_p)} y_j \\
&= \mathcal{D}_{H^*(BG;\mathbb{F}_p),H^*(M;\mathbb{F}_p)}\wp^i y_j = \pi\mathcal{D}_f\wp^i y_j.
\end{aligned}
$$

よって $\wp^i\bar{y}_j = \mathcal{D}_f\wp^i y_j + Q$, ただし $Q \in q^*H^*(M;\mathbb{F}_p)$. s^* を両辺に適用して $Q = 0$ を得る. □

$p = 2$ の場合 $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_p)$ に収束する EMSS の拡張問題はまだ完全には解けていなかった. ところが $\bar{y}_1^2 = Sq^{\deg y_i - 1}\bar{y}_i$ であるから定理 4.1 を適用して $H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_2)$ の環構造も次のように決定され得る.

$$H^*(P \times_{ad} G;\mathbb{F}_2) \cong H^*(M;\mathbb{F}_2) \otimes \mathbb{F}_2[\bar{y}_1, \bar{y}_2, .., \bar{y}_l] \,/ (\bar{y}_i^2 + \mathcal{D}_f Sq^{\deg y_i - 1} y_i; i = 1, 2, .., l).$$

最近 Castellana-Kitchloo[1] により $H^*(BLG_2;\mathbb{F}_2)$ (G_2 は G_2 型コンパクト単連結単純 Lie 群) の $\mathcal{A}(p)$-代数上の環構造が明らかにされた. 彼らの考察においては Steenrod 作用素に関する様々な可能性を生成元の次数により制限し決定するという方法が採られているで. その証明に比べ私達の決定方法はより系統的であるといえる.

例 4.2. c_i を i 次 Chern 類 $c_i \in H^*(BU(2);\mathbb{Z})$ の mod 3 reduction とする. $H(BU(2);\mathbb{F}_3)$ において $\wp^1 c_2 = c_1^2 c_2 + c_2^2$ であるから $\mathcal{A}(3)$ 上の代数として,

$$H^*(BLU(2);\mathbb{F}_3) \cong \mathbb{F}_3[c_1, c_2] \otimes \Lambda(\bar{c}_1, \bar{c}_2),$$

となる, ただし $\deg \bar{c}_i = 2i - 1$, $\wp^1\bar{c}_2 = 2c_1c_2\bar{c}_1 + c_1^2\bar{c}_2 + 2c_2\bar{c}_2$. である.

第 3 章定理 3.5, 3.7, 3.8 と系 3.6 の証明[17]のアイディアを簡単に述べてこの章を終える. $H^*(BG;\mathbb{F}_p)$-上の生成元 y_i に対して適切な Steenrod 作用素 $\wp^{i_1}\cdots\wp^{i_s}$ を施すことにより $\wp^{i_1}\cdots\wp^{i_s}y_i$ を分解元にすることができる. この元に加群微分子 $\mathcal{D}_f$ を作用させると $f^* = 0$ でないならば $f^*(y_k)$ なる元がその因子に現れ (掃き出され) 非自明な元をつくる. 自明バンドルの場合は一般に $\wp^{i_1}\cdots\wp^{i_s}\bar{y}_i = 0$ であるから, こうして与えられた随伴バンドルを自明バンドルとを区別することができる. 定理 3.8 の証明においては Shay[20] による $H^*(BSU;\mathbb{F}_p)$ 上の mod p Wu 形式 (特に $\wp^1$ に関する) が利用されているということも述べておく.

---

[17]詳しくは Kono-Kuribayashi[10] を参照

5. 結び

私達は今まで加群微分子が EMSS の内部 $E_{\infty}^{-1,*}$ に潜む代数的性質を検出し，その結果特に随伴バンドルのトポロジー的性質を導き出すということを見てきた．この手法を一般化すればプルバックの入力情報 $E \to B \leftarrow X$ に対してそれらのコホモロジーから $Tor_{H^*(B;\mathbb{F}_p)}(H^*(E;\mathbb{F}_p), H^*(X;\mathbb{F}_p))$ への適当な写像を定義し，さらに EMSS を通じて収束先を解析することも可能であろうことが予期される．結果として与えられる写像が加群微分子でなくても、またより深い "ライン" $Tor^{-n,*}_{H^*(B;\mathbb{F}_p)}(H^*(E;\mathbb{F}_p), H^*(X;\mathbb{F}_p))$ $(n > 1)$ に値を持ったとしても，それを経由して入力情報からプルバック $E \times_B X$ のある性質を引き出すことが可能かもしれない．

この考えの下，[14] において著者は最近プルバック図式[18]

$$\begin{array}{ccc} X^{S^k} & \longrightarrow & X^{I^k} \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle res} \\ X & \xrightarrow{c_{k-1}} & X^{S^{k-1}}, \end{array}$$

ただし $c_{k-1}(x)(t) = x$, res は制限写像，から定義される $H^*(X;\mathbb{F}_p)$-加群写像

$$\widetilde{\mathcal{D}}_k : \mathrm{Ker} c_{k-1}^* \to Tor^{-1,*}_{H^*(X^{S^{k-1}};\mathbb{F}_p)}(H^*(X;\mathbb{F}_p), H^*(X;\mathbb{F}_p))$$

を $\widetilde{\mathcal{D}}_k(a) = 1[a]1$ で定義した[19]．S^k から X への基点を保つ連続写像がつくる空間を $\Omega^k X$ とするとき，上図の左側は評価ファイブレーション $\Omega^k X \to X^{S^k} \overset{ev}{\to} X$ である，ただし $ev(\gamma) = \gamma(0)$．X が m 連結空間であるとき $H^*(X;\mathbb{F}_p)$ の ($\mathcal{A}(p)$-代数上の) 環としての情報が加群微分子 $\mathcal{D}_{H^*(X;\mathbb{F}_p)}$ により $H^*(LX;\mathbb{F}_p)$ にさらに $\widetilde{\mathcal{D}}_k$ $(k = 2, ..., m)$ を通じて $H^*(X^{S^m};\mathbb{F}_p)$ に受け継がれる様子が現在明らかになりつつある．特に $H^*(X^{S^m};\mathbb{Q})$ の環構造に関連した次の定理を得ている．

定理 1.4[14].[20] X は m-連結空間, k を $k \leq m$ をみたす整数とする．このとき評価ファイブレーション $\Omega^k X \to X^{S^k} \to X$ の $\mathbb{Q}$-係数 Leray-Serre スペクトル系列が E_2-項で潰れるための必要十分条件は $H^*(X;\mathbb{Q})$ が外積代数と多項式環のテンソル積になることである．

References

[1] N. Castellana and N. Kitchloo, A homotopy construction of the adjoint representation for Lie groups. Preprint, 2000.

[2] S. Eilenberg and J. C. Moore, Homology and fibrations I, Coalgebras, cotensor and its derived functors, Comment. math. helvet., **40**(1966), 199-236.

[3] J. -H. Eschenburg, New Examples of manifolds with strictly positive curvature, Inventiones Math. **66**(1982), 469-480.

[4] V. K. A. M. Gugenheim and J. P. May, On the theory and applications of differential torsion products, Menoirs of AMS **142**(1974).

[5] S. Halperin and J. M. Lemaire, Notions of category in differential algebra, Algebraic Topology: Rational Homotopy, Springer Lecture Notes in Math., Vol. 1318, Springer, Berlin, New York, 1988, pp. 138-154.

[18] $k = 1$ のときこの図式は命題 2.4 の前で定義された自由ループ空間 LX 持つプルバック図式と一致する．

[19] 再びライン -1 に値を持つ写像である

[20] この定理において $m = 1$ の場合は Smith[23], Vigué-Poirrie[24] によって証明されている．また Yamaguchi[25] により関数空間の極小モデルを利用した有理ホモトピー論的証明も与えられている．

[6] S. Halperin and J. -C. Thomas, Rational equivalence of fibrations with fiber G/K, Canad. J. Math., Vol. XXXIV(1982), 31-43.

[7] N. Iwase, Adjoint action of finite loop space, Proc. Amer. Math. Soc., **125**(1997), no 9, 2753-2757.

[8] N. Iwase and K. Kono, Adjoint action of a finite loop space II, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **129** (1999), no. 4, 773-785.

[9] K. Kono and K. Kozima, The adjoint action of a Lie group on the space of loops, J. Math. Soc. Japan **45**(1993), 495-510.

[10] A. Kono and K. Kuribayashi, Module derivations and cohomological splitting of adjoint bundles, preprint (2001).

[11] K. Kuribayashi, On the mod p cohomology of spaces of free loops on the Grassmann and Stiefel manifolds, J. Math. Soc. Japan **43**(1991), 331-346.

[12] K. Kuribayashi, Module derivations and the adjoint action of a finite loop space, J. Math. Kyoto Univ.**39** (1999), 67-85.

[13] K. Kuribayashi, The cohomology of a pull-back on $\mathbb{K}$-formal spaces, preprint (2000).

[14] K. Kuribayashi, Module derivations and non triviality of an evaluation fibration, in preparation.

[15] M. A. Mandell, E_∞ algebras and p-adic homotopy theory, Topology **40**(2001), 43-94.

[16] J. C. Moore, Algebre homologique et homologie des espace classificants, Seminarie Cartan (1959/60), exposé 7.

[17] H. J. Munkholm, The Eilenberg-Moore spectral sequence and strongly homotopy multiplcative maps, J. of Pure and Appl. Alge. **5**(1974) 1-50.

[18] B. Ndombol and J. -C. Thomas, On the cohomology algebra of free loop spaces, to appear in Topology.

[19] D. Notbohm and L. Smith, Fake Lie groups and maximal tori, I, Math. Ann. **288**(1990), 637-661.

[20] P. B. Shay, Mod p Wu formulas for the Steenrod algebra and the Dyer-Lashof algebra, Proc. Amer. Math. Soc. **63**(1977), no 2, 339-347.

[21] L. Smith, Homological algebra and the Eilenberg-Moore spectral sequence, Trans. Amer. Math. Soc. **129**(1967) 58-93.

[22] L. Smith, On the Künneth theorem I, Math. Z. **166**(1970), 94-140.

[23] L. Smith, On the characteristic zero cohomology of the free loop space, Amer. J. Math. **103**(1981), 887-910.

[24] M. Vigué-Poirrier, Dan le fibré de l'espace des lacets libres, la fibre n'est pas, en général, totalement non cohomologue a zéro, Math. Z. **181**(1982), 537-542.

[25] T. Yamaguchi, The fibration of function space is not totally non-cohomologous to zero in general, preprint, 2000.

DEPARTMENT OF APPLIED MATHEMATICS, OKAYAMA UNIVERSITY OF SCIENCE, OKAYAMA 700-0005, JAPAN `kuri@geom.xmath.ous.ac.jp`

解析的 K 理論と指数定理

森吉仁志

序

本講演の目的は次の二つである。第一は K 理論の解析的側面に関する基本事項を概説することであり、第二はフレドホルム作用素の指数、スペクトル流、エータ不変量等の解析的不変量を K 理論を用いて解釈することである。そしてこれらの概念を II 型、III 型のフォン・ノイマン環に対しても拡張し、いくつかの応用を述べる。

1. 位相的 K 理論と C^* 環の K 理論

コンパクトハウスドルフ空間 X に対して、X 上の複素ベクトル束の同型類の集合がベクトル束の Whitney 和により成す半群を考える。この半群の普遍アーベル群、即ち Grothendieck 群を $K^0(X)$ という。このとき $K^0(X)$ の任意の元は、X 上の 2 つのベクトル束 E, F の形式的な差 $E-F$ として表現される。またコンパクト空間対 (X,A) に対して相対 K 群 $K^0(X,A)$ を以下のように定義する。まず X 上の 2 つのベクトル束 E, F と A 上でのベクトル束の同型写像 $\alpha : E|_A \to F|_A$ の組 (E,F,α) の同型類が成す集合 $M(X,A)$ は直和により半群となる。さらに同型写像として X 上へ拡張可能である α からなる組 (E,F,α) の同型類が成す部分集合を $E(X,A)$ とする。このとき $K^0(X,A)=M(X,A)/E(X,A)$ はアーベル群となる。これをコンパクト空間対 (X,A) の相対 K 群と定義する。

また局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して X の一点コンパクト化 X^+ を考えて、$K^0(X)=\{E-F\in K^0(X^+) \mid \operatorname{rk}E=\operatorname{rk}F\}$ と定める。このとき高次の K 群を $K^{-i}(X)=K^0(X\times\mathbb{R}^i)$ $(i\geq 0)$ と定義する。ここで K^{-i} 群の間には Bott 周期性という周期 2 の同型が成り立つことが知られている：

$$K^{-i+2}(X)\cong K^{-i}(X).$$

これより $i>0$ に対しても $K^i(X)=K^{i-2j}(X)$ $(j>0)$ と定めることができる。この周期性から K 群に関して $K^0(X)$ と $K^1(X)$ のみを考えることが多い。

また連続写像 $f:X\to Y$ が与えられたとき、X 上のベクトル束 E に対し引き戻し f^*E を対応させて、準同型 $f^*:K^i(Y)\to K^i(X)$ が定まる。こうして定義された関手 $K^i(X)$ は一般コホモロジー理論を定めており、ホモトピー不変性・空間対に対する長完全系列の存在・切除定理等の性質を有することが知られている。

ここで $K^1(X)$ に関して別の定義も記述しておく。まず $M_n(\mathbb{C})$ を n 次複素行列環とし、ユニタリ群を $U_n=\{u\in M_n(\mathbb{C}) \mid uu^*=1\}$ と表す。ここで埋め込み

$$u\longmapsto\begin{pmatrix}u&0\\0&1\end{pmatrix}$$

2001 年度トポロジーシンポジウム講演アブストラクト

による直極限 $U_\infty = \varinjlim U_n$ を考える。コンパクトハウスドルフ空間 X に対し連続写像 $\varphi : X \to U_n$ と $\psi : X \to U_m$ が与えられたとき、これらを U への連続写像と考えて、その和を $(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) \oplus \psi(x)$ と定める。このときホモトピー類の集合 $[X, U_\infty]$ はアーベル群となり、さらにこの群は $K^1(X)$ と同型になる。則ち U_∞ は関手 K^1 の分類空間を与えている。ついでながら K^0 群に関しては $K^0(X) = [X, \mathbb{Z} \times Gr_\infty]$ となる。ただし Gr_∞ はグラスマン多様体の直極限を表す。

位相空間の K 群は連続関数環を用いても記述される。このことを以下に説明しよう。コンパクトハウスドルフ空間 X が与えられたとき、X の連続関数環 $C(X)$ は、

$$\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$$

をノルムとする可換 C^* 環である。また局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して

$$C_o(X) = \{f \in C(X^+) |\ f(\infty) = 0\}$$

と定める。ここで $X^+ = X \cup \{\infty\}$ は X の一点コンパクト化である。この環は、コンパクト台を持つ連続関数環を上のノルムにより完備化したものと考えてもよい。ここで Gel'fand-Naǐmark の定理によれば、任意の可換 C^* 環は適当な局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対する $C_o(X)$ と同型になる。従って可換 C^* 環の圏は、局所コンパクトハウスドルフ空間の圏と全く同値である。

ここで一般の C^* 環に対して K 群を定義しよう。まず C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元 1 をもつ時を考える。いま $\mathcal{A}$ を成分とする次数 n の行列環を $M_n(\mathcal{A})$ で表す。このとき埋め込み

$$a \longmapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

により定まる直極限を $M(\mathcal{A}) = \varinjlim M_n(\mathcal{A})$ とおく。そして $M(\mathcal{A})$ に属する巾等元全体の集合 $\{e \in M(\mathcal{A}) \mid e = e^2\}$ を $P(\mathcal{A})$ で表す。ここで連結成分の集合 $\pi_0 P(\mathcal{A})$ は

$$e_0 \oplus e_1 = \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}$$

を和として半群を成す。

定義 1.1. 半群の $\pi_0 P(\mathcal{A})$ の普遍アーベル群、すなわち *Grothendieck* 群を $K_0(\mathcal{A})$ と表し、$\mathcal{A}$ の K_0 群という。

また単位元をもつ C^* 環 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ と準同型写像 $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が与えられたとする。ここで 2 つの巾等元 $e_0, e_1 \in P(\mathcal{A})$ と、その像 $\rho(e_0)$ と $\rho(e_1)$ を結ぶ巾等元からなる連続な族 $(p_t)_{t \in [0,1]} \subset P(\mathcal{B})$ を考える。そして (e_0, e_1, p_t) がホモトピーで移りあうとき、これらは同値であると定義する。この同値類の全体を $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ で表す。直和により $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ は半群となる。さらに $P(\mathcal{A})$ への p_t の連続な持ち上げ $\tilde{p}_t$ が存在するような (e_0, e_1, p_t) の同値類が成す部分集合を $E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ とする。このとき $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})/E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ はアーベル群となる。

定義 1.2. アーベル群 $M(\mathcal{A}, \mathcal{B})/E(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ を $K_0(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ と表し、C^* 環の対 $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ の相対 K_0 群という。

註 1.3. 組 (e_0, e_1, p_t) において $\rho(e_0) = \rho(e_1)$ かつ p_t が一定であるとき、この組が定める元を単に $e_0 - e_1$ とも表す。

次にユニタリ元の全体 $\{u \in M_n(\mathcal{A}) \mid uu^* = 1\}$ を $U_n(\mathcal{A})$ で表す。ここで埋め込み

$$u \longmapsto \begin{pmatrix} u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

を考え、$U(\mathcal{A}) = \varinjlim U_n(\mathcal{A})$ とおく。このとき連結成分の集合 $\pi_0 U(\mathcal{A})$ は

$$u_0 \oplus u_1 = \begin{pmatrix} u_0 & 0 \\ 0 & u_1 \end{pmatrix}$$

を和としてアーベル群を成す。

定義 1.4. アーベル群 $\pi_0 U(\mathcal{A})$ を $K_1(\mathcal{A})$ と表し、$\mathcal{A}$ の K_1 群という。

このとき K_0 群の場合と同様に相対 K 群 $K_1(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ も定義される。

また単位元をもつ C^* 環 $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ と準同型写像 $\rho : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ が与えられたとき、自然な写像 $\rho_* : K_i(\mathcal{A}) \to K_i(\mathcal{B})$ $(i = 0, 1)$ が定まる。従って C^* 環の K_* 群は射に関して共変的である。

次に C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元をもたないとする。いま $\mathcal{A}^+ = \mathcal{A} \oplus \mathbb{C}$ の元 (a, x) を $a + x \cdot 1$ と表し、$(a + x \cdot 1)(b + y \cdot 1) = (a + b + xb + ya) + xy \cdot 1$ により $\mathcal{A}^+$ 上に積を定める。このとき $\mathcal{A}^+$ は単位元 1 をもつ C^* 環であり、自然な写像 $\pi : \mathcal{A}^+ \to \mathbb{C}$, $\pi(a + x \cdot 1) = x$ が存在する。

定義 1.5. C^* 環 $\mathcal{A}$ が単位元をもたないとき、$K_i(\mathcal{A}) = \ker[\pi_* : K_i(\mathcal{A}^+) \to K_i(\mathbb{C})]$ を $\mathcal{A}$ の K 群という。相対 K 群も同様に定義できる。

ここで K 群が有する重要な性質をまとめておこう。詳細については Blackadar [10] を参照して戴きたい。

1) 安定性: 自然に $K_*(\mathcal{A})$ は $K_*(\mathcal{A} \otimes M_n(\mathbb{C}))$ と同型である。

2) ホモトピー不変性: C^* 環 $\mathcal{A}$ を値とする閉区間上の連続関数環を $C([0,1], \mathcal{A})$ と表し、$0, 1$ での値をとる準同型写像をそれぞれ ι_0, $\iota_1 : C([0,1], \mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ とおく。与えられた準同型写像 ρ_0, $\rho_1 : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ に対し、準同型写像 $\rho : \mathcal{A} \otimes C[0,1] \to \mathcal{B}$ が存在して $\rho \circ \iota_i = \rho_i$ $(i = 0, 1)$ であるとき、ρ_0 と ρ_1 はホモトープという。このとき K 群上に誘導される準同型写像 $(\rho_0)_*$, $(\rho_i)_*$ は互いに一致する。

2) 6 項完全系列: 短完全系列

$$0 \to \mathcal{I} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \to 0$$

が与えられたとき、次の完全系列が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} K_0(\mathcal{I}) & \xrightarrow{\iota_*} & K_0(\mathcal{A}) & \xrightarrow{\pi_*} & K_0(\mathcal{B}) \\ {\scriptstyle \partial}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial} \\ K_1(\mathcal{B}) & \xleftarrow[\pi_*]{} & K_1(\mathcal{A}) & \xleftarrow[\iota_*]{} & K_1(\mathcal{I}) \end{array}$$

3) 切除同型: 短完全系列 $0 \to \mathcal{I} \xrightarrow{\iota} \mathcal{A} \xrightarrow{\pi} \mathcal{B} \to 0$ に対して、同型写像

$$K_i(\mathcal{I}) \cong K_i(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \qquad (i = 0, 1)$$

が存在する

4) **Bott 周期性:** いま $C_o(\mathbb{R}^2)$ により、無限遠点で 0 となる $\mathbb{R}^2$ 上の連続関数全体を表す。このとき同型写像

$$K_i(\mathcal{A}) \cong K_i(\mathcal{A} \otimes C_o(\mathbb{R}^2)) \qquad (i = 0, 1)$$

が存在する。

例 1.6. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体のなす C^* 環を $\mathcal{L}$ で表し、コンパクト作用素全体のなすイデアルを $\mathcal{K}$ とする。このとき

$$K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}, \qquad K_1(\mathcal{K}) = 0$$

となる。実際 $\mathcal{K}$ の射影元[1]はすべて $\mathcal{H}$ の有限次元部分空間上への射影作用素であることが知られており、$K_0(\mathcal{K})$ の任意の元はこれらの射影作用素の差で代表される。さらにトレイス Tr を用いて $e_0 - e_1 \mapsto \mathrm{Tr}\,(e_0 - e_1)$ として定まる写像

$$\mathrm{Tr}\ : K_0(\mathcal{K}) \to \mathbb{Z},$$

は同型写像を与える。また $\mathcal{L}$ に対しては *Kuiper* の定理により

$$K_0(\mathcal{L}) = 0, \qquad K_1(\mathcal{L}) = 0$$

が成り立つ。

ここで $\mathcal{Q} = \mathcal{L}/\mathcal{K}$ とおく。これを *Calkin* 代数という。このとき完全列

$$0 \to \mathcal{K} \to \mathcal{L} \to \mathcal{Q} \to 0$$

が引き起こす 6 項完全系列を考える。上の事実から連結準同型写像 $\partial : K_i(\mathcal{K}) \to K_{i+1}(\mathcal{K})$ が同型対応を与えるので、

$$K_0(\mathcal{Q}) = 0, \qquad K_1(\mathcal{Q}) = \mathbb{Z}$$

が判る。ここで $K_1(\mathcal{Q})$ に属する任意の元は $\mathcal{Q}$ の可逆元によって代表されている。そして $\mathcal{Q}$ の可逆元とは $\mathcal{K}$ を法として可逆な $\mathcal{H}$ 上の作用素、即ちフレドホルム作用素[2]に外ならない。フレドホルム作用素 $F : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ の指数を

$$\mathrm{Ind}\,F = \dim\ker F - \dim\ker F^*$$

と定めると、この対応により同型写像 $\mathrm{Ind}\ : K_1(\mathcal{Q}) \to \mathbb{Z}$ が与えられる。

局所コンパクトハウスドルフ空間 X から定まる $C_o(X)$ は C^* 環である。このとき位相的 K 群 $K^i(X)$ と C^* 環の K 群 $K_i(C_o(X))$ の関係について関心がもたれる。これについては次の定理がある。

定理 1.7 (Swan). 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して自然な同型写像 $K^i(X) \cong K_i(C_o(X))$ が存在する。

---

[1] 巾等元であって自己共役である元、即ち $e^2 = e, e^* = e$ なる元を射影元という。

[2] フレドホルム作用素全体を $Fred$、$\mathcal{Q}$ の可逆元全体を $GL(\mathcal{Q})$ で表す。このとき射影 $\pi : \mathcal{L} \to \mathcal{Q}$ に関し $\pi^{-1}(GL(\mathcal{Q})) = Fred$ であり、さらに $Fred$ と $GL(\mathcal{Q})$ はホモトピー同値となる。

従って C^* 環の K 理論は位相的 K 理論を包含していると言ってよい。この事実は非可換幾何学というものを展開するための最初の足がかりとなる。非可換幾何学については Connes [14] を参照されたい。

ここで各々の K 理論における射に関する共変･反変性について注意しておく。位相空間の K 群は関手として反変的であるが、C^* 環の K 群は関手として共変的である。しかし連続写像 $f : X \to Y$ が与えられたとき、C^* 環の準同型写像 $f^* : C_o(Y) \to C_o(X)$ は逆向きに定まる。従って f が与えられたとすると、C^* 環の K 群と位相空間の K 群に同じ向きの準同型写像が定まる。このとき添字の位置は議論を呼ぶところであるが、ここでは C^* 環の K 群は共変的と見て添字は下付としておく。

2. 同変 K 理論と係数拡大・簡約した K 理論

位相的 K 理論に関しては、いくつかの理論の拡張が存在する。例えば係数を $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}_p$ に拡大または簡約した K 理論、あるいは群作用をもつ空間に対する同変 K 理論がその例である。これらの K 理論に関しても対応する解析的 K 理論が存在していることを以下で述べよう。

まず群作用をもつ空間に対する同変 K 理論を考える。有限群あるいはコンパクトなリー群 G がコンパクトハウスドルフ空間 X に作用していると仮定する。このとき単なるベクトル束の代りに G 作用が付随したベクトル束（これを G ベクトル束という）を考える。ここで上に述べた Grothendieck 群の構成を G 作用を込めて考えることで、G ベクトル束の K 群を定義できる。こうして定まる K 群を G 同変 K 群とよび、$K^*_G(X)$ と表す。

一方群作用が X 上にあるとき、接合積とよばれる C^* 環 $C_o(X) \rtimes G$ が定義される。接合積は局所コンパクト群の作用に対して定まるが、ここでは有限群に対する接合積のみを定義しておこう。有限群 G が局所コンパクトハウスドルフ空間 X に（右から）作用しているとする。このとき $g \in G$ に対応する形式的ユニタリ元 U_g を導入し、それらの元の積を $U_g U_h = U_{gh}$ $(g, h \in G)$ と定めておく。そして連続関数環 $C_o(X)$ の元を係数とする形式的な有限和 $\sum_{g \in G} a_g U_g$ $(a_g \in C_o(X))$ の全体を $C_o(X) \rtimes G$ と表し、$a = \sum_{g \in G} a_g U_g$, $b = \sum_{h \in G} b_h U_h$ に対する和と積を

$$a + b = \sum_g (a_g + b_g) U_g, \qquad ab = \sum_{g,h} a_g g(b_h) U_{gh}$$

と定める。ここで X 上の G 作用を用いて $g(b_h)(x) = b_h(xg)$ $(x \in X)$ とおく。群 G が作用する環 $C_o(X)$ を係数とする G の群環と考えれば、接合積の定義は了解しやすいであろう。こうして得られる C^* 環を G 作用と $C_o(X)$ の接合積とよび、$C_o(X) \rtimes G$ と表す。このとき次の定理が成り立つ。

定理 2.1. [19] 有限群あるいはコンパクトリー群 G が局所コンパクトハウスドルフ空間 X に作用しているとする。このとき K 群に関して自然な同型写像

$$K_*(C_o(X) \rtimes G) \cong K^*_G(X)$$

が存在する。

次に $\mathbb{Z}_p$ 係数の K 理論を考える。[3] まず $f_p : S^1 \to S^1$, $f_p(e^{i\theta}) = e^{ip\theta}$ という写像に対して、その写像柱 $M_p = e^2 \cup_{f_p} S^1$ を考える。ここで e^2 は 2 次元胞体を表す。

[3] ここでは $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}_p$ と表す。

定義 2.2. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して、$\mathbb{Z}_p$ 係数の K 群を

$$K^i(X;\mathbb{Z}_p) = K^i(X \times M_p, X \times \{pt\})$$

と定義する。

このとき空間対が定める完全系列から、自然に Bockstein 系列

$$\begin{array}{ccccc} K^0(X) & \xrightarrow{\times p} & K^0(X) & \longrightarrow & K^0(X;\mathbb{Z}_p) \\ {\scriptstyle \partial^*}\uparrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \partial^*} \\ K^1(X;\mathbb{Z}_p) & \longleftarrow & K^1(X) & \xleftarrow[\times p]{} & K^1(X) \end{array}$$

が導かれる。

これに対応する解析的 K 理論は次のようなものである。いま p 次の行列環を $M_p(\mathbb{C})$ と表す。このとき関数環 $C_o(X)$ と $M_p(\mathbb{C})$ のテンソル積に関して準同型写像

$$\iota : C_o(X) \to C_o(X) \otimes M_p(\mathbb{C}), \qquad \iota(a) = a \otimes 1_p$$

が定まる。ただし 1_p は単位行列を表す。

命題 2.3. $\mathbb{Z}_p$ 係数の K 群に関して以下の自然な同型写像が存在する：

$$K^i(X;\mathbb{Z}_p) = K_i(C_o(X), C_o(X) \otimes M_p(\mathbb{C})).$$

ここで K 群の安定性による同一視 $K_i(C_o(X) \otimes M_p(\mathbb{C})) = K_i(C_o(X))$ の下で、$\iota_* : K_i(C_o(X)) \to K_i(C_o(X) \otimes M_p(\mathbb{C}))$ は $\iota_*(x) = px$ となることに注意すれば、6 項完全系列が Bockstein 系列に対応していることが確かめられる。

さらに $\mathbb{Q}$ 係数の K 群について考えよう。$\mathbb{Q}$ 上では $K^i(X;\mathbb{Q}) = K^i(X) \otimes \mathbb{Q}$ と定義する。あるいは Chern 指標により $K^*(X) \otimes \mathbb{Q}$ と $H^*(X;\mathbb{Q})$ が同型であるから $K^*(X;\mathbb{Q}) = H^*(X;\mathbb{Q})$ としてもよい。これに較べて $\mathbb{Q}$ 係数解析的 K 理論の定義は極めて自然である。

いま無限テンソル積 $R_p = \bigotimes_{n=0}^{\infty} M_p(\mathbb{C})$ を考え、さらに $\bigotimes_{p:\text{素数}} R_p$ を考える。そしてこの環を完備化して得られる C^* 環を R_o で表す。ここで R_o の K 群は

$$K_0(R_o) = \mathbb{Q}, \qquad K_1(R_o) = 0$$

となることが知られている。このとき $K_i(\mathcal{A} \otimes R_o)$ を $\mathbb{Q}$ 係数の解析的 K 理論とよんでおく。

命題 2.4. 局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して自然な同型

$$K_i(C_o(X) \otimes R_o) \cong K^i(X) \otimes \mathbb{Q}$$

が成り立つ。

さらに $\mathbb{R}$ 係数の場合には、R_o の弱閉包をとって得られるフォン・ノイマン環 R を考える。これは II 型の超有限因子であり、その K 群は

$$K_0(R) = \mathbb{R}, \qquad K_1(R) = 0$$

となる。このときにも局所コンパクトハウスドルフ空間 X に対して自然な同型 $K_i(C_o(X) \otimes R) \cong K^i(X) \otimes \mathbb{R}$ が存在する。

さらに $\mathbb{Z}_p$ のときと同様にして、$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 係数の位相的 K 群を定義できる。このときにも自然な同型

$$
\begin{aligned}
K^i(X; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) &\cong K_i(C_o(X), C_o(X) \otimes R_o) \\
K^i(X; \mathbb{R}/\mathbb{Z}) &\cong K_i(C_o(X), C_o(X) \otimes R)
\end{aligned}
$$

が成り立っている。

3. K ホモロジー群

位相空間に対する K 理論はコホモロジー理論であるが、これに対応する K ホモロジー理論のあることが知られている。代数的位相幾何学の一般論により K ホモロジー理論の存在は保証されいるが、具体性をもった K ホモロジー群の定義は Atiyah [1] に始まる。その後 Baum-Douglas [9] によりボルディズム群を用いた幾何的な定義も与えられた。また一方で C^* 環の拡大を分類する目的で導入された Ext 群が K ホモロジー群に同型であることが Brown-Douglas-Fillmore によって見出された。幾何的な K ホモロジー群の定義は Baum-Douglas [9] に譲り、この節では解析的な K ホモロジー群の定義について簡単に解説する。

X をコンパクトハウスドルフ空間とする。ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ 上の有界作用素全体を $\mathcal{L}$ とし、コンパクト作用素全体を $\mathcal{K}$ とする。このとき連続関数環 $C(X)$ から Calkin 代数 $\mathcal{Q} = \mathcal{L}/\mathcal{K}$ への準同型写像

$$\pi : C(X) \to \mathcal{Q}$$

の全体の集合 $M(C(X))$ を考える。いま直和により $M(C(X))$ 上に和を定める。また $C(X)$ から $\mathcal{L}$ への準同型写像に持ち上がるような π の全体を $E(C(X))$ とする。このとき $M(C(X))/E(C(X))$ はアーベル群となる。

定義 3.1. アーベル群 $M(C(X))/E(C(X))$ を解析的 K^1 ホモロジー群といい、これを $K^1(C(X))$ で表す。

ある準同型写像 $\pi : C(X) \to \mathcal{Q}$ の持ち上げとなっている 2 つの準同型写像

$$\pi_0, \pi_1 : C(X) \rightrightarrows \mathcal{L}$$

の組 (π_0, π_1) の全体を $M'(C(X))$ と表す。さらに適当なユニタリ作用素 u を用いて $\pi_0(a) = u\pi_1(a)u^*$ とできるような組からなる部分集合を $N'(C(X))$ とする。このとき $M'(C(X))/E'(C(X))$ はアーベル群となる。

定義 3.2. アーベル群 $M'(C(X))/E'(C(X))$ を解析的 K^0 ホモロジー群といい、これを $K^0(C(X))$ で表す。

註 3.3. 位相空間 X に対しては解析的 K ホモロジー群 $K^i(C(X))$ を $K_i(X)$ とも表す。K ホモロジー群に関してはボルディズムを用いた幾何的な定義も存在する；*Baum-Douglas* [9] を参照して戴きたい。

X が境界のないコンパクト多様体の場合に K ホモロジー群のサイクルを具体的に記述しよう。このサイクルは実は K ホモロジー群の基本類を与えている。

まず X が奇数次元として、X 上のディラック作用素 D がスピノールの L^2 空間 $\mathcal{H}$ に自己共役作用素として作用しているとする。いま $\mathcal{H}$ から D の正固有値空間上への射影作用素を P とする。すると D が楕円型作用素であることから、$a \in C(X)$

に対して $[P,a]=Pa-aP$ がコンパクト作用素となる。さらに $\mathrm{im}\,P$ 上の作用素を $T_a=PaP$ と定めると、$\mathrm{im}\,P$ 上のコンパクト作用素全体を法として $T_aT_b\equiv T_{ab}$ の成り立つことが判る。従って準同型写像が

$$\pi : C(X)\to \mathcal{Q}, \qquad \pi(a)=T_a\in\mathcal{Q}$$

で与えられる。これより $K^1(C(X))$ の元が定まる。

X が偶数次元のときはスピノールの L^2 空間が $\mathcal{H}=\mathcal{H}^+\oplus\mathcal{H}^-$ と分解し、ディラック作用素は

$$D=\begin{pmatrix} 0 & D^- \\ D^+ & 0\end{pmatrix}$$

という形をしている。ここで D が可逆としよう（この仮定は技術的なもので一般には取り除いてよい)。このとき $\mathcal{H}^-$ 上の表現を

$$\pi_0,\pi_1 : C(X)\rightrightarrows \mathcal{L}(\mathcal{H}^-), \qquad \pi_0(a)=(D^+)^{-1}aD^-,\ \pi_1(a)=a$$

と定めると、これは $K^0(C(X))$ の元を与えている。

次に解析的 K 群と解析的 K ホモロジー群のペアリングを定める。ここで次のような同一視をしておく。まず射影作用素 $P_0,P_1\in\mathcal{L}$ が $P_0-P_1\in\mathcal{K}$ を満たすとき、P_0-P_1 は $K_i(\mathcal{L},\mathcal{Q})$ の元を定める。これは切除同型 $K_i(\mathcal{K})=K_i(\mathcal{L},\mathcal{Q})$ により $K_0(\mathcal{K})=\mathbb{Z}$ の元に対応する。実際対応する整数は $\mathrm{Tr}\,(P_0-P_1)$ で与えられる。また連結準同型写像 ∂^* により $K_1(\mathcal{Q})=\mathbb{Z}$ と考える。

命題 3.4. ペアリング $\langle\ ,\ \rangle : K_i(C(X))\times K^i(C(X))\to\mathbb{Z}$ は以下で与えられる。

1) *($i=0$)* $\quad\langle e,(\pi_0,\pi_1)\rangle=\pi_0(e)-\pi_1(e)\in K_0(\mathcal{K})=\mathbb{Z}$

2) *($i=1$)* $\quad\langle u,\pi\rangle=\pi(u)\in K_1(\mathcal{Q})=\mathbb{Z}$

このとき K 理論を解析的に記述したことの帰結として、上のペアリングが本質的にフレドホルム作用素の指数で与えられていることに注意する。実際 $i=0$ のときペアリングの値は e に対応するベクトル束を係数とするディラック作用素の指数であり、また $i=1$ のときはテープリッツ作用素 T_u の指数となっている。

4. スペクトル流不変量とエータ不変量

前節で解析的 K 群と K ホモロジー群のペアリングが本質的にフレドホルム作用素の指数であること述べた。この節ではフレドホルム作用素の指数をスペクトル流不変量として解釈し、そこから二次的に派生するエータ不変量が係数を簡約した K 群とのペアリング $K^i(X:\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times K_i(X)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ で実現されていることについて説明する。

作用素の 1 径数族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ が与えられたとする。ここで各 A_t は有限重複度の離散固有値のみをもつ自己共役作用素と仮定しよう。応用上はディラック作用素のような、境界のないコンパクト多様体上の自己共役な楕円型微分作用素を考えておけば十分である。このとき t が変化するにつれて固有値の集合 $\sigma(A_t)\subset\mathbb{R}$ の分布も変化する。いま $\sigma(A_t)$ を $C=[0,1]\times\mathbb{R}$ に含まれる 1-チェイン σ と考える。

定義 4.1. 上のような作用素族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ に関し A_0,A_1 が可逆、即ち A_0,A_1 は 0 を固有値にもたないと仮定する。すると σ は空間対 $(C, C\setminus([0,1]\times\{0\}))$ の相対 *1*-サイクルを与える。このとき $[\sigma]\in H_1(C,C\setminus([0,1]\times\{0\}))=\mathbb{Z}$ として定まる整数を $(A_t)_{t\in[0,1]}$ のスペクトル流（不変量）とよび、$sf\{A_t\}$ で表す。

幾何的に言えばスペクトル流（不変量）とは負から正に 0 を横切ってゆく固有値の数、あるいは固有値の流れを示す σ と $[0,1]\times\{0\}$ の交点数を与えていると考えられる。

例 4.2. S^1 に対し $L^2(S^1)$ 上の自己共役作用素の族

$$A_t = \frac{1}{i}\frac{d}{dx} + t, \qquad -1/2 \le 0 \le 1/2$$

を考える。このとき $sf\{A_t\} = 1$ が成り立つ。

さらに $S^1 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のベクトル束

$$E = (S^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{C})/\sim, \qquad (x,y,z) \sim (x, y+1, e^{2\pi i y} z)$$

を考える。いま $E_y = E|_{S^1\times\{y\}}$ $(y \in \mathbb{R}/\mathbb{Z})$ とおき、E_y の L^2 切断全体のなすヒルベルト空間を $\mathcal{H}_y$ と表す。E_y は $S^1 \times \{y\}$ 上で平坦であるから、S^1 方向の微分 $-id/dx$ は $\mathcal{H}_y$ 上の自己共役作用素 A_y を自然に定める。ここでヒルベルト空間の族 $(\mathcal{H}_y)$ を $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 上のヒルベルト空間束と考える。ヒルベルト空間束に対しては自明化が一意に存在する。従って作用素族 (A_y) を同一ヒルベルト空間上の作用素族と見直すことができる。このとき

$$sf\{A_y\}_{y\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}} = 1$$

が成り立つ。この作用素族は $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ から以下に述べる空間 $Fred_*$ への連続写像を定め、それは $\pi_1(Fred_*) = \mathbb{Z}$ の生成元を与えている。

例 4.3. 偶数次元で境界のないコンパクト多様体上のディラック作用素を用いて

$$A_t = \begin{pmatrix} t & D^- \\ D^+ & -t \end{pmatrix} \qquad (t \in [-1,1])$$

と定める。このとき

$$sf\{A_t\} = \dim\ker D^+ - \dim\ker D^-$$

が成り立つ。

スペクトル流は次のような大域的な幾何性も有している。いま $Fred_*$ により、本質的に不定値[4]である自己共役なフレドホルム作用素の全体を表す。このとき $Fred_*$ は U_∞ とホモトピー同値であり、従って K^1 群の分類空間となること、即ちコンパクトハウスドルフ空間 X に対して $K^1(X) = [X, Fred_*]$ となることが知られている。ここで U_∞ のコホモロジー群は $h_{2k-1} \in H^{2k-1}(U_\infty)$ を生成元とする外積代数と同型であることに注意する。ここで

$$Fred_*^{(k)} = \{A \in Fred_* \mid \dim\ker A \ge k\}$$

とおく。このとき $Fred_*^{(k)}$ は $Fred_*$ の余次元 $2k-1$ の部分多様体であり、そのポアンカレ双対元は $h_{2k-1} \in H^{2k-1}(U_\infty)$ となっている。従って $f \in [S^1, Fred_*] = K^1(S^1) = \mathbb{Z}$ に対して、この f の定める整数は

$$\langle f^*(h_1), [S^1]\rangle = f \text{ の像と } Fred_*^{(1)} \text{ の交点数}$$

[4]本質的に不定値とは、有限重複度の固有値を有限個除いたとしても、正定値にも負定値にもならない自己共役作用素のことをいう。

で与えられる。これがスペクトル流に一致する。またこの見方を一般化すると多様体 X 上の作用素族と $Fred_*^{(k)}$ の交点数を調べることで、$K^1(X) = [X, Fred_*]$ の元を捕捉できることが判る。

同様な見方を K^0 群の分類空間に当てはめてみよう。まず $Fred$ によりフレドホルム作用素全体の集合を表す。このとき $Fred$ は $\mathbb{Z} \times Gr_\infty$ とホモトピー同値であり、従って K^0 群の分類空間である。ここで指数 0 のフレドホルム作用素からなる連結成分を $Fred_o$ として

$$Fred^{(k)} = \{D \in Fred_o \mid \dim\ker D \geq k\}$$

とおく。このとき $Fred^{(k)}$ は余次元 $2k$ の部分多様体であり、そのポアンカレ双対元は Chern 類 $c_k \in H^{2k}(Gr_\infty)$ である。

作用素の 2 径数族 $(A_{(s,t)})_{(s,t)\in I\times I}$, $I = [0,1]$ を考える。ここで $A_{(s,t)}$ は

$$A_{(s,t)} = \begin{pmatrix} 0 & D^-_{(s,t)} \\ D^+_{(s,t)} & 0 \end{pmatrix}$$

という形をしており、さらに境界 $\partial(I \times I)$ 上で $A_{(s,t)}$ は可逆であると仮定する。ここで連続写像 $f : I \times I \to Fred, \quad f(s,t) = D^+_{(s,t)}$ を用いて

$$sf\{A_{(s,t)}\} = f \text{ と } Fred^{(k)} \text{ の交点数}$$

と定める。これは $K^0(I \times I) = \mathbb{Z}$ の元として定まる作用素族 $(A_{(s,t)})$ の族指数に外ならない。

これはスペクトル回転数としても了解できる。いま $\partial(I\times I)$ 上で $A_{(s,t)}$ は可逆だから、このとき $D^+_{(s,t)}$ の固有値 $\sigma(D^+_{(s,t)})$ は $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ に含まれる。これを $\partial(I\times I)$ からの写像と考えると、$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ の 1-サイクル σ が定まる。このとき $[\sigma] \in H_1(\mathbb{C}\setminus\{0\}) = \mathbb{Z}$ として定まる整数をスペクトル回転数ということにすると、2 径数作用素族 $(A_{(s,t)})$ の不変量 $sf\{A_{(s,t)}\}$ はスペクトル回転数に等しい。幾何的に言えばスペクトル回転数とは $\partial(I\times I)$ 上で固有値 $\sigma(D^+_{(s,t)})$ が動くときの原点の周りの回転数と考えられる。

例 **4.4.** 与えられた $w \in \mathbb{C}$ に対して $T^2 = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の平坦な複素直線束を

$$L_w = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{C}/\sim \to T^2, \qquad (z,\zeta) \sim (z+g, e^{-2\pi i\langle g,w\rangle}\zeta)$$

で定める。ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は通常の内積を表し、$g = (n,m) \in \mathbb{Z}^2, w = u + iv$ に対して $\langle g,w\rangle = nu + mv$ である。いま L_w の平坦接続を用いて定まる *Dolbeault* 作用素を

$$\bar\partial_w : \Omega^{0,0}(T^2, L_w) \to \Omega^{0,1}(T^2, L_w)$$

と表す。ここで十分小さな $\epsilon > 0$ をとり、$D = \{w \in \mathbb{C} \mid |w| \leq \epsilon\}$ 上の 2 径数作用素族 $(A_w)_{w\in D}$ を

$$A_w = \begin{pmatrix} 0 & \bar\partial^*_w \\ \bar\partial_w & 0 \end{pmatrix}$$

で与える。このとき $w \neq 0$ で A_w は可逆であり、$w = 0$ で $\dim\ker\bar\partial_w = \dim\ker\bar\partial^*_w = 1$ となる。ここで定数関数 1 を $d\bar z$ に対応させ、$\Omega^{0,0}(T^2, L_w)$ と $\Omega^{0,1}(T^2, L_w)$ を同一視する。いま $\mathbb{R}^2$ 上で $\bar\partial_w$ を考えよう。すると $\Omega^{0,0}(T^2, L_w)$ や $\Omega^{0,1}(T^2, L_w)$ の元は

$$(*) \qquad f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \qquad f(z+g) = e^{-2\pi i\langle g,w\rangle} f(z) \quad (z = x + iy \in \mathbb{R}^2)$$

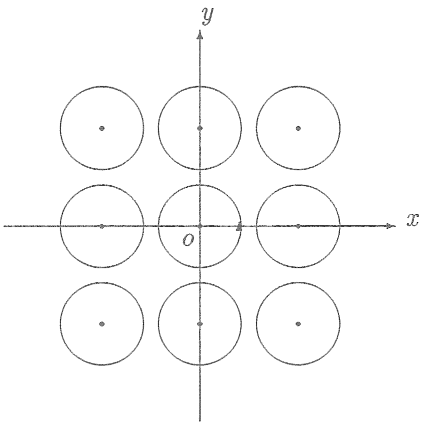


FIGURE 1. スペクトル回転数

をみたす関数と同一視される。さらに $\bar{\partial}_w$ は $\mathbb{R}^2$ 上の *Cauchy-Riemann* 作用素 $\partial/\partial\bar{z}$ に対応する。ここで $f_0(z) = e^{-2\pi i\langle z,w\rangle}$ とすると、$k,l \in \mathbb{Z}$ に対して定まる関数 $e^{2\pi i(kx+ly)}f_0(z)$ は条件(*)をみたし、さらに

$$\partial(e^{2\pi i(kx+ly)}f_0)/\partial\bar{z} = i\pi(k+il-w)e^{2\pi i(kx+ly)}f_0(z)$$

が成り立つ。このとき $\{e^{2\pi i(kx+ly)}f_0(z) \mid k,l \in \mathbb{Z}\}$ は完全正規直交系を成し、$\bar{\partial}_w$ の固有値は $\{i\pi(k+il-w)\}$ で与えられる。従って $w \in \partial D$ 上で $(\bar{\partial}_w)$ のスペクトル回転数は 1 であるから、

$$sf\{A_w\} = 1$$

が成り立つ。

スペクトル流は Chern-Simons 不変量やエータ不変量という二次不変量と密接に結びついている。このことを簡単に述べておこう。いま閉多様体 M 上で自己共役な楕円型作用素 A が与えられたとする。ここで固有値の集合を $\sigma(A)$ とするとき、無限級数

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A),\lambda\neq 0} \mathrm{sgn}(\lambda)|\lambda|^{-s}$$

は実部が十分大きな複素数 s に対して収束する。ここで $\mathrm{sgn}(\lambda)$ は実数 λ の符号を表す。この関数はさらに $\mathbb{C}$ 上の有理型函数に解析接続され、その有理型函数は $s=0$ に極をもたないことが知られている。これを A のエータ関数といい、$\eta_A(s)$ で表す。

定義 4.5. 自己共役な楕円型作用素 A に対して A のエータ不変量を

$$\eta_A = (\eta_A(0) - \dim\ker A)/2$$

と定める。[5]

次にディラック作用素のような自己共役楕円型作用素 D を考えよう。ここでベクトル束 E とスピン束 S のテンソル積を作り、E のユニタリ接続 ∇ を用いて D を $E\otimes S$ の切断空間上の作用素に拡張できる。いまユニタリ接続の1径数族 $\{\nabla^{(t)}\}_{t\in[0,1]}$ を選び、これに応じてディラック作用素の族 (D_t) が定まったとする。このときエータ不変量の族 $\eta(D_t)$ が定まる。これは t に関して一般に連続ではなく、t が変化すると整数値の飛躍が生じ得る。この $\eta(D_t)$ について、t が変化するときに生じる整数値の飛躍はスペクトル流 $sf\{D_t\}$ に等しいことが確かめられる。一方 t に関する微分 $\dot{\eta}(D_t)$ は t に関して連続である。そして $\int_0^1 \dot{\eta}(D_t)dt$ は以下に述べる Chern-Simons 不変量で記述される。いま Chern 類の多項式である Chern 指標 ch に関して、E のユニタリ接続の1径数族 $\nabla^{(t)}$ から定まる Chern-Simons 不変量を $Tch(\nabla^{(0)},\nabla^{(1)})$ で表す。これは M の微分型式であり、

$$ch(\nabla^{(1)}) - ch(\nabla^{(0)}) = d[Tch(\nabla^{(0)},\nabla^{(1)})]$$

をみたしている。

定理 4.6 (Atiyah-Patodi-Singer [4]). このとき次の等式が成立する。

$$\eta(D_1) - \eta(D_0) + sf\{D_t\} = \int_0^1 \dot{\eta}(D_t)dt = \int_M \widehat{A}(M)Tch(\nabla^{(0)},\nabla^{(1)})$$

ただし $\widehat{A}(M)$ は M のリーマン曲率から定まる $\widehat{A}$ 型式と呼ばれる閉型式である。

次にスペクトル流を積分形で表してみる。まず $\mathbb{R}$ 上の C^∞ 関数の族 $\{\rho_\epsilon(x)\}_{0<\epsilon<1}$ を、$\mathrm{supp}\ \rho_\epsilon \subset [-\epsilon,\epsilon]$, $\int_{\mathbb{R}} \rho_\epsilon(x)dx = 1$ であるように選んでおく。ここで先の仮定をみたすような作用素の1径数族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ が与えられたとする。

命題 4.7. このときスペクトル流に関して

$$sf\{A_t\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \mathrm{Tr}\,(\rho_\epsilon(A_t)\dot{A}_t)dt$$

が成り立つ。ここで $\rho_\epsilon(A_t)$ は $\rho_\epsilon(x)$ に A_t を代入して得られる作用素であり、$\dot{A}_t$ は t に関する微分を表す。

スペクトル流を上のように書き直すと、これを用いて II 型フォン・ノイマン環上のフレドホルム作用素族に関して II 型スペクトル流不変量が定義できる。いま M を閉多様体とし、$\widetilde{M}$ が被覆変換群 Γ をもつ M の正規被覆空間であるとする。そして M にリーマン計量を与えておき、それを $\widetilde{M}$ に引き上げておく。ここで連続関数 $k:\widetilde{M}\times\widetilde{M}\to\mathbb{C}$ に対して以下の条件を考える：

1) $k(x\gamma,y\gamma) = k(x,y) \quad (\gamma\in\Gamma)$;
2) k を $(\widetilde{M}\times\widetilde{M})/\Gamma$ 上の連続関数とみたとき、その台はコンパクト．

[5] Gilkey [18] に従ってこのように正規化する。これは Atiyah-Patodi-Singer [4] の ξ 不変量に対応する。

このような関数を積分核とする $L^2(\widetilde{M})$ 上の作用素全体を考え、これを完備化して得られる C^* 環を $\mathcal{K}_\Gamma$ と表す。以下ではこの C^* 環を $\mathcal{K}$ のかわりに用いて、Γ 作用がある空間に対してフレドホルム作用素の概念を拡張する。また $\mathcal{K}$ がトレイス写像 Tr をもつように、$\mathcal{K}_\Gamma$ 上にも

$$\tau(k) = \int_{M'} k(x,x)dx$$

によりトレイス写像 τ が定義されることを注意しよう。ただし M' は M 上の Γ 作用に関する基本領域を表す。

いま M 上に自己共役な楕円型作用素の族 $(A_t)_{t\in[0,1]}$ が与えられたとして、これを $\widetilde{M}$ に持ち上げて考えよう。その族を再び (A_t) で表す。

定義 4.8. このとき

$$sf_\tau\{A_t\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \tau(\rho_\epsilon(A_t)\dot{A}_t)dt$$

を $\mathcal{K}_\Gamma$ に関する II 型スペクトル流不変量という。

以下簡単のためにディラック作用素を考えよう。ここでは M を奇数次元の閉多様体とする。まず平坦接続 ∇ をもつ M 上の平坦束 E を考え、さらに E は自明化をもつと仮定する。ここで E には自明束からの引き戻しとなる自明な接続 d が存在する。いまそれぞれの接続 ∇, d から定まるディラック作用素のエータ不変量を η_∇, η_d で表す。このとき

$$\eta_\nabla - \eta_d \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

を自明化をもつ平坦束 E の相対エータ不変量とよぶ。一方自明化をもつ平坦束 E は $K^1(M,\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ の元 $[E]$ を定める。また前に述べたようにディラック作用素は K ホモロジー群 $K_1(M)$ の元 $[D_M]$ を与えている。ここで自然なペアリング $\langle\ ,\ \rangle : K^1(M;\mathbb{R}/\mathbb{Z})\times K_1(M)\to\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ を考える。このとき次の定理が成り立つ。

定理 4.9 (Atiyah-Patodi-Singer [4]). 以下の等式が成立する。

$$\langle[E],[D_M]\rangle = \eta_\nabla - \eta_d = \int_M \widehat{A}(M)Tch(\nabla,d)\in\mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

相対エータ不変量は II 型スペクトル流およびテープリッツ作用素の指数とも関連付けられる。まず E を普遍被覆空間 $\widetilde{M}$ へ引き上げると、平坦接続を用いて自明束との同型が構成できる。このとき定まるホロノミー表現を $\alpha:\pi_1(M)\to U_k$ としよう。一方 E には既に自明化があるので、この二つの自明化の差として

$$\varphi:\widetilde{M}\to U_k,\qquad \varphi(x\gamma)=\varphi(x)\alpha(\gamma)$$

という写像が定まる。ここで $\widetilde{M}$ 上のディラック作用素の正固有空間への射影を P で表し、φ を用いてテープリッツ作用素を

$$T_\varphi = P\varphi P : \operatorname{im}P\to\operatorname{im}P$$

と定める。そしてトレイス τ を用いて T_φ の Γ 指数を

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(T_\varphi) = \tau(\varphi P\varphi^{-1} - P)$$

と定義する。

定理 4.10 (Moriyoshi). このとき以下の等式が成立する。

$$\eta_\nabla - \eta_d = \mathrm{Ind}_\Gamma(T_\varphi) = sf_\tau\{D_t\} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$$

ここで $(D_t)_{t\in[0,1]}$ は接続の族 $t\nabla + (1-t)d$ より定まるディラック作用素の族である。

また作用素の 2 径数族 $A = (A_{(s,t)})_{(s,t)\in I\times I}$ のスペクトル流不変量も積分表示できる。前と同じく A は

$$A_{(s,t)} = \begin{pmatrix} 0 & D^-_{(s,t)} \\ D^+_{(s,t)} & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられているとする。

命題 4.11. このときスペクトル流不変量に関して

$$sf\{A_{(s,t)}\} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\varepsilon\rho_\epsilon(A^2)(\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial s})\right] dsdt$$

が成り立つ。ここで $\varepsilon = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ である。

これを用いて III 型フォン・ノイマン環に対してスペクトル流不変量を定義しよう。次のような状況を考える。Γ 被覆空間 $\widetilde{M} \to M$ を前のとおりとして、与えられたホロノミー表現 $\alpha : \Gamma \to \mathrm{Diff}(S^1)$ を用いて平坦 S^1 束

$$N = (\widetilde{M} \times S^1)/\Gamma, \qquad (x,t) \sim (x\gamma, \alpha(\gamma)^{-1}(t))$$

を定める。これは $\widetilde{M} \times \{t\}$ の像を葉とする葉層 S^1 束の構造をもつ。このとき葉層に付随してある C^* 環 $h^*(N,\mathcal{F})$ が定まる。これは

1) 連続関数 $k : M \times M \times S^1 \to \mathbb{C}$ で $k(x\gamma, y\gamma, t\gamma) = k(x,y,t)$, $\gamma \in \Gamma$ をみたし;
2) $M \times M \times \{t\}$ 上では対角 Γ 作用に関して Γ-Hilbert-Shmidt 型作用素の積分核である;

関数 k を核関数とする作用素全体が定める C^* 環である。S^1 上に Γ 不変な測度が存在しないとき, この $h^*(N,\mathcal{F})$ の弱閉包は III 型フォン・ノイマン環となる。ここで荷重 $\omega : h^*(N,\mathcal{F}) \to \mathbb{C}$ を

$$\omega(k) = \int_{N'} k(x,x,t)dtdx$$

として与えておく。ここで N' は Γ 作用に関する基本領域である。

次に dt を S^1 の体積要素とし、dx で Γ 不変な $\widetilde{M}$ 上の体積要素を表す。一方 N 上の体積要素を持ち上げて定まる $\widetilde{M} \times S^1$ 上の Γ 不変な体積要素を $d\mu$ として、関数 $\varphi : \widetilde{M} \times S^1 \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi = \frac{dx \times dt}{d\mu}$$

と定める。いま M は偶数次元と仮定する。ここで葉層束 N の葉に沿うディラック作用素の族をとり、これを $\widetilde{M} \times S^1$ へ持ち上げて得られる作用素族 $D = (D_t)_{t\in S^1}$ を考える。そして $[0,1] \times S^1$ 上の作用素の 2 径数族を

$$D_{(s,t)} = s\varphi D_t \varphi^{-1} + (1-s)D_t$$

と定める。このとき荷重ωの定めるスペクトル流不変量を

$$sf_\omega\{D_{(s,t)}\} = \int_{[0,1]\times S^1} \omega \left[\varepsilon\rho_\epsilon(A^2)(\frac{\partial A}{\partial s}\frac{\partial A}{\partial t} - \frac{\partial A}{\partial t}\frac{\partial A}{\partial s})\right] dsdt$$

と定義する。

このとき次の定理が成り立つ。

定理 4.12 (Moriyoshi). ここで$h^*(N,\mathcal{F})$上の横断基本巡回1コサイクルをτで表す（定義については [13] を参照）。またK群と巡回コホモロジー群の間のペアリング$\langle\ ,\ \rangle : K_1(h^*(N,\mathcal{F})) \times HC^1(h^*(N,\mathcal{F})) \to \mathbb{C}$を考える。このとき

$$sf_\omega\{D_{(s,t)}\} = \langle \varphi D_{(s,t)}\varphi^{-1}D^{-1}_{(s,t)} - 1, \tau\rangle = \int_N \widehat{A}(M)\mathrm{gv}$$

が成り立つ。ただし gv は葉層束Nの二次特性類である *Godbillon-Vey* 類を表す。

References

1. M. Atiyah, *Global theory of elliptic operators*, 1970 Proc. Internat. Conf. on Functional Analysis and Related Topics (Tokyo, 1969), 21–30 Univ. of Tokyo Press, Tokyo
2. M. Atiyah, *Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras*, Astérisque **32**(1976), 43–72.
3. M. Atiyah, *K-Theory past and present*, preprint, math.KT/0012213
4. M. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry* I, Cambr. Phil. Soc. **77**(1975), 43–69; II, **78**(1975), 405–432; III, **79**(1976), 71–99.
5. M. Atiyah and G. Segal, *The index of Elliptic operators* II, Ann. of Math. **87**(1968), 531–545.
6. ——— *The index of Elliptic operators* I, Ann. of Math. **87**(1968), 484–530; III, **87** (1968), 546–604; IV, **93** (1971), 119–138; V, **93** (1971), 139–149.
7. ——— *Index theory for skew-adjoint Fredholm operators,* Publ. Math. IHES **37**(1969), 305–326.
8. P. Baum, A. Connes and N. Higson, *Classifying space for proper actions and K-theory of group C^*-algebras*, Contemporary Math. **167** (1994), 241–291.
9. P. Baum and R. Douglas, *K-homology and index theory*, Proc. Symp. Pure Math. **38** part 1(1982), 521–628.
10. B. Blackadar, *K-theory for operator algebras*, Mathematical Sciences Research Institute Publications **5**, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1986.
11. A. Connes, *A survey of foliations and operator algebras*, Proc. Symp. Pure Math. **38**(1982), 521–628.
12. ——— *Non-commutative differential geometry* I , II, Publ. Math. IHES, **62** (1986), 257–360.
13. ——— *Cyclic cohomology and the transversal fundamental class of a foliation*, in *Geometric Method in Operator Algebras* (H. Araki and E. G. Effros, eds.), Pitman Research Notes in Math. Series **123** (1986), Longman Scientific and Technical, 52–144.
14. ——— *Noncommutative Geometry*, Academic, 1994.
15. A. Connes and H. Moscovici, *The L^2-index theorem for homogeneous spaces of Lie groups*, Ann. of Math. **115**(1982), 291–330.
16. ——— *Cyclic cohomology, Novikov conjecture and hyperbolic groups*, Topology **29**(1990), 345–388.
17. R.G.Douglas, S.Hurder and J. Kaminker, *The longitudinal cocycle and the index of Toeplitz operators*, J. Func. Anal. **101**(1991), 120–144.
18. P. B. Gilkey, *Invariance theory the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, 2nd ed., CRC Press, Boca Raton, Ann Arbor, London, Tokyo, 1995.
19. P. Green, *Equivariant K-theory and crossed products*, Proc. Symp. Pure Math. **38**(1981) Pt 1, 337–338.

20. N. Higson, *An approach to $\mathbb{Z}/k$-index theory*, Inter. J. Math. **1**(1990), 189–210.
21. M. Hilsum and G. Skandalis, *Stabilité des C^*-algèbres de feuilletages* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **33** (1983), no. 3, 201–208.
22. S. Hurder, *Eta invariants and the odd index theorem for coverings*, Contemp. Math. **105**(1990), 47–82.
23. H. Moriyoshi and T. Natsume, *The Godbillon-Vey cyclic cocycle and longitudinal Dirac operators*, Pacific Journal of Mathematics, **172**(1996), 483–539.
24. J. Roe, *Elliptic operators, topology and asymptotic methods*, Longman, 1988.
25. ______ *Coarse cohomology and index theory on complete Riemannian manifolds*, Memoires of AMS **497**, 1993.
26. I.M.Singer, *Some remarks on operator theory and index theory* , Lect. Notes in Math. 575 (1977), 128–138.

慶応大学理工学部数理科学科
E-mail address: moriyosi@math.keio.ac.jp

CALCULATION OF THOM POLYNOMIALS FOR GROUP ACTIONS

LÁSZLÓ FEHÉR AND RICHÁRD RIMÁNYI

In this lecture I describe a new method for calculating Thom polynomials and apply it for some interesting cases:

1. Thom polynomials of singularities of smooth maps. In particular I give a closed formula for Thom polynomials of A_3-singularities in any positive codimension (Joint work with G. Berczi).
2. Degeneraci loci formulas, in particular for quiver representations (improving results of Buch and Fulton).
3. Schur, Schubert polynomials and double Schubert polynomials are also Thom polynomials.

I also indicate how to extend some of these results for generalized cohomology theories as complex cobordism theory.

Calculating Thom polynomials has a long history. It was René Thom who initiated their study in the case of singularities of smooth maps. Works of V. Vassiliev and M. Kazarian clarified the connection of Thom polynomials with the underlying symmetry groups. Their works also show that the so called *degeneracy loci formulas* in algebraic geometry are also Thom polynomials for group actions.

For geometrically defined fibre bundles—on which we mean fibre bundles associated to a principal G-bundle where G is a Lie group—first obstructions are usually called Thom polynomials. The word polynomial is justified since the first obstruction of the universal bundle is an element in $H^*(BG)$ which is a polynomial ring, at least rationally.

Given a representation $\rho : G \to GL(V)$ and a principal G-bundle $P \to M$ we can look for obstruction of having a section of the V-bundle $E = P \times_G V$ associated to this representation *avoiding* a certain orbit η (or more generally a G-invariant subset of V). Of course the zero section avoids any orbit different from the zero orbit but this is pathological: we want obstructions for a *generic* section. In effect we want to avoid the *closure* of η. The obstruction we will deal with is the cohomology class represented by $\bar{\eta}(s) \subset M$ for a generic section s. Thus this class is an obstruction for having a section in the complement $V \setminus \bar{\eta}$. Let us call this class the Thom polynomial $\mathrm{Tp}(\eta)(E)$.

It is not difficult to see that $\mathrm{Tp}(\eta)(E)$ is equal to the first obstruction class (in the homotopy theoretic sense) of the fibre bundle $P \times_G (V \setminus \bar{\eta})$. By naturality it is enough to look at the universal V-bundle $BV = EG \times_G V$ (where B refers to the Borel construction), and the value of the Thom polynomial here: let $\mathrm{Tp}(\eta)$ denote $\mathrm{Tp}(\eta)(BV) \in H^*(BG) = H^*_G(pt)$. This characteristic class $\mathrm{Tp}(\eta)$ can be thought as the G-equivariant Poincaré dual of $\bar{\eta}$.

The idea of the new method is very simple: the restriction of the equivariant Poincaré dual of $\bar{\eta}$ to other orbits θ is zero if $\eta \not\subset \bar{\theta}$. In a wide variety of cases (including almost all cases where the Thom polynomial was previously calculated) this system of equations is (essentially) enough to calculate $\mathrm{Tp}(\eta)$. This approach was infuenced by works of A. Szűcs.

RÉNYI INSTITUTE, REÁLTANODA U. 13-15, 1053, HUNGARY
E-mail address: lfeher@renyi.hu

DEPARTMENT OF ANALYSIS, ELTE TTK, MÚZEUM KRT. 6-8., BUDAPEST 1088, HUNGARY
E-mail address: rimanyi@cs.elte.hu

テイラー展開を決める小さな集合

近畿大学理工学部　　泉 脩藏

June 4, 2001

Abstract

ユークリッド空間の原点に集積する部分集合 A があるとき，原点の近傍で定義された滑らかな関数のテイラー展開の位数は，$f|A$ の値の原点における位数と関係がある．この２つの位数の関係は Spallek 関数で記述される．Spallek 関数は A のある種の大きさを反映する．ユークリッド空間の解析部分集合 X 上でも，テイラー展開の位数を X の定義イデアルを法として考えるならば，同様なことが考えられる．

1 序

$U \subset \mathbb{R}^n$ を $0 \in \mathbb{R}^n$ の近傍とし，$X \subset U$ をその実解析部分集合とする．$f : X \to \mathbb{R}$ が C^k **級の関数**であるとは，f が X の各点の近傍ごとに C^k 級の拡張を持つことをいう．その拡張の ξ におけるテイラー展開は拡張の取り方に依存するが，その r 次 ($r \leq k$, $r \in \mathbb{N}$) 以下の項の係数がすべて０に取れるなら，f は ξ で r **平坦**ということにする．また $A \subset X$ を ξ に集積する部分集合とするとき，ξ の X における近傍上の C^k 級関数 f に対して

$$\lim_{A \cap V \ni x \to \xi} \frac{f(x)}{\|x - \xi\|^r} = 0.$$

となるとき，ξ で r **弱平坦** ($r \geq 0$) と言うことにする．そして

$$\mu_A(f) := \mu_{A,\xi}(f) := \sup\{r : f \text{ は } A \text{ にそって } r \text{ 弱平坦 }\} \ (\in [0, \infty])$$

とおき，これを f の ξ における**解析的位数**と言うことにする．

$A \subset X$ と $k \in \mathbb{N}$ が与えられたとき，f が A にそって $s \in \mathbb{N}$ 弱平坦ならば k 平坦となるような s の下限を $S_A^*(k)$ で表す．いいかえると $S_A^*(k)$ は

$\mu_A(f) > s$ である C^k 級関数 f が k 平坦となるような s の最小値である．こうして定義された関数 $S_A^*: \mathbb{N} \to (0,\infty]$ を**原シュパレク関数**[1]と言うことにする．$S_A^*(k) \geq k$ となることは明らかであろう．明らかに A は閉集合としてよい．まず X がアファイン空間のときに知られている定理を紹介する．

定理 1.1 (Spallek [S]) D_i $(i \in \mathbb{N})$ を $\mathbb{R}^n$ の ξ_i を中心とし，r_i を半径とする n 次元の閉球とする．$\lim_{i\to\infty} \xi_i = \xi$ であり，ある $s > 0$ に対して $\lim_{i\to\infty} \|\xi_i\|^s/|r_i| = 0$ と仮定する．このとき f が ξ の近傍で定義された C^k 関数で $D := \bigcup_{i\in\mathbb{N}} D_i$ にそって sk 弱平坦であれば，$\nu(f) \geq k$ となる．つまり（上からの）線形評価 $S_A^*(k) \leq sk$ を持つ．[2]

これでわかることは，弱平坦性を測る集合芽 ξ で分厚ければ，その原シュパレク関数は小さいということである．つまり原シュパレク関数は「集合芽 A_ξ のある種の大きさ」を測るものである．Bierstone と Milman [BM$_2$] は，Osgood の挙げた病的な写像芽の例を用いて，疎な閉集合の原シュパレク関数でさえ線形の評価を持つことがあることを示した．我々は次のことを示す．

1. 0 にのみ集積点を持つ可算な閉集合の原シュパレク関数でさえ，線形の評価を持つことがある．(**(3.3)** を見よ.)

ξ が X の特異点の場合は，C^k 級の関数の位数よりも，実解析関数の「被約位数」を用いるほうが話がきれいになる．これを用いて定義しなおしたものを単にシュパレク関数ということにする．解析的局所環の結果を用いると次のことがわかる．

2. $X \subset \mathbb{R}^m$ を，点 ξ で既約な解析的部分集合とし，$A, B \subset X$ を閉集合とする．もし $S_{A\cup B}(k)$ が線形評価を持つなら，$S_A(k)$ か $S_B(k)$ の少なくとも一方が線形評価を持つ．

3. $X \subset \mathbb{R}^m$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ を ξ で既約な解析集合とし，$A \subset X$ を閉集合とする．$\Phi(\xi) = \eta$ となる解析写像芽 $\Phi: X \longrightarrow Y$ が「一杯の位相的ランク」を持つならば $a > 0$ が存在して $S_{\Phi(A)}(k) \leq S_A(ak)$ となる．

位数の評価においては，種々の局面で**線形評価の存在が「まともな現象」を意味するのであるが**，シュパレク関数が 2 次となる例がある．

---

[1]Bierstone and Milman [BM$_2$] は類似の不等式をシュヴァレー評価の名前で定義しその重要な性質を述べている．

[2]開集合の閉包となる劣解析集合（subanalytic）（開集合である劣解析集合の閉包）は上の D の条件を満たす．Spallek や Bierstone-Milman [BM$_2$] は，この種の集合に対してシュパレク関数の局所有界性を示している．

4. ある集合 $E \subset \mathbb{R}^2$ の Osgood mapping Φ による像のシュパレク関数 $S_{\Phi(E)}(k)$ は有限ではあるが，線形評価を持たず，$\limsup \log_k S_{\Phi(E)}(k) = 2$ である．

2 混合微分と方向微分

まず $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, ...\}$ とおき，$n \in \mathbb{N}$ と $d \in \mathbb{N}$ に対して，$\mathbb{R}^n$ の次の集合

$$T := \{C_{\boldsymbol{i}} : \boldsymbol{i} := (i_0, ..., i_n) \in \mathbb{N}_0^{n+1},\ |\boldsymbol{i}| = d\} \quad (|\boldsymbol{i}| := di_0 + \cdots + i_n,\ i_\nu \in \mathbb{N}_0)$$

を考える．これは $N := \binom{n+d}{d}$ 個の点からなっている．$0 \leq p \leq n, 0 \leq q < d$ を満たす p と q に対して T の部分集合

$$T(p, q) := \{C_{\boldsymbol{i}} : i_p = q\}$$

を考える．T が次の条件を満たすとき n 次元 d 次**トラス**と呼ぶことにする．

1. $T(p, q)$ を含む最小の線形多様体（必ずしも原点を通らない）$L(p, q)$ は超平面である．

2. $T(p, q)$ と $T \setminus T(p, q)$ の少なくとも 1 点を含む線形多様体は n 次元となる．

次の定理は多変数ラグランジュ補間とでも言うべきもののうちでも自然なものであり，証明も驚くほど簡単である．

定理 2.1 (Akopyan-Saakyan [AS]) $T \subset \mathbb{R}^n$ を n 次元 d 次トラスとし，T の各点に実数値が指定されているものとする．このとき T の各点で指定された値を取る d 次の多項式がただ 1 つ存在する．

この補間法によって次の初等解析学に属する定理が出るが，発表者はいまだこの主張が書かれている文献を知らない．

補題 2.2 L を $\mathbb{R}^n$ の原点 O を含まない超平面とし，$T \subset L$ を $(n-1)$ 次元 d 次トラスとする．するとすべての d 次の斉次混合微分

$$\frac{\partial^d f}{\partial {x_1}^{j_1} \cdots \partial {x_n}^{j_n}}(0) \quad (j_\nu \in \mathbb{N}_0,\ |\boldsymbol{j}| := d)$$

は $\overrightarrow{0C}$ $(C \in T)$ 方向の d 次の斉次方向微分で一意的に表される．

証明. T の点を

$$C_{\boldsymbol{i}} := (c_{i_1}, ..., c_{i_n}) \quad (\boldsymbol{i} := (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}_0^n,\ |\boldsymbol{i}| = d)$$

とする．$\overrightarrow{0C_{\boldsymbol{i}}}$ 方向の方向微分は

$$\partial_{\boldsymbol{i}} := c_{i_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_{in}\frac{\partial}{\partial x_n}$$

と表される．

$$(\partial_{\boldsymbol{i}})^d f = \sum_{|\boldsymbol{j}|=d} c_{i_1}^{j_1} \cdots c_{i_n}^{j_n} \frac{d!}{j_1! \cdots j_n!} \frac{\partial^d f}{\partial x_1^{j_1} \cdots \partial x_n^{j_n}} \quad (|\boldsymbol{i}| = d)$$

であるから，$N := \binom{n+d-1}{d}$ とおくとき，$\boldsymbol{i} = (i_1, ..., i_n)$ と $\boldsymbol{j} = (j_1, ..., j_n)$ を添え字とする $N \times N$ 行列 $\left(c_{i_1}^{j_1} \cdots c_{i_n}^{j_n}\right)$ が正則であることを示せばよい．列ベクトルの線形関係

$$\sum_{|\boldsymbol{j}|=d} k_{j_1,...,j_n} c_{i_1}^{j_1} \cdots c_{i_n}^{j_n} = 0 \quad ((k_{j_1,...,j_n}) \in \mathbb{R}^N,\ |\boldsymbol{i}| = d)$$

があったとする．d 次多項式

$$F(x) := \sum_{j_1,...,j_n} k_{j_1,...,j_n} x_1^{j_1} \cdots x_n^{j_n}$$

は各 $C_{\boldsymbol{i}}$ で値 0 をとる．$F|_L$ は $L \subset \mathbb{R}^n$ 上のたかだか d 次の多項式であり，$T \subset L$, 上で値 0 をとっている．すると **(2.1)** により $F|_L$ は恒等的に 0 となる． $F(x_1, ..., x_n)$ が斉次多項式であることから $\mathbb{R}^n$ 上で $F = 0$ となる．つまり $k_{j_1,...,j_n} = 0$ となり， $\left(c_{i_1}^{j_1} \cdots c_{i_n}^{j_n}\right)$ の正則性が示された． □

注意 2.3 $\det\left(c_{i_1}^{j_1} \cdots c_{i_n}^{j_n}\right)$ は c_{i_ν} の多項式であるから，N 個の一般的な方向微分が d 次の混合微分を張ることになる．簡単な証明があるだろうか．

3 シュパレク関数

命題 3.1 $A \subset \mathbb{R}$ を閉集合とし，A は ξ に集積するものとすると $S_A^*(k) = k$ となる．

証明. C^k 級関数 f が k 平坦ではないものとする．すると $h \leq k$ があって

$$f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(h-1)} = 0, \quad f^{(h)}(0) \neq 0$$

ロピタルの定理により

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^h} = \frac{f^{(h)}(0)}{h!} \neq 0$$

となる．したがって f は k 弱平坦ではなく，$S^*_A(k) \leq k$ となる． □

例 3.2 $L \subset \mathbb{R}^n$ を $\mathbb{R}^n$ の原点を通らない超平面とする．それに含まれる $(n-1)$ 次元 d $(d \in \mathbb{N})$ 次トラス $T_d \subset L$ をとる．原点 0 と T_d の各点を結ぶ直線の和集合を E_d とする．$f(x)$ を 0 の近傍 U で定義され E_d にそって d 弱平坦な C^d 級の関数とする．$C := (c_1, ..., c_n) \in T_d$ に対応する方向微分

$$\partial_C := c_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + c_n \frac{\partial}{\partial x_n}$$

を考えると **(3.1)** により，

$$f(0) = \partial_C f(0) = (\partial_C)^2 f(0) = \cdots = (\partial_C)^d f(0) = 0$$

となり，**(2.2)** により d 次の混合微分はすべて零となる．n 次元 d 次のトラスはより低次のトラスを含んでいるから f は d 平坦となる．かくして $S^*_F(k) = k$ $(k \leq d)$ となることが示された．L 内の T_d を含む $(n-1)$ 次元 $d+1$ 次トラスをとると，**(2.1)** により，零でない $d+1$ 次の斉次多項式で E_d で値 0 をとるものが存在する．したがって $S^*_{E_d}(k) = \infty$ $(k > d)$ である．

例 3.3 **(3.2)** におけるような T_d $(d \in \mathbb{N})$ を取り，その上に 0 に集積する可算集合 A_d をとる．ただし $\xi \in A_d$ に対して $\|\xi\| \leq 1/d$ となっているものとする．$A := \sum_{d \in \mathbb{N}} A_d \cup \{0\}$ とおくとこれも閉可算集合でその集積点は 0 だけの 1 点となる．**(2.2)** と **(3.1)** により $S^*_A(k) = k$ となる．

4 被約シュパレク関数

特異点とその上の解析関数芽のみを扱うときは，少し別のシュパレク関数を用いる方が議論が易しくなる．

解析部分集合 $X \subset \mathbb{R}^n$ の芽が ξ で既約であるとする．その上の解析関数芽の全体はネーター整域 $\mathcal{O}_{X,\xi}$ をなす．その元のうち ξ で値 0 をとるものの全体 $\mathfrak{m}$ はただ一つの極大イデアルをなすから，$\mathcal{O}_{X,\xi}$ は局所環である．以下関数（芽）はすべて解析的であると仮定する．$f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ の**位数**は

$$\nu(f) := \nu_{X,\xi}(f) := \sup\{p : f \in \mathfrak{m}^p\}$$

で定義される．$\nu(f) = r$ であることと $(r-1)$ 平坦であることは同値である．Samuel, Rees [R$_1$] に倣い f の**被約位数** $\overline{\nu}(f)$ を次式で定義する．

$$\overline{\nu}(f) := \overline{\nu}_{X,\xi}(f) := \lim_{i\to\infty} \frac{\nu(f^i)}{i} \in [0,\infty].$$

この極限はつねに存在し $\overline{\nu}(f^i) = i\overline{\nu}(f)$ が成立する．位数あるいは被約位数については，可換環論において多くの結果が知られている．

定理 4.1 (Rees [R$_2$], Nagata [N]) 一つの X に対して $\overline{\nu}(f)$ はある有理数の整数倍の値しか取らない．

X が滑らかな場合は $\mu_{X,\xi}(f) = \overline{\nu}_{X,\xi}(f) = \nu(f)$ となる．特異点の場合も，次に見る様に，位数と被約位数の差は有限にとどまる．

定理 4.2 (Rees [R$_2$]) X を $\mathbb{R}^n$ の開集合の部分解析集合とすると，$b \geq 0$ が存在して，任意の $f \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ に対して

$$\nu_{X,\xi}(f) \leq \overline{\nu}_{X,\xi}(f) \leq \nu_{X,\xi}(f) + b$$

となる．

定義 4.3 $k \in (0,\infty)$ に対して $\mu_A(f) \geq r \Longrightarrow \overline{\nu}(f) \geq k$ となる r の下限を $S_A(k) := S_{A,\xi}(k)$ で表し，**（被約）シュパレク関数**ということにする．

明らかに $A \subset B \subset X \subset \mathbb{R}^n$ に対して $k \leq S_{X,\xi}(k) \leq S_{B,\xi}(k) \leq S_{A,\xi}(k) \quad (k \in [0,\infty))$ となる．

シュパレク関数の定義に被約位数を用いたことにより，次のことが成り立つ．

命題 4.4 X を $\mathbb{R}^n$ の部分解析集合とし，$A \subset X$ を $\xi \in X$ に集積する閉部分集合とする．このときもし $S_A(k) \leq ck + d$ $(c > 0,\ d > 0)$ となっているならば $S_A(k) \leq ck$ ともなっている．

定理 4.5 (Izumi, Rees [R$_3$]) X が ξ で既約な $\mathbb{R}^n$ の開集合の部分解析集合とする．すると $a \geq 1$ が存在して

$$\overline{\nu}_{X,\xi}(f) + \overline{\nu}_{X,\xi}(g) \leq \overline{\nu}_{X,\xi}(fg) \leq \overline{\nu}_{X,\xi}(f) + a \cdot \overline{\nu}_{X,\xi}(g) \quad (f,\ g \in \mathcal{O}_{X,\xi})$$

となる．

定理 4.6 X を $\mathbb{R}^n$ の ξ で既約な部分解析集合とし，A, B を $\xi \in X$ に集積するその閉部分集合とする．もし $S_{A \cup B}(k) \leq ck$ ならば

$$S_A(k) \leq (1+a)ck \quad \text{か} \quad S_B(k) \leq (1+a)ck$$

となる．ここで a は **(4.5)** の定数である．

証明. $(1+a)ck$ が A と B どちらのシュパレク関数をも抑えないと仮定する．すると $f,\ g \in \mathcal{O}_{X,\xi}$ が存在して，$k,\ l \in \mathbb{N}$ が存在して

$$\mu_A(f) \geq (1+a)ck, \quad \overline{\nu}(f) < k; \quad \mu_B(g) \geq (1+a)cl, \quad \overline{\nu}(g) < l$$

となる．解析的位数の定義により

$$\mu_{A \cup B}(f^l g^k) \geq \min\{(1+a)ck \cdot l,\ (1+a)cl \cdot k\} = (1+a)ckl$$

となるから $\overline{\nu}(f^l g^k) \geq (1+a)kl$ である．すると **(4.5)** により

$$l \cdot \overline{\nu}(f) + ak \cdot \overline{\nu}(g) \geq (1+a)kl$$

となる．これは仮定 $\overline{\nu}(f) < k, \overline{\nu}(g) < l$ に反する． □

5 シュパレク関数と写像

$X \subset \mathbb{R}^m$ と $Y \subset \mathbb{R}^n$ をそれぞれ ξ および η で既約な解析集合とする．$\Phi : X \longrightarrow Y$ を $\Phi(\xi) = \eta$ となる解析写像とする．これに対して Gabrielov は ξ での**位相的ランク**を次式で定義した．$\operatorname{grk}_\eta \Phi := \min\{\dim \Phi(U) : U \text{ は } \xi \text{ の近傍}\}$.

定理 5.1 (Izumi [I$_2$], [I$_5$]) $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $\Phi : X \longrightarrow Y$ を上の通りとすると次の条件は同値である．

1. $\operatorname{grk}_\xi \Phi = \dim Y_\eta$.

2. $a \geq 1$ が存在して $a \cdot \overline{\nu}_\xi(f) \geq \overline{\nu}_\eta(f \circ \Phi) \quad (f \in \mathcal{O}_{Y,\eta})$.

注意 5.2 この条件は，局所環の準同型 $\varphi : \mathcal{O}_{Y,\eta} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,\xi}$ $(f \longrightarrow f \circ \Phi)$ が単射であり，その像が Krull 位相に関して閉集合になるという条件と同値になる（Gabrielov, cf. [I_3]）．(単射な φ がその像の上への開写像となることは，定義により，線形とは限らぬ写像 $\theta : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ が存在して，$\overline{\nu}_\xi(f) \geq \theta(\overline{\nu}_\eta(f))$ となることである.)

定理 5.3 $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^m$, $\Phi : X \longrightarrow Y$ を上の通りとする． $\mathrm{grk}_\xi \Phi = \dim_\eta Y$ ならば，閉集合 $A \subset X$ に対して $S_{\Phi(A),\eta}(k) \leq S_A(ak)$ となる．ここで a は **(5.1)** におけるものである．

証明. $s := S_A(ak)$ とおく．もし $\mu_{\Phi(A),\eta}(f) \geq s$ ならば $\epsilon > 0$ に対して

$$\lim_{\Phi(A) \ni y \longrightarrow \eta} \frac{f(y)}{\|y - \eta\|^{s-\epsilon}} = 0$$

となる．ξ の近傍で，ある $e > 0$ に対して $\|\Phi(x) - \eta\| \leq e\|x - \xi\|$ であるから，

$$\lim_{A \ni x \longrightarrow \xi} \frac{f(\Phi(x))}{\|x - \xi\|^{s-\epsilon}} = 0$$

となる．したがって $f \circ \Phi$ は A にそって $(s - \epsilon)$ 弱平坦となる．よって $\mu_A(f \circ \Phi) \geq s$ である．s の定義によって $\overline{\nu}(f \circ \Phi) \geq ak$，したがって，**(5.1)** により $\overline{\nu}(f) \geq k$ である． □

ここで超越（数）理論で基礎的な事実を紹介する．まず $f_1, ..., f_p \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n,0}$ を定め，これに対して

$$\theta_{f_1,...,f_p}(k)$$
$$:= \sup\{\nu(P(f_1, ..., f_p)) : P \in \mathbb{C}[t_1, ..., t_p],\ \deg P \leq k, P(f_1, ..., f_p) \neq 0\},$$
$$\alpha(f_1, ..., f_p) := \overline{\lim}_{k \to \infty} \log_k \theta_{f_1,...,f_p}(k)$$

とおく．これらは体の拡大 $\mathbb{C}(f_1, ..., f_p)$ の超越性の尺度となっている．

定理 5.4 (1次形式の指数関数の零評価) $\lambda_1, ..., \lambda_t \in \mathbb{R}$ に対して $s = \dim_{\mathbb{Q}} \sum \mathbb{Q}\lambda_i$ とおくと，$\theta_{\lambda_1,...,\lambda_t}(k)$ は k の $(s+1)$ 次式で上から評価され，また無限個の k について k の $(s+1)$ 次式で下から評価される．したがって $\alpha(x, \exp \lambda_1 x, ..., \exp \lambda_t x) = s + 1$ となっている．

$\varphi : (S, \mathfrak{n}) \longrightarrow (R, \mathfrak{m})$ を局所環の準同型とする．R および S における位数を $\mathcal{O}_{X,\xi}$ のときと同様に定義し，それぞれ $\nu_{\mathfrak{m}}$, $\nu_{\mathfrak{n}}$ で表し，φ のシュヴァレイ関数とシュヴァレイ指数を次式で定義する．

$$\kappa_\varphi(t) := \sup\{\nu_{\mathfrak{m}}(\varphi(f)) : \nu_{\mathfrak{n}}(f) \leq t\}, \quad \beta(\varphi) := \overline{\lim}_{k\to\infty} \log_t \kappa_\varphi(t).$$

定理 5.5 (Izumi [I$_6$]) $\varphi : \mathbb{C}\{y\} \longrightarrow R$ $(y := (y_1, ..., y_n))$ を局所環の準同型とする．これは $\varphi(y_1), ..., \varphi(y_n)$ によって定まる．このとき，$\theta_{\varphi(y_1),...,\varphi(y_n)}(k) \leq \kappa_\varphi(k)$ となる．したがってまた $\alpha(\varphi(y_1), ..., \varphi(y_n)) \leq \beta(\varphi)$ となる．

証明. 任意の t に対して $\kappa_\varphi(t) < \infty$ としてよい．多項式 $P \in \mathbb{R}[t_1, ..., t_n]$ が存在して

$$\deg P \leq k, \quad \theta_{\varphi(y_1),...,\varphi(y_n)}(k) = \nu_{\mathfrak{m}}(\varphi(P)) < \infty$$

となる．$\nu_y(P) \leq \deg P \leq k$ であるから，$\theta_{\varphi(y_1),...,\varphi(y_n)}(k) \leq \kappa_\varphi(k)$ である．□

6 Osgood 写像

最後に線形関数で抑えられないシュパレク関数を持つ集合芽を，著名な Osgood の写像芽を用いて構成する．

例 6.1 (Osgood 写像) Osgood によってもたらされた奇妙な写像芽の実版は

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = x_1 x_2, \quad y_3 = x_1 x_2 \exp x_2$$

で定義される $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ である．$\varphi : \mathbb{R}\{y_1, y_2, y_3\} \longrightarrow \mathbb{R}\{x_1, x_2\}$ を自然に引き起こされた準同型とする．どんな小さな 0 の近傍の像も 2 次元多様体を含むから，

1. $\mathrm{grk}_0(\Phi) = 2$ である．

$f \in \mathbb{R}\{y_1, y_2, y_3\}$ とする．これを斉次成分に分けて $f = \sum_{i=0}^{\infty} f_i$ $(\deg f_i = i)$ とする．$\varphi(f_i) = x_1^i g_i(x_2, \exp x_3)$ $(g_i \in \mathbb{R}[z_1, z_2],\ \deg g_i \leq 2i)$ と書ける．x_2 と $\exp x_3$ は代数的に独立であるから，次のことはすぐわかる．

2. φ は単射である．(つまり 0 の近傍の像の解析的閉包が $\mathbb{R}^3$ となる．)

さらに近年次のことがわかった．

3. $a > 0, b > 0$ が存在して $f \in \mathbb{R}\{y_1, y_2, y_3\}$ に対して $\overline{\nu}(\varphi(f)) \le a \cdot \overline{\nu}(f)^2$ であり，いくらでも大きい $\overline{\nu}(f)$ を持つ $f \in \mathbb{R}\{y_1, y_2, y_3\}$ が存在して $b \cdot \overline{\nu}(f)^2 \le \overline{\nu}(\varphi(f))$ となる．つまり $\beta(\varphi) = 2$ である ([I₆]).

なぜなら，**(5.4)** によってある $c > 0$ に対して $\overline{\nu}_x(g_i[x_2. \exp x_2]) \le ci^2$ $(i \in \mathbb{N})$ が成り立つ．したがって $\overline{\nu}_x(\varphi(f_i)) \le ci^2 + i$ が成り立ち，前半の評価が出る．後半は **(5.4)** と **(5.5)** による．

4. $D \subset \mathbb{R}^2$ が 0 を中心とする円盤とする． $\Phi(D)$ は内点を持たないが $\mu_{\Phi(D)}(f) = \overline{\nu}(f)$ i.e. $S_{\Phi(D)}(k) = k$ となっている (Bierstone-Milman [BM₂]).

上の *4* において D をわずかに小さな集合でおきかえると，まったく異なる評価が得られる．ある $\epsilon > 0$ に対して

$$E := \{(x_1, x_2) : |x_2| \le |x_1| \le \epsilon\}, \quad F := \Phi(E)$$

とおく．*2* を用いると F の $(0,0)$ における芽を含む解析集合芽は全空間 $\mathbb{R}^3$ の芽となる事がわかる．F は半解析的（semianalytic）ではない劣解析的コンパクト集合である．任意の $f \in \mathbb{R}\{y_1, y_2, y_3\}$ に対して

$$\mu_F(f) \ge ak^2 \Longrightarrow \mu_E(\varphi(f)) \ge ak^2 \Longleftrightarrow \overline{\nu}(\varphi(f)) \ge ak^2 \Longrightarrow \overline{\nu}(f) \ge k$$

となる．(左の矢はある $e > 0$ に対して 0 のある近傍上で $\|\Phi(x)\| \le e\|x\|$ となることによる．真中の矢は (**??**) ($s = 1$ の場合）による．そして最後に右の矢は *3* から出てくる．かくして $S_F(k) \le ak^2$ が示された．

(5.4) の零評価により，$c > 0$ が存在して，いくらでも大きな $k \in \mathbb{N}$ に対して $P_k \in \mathbb{R}[z_2, z_3]$ があり，

$$\overline{\nu}(P_k(x_2, x_2 \exp x_2)) \ge ck^2, \quad \deg P_k = k$$

となる．すると，

$$g_k(y_1, y_2, y_3) := y_1^k P_k\left(\frac{y_2}{y_1}, \frac{y_3}{y_1}\right)$$

は y_1, y_2, y_3 の k 次斉次多項式であり，$\varphi(g_k) = x_1^k P_k(x_2, x_2 \exp x_2)$ は x_1, x_2 の解析関数で $x_1^k x_2^{ck^2}$ で割り切れる．E 上で $|x_2| \le |x_1|$ となっているから，$\dfrac{\varphi(g_k)}{x_1^{ck^2+k}}$ は E 上で有界である．すると $\dfrac{|g_k(y_1, y_2, y_3)|}{|y_1|^{ck^2+k}}$ は F 上で有界となり，$\mu_F(g_k) \ge ck^2 + k$ となる．一方 $\overline{\nu}(g_k) = \nu(g_k) \le \deg g_k = k$ であるから，$S_F(k)$ は $ck^2 + k$ より小さくはない．かくして今回の結果は次のとおりである．

5. F のシュパレク関数の「位数」 $\overline{\lim}_{k \to \infty} \log_k S_F(k)$ は 2 である．

References

[AS] A. A. Akopyan, A. A. Saakyan, Multivariate splines and polynomial interpolation, Russian Math. Surveys **48**-5, 1-72 (1993).

[BM_1] E. Bierstone, P. Milman, Semianalytic and subanalytic sets, Publ. Math. **67**, 5-42 (1988).

[BM_2] E. Bierstone, P. Milman, Geometric and differential properties of subanalytic sets, Annals of Mathematics, **147**, 731-785 (1998).

[G] M. Gabrielov, Formal relations between analytic functions, Math. USSR Izvestija **7**, 1056-1088 (1973) (Izv. Akad. Nauk. SSSR **37**, (1973)).

[H] H. Hironaka, Subanalytic sets, in: Number theory, algebraic geometry and commutative algebra, in honor of Y. Akizuki, Kinokuniya, Tokyo 1973, 453-493.

[I_1] S. Izumi, Linear complementary inequalities for orders of germs of analytic functions, Invent. Math. **65**, 459-471 (1982).

[I_2] S. Izumi, A measure of integrity for local analytic algebra, Publ. RIMS Kyoto Univ. **21**, 719-735 (1985).

[I_3] S. Izumi, The rank condition and convergence of formal functions, Duke Math. J. **59**, 241-264 (1989).

[I_4] S. Izumi, A criterion of algebraicity of analytic set germs, Proc. Japan Acad. **68**, Ser. A 307-309 (1992).

[I_5] S. Izumi, Note on linear Chevalley estimate for homomorphisms of local algebras, Communications in Algebra **24**, 3885-3889 (1998).

[I_6] S. Izumi, Transcendence measure for subsets of local algebras, in: Real analytic and algebraic singularities (ed. T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya, S. Koike) (PRNMS 381), Longman, Harlow 1996, 189-206.

[I_7] S. Izumi, Flatness of differentiable functions along a subset of a real analytic set. to appear in J. Analyse Math.

[LT] M. Lejeune-Jalabert, B. Teissier, Clöture integral des idéaux et équisingularite, Univ. Sc. et Medicale de Grenoble, 1974.

[N] M. Nagata, Note on a paper of Samuel concerning asymptotic properties of ideals, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, A **30**, 165-175 (1957).

[O] W. F. Osgood, Lehrbuch der Funktionentheorie Band II, New York, Chelsea 1965.

[R_1] D. Rees, Valuation associated with a local ring (I), Proc. London Math. Soc. (3) **5**, 107-128 (1955).

[R_2] D. Rees, Valuation associated with a local ring (II), J. London Math. Soc. (3) **31**, 228-235 (1956).

[R_3] D. Rees, Izumi's theorem, in: Commutative algebra (ed. M. Hochster, C. Huneke, J. D. Sally) (MSRIP 15), Springer, N.Y. 1989, 407-416.

[S] K. Spallek, l-Platte Funktionen auf semianalytischen Mengen, Math. Ann. **227**, 277-286 (1977).

[T] J.-Cl. Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables (EMIG 71), Springer, Berlin 1972.

Kowakae Higashi-Osaka 577-8502, Japan
e-mail: izumi@math.kindai.ac.jp

同相群の構造について

福井　和彦　(京都産業大学理学部数学科)

1.　序

同相群およびその部分群のホモロジーは葉層構造の分類空間のトポロジーとの関係で研究されてきた。J.Mather[Ma1] は $\mathbf{R}^n$ のコンパクトな台をもつ同相群 $\mathcal{H}^c(\mathbf{R}^n)$ のホモロジーは全て消えることを示した。また、これは R.Edwards と R.Kirby[E-K] の深い定理を結びつけることにより、位相多様体 M のコンパクトな台をもつ恒等写像にイソトピックな同相群 $\mathcal{H}^c(M)$ の 1 次元ホモロジー群は 0 であることを意味する。ここで、群の 1 次元ホモロジー群とはその群の交換子部分群による商群のことである。更に、W.Thurston[Th] は 多様体 M のコンパクトな台をもつ恒等写像にイソトピックな微分同相群 $\mathcal{D}^c(M)$ の 1 次元ホモロジー群は 0 であることを示した。

多様体上の幾何構造（例えば、体積、シンプレクティック構造、部分多様体、葉層構造、G-多様体構造）を保つ（微分）同相群について多くの仕事がある。(例えば、[A-F3],[A-F5],[Ba1],[Ba2],[E],[H1],[M],[Ma2],[Mc],[Ts1],[Ts2],[Ts3] など)

さて、これからリプシッツ同相群について述べるのであるが、何故リプシッツ写像に関わったのかを述べよう。きっかけは後に出てくる補題 5.3 の topological version が成り立つかどうかを考察している時であった。次の例を見てみよう。写像 $\varphi_\epsilon : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ を

$$\varphi_\epsilon(x) = \begin{cases} x+\epsilon & (-\epsilon \le x \le 0) \\ -x+\epsilon & (0 \le x \le \epsilon) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

e-mail address : fukui@cc.kyoto-su.ac.jp

本講演の大部分は阿部考順氏（信州大学理学部）又は今西英器氏（京都大学総合人間学部）との共同研究である。

によって定義する。このとき、どんなに小さいϵを取っても恒等写像の摂動 $x+\varphi_\epsilon(x)$ は $\mathbf{R}$ の同相写像にならない。即ち、コンパクト開位相の下ではリプシッツ同相写像を上手くコントロールすることはできない。そこで考えついたのが２章のコンパクト開リプシッツ位相であった。この位相の下では、微分可能写像のときとほぼ同様な振る舞いをすることが分かる。例えば、ある意味での逆関数定理は成り立つし、コンパクトな場合、リプシッツ同相写像の全体はリプシッツ写像の中で開集合である。

本講演では、多様体のリプシッツ同相群およびその部分群の１次元ホモロジーを中心に（微分）同相群と対比させながら最近得られた結果を総合的に報告する。

2.　リプシッツ多様体とコンパクト開リプシッツ位相

まず、リプシッツ多様体、リプシッツ同相写像およびリプシッツ同相群上の位相について述べよう。

定義 2.1　X, Y を距離 d_X, d_Y を持つ距離空間とする。$f: X \to Y$ がリプシッツ写像であるとは$k \geq 0$が存在して、すべての$x, y \in X$に対して$d_Y(f(x), f(y)) \leq k d_X(x, y)$ を満たすときをいう。

$lip(f)$ をそのような k の下限とし、**リプシッツ定数**と呼ぶ。

$\mathbf{R}^m$ を m 次元 Euclid 空間とする。

定義 2.2　M が m 次元リプシッツ多様体であるとは、次のような極大局所座標系$\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha), (\alpha \in A)\}$をもつ$M$のことである。ここで$U_\alpha$ はMの開集合、$\varphi_\alpha: U_\alpha \to \mathbf{R}^m$ は 各座標変換写像がリプシッツ同相である。

定義 2.3　M, N をリプシッツ多様体とする。
$f: M \to N$ がリプシッツ写像であるとは、M の任意の点 p に対して、pのまわりのM の局所座標　$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ と $f(p)$ のまわりのN の局所座標 $(V_\lambda, \psi_\lambda)$ が存在して次を満たす。

$f(U_\alpha) \subset V_\lambda$ および　$\psi_\lambda \circ f \circ \varphi_\alpha^{-1}: \varphi_\alpha(U_\alpha) \to \psi_\lambda(V_\lambda)$ がリプシッツ

写像である。

$C_{LIP}(M,N)=\{f:M\to N$ リプシッツ写像 $\}$ とおく。

C^r-多様体上の C^r-写像の集合にコンパクト開 C^r-位相を導入するのと同様に $C_{LIP}(M,N)$ にコンパクト開リプシッツ位相を次のように導入する。

$\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ と $\{(V_\lambda,\psi_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ を M と N のリプシッツ局所座標系とする。各 $\alpha\in A$ に対して、K_α を 族 $\{intK_\alpha\}$ が M を覆う U_α のコンパクト部分集合とする。$f\in C_{LIP}(M,N)$ に対して、N 上の局所座標　(V_λ,ψ_λ) を $f(K_\alpha)\subset V_\lambda$ を満たすようにとる。$\epsilon_\alpha>0$ に対して、

$$\mathcal{N}^{LIP}(f,\,(U_\alpha,\varphi_\alpha),\,(V_\lambda,\psi_\lambda),\,\epsilon_\alpha,\,K_\alpha)=\{g\in C_{LIP}(M,N)\mid g(K_\alpha)\subset V_\lambda \text{ および } lip(f-g)<\epsilon_\alpha\}$$

とおく。ここで、 $lip(f-g)<\epsilon_\alpha$ とは すべての $x,y\in\varphi_\alpha(K_\alpha)$ に対して、

$$||\psi_\lambda\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)-\psi_\lambda\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)||<\epsilon_\alpha$$

および

$$||(\psi_\lambda\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}(x)-\psi_\lambda\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1}(x))-(\psi_\lambda\circ f\circ\varphi_\alpha^{-1}(y)-\psi_\lambda\circ g\circ\varphi_\alpha^{-1}(y))||\le\epsilon_\alpha||x-y||$$

を満たすことを意味する。

集合 $\mathcal{N}^{LIP}(f,\,(U_\alpha,\varphi_\alpha),\,(V_\lambda,\psi_\lambda),\,\epsilon_\alpha,\,K_\alpha)$ は $C_{LIP}(M,N)$ 上のある位相の部分基 (subbasis for a topology) を生成する。この位相を $C_{LIP}(M,N)$ 上の**コンパクト開リプシッツ位相**と呼ぶ。

定義 2.4　同相写像 $f:M\to M$ が リプシッツ同相写像であるとは、f と f^{-1} がリプシッツ写像であるときをいう。

$\mathcal{H}_{LIP}(M)$ を M のコンパクトな台をもつリプシッツ同相写像の群で、$C_{LIP}(M,M)$ の部分空間と考える。恒等写像の連結成分も同じ記号 $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ で表す。

3. $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ の構造

$u \in C_{LIP}(\mathbf{R}^m, \mathbf{R})$ をコンパクトな台をもつものとするとき、次の写像族 $\phi_t : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m \ (0 \leq t \leq 1)$ を

$$\phi_t(x_1, \cdots, x_m) = (x_1 + tu(x), x_2, \cdots, x_m)$$

と定義する。このとき、次の補題を得る。

補題 3.1(Key lemma). $lip(u) < 1$ なら $\{\phi_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ はリプシッツ同相写像の族である。

注意. この補題より M がコンパクトなとき、リプシッツ同相写像をコンパクト開リプシッツ位相に関して少し摂動させてもまだリプシッツ同相写像である事がわかる。

M をコンパクト、リプシッツ多様体とする。$(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ を M の局所座標、W_1, W_2 を U_α の 相対コンパクト開集合で $\bar{W_2} \subset W_1$ を満たすものとする。リプシッツ関数 $\mu_\alpha : U_\alpha \to [0,1]$ で $\bar{W_2}$ 上で 1, W_1 の外で 0 なるものをとる。
このとき、各 $f \in U_\epsilon(1_M)$ に対して写像 $f_\alpha : M \to M$ を

$$f_\alpha(x) = \begin{cases} x + \mu_\alpha(x)(f(x) - x) & (x \in U_\alpha) \\ x & (x \notin U_\alpha) \end{cases}$$

と定義すると、次の命題を得る。

命題 3.2. $m(1 + lip(\mu_\alpha)) \cdot \epsilon < 1$ なら、f_α はリプシッツ同相写像で 1_M にイソトピックである。即ち、 $f_\alpha \in \mathcal{H}_{LIP}(M)$。

これらより、以下の分解補題 (fragmentation lemma) や $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ の局所可縮性 (local contractibility) を得る事が出来る。

系 3.3. (分解補題) $\epsilon > 0$ が存在して、以下を満たす：任意の $f \in U_\epsilon(1_M)$ に対して、次の (i),(ii) を満たす $f_i \in U_1(1_M)(\subset \mathcal{H}_{LIP}(M))(i = 1, 2, \cdots, k)$ が存在する：

(i) 各 f_i の台は小さな座標近傍に含まれる。

(ii) $f = f_k \circ \cdots \circ f_1$ と表される。

系 3.4(阿部 - 福井 [A-F2]). (局所可縮性)
$\mathcal{H}_{LIP}(M)$ は局所可縮である。

定理 3.5(阿部 - 福井 [A-F2]). $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ は完全群である。即ち、$\mathcal{H}_{LIP}(M)$ はその交換子部分群に等しい。

(証明の概略) 任意の $f \in \mathcal{H}_{LIP}(M)$ をとる。このとき，f は恒等写像に十分近いとして良い。よって系 4 から、次の (i),(ii) を満たす $f_i \in U_1(1_M)(\subset \mathcal{H}_{LIP}(M))(i = 1, 2, \cdots, k)$ が存在する。

(i) 各 f_i の台は小さな座標近傍に含まれる。

(ii) $f = f_k \circ \cdots \circ f_1$ と表される。

したがって、$U = (1,2)\times(-1,1)^{m-1} \subset \mathbf{R}^m$ とおくと、$f \in \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^m)$ で f の台は U に含まれると仮定してよい。リプシッツ同相写像 $\phi \in \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^m)$ を $x \in B(0,3) = \{x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbf{R}^m \mid (x_1)^2 + \cdots + (x_m)^2 < 9\}$ で $\phi(x) = \frac{1}{3}x$ によって与える。$U_j = \phi^j(U) = (\frac{1}{3^j}, \frac{2}{3^j}) \times (-\frac{1}{3^j}, \frac{1}{3^j})^{m-1}$, $(j = 0, 1, 2, ...)$ とおく。($U_0 = U$ に注意)。このとき，$j \neq k$ に対して，$\bar{U}_j \cap \bar{U}_k = \emptyset$ そして j が ∞ に行くとき、$\{\bar{U}_j\}$ が原点 $0 \in \mathbf{R}^m$ に収束する。

上の $f \in \mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^m)$ と $i = 0, 1$ に対して，$\psi_i(f)$ を次のように定義する;

$$\psi_i(f)(x) = \begin{cases} \phi^j \circ f \circ \phi^{-j}(x) & (x \in \bar{U}_j, j \geq i) \\ x & (x \notin \cup_{j\geq i}\bar{U}_j). \end{cases}$$

$\psi_i(f)$ と同様 $(\psi_i(f))^{-1} = \psi_i(f^{-1})$ もリプシッツ同相写像である。

このとき、$\psi_1(f) = \phi \circ \psi_0(f) \circ \phi^{-1}$ であるから、$f = \phi \circ \psi_0(f) \circ \phi^{-1} \circ \psi_0(f)^{-1} = [\phi, \psi_0(f)]$ が成り立つ。 □

この定理は次のように relative case に拡張される。(M, N) をリプシッツ多様体対とする。ここで，N は M のリプシッツ部分多様体である。$\mathcal{H}_{LIP}(M, N)$ を N を N に移すリプシッツ同相写像からなる $\mathcal{H}_{LIP}(M)$ の部分群とする。このとき、次の定理を得る。

定理 3.6(阿部-福井 [A-F4]). $\mathcal{H}_{LIP}(M, N)$ は完全群である。

注意. 定理 3.6 の証明は $\dim N > 0$ のときは、定理 3.5 の証明と同

様であるが，$\dim N = 0$ のときは、少し工夫がいる。

ここで、今までの結果と同相群や微分同相群の１次元ホモロジー群を表にしておこう。

場合	M	(M,N) $(\dim N > 0)$	(M,p) $(p=$ 1 点$)$
$H_1(\mathcal{H}_{LIP})$	0	0	0
備考	[A-F2]	[A-F2]	[Ts3],[A-F4]
$H_1(\mathcal{H})$	0	0	0
備考	[Ma]+[E-K]	[F2]	[F2]
$H_1(\mathcal{D})$	0	?	$\mathbf{R}$
備考	[Th]		[F1]

上の表で、$H_1(\mathcal{H}_{LIP})$,$H_1(\mathcal{H})$, $H_1(\mathcal{D})$ はそれぞれリプシッツ同相写像、同相写像、微分同相写像からなる群でコンパクト開リプシッツ位相、コンパクト開位相、コンパクト開 C^∞ 位相に関して連結成分を表す。

また、備考は参考に挙げたが、正確ではない（かも知れない）。C^r-級微分同相写像群 $\mathcal{D}^r$ については J.Mather[Ma2] により、$H_1(\mathcal{D}^r(M)) = 0$ $(r \neq \dim M + 1)$ が知られている。

4.　葉層構造を保つリプシッツ同相群について

この章では、葉層構造を保つリプシッツ同相写像からなる群の１次元ホモロジ-群を考察する。

$(M,\mathcal{F})$ をコンパクト　リプシッツ葉層多様体とする。リプシッツ同相写像 $f: M \to M$ が葉層構造を保つリプシッツ同相写像（または、葉を保つリプシッツ同相写像）とは M の各点 x に対して，x を通る葉が $f(x)$ (または、x) を通る葉に移される，即ち，$f(L_x) = L_{f(x)}$ (または、$f(L_x) = L_x$) が成り立つときを言う。ここで、L_x は x を含む $\mathcal{F}$ の葉である。$\mathcal{H}_{LIP}(M,\mathcal{F})$ (または、$\mathcal{H}_{LIP,L}(M,\mathcal{F})$) を恒等写像にイソトピックな葉層構造を保つリプシッツ同相写像（または、葉を保つリプシッツ同相写像）からなる群とする。

このとき、3 章の定理 3.5,3.6 や系 3.4 の証明と同様にして次の定理を得る。

定理 4.1(福井-今西 [F-I2]).　$\mathcal{H}_{LIP,L}(M,\mathcal{F})$ は完全群である。また局所可縮である。

次に余次元 1 葉層多様体に対して $\mathcal{H}_{LIP}(M,\mathcal{F})$ の 1 次元ホモロジ-群を考察しよう。

M をコンパクト C^2-多様体、$\mathcal{F}$ を M 上の余次元 1 C^2-葉層とする。そのとき、$\mathcal{F}$ に横断的な M の 1 次元 C^2-葉層 $\mathcal{T}$ が存在する。

補題 4.2.　$f \in \mathcal{H}_{LIP}(M,\mathcal{F})$、$L$ を $\mathcal{F}$ の葉とする。もし $f(L) \neq L$ ならば、L のホロノミー群は自明である。

M の部分集合 S_0 を

$$S_0 = \{x \in M \mid \exists f \in \mathcal{H}_{LIP}(M,\mathcal{F}); f(L_x) \neq L_x\}$$

で定義する。

定義より、S_0 開 $\mathcal{F}$-飽和 (saturated) 集合であり、補題 4.2 より S_0 の中のすべての葉は自明なホロノミーをもつ。このとき、次が成り立つ。

定理 4.3(福井-今西 [F-I2]).　S を S_0 の連結成分とする。このとき、S は $\mathcal{H}_{LIP}(M,\mathcal{F})$ の作用で不変であり，S は次の 3 つのタイプの 1 つで

ある。

Type P : S は $L\times(0,1)$ に同相で葉層 $\mathcal{F}|_S$ と $\mathcal{T}|_S$ は $L\times(0,1)$ の積構造に対応する。

Type R : S の中に横断的閉曲線 C が存在して C は $\mathcal{F}|_S$ の各葉と唯一点で交わる。自然な写像

$$p : S \to C, \quad p(x) = L_x \cap C$$

はファイブレーションで $\mathcal{T}|_S$ はファイブレーション p の接続である。

Type D : S の中の $\mathcal{F}$ のすべての葉は S の中で稠密である。$\mathcal{F}|_S$ を保ち，その軌道が $\mathcal{T}|_S$ の葉である位相流 $\{\varphi_t\}$ が S 上に存在する。

このとき、以下の定理を得る。

定理 4.4(福井-今西 [F-I2]). $\mathcal{F}$ をコンパクト C^2-多様体 M の余次元 1 C^2-葉層とする。$\mathcal{F}$ が Type D の成分を持たず，有限個の Type R の成分を持っているとする。このとき，$\mathcal{H}_{LIP}(M,\mathcal{F})$ は完全である。

注意 上の定理は [F-I1] の定理 4.6 と基本的には同様にして証明されるが、C^1-葉層に対しては分からない。

例 4.5 上の定理から S^3 上の Reeb 葉層 $\mathcal{F}_R$ に対して $\mathcal{H}_{LIP}(S^3,\mathcal{F}_R)$ は完全であることが分かる。(微分可能な場合と比較せよ。)

Type D 成分 S に対して、位相流 $\{\varphi_t\}$ は次のように定義される。C を $\mathcal{F}|_S$ の横断的閉曲線 とし、C が $\mathcal{T}$-軌道とする。そのとき、$\mathcal{F}|_S$ の葉 L に対して $G = C \cap L$ はアーベル群の構造を持ち，G は C にホロノミー変換群として作用する。すべての G-軌道は稠密だから、C の同相写像 h が存在して G は $h^{-1}\circ SO(2)\circ h$ に含まれる。この h は C の回転の下で一意的でホロノミー変換の線形化写像 (the linearization map) と呼ぶ。C 上の流 $\{\varphi_t\}$ を $\{h^{-1}\circ R_t \circ h\}$ によって定義し，これをホロノミー写像によって S 上の位相流に拡張する。ここで、R_t は C の角 $2\pi t$ の回転である。

定理 4.1,4.4 は位相多様体上の位相的葉層についても成り立つ。([F-I1])
例 4.5 の微分可能な場合、$H_1(\mathcal{D}(S^3,\mathcal{F}_R))$ は自明でない ([F-U])。

次に $\mathbf{R}$ の部分加群 $Per(S)$ を

$$Per(S) = \{t \in \mathbf{R} \mid \mathcal{F} \text{ のすべての葉 } L \text{ に対して}, \varphi_t(L) = L\}$$

で定義する。

このとき、次の定理を得る。

定理 4.6(福井-今西 [F-I2]). S を Type D 成分とし、線形化写像 h が絶対連続でないと仮定する。このとき、$\mathcal{H}_{LIP}(\bar{S}, \mathcal{F}\mid_S)$ は $\mathcal{H}_{LIP,L}(\bar{S}, \mathcal{F}\mid_S)$ に一致する。

(証明) $\mathcal{H}_{LIP}(\bar{S}, \mathcal{F}\mid_S) - \mathcal{H}_{LIP,L}(\bar{S}, \mathcal{F}\mid_S)$ の元 f が存在したと仮定しよう。$\{f_t\}$ を
$\mathcal{H}_{LIP}(\bar{S}, \mathcal{F}\mid_S)$ の中の $f_1 = f$ となるイソトピーとする。制限することによって、$\{f_t\}$ は $\mathcal{H}_{LIP}(C)$ の中のイソトピーと考える。そのとき、$f_t = h^{-1} \circ R_{\alpha(t)} \circ h$ と書ける。ここで、α は $[0,1]$ から $[0,\alpha]$ 上への連続関数である。f_1 がリプシッツで h が絶対連続でないから、M.Herman[H](CHAP. XII) の 命題 (1.2) によって、h や h^{-1} 殆ど至る所微分可能で、$h'(x) = 0\,(a.e), (h^{-1})'(x) = 0\,(a.e)$ が成り立つ. C 上の点 x_1, x_2 と角 β を $h'(x_1) = 0, (h^{-1})'(x_2) = 0$ と $R_\beta(h(x_1)) = x_2$ が成り立つように選ぶ。さらに, x_2 を $h(x_1)$ の近くに, β を十分小さく選ぶことが出来る。このとき、ある t_1 に対して $\alpha(t_1) = \beta$, $f_{t_1} = h^{-1} \circ R_\beta \circ h$ および $f'_{t_1}(x_1) = 0$ が成り立つ。 これは $f_{t_1}^{-1}$ がリプシッツに矛盾する。
□

次の 2 つの定理は [F-I1] の定理 4.3,4.10 と同様にして証明される。

定理 4.7(福井-今西 [F-I2]). S を Type D 成分とし、線形化写像 h がリプシッツ同相写像であると仮定する。このとき、$H_1(\mathcal{H}_{LIP}(M, \mathcal{F}))$ から $\mathbf{R}/Per(S)$ への全射が存在する。

定理 4.8(福井-今西 [F-I2]). $\mathcal{F}$ をトーラス T^m 上の 1 形式 $\omega = \sum a_i dx_i$ で定義された葉層とする。 a_i/a_j の 1 つが無理数ならば,
$H_1(\mathcal{H}_{LIP}(T^m, \mathcal{F}))$ は $\mathbf{R}/a_1\mathbf{Z} + \cdots + a_m\mathbf{Z}$ に同型である。

定理 4.6 は同相写像群では起こらない現象である。定理 4.7 がいつも成り立つ。([F-I1])

注意.　M.Herman[H](CHAP. XII) の定理 (3.6) によって、ある $\{a_i\}$ に対して定理 4.8 の $\mathcal{F}$ に位相共役な C^∞-葉層 $\mathcal{F}'$ でその線形化写像が絶対連続でないものが存在する。したがって、定理 4.1 と 4.6 から、$H_1(\mathcal{H}_{LIP}(T^m,\mathcal{F}'))=0$ を得る。即ち、$\mathcal{H}_{LIP}(T^m,\mathcal{F}')$ は完全群である。

5.　同変リプシッツ同相群について

G をコンパクト Lie 群、M をコンパクト、リプシッツ多様体 B 上のリプシッツの意味での主 G-束、$\pi: M\to B$ を射影とする。
$\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ を G-同変リプシッツ同相群のコンパクト開リプシッツ - 位相に関して 1_M 成分とする。このとき、次の定理を得る。

定理 5.1(阿部 - 福井 [A-F2]).　$\dim B>0$ なら、$\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ は完全群である。

(証明の概要)　任意の $f\in\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ に対して、次の可換図がある。

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\pi} \\ B & \xrightarrow{\bar{f}} & B. \end{array}$$

このとき、$\bar{f}\in\mathcal{H}_{LIP}(B)$ である。したがって、$P:\mathcal{H}_{LIP,G}(M)\to\mathcal{H}_{LIP}(B)$ を $P(f)=\bar{f}$ で定義すると系 3.3 を使うことにより、P は上への準同型になる。
再び系 3.3 を使うことにより、次を得る。

補題 5.2 (equivariant fragmentation lemma).　$\epsilon>0$ が存在して、以下を満たす：任意の $f\in U_\epsilon(1_M)(\subset\mathcal{H}_{LIP,G}(M))$ に対して、次の (i),(ii) を満たす $f_i\in U_1(1_M)(\subset\mathcal{H}_{LIP}(M))(i=1,2,\cdots,k)$ が存在する：
(i) 各 f_i の台の π による像は B の小さな座標近傍に含まれる。
(ii) $f=f_k\circ\cdots\circ f_1$ と表される。

同変微分同相群 $\mathcal{D}_G(M)$ についても同様の定理が成り立つ。([A-F1])

この補題により $M=\mathbf{R}^{m-q}\times G, B=\mathbf{R}^{m-q}, \pi:\mathbf{R}^{m-q}\times G\to\mathbf{R}^{m-q}$ を自明なG-束と仮定して議論を進めることができる。

このとき、上の $P:\mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)\to\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q})$ は

$$P(f)(x)=\pi(f(x,1))\,(\forall x\in\mathbf{R}^{m-q})$$

で与えられる。

また、写像 $L:\ker P\to C_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q},G_0)$ を

$$(x,L(f)(x))=f(x,1)\,(\forall f\in\ker P, x\in\mathbf{R}^{m-q})$$

で定義する。ここで、G_0 は G の単位元を含む連結成分。

このとき、次の補題が成り立つ。$B_\delta=\{x\in\mathbf{R}^{m-q}\mid |x|\le\delta\}$ とおく。

補題 5.3(Key lemma). $\mathrm{supp}(u)\subset B_\delta$ を満たす任意の $u\in C_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q},\mathbf{R})$ に対して、$lip(u)<1$ なら、次を満たす $v\in C_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q},\mathbf{R})$ と $\phi\in\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q})$ が存在する:
(i) $\mathrm{supp}(v)\subset B_{5\delta}$
(ii) $u=v\circ\phi-v$.

命題 5.4. $\ker P=[\ker P, \mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)]$

($G=S^1$ の場合の証明) $\supset$ は明らかだから、$\subset$ を示す。

任意の $f\in\ker P$ に対して $L(f)=u\in C_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q},\mathbf{R})$ と仮定してよい。このとき、
$L(f)=u=v\circ\phi-v$ (by 補題 5.3)
$L(h)=v, \bar{\phi}(x,g)=(\phi(x),g)\,(\forall x\in\mathbf{R}^{m-q}, g\in G)$ とおくと、簡単な計算により、
$L(h^{-1}\circ\bar{\phi}^{-1}\circ h\circ\bar{\phi})=v\circ\phi-v$ を得る。L は単射だから、
$f=h^{-1}\circ\bar{\phi}^{-1}\circ h\circ\bar{\phi}\in[\ker P, \mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)]$。

(定理 5.1 の証明) 完全系列

$$1\to\ker P\to\mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)\to\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q})\to 1$$

がある。したがって、完全系列

$$\ker P/[\ker P,\, \mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)] \to H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G))$$
$$\to H_1(\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q})) \to 0$$

を得る。
定理 3.5 と命題 5.4 により、$\dim B > 0$ に対して $H_1(\mathcal{H}_{LIP}(\mathbf{R}^{m-q})) = 0$ および
$\ker P/[\ker P,\, \mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)] = 0$ を得る。したがって、
$H_1(\mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)) = 0$。故に $\mathcal{H}_{LIP,G}(\mathbf{R}^{m-q}\times G)$ は完全である。
再び補題 5.2 を使って $\mathcal{H}_{LIP,G}(M)$ は完全である。

注意　$\mathcal{H}_G(M)$ については、補題 5.3 の topological version が成立するなら、完全群である。

References

[A-F1] Abe,K, Fukui,K, On commutators of equivariant diffeomorphisms , Proc. Japan Acad., **54, Ser. A** (1978), 52-54.

[A-F2] Abe, K., Fukui,K., On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups, to appear in J. Math. Soc. Japan, **53-3** (2001).

[A-F3] Abe, K., Fukui,K., On the structure of the group of equivariant diffeomorphisms of G-manifolds, to appear in Topology.

[A-F4] Abe, K., Fukui,K., On the structure of the group of Lipschitz homeomorphisms and its subgroups II, in preparation.

[A-F5] Abe, K., Fukui,K., On the structure of the group of smooth orbifolds with isolated singularities, preprint.

[Ba1] Banyaga, A., On the structure of the group equivariant diffeomorphisms, Topology, **16** (1977), 279-283.

[Ba2] Banyaga, A., Sur la structure du groupe des difféomorphismes qui préservant une forme symplectique, Comm. Math. Helv., **53** (1978),174-228.

[Ba3] Banyaga, A., The structure of Classical Diffeomorphism Groups, Kluwer Academic Publishers,(1997).

[E] Epstein, D.B.A., The simplicity of certain groups of homeomorphisms, Compo. Math., **22**(1970), 165-173.

[F1] Fukui,K., Homologies of the group $Diff^{\infty}(\mathbf{R}^n, 0)$ and its subgroups, J.Math.Kyoto Univ., **20**(1980),475-487.

[F2] Fukui,K., Commutators of foliation preserving homeomorphisms for certain compact foliations , Publ. RIMS, Kyoto Univ., **34** (1998), 65-73.

[F-I1] Fukui,K., Imanishi,H., On commutators of foliation preserving homeomorphisms, J. Math. Soc. Japan, **51-1** (1999), 227-236.

[F-I2] Fukui,K., Imanishi,H., On commutators of foliation preserving Lipschitz homeomorphisms, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

[F-U] Fukui,K., Ushiki,S., On the homotopy type of $FDiff(S^3, \mathcal{F}_R)$, J. Math. Kyoto Univ., **15-1** (1975),201-210.

[H1] Herman,M.R., Simplicité du groupe des difféomorphismes de class C^{∞}, isotopes d'identité, du tore de dimension n, C. R. Acad. Sci. Paris **273** (1971), 232-234.

[H2] Herman,M.R., Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. I.H.E.S., **49** (1979),5-233.

[I] Imanishi,H., On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy, J. Math. Kyoto Univ., **14** (1974),607-634.

[M] Masson, A., Sur la perfection du groupe du difféomorphismes d'une variété,infiniment tangents à l'identité sur le bord, C. R. Acad. Sci. Paris **285** (1977), 837-839.

[Ma1] Mather,J.N., The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms, Topology, **10** (1971), 297-298.

[Ma2] Mather,J.N., Commutators of diffeomorphisms I, II, and III, Comm. Math. Helv., **49**,(1974),512-528, **50**,(1975),33-40 and **650**,(1985),122-124.

[Mc] McDuff,D., The homology of some groups of diffeomorphisms, Comm. Math. Helv., **55**,(1980),97-129.

[Th] Thurston,W., Foliations and groups of diffeomorphisms, Bull. Amer. Math. Soc., **80**(1974),304-307.

[Ts1] Tsuboi,T., Homological and dynamical study on certain groups of Lipschitz homeomorphisms of the circle, J. Math. Soc. Japan **47**(1995), 1-30.

[Ts2] Tsuboi,T., Small commutators in piecewise linear homeomorphisms of the real line, Topology **47**(1995), 815-857.

[Ts3] Tsuboi, T., On the perfectness of groups of diffeomorphisms of the interval tangent to the identity at the endpoints, preprint.

On the cohomology of Lie algebras of volume preserving formal vector fields

東京大学大学院数理科学研究科
目時 伸哉*

I 序

$\mathfrak{B}_n$を$\mathbf{R}^n$上の体積要素を保つ形式的ベクトル場全体の成す(無限次元)Lie代数とする．また$B\overline{\Gamma}_{\mathrm{vol},n}$を法束の自明化が与えられた体積要素を保つ$\Gamma_n$-構造の分類空間とする．このとき，次の普遍準同型が存在する．

$$u^*_{\mathrm{vol}} : H^*(\mathfrak{B}_n) \longrightarrow H^*(B\overline{\Gamma}_{\mathrm{vol},n}).$$

従って$H^*(\mathfrak{B}_n)$の構造の解明は重要な問題になるが，未だその構造は殆ど解明されていない．例えば$H^*(\mathfrak{B}_2)$は無限次元であると予想されているが，これまでのところ高々8個の生成元しか知られていない．今回，直和分解$H^*(\mathfrak{B}_2) = \bigoplus_{N\geq -1} H^*_N(\mathfrak{B}_2)$とスペクトル系列$H^*_N(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) \otimes H^*(sl_2\mathbf{R}) \Rightarrow H^*_N(\mathfrak{B}_n)$に着目し，Euler標数$\chi_N = \sum(-1)^p \dim H^p_N(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$をPerchikによる方法とは別の方法で表す公式を紹介する．

II 準備

$\mathfrak{A}_n$を$\mathbf{R}^n$上の形式的ベクトル場全体の成すLie代数とする．

$$\mathfrak{A}_n = \left\{ X = \sum_{i=1}^n f_i(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial}{\partial x_i} \,\middle|\, f_i(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbf{R}\,[[x_1,\ldots,x_n]] \right\}.$$

$\mathfrak{A}_n$にKrull位相を導入し，位相Lie代数と見做す．$\mathfrak{A}_n$上の連続交代形式全体の成す微分代数を$A^*(\mathfrak{A}_n)$とする．$A^*(\mathfrak{A}_n)$は次で与えられる微分外積代数である．

$$A^*(\mathfrak{A}_n) = \bigwedge\left(\delta^{x_i},\ \delta^{x_i}_{x_j},\ \delta^{x_i}_{x_j x_k},\ \ldots \right).$$

ここで $\delta^{x_i}_{x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_s}}$ $(s = 0, 1, \ldots)$は，次式で与えられるDiracのδ-関数及びその偏導関数である．

$$\delta^{x_i}_{x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_s}}(X) = (-1)^s \frac{\partial^s f_i}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\cdots\partial x_{j_s}}(0,\ldots,0).$$

*Partially supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists

但し $X=\sum_{i=1}^n f_i\partial/\partial x_i \in \mathfrak{A}_n$ とする．また外微分 $d: A^*(\mathfrak{A}_n) \longrightarrow A^{*+1}(\mathfrak{A}_n)$ を $d\alpha(X,Y) = -\alpha([X,Y])$ を Leibniz 規則で拡張したもので定義する $(X, Y \in \mathfrak{A}_n, \alpha \in A^*(\mathfrak{A}_n))$.

$A^*(\mathfrak{A}_n)$ のコホモロジー代数を $H^*(\mathfrak{A}_n)$ で表わす．法束の自明化が与えられた Γ_n-構造の分類空間を $B\overline{\Gamma}_n$ とする．Bott-Haefliger の理論により，次の普遍準同型が存在する．

$$u^*: H^*(\mathfrak{A}_n) \longrightarrow H^*(B\overline{\Gamma}_n). \tag{2.1}$$

この準同型は法束の自明化が与えられた Γ_n-構造の二次特性類を与えることが知られている．例えば，次の $(2n+1)$-次コサイクルは，Godbillon-Vey 類（の非零定数倍）を与える．

$$\left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}^{x_i}\right) \wedge \left(\sum_{i,j=1}^n \delta^{x_i} \wedge \delta_{x_ix_j}^{x_j}\right)^n \in A^{2n+1}(\mathfrak{A}_n).$$

Gel'fand-Fuks により，$H^*(\mathfrak{A}_n)$ は有限次元であることが示され，また Vey により $H^*(\mathfrak{A}_n)$ の具体的な基底が得られている．従って $H^*(\mathfrak{A}_n)$ の構造は既によく知られている．

一方，$\mathfrak{B}_n$ を $\mathbf{R}^n$ 上の体積要素を保つ形式的ベクトル場全体の成す $\mathfrak{A}_n$ の部分 Lie 代数とする．

$$\begin{aligned}\mathfrak{B}_n &= \left\{X=\sum_{i=1}^n f_i\frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathfrak{A}_n \,\middle|\, \mathrm{div}X = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} \equiv 0\right\} \\ &= \{X \in \mathfrak{A}_n \,|\, \mathcal{L}_X(\mathrm{vol}) = 0\}.\end{aligned}$$

$\mathfrak{B}_n$ 上の連続交代形式全体の成す微分代数 $A^*(\mathfrak{B}_n)$ は次で与えられる $A^*(\mathfrak{A}_n)$ の商代数になる．

$$A^*(\mathfrak{B}_n) = A^*(\mathfrak{A}_n)\,/\,\mathfrak{I}\,.$$

ここで $\mathfrak{I}$ は，$\mathcal{L}_{\partial/\partial x_{j_1}}\mathcal{L}_{\partial/\partial x_{j_2}}\cdots\mathcal{L}_{\partial/\partial x_{j_s}}\left(\sum_{i=1}^n \delta_{x_i}^{x_i}\right)$ $(s=0,1,\ldots)$ の形の全ての 1-形式で生成される $A^*(\mathfrak{A}_n)$ の微分イデアルである．（包含写像 $\mathfrak{B}_n \hookrightarrow \mathfrak{A}_n$ を j とするとき，$\mathfrak{I}$ の元は $j(\mathfrak{B}_n)$ 上で恒等的に消えることを注意されたい．）$A^*(\mathfrak{B}_n)$ のコホモロジー代数を $H^*(\mathfrak{B}_n)$ で表わす．法束の自明化が与えられた体積要素を保つ Γ_n-構造の分類空間を $B\overline{\Gamma}_{\mathrm{vol},n}$ とする．$\mathfrak{A}_n$ の場合の (2.1) と同様に，次の普遍準同型が存在する．

$$u_{\mathrm{vol}}^*: H^*(\mathfrak{B}_n) \longrightarrow H^*(B\overline{\Gamma}_{\mathrm{vol},n}). \tag{2.2}$$

従って $H^*(\mathfrak{B}_n)$ の構造の解明は重要な問題になるが，動径ベクトル場 $R=\sum_{i=1}^n x_i\partial/\partial x_i$ が $\mathfrak{B}_n$ に属さない理由から，$H^*(\mathfrak{B}_n)$ の計算は非常に困難になり，未だに未解決である．

$H^*(\mathfrak{B}_n)$ を計算すべく最も有望な方法は，次節で示す次の直和分解を使うことに思われる．

$$H^*(\mathfrak{B}_n) = \bigoplus_{N\ge -1} H_N^*(\mathfrak{B}_n).$$

III タイプ分解とスペクトル系列

先ず $A^*(\mathfrak{B}_n)$ の元に対して，外微分 $d: A^*(\mathfrak{B}_n) \longrightarrow A^{*+1}(\mathfrak{B}_n)$ の下でよく振舞うタイプと呼ばれる $\mathbf{Z}^n$ の元を定義する．

定義 3.1 (1-形式のタイプ)

1-形式 $\alpha \in A^1(\mathfrak{B}_n)$ は $\delta_{x_1{}^{N_1}\cdots x_n{}^{N_n}}^{x_i}$ の形の 1-形式の線形結合として表わせるとき，タイプ $(N_1,\ldots,N_{i-1},N_i-1,N_{i+1},\ldots,N_n)$ であるという． □

一般の$A^*(\mathfrak{B}_n)$の元に対しては次のように帰納的に定義する.

定義 3.2 (p-形式のタイプ)
$\alpha, \beta \in A^*(\mathfrak{B}_n)$がそれぞれタイプ$(N_1, \dots, N_n)$及びタイプ$(M_1, \dots, M_n)$のとき, $\alpha \wedge \beta \in A^*(\mathfrak{B}_n)$はタイプ$(N_1 + M_1, \dots, N_n + M_n)$とする. □

例 3.3 $n = 2$の場合, $\delta^{x_1}_{x_1{}^{10}x_2{}^{10}}$はタイプ$(9, 10)$の1-形式, $\delta^{x_1}_{x_1{}^{10}x_2{}^{10}} \wedge \delta^{x_2}_{x_1{}^{20}x_2{}^{20}}$はタイプ$(9, 10) + (20, 19) = (29, 29)$の2-形式である. □

前述のとおり,本来$A^*(\mathfrak{B}_n)$は商代数として実現されているが, この定義は代表元の取り方に依らないことが確かめられる.

$A^p(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)} \subset A^p(\mathfrak{B}_n)$をタイプ$(N_1, \dots, N_n)$の$p$-形式で張られるベクトル空間とする. 直ちに次が得られる.

命題 3.4 (タイプの性質)

$$\begin{cases} A^p(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)} \wedge A^q(\mathfrak{B}_n)_{(M_1,\dots,M_n)} \subset A^{p+q}(\mathfrak{B}_n)_{(N_1+M_1,\dots,N_n+M_n)} \\ d\left(A^p(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)}\right) \subset A^{p+1}(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)}. \end{cases}$$

□

$A^*(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)}$のコホモロジー代数を$H^*(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)}$で表わす.

命題 3.5 (タイプ分解)
$N_1 = N_2 = \cdots = N_n$でない限り,

$$H^*(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)} = 0.$$

特に,

$$H^*(\mathfrak{B}_n) = \bigoplus_N H^*(\mathfrak{B}_n)_{(N,\dots,N)}.$$

□

従って,コホモロジーを計算する目的のためには$A^*(\mathfrak{B}_n)_{(N_1,\dots,N_n)}$の中で$N_1 = \cdots = N_n$を満たすものだけを考察すればよい. 簡単のために$A^*(\mathfrak{B}_n)_{(N,\dots,N)}$及び$H^*(\mathfrak{B}_n)_{(N,\dots,N)}$をそれぞれ$A^*_N(\mathfrak{B}_n)$及び$H^*_N(\mathfrak{B}_n)$と記す. $N \leq -2$に対しては$A^*_N(\mathfrak{B}_n) = 0$なので, 結局, 次の直和分解を得る.

(3.6)
$$H^*(\mathfrak{B}_n) = \bigoplus_{N \geq -1} H^*_N(\mathfrak{B}_n).$$

一方, $A^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R}) \subset A^*(\mathfrak{B}_n)$を$sl_n\mathbf{R}$-基底的な元から成る部分微分代数とする.

(3.7)
$$A^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R}) = \left\{\alpha \in A^*(\mathfrak{B}_n) \mid \ \mathcal{L}_X\alpha = \iota_X\alpha = 0 \quad ({}^\forall X \in sl_n\mathbf{R}\ )\right\}.$$

$A^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R})$のコホモロジー代数を$H^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R})$とする. Hochschild-Serreにより次の収束するスペクトル系列が存在する.

(3.8)
$$H^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R}) \otimes H^*(sl_n\mathbf{R}) \Rightarrow H^*(\mathfrak{B}_n).$$

直和分解(3.6)とスペクトル系列(3.8)は両立することから次を得る.

$$H_N^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R}) \otimes H^*(sl_n\mathbf{R}) \Rightarrow H_N^*(\mathfrak{B}_n). \tag{3.9}$$

従って$H_N^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R})$の計算が本質的になる. タイプ$N = -1, 0$については以下のように分かっている.

$$\begin{cases} H_{-1}^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R}) = \mathbf{R}\langle\ \omega\ \rangle \\ \\ H_0^*(\mathfrak{B}_n, sl_n\mathbf{R}) = \mathbf{R}[c_0, c_2, c_3, \ldots, c_n]/(\deg c_{i_1} \cdots c_{i_j} > 2n). \end{cases} \tag{3.10}$$

ここで, $\omega = \delta^{x_1} \wedge \cdots \wedge \delta^{x_n}$は普遍体積形式に相当する$n$-次形式で, $\mathbf{R}\langle\ \omega\ \rangle$は$\omega$によって張られる1次元線形空間である. また$c_i$は第$i/2$ Pontrjagin類に相当する$2i$-次形式で, $\mathbf{R}[c_0, c_2, c_3, \ldots, c_n]/(\deg c_{i_1} \cdots c_{i_j} > 2n)$は$c_0(=1), c_2, c_3, \ldots, c_n$で生成される多項式代数で次数が$2n$を超える元で生成されるイデアルで切断した商代数を表す. この切断はBott消滅定理に相当する.

注意 3.11 (**$H_0^*(\mathfrak{B}_n)$とChern-Weil・Chern-Simons理論の関係**)
$H^*(sl_n\mathbf{R})$については以下のように分かっている.

$$H^*(sl_n\mathbf{R}) = \bigwedge(h_0, h_2, h_3, \cdots, h_n).$$

ここで,h_i $(i \geq 2)$はスペクトル系列(3.8)(詳しくは$N = 0$の(3.9))においてc_iに転入する$(2i-1)$-次形式で, $\wedge(h_0, h_2, h_3, \cdots, h_n)$は$h_0(=1), h_2, h_3, \ldots, h_n$で生成される外積代数を表す. この転入により全てのPontrjagin類に相当する形式が$H_0^*(\mathfrak{B}_n) \subset H^*(\mathfrak{B}_n)$において自明になるが, これは普遍準同型(2.2)が分類する$\Gamma_{\mathrm{vol},n}$-構造の法束が自明であることに相当している. □

$n = 2$の場合, (3.10)とは対照的に, タイプ$N = 1, 2, 3$では$H_N^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$が自明になることが知られている.

$$H_1^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = H_2^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = H_3^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = 0. \tag{3.11}$$

タイプ$N \geq 4$では未だ以下の結果しか知られていない.

定理 3.12 ([GKF],1972)

$$H_4^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = \mathbf{R}\langle\ \varphi\ \rangle \quad (\ \deg\varphi = 7\ ).$$

□

定理 3.13 ([M],2000)

$$H_7^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = \mathbf{R}\langle\ \psi\ \rangle \quad (\ \deg\psi = 9\ ).$$

□

定理3.12及び定理3.13の非自明なコサイクルφ及びψを具体的に表示すると, それぞれ4階及び7階の微分を含んでいることが分かる. このことは接続形式や曲率形式といった2階以下の微分の対象で記述できるChern-Weil理論とBott消滅定理でコホモロジーの全てが説明できる$H^*(\mathfrak{A}_n)$とは違い, $H^*(\mathfrak{B}_n)$には3階以上の高階の微分が寄与してくることを窺わせる. この事実から次の予想が導かれる.

予想 3.14 ([F], pp.116-117)

$$\dim H^*(\mathfrak{B}_n) = \infty.$$

□

事実, Perchikは, $-1 \leq N \leq 35$ の範囲で $H_N^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$ のEuler標数χ_Nを計算し, 多くのタイプNに関して$\chi_N \neq 0$であることを示し, $H^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$が少なくとも線形空間として57次元以上であることを示した.

$$\chi_{-1} = 1, \chi_0 = 2, \chi_4 = -1, \chi_7 = -1, \ldots.$$

最初の2つ $\chi_{-1} = 1$と$\chi_0 = 2$は注意3.11に述べたコホモロジー類 ωと$1, c_2$に対応する. 次の $\chi_4 = -1, \chi_7 = -1$は定理3.12, 定理3.13に述べた次数7, 9のコホモロジー類に対応する. 因みに$\mathfrak{A}_2$の場合$H^*(\mathfrak{A}_2, gl_2\mathbf{R})$は僅か4次元である.

$$H^*(\mathfrak{A}_2, gl_2\mathbf{R}) = H_0^*(\mathfrak{A}_2, gl_2\mathbf{R}) = \mathbf{R}\langle\, 1, c_1, c_1^2, c_2\rangle.$$

IV 深度と分割公式

この節以降$n = 2$の場合のみを考える. また(x_1, x_2)の代わりに(x, y)で表す. (3.9) で述べたように$H_N^*(\mathfrak{B}_2)$の計算には$H_N^*(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$の計算が本質的になる. $sl_2\mathbf{R} \subset \mathfrak{B}_2$は次の形の元で張られる.

$$\begin{cases} H := & x\frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial y} \\ E := & x\frac{\partial}{\partial y} \\ F := & y\frac{\partial}{\partial x}. \end{cases}$$

(3.7) より, $A_N^p(\mathfrak{B}_2) = A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)}$の元が$sl_2\mathbf{R}$-基底的であるためには次の6つの線形写像で消えることに他ならない.

$$\begin{cases} \mathcal{L}_H & : & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} & \longrightarrow & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} \\ \mathcal{L}_E & : & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} & \longrightarrow & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N-1,N+1)} \\ \mathcal{L}_F & : & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} & \longrightarrow & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N+1,N-1)} \\ \iota_H & : & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} & \longrightarrow & A^{p-1}(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} \\ \iota_E & : & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} & \longrightarrow & A^{p-1}(\mathfrak{B}_2)_{(N-1,N+1)} \\ \iota_F & : & A^p(\mathfrak{B}_2)_{(N,N)} & \longrightarrow & A^{p-1}(\mathfrak{B}_2)_{(N+1,N-1)}. \end{cases} \tag{4.1}$$

$A^p(\mathfrak{B}_2)$の元に対して, 深度と呼ばれる$\mathbf{Z}^p$の元を次のように定義する.

定義 4.2 (1-形式の深度)
1-形式 $\alpha \in A^1(\mathfrak{B}_2)$がタイプ$(M, N)$のとき深度$M+N$であるという. □

定義 4.3 (p-形式の深度)
$\alpha \in A^p(\mathfrak{B}_2)$ $\beta \in A^q(\mathfrak{B}_2)$ がそれぞれ深度$d_1 * \cdots * d_p$及び深度$d'_1 * \cdots * d'_q$のとき, $\alpha \wedge \beta$は深度$d''_1 * \cdots * d''_{p+q}$とする. ここで, $d''_1, \ldots, d''_{p+q}$は$d_1, \ldots, d_p, d'_1, \ldots, d'_q$を並び換えたもので$d''_1 \leq \ldots \leq d''_{p+q}$を満たすものとする. □

例 4.4 $\delta^{x_1}_{{x_1}^{10}{x_2}^{10}}$は深度19・タイプ$(9, 10)$の1-形式, $\delta^{x_1}_{{x_1}^{10}{x_2}^{10}} \wedge \delta^{x_2}_{{x_1}^{20}{x_2}^{20}}$は深度$19 * 39$・タイプ$(29, 29)$の2-形式である. □

注意 4.5 p-形式に関してタイプは$\mathbf{Z}^2$・深度は$\mathbf{Z}^p$に値を持つが，命題3.4より，外微分dはタイプを保つが深度を保たない．一方，(4.1)のLie微分$\mathcal{L}_E, \mathcal{L}_F$は深度を保つがタイプを保たない．タイプ$(M,N)$の$p$-形式がLie微分$\mathcal{L}_H$で消えることは$M=N$であることと必要十分である．更に(4.1)の内部微分$\iota_H, \iota_E, \iota_F$で消えることは$p$-形式が深度0の1-形式を含まないことと必要十分である．

また上の例4.4から分かるようにタイプを表す2つの整数の和と深度を表すp個の整数の和は常に等しい．特に命題3.5よりタイプ(N,N)の形のものだけを考えるので，深度を表すp個の整数の和は常に偶数$(=2N)$である． □

次の記号を用意する．

$$\begin{cases} A_{d_1*\cdots*d_p} := \{\alpha \in A^p(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) | \alpha \text{は深度} \, d_1 * \cdots * d_p\} \\ \mathcal{D}_{d_1*\cdots*d_p} := \dim A_{d_1*\cdots*d_p}. \end{cases}$$

注意4.5より，次は明らかである．

$$A^p_N(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = \bigoplus_{\substack{-1\le d_1 \le \cdots \le d_p \, (d_i \neq 0) \\ d_1+\cdots+d_p=2N}} A_{d_1*\cdots*d_p}.$$

特に次を得る．

命題 4.6 (分割公式)

$$\dim A^p_N(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = \sum_{\substack{-1\le d_1 \le \cdots \le d_p \, (d_i \neq 0) \\ d_1+\cdots+d_p=2N}} \mathcal{D}_{d_1*\cdots*d_p}.$$

□

V 重複度公式

前節で定義した$\mathcal{D}_{d_1*\cdots*d_p}$は次で計算できる．

命題 5.1 (重複度$=1$の場合)
$d_1 < \cdots < d_p$のとき

$$\mathcal{D}_{d_1*\cdots*d_p} = \Delta(d_1, \ldots, d_p).$$

ここで$\Delta(d_1, \ldots, d_p)$は次節で定義する関数である． □

$d_1, \ldots, d_p$内に重複がある場合を対処するために次の記号を用意する．

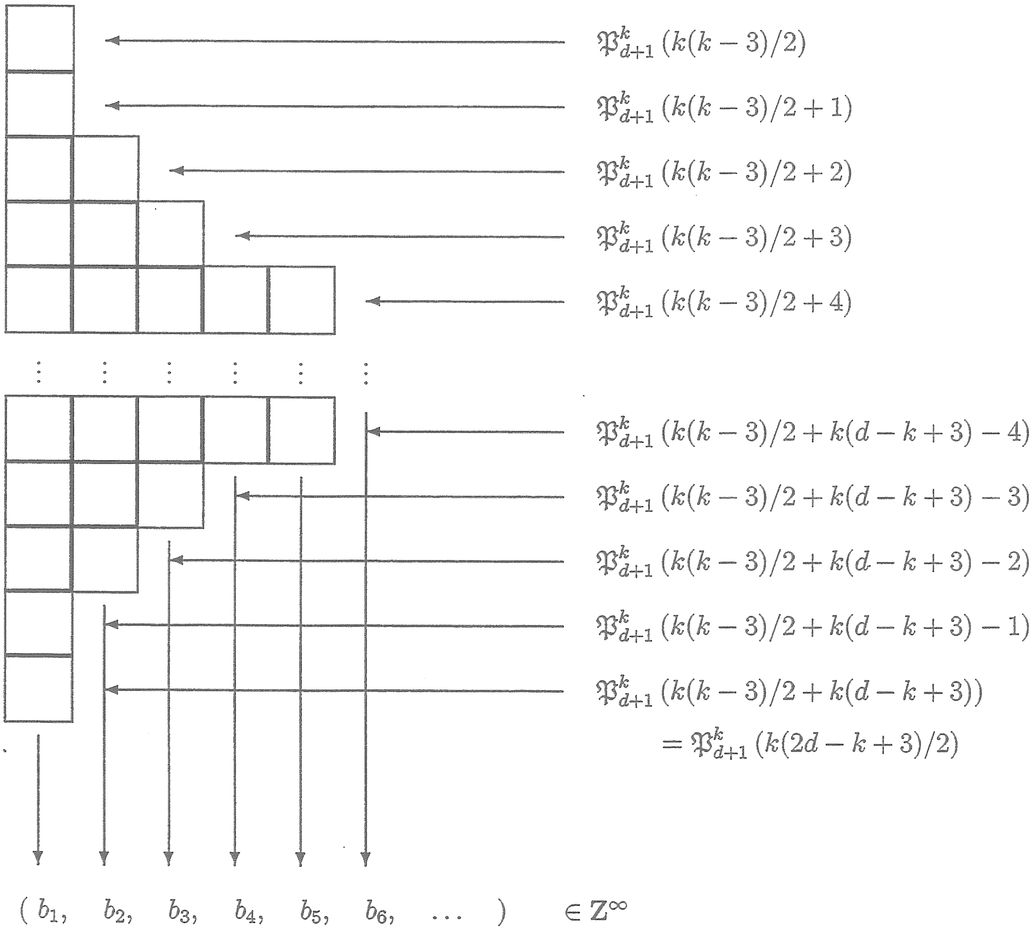
$$\mathfrak{P}^r_m(S) := \sharp\{(n_1, \ldots, n_r) \in \mathbf{Z}^r | -1 \le n_1 < \cdots < n_r \le m, \ n_1 + \cdots + n_r = S\}$$

更に$\mathrm{i} : \mathbf{Z}^s \longrightarrow \mathbf{Z}^s$を$\mathrm{i}(b_1, \ldots, b_s) = (b'_1, \ldots, b'_s)$で定める．但し$b'_1, \ldots, b'_s$は$b_1, \ldots, b_s$を並び換えたもので$b'_1 \le \ldots \le b'_s$を満たすものとする．

命題 5.2 (重複度$=k$の場合)
$\underbrace{(d_1=)d_{j_1}=\cdots=d_{j_1+(k_1-1)}}_{k_1}<\cdots<\underbrace{d_{j_s}=\cdots=d_{j_s+(k_s-1)}(=d_p)}_{k_s}$のとき

$$\mathcal{D}_{d_1*\cdots*d_p}=\sum_{n_1=1}^{\infty}\cdots\sum_{n_s=1}^{\infty}\Delta\circ\mathrm{i}\,(b^{(1)}_{n_1}-3,\ldots,b^{(s)}_{n_s}-3).$$

ここで$(b^{(r)}_{n_r})_{n_r=0,1,\ldots}\in\mathbf{Z}^\infty$は重複される深度$d_{j_r}$とその重複度$k_r$のみに依存する(有限個の項を除いて0の)数列で以下のように定義される($r=1,\ldots,s$). □



第i行が$\mathfrak{P}^k_{d+1}\,(k(k-3)/2+(i-1))$個の箱からなる図形をつくると, その定め方から必ず上下対照なYoung図形(のようなもの)ができる. 出来上がった図形の第n列の箱の個数をb_nの値として定義する. d,kは共に有限なので, 十分大きなnに対しては$b_n=0$となる. 尚, 第1列の箱の個数b_1は常に$b_1=k(d-k+3)+1$となる.

注意 5.3 (命題5.2の式の無限和について)
数列$(b_n)_{n=0,1,\ldots} \in \mathbf{Z}^\infty$は有限個の項を除いて0なので次節の注意6.2で述べるように命題5.2の式の無限和に現れる$\Delta \circ \mathrm{i}\,(b_{n_1}^{(1)}-3,\ldots,b_{n_s}^{(s)}-3)$は有限個を除いて0となる．従って無限和は実際には有限和になることが分かる．□

注意 5.4 (命題5.1と命題5.2の関係)
命題5.2において$k_1=\cdots=k_s=1$の場合(即ち$d_1<\cdots<d_p$の場合), 各$r=1,\ldots,s(=p)$について$b_1^{(r)}=d_j+3$, $b_{n_r}^{(r)}=0(n_r=2,3,\ldots)$となる．従って注意5.3より, 命題5.2の無限和に現れる$\Delta \circ \mathrm{i}\,(b_{n_1}^{(1)}-3,\ldots,b_{n_p}^{(p)}-3)$の中で$\Delta \circ \mathrm{i}\,(b_1^{(1)}-3,\ldots,b_1^{(p)}-3)=\Delta(d_1,\ldots,d_p)$を除いて0になる．これは命題5.1の式に他ならない．従って命題5.2は命題5.1の自然な一般化になっている．□

注意 5.5 ($SU(2)$の既約ユニタリ表現との関係)
$\Xi := \{0,1/2,1,3/2,\ldots\}$とし, 任意の$\ell \in \Xi$に対し高々$2\ell$次の1変数$z$の複素係数多項式全体を$V_\ell$とする．$V_\ell$は$2\ell+1$次元複素線形空間になるが, V_ℓに

$$\left(\sum_{k=0}^{2\ell} a_k z^k, \sum_{k=0}^{2\ell} b_k z^k\right) = \sum_{k=0}^{2\ell} k!(2\ell-k)!a_k\bar{b}_k$$

によって内積を入れると

$$\left\{\frac{z^{\ell-m}}{\sqrt{(\ell-m)!(\ell+m)!}}\right\}_{m=-\ell,-\ell+1,\ldots,\ell-1,\ell}$$

が正規直交基底になる．特殊ユニタリ群$SU(2)$の任意の元$g \in SU(2)$は

$$g=\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \qquad (|\alpha|^2+|\beta|^2=1)$$

の形に唯一通りに表せることに注意して, 写像$T_\ell(g): V_\ell \longrightarrow V_\ell$を

$$\left(T_\ell(g)f\right)(z) = (\beta z+\bar{\alpha})^{2\ell} f\left(\frac{\alpha z-\bar{\beta}}{\beta z+\bar{\alpha}}\right) \qquad ({}^\forall f \in V_\ell)$$

で定義するとT_ℓは$SU(2)$のV_ℓ上の既約ユニタリ表現になり, 更に$\{T_\ell | \, \ell \in \Xi\}$が$SU(2)$の既約ユニタリ表現の完全系になることがわかる．

さて上記の重複される深度dとその重複度kからYoung図形(のようなもの)を用いて数列$(b_n)_{n=0,1,\ldots}$を定める規則は$T_{\frac{d+2}{2}}$のk階外積表現$\wedge^k T_{\frac{d+2}{2}}$の既約分解法則

$$\bigwedge^k T_{\frac{d+2}{2}} \cong \bigoplus_{n=1}^{\infty} T_{\frac{b_n-1}{2}}$$

を与える規則として筆者が考えた方法なので, (既によく知られた方法かも知れないし) 他にもっと簡潔な方法があるのかも知れない．□

VI　Δ-関数と次元公式

$\widehat{\mathbf{Z}^p} := \{(d_1, d_2, \ldots, d_p) \in \mathbf{Z}^p \mid d_1 \leq d_2 \leq \cdots \leq d_p, d_1 + d_2 + \cdots + d_p = $ 偶数$\}$ とし，$(d_1, d_2, \ldots, d_p) \in \widehat{\mathbf{Z}^p}$に対して次の記号を用意する．

$$\begin{cases} \nabla & := \dfrac{(d_1+2)+(d_2+2)+\cdots+(d_{p-1}+2)-(d_p+2)}{2} \\ \nabla_{i_1 \ldots i_k} & := \nabla - (d_{i_1}+2) - \cdots - (d_{i_k}+2) \qquad (1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq p-1). \end{cases}$$

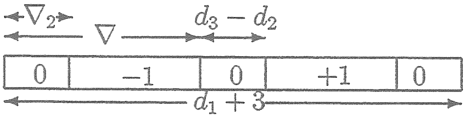
<u>定義</u> **6.1 (Δ-関数)**
$\Delta : \widehat{\mathbf{Z}^p} \longrightarrow \mathbf{Z}$ を以下のように定義する．
(i)$p = 1$のとき

$$\Delta(d_1) = \begin{cases} 1 & (d_1 = -2) \\ 0 & (d_1 \neq -2). \end{cases}$$

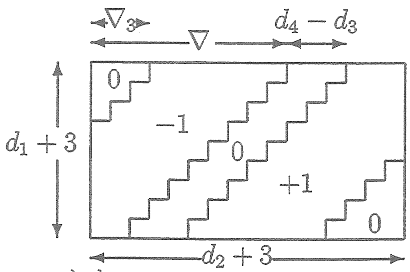
(ii)$p = 2$のとき

$$\Delta(d_1, d_2) = \begin{cases} 1 & (d_1 = d_2) \\ 0 & (d_1 < d_2). \end{cases}$$

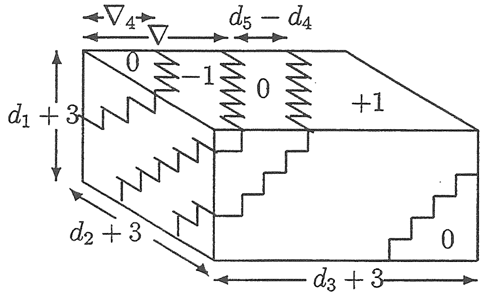
(iii)$p = 3$のとき
$\Delta(d_1, d_2, d_3)$ は次の大きさ$d_1 + 3$の１次元直方体内に与えられた数の総和とする．



(iv)$p = 4$のとき
$\Delta(d_1, d_2, d_3, d_4)$ は次の大きさ $(d_1+3) \times (d_2+3)$ の２次元直方体内に与えられた数の総和とする．



(v)$p = 5$のとき
$\Delta(d_1, d_2, d_3, d_4, d_5)$ は次の大きさ $(d_1+3) \times (d_2+3) \times (d_3+3)$ の３次元直方体内に与えられた数の総和とする．



(vi)$p \geq 6$のとき
同様に$\Delta(d_1, \ldots, d_p)$は大きさ$(d_1+3) \times (d_2+3) \times \cdots \times (d_{p-2}+3)$の$(p-2)$次元直方体内に与えられた数の総和とする. □

注意 6.2 (命題5.2の式の無限和について)
$d_1, \ldots, d_{p-2}$の中で少なくとも1つのd_iが$d_i = -3$であるとき, Δ-関数の定義に現れる$(p-2)$次元直方体は大きさが0になり, 従って$\Delta(d_1, \ldots, d_p) = 0$となる. 特に注意5.3にあるように命題5.2の式の無限和は実際には有限和になることが分かる. □

Δ-関数は次式で与えられる.

命題 6.3 (Δ-関数の定式化)
$p \geq 3$のとき

$$\Delta(d_1, \ldots, d_p) = \sum_{1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_k \leq p-1} (-1)^k \binom{\nabla_{i_1 \ldots i_k} - k + p - 3}{p-3}$$

ここで$\binom{\nabla_{i_1 \ldots i_k} - k + p - 3}{p-3}$は二項係数$\dfrac{(\nabla_{i_1 \ldots i_k} - k + p - 3)!}{(\nabla_{i_1 \ldots i_k} - k)!(p-3)!}$である. □

系 6.4 ($\dim A_N^2, \dim A_N^3$の定式化)

$$\begin{cases} \dim A_N^2(\mathcal{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = \dfrac{1 - \exp(N\pi i)}{2} \\ \dim A_N^3(\mathcal{B}_2, sl_2\mathbf{R}) = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \left[\frac{k-1}{6}\right] + N + \left\{1 + \left[\frac{N+1}{6}\right] + \left[\frac{N}{3}\right]\right\} \frac{1 + \exp(N\pi i)}{2} \quad (N \neq 1). \end{cases}$$

□

命題4.6・命題5.2・命題6.3を併せれば$\dim A_N^p(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$を, 延いてはその交代和をとってEuler標数$\chi_N = \sum(-1)^p \dim A_N^p(\mathfrak{B}_2, sl_2\mathbf{R})$を計算できるようになる.
具体的な計算例を最後に掲載しておく.

	χ	0-form	1-form	2-form	3-form	4-form	5-form	6-form	7-form	8-form	9-form	10-form	11-form	12-form	13-form	14-form	15-form	16-form	17-form	18-form	19-form	20-form
type-1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type0	2	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type2	0	0	0	0	2	4	2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type3	0	0	0	1	2	4	8	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type4	−1	0	0	0	5	13	17	18	14	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type5	0	0	0	1	4	19	50	59	35	15	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type6	0	0	0	0	9	38	80	126	134	74	16	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type7	−1	0	0	1	7	48	172	307	322	232	113	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
type8	0	0	0	0	13	84	274	592	835	719	363	110	21	1	0	0	0	0	0	0	0	0
type9	0	0	0	1	11	106	479	1166	1778	1827	1241	502	101	9	1	0	0	0	0	0	0	0
type10	0	0	0	0	18	156	719	2071	3779	4440	3420	1727	540	85	3	0	0	0	0	0	0	0
type11	−1	0	0	1	15	199	1148	3601	7231	9842	9019	5375	1995	437	49	1	0	0	0	0	0	0
type12	0	0	0	0	24	272	1618	5920	13678	20734	21335	15012	6955	1930	276	19	1	0	0	0	0	0
type13	0	0	0	1	20	332	2414	9561	24132	41301	48497	38781	20801	7259	1515	146	2	0	0	0	0	0
type14	−1	0	0	0	30	440	3298	14786	41902	78991	102748	93407	58458	24129	6144	889	63	0	0	0	0	0
type15	1	0	0	1	26	528	4634	22487	69437	145012	209990	212705	150311	72741	22983	4279	384	14	1	0	0	0
type16	−1	0	0	0	37	665	6150	33264	113172	257756	409134	460455	366490	202426	74955	17589	2352	134	0	0	0	0
type17	1	0	0	1	32	795	8336	48351	178239	444200	772613	954569	842554	526657	226738	63772	10744	946	34	0	0	0
type18	−1	0	0	0	45	975	10751	68829	276526	745412	1408041	1904810	1855636	1292890	632351	209613	44109	5191	266	4	0	0
type19	0	0	0	1	39	1140	14135	96618	417877	1220759	2500141	3672770	3913198	3019870	1662530	633151	158700	24186	1926	51	0	0
type20	1	0	0	0	53	1378	17886	133317	622990	1955956	4316551	6868599	7969772	6747003	4128123	1785945	524659	97560	10221	506	8	0

References

[B] R. Bott, Notes on Gel'fand-Fuks cohomology and characteristic classes, Proceedings of the Eleventh Annual Holiday Symposium at New Mexco State University, (1973).

[BH] R. Bott and A. Haefliger, On characteristic classes of Γ-foliations, Bulletin of the American Maththematical Society, **78** (1972), pp. 1039-1044.

[F] D. B. Fuks, Cohomology of infinte dimensional Lie algebras, consultants bereau (1986).

[GKF] I. M. Gel'fand, D. I. Kalinin and D. B. Fuks, Cohomology of the Lie algebra of Hamiltonian formal vector fields, Funktsional'nyĭ Analiz i ego Prilozheniya, **6** (1972), pp. 25-29.

[HS] G. Hochschild and J-P. Serre, Cohomology of Lie algebras, Annals of Mathematics, **57** (1953), pp. 591-603.

[M] S. Metoki, Non-trivial cohomology classes of Lie algebras of volume preserving formal vector fields, Doctor thesis, Univ. of Tokyo, (2000).

[P] J. Perchik, Cohomology of Hamiltonian and related formal vector field Lie algebras, Topology **15**(1976), pp. 395-404.

Compact ANR のコホモロジー次元について

小山 晃（大阪教育大学数理科学）

1　コホモロジー次元とは

位相空間の次元を評価する方法としてコホモロジー群の消滅する高さを利用する方法を紹介していこう. ここで考える空間は特に断らない限り**コンパクト距離空間**であるとする. また $\check{H}^*$ は**Čech コホモロジー論**を表し, 係数群として整数群を用いる場合はそれを省略する.

良く知られている空間の被覆次元は次のように与えられる:

定義 1.1. 正規空間 X の**被覆次元** (covering dimension), $\dim X$, とは, 次の条件によって定まる -1 以上の整数または ∞ をいう：

1. $\dim X \leq n \Longleftrightarrow X$ の任意の有限開被覆 $\mathcal{U}$ が $\mathrm{ord}(\mathcal{V}) \leq n+2$ である開細分をもつ. すなわち, $X = U_1 \cup \cdots \cup U_k$ となる任意の開集合 $U_1, \cdots, U_k$ に対して, $X = V_1 \cup \cdots \cup V_k$, $V_i \subset U_i$ かつ任意の $n+2$ 個の V_i が共通部分をもたないような開集合 $V_1, \cdots, V_k$ が存在することである.
2. $\dim X = n \Longleftrightarrow \dim X \leq n$ かつ $\dim X \leq n-1$ ではない.
3. $\dim X = \infty \Longleftrightarrow$ すべての $n < \infty$ について $\dim X \leq n$ ではない.

位相空間の次元関数として良く用いられるものに帰納的次元があるが, 可分距離空間では被覆次元と一致することを注意しておいて, ここでは, 空間の次元と言ったならば“被覆次元”を意味するとする.

また, 位相空間の次元について断り無く既知の事実を引用するが, それらについては [En] を参考にして欲しい.

このように (位相空間に対して) 次元を定義するが, このとき一見当たり前であるが大切な事実:

定理 1.2 (Brouwer). $\dim \mathbb{R}^n = n$.

に注意しよう. このことと

定理 1.3. 空間 X が, 閉部分集合の可算和

$$X = \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i, \ \ \dim F_i \leq n, i = 1, 2, \cdots ,$$

と表せるならば, $\dim X \leq n$ である.

から, n 次元 (コンパクト) 位相多様体, n 次元 (コンパクト)CW 複体は (被覆次元の意味で)n 次元であることがわかる.

ところが, 一般にコンパクト距離空間は非常に複雑な構造を持ち得るので, 次元の定義を与えても, 実際の空間の次元の計算には様々な特徴付けが必要になる. たとえば, 次のことが知られている:

定理 1.4 (Alexandroff の基本定理 [Al]). $\dim X < \infty$ である任意のコンパクト距離空間 X について,

$$\dim X = \max\{\, n \mid \check{H}^n(X, A; \mathbb{Z}) \neq 0 \text{ である閉部分集合 } A \subset X \text{ が存在する} \,\}$$

が成り立つ.

すなわち, 有限次元空間について, 次元とは自明でない整係数相対コホモロジー群が存在する " 高さ "を求めるであることがわかった. そこでいろいろな係数群のコホモロジー群を考えると, その消滅性はどのような位相的な性質を導くのか, 逆に, どのような位相的な性質がある係数群のコホモロジー群の消滅性を導くのか, などの問題が生じる. そこで Alexandroff [Al] は, $\mathbb{Z}$ を任意の可換群 G に置き換えることで得られるコホモロジー群の消滅性を評価する関数によって, 一般の係数群に関するコホモロジー次元の定義を与えた:

定義 1.5. コンパクト距離空間 X の可換群 G に関する**コホモロジー次元**, $\dim_G X$, は次のように定義される.

$$\dim_G X = \max\{\, n \mid \check{H}^n(X, A; G) \neq 0 \text{ である閉部分集合 } A \subset X \text{ が存在する} \,\},$$

このような整数が存在しないならば, $\dim_G X = \infty$ とする.

次元とコホモロジー次元の関係を見るためにそれぞれの特徴付け見てみよう:

定理 1.6 ([Al]). 空間 X について, $\dim X \leq n$ である必要十分条件は, 任意の閉集合 $A \subset X$ 上の任意の連続写像 $f : A \to S^n$ が連続写像 $F : X \to S^n$ へ拡張できることである.

定理 1.7. 任意の空間 X と可換群 G について, 次の条件は同値である：

(1) $\dim_G X \leq n$;
(2) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ に対して, $\check{H}^{n+1}(X, A; G) = 0$;
(3) 任意の開部分集合 $U \subset X$ に対して, $\check{H}_c^{n+1}(U; G) = 0$, ただし, $\check{H}_c^*$ はコンパクト台をもつ Čech コホモロジー論とする;
(4) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ に対して, 包含写像によって誘導される準同型写像 $\check{H}^n(X; G) \to \check{H}^n(A; G)$ が全射である;
(5) 任意の閉部分集合 $A \subset X$ と任意の連続写像 $f : A \to K(G, n)$ に対して, 連続な拡張 $F : X \to K(G, n)$ が存在する, ただし, $K(G, n)$ は (G, n) 型の Eilenberg-MacLane 複体とする.

よって, 次元と整係数コホモロジー次元の違いは, S^n への連続写像の拡張性と Eilenberg-MacLane 複体 $K(\mathbb{Z}, n)$ への連続写像の拡張性との違いとして捉えることができる. 逆に Eilenberg-MacLane 複体 $K(\mathbb{Z}, n)$ と球面 S^n のトポロジーの違いを表す方法に次元とコホモロジー次元があると見ることもできる.

さらにČech コホモロジー論の性質, 普遍係数定理とあわせると次のことがわかる.

定理 1.8. 空間 X について, 次のことが成り立つ：

(1) 任意の可換群 G について, $\dim_G X \leq \dim_{\mathbb{Z}} X \leq \dim X$;
(2) 任意の可換群 $G \neq 0$ について, $\dim_G X = 0 \Longleftrightarrow \dim X = 0$;
(3) $\dim_{\mathbb{Z}} Z = 1 \Longleftrightarrow \dim X = 1$.

注 1. Dranishnikov[Dr_1], Dydak-Walsh[D-W] によって, $\dim_{\mathbb{Z}} X < \dim X = \infty$ である空間 X が構成されている. よって, Alexandroff の基本定理 1.4 において, “$\dim X < \infty$” である条件は本質的であることがわかる.

もちろんこういった定義をすると, 係数群によって異なるコホモロジー次元をもつ空間は存在するか? また係数群をいろいろ取ることが位相的性質を調べる上で役立つのか?

といった疑問がでるだろう. このことについて Pontryagin [P] は, 係数群によって異なるコホモロジー次元を持つ空間を構成することにより, $\dim(X \times Y) \neq \dim X + \dim Y$ となるコンパクト距離空間の存在を示した. この事実は, 次元論において積空間の次元を考察する重要性を認識させた.

定理 1.9 ([P]). 任意の素数 p に対して次の条件をみたす $\dim \Pi_p = 2$ である空間 Π_p が存在する:

$$\dim_{\mathbb{Z}_p} \Pi_p = 2 \quad \text{かつ} \quad G \text{ が } p \text{ によって整除できるならば} \quad \dim_G \Pi_p = 1.$$

特に, 相異なる素数 $p \neq q$ について, $\dim(\Pi_p \times \Pi_q) = 3$ である.

注 2. $\mathbb{I}$ を閉区間とすると, 任意の空間 Y について, $\dim(\mathbb{I} \times Y) = 1 + \dim Y$ である. よって, 空間 X が n 次元位相多様体や n 次元 CW 複体ならば, 任意の空間 Y について, 等式 $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y = n + \dim Y$ が成り立つ. 一般に, コンパクト距離空間 X, Y について, $\dim X = 1$ ならば, $\dim(X \times Y) = 1 + \dim X$ が成り立つ. ところが, Pontryagin が構成したコンパクト距離空間 X, Y は, $\dim X = \dim Y = 2$ であるが, $\dim(X \times Y) = 3$ となるので, 一般のコンパクト距離空間では等式が必ずしも成立しないことがわかる. よって, 一般のコンパクト距離空間については, どんな場合に, 等式 $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ が成り立つかが問題となる.

ただし, 不等式 $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ は, (コンパクト) 距離空間について常に成り立つことに注意しておく.

注 3. Boltyanskiĭ[Bol] によって, $\dim(X \times X) = 3 < 4 = 2 \dim X$ である 2 次元コンパクト距離空間 X が構成されている.

注 4. 空間 X, Y について, $\dim X = \dim_F X$, $\dim Y = \dim_F Y$ である可換体 F が存在するならば, $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$ である. よって, Pontryagin や Boltyanskiĭ の例のように $\dim(X \times Y) < \dim X + \dim Y$ となる空間 X, Y については, $\dim_{\mathbb{Q}} X < \dim X, \dim_{\mathbb{Q}} Y < \dim Y$ である.

これらのことから次の定義が意味を持つことがわかる.

定義 1.10. 空間 X が **dimension full-valued** であるとは, 任意の空間 Y に対して,

$$\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$$

であることをいう.

コホモロジー次元の言葉を使って dimension full-valuedness は次のように特徴づけられる.

定理 1.11 (Boltyanskiĭ[Bol]-Kodama[K$_2$]). $\dim X < \infty$ であるコンパクト距離空間 X が dimension full-valued である必要十分条件は, 任意の可換群 $G \neq 0$ に対して, $\dim_G X = \dim X$ であることである.

任意に与えられた可換群に関するコホモロジー次元を決定するための (可算) 基として, Bockstein[Bo] は, 今日 Bockstein 群と呼ばれている可換群の可算族:

$$\sigma = \{\mathbb{Q}\} \cup \bigcup_{p:\text{素数}} \{\mathbb{Z}_p,\ \mathbb{Z}_{p^\infty},\ \mathbb{Z}_{(p)}\},$$

ただし, $\mathbb{Z}_p$ は p-巡回群, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ は $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の p-torsion 部分群,

$\mathbb{Z}_{(p)} = \{n/m \in \mathbb{Q} \mid m$ は p によって整除されない $\}$,

を導入した. このとき, 任意の可換群 $G \neq 0$ に対して, Bockstein 族 $\sigma(G) \subset \sigma$ を次のように定義すると, そのコホモロジー次元は次のように決定される.

(1) $\mathbb{Z}_{(p)} \in \sigma(G) \Longleftrightarrow G/\mathrm{Tor}\, G$ が p によって整除できない;
(2) $\mathbb{Q} \in \sigma(G) \Longleftrightarrow G/\mathrm{Tor}\, G$ が任意の素数 p によって整除できる;
(3) $\mathbb{Z}_p \in \sigma(G) \Longleftrightarrow \mathrm{Tor}\, G$ が p によって整除できない;
(4) $\mathbb{Z}_{p^\infty} \in \sigma(G) \Longleftrightarrow \mathrm{Tor}\, G \neq 0$ が p によって整除できる.

定理 1.12 (Bockstein の定理). 任意の空間 X と可換群 $G \neq 0$ に対して,

$$\dim_G X = \sup\{\dim_H X \mid H \in \sigma(G)\}.$$

注 5. Bockstein 族の定義から
$\sigma(\mathbb{Z}) = \{\mathbb{Z}_{(p)} \mid p : \text{素数}\}$
であることより, 整係数コホモロジー次元が整数群の局所化のコホモロジー次元によって得られることがわかる.

2 ANR の次元とコホモロジー次元

前述したように位相多様体や CW 複体といった空間について (ここでいう) 次元を問題にするといったことは必要ではない. それではもう少し空間のクラスを広げたらどうなるだろうか. 多面体や CW 複体のように組み合わせ的性質を持った空間と一般の位相空間とを結びつける概念である ANR について考察してみよう.

定義 2.1. 距離空間 M が **ANR** であるとは, 任意の距離空間 Y への任意の閉埋蔵 $X \hookrightarrow Y$ に対して, M の近傍 U とレトラクション $r : U \to M$ が存在することをいう.

距離空間 M が ANR であるならば, 任意の距離空間とその閉部分集合の組 (X, A) と任意の連続写像 $f : A \to M$ に対して, A の近傍 U と f の連続的拡張 $\tilde{f} : U \to M$ が存在する. また任意の距離空間とその閉部分集合の組 (X, A) について M はホモトピー拡張性をもつ. すなわち, 単体的複体のもつ構造的性質から CW 複体を得たように, ANR は, 単体的複体のもつ連続写像の拡張に関する性質から得られたと見てもよいだろう.

コンパクト位相多様体やコンパクト CW 複体は ANR である. もちろん位相多様体でも CW 複体でもない ANR はいくらでも存在するが, コンパクト ANR はコンパクト CW 複体のホモトピー型をもつ. よってホモトピー カテゴリーまでいくとコンパクト ANR とコンパクト CW 複体とは区別がつかなくなる.

また, $\dim M = n$ であるコンパクト ANR M は, 次の意味で多面体によって近似されているといえる: $\mathbb{R}^N$ へ埋蔵されているならば ($N \geq 2n+1$ ならば常に埋蔵が存在する) , 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 多面体である M の近傍 K とすべての $x \in K$ について $d(x, r(x)) < \varepsilon$ であるレトラクション $r : K \to M$ をもつ, ただし, d は $\mathbb{R}^N$ の距離である. よって, ANR は, 次元論的には多面体と同じ単純さを示すと期待された.

たとえば次のことがわかっている:

定理 2.2. 任意のコンパクト ANR M について,

(1) $\dim_{\mathbb{Z}} M = \dim M$([Wa] 参照),
(2) $\dim M = \dim_{\mathbb{Z}_p} M$ である素数 p が存在する ([Bor$_1$]),
(3) $\dim(M \times M) = 2 \dim M$,
(4) $\dim M = 2$ ならば dimension full-valued である ([K]).
すなわち, M が 2 次元コンパクト ANR ならば, 任意の空間 Y に対して,

$\dim(M \times Y) = 2 + \dim Y$ である.

Borsuk によって問題: M, N がコンパクト ANR ならば, $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$ が成り立つか? が指摘され, このような状況では, 肯定的に解決されることが期待されていた. ただし, $\dim M = 2$ であるが 2 次元円板を含まない ANR M が存在すること及び $\dim N = 2$ であるが 2 次元円板を含まない ANR N が存在することに注意しておく.

ところが Dranishnikov[Dr_2] は否定的な解となる例を構成した:

定理 2.3. 任意の素数 p について, $\dim_{\mathbb{Z}_p} M_p = 4$ であるが p と異なる任意の素数 q に対し $\dim_{\mathbb{Z}_q} M_p = 3$ である 4 次元 ANR M_p が存在する.

よって, $\dim(M_p \times M_q) = 7 < \dim M_p + \dim M_q$ である.

しかし, この例は非常に難解なものであり, 構成法簡略化や他の例はいまだに現れていない. また, 次の問題は未解決である:

問題 2.4. 任意の $\dim M = 3$ である ANR M と任意の空間 Y について, $\dim(M \times X) = 3 + \dim Y$ が成り立つか?

$\dim M \geq 2$ である ANR M は, 任意の可換群 $G \neq 0$ について, $2 \leq \dim_{\mathbb{Q}} M \leq \dim_G M$ であることが知られている. よって, 問題2.5は, $\dim M = 3$ である ANR M について, $\dim_{\mathbb{Q}} M = 3$ であるか?を意味している.

また, この問題と注 1 で指摘しておいた無限次元コンパクト距離空間の存在と関連して次の問題は興味深い:

問題 2.5. $\dim_{\mathbb{Q}} M < \infty$ である無限次元 ANR M が存在するか?

3 Compact ANR の部分集合とコホモロジー次元

定理 1.2 で $\dim \mathbb{R}^n = n$ であることを注意しておいたが, Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の大切な性質に次の領域普遍性定理がある:

定理 3.1 (Brouwer's Invariance of Domain). 位相同型である部分集合 $X, Y \subset \mathbb{R}^n$ について, X が $\mathbb{R}^n$ の開集合ならば, Y も $\mathbb{R}^n$ の開集合である.

ここでさらに次の事実に注意すると, $n \neq m$ ならば, $\mathbb{R}^n$ と $\mathbb{R}^m$ とは位相同型でないことがわかる.

定理 3.2 (Menger-Urysohn). 部分集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ について, $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ である必要十分条件は $\dim A = n$ であることである.

系 3.3. $\mathbb{R}^n$ の n 次元部分集合からなる任意の非可算族 $\{A_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対して,

$$\dim(A_\lambda \cap A_\mu) = n$$

である $\lambda \neq \mu \in \Lambda$ が存在する.

特に, $\mathbb{R}^n$ において, 任意の互いに交わらない n 次元部分集合からなる族は高々可算である.

これらの事実は, 明らかに位相多様体へ拡張することができるが, 一般的な空間へは ANR へすら拡張することはできない.

定理 3.4 (Borsuk[Bor$_2$]-Sieklucki [S]). n 次元コンパクト ANR の n 次元閉部分集合からなる任意の非可算族 $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対して, $\dim(K_\alpha \cap K_\beta) = n$ となる index の組 $\alpha \neq \beta$ が存在する

定理 3.5 ([C-Koz], [D-Ko]). R を単位元 1 をもつ principal ideal domain とする. コンパクト ANR X とその閉部分集合からなる任意の非可算族 $\{K_\alpha\}_{\alpha \in A}$ について,

$$\dim_R X = n = \dim_R K_\alpha \quad \textit{for each} \quad \alpha \in A$$

ならば, $\dim_R(K_\alpha \cap K_\beta) = n$ となる index の組 $\alpha \neq \beta$ が存在する.

実際 $\mathbf{Z}$ は単位元 1 をもつ principal ideal domain であるので, 定理 2.2(1) から, 定理 3.5 は Borsuk-Siklucki の定理 3.4 を一般化したといえる.

Borsuk-Siklucki は係数群の可算性を利用したが, われわれは単位元 1 をもつ principal ideal domain 上の有限生成加群の分解定理に着目した. そのとき本質的な役割を果たした道具は以下のものである.

定義 3.6. R を単位元 1 をもつ principal ideal domain とする. M を R-加群, $\{M_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を R-加群の族とする. homomorphism $f : M \to \Pi_{\alpha \in A} M_\alpha$ が **pro-epimorphism** であるとは, 任意の有限部分集合 $F \subset A$ について合成

$$M \xrightarrow{f} \Pi_{\alpha \in A} M_\alpha \xrightarrow{p_F} \Pi_{\alpha \in F} M_\alpha$$

が epimorphism であることをいう.

定理 3.7. R を単位元 1 をもつ countable principal ideal domain とする. M を有限生成 R-加群, $\{M_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を有限生成 R-加群の非可算族とする. このとき pro-epimorphism $f : M \to \Pi_{\alpha\in A} M_\alpha$ が存在するならば, $M_\alpha = 0$ である $\alpha \in A$ が存在する.

しかし Bockstein 群の族 σ をみると, 定理 3.5 は $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ をカバーしていない. それにしても $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ は難物で, これまでのコホモロジー次元に関する結果をいろいろ見ても直接にこのタイプの群をはからったものな見あたらない. ほとんどが不等式をうまく使って評価しているか, それともちょっと異質で, うまくいかない例として取り上げるかであった.

しかし異質なタイプな異質なタイプで意外性のある性質を持つことがある:

補題 3.8. $\mathbf{Z}_{p^\infty}$ の任意の部分群の列 :

$$G_0 = \mathbf{Z}_{p^\infty} \supseteq G_1 \supseteq G_2 \cdots \supseteq G_n \cdots$$

に対して, $G_{n_0} = G_{n_0+1} = G_{n_0+2} = \cdots$ となる $n_0 \geq 0$ が存在する.

このような群は "descending chain condition をみたす" という.

第二段階としてこの性質に着目した. 実際 desceding chain condition をみたす群について定理 3.7 に対応するものとして次のことがわかる :

定理 3.9. desceding chain condition をみたす可換群 G と可換群に無限族 $\{G_j\}_j \in J$ について, pro-epimorphism $f : G \to \Pi_{j\in J} G_j$ が存在するならば, $G_j = 0$ となる $j \in J$ が存在する.

定理 3.10 ([Boe-D-Ko-J-Sh]). コンパクト ANR X とその閉部分集合からなる任意の非可算族 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ について,

$$\dim_G X = n = \dim_G K_\alpha \quad \textit{for each} \ \ \alpha \in A$$

ならば, $\dim_G(K_\alpha \cap K_\beta) = n$ となる index の組 $\alpha \neq \beta$ が存在する.

したがって, Bockstein の定理 1.12 から, 次のようにまとめられる.

系 3.11. X をコンパクト ANR, G を任意の自明でない可換群 G とする. このとき閉部分集合の非可算族 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in A}$ について,

$$\dim_G X = n = \dim_G K_\alpha \quad \textit{for each} \ \ \alpha \in A$$

ならば, $\dim_G(K_\alpha \cap K_\beta) = n$ となる index の組 $\alpha \neq \beta$ が存在する.

定義 3.12. 空間 A が **cell-like** であるとは, 一点集合と同じ shape 型をもつこと, すなわち, 任意の CW 複体への連続写像 $\varphi : A \to K$ が零ホモトープであることをいう. 空間 X の cell-like 閉部分集合からなる上半連続分割 $\mathcal{D}$ を X の **cell-like 分割**と呼ぶ.

連続写像 $f : X \to Y$ が **cell-like** であるとは, 任意の $y \in Y$ に対して $f^{-1}(y)$ が cell-like であることをいう.

問題 3.13 (Cell-like 写像問題). Cell-like 写像は次元を保存するか?
すなわち $\dim X < \infty$ である空間 X 上で定義された cell-like 写像 $f : X \to Y$ について, $\dim Y \leq \dim X$ が成り立つか?

$f : X \to Y$ を cell-like 写像とすると任意の可換群 G について, $\dim_G Y \leq \dim_G X$ である. よって, 定理 1.8(3) から, $\dim X = 1$ ならば $\dim Y \leq 1$ である. よって Cell-like 写像問題では, $\dim X \geq 2$ であると仮定してよい.

一般のコンパクト距離空間では, cell-like 写像 $f : X \to Y$, $\dim X = 2 < \infty = \dim Y$ が存在することが知られている.

一方, ANR M 上で定義された cell-like 写像 $f : M \to Y$ について, $\dim M = 2$ ならば, Borsuk-Sieklucki の定理 3.4 によって $\dim Y \leq 2$ であることがわかる.

コンパクト多様体 N 上で定義された cell-like 写像 $f : N \to Y$ について, $\dim N \leq 3$ ならば $\dim Y \leq 3$ である ([Koz-W]). また, cell-like 写像 $f : I^5 \to Y$, $\dim Y = \infty$ が存在することが知られている.

これらの事実と関連して次の問題が未解決である.

問題 3.14. $\dim M = 3$ または 4 である ANR M 上で定義された cell-like 写像は次元を保存するか?

$\dim N = 4$ である コンパクト多様体 N 上で定義された cell-like 写像は次元を保存するか?

4 Appendix

定理 2.7 の証明の過程で, 彼は異なる係数群のコホモロジー次元を比較し, 今日代数的トポロジーの大切な作用素のひとつである Bockstein 作用素を定義する完全列を導入した. これを Bockstein の完全列と呼ぶ.

定理 4.1. 空間 X とその閉部分集合を A とする. 任意の可換群の完全列 $0 \to G_1 \to G_2 \to G_3 \to 0$ は次の完全列を導く:

$$\cdots \to \check{H}^n(X,A;G_1) \to \check{H}^n(X,A;G_2) \to \check{H}^n(X,A;G_3) \to \check{H}^{n+1}(X,A;G_1) \to \cdots.$$

定理 2.8 は, Bockstein 不等式と呼ばれる次の不等式を導く.

定理 4.2. 任意の空間 X に対して次の不等式が成り立つ:

(1) $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \le \dim_{\mathbb{Z}_p} X$;
(2) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X \le \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + 1$;
(3) $\dim_{\mathbb{Q}} X \le \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X$;
(4) $\dim_{\mathbb{Z}_p} X \le \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X$;
(5) $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \le \max\{\dim_{\mathbb{Q}} X, \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X - 1\}$;
(6) $\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X \le \max\{\dim_{\mathbb{Q}} X, \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + 1\}$.

積空間のコホモロジー次元については, Bockstein [Bo] のよって次のように決定されている:

定理 4.3. 空間 X, Y について次の等式が成り立つ:

(1) $\dim_{\mathbb{Z}_p}(X \times Y) = \dim_{\mathbb{Z}_p} X + \dim_{\mathbb{Z}_p} Y$;
(2) $\dim_{\mathbb{Q}}(X \times Y) = \dim_{\mathbb{Q}} X + \dim_{\mathbb{Q}} Y$;
(3) $\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}}(X \times Y) = \max\{\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X + \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Y, \dim_{\mathbb{Z}_p} X + \dim_{\mathbb{Z}_p} Y - 1\}$;
(4)

$$\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}}(X \times Y) = \begin{cases} \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X + \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y, \\ (\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \quad \text{または} \quad \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y = \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Y \quad \text{のとき}) \\ \max\{\dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}}(X \times Y) + 1, \dim_{\mathbb{Q}} X + \dim_{\mathbb{Q}} Y\} \\ (\dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} X > \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} X \quad \text{かつ} \quad \dim_{\mathbb{Z}_{(p)}} Y > \dim_{\mathbb{Z}_{p^\infty}} Y \quad \text{のとき}). \end{cases}$$

文献

[Al] P. S. Alexandroff, Dimensiontheorie, ein Betrag zur Geometrie der abgeschlossen Mengen, Math. Ann. **106**(1932), 161–238.

[Bo] B. F. Bockstein, Homological invariants of topological spaces, I, II, Trudy Moskov Mat. Obshch. **5**(1956), 3–80, ibid. **6**(1957), 3–133 (*Russian*) (English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (2) **11**, 173–254, 255–385.

[Boe-D-J-Ko-Sh] M. Boege, J. Dydak, R. Jiménez, A. Koyama and E. V. Shchepin, Borsuk-Sieklucki theorem in cohomological dimension theory, Fund. Math. (to appear).

[Bol] V. G. Boltyanskiĭ, On dimension full-valuedness of compacta, Dokl. Akad. Nauk SSSR. **67**(1949), 773–777 (*Russian*) (English translation in Amer. Math. Soc. Transl. (1) **48**, 7–11.

[Bor_1] K. Borsuk, Ensembles dont les dimensions modulaires de Alexandroff coïncident avec la dimension de Menger-Urysohn, Fund. Math. **27**(1936), 77–93.

[Bor_2] ___, Concerning the dimension of ANR-sets, Bull. Acad. Pol. Sci. **9**(1961), 685–687

[C-Koz] J. S. Choi and G. Kozlowski, A Generalization of Sieklucki's Theorem, Topology Proceedings **23**(Spring Issue)(1998), 135–142.

[Dr_1] ___, On a problem of P. S. Alexandroff, Math. USSR Sbornik **63:2**(1988), 412–426.

[Dr_2] ___, Homological dimension theory, Russian Math. Surveys **43(4)**(1988), 11–63.

[D-Ko], J. Dydak and A. Koyama, Cohomological dimension of locally connected compacta, Topology and its Appl. (to appear).

[D-W], ___ and J. Walsh, Infinite dimensional compacta having cohomological dimension two: An application to the Sullivan Conjecture, Topology **32**(1993), 93–104.

[En] R. Engelking, Theory of Dimensions, Finite and Infinite, Sigma Series in Pure Mathematics vol.10, Heldermann Verlag, 1995.

[K_1] Y. Kodama, On a problem of Alexandroff concerning the dimension of product spaces I, J. Math. Soc. Japan **11**(1959), 94–111.
[K_2] ___, Note on cohomological dimension for non-compact spaces, J. Math. Soc. Japan **18**(1966), 343–359.

[Koz-W] G. Kozlowski and J. J. Walsh, Cell-like maps on 3-manifolds, Topology **22**(1983), 147–151.

[P] L. S.Pontryagin, Sur une hypothèse fondamentale de la dimenson, C. R. Acad. Sci. Paris, **190**(1930), 1105–1107.

[S] K. Sieklucki, A generalization of a theorem of a K. Borsuk concerning the dimension of ANR-sets, Bull. Acad. Pol. Sci. Math. **10**(1962), 433-435.

[Wa] T. Watanabe, A note on cohomological dimension of approximable movable spaces, Proc. Amer. Math. Soc. **123**(1995), 2883–2885.

幽霊写像

入江幸右衛門　（大阪女子大学理学部）

幽霊写像に関する概説としては、Roitberg による [13]（1994年）や McGibbon による [7]（1995年）があるが、この講演ではその後の幽霊写像の研究の発展を中心に紹介したい。従って、引用を付していない定理などの出典は、上記2論文を参照していただきたい。

1. 幽霊写像とは

ここでは、特に断らない限りすべての空間は基点を持ち、すべての写像およびホモトピーは基点を保つものとする。基点は普通 $*$ で表される。

定義 1.1A. CW 複体 X から空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が幽霊写像であるとは、f を X の各 n 切片 X_n に制限することにより得られる写像 $f|_{X_n} : X_n \to Y$ が零ホモトープであることをいう。

この定義によれば、もし CW 複体 X が有限次元なら、幽霊写像は自明なものしか存在しない。したがって、幽霊写像を問題にするときは、必然的にドメイン空間 X が無限次元であるときを考えている。しかし、ターゲット空間 Y は無限次元である必要はない。上の定義から明らかなように幽霊写像 $f : X \to Y$ の誘導する写像

$$f_* : \pi_*(X) \to \pi_*(X), \quad f_* : H_*(X) \to H_*(Y), \quad \cdots$$

などなどはすべて自明なものとなる。

Y の $n+1$ 次元以上のホモトピー群を消した空間を $Y^{(n)}$ と表し、$p_n : Y \to Y^{(n)}$ を標準的な写像とする。このとき、$f : X \to Y$ が幽霊写像であるという条件は、合成

$$p_n f : X \to Y \to Y^{(n)}$$

がすべての n に対して、零ホモトープであるという条件に等しい。従って、一般のドメイン空間 X に対しては、この条件でもって、写像 $f : X \to Y$ が幽霊写像であると定義する。

幽霊写像として次の定義を用いる人がいるので、文献を読む場合は注意が必要である。

定義 1.1B. 空間 X から空間 Y への写像 $f : X \to Y$ が幽霊写像であるとは、任意の有限複体 K と任意の写像 $g : K \to Y$ に対して合成

$fg: K \to Y$ が零ホモトープであることをいう。

定義 1.1A の意味における幽霊写像は、定義 1.1B の意味における幽霊写像であるが、その逆は必ずしも正しくない。しかし、ドメイン空間 X が CW 複体で各 n 切片が有限複体（このような CW 複体を有限型の CW 複体という）であるときは、逆が成り立ち、普通我々が取り扱う空間に関しては両者の概念が一致するので問題は生じないと思う。

2. 幽霊写像の $\lim^1$ 表現

CW 複体 X に対して、次の基点つき集合の間の短完全列が存在することが知られている。

$$* \to \varprojlim{}^1[\Sigma X_n, Y] \to [X,Y] \to \varprojlim\,[X_n, Y] \to *,$$
$$* \to \varprojlim{}^1[X, \Omega Y^{(n)}] \to [X,Y] \to \varprojlim\,[X, Y^{(n)}] \to *.$$

ここに、基点つき集合の列

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

が、B において完全であるとは、$f(A) = g^{-1}(*)$ となることをいう。$\mathrm{Ph}(X,Y)$ によって X から Y への幽霊写像のホモトピー類の作る基点つき集合を表せば、上の完全列より、基点つき集合として同型

$$\mathrm{Ph}(X,Y) \cong \varprojlim{}^1[\Sigma X_n, Y] \cong \varprojlim{}^1[X, \Omega Y^{(n)}]$$

が存在することが分かる。従って、ホモトピー論を展開する前に、$\lim^1$ についていろいろと知っておく必要がある。この説の目的は $\lim^1$ の定義と基本的な性質、易しい具体例を述べることである。

$\varprojlim$ は逆極限を表し、$\varprojlim^1$ はその第 1 次導来函手を表すが、それは以下のように定義される。集合とその間の写像からなる逆系

$$S_1 \xleftarrow{\pi_1} S_2 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \leftarrow S_n \xleftarrow{\pi_n} \cdots$$

に対して、

$$\varprojlim S_n = \{(s_n) \in \prod S_n \mid s_n = \pi_n(s_{n+1}) \quad \text{for all } n\}$$

と定義される。しかし、その第 1 次導来函手は群とその間の順同型写像からなる逆系に対してしか定義されない。

$$G_1 \xleftarrow{\pi_1} G_2 \xleftarrow{\pi_2} \cdots \leftarrow G_n \xleftarrow{\pi_n} \cdots$$

を群の逆系とするとき、群 $\prod G_n$ は集合 $\prod G_n$ へ次の左作用

$$(g_n) \cdot (x_n) = (g_n x_n (\pi_n(g_{n+1}))^{-1})$$

を誘導するが、この作用を用いて

$$\varprojlim{}^1 G_n = \prod G_n/\text{action}$$

と定義する。ここで注意することは、$\varprojlim^1 G_n$ は一般には単に基点つき集合でしかなく、それが群構造を持つのは、各 G_n がアーベル群のときである。

定理 2.1. 群の逆系の短完全系列

$$1 \to \{H_n\} \to \{G_n\} \to \{K_n\} \to 1$$

に対して、基点つき集合の完全系列

$$* \to \varprojlim H_n \to \varprojlim G_n \to \varprojlim K_n \to \varprojlim{}^1 H_n \to \varprojlim{}^1 G_n \to \varprojlim{}^1 K_n \to *$$

が存在する。

定義. 集合の逆系 $S = \{S_1 \leftarrow S_2 \leftarrow S_3 \leftarrow \cdots\}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすとは、$S_n^{(m)} = \mathrm{Image}[S_n \leftarrow S_m]$ と定義するとき各 n に対して集合の減少列

$$S_n = S_n^{(n)} \supset S_n^{(n+1)} \supset \cdots \supset S_n^{(m)} \supset S_n^{(m+1)} \supset \cdots$$

が有限減少条件を満たす（ある番号から先が等しくなる）ことをいう。

定理 2.2. 群の逆系 $\{G_n\}$ が Mittag-Leffler 条件を満たすとき、$\varprojlim^1 G_n = *$ である。さらに、もしすべての G_n が可算群ならば、逆も成り立つ。また、$\varprojlim^1 G_n \neq *$ ならば、それは各 G_n の濃度に関係なく非可算集合である。

次に具体例を 1 つ取り上げたいが、その前によく知られた記号を定義しておく。素数 p に対して

$$\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{n}{m} \in \mathbb{Q} \mid (m,p) = 1\},$$
$$\mathbb{Z}_p^{\wedge} = \varprojlim\{\mathbb{Z}/p \leftarrow \mathbb{Z}/p^2 \leftarrow \mathbb{Z}/p^3 \leftarrow \cdots\},$$
$$\hat{\mathbb{Z}} = \prod_{\text{all primes}} \mathbb{Z}_p^{\wedge}$$

と定義する。

さて、最も簡単と思われる群の逆系は

$$\mathbb{Z} \xleftarrow{n_1} \mathbb{Z} \xleftarrow{n_2} \mathbb{Z} \xleftarrow{n_3} \mathbb{Z} \cdots$$

であろう。形式的に

$$\prod n_i = \pm \prod_{\text{all primes}} p^{k_p}$$

と定義する。各 k_p は無限大の値をとることも許す。この逆系が Mittag-Leffler 条件を満たすのは $\prod n_i$ が有限の値をとるときであるが、この

ときは $\varprojlim \mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}$ で $\varprojlim^1 \mathbb{Z} = 0$ である。そうでないときの構造を知るために次の逆系の短完全系列を考える。

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle n_1} & & \uparrow{\scriptstyle n_1} & & \uparrow{\scriptstyle n_1} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle n_2} & & \uparrow{\scriptstyle n_2} & & \uparrow{\scriptstyle n_2} & & \\
0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle n_3} & & \uparrow{\scriptstyle n_3} & & \uparrow{\scriptstyle n_3} & & \\
 & & \vdots & & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

$\varprojlim \mathbb{Z} = 0$, $\varprojlim^1 \hat{\mathbb{Z}} = 0$（前者は議論の前提、後者はよく知られた事実）と $\hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z}$ が $\mathbb{Q}$ 加群の構造を持ち、その間の各写像が同型写像であることに注意すれば、定理 2.1 より次の短完全系列を得る。

$$0 \to \varprojlim \hat{\mathbb{Z}} \to \hat{\mathbb{Z}}/\mathbb{Z} \to \varprojlim{}^1 \mathbb{Z} \to 1$$

$\mathbb{Z}_{(p)}$ は $\mathbb{Z}_p^\wedge$ の部分加群であり、特に、p 以外の素数は $\mathbb{Z}_p^\wedge$ において可逆である。この事実を使えば、

$$\varprojlim \hat{\mathbb{Z}} = \prod_{\{p \mid k_p < \infty\}} p^{k_p} \mathbb{Z}_p^\wedge$$

であることが分かり、これより次の同型を得る。

$$\varprojlim{}^1 \mathbb{Z} \cong \frac{\prod_{\{p \mid k_p = \infty\}} \mathbb{Z}_p^\wedge \times \prod_{\{p \mid k_p < \infty\}} \mathbb{Z}/p^{k_p}}{\mathbb{Z}}$$

ここで用いた方法は空間レベルでも有効に機能し、幽霊写像を調べるのに非常に有効である。たとえば、[15] において、Roitberg と Touhey は McGibbon の概説 [7] に述べられている種種の定理を簡単に証明している。そのような定理の中で、以下の議論において重要な定理を 1 つあげておく。

定理 2.3. この定理においてはすべての空間は、有限型の空間であると仮定する。

（１）写像 $f : X \to X'$ が全射 $f^* : H^*(X'; \mathbb{Q}) \to H^*(X; \mathbb{Q})$ を誘導すれば、

$$f^* : \mathrm{Ph}(X', Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y)$$

も全射である。

（2）写像 $g: Y \to Y'$ が全射 $g_*: \pi_*(Y) \otimes \mathbb{Q} \to \pi_*(Y') \otimes \mathbb{Q}$ を誘導すれば、

$$g_*: \mathrm{Ph}(X, Y) \to \mathrm{Ph}(X, Y')$$

も全射である。

この定理からも分かるように、幽霊写像の研究において有理ホモトピー理論は重要な手段ではあるが、有理ホモトピー理論では問題にならなかった写像の向きが問題となる。自明でない写像 $f: S^3 \to K(\mathbb{Z}, 3)$ は同型 $f^*: H^*(K(\mathbb{Z}, 3); \mathbb{Q}) \to H^*(S^3; \mathbb{Q})$ を誘導し、

$$f^*: \mathrm{Ph}(K(\mathbb{Z}, 3), S^4) \cong \mathbb{R} \to \mathrm{Ph}(S^3, S^4) = *$$

は全射であるが、全単射ではない。そして、逆向きの写像 $K(\mathbb{Z}, 3) \to S^3$ は自明なものしか存在しない。

ここに、$K(A, n)$ は Eilenberg-MacLane 空間を表し、それは

$$\pi_i(K(A, n)) = \begin{cases} A & i = n, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

で特徴づけられる空間である。そして、$K(\mathbb{Z}, 3) = (S^3)^{(3)}$ である。

3. 空間の局所化と自明でない幽霊写像の例

アーベル群の上で定義され局所化や完備化などの函手は、空間の上に拡張されている。空間 X に対して

$$X \to X_{(p)} \quad (\text{resp. } X \to X_0)$$

によって、空間 X の素数 p による局所化函手（または、有理化函手）を、

$$X \to X_p^\wedge$$

によって、空間 X の素数 p による完備化函手を表す。これらは、空間が単連結（弧状連結でかつ基本群が自明）な有限型の CW 複体ならば、自然な写像から誘導されるホモトピー群の間の写像

$$\pi_*(X) \to \pi_*(X_{(p)}) \cong \pi_*(X)_{(p)} \quad (\text{resp. } \pi_*(X) \to \pi_*(X_0) \cong \pi_*(X) \otimes \mathbb{Q})$$

は、アーベル群 $\pi_*(X)$ の素数 p による局所化（または、有理化）であり、

$$\pi_*(X) \to \pi_*(X_p^\wedge) \cong \pi_*(X)_p^\wedge$$

は、アーベル群 $\pi_*(X)$ の素数 p による完備化である、という性質を持つ。そして

$$\hat{X} = \prod_{\text{all primes}} X_p^\wedge$$

と置く。また、有限個の素数 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ を可逆化した空間を

$$X[P^{-1}]$$

によって表す。幽霊なんかいないだということを示すのに、次の定理は有効である。

定理 3.1. X, Y を単連結な有限型の CW 複体とするとき、$\mathrm{Ph}(X,Y) = *$ であるための必要十分条件は、

(1) すべての素数 p について、$\mathrm{Ph}(X, Y_{(p)}) = *$ であり、
(2) 有限個の素数 $P = \{p_1, \cdots, p_n\}$ が存在して、$\mathrm{Ph}(X, Y[P^{-1}]) = *$ である。

次に、写像

$$\delta_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \prod_p \mathrm{Ph}(X, Y_{(p)})$$

を考える。ここに、δ_* は $\delta : Y \to \prod_p Y_{(p)}$、その写像の p 番目への射影は自然な局所化の写像 $Y \to Y_{(p)}$、から誘導されたものである。このとき、

定理 3.2. ([5]) X, Y を単連結な有限型の CW 複体とする。もし、$\mathrm{Ph}(X,Y) \neq *$ ならば、$\delta_* : \mathrm{Ph}(X,Y) \to \prod_p \mathrm{Ph}(X, Y_{(p)})$ は無限対 1 被覆である。とくに、すべての素数で局所化して消えてしまう幽霊写像が無限個存在する。

H. Miller による Sullivan 予想の解決により、多くの自明でない幽霊写像の存在が明らかになった。

定理 3.3. X, Y を単連結な有限型の CW 複体とするとき、

(1) 十分大きなすべての整数 n に対して、$\pi_n(X) = 0$、または
(2) X が連結なコンパクト・リー群の分類空間

ならば、任意の非負の整数 k に対して、つぎのような基点を持つ集合の全単射が存在する。

$$\mathrm{Ph}(\Sigma^k X, Y) = [\Sigma^k X, Y] \cong \prod_m H^m(X\,; \pi_{m+k+1}(Y) \otimes \mathbb{R}).$$

4. ループ空間からでる幽霊写像

空間 X のループ空間

$$\Omega X = \{\ell : I \to X \mid \ell(0) = \ell(1) = *\}$$

は、（有限次元になることもあるが）代表的な無限次元空間の例だが、幽霊写像という点から見る限り、定理 3.3 でみた 2 種類の空間と比べてかなり有限次元空間に近いということができるだろう。というのは、次のような予想があり、それを支持する部分的な結果がいくつか証明されている。

予想 4.1. X を単連結な有限複体、Y を単連結な有限型の CW 複体とするとき、$\mathrm{Ph}(\Omega X, Y) = *$ である。

この予想は、次の予想と同値である。

予想 4.1′. X を単連結な有限複体とするとき、写像

$$\Omega X \to \prod S^{2n_i+1} \times \prod \Omega S^{2m_j+1}$$

で、有理ホモトピー群の同型を導くものが存在する。

定理 4.2. ([4]) 次のいずれかの場合上の予想は正しい。

1. 空間を各素数で局所化したとき。
2. 十分大きなすべての n に対して、$\pi_n(X) \otimes \mathbb{Q} = 0$ が成り立つとき（このような空間を rationally elliptic、そうでない空間を rationally hyperbolic という）。

定理 4.2 の証明のスケッチと予想 4.1 の証明を目指して

与えられた単連結な有限複体 X の有理ホモトピー群で最初の自明でないものが偶数次元、例えば 2n 次元、に表れるとする。このとき、写像

$$f : X \to BU(n)$$

で、2n 次元の有理ホモトピー群の全射 ($\pi_{2n}(BU(n)) \otimes \mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}$) を導くものが作れる。この f でファイバー・バンドル $S^{2n-1} \to BU(n-1) \to BU(n)$ を引き戻すことによって、次のファイバー・バンドルの可環図式を得る。

$$\begin{array}{ccc}
S^{2n-1} & = & S^{2n-1} \\
\downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow \\
X' & \longrightarrow & BU(n-1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
X & \xrightarrow{f} & BU(n)
\end{array}$$

このとき、X' は有限複体で、$\pi_{2n}(X')\otimes\mathbb{Q}$ の次元は X のそれより 1 次元少なく、そして、有理ホモトピー同値写像

$$\Omega X \to S^{2n-1}\times\Omega X''$$

が存在する。ここに、$X''=X'\cup_{j'}CM^{2n-1}(k)$ であり、$\bar{h}:\Omega X\to\Omega X''$ は以下のように構成される。$j:S^{2n-1}\to X'$ は有限位数、k とする、なので、j は写像 $j':M^{2n-1}(k)=S^{2n-1}\cup_k e^{2n}\to X'$ に拡張できる。$h:X'\to X''$ を自然な包含写像として、次のファイブレーションの可環図式を考えることによって、求める写像の存在が分かる。

$$\begin{tikzcd}
\Omega X' \arrow[r] \arrow[d, "\Omega h"] & \Omega X \arrow[r] \arrow[d, "\bar{h}"] & S^{2n-1} \arrow[r, "j"'] \arrow[d] & X' \arrow[r] \arrow[d, "h"] & X \\
\Omega X'' \arrow[r, equal] & \Omega X'' \arrow[r] & * \arrow[r] & X'' \arrow[r, equal] & X''
\end{tikzcd}$$

X'' は有限複体で $h:X'\to X''$ は有理ホモトピー同値写像なので、$\pi_{2n}(X'')\otimes\mathbb{Q}$ の次元は X のそれより 1 次元少なくなっている。

ところが、X の有理ホモトピー群で最初の自明でないものが奇数次元、例えば $2n-1$ 次元、に表れるとき、同様なことができない。そこで無理にまねをする。有理ホモトピー同値写像 $X\to Y$ と写像

$$f:Y\to S^{2n-1}$$

で、クロス・セクションをもつものを作る。この f でファイブレーション $\Omega S^{2n-1}\to *\to S^{2n-1}$ を引き戻すことによって、次のファイブレーションの可環図式を得る。

$$\begin{tikzcd}
\Omega S^{2n-1} \arrow[r, equal] \arrow[d] & \Omega S^{2n-1} \arrow[d] \\
Y' \arrow[r] \arrow[d] & * \arrow[d] \\
Y \arrow[r, "f"] & S^{2n-1}
\end{tikzcd}$$

有理ホモトピー同値写像

$$\Omega X\to\Omega Y\simeq\Omega S^{2n-1}\times\Omega Y'$$

を作ることができるが、もはや、Y' は有限複体ではなく、帰納法の仮定が使えない。ただ、定理 4.2 の条件 1 または 2 があるときは、この困難を避けて通ることができる。あるいは、このとき Y' がある種の有限性を持っているとも、言うことができる。予想 4.1 の解決には、Y' の構造をもっと詳しく知ることが必要である。

5. 普遍幽霊写像

前節では、ターゲット空間が有限型の場合を考えたが、ここでは一般の空間を扱う。このとき、普遍幽霊写像の存在が知られている。写像

$$\vee X_n \to X$$

を、各 X_n に制限したとき自然な包含写像となるものとする。この写像が誘導するコファイバー列

$$\vee X_n \to X \xrightarrow{\Theta} \vee\Sigma X_n \to \vee\Sigma X_n \cdots$$

を考えるとき、ここに表れる $\Theta : X \to \vee\Sigma X_n$ が X から出る普遍幽霊写像である。つまり、次の定理が成り立つ。

定理 5.1. 基点を持つ連結な CW 複体 X から出る任意の幽霊写像 $f : X \to Y$ に対して、$f = \bar{f}\Theta$ となる写像 $\bar{f} : \vee\Sigma X_n \to Y$ が存在する。

この定理から、X から出る普遍幽霊写像が自明ならば、任意の空間 Y に対して集合 $\mathrm{Ph}(X,Y) = *$ である。X から出る普遍幽霊写像が自明となる1つの十分条件は次の定理で与えられる。

定理 5.2. 空間 X を ΣX が有限次元複体のウェッジ和にホモトピー同値、つまり、$X \simeq \vee_\alpha K_\alpha$、$K_\alpha$ は有限複体、であるような空間とするとき、X から出る普遍幽霊写像は自明である。

例 5.3. 空間 X は、$\Omega(\Sigma L_1 \times \cdots \times \Sigma L_n)$ とホモトピー同値であるとする。ただし、各 L_i は有限複体である。このとき、ΣX は有限複体のウェッジ和にホモトピー同値となり、特に X から出る普遍幽霊写像は自明である。

今までの所 X から出る普遍幽霊写像が自明となる例は、本質的には上のような例（$\Omega(\Sigma L_1 \times \cdots \times \Sigma L_n)$ のある種の部分複体を含む）しか知られていない。

定理 5.4. ([3]) G を単連結なコンパクト・リー群とする。このとき、ΩG から出る普遍幽霊写像が素数 p で局所化して自明となる必要十分条件は、G が（奇数次元の）球面の直積と p 同値であることである。

定理 5.5. ([3]) X を単連結な有限複体とする。もし、$H_*(X;\mathbb{Z}/p)$ が自明でなければ、2 以上のすべての整数 k に対して、$\Omega^k X$ から出る普遍幽霊写像は素数 p で局所化しても自明でない。ただし、$\Omega^k X$ は帰

納的に $\Omega^k X = \Omega(\Omega^{k-1}X)$ によって定義される。

定理 5.6. ([3]) X を単連結な有限型の CW 複体とし、$\Omega_0^3 X$ によって、3 重ループ空間 $\Omega^3 X$ の連結成分を表す。$\Omega_0^3 X$ から出る普遍幽霊写像が素数 p で局所化して自明となる必要十分条件は、$\Omega_0^3 X$ がトーラストと p 同値になることである。

6. 最後に

McGibbon は [7, 8] に 21 の未解決問題を列挙しているが、今の所、次の 11 題が未解決のままである。

問題 2 、3 、4 、8 、9 、11 の後半、14、18、19、20、21

また、[6] に列挙されている未解決問題も、幽霊写像に関するものではないが、研究の指針になると思われる。

References

1. Le M. Ha and J. Strom, *Gray filtration on phantom maps*, preprint
2. K. Iriye, *The space of loops on a homogeneous space and rational equivalence*, Bull. London Math. Soc. **31** (1999) 484-488
3. K. Iriye, *Universal phantom maps out of loop spaces*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **130A** (2000) 313-333
4. K. Iriye, *Rational equivalence and phantom maps out of a loop space*, J. Math. Kyoto Univ. **40** (2000) 775-788
5. K. Iriye, *The first derived functor of the inverse limit and localization*, preprint
6. C. A. McGibbon, *The Mislin genus of a space*, CRM Proceedings and Lecture Notes **6** (1994) 75-102
7. C. A. McGibbon, *Phantom maps*, Chapter 25 in *The Handbook of Algebraic Topology*, North-Holland, Amsterdam, 1995
8. C. A. McGibbon, *Some problems about phantom maps*, Fields Institute Comm. **19** (1998) 241-250
9. C. A. McGibbon and J. Roitberg, *Connective coverings, phantom maps and genus sets*, preprint
10. C. A. McGibbon and J. Strom, *Numerical invariant of phantom maps*, preprint
11. J. Pan, *Having the H-space structure is not a generic property*, preprint
12. J. Pan and M. H. Woo, *Phantom maps and forgetful maps*, preprint
13. J. Roitberg, *Computing homotopy classes of phantom maps*, CRM Proceedings and Lecture Notes **6** (1994) 141-168
14. J. Roitberg, *The Lusternik-Schnirelmann category of certain infinite CW-complexes*, Topology **39** (2000) 95-101
15. J. Roitberg and P. Touhey, *The homotopy fiber of profinite completion*, Topology and its App. **103** (2000) 295-307