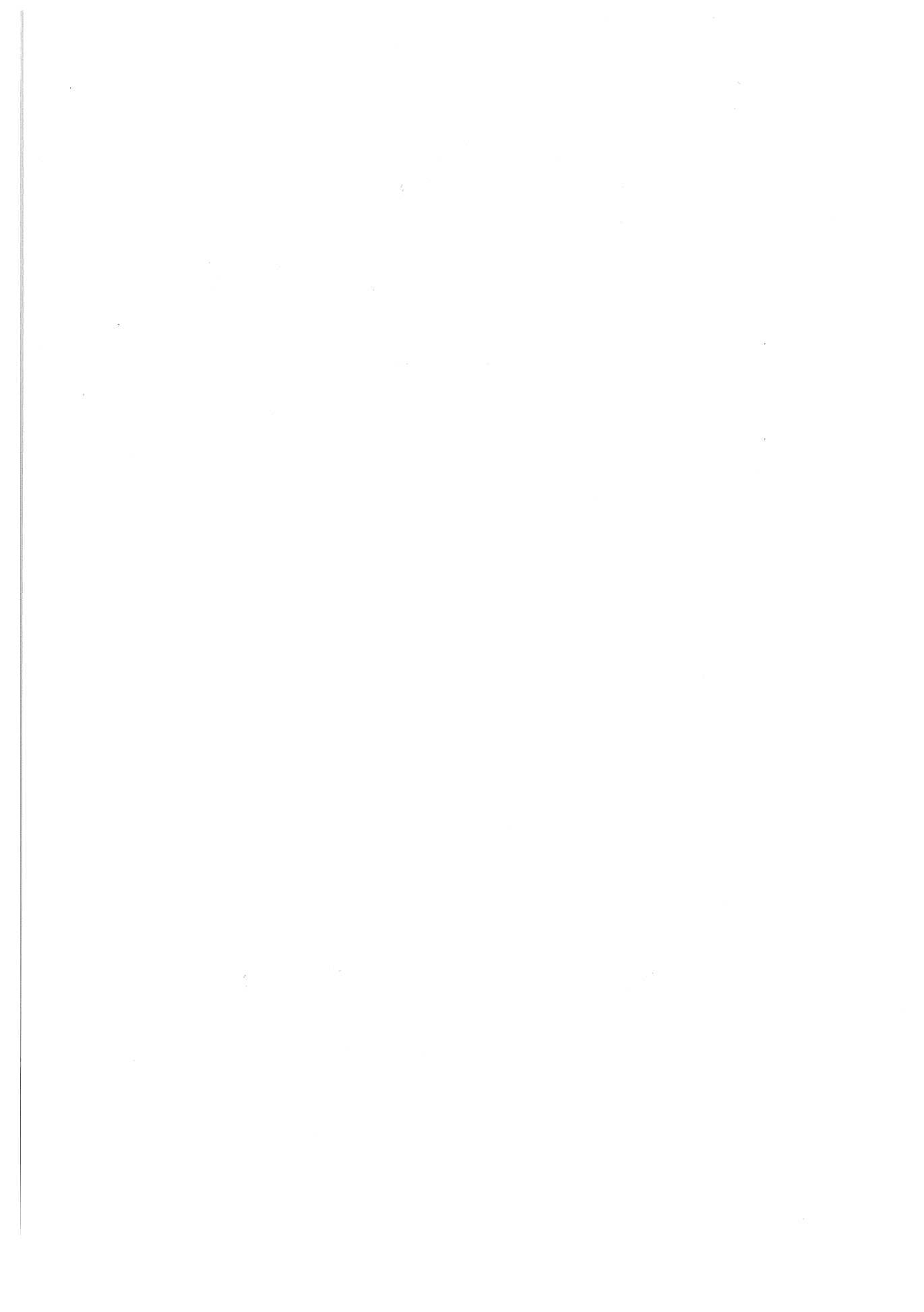


第47回
トポロジーシンポジウム
講演集

2000年7月
於 鹿児島大学稲盛会館

平成12年度科学研究費 基盤研究研究(A)

課題番号 12304003



序

この講演集は2000年7月24日から27日の間、鹿児島大学において開催される第47回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をより良く理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

なおこの講演集は

2000年度 科学研究費 基盤研究 (A)
研究代表者 坪井 俊 (東京大学大学院数理科学研究科)
研究題目 位相幾何学の総合的研究
課題番号 12304003

により作成されたものである。

世話人：泉屋 周一 (北海道大学大学院理学研究科)
島川 和久 (岡山大学理学部)
大本 亨 (鹿児島大学理学部)

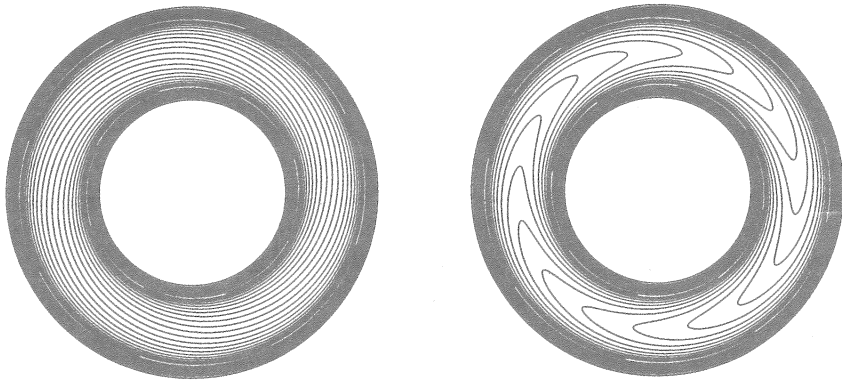
葉層構造の交叉について

東京大学大学院数理科学研究科

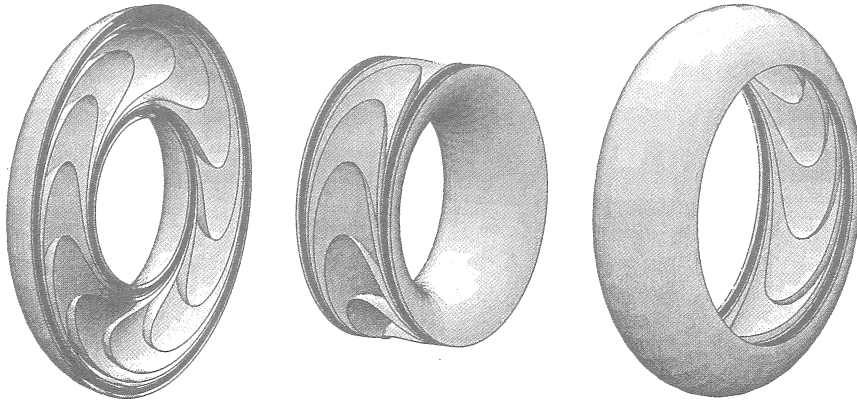
坪井 俊

1. 葉層構造、多重葉層、葉層の交叉

ここで考える葉層構造(フォリエーション)は3次元多様体上の余次元1の、つまり2次元の葉層構造である。この葉層構造は、多様体の曲面への分割で、局所的には、3次元ユークリッド空間の平行な平面族と同相となるものである。



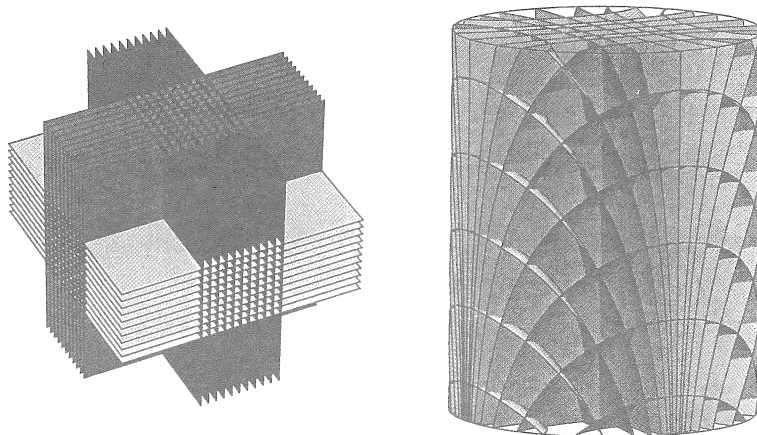
葉層構造の例として、次元は下がるが、アニュラス上の葉層構造を考えると、上の図のようなものがある。左のものをスロープ成分、右のものをリーブ成分という。境界の2つの円周だけをコンパクトな葉として持つ葉層構造は、位相的には、この2つのものに限る。



これは松元重則との共同の研究である。一部分は野田健夫との共同の研究である。研究の一部は平成11年度文部省在外研究員としての研究である。また一部は平成12年度科学研究費補助金、基盤研究(A)(1)課題番号12304003「位相幾何学の総合的研究」の援助を受けている。

3次元多様体上の余次元1葉層構造を考えると、最も重要な結果と思われるものは、Wood等による、すべての3次元多様体は葉層構造を持つという定理である。この葉層構造の構成には、上図の3次元のレーブ成分が使われる。

3次元多様体内の2つの余次元1葉層構造の横断的な交叉は、局所的には、3次元ユークリッド空間の2つの座標平面に平行な平面の族という形をしている。3次元ユークリッド空間の3つの座標平面に平行な平面の族という形をしているものも考えられる。これらを、多重葉層（マルチフォリエーション）とよぶ。この時、最も重要な結果と思われるのは、Hardorp [9] による、すべての向き付け可能な3次元多様体は3つの葉層による多重葉層を持つという定理である。

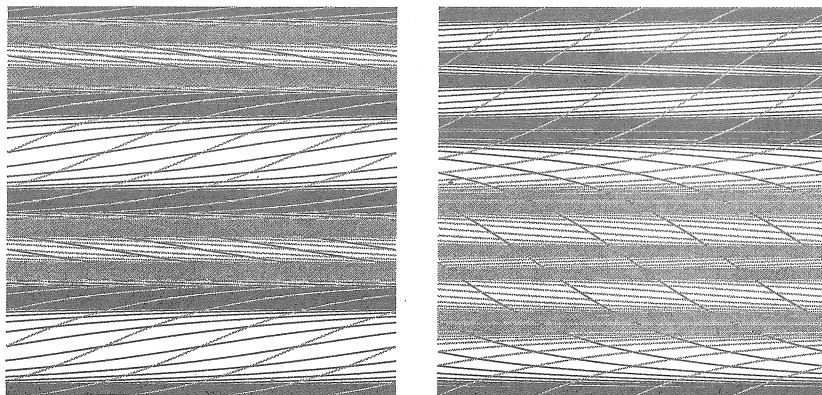


さて我々が問題にしたいことは、2つの余次元1葉層構造を固定したときに、その横断的交叉はどのようなになっているかということである。つまりその横断的交叉が、ある意味で一意的かということである。

2つの葉層構造の横断的交叉が一意的であるというのは次のように定義される。

定義。 \mathcal{F} と \mathcal{G} を多様体 M の横断的に交わる葉層構造とする。 h を恒等写像にアイソトピックな M の微分同相としたときに、 \mathcal{F} と $h^*\mathcal{G}$ が横断的ならば、 \mathcal{F} を保つ恒等写像にアイソトピックな M の微分同相 \hat{h} で、 $h^*\mathcal{G} = \hat{h}^*\mathcal{G}$ となる。

このような一意性の問題を提起すると、それに対してはすぐに多くの反例が出て来てしまう。



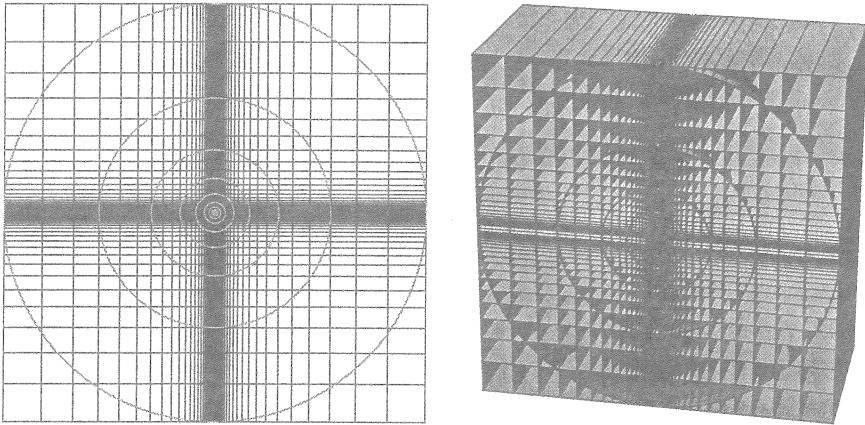
例えば2次元トーラス上で考えてみよう。2次元トーラス上に円周上の双曲的な微分同相写像のサスペンションで与えられる葉層構造を考える。これはスローブ成分を2つ貼り合わ

せたものである。この葉層構造は少しだけアイソトピーで動かして、それ自身に横断的にすることができる。この横断的な交わりは2つのアニユラスを区別しなければ一意的である。

この葉層構造を使って葉層構造の交叉が一意的でないという例を作ることができる。この葉層構造の二重被覆を考えると、4つの円周を葉層として持つ葉層構造を作ることができる。これは上述の、アイソトピーで動かした葉層の二重被覆と横断的に交わる。しかしながら、別の交わり方も存在する。すなわち1つのアニユラスの中に他方の4つの円周をすべて含むような横断的な交わりがある。この2つの交叉は、アニユラスの中にある円周の個数を比べると多重葉層としては同じでないことがわかる。

横断的交叉の一意性が成立する場合もある。2次元トーラスにはレーブ成分を2つ貼り合わせて得られるレーブ葉層というものがある。このレーブ葉層はそれを平行移動したものと横断的になる。この横断的交叉は一意的である。

2次元トーラスのレーブ葉層はよく知られた簡明な構成の仕方を持つ。すなわち平面から原点を除いたものを考え、ここに平行な直線族を考える。この曲線族は原点を中心とする相似拡大で不変であるから、1つの相似拡大で割って得られる2次元トーラス上にレーブ葉層が得られる。ここで2つの座標軸に平行な直線族を考えると、2次元トーラスの多重葉層を得る。

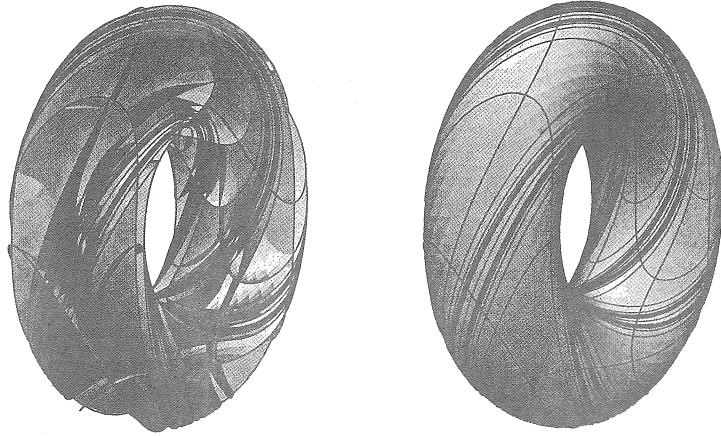


この構成は3次元ユークリッド空間においても実行することができる。3次元ユークリッド空間から原点をのぞいたところに平行な平面族を考えると、この平面族は原点を中心とする相似拡大で不変であるから、1つの相似拡大で割って得られる2次元球面と円周の直積上にレーブ成分を2つ貼り合わせた葉層構造が得られる。2つあるいは3つの座標平面に、平行な平面の族を考えると球面と円周の直積上の多重葉層が得られる(前のページの上の右の絵)。この多重葉層の2つの葉層構造の交叉は一意的である。

また、3次元球面にはレーブ葉層と呼ばれる葉層構造が存在する。これはレーブ成分を2つ貼り合わせて得られる葉層である。このレーブ葉層を少しアイソトピーで動かすと、もとの葉層構造に横断的になる。この横断的交叉は一意的である。

これらのレーブ成分を貼り合わせた形の葉層構想の交叉の一意性は、次のようにして証明される。レーブ成分に対して、それに横断的な葉層構造は分類されている。田村佐藤 [14] によればレーブ成分に横断的な葉層構造は1/2 レーブ成分およびアニユラス上の区間束およびTS成分を貼り合わせた形になっている。TS成分やアニユラス上の区間束の境界のホロノミーを考えると、一方の葉層構造を他方の葉層構造の1つのレーブ成分上で見ると、それは2つの1/2 レーブ成分を貼り合わせた形になっていることがわかる。

葉層構造の交叉の一意性の研究の現状は、典型的な葉層について個別におこなうだけであるというものであるが、それでも、興味深い現象が観察される。



さて他のよく知られた葉層構造として、3次元トーラスの平面を葉とする葉層構造を考える。このような葉層構造は閉微分形式で与えることができる。これによって葉層構造の方向が定まるが、もしも2つの葉層構造 \mathcal{F}, \mathcal{G} に対して、その方向が一致していれば、どのようなアイトピーで片方を動かしても、横断的にはならない。一方、2つの葉層構造が異なった方向を持っていれば、横断的に交わるが、その横断的交叉は一意的になる。これを示そう。

前半は、もしも横断的になれば、横断性は開条件であるから、両方の葉層を同じ方向の円周上のファイバー束に同時に変形することができるが、一方のファイバーに他方の束射影を制限したものを考えると、横断性は持ち得ないことがわかる。

後半については、3次元トーラス M の普遍被覆 \widetilde{M} を考える。またこの普遍被覆に持ち上げた葉層構造 $\widetilde{\mathcal{F}}, \widetilde{\mathcal{G}}$ を考える。この普遍被覆上の葉層構造は、3次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 の平行な平面族と同じであるから、その葉層の葉の空間は、直線と同相になる。そこで普遍被覆 \widetilde{M} からそれぞれの普遍被覆の葉層の葉の空間の直積 $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}$ への写像 p を考える。

$$p: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}$$

普遍被覆には3次元トーラスの基本群 \mathbb{Z}^3 が作用しているが、この基本群は葉の空間に平行移動として作用している。従って、葉層の交叉 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ は横断的に $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 構造をもつ。よく考えると、上の写像 p がこの基本群に対して同変なファイブレーションになっていて、ファイバーが実数直線となっていることがわかる。あるいは、横断的 $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ 構造を持たば、特に横断的ユークリッド構造を持つから、Carrière [2] の結果を使えば、この写像がファイブレーションであることがわかる。

葉層の交叉 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ の横断構造は、 $p: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}$ と基本群の同変作用により与えられていることに注意する。Haefliger により、一般に、葉層の葉のホロノミー被覆が可縮ならば、ホロノミーの生成する亜群の分類空間になるという結果が示されている ([8])。今の場合、平面による葉層 \mathcal{F}, \mathcal{G} の交わりには閉軌道は存在しない。分類空間の一意性により、葉層の2通りの交叉 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}, \mathcal{F} \cap h^* \mathcal{G}$ に対し、 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ の葉 (軌道) を $\mathcal{F} \cap h^* \mathcal{G}$ の葉 (軌道) に写す M のホモトピー同値写像が存在する。このような軌道を保つホモトピー同値写像があると、軌道を保つ微分同相写像が存在する (Gromov, Ghys [5], [10] 参照)。横断構造を保っていることを考えると、多重葉層を保つことも容易にわかる。これは Ghys [5] による論法である。

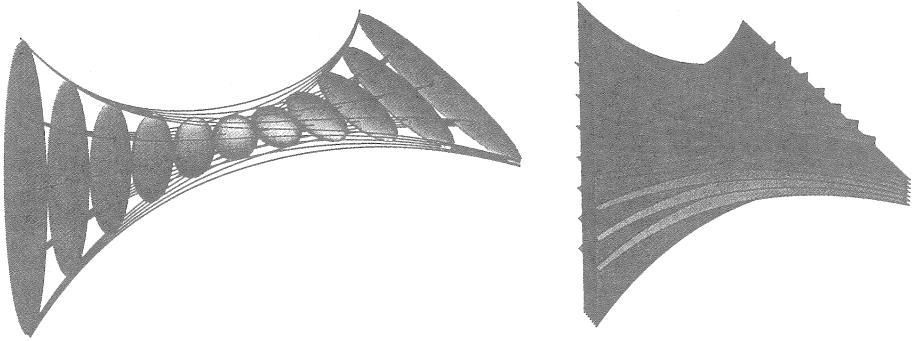
軌道を軌道に写すホモトピー同値の存在は Haefliger の結果を使うかわりに、2つの同変な射影 $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}}, \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/h^* \widetilde{\mathcal{G}}$ に対して、次の図式を可換にする同変写像 $\widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}$ が存在することからもわかる。

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{M} & \longrightarrow & \widetilde{M} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{G}} & \longrightarrow & \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}} \times \widetilde{M}/h^* \widetilde{\mathcal{G}} \end{array}$$

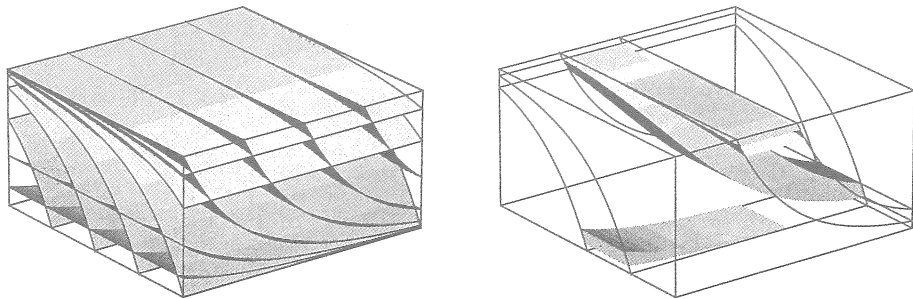
2. アノソフ葉層

さて我々が関心を持っている最も面白い葉層構造は、力学系に關係して得られるものである。一つはアノソフ葉層と呼ばれるものである。

3次元多様体上の流れがアノソフであるというのは次のようにして定義される。3次元多様体の接束が流れに対して不変であるように1次元ベクトル束の直和に分解し、そのひとつは流れの方向、そのひとつは流れによって指数的に縮む方向、そのひとつは流れによって指数的に伸びる方向となるものである。この時、下の図のように安定葉層、不安定葉層が定義される。



この概念を拡張した射影的アノソフという流れがあるが、これは次のようにして定義される。多様体の接束を流れの方向で割って得られる2次元のベクトル束が、流れによって不変であるように1次元ベクトル束の直和に分解し、直和成分のそれぞれからベクトルをとると、それらのベクトルの長さの比がアノソフである場合のように変化するものである ([11], [3], [12])。さらに正則な射影的アノソフというのを、この分解によって得られる平面場が一意積分可能であり、さらに滑らかであることによって定義する ([12], [13])。下の図は2次元トーラスと区間の直積における射影的アノソフ流のモデルである。



アノソフ葉層に関しては Fenley[4], Barbot[1] 等により多くの研究がなされている。しかし滑らかなアノソフ葉層というものはそんなに多くは存在しないということが Ghys[7] によって示されている。すなわち、滑らかなアノソフ葉層構造は次の2通りのものである。

1つめは、円周上の双曲的モノドロミーを持つ T^2 束 M 上のものである。モノドロミーは行列 $A \in SL(2; \mathbf{Z})$ で表されるが、 \mathbf{R}^2 上の A の2つの固有ベクトルに平行な直線の族は、 $T^2 \cong \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ 上のモノドロミー不変な多重葉層となる。これのサスペンションが、アノソフ葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ である。

2つめは、双曲閉曲面の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma_g$ の測地流に対して、時刻が正の無限大になるときに漸近的に近づく軌道全体は余次元1葉層 \mathcal{F}^s 、時刻が負の無限大になるときに漸近

的に近づく軌道全体は余次元1葉層 \mathcal{F}^u をなすというものである。(\mathcal{F}^s と \mathcal{F}^u は異なる双曲計量に対するものをとってもよい。)

さて我々の結果は以下のものである。

定理 [10]。円周上の双曲的モノドロミーを持つ T^2 束のアノソフ葉層を $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ とする。 \mathcal{F}^u と \mathcal{F}^s の横断的交叉は一意的である。

定理 [10]。双曲閉曲面の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma_g$ のアノソフ葉層を $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ とする。 \mathcal{F}^u と \mathcal{F}^s の横断的交叉は一意的でない。

定理 [13]。双曲閉曲面の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma_g$ のアノソフ葉層を $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ とする。 \mathcal{F}^u と \mathcal{F}^s の横断的交叉が、射影的アノソフであるならば、横断的交叉は一意的である。

一意性の証明は、3次元トーラスの平面による葉層構造の場合の証明と同じ道筋をたどる。

ここに現れる葉層構造の普遍被覆への持ち上げは3次元ユークリッド空間の平行な平面族による葉層構造と微分同相であることに注意する。(これらの葉層構造は、この多様体のコンパクト葉をもたない葉層として特徴付けられているので、定理の仮定はコンパクト葉を持たない2つの葉層の交叉といっても良い。)

2つの葉層構造を $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ として、それらの普遍被覆 \widetilde{M} への持上げ $\widetilde{\mathcal{F}}^u, \widetilde{\mathcal{F}}^s$ の葉の空間を考え、写像

$$p = (p^u, p^s) : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$$

を考える。また、 $\mathcal{F}^u \cap \mathcal{F}^s$ に向きを定めておく。

円周上の T^2 束の場合は、基本群は $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s \cong \mathbf{R}^2$ にアファイン群として作用している。このとき p が \mathbf{R} をファイバーとするファイバー束になることは、次の順に示される。

- (1) $\mathcal{F}^u \cap \mathcal{F}^s$ の閉軌道の持上げの p による像は離散的。
- (2) 逆にある軌道の持上げの p による像の $\pi_1(M)$ 軌道が離散的ならば、軌道は閉軌道。
- (3) $\mathcal{F}^u \cap \mathcal{F}^s$ の閉軌道全体は稠密。
- (4) $\pi_1(M)$ 軌道が離散的な $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ の点 y の逆像 $p^{-1}(y)$ は連結。
- (5) 閉軌道 γ の不安定多様体 $W^u(\gamma)$ の持上げの上で $p : \widetilde{W}^u(\gamma) \longrightarrow \{p^u(\widetilde{\gamma})\} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ は \mathbf{R} 束。
- (6) $g \in \pi_1(M)$ に対して、 $(p^u(\widetilde{\gamma}), gp^s(\widetilde{\gamma})) \in \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ の逆像は連結。(これはホモクリニック軌道に対応する。)
- (7) $\pi_1(M)$ 軌道が離散的な $\widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ の点 (y^u, y^s) に対し、 p は $\{y^u\} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s, \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \{y^s\}$ 上で \mathbf{R} 束。
- (8) p は全射。
- (9) p はファイブレーション。

\mathcal{F}^u と \mathcal{F}^s の横断的交叉が、射影的アノソフの場合は、定義を振り返ってみると、 \widetilde{M} の葉層 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ が積葉層であると、1次元葉層 $\widetilde{\mathcal{F}}^u \cap \widetilde{\mathcal{F}}^s$ は $\widetilde{\mathcal{F}}^u$ の葉 \widetilde{L}^u に制限すると積葉層であることがわかる。実際、 $\widetilde{\mathcal{F}}^u \cap \widetilde{\mathcal{F}}^s|_{\widetilde{L}^u}$ が積葉層でないとすると、軌道空間で分離されない軌道があるが、 $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ が積葉層であるとしているので、分離されない軌道 l, l' は、ある $\widetilde{\mathcal{F}}^s$ の葉 \widetilde{L}^s と \widetilde{L}^u の交わりの2つの成分である。 l, l' に近づく軌道の列 l_m があるが、射影的アノソフの仮定から、 l の1点の近傍から l' の1点の近傍への l_m に沿う $\widetilde{\mathcal{F}}^u \cap \widetilde{\mathcal{F}}^s$ のホロノミーは発散する distortion を持つ。一方、このホロノミーは、 $\widetilde{\mathcal{F}}^u, \widetilde{\mathcal{F}}^s$ のホロノミーとして、有界な distortion を持つことになるので、矛盾を得る。

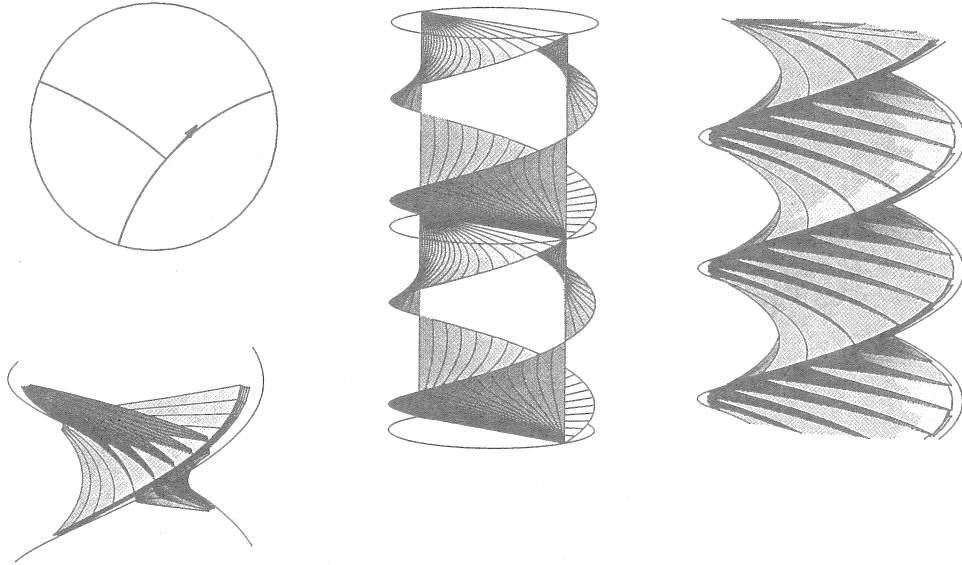
このことから、 $p = (p^u, p^s) : \widetilde{M} \longrightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ は像への \mathbf{R} をファイバーとするファイブレーションであることがわかる。

一旦、ファイブレーションであることがわかると、葉層構造の2通りの横断的交叉に対し、前と同じ論法で、軌道を保つホモトピー同値、軌道を保つ微分同相が定義され、これが、多重葉層を保つことがわかる。

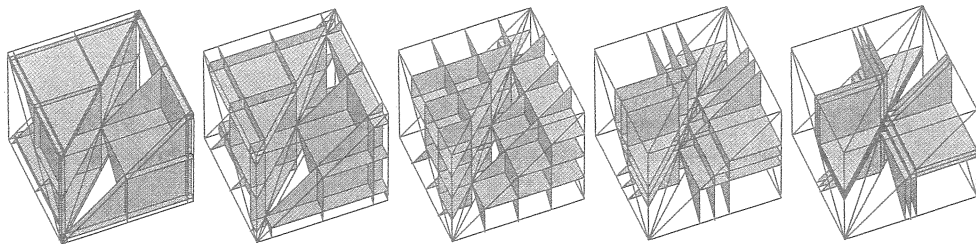
3. エギゾチックな交叉

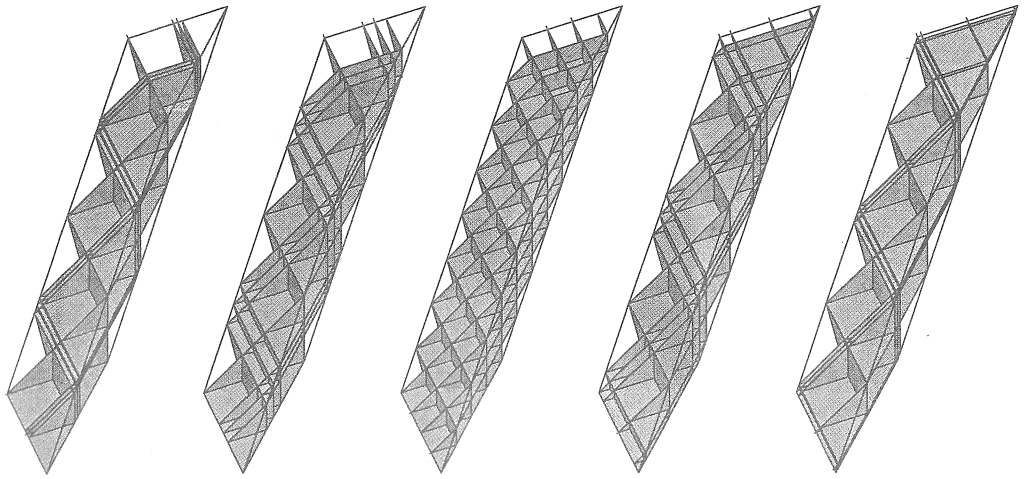
ここでは、一意性が成り立たないことを示す構成を説明する。構成の仕方は元の双曲閉曲面の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma_g$ のアノソフ葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ に対し、 Σ_g の単純測地線の $T_1\Sigma_g$ における逆像として得られる 2次元のトーラス T^2 に沿って、切り貼りを行うものである。

双曲閉曲面の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma_g$ のアノソフ葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ は次のように記述される。その普遍被覆空間はポアンカレ円板の単位接ベクトル束の普遍被覆空間と同一視される。ポアンカレ円板の1つの単位接ベクトル v は、 v の定める測地線の始点 p_s 、終点 p_t 、 v から左手垂直方向の測地線の終点 p_l という無限遠円周 S^1_∞ の巡回的に向きを持つ3点の組 $(p_s, p_t, p_l) \in S^1_\infty \times S^1_\infty \times S^1_\infty$ でパラメータ付けられる。安定葉層 \mathcal{F}^s は同じ終点 p_t をもつ単位ベクトル全体、不安定葉層 \mathcal{F}^u は同じ始点 p_s をもつ単位ベクトル全体からなる。下にある図はその葉の様子、葉層の様子を描いたものである。

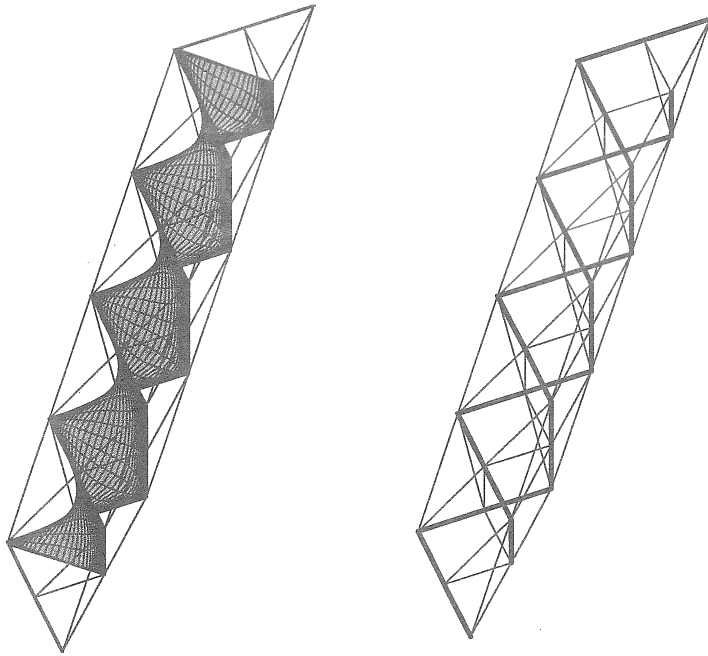


葉層の様子は $S^1_\infty \times S^1_\infty \times S^1_\infty$ における像として描くほうがずっと簡単である。この像は3次元トーラスの大対角線集合を除いた一方の連結成分と一致する。このとき、ポアンカレ円板の単位接ベクトル束の普遍被覆空間は無限三角柱と同相になる。このような絵は [15] にある。この時、普遍被覆空間上の葉層 $\tilde{\mathcal{F}}^u, \tilde{\mathcal{F}}^s$ の交叉 $\tilde{\mathcal{F}}^u \cap \tilde{\mathcal{F}}^s$ の軌道空間は、 $\tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}}^u \times \tilde{M}/\tilde{\mathcal{F}}^s$ において斜めに延びた帯になる ([4], [1])。3次元トーラスには $PSL(2; \mathbf{R})$ が対角的に作用しているが、無限三角柱には $PSL(2; \mathbf{R})$ が対角的に作用している。よく知られているように、 $\pi_1(\Sigma)$ の作用は双曲的であるが、その双曲作用は下の図のようにになっている。 Σ_g の単純測地線の $T_1\Sigma_g$ における逆像として得られる2次元のトーラス T^2 の基本群は、無限三角柱に平行移動およびこの双曲作用として作用する。

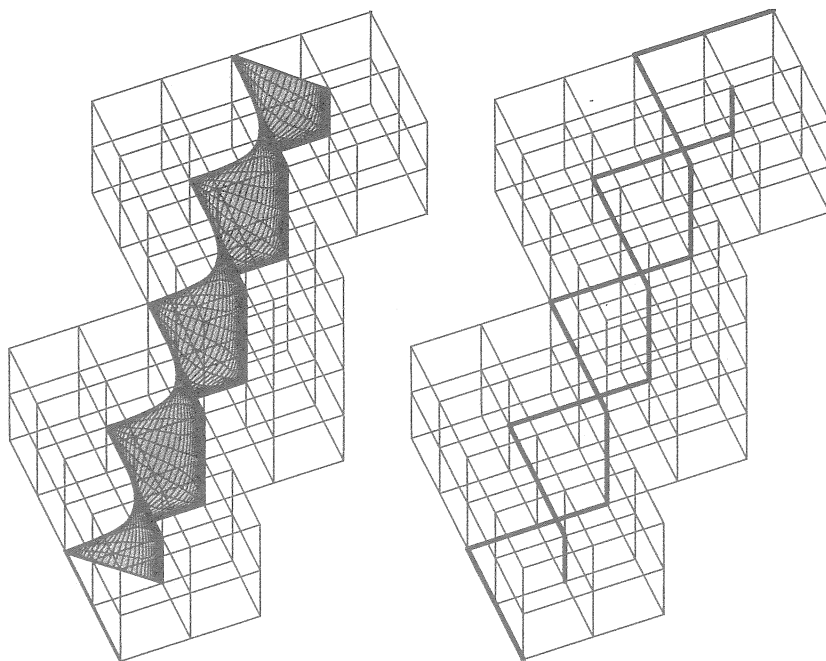




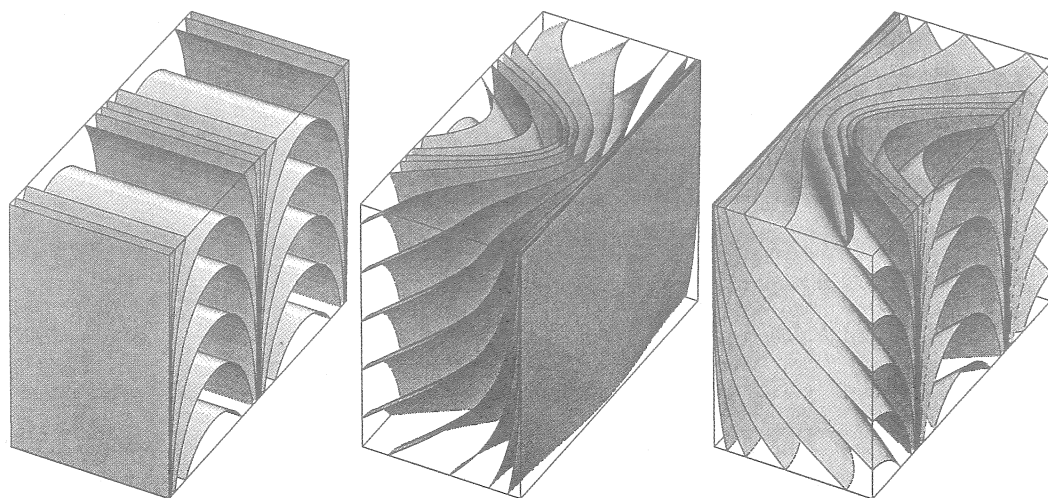
さて、この無限三角柱上に、問題の T^2 の持上げを描いてみよう。これは、考えればわかることであるが、筆者はコンピュータで書いて初めて納得したものである。それが下の左の図であるが、右の図は、その持上げの無限遠での集積点を描いている。集積点が二重螺旋になっているのがわかる。これは持上げの一つだけを描いたもので、ほかの持上げはこれを基本群の作用で移したものになっている。

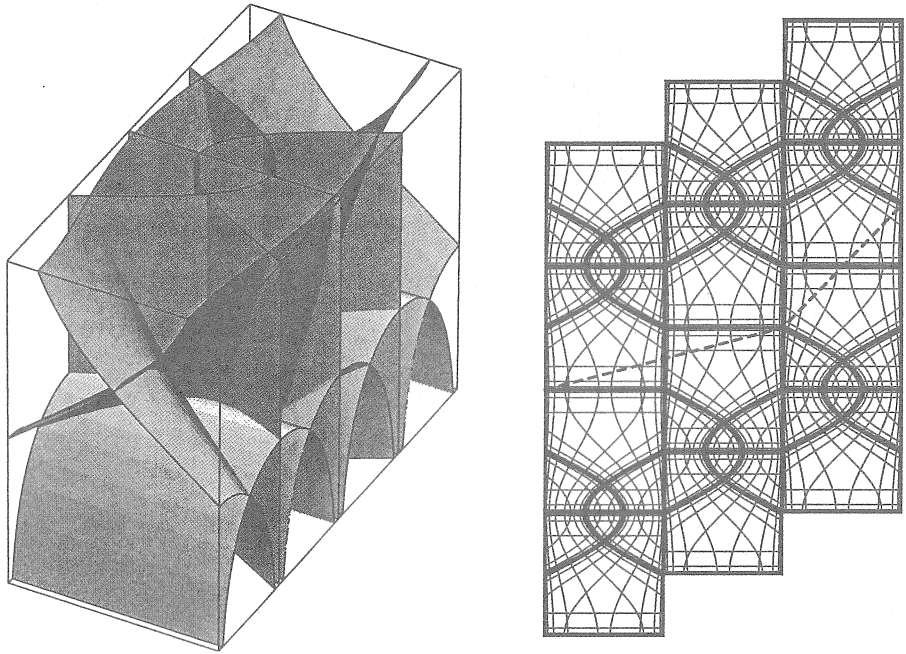


T^2 で切り貼りをするという事は、この普遍被覆で、同変的に切り貼りをすることである。切り貼りのための葉層として、下の図を思いつければあとはやさしい。



この図においては二重螺旋の一方は境界上にあるが、他方は螺旋状にくっついた単位立方体の芯になっている。この図形（芯を除いた部分）は、位相的には開円板と円周の直積である。重要なことはこの図形に $\pi_1(T^2)$ が作用していることである。 $\pi_1(T^2)$ の一方の生成元は円周束のファイバーにあたるもので、平行移動として作用している。 $\pi_1(T^2)$ の他方の生成元は、単純測地線にあたるもので、双曲的作用である。この作用による商空間は3次元のトーラスになる。この3次元のトーラスは3つの単位立方体の商の和となっているが、その単位立方体の商である2次元トーラスと区間の直積に誘導される3つの葉層を描いたものが下の図である。





3つの葉層構造は、上の右の図（左の図を上方からみたものをならべてある。）のように貼り合わさって、 T^3 の多重葉層構造をなす。この図で点線が、 T^2 に対応している。この T^2 で切ると、 T^3 のそれぞれの葉層は、円周の双曲的微分同相のサスペンションとして得られる T^2 の葉層構造と区間の直積となることがわかる。

これらの葉層が準備できると、予定通り、双曲閉曲面の単位接ベクトル束 $T_1\Sigma_g$ のアノソフ葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ に対し、 Σ_g の単純測地線の $T_1\Sigma_g$ における逆像として得られる2次元のトーラス T^2 に沿って切ったものの2つの境界に、3次元トーラスを同じく T^2 に沿って切ったものの2つの境界を貼り合わせる。普遍被覆での切り貼りを考えると、 T^2 のすべての持ち上げに対して同時に切り貼りをしていることになる。これにより $\mathcal{F}^{u'}, \mathcal{F}^{s'}$ という多重葉層としては、異なったものができる。射影 $p: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^{u'} \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^{s'}$ が $p: \widetilde{M} \rightarrow \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^u \times \widetilde{M}/\widetilde{\mathcal{F}}^s$ と異なるからである。しかし、3次元トーラスの葉層を T^2 に沿って切ったものは T^2 の葉層に区間を掛けたものであるから、おのおのの葉層 $\mathcal{F}^{u'}, \mathcal{F}^{s'}$ は $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ とアイソトピックである。

REFERENCES

1. T. Barbot, *Flot d'Anosov sur les variétés graphées au sens de Waldhausen*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1451-1517.
2. Y. Carrière, *Flots riemanniens Structure Transverse de Feuilletages*, Astérisque **116** (1984), 31-52.
3. Y. Eliashberg and W. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series 13, Amer. Math. Soc. (1978).
4. S. Fenley, *Anosov flows in 3-manifolds*, Ann. of Math. (2) **139** (1994), 79-115.
5. É. Ghys, *Flots d'Anosov sur les 3-variétés fibrées en cercles*, Ergodic Theory Dynamical Systems **4** (1984), no. 1, 67-80.
6. É. Ghys, *Déformations de flots d'Anosov et de groupes fuchsien*, Ann. Inst. Fourier **42** (1992), 209-247.
7. É. Ghys, *Rigidité différentiable des groupes fuchsien*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **78** (1993), 163-185.
8. A. Haefliger, *Groupe d'holonomie et classifiants*, Structure Transverse de Feuilletages, Astérisque **116** (1984), 70-97.
9. D. Hardorp, *All compact orientable three dimensional manifolds admit total foliations*, Amer. Math. Soc. 1980.

10. S. Matsumoto and T. Tsuboi, *Transverse intersections of foliations in three-manifolds*, Preprint Univ. of Tokyo. UTMS 2000-10.
11. Y. Mitsumatsu, *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Ann. Inst. Fourier **45** (1995), 1407–1421.
12. T. Noda, *Projectively Anosov flows on T^3 with differentiable (un)stable foliations*, Preprint Univ. of Tokyo. UTMS (1999).
13. T. Noda and T. Tsuboi, *Regular projectively Anosov flows without compact leaves*, Preprint (1999).
14. I. Tamura and A. Sato, *On transverse foliations*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **54** (1981), 205–235.
15. W. Thurston, *Three-manifolds, Foliations and Circles, I*, e-Print archive, math/9712268.

〒 153-8914 目黒区駒場 3-8-1

E-mail address: tsuboi@ms.u-tokyo.ac.jp

Codimension one locally free actions of generalized affine groups

国際基督教大学 山川あい子
桐蔭横浜大学 土屋信雄

1 Introduction

G をリー群、 M を閉多様体とする。 G -作用 $\Phi : G \times M \rightarrow M$ のイソトロピー群がすべて離散であるとき、 Φ を局所自由 (locally free) な作用であるという。(本稿では、作用は C^∞ -級作用を意味するものとする。) 局所自由な作用 Φ は、 M 上にその軌道を葉とする葉層構造を誘導する。それを \mathcal{F}_Φ と記す。

G を特にべき零リー群としたとき、葉層構造論の観点から見た次の結果がある。

定理 (Hector-Ghys-Moriyama [H-G-M]) G を単連結べき零リー群とする。閉多様体 M が余次元 1 の局所自由 G -作用をもつとすると、次が成立する。

- (1) M は S^1 上のファイバー束
- (2) \mathcal{F}_Φ が非自明な leaf holonomy をもつ葉をもてば、その葉はコンパクトである。
- (3) \mathcal{F}_Φ の各葉の leaf holonomy が自明であるとき、葉はすべて微分同相でファイバー束 M のファイバーの正則被覆となる。

この結果から、上のようなリー群作用は、何種類かの「モデル」をコンパクトな葉に沿って貼り合わせたものと共役であることが従う ([H-G-M])。

べき零でない可解リー群 G のうち、もっとも簡単なものは、1次元実アフィン群

$$\text{Aff}^+(\mathbf{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid t > 0, x \in \mathbf{R} \right\}$$

であるが、 S^1 上の T^2 -束 M 上に、 \mathcal{F}_Φ の葉がすべて M で稠密で、かつ非自明な leaf holonomy をもつ葉が存在する局所自由な $\text{Aff}^+(\mathbf{R})$ -作用を構成することができる (例えば [C-LN] 参照)。それは次のように構成される:

$A \in SL(2, \mathbf{Z}), \text{Tr} A > 2$ とする。3次元のリー群 $H = \mathbf{R} \rtimes_\psi \mathbf{R}^2$ (ここに $\psi(t) = \exp(t \log A) \in GL(2, \mathbf{R})$) はコンパクト離散部分群 $\Gamma = \mathbf{Z} \rtimes_\psi \mathbf{Z}^2$ を含む (\rtimes については3節を参照して下さい)。 A の固有値 λ, λ^{-1} ($\lambda > 0$) に対応する固有ベクトル $v_1, v_2 \in \mathbf{R}^2$ をとる。 H の部分群 $G(i) := \mathbf{R} \rtimes_\psi (\mathbf{R}v_i)$ ($i = 1, 2$) は、 $G = \text{Aff}^+(\mathbf{R})$ と自然な同型写像 $\varphi_i : G \rightarrow G(i)$ により同型であり、 $M = H/\Gamma$ への G -作用

$$\Phi_i : G \times H/\Gamma \rightarrow H/\Gamma, (g, h\Gamma) \mapsto \varphi_i(g)h\Gamma$$

が定まる。 M はモノドロミー写像 $A : \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ により定まる S^1 上の T^2 -束であり、 Φ_i の定める葉層構造 \mathcal{F}_{Φ_i} は懸垂アノソフ流の不安定または安定葉層構造として知られ

ているものである。また \mathcal{F}_{Φ} の葉は $S^1 \times \mathbf{R}$ あるいは $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ となり、 $S^1 \times \mathbf{R}$ 型の葉は可算無限個存在し、それらは全て非自明な leaf holonomy をもつ。

これは、べき零でない可解リ一群 G の余次元 1, 局所自由作用 Φ は、 G がべき零の場合よりも複雑であることを示している。この例が、我々が可解リ一群の余次元 1, 局所自由作用を研究し始めた契機となった。

G を単連結可解リ一群、 N_G を G の極大連結べき零正規部分群とすると、 G/N_G は可換群であり、また $\dim N_G \geq (\dim G + \dim Z(G))/2$ となることが知られている ([O-V], 2 章、定理 5.2)。ここに $Z(G)$ は G の中心を表す。よって可解リ一群の作用を研究するにおいて、先ず N_G が可換であり、 G が G/N_G と N_G の半直積となる場合から始めるのは自然であろう。

このような背景のもとに、この講演では $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ ($m \leq n$) の余次元 1, 局所自由作用を考察していきたい。 $\text{Aff}^+(\mathbf{R})$ は $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ と表される。よって $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ は一般アファイン群ともいうべき可解リ一群である。2, 3 節ではそのような作用の rigidity について述べ、4 節では作用の分類問題を取り扱う。

2 等質作用と Ghys の結果

局所自由作用の典型的な例は等質作用である。 G をリ一群 H の閉部分群とする。 H がコンパクトな離散部分群 Γ をもつとき、 H の左移動より誘導される写像

$$G \times H/\Gamma \rightarrow H/\Gamma, \quad (g, h\Gamma) \mapsto gh\Gamma$$

は G のコンパクト多様体 $M = H/\Gamma$ への局所自由な作用となる。これを G の等質作用 (homogeneous action) とよぶ。ここで次のことに注意する。 H がコンパクト離散部分群をもつとき、 H はユニモジュラー群である。すなわち H のすべての元 h に対し $|\det Ad_h| = 1$ となる。このとき H の左不変な体積要素はまた右不変でもある。従って H の右不変な体積要素は H/Γ の体積要素を誘導し、それは等質作用で不変である。

E. Ghys は局所自由作用に更に体積要素を保つという条件を付加し、次の結果を得ている。

定理 (E. Ghys [G]) $G = \text{Aff}^+(\mathbf{R})$, M を 3 次元閉多様体とする。 $\Phi : G \times M \rightarrow M$ を C^r ($r \geq 2$)-級の局所自由な作用で、 M の C^0 -級の体積要素を保つものとする。このとき、 Φ は等質作用に C^{r-1} -共役である。

ただしここで、 M 上の G -作用 Φ と、 M' 上の G -作用 Φ' が C^s -共役

$$\Leftrightarrow \exists f : M \rightarrow M', C^s\text{-微分同相}, \exists \varphi : G \rightarrow G, \text{同型写像}, \text{ s.t. } f \circ \Phi = \Phi' \circ (\varphi \times f)$$

と定める。上の Ghys の定理の多様体 M は S^1 上の T^2 -束 (solvmanifold)、または $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ として与えられることがわかっている。

Ghys の研究と同様の方向でリ一群の余次元 1, 局所自由作用を調べたいいくつかの結果がある ([B-B] [B] [G-V])。我々もまた、作用が多様体の体積要素を保つという条件下で、余次元 1, 局所自由 $\mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ -作用の様子を調べる。

3 Rigidity に関する結果

半直積群 $\mathbf{R}^m \ltimes \mathbf{R}^n$ ($m \leq n$) の群構造は表現 $\psi: \mathbf{R}^m \rightarrow \text{Aut} \mathbf{R}^n = GL(n, \mathbf{R})$ によって決定される。(このとき、 ψ を明記して $\mathbf{R}^m \ltimes_{\psi} \mathbf{R}^n$ とも記す)。 \mathbf{R}^m の標準基底 $\{e_j \mid 1 \leq j \leq m\}$ をとると、 $n \times n$ 行列 $\{d\psi(e_j)\}$ は同時上三角化される。

$$d\psi(e_j) \sim \begin{pmatrix} \lambda_{1j} & * & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_{2j} & * & \cdots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \lambda_{nj} \end{pmatrix}$$

この対角成分からなる $n \times m$ -行列 $\Lambda_{\psi} = (\lambda_{ij}) = (\Lambda^1, \dots, \Lambda^m) = \begin{pmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \vdots \\ \Lambda_n \end{pmatrix}$ を G の構造行列とよぶことにする。ここに $\Lambda^j = (\lambda_{1j}, \lambda_{2j}, \dots, \lambda_{nj})^t$, $\Lambda_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \dots, \lambda_{im})$ とする。

必要なら m, n を取り替えることにより、 G の構造行列は次の条件を満たしていると仮定してよい。

- 1 $\{\Lambda^j \mid 1 \leq j \leq m\}$ は一次独立
- 2 $\Lambda_i \neq \mathbf{0}$ ($1 \leq i \leq n$)
- 3 $\Lambda_i \neq \Lambda_j$ ($i \neq j$)

この generic な条件の下に、次の非共鳴条件を考える。

条件 A: $\beta = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \notin \{a_i \text{Re} \Lambda_i, b_j \text{Re} \Lambda_j - \text{Re} \Lambda_k \mid 1 \leq a_i, b_j \leq 1, 1 \leq i, j, k \leq n\}$

条件 A のもとに次の結果を得た。

定理 1 $G = \mathbf{R}^m \ltimes_{\psi} \mathbf{R}^n$ ($0 < m \leq n$, $m+n > 2$) とし、 M を $(m+n+1)$ 次元閉多様体 (向き付け可能) とする。更に G の構造行列 Λ_{ψ} が条件 A を満たすとす。このとき作用 $\Phi: G \times M \rightarrow M$ が局所自由でかつ M の C^0 -級の体積要素を保つならば、 M は solvmanifold (特に T^m 上の T^{m+1} -束) となり、 Φ は等質作用に C^∞ -共役である。

(証明の方針)

(1) Φ が体積要素を保ち条件 A を満たすとき、 M 上に、任意の $g \in G$ に対して $T = \Delta(g)^{-1}T$ (ただし $\Delta(g) = \det Ad_g$) をみだし、 G -軌道たちに横断的なベクトル場 T が存在することを示す。

G の作用を $G_1 := \{(t, \mathbf{0}) \mid t \in \mathbf{R}^m\}$ に制限した \mathbf{R}^m -作用を考える。体積要素を保つという仮定と、 G についての条件 A から、この \mathbf{R}^m -作用は横断的に双曲的であることが分かる。このことから、 G -作用に関して同変であり、 G -軌道に横断的な M 上のベクトル場 T が一意的存在することが、双曲の流れに対する安定多様体の存在定理と類似の議論により証明できる。具体的にはつぎのように進む。

\mathbf{R}^n (resp. \mathbf{R}^m) のリー環の基底 $\{\frac{\partial}{\partial x_i} \mid 1 \leq i \leq n\}$ (resp. $\{\frac{\partial}{\partial x_j} \mid 1 \leq j \leq m\}$) に対応する G のリー環の基底を $\{X_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ (resp. $\{Y_j \mid 1 \leq j \leq m\}$) とする。 G -作用 Φ により $\{X_i, Y_j\}$ から誘導される M 上のベクトル場を $\{X_i^*, Y_j^*\}$ とすると、それらは $\{X_i, Y_j\}$ のものと同じ交換関係をみたしている。

M 上の非特異ベクトル場 Z で G -作用に各点で横断的なものを一つとる。 G -作用 Φ が体積要素を保つことから、 $g \in G$ に対して

$$(\Phi_g)_*(Z) \equiv \Delta(g)^{-1}Z \quad \text{mod } \{X_i^*, Y_j^*\}$$

である。特に $g = (t, \mathbf{0}) \in G_1 \subset G$ とすると、

$$(\Phi_{(t, \mathbf{0})})_*(Z) \equiv e^{-\beta \cdot t} Z \quad \text{mod } \{X_i^*, Y_j^*\}$$

が成り立つ。従って、 M 上の C^∞ -級関数 ϕ_t^k, ψ_t^k が存在して、 Z は

$$(\Phi_{(t, \mathbf{0})})_*(Z) \equiv e^{-\beta \cdot t} Z + \sum_{k=1}^m \phi_t^k Y_k^* + \sum_{k=1}^n \psi_t^k X_k^*$$

なる変換則を満たしている。そこで

$$T = Z + \sum_{k=1}^m F^k Y_k^* + \sum_{k=1}^n G^k X_k^* \quad F^k, G^k \in C^0(M)$$

とにおいて、ベクトル場 T が G -同変、すなわち $(\Phi_g)_*(T) = \Delta(g)^{-1}T$ になるものを探す。上述の変換則を用いると

$$(\Phi_{(t, \mathbf{0})})_*(T) \equiv e^{-\beta \cdot t} Z + \sum_{k=1}^m \phi_t^k Y_k^* + \sum_{k=1}^m F \circ \Phi_{(-t, \mathbf{0})} Y_k^* \quad \text{mod } \{X_i^*\}$$

となる。連続作用素 $U_t^k : C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ を

$$U_t^k(F) := e^{\beta \cdot t} (\phi_t^k + F \circ \Phi_{(-t, \mathbf{0})})$$

で定義すると、 $d(U_t^k(F), U_t^k(F')) = e^{\beta \cdot t} d(F, F')$ (d は $C^0(M)$ の最大値ノルム) であり、したがって $\beta \cdot t_0 < 0$ なる $t_0 \in \mathbf{R}^m$ に対しては作用素 $U_{t_0}^k$ はリプシッツなので、 $U_{t_0}^k$ の固定関数 $F_0^k \in C^0(M)$ が見つかる。

ところが任意の t, t' に対して $U_t^k, U_{t'}^k$ は可換なので、今見つかった F_0^k はすべての U_t^k に対する固定関数である。

$$T = Z + \sum_{k=1}^m F_0^k Y_k^* + \sum_{k=1}^n G^k X_k^*$$

とおくと、このベクトル場 T は

$$(\Phi_{(t, \mathbf{0})})_*(T) \equiv e^{-\beta \cdot t} (Z + \sum_{k=1}^m F_0^k Y_k^*) \quad \text{mod } \{X_i^*\}$$

を満たす。

$\{X_i^*\}$ について同様の議論により (今度はリプシッツ性が、ある $t_0 \in \mathbf{R}^m$ に対して成立するために条件 A が必要となる)、

$$(\Phi_{(t, \mathbf{0})})_*(T) = e^{-\beta \cdot t} T \quad \text{for } \forall t \in \mathbf{R}^m$$

となるベクトル場 T が見つかる。

ところが再び条件 A を用いると、 G の部分群 G_1 の作用で同変なベクトル場は実は G 全体の作用で同変であることが示される。

こうして G -同変な C^0 -級ベクトル場 T が見つかった。 G_1 の作用は横断的に双曲的なので、双曲微分同相の不変多様体の存在定理の証明を真似て、われわれの T は実は C^∞ -級であることが証明できる。

(2) \widetilde{M} はリー群の構造をもち、それは $G \times_{(\det Ad)^{-1}} \mathbf{R} = H$ と同型である。実際 H のリー環は $\{X_i^*, Y_j^*, T\}$ より生成される。これより Φ が G の H/Γ への等質作用と C^∞ -共役となることが導かれる。 (証明終)

上の証明中の H はコンパクト離散部分群 Γ をもつという保証はない。すなわち与えられた $G = \mathbf{R}^m \times_\psi \mathbf{R}^n$ ($m \leq n$) が等質作用をもつとは限らない。そこで次に $G = \mathbf{R}^m \times_\psi \mathbf{R}^n$ が等質作用をもつ条件を求めたい。

先ず、条件 A より弱い次の弱非共鳴条件を考える。

$$\text{条件 B: } \beta = \sum_{i=1}^n \Lambda_i \notin \{ \pm \Lambda_i, \Lambda_i - \Lambda_j \mid 1 \leq i, j \leq n \}$$

このとき条件 B の下で次の補題が得られる。

補題 1 G を含む単連結 $(m+n+1)$ -次元ユニモジュラー群 H は $G \times_{(\det Ad)^{-1}} \mathbf{R} \cong \mathbf{R}^m \times_\psi \mathbf{R}^{n+1}$ に同型である。ここに H の構造行列 Λ_ψ は $\begin{pmatrix} \Lambda_\psi \\ -\beta \end{pmatrix}$ で与えられる。

Γ を H の部分群とする。また $H_0 = [H, H]$ ($\Gamma_0 = [\Gamma, \Gamma]$), $H_1 = H/H_0$ ($\Gamma_1 = \Gamma/\Gamma_0$) とおく。

補題 2 Γ が H のコンパクト離散部分群

$\Leftrightarrow \Gamma_0, \Gamma_1$ がそれぞれ H_0, H_1 のコンパクト離散部分群

特に $\Gamma_0 \cong \mathbf{Z}^{n+1} \subset \mathbf{R}^{n+1} \cong H_0, \Gamma_1 \cong \mathbf{Z}^m \subset \mathbf{R}^m \cong H_1$.

補題 3 $\{A_j\} \in SL(n+1, \mathbf{Z})$ は互いに可換な対角化可能な整数行列とする。このとき各 A_j が A の \mathbf{Q} -多項式として表される整数行列 $A \in SL(n+1, \mathbf{Z})$ が存在する。

H がコンパクト離散部分群 Γ をもつとする。このとき補題 2 より、 Γ の生成元を基底として $\tilde{\psi}: H_1 \rightarrow \text{Aut } H_0$ を表すと $\tilde{\psi}(e_j) = A_j$ は整数行列として表される。また G の構造行列に大前提として与えた generic な性質よりこれらの行列は対角化可能である。このことと補題 1, 3 より次の定理が導かれる。定理中にある代数的整数 α_k は補題 3 の A の固有値に当たる。

定理 2 $G = \mathbf{R}^m \times_\psi \mathbf{R}^n$ ($m \leq n$) の構造行列 Λ_ψ が条件 B を満たすとする。このとき、 G が余次元 1、局所自由な等質作用をもつための必要十分条件は、ある行入れ替えの行列 K と実正則行列 $P \in GL(m, \mathbf{R})$ が存在し、 $K \begin{pmatrix} \Lambda_\psi \\ -\beta \end{pmatrix} P =: \Lambda$ が次の代数的条件 (1)-(3) を満たすことである。

(1) Λ は d -個の $u_k \times m$ -小行列 $\Lambda(k)$ に分解される:

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda(1) \\ \vdots \\ \Lambda(d) \end{pmatrix}, \quad \sum_{k=1}^d u_k = n+1$$

(2) 各 k について、 $\Lambda(k) = (\lambda_{ij}(k))$ とおく。このとき

\exists 代数的整数 α_k (次数 u_k) s.t. 各 $\exp(\pm \lambda_{1j}(k)) \in \mathbf{Q}(\alpha_k)$ かつ代数的整数

(3) $\sigma_k^{(1)} = \text{id}, \sigma_k^{(2)}, \dots, \sigma_k^{(u_k)}$ を $\mathbf{Q}(\alpha_k)$ の共役写像とする。このとき、

$$\exp(\lambda_{ij}(k)) = \sigma_k^{(i)}(\exp(\lambda_{1j}(k))) \in \mathbf{Q}(\sigma_k^{(i)}(\alpha_k)).$$

定理 2 より、 $m < n$ のとき、余次元 1 の等質作用を持たない $G = \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^n$ は条件 B を満たすリー群の中である意味で generic であることがわかる。

それに比して $m = n$ のときを考えると、 G は条件 A を満たす。よってまた条件 B も満たし、定理 1, 2 より次の系を得る。ここに $G = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ は $\text{Aff}^+(\mathbf{R})^l \times \widetilde{\text{Aff}}(\mathbf{C})^r$ ($n = l + 2r$) に同型となる。 $\widetilde{\text{Aff}}(\mathbf{C})$ は複素アフィン群 $\text{Aff}(\mathbf{C})$ の普遍被覆群をあらわす。

系 $G = \text{Aff}^+(\mathbf{R})^l \times \widetilde{\text{Aff}}(\mathbf{C})^r$ ($n = l + 2r$) とすると、

- (1) G は余次元 1, 局所自由な等質作用をもつ。
- (2) 体積要素を保つ余次元 1, 局所自由 G -作用は等質作用に C^∞ -共役。

4 $\text{Aff}^+(\mathbf{R})^n$ -作用の分類

$m = n$ で特に $G = \mathbf{R}^n \times_\psi \mathbf{R}^n$ の構造行列 Λ_ψ が実行列のとき、 G は $\text{Aff}^+(\mathbf{R})^n$ と同型となる。以下の節では余次元 1, 局所自由な $\text{Aff}^+(\mathbf{R})^n$ -等質作用の分類問題を考えることにする。

まず補題 1 より、 $G = \text{Aff}^+(\mathbf{R})^n$ を含む単連結なユニモジュラーリー群 H は $\tilde{G} = G \times_{(\det Ad)^{-1}} \mathbf{R}$ に同型となる。 \tilde{G} は行列群としては次で書き表される。

$$\tilde{G} = \left\{ \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x_1 \\ 0 & t_2 & 0 & \cdots & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & \cdot & 0 & \cdot \\ 0 & \cdots & 0 & t_n & 0 & x_n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & t_{n+1} & x_{n+1} \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} t_i > 0 \ (1 \leq i \leq n+1), \\ \prod_{i=1}^{n+1} t_i = 1, \\ x_j \in \mathbf{R} \ (1 \leq j \leq n+1) \end{array} \right\}.$$

4.1 H の特徴付けと等質 G -作用の代数的共役

$[G, G] = G_0 (\cong \mathbf{R}^n), G/G_0 = G_1 (\cong \mathbf{R}^n), [H, H] = H_0 (\cong \mathbf{R}^{n+1}), H/H_0 = H_1 (\cong \mathbf{R}^n)$ とおくと H (resp. G) は半直積群 $H_1 \times_\psi H_0$ (resp. $G_1 \times_\psi G_0$) と表され、それは次の 2 つの性質で特徴づけられる。

- (1) $\psi : H_1$ (resp. G_1) \rightarrow $\text{Aut}H_0$ (resp. $\text{Aut}G_0$) は単射
 (2) H_0 (resp. G_0) は H_1 (resp. G_1)-不変な 1 次元部分空間の直和に分解する:

$$H_0 \cong V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_{n+1} \quad (\text{resp. } G_0 \cong V'_1 \oplus V'_2 \oplus \cdots \oplus V'_n)$$

これより $W(i) = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus \check{V}_i \oplus \cdots \oplus V_{n+1}$ ($1 \leq i \leq n+1$), $G(i) := H_1 \times_{\psi} W(i)$ とおくと次がわかる。

補題 4 G に同型な H の部分群は一つの $G(i)$ に同型である。

H のコンパクト離散部分群 Γ と Γ' が同型であるとき、その同型写像は H の同型写像を誘導することがわかる。このことと上の補題より、 G の余次元 1、局所自由、等質 $\text{Aff}^+(\mathbf{R})^n$ -作用の分類は Γ を固定し、中への同型写像 $\rho_i : G \xrightarrow{\sim} G(i) \subset H$ より定まる $(n+1)$ 個の等質作用

$$\Phi_i : G \times H/\Gamma \rightarrow H/\Gamma, \quad \Phi_i(g, h\Gamma) = \rho_i(g)h\Gamma \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

の C^∞ -共役による分類問題に帰着する。

4.2 代数的共役と C^∞ -共役

$\text{Aut} \Gamma \ni \varphi$ より誘導される $\text{Aut} H$ の元を同記号 φ で表す。そして

$$\begin{aligned} & \Phi_i \text{ と } \Phi_j \text{ が代数的共役} \\ \Leftrightarrow & \exists \varphi \in \text{Aut} \Gamma, \exists \rho \in \text{Aut} G \text{ s.t. } \varphi \circ \Phi_i = \Phi_j \circ (\rho \times \varphi) \end{aligned}$$

と定める。このとき先ず次が証明される。

命題 1 Φ_i と Φ_j が代数的共役 \Leftrightarrow Φ_i と Φ_j が C^∞ -共役

よって $\{\Phi_i\}$ の C^∞ -共役による分類は代数的共役による分類に帰着する。
 そこで次に $\text{Aut} \Gamma$ を調べる。

4.3 $H = \mathbf{R}^n \times_{\psi} \mathbf{R}^{n+1}$ のコンパクト離散部分群 Γ に付随した代数的数体

今までと同様に $\Gamma < H = H_1 \times_{\psi} H_0$, $[\Gamma, \Gamma] = \Gamma_0$, $\Gamma/\Gamma_0 = \Gamma_1 \subset H_1$ とおく。 Γ は必ずしも半直積群としては与えられないが、写像

$$\eta : \Gamma_1 \rightarrow H_0, \quad ((t, \eta(t)) \in \Gamma \quad (\forall t \in \Gamma_1), \eta(1) = 0)$$

を一つ選ぶことにより、 Γ 及びその群演算は次で表される。

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{ (t, \eta(t) + \mathbf{x}) \mid t \in \Gamma_1, \mathbf{x} \in \Gamma_0 \} \subset H_1 \times H_0 = H \\ (t, \eta(t) + \mathbf{x})(s, \eta(s) + \mathbf{y}) &= (ts, \eta(ts) + \mathbf{x} + \psi(t)(\mathbf{y}) + \delta\eta(t, s)) \end{aligned}$$

ここに $\delta\eta$ は、 $\delta\eta : \Gamma_1 \times \Gamma_1 \rightarrow H_0$, $\delta\eta(t, s) = \eta(t) - \eta(ts) + \psi(t)(\eta(s))$ 。

このように Γ_0, Γ_1 と写像 η によって定まる部分群 Γ を $Gr(\Gamma_0, \Gamma_1, \eta)$ と記すことにする。

さて前に見たように、 $\psi(\Gamma_1) \subset \text{Aut}(\Gamma_0) \cong GL(n+1, \mathbf{Z})$ と考えられる。また $H_0 \cong \bigoplus_{i=1}^{n+1} V_i$ (H_1 -空間としての分解) であった。そこで $\alpha_i(t)$ ($t \in \Gamma_1$) で $\psi(t)|V_i$ の固有値を表すと、 $\alpha_i(t)$ は代数的整数である。また $\{\alpha_i(t_0) \mid 1 \leq i \leq n+1\}$ がすべて異なる $t_0 \in \Gamma_1$ が存在 (これは generic) する。そのような t_0 を一つ固定して

$$\alpha_i := \alpha_i(t_0), \quad \alpha = \alpha_1, \quad A := \psi(t_0) \in GL(n+1, \mathbf{Z})$$

とおき、 α を付加した \mathbf{Q} 上の代数的数体 $\mathbf{Q}(\alpha)$ を考える。 $\mathbf{Q}(\alpha)$ は t_0 の選び方によらない。そこでこの $\mathbf{Q}(\alpha)$ を Γ に付随した代数的数体と呼ぶことにする。明らかに $\alpha_1 = \alpha, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ は α の共役元である。更に次の記号を使う。

$$\mathbf{Q}(\alpha) \supset \mathcal{O}(\alpha) = \text{代数的整数の環} \supset \mathcal{U}(\alpha) = \text{単数群} \supset \mathcal{U}(\alpha)^+ = \{\xi \in \mathcal{U}(\alpha) \mid \text{Norm}(\xi) = 1\}$$

4.4 $\text{Aut}\Gamma, \text{Aut}H$ と $\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$

H は半直積群 $H_1 \ltimes_{\psi} H_0$ ($H_1 \cong \mathbf{R}^n, H_0 \cong \mathbf{R}^{n+1}$) であった。よって $\varphi \in \text{Aut}H$ は次の Compatibility condition を満たす $\varphi_0 \in \text{Aut}H_0, \varphi_1 \in \text{Aut}H_1$ を誘導する:

$$\psi(\varphi_1(t))\varphi_0(x) = \varphi_0(\psi(t)x) \quad (\forall t \in H_1, x \in H_0)$$

同じく、 $\text{Aut}\Gamma \ni \varphi$ も compatibility condition を満たす $\varphi_0 \in \text{Aut}\Gamma_0, \varphi_1 \in \text{Aut}\Gamma_1$ を誘導する。

さて、ここで $v \in \Gamma_0$ で $\{v, Av, \dots, A^n v\} \subset \Gamma_0$ が \mathbf{Z} 上一次独立となるものを選ぶ。このような v は Γ_0 で generic である。(A は 4.3 節の行列 $\psi(t_0)$)。このとき次の補題が成立する。

補題 5 $\rho: \mathbf{Z}[\alpha] \rightarrow \Gamma_0, \rho(g(\alpha)) = g(A)(v)$ は単射準同型で、それは同型 $\rho: \mathbf{Q}(\alpha) \xrightarrow{\sim} \Gamma_0 \otimes \mathbf{Q} \cong \mathbf{Q}^{n+1}$ に拡張する。

補題 3 と同様の議論により、 $\Gamma_1 \ni \forall t$ について $\psi(t)$ は $\psi(t_0) = A$ の \mathbf{Q} -多項式として表される。これよりまた次の補題を得る。

補題 6 $\Gamma_1 \ni t$ に対し、 $\psi(t) = g(A)$ ($g(\alpha) \in \mathbf{Q}(\alpha)$) であるとき、 $\nu: \Gamma_1 \rightarrow \mathbf{Q}(\alpha)^\times$ を $\nu(t) = g(\alpha)$ と定めると、 ν は単射準同型で、 $\text{Im } \nu \subset \mathcal{U}(\alpha)^+$ となる。更に、 $\mu \circ \nu = 1$ となる準同型 $\mu: \mathcal{U}(\alpha)^+ \rightarrow H_1$ が存在する。

上の補題より、 $\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ から $\text{Aut}H$ への次の写像 Ω を構成することができる:

$\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ に対し、 $\Omega(\sigma)_0 := \rho \circ \sigma \circ \rho^{-1}, \Omega(\sigma)_1 := \mu \circ \sigma \circ \nu$ と定めると、それらはそれぞれ $\text{Aut}H_0, \text{Aut}H_1$ の元を誘導する。それらを同記号で記すと $(\Omega(\sigma)_0, \Omega(\sigma)_1)$ は H に関する Compatibility condition を満たす、すなわち H の自己同型写像となる。

補題 7 ガロア群 $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})/\mathbf{Q})$ が可換とする。このとき

$$\Omega : \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}) \rightarrow \text{Aut}H, \sigma \mapsto (\Omega(\sigma)_0, \Omega(\sigma)_1)$$

は $\Omega(\sigma)_0(V_i) = V_{\sigma^{-1}(i)}$ をみたす。ここに $\{V_i\}$ は H_0 の 1 次元の H_1 -不変空間で $H_0 = \bigoplus_{i=1}^{n+1} V_i$ である。更に $\Omega(\sigma)(\text{Gr}(\Gamma_0, \Gamma_1, \eta)) = \text{Gr}(\Omega(\sigma)_0(\Gamma_0), \Omega(\sigma)_1(\Gamma_1), \Omega(\sigma)_0 \circ \eta)$ 。

また、写像 $\Psi : \text{Aut}\Gamma \rightarrow \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ が次で構成される:

Γ の同型写像 φ に対し、 $\varphi_i \in \text{Aut}(\Gamma_i)$ ($i = 0, 1$) を考える。 $\varphi_0(\mathbf{v}) \in \Gamma_0$ は、 A と可換なある正則整数行列 B を用いて $\varphi_0(\mathbf{v}) = B\mathbf{v}$ と書ける。 $\varphi_0 \in \text{Aut}(\Gamma_0)$ を $\Gamma_0 \otimes \mathbf{Q} \rightarrow \Gamma_0 \otimes \mathbf{Q}$ の線形同型に拡張し、同じ記号で表す。 $\varphi'_0 := \varphi_0 \circ B^{-1} \in \text{Aut}(\Gamma_0 \otimes \mathbf{Q})$ とおくと、対 (φ'_0, φ_1) もまた compatibility condition を満たし、 $\rho^{-1} \circ \varphi'_0 \circ \rho : \mathbf{Q}(\alpha) \rightarrow \mathbf{Q}(\alpha)$ は $\mathbf{Q}(\alpha)$ の環としての同型写像となることがわかる。 $\Psi(\varphi) := \rho^{-1} \circ \varphi'_0 \circ \rho \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ と定める。

写像 Ψ の像は $\text{Im}(\Psi) = \{\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}) \mid \Omega(\sigma)(\Gamma) = \Gamma\}$ と表すことができ、 $\text{Im}(\Psi)$ の上で $\Psi \circ \Omega = id$ である。

4.5 分類に関する結果

4.1 ~ 4.4 の考察から、余次元 1, 局所自由な $G = \text{Aff}^+(\mathbf{R})^n$ -作用の分類に関し次の結果を得た。各記号は今までと同じものとする。

命題 2 Φ_i と Φ_j が代数的共役ならば、 $\alpha_j \in \mathbf{Q}(\alpha_i)$

これは H_0 が 1 次元 H_1 -不変部分空間の直和に分解されることと、 Φ_i, Φ_j の定義及び Φ_i, Φ_j を代数的共役とする $\text{Aut}\Gamma$ の元から誘導される H の自己同型写像 φ が Compatibility condition をもつことから導かれる。

系 $\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ の位数を d とすると、 $\#\{\{\Phi_i\}/\text{代数的共役}\} \geq \frac{n+1}{d}$

定理 3 $\text{Gal}(\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n+1})/\mathbf{Q})$ が可換とすると次が成立する。

(1) $\alpha_i, \alpha_j \in \mathbf{Q}(\alpha)$ とする。このとき

Φ_i と Φ_j が代数的共役

$\Leftrightarrow \sigma(\alpha_i) = \alpha_j$ なる $\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ は $\Omega(\sigma)(\Gamma) = \Gamma$ を満たす。

(2) $|\Gamma/\Gamma'|$ が有限なる Γ の部分群 Γ' が存在し、 $M' = H/\Gamma'$ 上の等質 G -作用の共役類はちょうど $\frac{n+1}{d}$ 個となる。ここに d は $\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ の位数。

(1) の証明: Φ_i と Φ_j が代数的共役のとき、 H の自己同型写像 φ で $\varphi(\Gamma) = \Gamma, \varphi(G(j)) = G(i)$ を満たすものがある。 $\Psi(\varphi) = \sigma \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ とすると、 $\sigma(\alpha_i) = \alpha_j$ であり、 $\Omega(\sigma)(\Gamma) = \Omega \circ \Psi(\varphi)(\Gamma) = \varphi(\Gamma) = \Gamma$ である。

逆に $\Omega(\sigma)(\Gamma) = \Gamma$ のとき、 $\varphi := \Omega(\sigma) \in \text{Aut}H$ は $\varphi(\Gamma) = \Gamma, \varphi(G(j)) = G(i)$ を満たす。

(2) の証明 : $\Gamma'_i = \bigcap_{\sigma \in \text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})} \Omega(\sigma)_i(\Gamma_i)$ ($i = 0, 1$), $\Gamma' := Gr(\Gamma'_0, \Gamma'_1, \eta | \Gamma'_1)$ とすると、 Γ' は Γ の指数有限の部分群であり、 Γ' について写像 Ω を考えると、 $\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}) \ni \forall \sigma$ について $\Omega(\sigma)(\Gamma') = \Gamma'$ が成立する。従って(1)より、 H/Γ' 上の G -作用については、 $\text{Aut}(\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q})$ の元で移りあう α_i と α_j に対応する Φ_i と Φ_j は共役であることが従う。 (証明終)

References

- [B] Belliard, M., Actions de groupes de Lie sur les variétés compactes, Thesis, Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis, 1995.
- [B-B] Belliard, M. and Birembaux, O., Actions localement libres de groupes résolubles. *Ann. Inst. Fourier*, **44** (1994), 1519-1537.
- [C-LN] Camacho, C. and Lins Neto, A., *Geometric Theory of Foliations*, Birkhäuser, 1985.
- [Gh] Ghys, E., Actions localement libres du groupe affine, *Invent. Math.*, **82** (1985), 479-526.
- [G-V] Ghys, E. and Verjovsky, A., Locally free holomorphic actions of the complex affine group. Proceedings of Geometric Study of Foliations, World Scientific, Singapore, 1994. 201-217.
- [H-G-M] Hector, G., Ghys, E. and Moriyama, Y., On codimension one nilfoliations and a theorem of Malcev, *Topology*, **28** (1989), 197-210.
- [O-V] Onishchik, A. L. and Vinberg, E. B. (Eds.), *Lie groups and Lie algebras III*, Encyclopaedia of Math. Sci., **41**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1994.
- [Y] Yamakawa, A., Equivalence classes of codimension one locally free actions of n -product of $\text{Aff}^+(\mathbf{R})$, *ICU Math. Preprint series*, **2** (1998).
- [Y-T] Yamakawa, A. and Tsuchiya N., Codimension one locally free actions of some solvable groups, preprint (1999).
- [T-Y] Tsuchiya N. and Yamakawa A., Equivalence classes of codimension one locally free actions of n -product of $\text{Aff}^+(\mathbf{R})$, in preparation.

PRESENTATION OF MAPPING CLASS GROUPS OF SURFACES

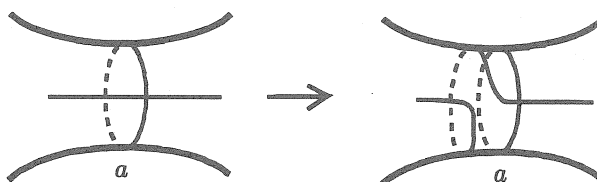
廣瀬 進 (佐賀大学理工学部)

2000年5月30日

1. 序

n 個境界のある種数 g の向き付け可能曲面を $\Sigma_{g,n}$, この上の向きを保ち境界上恒等写像となっている可微分同相写像のなす集合を $\text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, \text{rel } \partial)$ と書くことにします。この集合は写像の合成を演算として群とみなすことが出来ます(但し、この群は $\Sigma_{g,n}$ に対して左から作用するものとします。すなわち $\phi_1\phi_2$ と書いたら、まず ϕ_2 を作用させ、その後に ϕ_1 を作用させることを意味します)。この群について、互いにイソトピックなものを同一視して出来る集合を考え、そこに元の群の演算から誘導される演算を定めることにより離散的な群が得られますが、これを写像類群と呼び、 $M_{g,n}$ と書くことにします。すなわち、 $M_{g,n} = \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, \text{rel } \partial))$ と定めます。

この群 $M_{g,n}$ の元としては $\Sigma_{g,n}$ 上の単純閉曲線 a に沿った Dehn twist があります。これは Figure 1 の様にして定められる写像のイソトピー類のことです。 $M_{g,0}$ が有限個の Dehn twist で生成されることが Dehn [4] や Lickorish [15] により示され ($n \geq 1$ の場合 $M_{g,n}$ が有限生成であることは [1] で示されています)、さらに有限表示できること(すなわち、関係式も高々有限個で良いこと)が、McCool [20] によって示されました。そこで、実際に、具体的な表示を求めることが試みられました。まず、Hatcher と Thurston [6] により、cut system のなす複体が定義され、その複体の単連結性が Cerf 理論を用いることにより示されました。(なお、現在では、Cerf 理論を用いない単連結性の証明が Wajnryb [23] によりなされています。) この複体に



Dehn twist along a

FIGURE 1

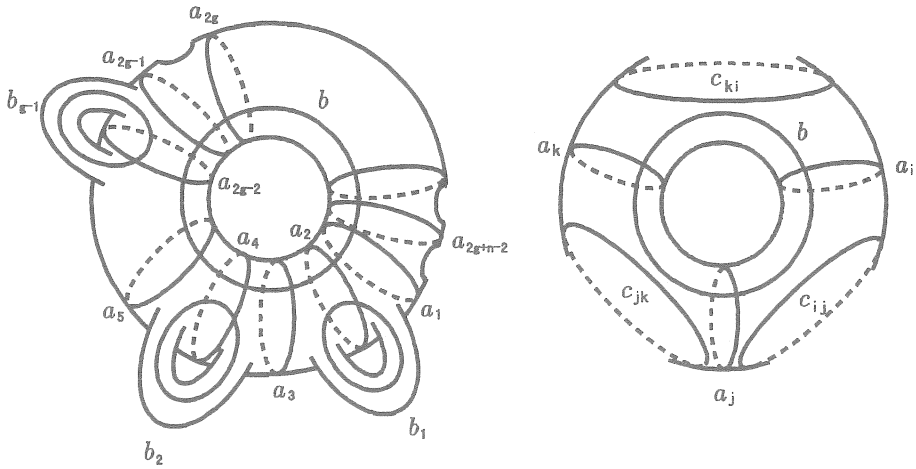


FIGURE 2

は写像類群が自然に作用しており、その (いづらか modify したもの [7], [21] への) 作用を調べることを通じて、Wajnryb [21] により $M_{g,0}$ と $M_{g,1}$ の simple な表示が得られました。この表示を出発点として、松本真氏 [18] により Artin 群と関連付けられた表示が求められ、また、Sylvain Gervais [5] により symmetric な表示が求められています。ここで Gervais による $M_{g,n}$ (n は、 $0, 1$ 以外でもよい) の symmetric な表示を述べておきます。

曲面 $\Sigma_{g,n}$ 上に Figure 2 で与えられる単純閉曲線を考え、各々に沿った Dehn twist を対応する曲線と同じ記号で表わすことにします。例えば、 a_1 に沿った Dehn twist を a_1 という記号で表わすことにします。(ただし、Figure 2 の右の図において、 i, j, k は、 $i = j = k$ とならず、 $\text{mod } 2g + n - 2$ で $i \leq j \leq k$ となるものとし、このような i, j, k のことを good triple と呼びます。)

Theorem 1.1. [5] $g \leq 1, n \leq 0$ において、 $\mathcal{M}_{g,n}$ は、 $b, b_1, \dots, b_{g-1}, a_1, \dots, a_{2g+n-2}$, 及び $c_{i,j}$ で生成され、関係式は次の通り：

- (A) "HANDLES": $c_{2i,2i+1} = c_{2i-1,2i}$ 但し、 $1 \leq i \leq g-1$,
- (B) "BRAIDS": x, y を生成元のうちいずれかとするとき、

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{対応する circle が交差しないとき、} & xy = yx \\ \text{対応する circle が一点で交差するとき、} & xyx = yxy \end{array} \right.$$

(C) "STARS" : 各 *good triple* i, j, k について、

$$c_{ij}c_{jk}c_{ki} = (a_i a_j a_k b)^3 \text{ 但し、} c_{ii} = 1 \text{ とする。}$$

一方、Harvey [9] により、写像類群が自然に作用する空間として complex of curves というものが定義されました。Harer [8] によりこの複体の高次の連結性が示され、さらに、この複体を用いることによって写像類群のホモロジーの種数に関する安定性が示されました。今回の講演では、この complex of curves を用いて写像類群の表示を求める方法について解説します。

2. COMPLEX OF CURVES の定義及び写像類群の作用

以下、 $\Sigma_{g,n}$ 上の単純閉曲線が 0-ホモトピックでないとき *essential* と、puncture や境界とホモトピックであるとき ∂ -parallel と呼ぶことにします。*Complex of curves* $Z(\Sigma_{g,n})$ とは、 $\Sigma_{g,n}$ 上の essential であり ∂ -parallel ではない単純閉曲線のイソトピー類を 0-単体 (頂点) とし、互いに交わらずアイントピックでもない閉曲線たちで代表される $k+1$ 個の頂点に対して k -単体を張ることによって構成される単体的複体です。この単体的複体は、多様体ではなく、局所有限ですらないのですが、次のことが Harer によって示されています。

Theorem 2.1. [8, Thm 1.2] $Z(\Sigma_{g,n})$ は

$$\begin{cases} n \geq 2 \text{ の時、} 2g + n - 5 \text{ 連結} \\ n = 1 \text{ の時、} 2g - 3 \text{ 連結} \\ n = 0 \text{ の時、} 2g - 3 \text{ 連結} \end{cases}$$

また、 $\mathcal{M}_{g,n}$ の元 ϕ に対し、 $Z(\Sigma_{g,n})$ の各 k -単体 $\langle C_0, C_1, \dots, C_k \rangle$ に、 k -単体 $\langle \phi(C_0), \phi(C_1), \dots, \phi(C_k) \rangle$ を対応させる単体的写像を与えることにより、 $\mathcal{M}_{g,n}$ の $Z(\Sigma_{g,n})$ への単体的な作用が定まります。この作用の軌道空間 $Z(\Sigma_{g,n})/\mathcal{M}_{g,n}$ のある種の「基本群」の表示を求めれば、これが $\mathcal{M}_{g,n}$ の表示を与えているのですが、この軌道空間に現れる各次元の単体の個数は、 g や n の値に応じて大幅に変化します。そこで、 $Z(\Sigma_{g,n})$ の部分複体として、曲面を分離しない曲線族 (すなわち、曲線族の補集合が連結な曲面となっているもの) のイソトピー類のみを単体とするもの $X(\Sigma_{g,n})$ を考えると、 $X(\Sigma_{g,n})/\mathcal{M}_{g,n}$ の cell は各次元毎に一つになります。実際、 $\{X(\Sigma_{g,n}) \text{ の } 2 \text{ 単体}\}/\mathcal{M}_{g,n}$ 、 $\{X(\Sigma_{g,n}) \text{ の } 1 \text{ 単体}\}/\mathcal{M}_{g,n}$ 、 $\{X(\Sigma_{g,n}) \text{ の } 0 \text{ 単体}\}/\mathcal{M}_{g,n}$ は、それぞれ $\langle c_{2g-2, 2g-1}, a_{2g-2}, a_{2g-4} \rangle$ 、 $\langle c_{2g-2, 2g-1}, a_{2g-2} \rangle$ 及び、 $\langle c_{2g-2, 2g-1} \rangle$ で代表されます (曲線の記法は Figure 2 を参照して下さい)。さらに次の事実が知られています。

Theorem 2.2. [8, Theorem 1.1] $X(\Sigma_{g,n})$ は $g-2$ 連結。

特に種数が3以上の場合、 $X(\Sigma_{g,n})$ は単連結となります。以下では、 $X(\Sigma_{g,n})/\mathcal{M}_{g,n}$ のある種の「基本群」の計算方法について述べます。

3. 計算方法

以下では、記号が煩雑になることを避けるために、 $v_0 = c_{2g-2,2g-1}$ 、 $v_1 = a_{2g-2}$ 、 $v_2 = a_{2g-4}$ と略して書き、さらに、 $e_0 = \langle v_0, v_1 \rangle$ 、 $f_0 = \langle v_0, v_2, v_3 \rangle$ と書くことにします。また、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} = \{\phi \in \mathcal{M}_{g,n} \mid \phi(v_0) = v_0\}$ (v_0 の isotropy subgroup)、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{e_0} = \{\phi \in \mathcal{M}_{g,n} \mid \phi(e_0) = e_0\}$ (e_0 の isotropy subgroup) と書くことにします。

一般に、群 G が単連結な CW 複体に作用しており、頂点の isotropy subgroup の表示や、辺の isotropy subgroup の生成元が知られているときに群 G の表示を求める方法が知られており ([3] あるいは [14] 参照)、ここでもその方法を適用します。まず、 $t_1 = b_{g-1}c_{2g-2,2g-1}a_{2g-2}b_{g-1}$ なる元は、 e_0 の二つの頂点を入れ替えるものであること、すなわち、 $e_0 = \langle v_0, t_1(v_0) \rangle$ となっていることに注意しておきます。また、 t_1 で生成される無限巡回群を $\langle t_1 \rangle$ と書くことにします。すると、 $\mathcal{M}_{g,n}$ は、自由積 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} * \langle t_1 \rangle$ にさらに次の3種類の関係式 (Y1) (Y2) (Y3) を加えたものと同型になることがわかります。

(Y1)

$$\begin{aligned} t_1^2 &= t_1^2 \text{ の } (\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} \text{ の元としての表示} \\ &= (a_{2g-2})^{-2}(c_{2g-2,2g-1})^{-2}a_{2g-3}a_{2g-1} \end{aligned}$$

(Y2) $(\mathcal{M}_{g,n})_{e_0}$ の各生成元 s について、

$$\begin{aligned} t_1(s \text{ の } (\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} \text{ の元としての表示})t_1^{-1} \\ = t_1s(t_1)^{-1} \text{ の } (\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} \text{ の元としての表示} \end{aligned}$$

(Y3) まず、 $X(\Sigma_{g,n})$ 上の閉曲線 ∂f_0 に対して、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} * \langle t_1 \rangle$ の元 W_{f_0} を次の様にして定めます。閉曲線 ∂f_0 は、3つの頂点 v_0, v_1, v_2 と3つの辺 $e_0 = \langle v_0, v_1 \rangle = \langle v_0, t_1(v_0) \rangle$ 、 $e_1 = \langle v_1, v_2 \rangle$ 、 $e_2 = \langle v_2, v_0 \rangle$ からなっています。 $v_1 = t_1(v_0)$ ですから、 $(t_1)^{-1}(e_1)$ は v_0 から伸びる辺です。そこで、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0}$ の元 h_1 で $h_1(e_0) = (t_1)^{-1}(e_1)$ を満たすものが存在し、 $e_1 = t_1h_1(e_0) = \langle t_1h_1(v_0), t_1h_1t_1(v_0) \rangle$ とみなすことができます。 $v_2 = t_1h_1t_1(v_0)$ ですから、 $(t_1h_1t_1)^{-1}(e_2)$ は v_0 から伸びる辺です。そこで、

$(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0}$ の元 h_2 で $h_2(e_0) = (t_1 h_1 t_1)^{-1}(e_2)$ を満たすものが存在し、 $e_2 = t_1 h_1 t_1 h_2(e_0)$ 従って $v_0 = t_1 h_1 t_1 h_2 t_1(v_0)$ とみなすことができ、 $W_{f_0} = t_1 h_1 t_1 h_2 t_1$ と定めます。この元 W_{f_0} は構成方法からわかるように v_0 を不変とするので、関係式としては、

$$W_{f_0} = W_{f_0} \text{ の } (\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} \text{ の元としての表示}$$

が得られます。ここで、 $t_2 = b a_{2g-2} a_{2g-4} b$ とすると $h_1 = h_2 = t_2$ として上の状況は満たされています。さらに、 $t_1 t_2 t_1 t_2 t_1 = t_1^2 t_2 t_1^2$ が確認でき $t_1^2 \in (\mathcal{M}_{g,n})_{v_0}$ であることから、これは上の関係式を与える式です。両辺を左右から t_1 で割って、ここから出る関係式は

$$t_2 t_1 t_2 = t_1 t_2 t_1$$

である事が分かります。

次に問題となるのは、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0}$ の表示を求めることです。説明の都合上、幾つか記号を用意します。 A, B を $\Sigma_{g,n}$ の部分集合としたとき、 $\text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, A, \text{rel } B) = \{\phi \in \text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}) \mid \phi(A) = A, \phi|_B = \text{id}_B\}$ と書くことにします。この記号を用いると、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} = \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, c_{2g-2, 2g-1}, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n}))$ と表わされます。また、 $\Sigma'_{g,n}$ で $\Sigma_{g,n}$ を $c_{2g-2, 2g-1}$ で切つて得られる曲面を、切り口として現れる境界の連結成分を、 E_1, E_2 と表わすことにします。すると次の群の短完全系列が得られます。

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma'_{g,n}, \text{rel } \partial\Sigma'_{g,n})) &\xrightarrow{\beta} \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma'_{g,n}, E_1 \cup E_2, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n})) \\ &\xrightarrow{\alpha} \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

ただし、 \mathbb{Z}_2 は E_1 と E_2 の入れ替えのなす置換群で、 α は $\pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma'_{g,n}, E_1 \cup E_2, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n}))$ を E_1 と E_2 の上に制限することで現れる自然な全射を、 β は包含写像を表わしています。ここで、 $r_{g-1} = \{(c_{2g-3, 2g-2})^2 b_{g-1}\}^2$ は $c_{2g-2, 2g-1}$ を不変としていることから、 r_{g-1} は $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0}$ の元であり、さらに、 $\pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma'_{g,n}, E_1 \cup E_2, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n}))$ の元になっているとみなすことができ、この時、 $\alpha(r_{g-1}) = (E_1 \text{ と } E_2 \text{ の入れ替え})$ である事に注意しておきます。また、

$$\begin{aligned} \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, c_{2g-2, 2g-1}, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n})) \\ \cong \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma'_{g,n}, E_1 \cup E_2, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n})) / c_{2g-2, 2g-1} = c_{2g-3, 2g-2}, \end{aligned}$$

であることや、

$$\pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma'_{g,n}, \text{rel } \partial\Sigma'_{g,n})) \cong \mathcal{M}_{g-1, n+2}.$$

であることも直ちに分かります。これらの事実に注意すると、 $(\mathcal{M}_{g,n})_{v_0} = \pi_0(\text{Diff}^+(\Sigma_{g,n}, c_{2g-2, 2g-1}, \text{rel } \partial\Sigma_{g,n}))$ は、自由積 $\mathcal{M}_{g-1, n+2} * \langle r_{g-1} \rangle$ に次の関係式 (E1)、(E2)、(E3) を加えたものであることがわかります：

(E1) $c_{2g-2,2g-1} = c_{2g-3,2g-2}$

(E2) $\mathcal{M}_{g-1,n+2}$ の各生成元 s に対し、

$$r_{g-1} s (r_{g-1})^{-1} = r_{g-1} s (r_{g-1})^{-1} \text{ の } \mathcal{M}_{g-1,n+2} \text{ の元としての表示}$$

(E3) $r_{g-1}^2 = c_{2g-3,2g-1}$

以上をまとめると、 $X(\Sigma_{g,n})$ への作用を調べることにより、

$$\mathcal{M}_{g,n} \cong \mathcal{M}_{g-1,n+2} * \langle t_1 \rangle * \langle r_{g-1} \rangle / (Y1), (Y2), (Y3), (E1), (E2), (E3)$$

であることが示されました。

4. THEOREM 1.1 の COMPLEX OF CURVES を用いた証明の概略

以下では、Theorem 1.1 で述べた表示を持つ群を $G_{g,n}$ で表わします。

まずは、Birman と Hilden [2] による $\mathcal{M}_{2,0}$ の表示を用いて、 $\mathcal{M}_{2,0} \cong G_{2,0}$ であること、さらには、 $\mathcal{M}_{2,1} \cong G_{2,1}$ であることを証明します。ところで、次の事実が、Wajnryb による写像類群の表示と独立した議論によって Gervais により示されています。

Theorem 4.1. [5] $g \geq 1, n \geq 1$ の時、もしも $\mathcal{M}_{g,n} \cong G_{g,n}$ ならば、 $\mathcal{M}_{g,n+1} \cong G_{g,n+1}$ および $\mathcal{M}_{g,n-1} \cong G_{g,n-1}$ が成立する。

そこで、ある $g \geq 2, n \geq 1$ について $\mathcal{M}_{g,n} \cong G_{g,n}$ と仮定すると、上の Theorem より、 $\mathcal{M}_{g,n+2} \cong G_{g,n+2}$ であることが示されます。さらに、先の節で述べた6種類の関係式 (Y1) (Y2) (Y3) (E1) (E2) (E3) が $G_{g+1,n}$ で成立することは、きわめて素朴な方法 (紙と鉛筆を用いる) で確認することが出来ます。(詳細は、プレプリント [12] をご覧ください。) 以上から次の事実を証明することが出来ます。

Theorem 4.2. [12] (1) $\mathcal{M}_{2,n} \cong G_{2,n}$

(2) $g \geq 2$ の時、 $\mathcal{M}_{g,n} \cong G_{g,n}$ ならば、 $\mathcal{M}_{g+1,n} \cong G_{g+1,n}$ が成立する。

これらの二つの Theorem より、全ての $g \geq 2, n \geq 0$ に対し、 $\mathcal{M}_{g,n} \cong G_{g,n}$ が成立する事が示されます。

5. COMPLEX OF CURVES とそのヴァリエーション

今回の講演とは直接関係ありませんが、近年示された complex of curves の特記すべき性質を2つ挙げておきます。

- (1) complex of curves は Gromov の意味で双曲的である [17]。
- (2) ほとんど全ての $\Sigma_{g,n}$ に対して、complex of curves 上の simplicial automorphism は曲面上の同相写像で実現でき、さらに、(向きを逆にする写像もふくめた) 写像類群と complex of curves 上の simplicial automorphism 全体のなす群は同型である [13], [16]。

次に、complex of curves の幾つかのヴァリエーションを述べておきます。

3次元球体に g 個の1ハンドルを接着して構成される向き付け可能3次元多様体 H_g を3次元ハンドル体と呼び、 \mathcal{H}_g で $\pi_0(\text{Diff}^+(H_g))$ すなわち3次元ハンドル体の写像類群を表わすことにします。Complex of curves $Z(\Sigma_{g,n})$ の定義において essential で ∂ -parallel な単純閉曲線を H_g 内のメリディアンディスク (H_g 内の essential で proper な円盤) に置き換えたものを $L(H_g)$ と書くことにします。Complex of curves の3次元ハンドル体版と言うべきこの複体は McCullough [19] により導入され、さらに可縮であることが示されました。 $L(H_g)$ の部分複体で、3次元ハンドル体を分離しないメリディアン円盤族のイソトピー類のみを単体とするもの $Y(H_g)$ (曲面の場合と記号が不統一ですが元論文にあわせました) を定めると、これもまた $g-2$ 連結となっていることが示されました[11]。そこで、 $g=2$ の場合は $L(H_2)$ への、 $g \geq 3$ の場合は $Y(H_g)$ への \mathcal{H}_g の作用を調べ、ここで述べたのと同じ計算方法を適用することにより、 \mathcal{H}_g の表示を得ました [11]。なお、Hatcher と Thurston の cut system 複体と類似の方法で構成された複体を用いた \mathcal{H}_g の表示が Wajnryb [22] により求められています。

$Z(\Sigma_{g,n})$ の定義における単純閉曲線を $M_g = (S^1 \times S^2)$ の g 個の連結和) 上の essential な球面に置き換えて得られる複体 $\mathbf{S}(M_g)$ が可縮であること、さらにこの複体の end を除いたものと、自由群上の外部自己同型写像のなす群 $\text{Out}(F_g)$ の研究に重要な役割を演ずる Culler-Vogtmann の outer space とが同相であることが Hatcher [10] によって示されています。

ここで挙げた3つの空間、 $Z(\Sigma_{g,n})$ 、 $L(H_g)$ 、 $\mathbf{S}(M_g)$ は似通った方法で構成される空間で、これらの間の相関関係を明らかにすることで、 $M_{g,n}$ と \mathcal{H}_g と $\text{Out}(F_g)$ の間の相関関係や類似性が明らかになるものと淡い期待を抱いています。

REFERENCES

1. J. Birman. *Mapping class groups and their relationship to braid groups*. Com. Pure and App. Math. 22(1969), 213–238
2. J. Birman and H. Hilden. *On the mapping class group of closed surface as covering spaces*. In “Advances in the theory of Riemann surfaces” Ann. of Math. Studies 66(1971), 81–115
3. K.S. Brown *Presentations for groups acting on simply-connected complexes*. Jour. Pure and Appl. Alg. 32(1984) , 1–10
4. M. Dehn. *Die Gruppe der Abbildungsklassen*. Acta Math. 69(1938), 135–206
5. S. Gervais. *A finite presentation of the mapping class group of an oriented surface*. preprint (math.GT/9811162).
6. A. Hatcher and W. Thurston. *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*. Topology 19(1980), 221–237
7. J. Harer. *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*. Inv. Math. 71(1982), 221–239
8. J. Harer. *Stability of the homology of the mapping class groups of orientable surfaces*. Ann. of Math. 121(1985), 215–249.
9. W. Harvey. *Boundary structure for the modular group*. In “Riemann surface and related Topics: Proc. 1978 Stony Brook Conf.” Princeton University Press (1978), 245–251
10. A. Hatcher, *Homological stability for automorphism groups of free groups*, Comment. Math. Helvetici 70(1995), 39–62.
11. S. Hirose. *A presentation for a mapping class group of a 3-dimensional handlebody*. preprint (available from <http://www.ms.saga-u.ac.jp/~hirose/work.html>), (1999)
12. S. Hirose. *Action of the mapping class group on a complex of curves and a presentation for the mapping class group of a surface*. preprint (available from <http://www.ms.saga-u.ac.jp/~hirose/work.html>), (1999)
13. V. Ivanov, *Automorphisms of complexes of curves and of Teichmüller spaces*, Progress in Knot Theory and related Topics, Collection Travaux en cours 56, (1997), 113–120
14. F. Laudenbach. *Présentation du groupe de difféotopies d’une surface compact orientable*. Exposé 15 de “Travaux de Thurston sur les surfaces” Astérisque 66-67(1991)
15. W.B.R. Lickorish. *A finite set of generators for the homeotopy group of a 2-manifold*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 60(1964), 769–778, *Corrigendum* Proc. Cambridge Philos. Soc. 62(1966), 679–681
16. F. Luo, *Automorphisms of complex of curves*, Topology 39 (2000), no. 2, 283–298.
17. H. A. Masur and Y. N. Minsky, *Geometry of the complex of curves I: Hyperbolicity*, Invent. Math. 138 (1999), no. 1, 103–149.
18. M. Matsumoto, *A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities*, Max Planck Institute Preprint 97–74 (1997)
19. D. McCullough. *Virtually geometrically finite mapping class groups of 3-manifolds*. J. Diff. Geom. 33(1991), 1–65
20. J. McCool. *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group*. J. Algebra, 35(1975), 205–213
21. B. Wajnryb. *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*. Israel J. Math. 45 (1983), no. 2-3, 157–174

22. B. Wajnryb. *Mapping class group of a handledody*. Fund. Math. 158(1998), no. 3, 195–228
23. B. Wajnryb. *An elementary approach to the mapping class group of a surface*. Geometry and Topology 3 (1999), 405–466

〒 840-8502 佐賀市本庄町 1 番地 佐賀大学理工学部数理科学科
E-mail address: hirose@ms.saga-u.ac.jp

Computing invariants of mapping class groups of surfaces

高沢 光彦*†

曲面の写像類に関する研究は古くからおこなわれてきました。しかし、実際に写像類に対して大量の計算をするということはあまり行われていないようです。その理由の一つとして計算を行う対象である写像類を列挙したデータベースが存在しなかった事があげられると思われまます。

講演の前半では 1982 年に Penner によって与えられた写像類の閉曲線の組の空間への作用を書き下す公式をもとに、コンピュータを使用して写像類の代表元を列挙する方法と実際の計算結果を紹介します。後半では、写像類のデータベースとさまざまなソフトウェアを組み合わせることにより計算される幾つかの不変量を紹介し、それらから観測される事実を報告します。

1 写像類の列挙

種数 g の閉曲面 F_g の自己同相写像のイソトピー類のことを写像類と呼び、写像類全体に写像の合成によって積を入れた群を写像類群といい \mathcal{M}_g と書きます。1970 年の後半には、Lickorish と Humphries によって写像類群の生成元が与えられました。

Theorem 1.1 (Lickorish, Humphries) 写像類群 \mathcal{M}_g は 図 1 に表される単純閉曲線 $\{c_1, \dots, c_{2g}, d\}$ にそった $2g + 1$ 個のデーン捻りによって生成される。

写像類をこの生成元による語として表現する事にします。単純に考えると長さ n の語は $(4g + 2)^n$ 個あることになりませんが、そのうち写像類として異なるものははるかに少ない数しか存在しません。そこで、写像類として異なるものの代表元を列挙することを考えます。

2つの語が同じ写像類を表すかどうかをしらべるために、曲面上の互いに交わらない単純閉曲線の組の空間 \mathcal{S}_g への写像類の作用を調べます。種数 $g > 2$ の閉曲面

*東京工業大学 情報理工学研究所 数理・計算科学専攻

†E-mail: takasawa@is.titech.ac.jp, homepage: <http://www.is.titech.ac.jp/takasawa>

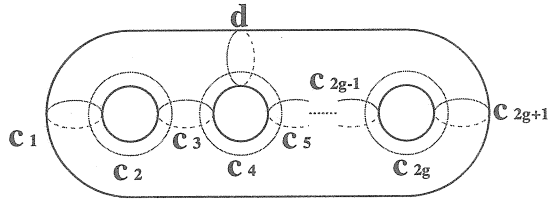


図 1: Lickorish 生成元

に対しては、写像類は図 1 の閉曲線の像で特徴づけられる事がわかっているからです。曲面上の単純閉曲線をコンピュータ上に表現するために次の古典的な定理を利用します。

Theorem 1.2 (Dehn) S_g は $\mathbf{Z}_{\geq 0}^{3g-3} \times \mathbf{Z}^{3g-3}$ の部分集合によってパラメトライズされる。

この座標づけの具体的な対応をおおまかに説明すると以下ようになります。まず、曲面上にパンツ分解 \mathcal{A} を一つ固定します。曲面上の $3g - 3$ 本の互いに交わらない閉曲線の組 $\mathcal{A} = \{a_1, \dots, a_{3g-3}\}$ がパンツ分解であるとは、曲面からそれぞれの近傍のアニュラス A_1, \dots, A_N を取り除いたものが $2g - 2$ 個のパンツ P_1, \dots, P_{2g-2} になるときをいいます。与えられた単純閉曲線の組 $c \in S_g$ に対して、 c をイソトピーで変形して各 a_i との交わりを最少にし、また c の捻れをすべて A_i に押し込んで P_i では捻れのない「標準的な」状態にすることができます。このとき c に対応する座標 $(m_1, \dots, m_N, t_1, \dots, t_N)$ は、 m_i として c と a_i の交わりの個数、 t_i として A_i 内の(向きもこめた) c の捻れの数を与えることで得られます。

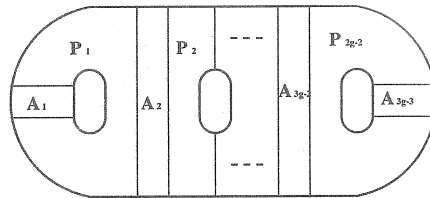


図 2: 曲面のパンツ分解 \mathcal{A} .

写像類群の S_g への作用を表現するには、Lickorish 生成元の作用が表現できれば十分です。分割曲線に沿った Dehn 捻り δ_i の作用は、以下のように簡単に表現されます。

$$\delta_i : (m_1, \dots, m_N, t_1, \dots, t_i, \dots, t_N) \mapsto (m_1, \dots, m_N, t_1, \dots, t_i + m_i, \dots, t_N)$$

分割曲線でない閉曲線に沿った Dehn 捻りの作用を表現するためには、その閉曲線を含むような新しい分割 A' を与え、 A で与えられる座標と A' であたえられる座標を変換すればよいということになります。

Penner [6] は、図 3 と図 4 に示す 2 つの基本的な座標変換の積で任意の分割による座標を変換できることを示しました。また、それらを具体的にかきあらわす変換公式も与えましたが、細部に誤りがありました。それを修正したものが次の定理です。 \vee, \wedge は二項演算子で、それぞれ二項のうち大きいものと小さいものを返します。また $sgn(x)$ は x の正負により、1 か -1 を返す関数です。

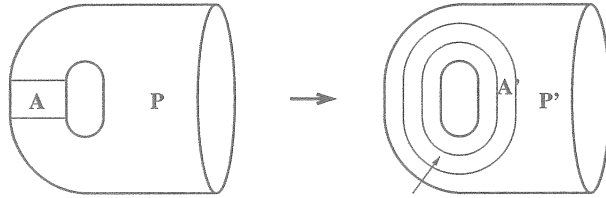


図 3: 第一基本変換

Theorem 1.3 (Penner) 第一基本変換は以下により与えられる。

$$\begin{aligned} l'_{11} &= l - |t_1| \vee 0 \\ l'_{12} &= l'_{13} = l + l_{11} - l'_{11} \\ l'_{23} &= |t_1| + l'_{11} - l \\ t'_2 &= t_2 + l_{11} + (l - l'_{11}) \wedge t_1 \vee 0 \\ t'_1 &= -sgn(t_1)(l_{23} + l - l'_{11}), \end{aligned}$$

ただし $l = l_{12} = l_{13}$ 、 $sgn(0) = -1$ 。

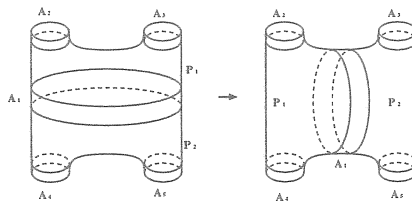


図 4: 第二基本変換

Theorem 1.4 (Penner, -) 第二基本変換は以下により与えられる。

$$\begin{aligned} \text{特性多項式} = & 1 - x/q^{7/5} + 2x/q^{2/5} - q^{3/5}x - 2x^2/q^{9/5} + 3x^2/q^{4/5} - 3q^{1/5}x^2 \\ & + 2q^{6/5}x^2 - q^{11/5}x^2 - x^3/q^{11/5} + 2x^3/q^{6/5} - 3x^3/q^{1/5} + 3q^{4/5}x^3 \\ & - 2q^{9/5}x^3 - x^4/q^{3/5} + 2q^{2/5}x^4 - q^{7/5}x^4 + x^5 \end{aligned}$$

3. Meyer 関数

signature cocycle を利用して定められる $\frac{1}{2g+1}\mathbf{Z}$ に値を持つ共役不変な関数です。

$$\phi(f) = -\frac{8}{5}$$

4. 写像柱の体積

写像類 f に対して、 $F_g \times I$ を写像類で張り合わせるにより自然に写像柱 M_f が定まります。写像類が擬アノソフのときには写像柱が双曲構造をもつことが知られています。

$$\text{Hyperbolic volume}(M_f) = 5.3334859$$

5. 擬アノソフ性

写像類は周期的、既約的、擬アノソフの3種類に分けられる事が Thurston により示されています。閉曲線の組の一般化として、トレイントラックというものが有り、擬アノソフ写像は不変トレイントラックを持つ写像として特徴づけられます。写像類の閉曲線の組への作用は自然にトレイントラックへの作用へ拡張することができ、それを利用して不変トレイントラックを数値的に計算する事ができます。また、数値的に求められた不変トレイントラックの近傍での作用を調べるにより、代数的に値を知ることもできます。

$$f : \text{擬アノソフ}, \text{dilatation} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}$$

6. 共役類

一般に写像類の共役類を決定する事は難しいとされています。今回は非常にアドホックな方法を使用して種数2の閉曲面に対して、長さ6以下で表される共役類の代表元を列挙しました。

参考文献

- [1] K. Ahara and M. Takasawa: *Tables of Conjugate Classes of Hyperelliptic Mapping Class Group of Genus 2 and 3*, Experiment. Math., to appear.
- [2] K. Ahara: *Teruaki*, <http://www.meiji.ac.jp/meiji/servers/math/staffs/ahara/teruaki>.

- [3] P. Brinkmann: *Train*, <http://www.math.utah.edu/~brinkman/train>.
- [4] O.A. Goodman: *Snap*, <http://www.ms.unimelb.edu.au/~snap/>.
- [5] R.C. Penner and J.L. Harer: *Combinatorics of train tracks*, Princeton University Press, (1992).
- [6] R.C. Penner: *The action of the mapping class group on curves in surfaces*, L'Enseignement Mathématique 30 (1984), 39-55.
- [7] J.R. Weeks: *SnapPea*, <http://thames.northnet.org/weeks/>.

ON THE VOLUME CONJECTURE FOR HYPERBOLIC KNOTS

YOSHIYUKI YOKOTA

Graduate School of Mathematics, Kyushu University
Fukuoka, 812-8581, Japan
e-mail: jojo@math.kyushu-u.ac.jp

1. INTRODUCTION

In [1], R.M. Kashaev introduced certain invariants of oriented links motivated by his study of quantum dilogarithm functions. Since the classical dilogarithm functions are related to the hyperbolic volumes, he naturally expected that, for hyperbolic knots, the asymptotic behaviors of his invariants determine their volumes, which is in fact confirmed for a few hyperbolic knots by himself in [2]. Later, in [4], H. Murakami and J. Murakami carefully proved that Kashaev's invariant coincides with certain special value of the colored Jones function, and then reformulated Kashaev's conjecture which is now called the volume conjecture of knots.

In this talk, we will demonstrate how to solve Kashaev's conjecture through a good example, the knot 8_{20} . In general, for a hyperbolic knot in S^3 , the quantum factorials in its Kashaev's invariant curiously correspond to the tetrahedra in an ideal triangulation of its complement, which immediately establish a surprising coincidence between the stationary phase equations for the invariant and the hyperbolicity equations for the triangulation. Then, the asymptotic behavior of the invariant is determined by the promised solution, which is nothing but the volume of the complement because the quantum factorials asymptotically goes to the dilogarithm functions.

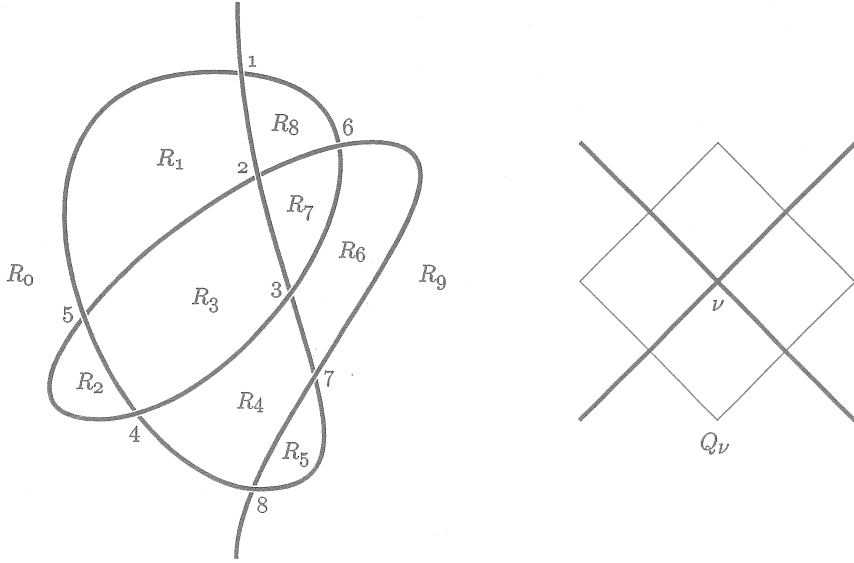
The author is grateful to all the participants in the meeting "Volume conjecture" in October 1999 at International Institute for Advanced Studies, Kyoto. In particular, he is grateful to Hitoshi Murakami for organizing the meeting and to Jun Murakami for stimulating discussions.

2. IDEAL TRIANGULATIONS

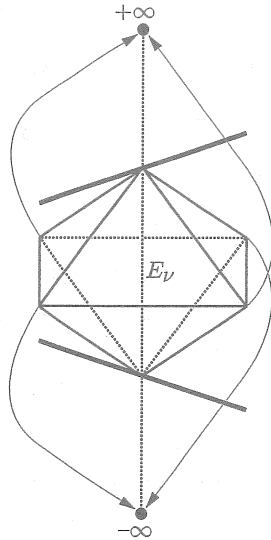
Let K denote the knot 8_{20} and M its complement. In this section, associated with a diagram D of K depicted below, we construct an ideal triangulation of M from which the hyperbolicity equations for M follows quite nicely. Let R_0, \dots, R_9 the faces of D

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}\text{-}\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

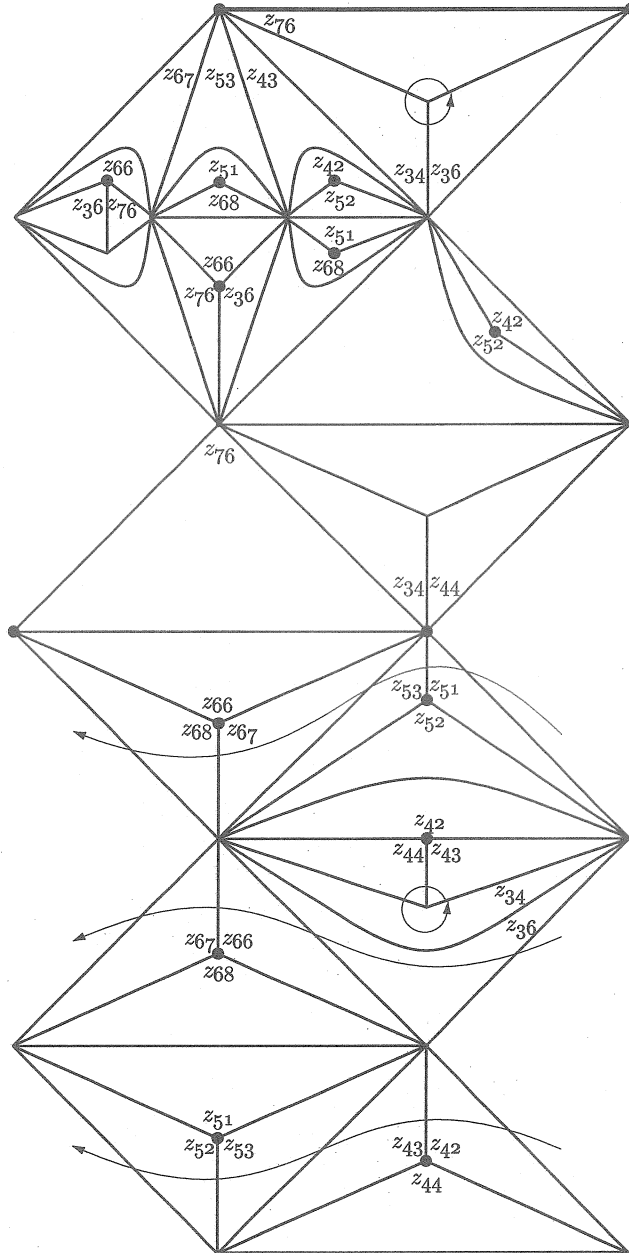
and Q_1, \dots, Q_8 the faces of the dual graph of D .



Let \dot{M} be M with the two poles $\pm\infty$ of S^3 removed. Then, due to D. Thurston [6], \dot{M} decomposes into ideal octahedra P_1, \dots, P_8 corresponding to Q_1, \dots, Q_8 , and each P_ν further decomposes into four ideal tetrahedra as shown below. Thus, we have an ideal triangulation \dot{S} of \dot{M} which associates $Q_\nu \cap R_\mu$ with an ideal tetrahedron $S_{\nu\mu}$. Notice that the four tetrahedra corresponding to Q_ν share an edge E_ν while all the tetrahedra corresponding to R_μ also share an edge F_μ . As usual, we put a hyperbolic structure on $S_{\nu\mu}$ by assigning a complex number $z_{\nu\mu}$ to a pair of opposite edges E_ν, F_μ of $S_{\nu\mu}$.

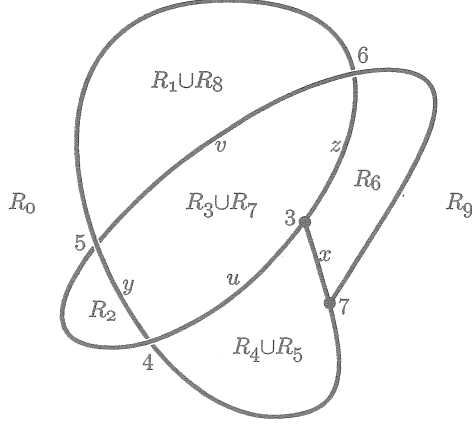


To make \dot{S} an ideal triangulation of M , we contract the ideal bigon $P_1 \cap P_8$, which makes the ideal tetrahedra touching the bigon degenerate, and come up with an ideal triangulation \mathcal{S} of M with 12 tetrahedra whose cusp looks like;



where the bold arc represents a meridian of K . To describe the hyperbolicity equations,

we introduce a diagram G with two trivalent vertices depicted below.



Corresponding to the crossings of G , we have the edge relations around E_4, E_5, E_6 which read

$$z_{42}z_{43}z_{44} = z_{51}z_{52}z_{53} = z_{66}z_{67}z_{68} = 1.$$

On the other hand, corresponding to the faces of G , we have the edge relations too. Those around $F_1 = F_8, F_2, F_6$ read

$$z_{51}z_{68} = z_{42}z_{52} = z_{36}z_{66}z_{76} = 1,$$

while those around $F_3 = F_7, F_4 = F_5$ can be substituted with the cusp conditions

$$z_{43}z_{53}z_{67} = z_{34}z_{36}, \quad z_{34}z_{44} = z_{76}.$$

The solutions to these equations can be parametrized by x, y, z, u, v assigned to the edges of G which do not touch $R_0 \cup R_9$. In fact, we can put

$$\begin{aligned} z_{34} &= x/u, z_{36} = z/x, z_{42} = 1/y, z_{43} = y/u, z_{44} = u, \\ z_{51} &= 1/v, z_{52} = y, z_{53} = v/y, z_{66} = 1/z, z_{67} = z/v, z_{68} = v, z_{76} = x. \end{aligned}$$

Now, the hyperbolicity equations for (M, \mathcal{S}) is given by

$$\frac{1-x/z}{1-x/u} \cdot \frac{1}{1-x} = 1, \quad \frac{1}{1-x/u} \cdot \frac{1-1/u}{1-y/u} = 1$$

which are the edge relations corresponding to the non-alternating edges of G , and

$$\frac{1-y}{1-y/u} = \frac{1-1/y}{1-v/y}, \quad \frac{1-z}{1-z/v} = 1-x/z, \quad \frac{1-v}{1-v/y} = \frac{1-1/v}{1-z/v}$$

which are the cusp conditions corresponding to the alternating edges of G . Since M is complete hyperbolic, we have a promised solution $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$ to these equations,

and the volume $\text{vol}(M)$ is given by Euler's dilogarithm functions

$$\text{Li}_2(w) = - \int_0^w \frac{\log(1-t)}{t} dt,$$

that is,

$$\begin{aligned} \text{vol}(M) = & D(x_0/u_0) + D(z_0/x_0) + D(1/y_0) + D(y_0/u_0) + D(u_0) \\ & + D(1/v_0) + D(y_0) + D(v_0/y_0) + D(1/z_0) + D(z_0/v_0) + D(v_0) + D(x_0) \end{aligned}$$

where $D(w) = \text{Im Li}_2(w) + \log |w| \arg(1-w)$.

3. KASHAEV'S INVARIANTS

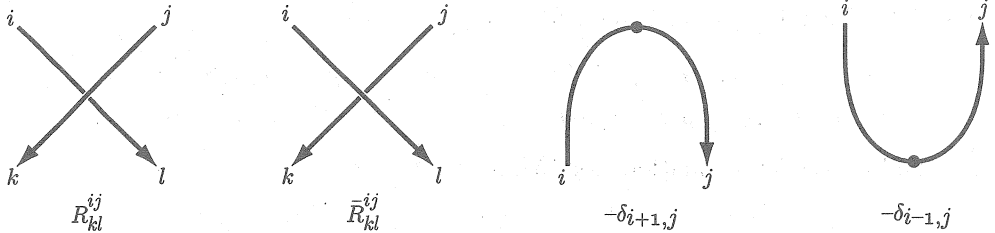
Let N be a positive integer, which will be sent to ∞ , and $\mathcal{N} = \{0, 1, \dots, N-1\}$. For $h \in \mathbb{Z}$, we denote by $[h] \in \mathcal{N}$ the residue modulo N . In this section, we compute Kashaev's invariant $\langle K \rangle_N$ of K , which coincides with the N -colored Jones function of K evaluated at $q = \exp 2\pi\sqrt{-1}/N$ due to [4], and detect its asymptotic behavior. Let

$$R_{kl}^{ij} = \frac{Nq^{-1-(k-j)(i-l+1)}\theta_{ijkl}}{(\bar{q})_{[i-j]}(q)_{[j-l]}(\bar{q})_{[l-k-1]}(q)_{[k-i]}}, \quad \bar{R}_{kl}^{ij} = \frac{Nq^{1+(i-l)(k-j+1)}\theta_{ijkl}}{(q)_{[i-j]}(\bar{q})_{[j-l]}(q)_{[l-k-1]}(\bar{q})_{[k-i]}}$$

for $i, j, k, l \in \mathcal{N}$, where $(\omega)_{[h]} = (1-\omega)(1-\omega^2)\dots(1-\omega^{[h]})$ and

$$\theta_{ijkl} = \begin{cases} 1 & \text{if } [i-j] + [j-l] + [l-k-1] + [k-i] = N-1, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Then, Kashaev's invariant of an oriented knot can be computed by contracting the tensors associated to the elementary tangles in its $(1, 1)$ -tangle presentation, where the broken edge should be labeled 0.



For example, up to a power of q for simplicity, $\langle K \rangle_N$ is given by

$$\begin{aligned} \langle K \rangle_N \doteq N^5 \sum_{\substack{d \leq a \leq c, \\ d \leq b \leq e \leq c}} & \frac{1}{(q)_{[a-d-1]}(\bar{q})_{[c-a]}} \cdot \frac{1}{(\bar{q})_{[-b-1]}(q)_{[b-d-1]}(\bar{q})_{[d+1]}} \\ & \times \frac{1}{(\bar{q})_{[b]}(q)_{[e-b]}(\bar{q})_{[-e-1]}} \cdot \frac{1}{(\bar{q})_{[-c-1]}(q)_{[c-e]}(\bar{q})_{[e]}} \cdot \frac{1}{(q)_{[a]}}. \end{aligned}$$

From now onward, we suppose N is sufficiently large so that

$$\frac{1}{(q^{\pm 1})_n} \sim \exp \frac{N\{\pm \text{Li}_2(q^{\pm n}) \mp \pi^2/6\}}{2\pi\sqrt{-1}}.$$

Then, due to Kashaev [2], $\langle K \rangle_N$ is approximated by the integral

$$\int \cdots \int \exp \frac{N}{2\pi\sqrt{-1}} V(x, y, z, u, v) dx dy dz du dv,$$

where x, y, z, u, v correspond to q^a, q^b, q^c, q^d, q^e in the summation respectively and

$$\begin{aligned} V(x, y, z, u, v) = & \text{Li}_2(x/u) - \text{Li}_2(x/z) - \text{Li}_2(y) + \text{Li}_2(y/u) - \text{Li}_2(1/u) \\ & - \text{Li}_2(v) + \text{Li}_2(v/y) - \text{Li}_2(1/y) - \text{Li}_2(z) + \text{Li}_2(z/v) - \text{Li}_2(1/v) + \text{Li}_2(x). \end{aligned}$$

The maximal contributions to this integral come from the solutions to the stationary phase equations

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial x} &= \frac{-\log(1-x/u) + \log(1-x/z) - \log(1-x)}{x} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial y} &= \frac{\log(1-y) - \log(1-y/u) + \log(1-v/y) - \log(1-1/y)}{y} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial z} &= \frac{-\log(1-x/z) + \log(1-z) - \log(1-z/v)}{z} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial u} &= \frac{\log(1-x/u) + \log(1-y/u) - \log(1-1/u)}{u} = 0, \\ \frac{\partial V}{\partial v} &= \frac{\log(1-v) - \log(1-v/y) + \log(1-z/v) - \log(1-1/v)}{v} = 0, \end{aligned}$$

which is nothing but the hyperbolicity equations before. Furthermore, we can observe that the contribution to the integral becomes maximum at $(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0)$, and so the integral is simply approximated by

$$\exp \frac{N}{2\pi\sqrt{-1}} V(x_0, y_0, z_0, u_0, v_0).$$

On the other hand, the imaginary part of $V(x, y, z, u, v)$ reads

$$\begin{aligned} & D(x/u) - D(x/z) - D(y) + D(y/u) - D(1/u) \\ & - D(v) + D(v/y) - D(1/y) - D(z) + D(z/v) - D(1/v) + D(x) \\ & + \log|x|\{-\arg(1-x/u) + \arg(1-x/z) - \arg(1-x)\} \\ & + \log|y|\{\arg(1-y) - \arg(1-y/u) + \arg(1-v/y) - \arg(1-1/y)\} \\ & + \log|z|\{-\arg(1-x/z) + \arg(1-z) - \arg(1-z/v)\} \\ & + \log|u|\{\arg(1-x/u) + \arg(1-y/u) - \arg(1-1/u)\} \\ & + \log|v|\{\arg(1-v) - \arg(1-v/y) + \arg(1-z/v) - \arg(1-1/v)\}, \end{aligned}$$

and so, by $D(1/w) = -D(w)$,

$$\begin{aligned} & D(x/u) + D(z/x) + D(y/u) + D(u) + D(v/y) + D(1/z) + D(z/v) + D(x) \\ & + \log |x| \{ \operatorname{Im} x \partial V / \partial x \} + \log |y| \{ \operatorname{Im} y \partial V / \partial y \} + \log |z| \{ \operatorname{Im} z \partial V / \partial z \} \\ & + \log |u| \{ \operatorname{Im} u \partial V / \partial u \} + \log |v| \{ \operatorname{Im} v \partial V / \partial v \}. \end{aligned}$$

Thus, as Kashaev conjectured, the absolute value of the invariant grows like

$$e^{\frac{N}{2\pi} \{ D(x_0/u_0) + D(z_0/x_0) + D(y_0/u_0) + D(u_0) + D(v_0/y_0) + D(1/z_0) + D(z_0/v_0) + D(x_0) \}} = e^{\frac{N}{2\pi} \operatorname{vol}(M)}.$$

REFERENCES

1. R.M. Kashaev, *A link invariant from quantum dilogarithm*, Mod. Phys. Lett. **A10** (1995), 1409–1418.
2. R.M. Kashaev, *The hyperbolic volume of knots from quantum dilogarithm*, Lett. Math. Phys. **39** (1997), 269–275.
3. R.M. Kashaev and O. Tirkkonen, *Proof of the volume conjecture for torus knots*, e-print archive, math. GT/9912210.
4. H. Murakami and J. Murakami, *The colored Jones polynomials and the simplicial volume of a knot*, e-print archive, math. GT/9905075.
5. H. Murakami, J. Murakami, M. Okamoto, T. Takata and Y. Yokota, *Kashaev's conjecture and the Chern-Simons invariants of knots and links*, preprint.
6. D. Thurston, *Hyperbolic volume and the Jones polynomial*, abstract of the lecture at "Invariants de nœuds et de variétés de dimension 3" (1999), I.E.S.A.-G.
7. Y. Yokota, *On the volume conjecture of hyperbolic knots*, Knot Theory -dedicated to Professor Kunio Murasugi for his 70th birthday-, edited by M. Sakuma (2000), 362–367.

TANGLE DECOMPOSITIONS OF KNOTS AND LINKS

MAKOTO OZAWA

INTRODUCTION

3次元球面内の1次元球面を結び目という。結び目理論の基本問題は主に二種類に分けられる。一つは結び目全体を研究対象とする問題であり、分類問題、補空間予想（これは C. McA. Gordon と J. Luecke により解決された。[8] を参照されたい。）、不変量などがある。もう一つは個々の結び目の性質などを研究する問題で、対称性、可逆性、素性（交代結び目 [23]、正結び目 [38] に関して解決されている。）、スライス性などの判別法が挙げられる。

これら二つの基本問題に対して、最も重要なものの一つに H. Schubert の素分解定理がある。これは結び目と2点で交わる2次元球面で分解していくと、最終的にいくつかの“素”な結び目に分解され、更にその分解は一意的というものである。

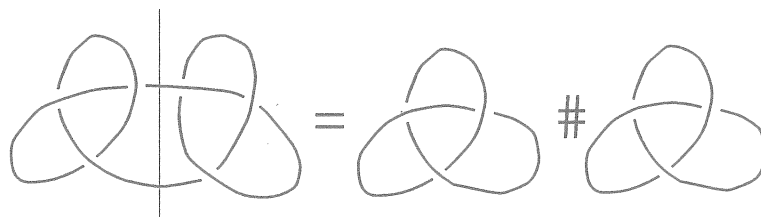


FIGURE 1. グラニー結び目は二つの右手系三葉結び目の連結和

従って、結び目を研究するには素な結び目のみを対象にすれば十分である。

結び目の素分解は2点で交わる2次元球面での分解であったが、更に4点で交わる2次元球面での分解を考えれば、素な結び目でも分解出来ることがある。

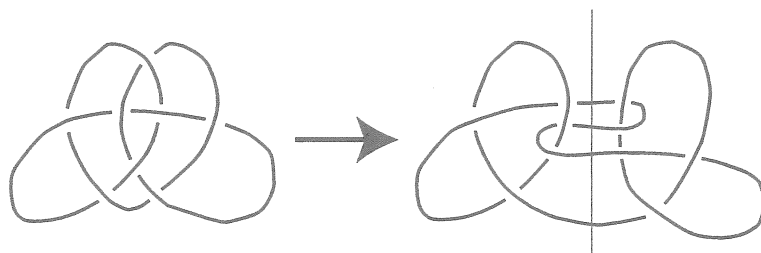


FIGURE 2. 8_{16} のタングル分解

The author is supported in part by Research Fellowships of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

タングル分解では、分解後の各因子はもはや結び目ではなく、3次元球体内の1次元多様体となる。これが結び目のタングル分解と呼ばれるものであり、結び目の素分解が“こぶ”への分解であるのに対し、タングル分解は“固まり”への分解であると言える。

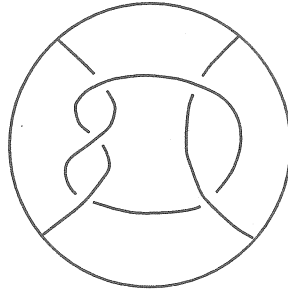


FIGURE 3. 8_{16} のタングル因子

すると素な結び目の中でも、特にタングル分解を持たない結び目にはどのようなものがあるのが問題となってくる。これは三章、四章、七章で解説する。また、タングルに関して素でない結び目については、分解の一意性が成立するのか?どのようなタングルが因子として現れるのか?などが問題として挙げられる。これらは五章、六章で述べる。次章で簡単に歴史を振り返り、二章では必要となる定義を述べる。

1. HISTORY

3-sphere 内の compact 1-submanifold を *link* という。成分数が一つの link は特に *knot* と呼ばれる。結び目理論における基本定理として、任意の non-splittable link は connected sum に関して prime link に一意的に分解されることが知られている ([41], [10])。これは、“自然数は有限個の素数の積に一意的に分解される”という整数論の基本定理に対応する。

1970年、Conwayにより“Tangle”という概念が提案され、tangle regular presentation を用いて knot のリストを作る試みがされている ([4])。それ以来、“Tangle”は主に knot と link の splittability, primeness, hyperbolicity を判定する為に使われてきた ([18], [20], [29], [30], [28], [43])。

1982年、Norwoodにより two generator knot が prime であることが証明された ([31])。Norwoodの証明は代数的なものであったが、Scharlemannは tunnel number one knot が two generator であることに注目し、tunnel number one knot が prime であることを幾何的に証明した ([39])。更に、Scharlemannは tunnel number one knot が 2-string prime である (即ち、knot と 4 点で交わる 2-sphere で “prime” tangle に分解出来ない) ことを証明している ([39])。これは、1995年に Gordon と Reid により一般化され、任意の string 数に関して tunnel number one knot は “essential” tangle に分解されないことが示されている ([9])。

一方 link に関して、1995年 Jones により composite two generator link が Hopf link summand を持つことが証明された ([16])。更に、Morimotoは tunnel number one link が composite である為の必要十分条件が、2-bridge knot と Hopf link の connected sum であることを証明した ([25])。Gordon と Reid はこの現象に着目し、tunnel number one link が essential tangle に分解されるならば、“Hopf tangle” summand を持つことを証明した ([9])。

two generator 又は tunnel number one knot/link は最も単純な補空間を許容するクラスであるが、それらを含むより広いクラスとして、3-sphere の genus two Heegaard surface 上に含まれる knot/link がある。これらは *double torus* と呼ばれる ([14], [15])。1994 年、Morimoto は composite double torus knot が torus knot の connected sum であることを証明した ([26])。

2. DEFINITION

B を 3-ball とし、 T を B 内に proper に埋め込まれた compact 1-submanifold とする。このとき、 B と T との組 (B, T) を *tangle* という。 T の arc 成分は *string* と呼ばれ、 T が n 本の string を持つとき (B, T) を *n-string tangle* という。 n -string tangle (B, T) が *trivial* であるとは、 (B, T) が $(D \times I, \{x_1, \dots, x_n\} \times I)$ に組として同相であるときをいう。ここで、 D は disk で、 x_i ($i = 1, \dots, n$) は $\text{Int}D$ 内の点とする。 (B, T) が *essential* であるとは、

1. $\partial B - \partial T$ が $B - T$ 内で incompressible
2. $B - T$ が irreducible
3. (B, T) が trivial 1-string tangle でない

を満たすときをいう (c.f. [9])。 (B, T) が *free* であるとは、 $\pi_1(B - T)$ が free group のときをいう ([19])。 (B, T) が free である為の必要十分条件が、 (B, T) の exterior $E(T) = \text{cl}(B - N(T))$ が handlebody であることが知られている ([13, 5.2. Theorem])。他の必要十分条件としては、 $E(T)$ が closed incompressible surface を含まないことなどがある ([37, Lemma 2.2])。また、free tangle は loop 成分を持たないことに注意したい。

K を 3-sphere S^3 内の knot 又は link とし、 S を S^3 内の 2-sphere で K と $2n$ 点で交わるものとする。このとき、組 (S^3, K) は S によって二つの n -string tangle (B_1, T_1) と (B_2, T_2) に分解される ([40], [2])。和 $(B_1, T_1) \cup_S (B_2, T_2)$ を K の *n-string tangle decomposition* といい、 S を *n-string tangle decomposing sphere* という。

K の二つの n -string tangle decomposition $(B_1, T_1) \cup_S (B_2, T_2)$ 、 $(C_1, R_1) \cup_P (C_2, R_2)$ が *isotopic* であるとは、isotopy $f : S^2 \times I \rightarrow S^3$ が存在して、 $f(S^2 \times 0) = S$ 、 $f(S^2 \times 1) = P$ 、 $f((S^2 \cap K) \times I) \subset K$ を満たすときをいう。

n -string tangle decomposition $(B_1, T_1) \cup_S (B_2, T_2)$ が *trivial* (resp. *essential*, *free*) であるとは、 (B_1, T_1) と (B_2, T_2) が共に trivial (resp. essential, free) のときをいう。一般に、trivial n -string tangle decomposition は *n-bridge decomposition* と呼ばれ、 n の最少数を K の *bridge index* という ([42])。 K が *n-string composite* であるとは、 K が essential n -string tangle decomposition を持つときをいい、 K が *n-string composite* でないとき *n-string prime* という ([1], [9])。特に $n = 1$ の場合、それぞれ *composite*、*prime* と呼ばれる。

K が essential 1-string tangle decomposition $(B_1, T_1) \cup_S (B_2, T_2)$ を持つとき、trivial 1-string tangle (B'_i, T'_i) ($i = 1, 2$) をそれぞれ (B_i, T_i) に貼り合わせることで、二つの link $(S^3, K_i) = (B_i, T_i) \cup (B'_i, T'_i)$ ($i = 1, 2$) を得る。このとき、 K は K_1 と K_2 の *connected sum* と呼び、 $K = K_1 \# K_2$ と表す。“自然数は有限個の素数の積に一意的に分解される” という整数論の基本定理に対応して、knot/link に対しても次が成り立つ。

Theorem 2.1. ([41], [10]) *non-split link* は *connected sum* に関して有限個の *prime link* に一意的に分解される。

K の exterior $E(K) = \text{cl}(S^3 - N(K))$ 内の properly embedded mutually disjoint arc $\gamma_1, \dots, \gamma_t$ で $\text{cl}(E(K) - N(\gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_t))$ が handlebody となるもののうち、最小の arc の本数 t を K の *tunnel number* といい、 $t(K)$ で表す ([3])。このよう

な $\{\gamma_1, \dots, \gamma_t\}$ は K の *unknotting tunnel system* と呼ばれる。定義より $E(K)$ は $t(K)+1$ の Heegaard splitting を許容することが分かる。 $t(K)=0$ である為の必要十分条件は K が trivial knot であることである。従って、tunnel number one knot/link は最も単純な exterior、即ち (genus two handlebody) \cup (2-handle) を持つ。しかしながら、2-bridge knot/link や高々2成分の torus knot/link は tunnel number one であり、そこそ広いクラスであることが分かる。

S^3 の Heegaard surface で K を含むもののうち、最小の genus を K の h -genus といい、 $h(K)$ で表す ([26])。 $h(K)=0$ である為の必要十分条件は K が trivial であることである。 $h(K)=1$ のとき K は *torus knot/link*、 $h(K)=2$ のとき *double torus knot/link* と呼ばれる。

tunnel number one knot/link K とその unknotting tunnel γ に対して、genus two closed surface $\partial N(K \cup \gamma)$ は定義より S^3 の Heegaard surface である。また、 K は自然にこの surface 上に isotope することが出来る。従って、 $t(K)=1$ ならば $h(K) \leq 2$ であることが分かる。一般に、tunnel number と h -genus との間に次の関係が成り立つ。

Proposition 2.2. ([26], [17, Proposition 15.3.9])

$$t(K) + 1 - |K| \leq h(K) \leq t(K) + 1$$

ここで、 $|K|$ は K の成分数とする。

F を K の Seifert surface とする。 F が free であるとは、 $\pi_1(S^3 - F)$ が free group のときをいう。 K の free Seifert surface のうちで最小の genus を *free genus* といい、 $g_f(K)$ で表す ([24])。free tangle と同様に、 F が free である為の必要十分条件は $S^3 - \text{Int}N(F)$ が handlebody であることである。 $N(F)$ は勿論 handlebody であるので、free Seifert surface F に対して $\partial N(F)$ は S^3 の Heegaard surface になっている。また、 K は $\partial N(F)$ 上に自然に isotope することが出来るので、free genus と h -genus との間に次の関係が成り立つ。

Proposition 2.3.

$$h(K) \leq 2g_f(K)$$

従って、free genus one knot は唯一の genus one torus knot である trefoil を除いて double torus である。

Remark 2.4. 上の不等式で一般に等号は成立しない。例えば、 (p, q) -torus knot ($p, q > 0$) の free genus は $(p-1)(q-1)/2$ である。また、double torus knot K に対して genus two Heegaard surface F 上 K が F を二つの成分に分離する場合は、 $F - K$ の成分の閉包が K の Seifert surface を与えているが、一般に free とは限らない (c.f. [36])。実際、 $g_f(K) \geq 2$ となる double torus knot が存在するので、逆側の不等式 $g_f(K) \leq h(K)/2$ は一般に成立しない。

Remark 2.5. 以上から、tunnel number one knot 及び free genus one knot は double torus であることが分かったが、これら二つのクラスは互いに包含関係にない。例えば、 $(2, 5)$ -torus knot は tunnel number one であるが、free genus two である。一方、Montesinos knot $M(0; (3, 1), (3, 1), (3, 1))$ は free genus one であるが、tunnel number two である ([27])。

Montesinos tangle を n 個の slope β_i/α_i ($i = 1, \dots, n$) rational tangle の “partial sum” として定義し、 $T(\beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$ で表す (Figure 4)。

trivial n -string tangle $(D \times I, \{x_1, \dots, x_n\} \times I)$ に、loop $\partial D \times \frac{1}{2}$ を $\text{Int}B$ へ押し込んだものを加えた tangle を *n -string Hopf tangle* といい、 H_n で表す (Figure 5)。

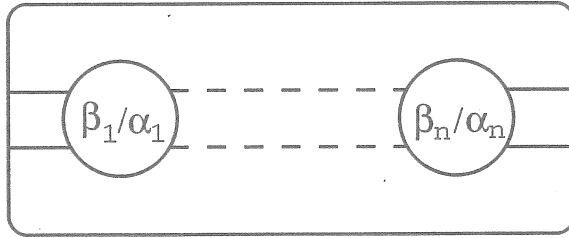


FIGURE 4. Montesinos tangle $T(\beta_1/\alpha_1, \dots, \beta_n/\alpha_n)$

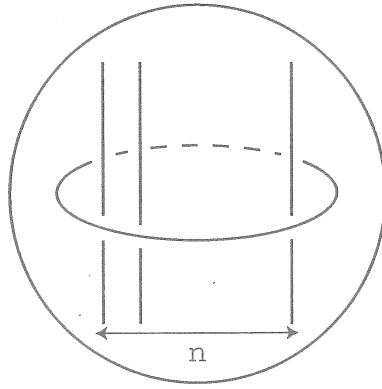


FIGURE 5. n -string Hopf tangle H_n

$(n-1)$ -string Hopf tangle に trivial arc を一本加えた tangle を n -string quasi Hopf tangle といい、 Q_n で表す。quasi Hopf tangle は、trivial arc と trivial loop を繋ぐ arc γ を情報として含んでいると見なす (Figure 6)。

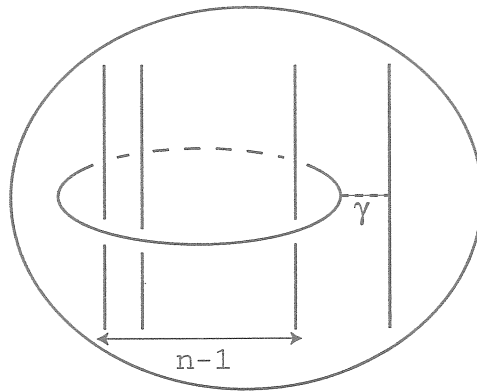


FIGURE 6. n -string quasi Hopf tangle Q_n

3. TUNNEL NUMBER ONE KNOT/LINK

tunnel number one knot については、Gordon と Reid により完全に解決されている。

Theorem 3.1. ([9]) *Tunnel number one knots are n -string prime for all n .*

tunnel number one link については、まず Morimoto により composite の場合が解決された。

Theorem 3.2. ([25]) *A tunnel number one link is composite if and only if L is a connected sum of the Hopf link and a 2-bridge knot.*

更に、Morimoto は unknotting tunnel の位置も決定している。

Theorem 3.3. ([25]) *A composite tunnel number one link L can be decomposed into the union of the 2-string quasi Hopf tangle and the 2-string trivial tangle. Moreover, any unknotting tunnel for L is isotopic to γ .*

Hopf link を summand に持つという現象が Gordon と Reid により拡張された。

Theorem 3.4. ([9]) *If a tunnel number one link is n -string composite, then it can be decomposed into the m -string Hopf tangle for some $m (\leq n)$ and an essential tangle.*

tunnel number one link がある n に関して n -string composite ならば、Gordon-Reid の定理により、unknotted component を持つことが分かる。このような link に対して、Morimoto の定理を拡張することが出来た。

Theorem 3.5. ([7]) *Let $L = K_1 \cup K_2$ be a tunnel number one link. Suppose that at least one component of L , K_2 say, is unknotted. Then L can be decomposed into the $(n+1)$ -string quasi Hopf tangle and the $(n+1)$ -string trivial tangle, where n is the wrapping number of K_1 with respect to the exterior of K_2 . Furthermore the position of an unknotting tunnel of L is isotopic to γ .*

Morimoto の定理では 2-bridge knot が connected summand として出てきたが、この一般化として次を得た。

Corollary 3.6. ([7]) *Let $L = K_1 \cup K_2$ be a tunnel number one link with K_2 unknotted. Then*

$$b(K_1) \leq n + 1,$$

where n is the wrapping number of K_1 with respect to the exterior K_2 .

4. FREE GENUS ONE KNOT

任意の n に関して n -string prime な knot として、

- torus knot
- 2-bridge knot
- tunnel number one knot ([9])
- Montesinos knot with length three ([32])
- small knot, that is, knot whose exterior does not contain an essential closed surface ([5])
- knot with irreducible non-sufficiently large double branched cover ([1], [22])
- satellite knot with the pattern which contains no essential tangle and the companion which admits no essential tangle decomposition ([11])

が知られている。これらに新たなクラスを追加することが出来た。

Theorem 4.1. ([22]) *Free genus one knots are n -string prime for all n .*

Remark 4.2. ある n に関して n -string composite な genus one knot が存在する。例えば、 n -string composite knot の doubled knot は常に $2n$ -string composite である ([21])。

5. DOUBLE TORUS KNOT/LINK

Morimoto により composite tunnel number one link、composite double torus knot の特徴付けがされている。これを double torus link まで拡張することが出来た。

L を S^3 内の unknotted torus H に含まれる torus knot 又は link とし、 C を $S^3 - H$ の一方の成分の core loop とする。このとき、link $L \cup C$ を *cabled Hopf link* という。

Theorem 5.1. ([36]) *Let L be a double torus knot or link in S^3 . Then L is 1-string composite if and only if L is either*

- a cabled Hopf link as a connected sum of Hopf link,
- a connected sum of a cabled Hopf link and a 2-bridge knot, where the connected sum is performed at C , or
- a connected sum of two torus links.

2-string composite double torus knot/link に関して次を示すことが出来た。

Theorem 5.2. ([36]) *Let L be a knot or link in S^3 which is contained a genus two Heegaard surface F of S^3 . Suppose there exists a 2-sphere S in S^3 which gives an essential 2-string tangle decomposition of the pair (S^3, L) and intersects all components of L . Then there is an isotopy rel. L of S which makes S intersect F in a single simple closed curve.*

更に、once punctured torus 上の essential arc を調べることで 2-string composite knot が分類できている。この帰結として次を得る。

Corollary 5.3. ([36]) *Hyperbolic double torus knots are 2-string prime.*

6. FREE TANGLE DECOMPOSITION

free 2-string tangle decomposition を許容する knot/link は各 tangle が essential か否かで次のように分類することが出来る。

1. 2-bridge knot/link
2. tunnel number one knot/link
3. knot/link with essential free 2-string tangle decomposition

3 のクラスの knot に関して essential tangle decomposition が一意であることを証明することが出来た。

Theorem 6.1. ([35]) *Let K be a knot which admits an essential free 2-string tangle decomposition. Then any essential 2-string tangle decomposition of K is unique up to isotopy, and K is n -string prime for all $n \neq 2$.*

link に関しては、non-isotopic essential 2-string tangle decomposition を許容するタイプの特徴付けを与えることができた。

Theorem 6.2. ([34]) *Let L be a link in S^3 which admits an essential free 2-string tangle decomposition. Then L admits non-isotopic essential 2-string tangle decompositions if and only if L is equivalent to a 2-component Montesinos*

link $M(0; (\alpha_1, \beta_1), (2, 1), (\alpha_2, \beta_2), (2, 1))$, where α_i and β_i are coprime integers and α_i is an odd integer greater than one ($i = 1, 2$). Moreover, if L is the Montesinos link, then L admits exactly two essential free 2-string tangle decompositions $T(\beta_1/\alpha_1, 1/2) \cup T(\beta_2/\alpha_2, 1/2)$ and $T(1/2, \beta_2/\alpha_2) \cup T(1/2, \beta_1/\alpha_1)$ up to isotopy and any 2-string tangle decomposition of L is isotopic to one of those two.

7. SATELLITE KNOT/LINK

V_0 を solid torus とし、 K_0 を $\text{Int}V_0$ 内の link とする。組 (V_0, K_0) が essential であるとは、 K_0 が V_0 の core に ambient isotopic でなく、 $V_0 - K_0$ が irreducible のときをいう。 V_1 を S^3 内の knot K_1 の tubular neighborhood とし、 $h: V_0 \rightarrow V_1$ を homeomorphism とする。このとき、 $K = h(K_0)$ が satellite であるとは、 (V_0, K_0) が essential で、 K_1 が non-trivial のときをいう。 K_1 は K の companion knot、 (V_0, K_0) は pattern と呼ばれる。

satellite knot/link は companion knot の性質をしばしば反映するが、tangle decomposition に関しても、pattern に essential tangle が含まれない場合は、companion knot の性質を引き継ぐことが次の定理によって分かる。

Theorem 7.1. ([11]) *Let K be a satellite knot or link in S^3 with a pattern (V, K) . Suppose there is no essential tangle in (V, K) and K admits an essential tangle decomposition. Then the decomposing sphere S can be isotoped in (S^3, K) so that it gives an essential tangle decomposition of the core of V if $|S \cap K|$ is minimum over all essential tangle decompositions of K .*

従って、satellite knot/link が essential tangle decomposition を持てば、pattern 内に essential tangle が存在するか又は companion knot が essential tangle decomposition を持つことが分かる。逆に、pattern 内の essential tangle はそのまま satellite knot の essential tangle decomposition を与えており、companion knot の essential tangle decomposing sphere は pattern 内の meridian disk で satellite knot/link との交わりが最小になるものを貼り合わせることで satellite knot/link の essential tangle decomposing sphere に拡張できる。従って次を得る。

Corollary 7.2. *Let K be a satellite knot or link with a pattern (V, K) . Then K is n -string prime for all n if and only if there is no essential tangle in (V, K) and the core of V is n -string prime for all n .*

8. THIN POSITION

S^3 内の knot/link K に対して、Gabai と Thurston は次のように thin position を定めた ([6])。

$h: S^3 - \{\pm\infty\} = S^2 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を、projection で $h|_K$ が Morse function になるものとする。 $c_1 < \dots < c_n$ を h の critical value とし、各 i ($i = 1, \dots, n$) に対し $c_i < r_i < c_{i+1}$ を満たすように regular value r_i を選ぶ。写像 $f: \{r_1, \dots, r_{n-1}\} \rightarrow \mathbb{Z}$ を $f(r_i) = |K \cap h^{-1}(r_i)|$ で定める。 h の width を $w(h) = \sum_i f(r_i)$ で、 K の width を $w(K) = \min\{w(h)\}$ で定める。ここで、 \min は K の ambient isotopy で採る。 $w(K)$ を与える K の位置を thin position という。 $f(r_{i-1}) < f(r_i)$, $f(r_i) > f(r_{i+1})$ のとき $h^{-1}(r_i)$ を thick sphere、 $f(r_{i-1}) > f(r_i)$, $f(r_i) < f(r_{i+1})$ のとき $h^{-1}(r_i)$ を thin sphere という。thin sphere を持たない位置を bridge position という。このとき、 K は唯一の thick sphere により bridge tangle decomposition されている。

Remark 8.1. thick sphere を利用することで、Gabai は Property R を ([6])、Gordon と Luecke は 補空間予想を解決している ([8])。

Thompson は thin position が essential tangle decomposition と関係することを発見した。

Theorem 8.2. ([44]) *Let K be a knot in thin position. Then K is also a bridge position or K admits an essential tangle decomposition.*

Remark 8.3. 従って、thin position が bridge position でなければ essential tangle decomposition を許容することが分かるが、逆は一般に成立しない。例えば、 8_{16} は prime 3-bridge knot であるから thin position は bridge position でなければならないが、essential free 2-string tangle decomposition を許容する knot で crossing number が最小のものである。

Thompson が与えた証明では、thin position が bridge position でないとき最も上にある thin sphere を compression していき、essential tangle decomposing sphere の存在を示しているが、更に Heath と Kobayashi は上側へは incompressible であることを示している ([12])。一般に、次が成り立つと予想する。

Conjecture 8.4. 全ての thin sphere は essential tangle decomposition を与える。

特に、1-string composite の場合は逆も成立すると予想したい。即ち、composite knot $K = K_1 \# K_2$ を thin position に置くと、

Conjecture 8.5. decomposing sphere は thin sphere として現れる。

この予想が解決されれば、次の帰結が得られる。

Corollary 8.6.

$$w(K_1) = w(K_1) + w(K_2) - 2$$

REFERENCES

1. S. A. Bleiler, *Knots prime on many strings*, Trans. Amer. Math. Soc. **282** (1984) 385–401.
2. M. Brown, *A proof of the generalized Schönflies theorem*, Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960) 74–76.
3. B. E. Clark, *The Heegaard genus of manifolds obtained by surgery on links and knots*, Internat. J. Math. & Math. Sci. **3** (1980) 583–589.
4. J. H. Conway, *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, In: Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, New York, 1970, 329–358.
5. M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke and P. B. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987) 237–300.
6. D. Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds III*, J. Differential Geometry **26** (1987) 479–536.
7. H. Goda, M. Ozawa and M. Teragaito, *On tangle decompositions of tunnel number one links*, J. Knot Theory and its Ramification **8** (1999) 299–320.
8. C. McA. Gordon and J. Luecke, *Knots are determined by their complements*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989) 371–415.
9. C. McA. Gordon and A. W. Reid, *Tangle decompositions of tunnel number one knots and links*, J. Knot Theory and its Ramification **4** (1995) 389–409.
10. Y. Hashizume, *On the uniqueness of the decomposition of a link*, Osaka Math. J. **10** (1958) 283–300, Erratum *ibid.* **11** (1959) 249.
11. C. Hayashi, H. Matsuda and M. Ozawa, *Tangle decompositions of satellite knots*, Revista Mathematica Complutense Vol. **12**, (1999) 417–437.
12. D. J. Heath and T. Kobayashi, *Essential tangle decomposition from thin position of a link*, Pacific J. Math. **179** (1997) 101–117.
13. J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Studies No. **86**, Princeton University Press, 1976.
14. P. Hill, *On double-torus knots (I)*, J. Knot Theory and its Ramification **8** (1999) 1009–1048.
15. P. Hill and K. Murasugi, *On double-torus knots (II)*, to appear in J. Knot Theory and its Ramification.

16. A. Jones, *Composite two-generator links have a Hopf link summand*, *Topology Appl.* **67** (1995) 165–178.
17. A. Kawachi, *A survey of Knot Theory*, Birkhäuser Verlag, 1996.
18. R. C. Kirby and W. B. R. Lickorish, *Prime knots and concordance*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **86** (1979) 437–441.
19. T. Kobayashi, *A construction of arbitrarily high degeneration of tunnel numbers of knots under connected sum*, *J. Knot Theory and its Ramification* **3** (1994) 179–186.
20. W. B. R. Lickorish, *Prime knots and tangles*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **267** (1981) 321–332.
21. H. Matsuda, *Tangle decompositions of doubled knots*, *Tokyo J. Math.* **21** (1998) 247–253.
22. H. Matsuda and M. Ozawa, *Free genus one knots do not admit essential tangle decompositions*, *J. Knot Theory and its Ramification* **7**, 945–953.
23. W. Menasco, *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, *Topology* **23** (1984) 37–44.
24. Y. Moriah, *On the free genus of knots*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **99** (1987) 373–379.
25. K. Morimoto, *On composite tunnel number one links*, *Topology Appl.* **59** (1994) 59–71.
26. K. Morimoto, *On the additivity of h -genus of knots*, *Osaka J. Math.* **31** (1994) 137–145.
27. K. Morimoto, M. Sakuma and Y. Yokota, *Identifying tunnel number one knots*, *J. Math. Soc. Japan* **48** (1996) 667–688.
28. R. Myers, *Homology cobordisms, link concordances, and hyperbolic 3-manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **273** (1983) 75–92.
29. Y. Nakanishi, *Primeness of links*, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* **9** (1981) 415–440.
30. Y. Nakanishi, *Prime and simple links*, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* **11** (1981) 257–258.
31. F. H. Norwood, *Every two generator knot is prime*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **86** (1982) 143–147.
32. U. Oertel, *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, *Pacific J. Math.* **111** (1984) 209–230.
33. M. Ozawa, *Tangle decompositions of knots and links*, A dissertation submitted for the degree of doctor of science at Waseda university, June 1999.
34. M. Ozawa, *Uniqueness of essential free tangle decompositions of knots and links*, *Proceedings of Knots 96* edited by Shin'ichi Suzuki, World Scientific Publ. Co. (1997) 500–512.
35. M. Ozawa, *On uniqueness of essential tangle decompositions of knots with free tangle decompositions*, in *Proc. Appl. Math. Workshop 8*, ed. G. T. Jin and K. H. Ko, KAIST, Taejon (1998) 227–232.
36. M. Ozawa, *Tangle decompositions of double torus knots and links*, *J. Knot Theory and its Ramification* **8** (1999) 931–939.
37. M. Ozawa, *Synchronism of an incompressible non-free Seifert surface for a knot and an algebraically split closed surface in the knot complement*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **128** (2000) 919–922.
38. M. Ozawa, *Closed incompressible surfaces in the complements of positive knots*, preprint submitted to *Comment. Math. Helv.*
39. M. Scharlemann, *Tunnel number one knots satisfy the Poenaru conjecture*, *Topology Appl.* **18** (1984) 235–258.
40. A. Schönflies, *Beitrage zur Theorie der Punktmengen III*, *Math. Ann.* **62** (1906) 286–328.
41. H. Schubert, *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, *Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. Kl.* **3** (1949) Abh: 57–104.
42. H. Schubert, *Über eine Numerische Knoteninvariante*, *Math. Z.* **61** (1954) 245–288.
43. T. Soma, *Hyperbolic, fibred links and fibre concordance*, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **96** (1984) 283–294.
44. A. Thompson, *Thin position and bridge number for knots in the 3-sphere*, *Topology* **36** (1996) 505–507.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, SCHOOL OF EDUCATION, WASEDA UNIVERSITY, NISHIWASEDA
 1-6-1, SHINJUKU-KU, TOKYO 169-8050, JAPAN
E-mail address: ozawa@musubime.com

Topological Lattices $C_p(X)$ and Continuous Lattice-homomorphisms

Toshiji Terada

Yokohama National University

1 Introduction

All topological spaces considered here are assumed to be Tychonoff. For a space X , the set of all real-valued continuous functions on X is denoted by $C(X)$. We can consider various mathematical structures on this set $C(X)$. For example, we know that $C(X)$ can be considered as a vector space, a ring, an ordered space and etc. We are particularly interested in the structure on $C(X)$ obtained by combining an order structure and a topological structure. The order considered here is the usual one defined as follows: $f \leq g$ if and only if $f(x) \leq g(x)$ at every point $x \in X$. It follows that $C(X)$ is a lattice under this ordering. In case topological spaces are assumed to be compact, the following classical theorems are well-known.

Kaplansky Theorem[4]. *Let X, Y be compact spaces. If lattices $C(X), C(Y)$ are isomorphic, then X and Y are homeomorphic.*

Here lattices $C(X), C(Y)$ are called to be isomorphic if there exists a one-to-one map Φ from $C(X)$ onto $C(Y)$ which satisfies $\Phi(f \wedge g) = \Phi(f) \wedge \Phi(g)$ and $\Phi(f \vee g) = \Phi(f) \vee \Phi(g)$ for any $f, g \in C(X)$. Such a map Φ is called a lattice-isomorphism. In general, if $C(X)$ and $C(Y)$ are isomorphic as rings, then $C(X)$ and $C(Y)$ are isomorphic as lattices. Hence the following theorem is also well-known as a corollary of the Kaplansky theorem.

Gelfand-Kolmogoroff Theorem[2]. *Let X, Y be compact spaces. If rings $C(X), C(Y)$ are isomorphic, then X and Y are homeomorphic.*

However the Kaplansky theorem and the Gelfand-Kolmogoroff theorem can not be unconditionally extended to the class of Tychonoff spaces. In fact, any space X can be densely embedded in a space vX called the Hewitt realcompactification of X such that rings $C(X)$

and $C(vX)$ are isomorphic. Generally vX is not homeomorphic to X . However if some topology is set on the ring $C(X)$, then the topological ring $C(X)$ happens to characterize the topology of X . The topology on $C(X)$ considered here is the topology of pointwise convergence. That is, for $f \in C(X)$, basic open neighborhoods of f are given by

$$\langle f, \{x_1, \dots, x_n\}, \epsilon \rangle = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, n\},$$

where $\{x_1, \dots, x_n\}$ is an arbitrary finite subset of X and an arbitrary $\epsilon > 0$. The space $C(X)$ with the topology of pointwise convergence is denoted by $C_p(X)$. Concerning topological rings $C_p(X)$ the following basic result is known.

Nagata Theorem[5]. If $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are isomorphic as topological rings, then Tychonoff spaces X and Y are homeomorphic.

Of course, we can consider $C_p(X)$ as a topological vector space. It is also well-known that there are non-homeomorphic spaces X and Y such that $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are isomorphic as topological vector spaces (see [1]).

The lattice $C(X)$ with the topology of pointwise convergence is also denoted by $C_p(X)$. Since the lattice operations \vee and \wedge are continuous as maps from $C_p(X) \times C_p(X)$ to $C_p(X)$, we can say that $C_p(X)$ is a topological lattice. If there is a homeomorphism $\Phi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ which is also a lattice-isomorphism, then $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are called to be isomorphic as topological lattices. As a generalization of the Nagata theorem and an analogy of the Kaplansky theorem, we can show the following:

Theorem A. *If $C_p(X)$ and $C_p(Y)$ are isomorphic as topological lattices, then X and Y are homeomorphic.*

An outline of the proof of this theorem and some results related to this theorem are presented in the next section.

Since the real line \mathbf{R} is a topological lattice under the usual ordering, we can consider the set of all continuous lattice-homomorphism from $C_p(X)$ to \mathbf{R} . We denote this set by $\diamond C_p(X)$. Further, if the topology of pointwise convergence (i.e. the relative topology of $C_p(C_p(X))$) is given on $\diamond C_p(X)$, then this set becomes a topological space. This topological space is denoted by $\diamond_p C_p(X)$. In a sense $\diamond_p C_p(X)$ is the dual of a topological lattice $C_p(X)$. We are interested in the topological structure of $\diamond_p C_p(X)$. For example, let us consider the subspace of $\diamond_p C_p(X)$ consisting of open continuous lattice-homomorphisms. This subspace is denoted by $\diamond_p^o C_p(X)$. Notice that a function $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ is strictly increasing (resp. increasing) if and only if f is a lattice-isomorphism (resp. lattice-homomorphism). Let us denote the set of all strictly increasing (resp. increasing) continuous functions from \mathbf{R} into itself by $C^{si}(\mathbf{R})$ (resp. $C^i(\mathbf{R})$). When the relative topologies of $C_p(\mathbf{R})$ are given on

these sets, these spaces are denoted by $C_p^{si}(\mathbf{R})$ and $C_p^i(\mathbf{R})$ respectively. Then we have the following.

Theorem B. $\diamond_p^o C_p(X)$ is homeomorphic to the product space $X \times C_p^{si}(\mathbf{R})$.

2 Theorem A and related results

In the topological lattice $C_p(X)$ there are important subsets called open prime ideals. A subset I of the algebraic lattice $C(X)$ is said to be a prime ideal [6] if the following conditions are satisfied:

- 1) If $f \in I$ and $g \leq f$, then $g \in I$.
- 2) If $f, g \in I$, then $f \vee g \in I$.
- 3) If $f \wedge g \in I$, then $f \in I$ or $g \in I$.
- 4) $I \neq \emptyset$, $I \neq C(X)$.

In case a prime ideal I of $C_p(X)$ is an open set, we call I to be an open prime ideal.

A prime ideal I of $C(X)$ is said to be associated with a point x in X if $f \in I$, $g \in C(X)$ and $g(x) < f(x)$ imply $g \in I$. Notice that such a point x is unique for I if it exists. The following lemma is fundamental in our argument.

Lemma. *If I is an open prime ideal of $C_p(X)$, then there exists a unique point x_I in X such that I is associated with x_I .*

Proof. Let f be an arbitrary element of I . Then there is a finite subset $\{x_1, \dots, x_k\}$ of X and an $\epsilon > 0$ such that the basic open set

$$\langle f, \{x_1, \dots, x_k\}, \epsilon \rangle = \{g \in C(X) : |g(x_i) - f(x_i)| < \epsilon, i = 1, \dots, k\}$$

is a subset of I . Then

(1) *there exists a point x_I in $\{x_1, \dots, x_k\}$ which satisfies : if $g \in C(X)$ and $g(x_I) < f(x_I)$, then $g \in I$.*

Suppose that, for every point $x_i \in \{x_1, \dots, x_k\}$, there exists $g_{x_i} \notin I$ such that $g_{x_i}(x_i) < f(x_i)$. Let

$$h = g_{x_1} \wedge \dots \wedge g_{x_k}.$$

Then $h \notin I$. On the other hand, since $(h \vee f)(x_i) = f(x_i)$ for each $i = 1, \dots, k$, the function $h \vee f$ must be in I . This contradicts to the above condition 1) of the prime ideals.

(2) *Such a point x_I is uniquely determined.*

Assume that x_I and x_J be distinct points which satisfy the condition of (1). Then for any $h \in C(X)$ we can take $h_1, h_2 \in C(X)$ with the following properties:

$$h = h_1 \vee h_2, h_1(x_I) < f(x_I), h_2(x_J) < f(x_J).$$

This means that $h_1, h_2 \in I$ and hence $h \in I$. This is a contradiction since $I = C(X)$. By the same argument, the following can be shown:

(3) *The point x_I does not depend on the choices of f and $\langle f, \{x_1, \dots, x_k\}, \epsilon \rangle$.*

Then it follows that

(4) *I is associated with x_I .*

Outline of the proof of Theorem A. Let $\Phi : C_p(X) \rightarrow C_p(Y)$ be a lattice-isomorphism which is also a homeomorphism. Then a map $\phi : Y \rightarrow X$ is defined as follows: Take an arbitrary point y of Y . For any real number a , let

$$J_y^{<a} = \{g \in C(X) : \Phi(g)(y) < a\}.$$

This set is an open prime ideal of $C_p(X)$. Then there is the only one point x in X such that $J_y^{<a}$ is associated with x . Since two open prime ideals I_1, I_2 are associated with the same point if and only if $I_1 \cap I_2$ is a prime ideal, this point x does not depend on the choice of value a . Further the map ϕ defined by $\phi(y) = x$ is well-defined and one-to-one. Then in order to complete the proof, it suffices to show the following:

(1) ϕ is onto.

(2) ϕ is continuous.

(3) Let $\psi : X \rightarrow Y$ be the map derived from Φ^{-1} by the same method above. Then $\psi = \phi^{-1}$.

Since a map Φ from $C(X)$ onto $C(Y)$ is order-isomorphic if and only if Φ is lattice-isomorphic, Theorem A can be expressed as follows:

Theorem A'. *If there is an order-isomorphic homeomorphism between $C_p(X)$ and $C_p(Y)$, then X and Y are homeomorphic.*

A subset F of a space X is called to be a zero-set [3] if there is a real-valued continuous function f on X such that $F = f^{-1}(0)$. The complement of a zero-set is called to be a cozero-set. We can show the following.

Theorem C. *$C_p(Y)$ is embedded in $C_p(X)$ as a topological sublattice if and only if Y is a continuous image of a cozero-set of X .*

In fact, for a cozero-set U of X , assume that there is a continuous map ϕ from U onto Y . Then there is a canonical embedding $\Phi : C_p(Y) \rightarrow C_p(U)$ defined by $\Phi(f) = f \circ \phi$ for any $f \in C_p(Y)$. We can take an order-preserving homeomorphism $t : \mathbf{R} \rightarrow (-1, 1)$ and a continuous map $s : X \rightarrow [0, 1]$ such that $s^{-1}(0) = X - U$. Now, let $\Psi : C_p(Y) \rightarrow C_p(X)$ be the map defined as follows: $\Psi(f)(x) = 0$ for $x \in X - U$ and $\Psi(f)(x) = s(x)t(\Phi(f)(x))$

for $x \in U$. Then it is not difficult to see that $\Psi(f) \in C(X)$ and hence Ψ is a topological lattice embedding. For the reverse implication, we need a similar argument as the proof of Theorem A.

Remark. Let us consider the compact-open topology on $C(X)$. This topological lattice is denoted by $C_k(X)$. The following analogy of Theorem A can be proved.

Theorem A''. *If $C_k(X)$ and $C_k(Y)$ are isomorphic as topological lattices, then X and Y are homeomorphic.*

3 Theorem B and related results

Let X be a topological space. For an arbitrary point x in X , let $\Phi_x : C_p(X) \rightarrow \mathbf{R}$ be the map defined by $\Phi_x(f) = f(x)$ for $f \in C_p(X)$.

Proposition 1. *The map Φ_x satisfies the following.*

- (1) Φ_x is continuous.
- (2) Φ_x is open.
- (3) $\Phi_x(f \vee g) = \Phi_x(f) \vee \Phi_x(g)$ and $\Phi_x(f \wedge g) = \Phi_x(f) \wedge \Phi_x(g)$ for any $f, g \in C_p(X)$.

Generally we can show the following.

Proposition 2. *A map $F : C_p(X) \rightarrow \mathbf{R}$ is an open continuous lattice-homomorphism if and only if there are a point x in X and an order-isomorphic (= lattice-isomorphic) homeomorphism ϕ from \mathbf{R} into itself which satisfy $F = \phi \circ \Phi_x$. Further x and ϕ are uniquely determined by F .*

Proof. Let $F : C_p(X) \rightarrow \mathbf{R}$ be an open continuous lattice-homomorphism. Since $C_p(X)$ is connected, the image $F(C_p(X))$ is connected. Hence $F(C_p(X))$ must be an open interval (a, b) , where $a = -\infty$ or $b = \infty$ are possible. Let c be an arbitrary number in (a, b) . Let

$$I_c = \{f \in C_p(X) : F(f) < c\}.$$

Then the following are obviously satisfied:

- 1) if $f \in I_c$ and $g \leq f$, then $g \in I_c$,
- 2) if $f, g \in I_c$, then $f \vee g \in I_c$,
- 3) if $f \wedge g \in I_c$, then $f \in I_c$ or $g \in I_c$,
- 4) $I_c \neq \emptyset$ and $I_c \neq C_p(X)$.

Since I_c is open in $C_p(X)$, I_c is an open prime ideal of $C_p(X)$. Then there must be a unique point $x \in X$ such that I_c is associated with x by the lemma in the previous section.

Further this point x does not depend on the choice of value c . So we can express this point x like x_F .

Now, let us define the map $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ which satisfies the condition $F = \phi \circ \Phi_{x_F}$. For an arbitrary number r in \mathbf{R} , let c_r be the constant real-valued function of X taking value r . Then the map ϕ is defined by

$$\phi(r) = F(c_r).$$

It can be verified that ϕ satisfies the desired properties. The reverse implication is obvious since the composition of any two open continuous lattice-homomorphisms is an open continuous lattice-homomorphism.

Outline of the proof of Theorem B. By the above proposition, we know that there is a one-to-one correspondence between $\diamond_p^o C_p(X)$ and $X \times C_p^{si}(\mathbf{R})$. That is,

$$F \longleftrightarrow (x, \phi)$$

where $F = \phi \circ \Phi_x$. It can be shown that this correspondence is a homeomorphism. It suffices to show the following two claims:

(1) For any subbasic open neighborhood

$$\langle F; \{f\}, \varepsilon \rangle = \{G \in \diamond_p^o C_p(X) : |G(f) - F(f)| < \varepsilon\}$$

of F in $\diamond_p^o C_p(X)$, there exist an open neighborhood U of x in X and an open neighborhood V of ϕ in $C_p^{si}(\mathbf{R})$ such that $U \times V$ corresponds to a subset of $\langle F; \{f\}, \varepsilon \rangle$.

(2) For any open neighborhood U of x in X and any subbasic open neighborhood $\langle \phi; \{r\}, \varepsilon \rangle = \{\psi \in C_p^{si}(\mathbf{R}) : |\psi(r) - \phi(r)| < \varepsilon\}$ of ϕ in $C_p^{si}(\mathbf{R})$, there exists an open neighborhood W of F in $\diamond_p^o C_p(X)$ such that W corresponds to a subset of $U \times \langle \phi; \{r\}, \varepsilon \rangle$.

Next, we study about the entire space $\diamond_p C_p(X)$ of all continuous lattice-homomorphisms from $C_p(X)$ into \mathbf{R} . In $C_p(X)$, the part of all constant lattice-homomorphisms has a peculiar quality. We denote this part by $Con(C_p(X))$.

By modifying the proof of Proposition 2, it is not difficult to show the following.

Proposition 3. *A map $F : C_p(X) \rightarrow \mathbf{R}$ is a non-constant, continuous lattice-homomorphism if and only if there are a point $x \in X$ and a non-constant, increasing (= lattice-homomorphic) continuous function $\phi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ which satisfy $F = \phi \circ \Phi_x$. Further x and ϕ are uniquely determined by F .*

Then we can prove the following theorem by the similar argument as that of Theorem A. Here the set of all constant functions from \mathbf{R} into itself is denoted by $Con(\mathbf{R})$.

Theorem D. *The space $\diamond_p C_p(X) - \text{Con}(C_p(X))$ is homeomorphic to the product space $X \times (C_p^i(\mathbf{R}) - \text{Con}(\mathbf{R}))$.*

Next, we consider the entire space $\diamond_p C_p(X)$. The set $\diamond C_p(X)$ is the disjoint sum of $\diamond C_p(X) - \text{Con}(C_p(X))$ and $\text{Con}(C_p(X))$. And it is obvious that the subspace $\text{Con}(C_p(X))$ of $\diamond_p C_p(X)$ is homeomorphic to the real line \mathbf{R} . Then it follows that the underlying set of $\diamond_p C_p(X)$ can be considered as the disjoint sum of the product $X \times (C_p^i(\mathbf{R}) - \text{Con}(\mathbf{R}))$ and the real line \mathbf{R} by the above theorem. Here the constant map $c_a \in \diamond_p C_p(X)$ taking value a corresponds to the number $a \in \mathbf{R}$. Let us consider the following topology on $(X \times (C_p^i(\mathbf{R}) - \text{Con}(\mathbf{R}))) \cup \mathbf{R}$: The topology on $X \times (C_p^i(\mathbf{R}) - \text{Con}(\mathbf{R}))$ is left as it is. For a point a in \mathbf{R} , we take the family of the following sets as a neighborhood base at a :

$$\bigcup \{U_n \times \langle a; \{-n, n\}, \varepsilon \rangle : n = 1, 2, \dots\} \cup (a - \varepsilon, a + \varepsilon),$$

where ε is an arbitrary positive number,

$$\langle a; \{-n, n\}, \varepsilon \rangle = \{\sigma \in C_p^i(\mathbf{R}) - \text{Con}(\mathbf{R}) : |\sigma(-n) - a| < \varepsilon, |\sigma(n) - a| < \varepsilon\}$$

and $\{U_n : n = 1, 2, \dots\}$ is a cover of X consisting of cozero-sets of X such that there is a sequence $\{Z_n : n = 1, 2, \dots\}$ of zero-sets which satisfies that $U_n \subset Z_n \subset U_{n+1}$ for each $n = 1, 2, \dots$. Let us denote this topological space by $(X \times C_p^i(\mathbf{R}))^\sim$. Then we have the following.

Theorem E. *For any space X , the space $\diamond_p C_p(X)$ is homeomorphic to $(X \times C_p^i(\mathbf{R}))^\sim$.*

In case X is compact, we can show the following. Here c_a is the constant function taking value a .

Theorem F. *Let X be a compact space. Then $\diamond_p C_p(X)$ is homeomorphic to the quotient space $(X \times C_p^i(\mathbf{R})) / \{X \times \{c_a\} : a \in \mathbf{R}\}$ obtained by collapsing the closed subset $X \times \{c_a\}$ to a point for each $a \in \mathbf{R}$.*

Proof. Note that the underlying set of $(X \times C_p^i(\mathbf{R})) / \{X \times \{c_a\} : a \in \mathbf{R}\}$ corresponds canonically to the underlying set of $(X \times C_p^i(\mathbf{R}))^\sim$. Since the topology of $(X \times C_p^i(\mathbf{R}))^\sim$ is generally weaker than the quotient topology, it suffices to show the following:

(*) If V is an open subset of $(X \times C_p^i(\mathbf{R}))^\sim$ including $X \times \{c_a\}$, then there are $\varepsilon > 0$ and $r^-, r^+ \in \mathbf{R}$ such that

$$X \times \{c_a\} \subset X \times \langle c_a; \{r^-, r^+\}, \varepsilon \rangle \subset V.$$

We can assume that $V = \bigcup \{U_x \times \langle c_a; \{r_x^-, r_x^+\}, \varepsilon_x \rangle : x \in X\}$, where $r_x^- < r_x^+$ and U_x is an open neighborhood of x in X . Then there are finite points $x_1, \dots, x_n \in X$ such that $U_{x_1} \cup$

$\cdots \cup U_{x_n} = X$ since X is compact. Let $r^- = \min\{r_{x_1}^-, \dots, r_{x_n}^-\}$, $r^+ = \max\{r_{x_1}^+, \dots, r_{x_n}^+\}$ and $\varepsilon = \min\{\varepsilon_{x_1}, \dots, \varepsilon_{x_n}\}$. Then it is not difficult to see that $X \times \langle c_a; \{r^-, r^+\}, \varepsilon \rangle \subset V$.

Example. There are non-homeomorphic spaces X and Y such that $\diamond_p^{\circ} C_p(X)$ and $\diamond_p^{\circ} C_p(Y)$ are homeomorphic. In fact, $\diamond_p^{\circ} C_p(C_p^{si}(\mathbf{R}))$ and $\diamond_p^{\circ} C_p(\mathbf{R})$ are homeomorphic.

Let

$$C_p^{si}([0, \infty), 0) = \{f \in C_p^{si}([0, \infty)) : f(0) = 0\}.$$

Then we can show the following.

(1) $C_p^{si}(\mathbf{R})$ is homeomorphic to the product space $\mathbf{R} \times C_p^{si}([0, \infty), 0)^2$.

(2) $C_p^{si}([0, \infty), 0)^2$ is homeomorphic to $C_p^{si}([0, \infty), 0)$.

Then

$$C_p^{si}(\mathbf{R}) \times C_p^{si}(\mathbf{R}) \approx \mathbf{R}^2 \times C_p^{si}([0, \infty), 0)^4 \approx \mathbf{R}^2 \times C_p^{si}([0, \infty), 0)^2 \approx \mathbf{R} \times C_p^{si}(\mathbf{R}).$$

Hence

(3) $\diamond_p^{\circ} C_p(C_p^{si}(\mathbf{R}))$ and $\diamond_p^{\circ} C_p(\mathbf{R})$ are homeomorphic.

Since $C_p^{si}(\mathbf{R})$ is not metrizable, $C_p^{si}(\mathbf{R})$ and \mathbf{R} are not homeomorphic.

References

- [1] A. V. Arkhangel'skii, *Topological Function Spaces*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1992.
- [2] I. M. Gelfand and A. N. Kolmogoroff, *On rings of continuous functions on topological spaces*, Dokl. SSSR 22 (1939), 11-15.
- [3] L. Gillman and M. Jerison, *Rings of Continuous Functions*, Princeton, 1960.
- [4] I. Kaplansky, *Lattices of continuous functions*, Bull. Amer. Math. 53 (1947), 617-623.
- [5] J. Nagata, *On lattices of functions on topological spaces and of functions on uniform spaces*, Osaka Math. J. 1 (1949), 166-181.
- [6] Z. Semadani, *Banach Spaces of Continuous Functions*, Polish Scientific Publishers, 1971.
- [7] T. Terada, *Topological lattices $C_k(X)$ and $C_p(X)$: embeddings and isomorphisms*, Tsukuba J. Math. (to appear).
- [8] T. Terada, *Spaces of continuous lattice-homomorphisms from $C_p(X)$ to \mathbf{R}* , preprint.

安定ホモトピー SEIBERG-WITTEN 不変量の幾つかの応用。

亀谷 幸生, 古田 幹雄, AND 南 範彦

1. スピン構造に対する安定ホモトピー SEIBERG-WITTEN 不変量

X を向きつけされた 4 次元閉多様体で、第一ベッチ数 $b_1(X) = 0$ なるものとする。 X の $Spin^c$ -構造 c に対し、 m と n を

$$m := \frac{c_1(c)^2 - \text{sign}(X)}{2}, \quad n := b^+,$$

によって定義する。ここで、 $\text{sign}(X)$ は X の交点形式の符号数、 b^+ は $H^2(X, \mathbf{R})$ の極大正定値部分空間 $H^+(X)$ の次元であった。今 m は非負と仮定し、 $H^+(X)$ の向き o_X を固定する。

すると (X, c, o_X) の安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量 [3], [1]

$$SW(X, c, o_X) \in \{S(\mathbf{C}^m), S(\mathbf{R}^n)\}^{U(1)} := \lim_{p, q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{C}^{p+m} \oplus \mathbf{R}^q), S(\mathbf{C}^p \oplus \mathbf{R}^{q+n})]^{U(1)}$$

は、その“コホモトピー・フレビッツ像”が通常の Seiberg-Witten 不変量となるように定義される (c.f. §3)。

ここで、 $Spin^c$ -構造 c が $Spin$ -構造 s から来ると仮定し、 k と l を

$$k := -\frac{\text{sign}(X)}{4}, \quad l := b^+,$$

によって定義しよう。 E_8 を非負定値として E_8 のカルタン行列を取ったもの、 H を rank 2 の双曲ユニモデュラー行列、とすれば、 X の交差形式は \mathbf{R} 上

$$2kE_8 \oplus lH$$

の形となる。

この時、スピン構造に対する (X, s, o_X) の安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量が定義されるので有るが、ここで極めて重要なのは、対称が $U(1)$ から $Pin_2 = U(1) \cup U(1)j$ へと広がるという事だ。実際、4 元数体 \mathbf{H} を右からの $Pin_2 = U(1) \cup U(1)j$ の掛け算によって右 Pin_2 加群とみなし、また、 \mathbf{R} を、右からの $\{\pm 1\}$ の掛け算と同一視 $\{\pm 1\} \cong Pin_2/U(1)$ によって Pin_2 加群とみなしたものを \tilde{R} とおくと、スピン構造に対する (X, s, o_X) の安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量 [3]

$$SW(X, s, o_X) \in \{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2} := \lim_{p, q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{H}^{p+k} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q), S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+l})]^{Pin_2}$$

が定義され、しかも、これらの安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量達は Pin_2 から $U(1)$ への同変性制限写像により対応しているのである。

$$\begin{aligned} \{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2} &\rightarrow \{S(\mathbf{C}^{2k}), S(\mathbf{R}^l)\}^{U(1)} \\ SW(X, s, o_X) &\mapsto SW(X, c, o_X) \end{aligned}$$

本講演の目的は、これらの安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量に関する我々の研究の現状を、御報告する事に有る。大体の感覚を得て頂く為に、まずはスピン構造に対する (X, s, o_X) の安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量を使って解く事の出来る、ある問題の背景とその結果を毒味して頂きたい。

2. ある問題の背景と結果

通常の Seiberg-Witten 不変量は、多くの場合、4次元多様体の微分構造の微妙な不変量である。しかし、ある場合には、通常の Seiberg-Witten 不変量の情報の一部が、古典的な不変量のみによって決まってしまうことが知られている。

Morgan-Szabo による次の定理がある。

Theorem 2.1. (Morgan-Szabo [9]) 4次元スピンの閉多様体 X が整数 $m \geq 1$ に対して

$$b_1(X) = 0, \quad b_2(X) = 24m - 2, \quad \text{sign}(X) = -16m$$

を満たすとする。スピン構造 s に対する通常の Seiberg-Witten 不変量の値の偶奇は、

$$SW(X, s) \equiv \begin{cases} 1 \pmod{2} & (m = 1) \\ 0 \pmod{2} & (m \geq 2) \end{cases}$$

によって与えられる。

Remark 2.2. §1 で安定 Seiberg-Witten 不変量を述べたように（ここでは、 $b_1(X) = 0$ を最初から仮定した）、通常の Seiberg-Witten 不変量を \mathbf{Z} 値の不変量として符号とともに定義するためには、 $H^1(X, \mathbf{R}) \oplus H^+(X, \mathbf{R})$ に向きを指定する必要がある。この指定がないと、Seiberg-Witten 不変量の絶対値は定まるが、符号を決めることができない。しかし、Seiberg-Witten 不変量の偶奇は、この指定なしに決まる。

特に、 $m = 1$ は、 $K3$ と同型の有理コホモロジー環をもつ場合にあたる。このとき、Seiberg-Witten 不変量が 0 でないことは、次の幾何学的な応用がある。

Corollary 2.3. (Morgan-Szabo [9]) 4次元スピンの閉多様体 X が $K3$ と同型の有理コホモロジー環をもつとき、 X に埋めこまれた任意の有向閉曲面 Σ に対して次の “adjunction inequality”,

$$2g(\Sigma) - 2 \geq [\Sigma] \cdot [\Sigma]$$

が成立する。ただし、 $g(\Sigma)$ は Σ の種数であり、右辺は Σ の自己交叉数である。

Ruberman-Strle は、4次元ホモロジートーラスに対して類似の結果を証明している。

Theorem 2.4. (Ruberman-Strle [11]) 4次元スピンの閉多様体 X が、 $H_1(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^4$ および $H_2(X, \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}^6$ を満たすと仮定し、 $H_1(X, \mathbf{Z})$ のひとつの基底を $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ とおく。スピン構造 s に対する通常の Seiberg-Witten 不変量の値の偶奇は

$$SW(X, s) \equiv \alpha_1 \cup \alpha_2 \cup \alpha_3 \cup \alpha_4, [X] \pmod{2}$$

によって与えられる。

右辺が奇数の場合には、やはり一般化された adjunction inequality が系として得られる。

上の例は、モジュライ空間の次元が 0 である通常の Seiberg-Witten 不変量に関するものであった。

我々の結果は、[3], [1] において定義された安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量に対しても、類似の結果が成立するということである：

Theorem 2.5. (FKM [4]) 4次元スピンの閉多様体 X が整数 $m \geq 1$ に対して

$$b_1(X) = 0, \quad b_2(X) = 48m - 4, \quad \text{sign}(X) = -32m$$

を満たすとする。スピン構造 s に対する安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量は、

$$SW(X, s) = \begin{cases} 1 \in \mathbf{Z}/2 & (m = 1) \\ 0 \in \mathbf{Z}/2 & (m \geq 2) \end{cases}$$

によって与えられる。

Corollary 2.6. (FKM [4]) 4次元スピノ閉多様体 X が $K3\#K3$ と同型の有理コホモロジー環をもつとき、 X に埋めこまれた任意の有向閉曲面 Σ に対して次の “adjunction inequality”,

$$2g(\Sigma) - 2 \geq [\Sigma] \cdot [\Sigma]$$

が成立する。ただし、 $g(\Sigma)$ は Σ の種数であり、右辺は Σ の自己交叉数である。

なお、Ruberman-Strle の結果のように、 $H_1(X)$ が消えていない場合に安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量に対して類似の考察を行うことは今後の課題である。

3. THEOREM 2.5 の証明の方針

4次元多様体上のスピノ構造に対応するスピノル束には、一般の $Spin^c$ 構造に対応するスピノル束と違って、 Sp_1 による対称性がある。Seiberg-Witten 方程式は、 Sp_1 の部分群である Pin_2 による対称性をもつことが知られている。Seiberg-Witten 不変量は、一種の写像度として理解することができる。したがって、上に述べた一連の定理は、いずれも、同変写像の写像度が、ある限定を受けることとして理解できる。

プロトタイプとして、次の定理はよく知られている。

Proposition 3.1. 球面 S^n 上の anti-podal map を $\iota: S^n \rightarrow S^n$ とおく。任意の滑らかな ι 同変写像 $f: S^n \rightarrow S^n$ に対して、 f の写像度は奇数である。

これは、例えば $H^*(S^n/\iota, \mathbf{Z}/2)$ のコホモロジー環の構造を用いて直ちに証明することができるが、幾何学的方法として、次のような証明も可能である。

1. $f = \iota$ とすると、これは ι 同変な写像であり、写像度は ± 1 である。
2. 従って、 ι 同変な二つの写像 f_0, f_1 にたいして、写像度の差が偶数になることを示せば証明は終わる。
3. 一般に、 S^n から S^n への滑らかな写像 f_0, f_1 が与えられたとき、両者を S^n から \mathbf{R}^{n+1} への写像とみなし、generic なホモトピー $\tilde{f}: S^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ で結ぶ。このとき、 $\tilde{f}^{-1}(0)$ は有限個の点であり、その個数が f_0, f_1 の写像度の差を与えている（個数は、自然な向きに応じて符号付で数えるものとする）。
4. もし、 f_0, f_1 が ι 同変であれば、 ι 作用が $S^n \times [0, 1]$ 上自由であることを用いると、 \tilde{f} を ι 同変なものにとれる。ただし、 \mathbf{R}^{n+1} 上で ι は -1 倍に作用するものとする。
5. このとき、 $\tilde{f}^{-1}(0)$ には ι が自由に作用するので、偶数個の点からなる。したがって、 f_0, f_1 の写像度の差は偶数であり、証明が完結する。

ι の involutive な作用の代わりに Pin_2 の作用を考え、 \mathbf{R}^{n+1} の代わりに Pin_2 の無限次元の表現空間を考えることによって、Seiberg-Witten 不変量への応用が得られる。無限次元表現は、結局有限次元近似によって有限次元の表現にまで落ちるので、命題 3.1 と似たタイプの命題が、キーとなる。実際、 $K3$ 曲面と同じ有理コホモロジー環をもつ場合に、Morgan-Szabo の議論を、上の議論に近いかたちで定式化して述べると、次のようになる。

Proposition 3.2. (Morgan-Szabo) Pin_2 同変な滑らかな写像

$$f_1: S(\mathbf{H}^{p+1} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \rightarrow S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+3})$$

が、generic であるとする。また、 f_0 を $S(0 \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+3})$ 上に値をとる定数写像とする。 f_0 と f_1 を、 $U(1)$ 同変で generic なホモトピー

$$\tilde{f}: S(\mathbf{H}^{p+1} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+3}$$

で結ぶ。このとき、 $\tilde{f}^{-1}(0)/U(1)$ は奇数個の点になる。

上の命題は, 先の議論と全く平行した方法によって示される.

ここで, f_1 は, Seiberg-Witten 方程式の有限次元近似に相当する. $\tilde{f}^{-1}(0)/U(1)$ の点を, 符号付で数えたものが, Seiberg-Witten 不変量に相当する.

Remark 3.3. 安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量は, この場合,

$$f_1 \in \{S(\mathbf{H}^1), S(\tilde{\mathbf{R}}^3)\}^{Pin_2} := \lim_{p,q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{H}^{p+1} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q), S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+3})]^{Pin_2}$$

となる. 更に, 同変性を Pin_2 から $U(1)$ に弱めた時に対応する集合は \mathbf{Z} と同一視され, f_1 の像のこれによる同一視が, 通常の Seiberg-Witten 不変量を与えている

$$\begin{aligned} \{S(\mathbf{H}^1), S(\tilde{\mathbf{R}}^3)\}^{Pin_2} &\rightarrow \{S(\mathbf{C}^2), S(\mathbf{R}^3)\}^{U(1)} \cong \mathbf{Z} \\ f_1 &\mapsto SW(X, c, o_X) \end{aligned}$$

次に, $K3 \# K3$ と同じ有理コホモロジー環をもつ場合を考える. このとき, 安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量が値をとる集合は, スピン構造に対しては,

$$\{S(\mathbf{H}^2), S(\tilde{\mathbf{R}}^6)\}^{Pin_2} := \lim_{p,q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{H}^{p+2} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q), S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6})]^{Pin_2}$$

となる. 同変性を Pin_2 から $U(1)$ に弱めた時に対応する集合は $\mathbf{Z}/2$ と同一視され ([1]), この同一視が, $Spin^c$ 構造に対する安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量を与えている.

$$\begin{aligned} \{S(\mathbf{H}^2), S(\tilde{\mathbf{R}}^6)\}^{Pin_2} &\rightarrow \{S(\mathbf{C}^4), S(\mathbf{R}^6)\}^{U(1)} \cong \mathbf{Z}/2 \\ f_1 &\mapsto SW(X, c, o_X) \end{aligned}$$

この $\mathbf{Z}/2$ の由来は $\pi_1^S \cong \mathbf{Z}/2$ である. あるいは, Pontrjagin-Thom 構成と J 準同型を通じて, $\pi_1(SO) \cong \mathbf{Z}/2$ であるともいえる.

まず, この要素を detect することが必要である.

1. $U(1)$ 同変で generic な滑らかな写像

$$f_0, f_1 : S(\mathbf{H}^{p+2} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \rightarrow S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6})$$

が与えられたとする. f_0 と f_1 を, $U(1)$ 同変で generic なホモトピー

$$\tilde{f} : S(\mathbf{H}^{p+2} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6}$$

で結ぶ.

2. このとき, $M := \tilde{f}^{-1}(0)/U(1)$ はコンパクトな 1 次元多様体となる. しかも, M の法束は, $\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6}$ の制限と \tilde{f} の微分を通じて同型である.
3. M は,

$$S(\mathbf{H}^{p+2} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \setminus S(\tilde{\mathbf{R}}^q)/U(1) \times [0, 1]$$

の中で, cobordant to zero である. しかし, 法束と $\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6}$ の間の同型をこめて cobordant to zero であるためには, 障害がある. この障害は, 相対第 2 Stiefel-Whitney 類を用いて表示され, $\mathbf{Z}/2$ に値をもつ. この値を $\delta(f_0, f_1)$ と書くと, これは f_0, f_1 の $U(1)$ 同変ホモトピー類にしかよらない. ことが示される.

Lemma 3.4. f_0 が $S(0 \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6})$ 上に値をとる定数写像とするとき, f_1 の代表する安定ホモトピー類

$$[f_1] \in \lim_{p,q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{H}^{p+2} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q), S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6})]^{U(1)} \cong \mathbf{Z}/2$$

は, $\delta(f_0, f_1)$ と一致する.

この補題の元で, 我々の主張は次のように述べることができる.

Proposition 3.5. Pin_2 同変な滑らかな写像

$$f_1 : S(\mathbf{H}^{p+2} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \rightarrow S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6})$$

が, *generic* であるとする. また, f_0 を $S(0 \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+6})$ 上に値をとる定数写像とする. このとき, $\delta(f_0, f_1) = 1 \in \mathbf{Z}/2$ が成立する.

この命題の証明は, 前の2つの命題と同様のステップを経て証明されるが, 最後のステップは, それらの場合ほど自明ではない. 詳細は [4] に譲る.

4. 基点のない G -FREUDENTHAL SUSPENSION 定理

さて, 毒味の感想は如何であろうか? Theorem 2.5 の系として得られる Corollary 2.6 という全く幾何学的な結果を得る為に, 安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量という, ホモトピー論的な量が, 極めて本質的に使われた事が判って頂けたと思う。

しかしながらその一方で, 証明は最後にホモトピー論的結果

$$\{S(\mathbf{C}^4), S(\mathbf{R}^6)\}^{U(1)} \cong \mathbf{Z}/2$$

に帰着するものの, 大部分は幾何学的な議論が占めている. 証明のプロトタイプ Proposition 3.1 に対しては mod-2 コホモロジーを用いた簡明な証明があったことを思い起こすと, もっと見通しの良い簡明な証明が期待される所だ。

ところがちょっと考えればすぐに事はそれほどた易くない事が分かる. 問題はスピン構造に対する 安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量が, ある一つの同変ホモトピー集合に値を持つのでなく,

$$\{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2} := \lim_{p,q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{H}^{p+k} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q), S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+l})]^{Pin_2}$$

という基点を考えない同変ホモトピー集合たちの帰納的極限として定義される物の中に値を持つ事に有る。

実際, 基点付きの状況で考えられると, 例えば $A = S^V$, G の直交表現の一点コンパクト化, に対して adjoint 同型

$$[X \wedge A, Y]_*^G \cong [X, \text{Map}_*(A, Y)]_*^G$$

が使える, それを用いて G -Freudenthal Suspension 定理 [8] [10] が証明されたのだった. 一方, ここでの状況は基点が与えられておらず, スマッシュ積 $X \wedge A$ の代わりに join $X * A$ を考えなければならないのだが,

$$[X * A, Y]^G \cong [X, ?]^G$$

となるような? は残念ながら構成できない. それ故, 基点の無い G -Freudenthal Suspension 定理など存在しないと感じられていたように思える。

ところが, そのような予想に反して, Join に関する基点の無い G -Freudenthal Suspension 定理を我々はごく最近発見した. 証明については [5] に譲るとして, ここでは定理の形を述べるだけにとどめる. その為に, 空間 S の連結度 (connectivity) を, $c(S)$ と表す事とする。

Theorem 4.1. G をコンパクト・リー群, V をその直交表現, X と Y を G -CW 複体とする. この時, (i) Join 写像

$$S(V) : [X, Y]^G \rightarrow [X * S(V), Y * S(V)]^G$$

は, 次の3つの条件が満たされているならば全射となる:

1. $\dim W_G H \geq 1$ が $S(V)$ の等方化部分群 H で, $Y^H = \emptyset$ となるもの全てに対し成立する。

2. $\dim X^H \leq 2c(Y^H) + 1 + \dim W_G H$ が、 X の等方化部分群 H で $V^H \neq 0$ となるもの全てに対し成立する。
3. $\dim X^H \leq c(Y^K) + \dim W_H K + \dim W_G H$ が、 X の等方化部分群 H とその閉部分群 $K \subsetneq H$ で $V^K \supseteq V^H$ となるもの全てに対し成立する。

(ii) *Join* 写像

$$S(V) : [X, Y]^G \rightarrow [X * S(V), Y * S(V)]^G$$

は、次の3つの条件が満たされているならば全単射となる：

1. $\dim W_G H \geq 2$ が $S(V)$ の等方化部分群 H で、 $Y^H = \emptyset$ となるもの全てに対し成立し、かつ、 $\dim W_G H \geq 1$ が $S(V)$ の等方化部分群 H で、 Y^H が非連結となるもの全てに対し成立する。
2. $\dim X^H \leq 2c(Y^H) + \dim W_G H$ が、 X の等方化部分群 H で $V^H \neq 0$ となるもの全てに対し成立する。
3. $\dim X^H \leq c(Y^K) - 1 + \dim W_H K + \dim W_G H$ が、 X の等方化部分群 H とその閉部分群 $K \subsetneq H$ で $V^K \supseteq V^H$ となるもの全てに対し成立する。

Corollary 4.2. G をコンパクト・リー群、 U_1, U_2, V をその直交表現とする。この時、(i) *Join* 写像

$$S(V) : [S(U_1), S(U_2)]^G \rightarrow [S(U_1) * S(V), S(U_2) * S(V)]^G = [S(U_1 \oplus V), S(U_2 \oplus V)]^G$$

は、次の3つの条件が満たされているならば全射となる：

1. $\dim W_G H \geq 1$ が $V \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H で、 $U_2^H = 0$ となるもの全てに対し成立する。
2. $\dim U_1^H \leq 2 \dim U_2^H - 2 + \dim W_G H$ が、 $U_1 \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H で $V^H \neq 0$ となるもの全てに対し成立する。
3. $\dim U_1^H \leq \dim U_2^K - 1 + \dim W_H K + \dim W_G H$ が、 $U_1 \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H とその閉部分群 $K \subsetneq H$ で $V^K \supseteq V^H$ となるもの全てに対し成立する。

(ii) *Join* 写像

$$S(V) : [S(U_1), S(U_2)]^G \rightarrow [S(U_1) * S(V), S(U_2) * S(V)]^G = [S(U_1 \oplus V), S(U_2 \oplus V)]^G$$

は、次の3つの条件が満たされているならば全単射となる：

1. $\dim W_G H \geq 2$ が $V \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H で、 $U_2^H = 0$ となるもの全てに対し成立し、また $\dim W_G H \geq 1$ が $V \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H で、 $\dim U_2^H = 1$ となるもの全てに対し成立する。
2. $\dim U_1^H \leq 2 \dim U_2^H - 3 + \dim W_G H$ が、 $U_1 \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H で $V^H \neq 0$ となるもの全てに対し成立する。
3. $\dim U_1^H \leq \dim U_2^K - 2 + \dim W_H K + \dim W_G H$ が、 $U_1 \setminus \{0\}$ の等方化部分群 H とその閉部分群 $K \subsetneq H$ で $V^K \supseteq V^H$ となるもの全てに対し成立する。

5. $\{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2}$ の場合

まず最初に [2] において $\frac{10}{8}$ 定理が証明された時に中心的な役割を果たした結果:

$$(5.1) \quad k > 0 \text{ かつ } \{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2} \neq \emptyset \implies 2k + 1 \leq l$$

を思い出そう。これに従い $k \geq 1$ と $k = 0$ に場合を分けて考察する。

$k \geq 1$ の場合。

この時、5.1 により、 $k \geq 1, l \geq 3$ と仮定してよい。

$$\{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2} := \lim_{p, q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{H}^{p+k} \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q), S(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^{q+l})]^{Pin_2}$$

なので、Corollary 4.2 を

$$U_1 := \mathbf{H}^k, \quad U_2 := \tilde{\mathbf{R}}^l, \quad V := \mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q, \quad p, q \geq 1$$

に対して応用する。すると、

1. $Iso((\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \setminus \{0\}) \subseteq \{\{e\}, U(1)\}$ だが、 $(\tilde{\mathbf{R}}^l)^{\{e\}} = (\tilde{\mathbf{R}}^l)^{U(1)} = \tilde{\mathbf{R}}^l \neq 0$ ので、条件 1 は常に満たされる。
2. $Iso(\mathbf{H}^k \setminus \{0\}) = \{\{e\}\}$ より、条件 3 は常に満たされる。
3. 条件 2 に関し、全射、全単射おのおの場合、

$$\begin{aligned} \dim \mathbf{H}^k &\leq 2 & \dim \mathbf{R}^l - 2 + 1 &= \dim \mathbf{R}^l - 1 \\ \dim \mathbf{H}^k &\leq 2 & \dim \mathbf{R}^l - 3 + 1 &= \dim \mathbf{R}^l - 2 \end{aligned}$$

なる条件に対応する。

ところが、5.1 より全単射の条件ですら既に満たされている。

$k=0$ の場合。

Corollary 4.2 を $m \geq 1$ として

$$U_1 := \tilde{\mathbf{R}}^m, \quad U_2 := \tilde{\mathbf{R}}^{l+m}, \quad V := \mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q, \quad p, q \geq 1$$

に対して応用する。すると、

1. $Iso(\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q) \setminus \{0\} \subseteq \{\{e\}, U(1)\}$ だが、 $(\tilde{\mathbf{R}}^{l+m})^{\{e\}} = (\tilde{\mathbf{R}}^{l+m})^{U(1)} = \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} \neq 0$ なので、全射に関する条件 1 は常に満たされる。一方、全単射に関する条件 1 が成立する為には、 $l+m \geq 2$ が必要十分となる。
2. $Iso(\tilde{\mathbf{R}}^m \setminus \{0\}) = \{\{e\}, U(1)\}$ より、条件 3 は $H = U(1)$ の場合を考えればよい。この時、 $K \subsetneq H = U(1)$ で

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q)^K & \xleftarrow{\cong} & (\mathbf{H}^p \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q)^{U(1)} \\ \parallel & & \parallel \\ (\mathbf{H}^p)^K \oplus \tilde{\mathbf{R}}^q & \xleftarrow{\cong} & \tilde{\mathbf{R}}^q \end{array}$$

となるものは $K = \{e\}$ に限られる。よって条件 3 は、全射、全単射おのおの場合

$$\begin{aligned} \dim \tilde{\mathbf{R}}^m &\leq \dim \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} - 1 + 1 = \dim \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} \\ \dim \tilde{\mathbf{R}}^m &\leq \dim \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} - 2 + 1 = \dim \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} - 1 \end{aligned}$$

なる条件に対応し、全射に関する条件 3 は常に満たされる。一方、全単射に関する条件 3 が成立する為には、 $l \geq 1$ が必要十分となる。

3. 条件 2 に関しては、 $H \in \{\{e\}, U(1)\}$ となり、全射、全単射おのおの場合、

$$\begin{aligned} \dim \tilde{\mathbf{R}}^m &\leq 2 \dim \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} - 2 \quad \text{つまり } 2 \leq 2l + m \\ \dim \tilde{\mathbf{R}}^m &\leq 2 \dim \tilde{\mathbf{R}}^{l+m} - 3 \quad \text{つまり } 3 \leq 2l + m \end{aligned}$$

なる条件に対応する。

以上をまとめて、次の結果を得る：

Theorem 5.1. 帰納極限として定義された $\{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2}$ は、次のような“非安定な”記述を持つ：

- (i) $k \geq 1$ の場合、自然な安定化写像

$$[S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)]^{Pin_2} \xrightarrow{\sim} \{S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2}$$

は同型である。更に前者の同一視

$$[S(\mathbf{H}^k), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)]^{Pin_2} = [\mathbf{CP}^{2k-1}, S^{l-1}]^{Z/2}$$

を通して $Z/2$ -同変ホモトピー集合とみなされる。ここで $\mathbf{CP}^{2k-1} = S(\mathbf{H}^k)/U(1)$ と S^{l-1} には自由な $Z/2$ -作用が与えられている。

(ii) $k = 0, l \geq 1$ の場合、自然な安定化写像

$$\{i\} = [S(\tilde{\mathbf{R}}^1), S(\tilde{\mathbf{R}}^{l+1})]^{Pin_2} = [S(\mathbf{H}^0 \oplus \tilde{\mathbf{R}}^1), S(\tilde{\mathbf{R}}^{l+1})]^{Pin_2} \simeq \{S(\mathbf{H}^0), S(\tilde{\mathbf{R}}^l)\}^{Pin_2}$$

は同型である。ここで $i: S(\tilde{\mathbf{R}}^1) \rightarrow S(\tilde{\mathbf{R}}^{l+1})$ は第一成分への埋め込み $\tilde{\mathbf{R}}^1 \subset \tilde{\mathbf{R}}^{l+1}$ によって誘導された写像である。

Remark 5.2. Theorem 5.1 用いれば、Theorem 2.1 や Theorem 2.5 に対してもっと見通しの効いたアプローチが可能となる。

6. $\{S(\mathbf{C}^m), S(\mathbf{R}^n)\}^{U(1)}$ の場合

この場合、 h を与えられた m, n に対して十二分に大きければ、

$$U_1 = \mathbf{C}^m \oplus \mathbf{R}^h, \quad U_2 = \mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^h, \quad V = \mathbf{C}^p \oplus \mathbf{R}^q$$

として Corollary 4.2 から対応する join 写像が全単射である事が分かる。これよりただちに次の結果を得る：

Theorem 6.1. (i) 次の射は全単射：

$$\begin{aligned} \{S(\mathbf{C}^m), S(\mathbf{R}^n)\}^{U(1)} & \xlongequal{\quad} \lim_{p,q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{C}^{p+m} \oplus \mathbf{R}^q), S(\mathbf{C}^p \oplus \mathbf{R}^{q+n})]^{U(1)} \\ & \quad \uparrow \cong \\ & \lim_{q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{C}^m \oplus \mathbf{R}^q), S(\mathbf{R}^{q+n})]^{U(1)} \end{aligned}$$

(ii)

$$\lim_{q \rightarrow \infty} [S(\mathbf{C}^m \oplus \mathbf{R}^q), S(\mathbf{R}^{q+n})]^{U(1)} = \begin{cases} \pi_s^{n-1}(\mathbf{CP}^{m-1}) & \text{if } m \geq 1 \\ \mathbf{Z} & \text{if } m = n = 0 \\ 0 & \text{if } m = 0, n \geq 1. \end{cases}$$

(iii) $m \geq 1$ とする。上の同一視のもと、

$$SW(X, c, o_X) \in \pi_s^{n-1}(\mathbf{CP}^{m-1})$$

と思えば、そのコホモトピー・フレビッチ写像

$$\pi_s^{n-1}(\mathbf{CP}^{m-1}) \rightarrow H^{n-1}(\mathbf{CP}^{m-1})$$

による像が通常の *Seiberg-Witten* 不変量である。

特に注目すべきことは、通常よく目にする

$$n = b^+ > 1$$

なる制限がここでは一切無い事だ。

7. 安定ホモトピー論の手法

80年代のホモトピー論の最も大きな収穫と一般に言われているのは Devinatz-Hopkins-Smith nilpotency theorem と呼ばれている物で、これは 西田吾郎氏の球面の安定ホモトピー群に関する Nishida nilpotency theorem を一般化する。この Devinatz-Hopkins-Smith nilpotency theorem と Bauer [1] の glueing formula を用いると、次の結果が得られる：

Theorem 7.1. $b^+ \geq 1$, $b_1 = 0$ なる任意の 4-manifold X に対して、それに依存する或る大きな自然数 N が存在して、 X 自身を N 回連結和したものは、それに対するいかなる $Spin^c$ 構造に対しても安定ホモトピー Seiberg-Witten 不変量は自明なものしか持たない。

ひとたびこの結果を目にしてしまうと、次を問うのは極めて自然である：

Question 7.2. $i = 1, 2$ に対し、 X_i と Y_i を homeo だが、必ずしも diffeo と限らない 4-manifold で、 $b^+ \geq 1$, $b_1 = 0$ なるものとする。この時、或る大きな自然数 L で、

$$X_1 \# (\# X_2)^L \stackrel{\text{diffeo.}}{\cong} Y_1 \# (\# Y_2)^L$$

となるようなものは存在するか？

実際、 $X_2 = Y_2 = S^2 \times S^2$ の場合は Wall の定理として正しいことが知られている。一方 Gompf [7] は、単連結で有理ではない曲面に対して、連結和分解は一意ではないのかとほのめかしているが、我々の結果はそのようなことを（仮に正しくいとして）証明することは極めて困難であることを主張している。

他にも、James 数との関係で面白いことがありそうであるが、紙数も尽きたので、それについてはまたの機会としたい。

REFERENCES

- [1] S. Bauer *On connected sums of four-dimensional manifolds*, available at www.math.matik.uni-bielefeld.de
- [2] M. Furuta, *Monopole equation and the 11/8 conjecture*, preprint.
- [3] M. Furuta, *Stable homotopy version of Seiberg-Witten invariant*, available at www.mpim-bonn.mpg.de
- [4] M. Furuta, Y. Kametani and N. Minami *Stable-homotopy Seiberg-Witten invariants for rational cohomology $K3\#K3$'s*, University of Tokyo preprint series, 2000.
- [5] M. Furuta, Y. Kametani and N. Minami 準備中。
- [6] M. Furuta, Y. Kametani and N. Minami 準備中。
- [7] R. E. Gompf, *On the topology of algebraic surfaces*, London Math. Soc. Lecture Notes (150) 41–53, 1990
- [8] H. Hauschild, *Áquivariante Homotopie I*, Arch. Math. **29** (1977), 158–165.
- [9] J. W. Morgan and Z. Szabó, *Homotopy $K3$ surfaces and mod 2 Seiberg-Witten invariants*, Math. Res. Lett. **4** (1997), 17–21.
- [10] U. Namboodiri, *Equivariant vector fields on spheres*, Trans. Amer. Math. Soc. **278** (1983), 431–460.
- [11] D. Ruberman and S. Strle *Mod 2 Seiberg-Witten invariants of homology tori*, math.DG/0003092

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KEIO UNIVERSITY, YOKOHAMA 223-8522, JAPAN
E-mail address: kametani@math.keio.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, TOKYO 153-8914, JAPAN
E-mail address: furuta@ms.u-tokyo.ac.jp

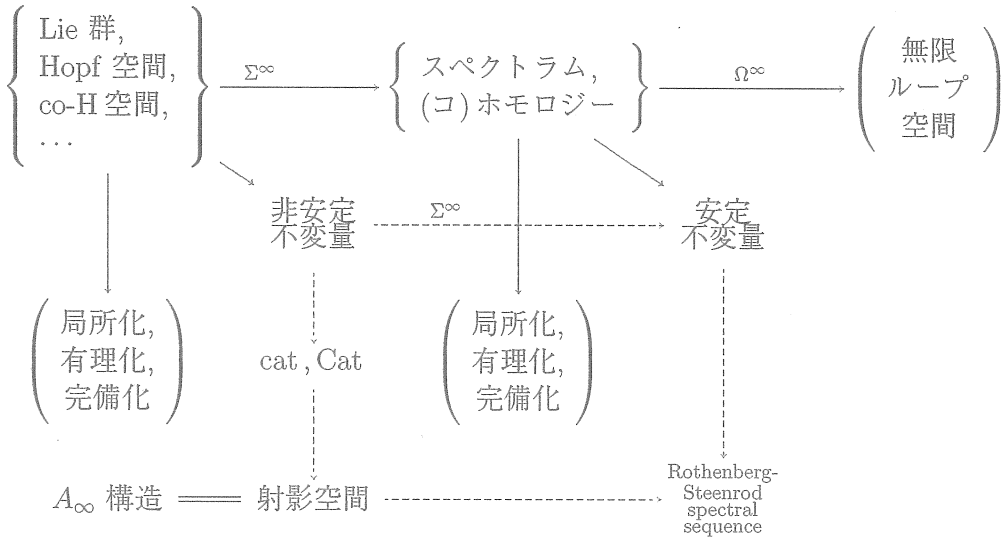
DEPARTMENT OF MATHEMATICS, NAGOYA INSTITUTE OF TECHNOLOGY, NAGOYA 466-8555,
JAPAN
E-mail address: norihiko@math.kyy.nitech.ac.jp

ガネア予想とその反例

岩瀬 則夫 (九大数理)

非安定理論

安定理論



1 ガネアの問題

問題 [Ganea, 1971, (全 15 題) [17]]

1. 多様体の L-S category を計算せよ。
2. $\text{cat } X \times S^n = \text{cat } X + 1$ である。これは正しいか?
4. 球面上の球面束の LS category を束の特性写像のホモトピー不変量によって記述せよ。
10. いかなる co-H 空間も、幾つかの円周と単連結な空間の一点和にホモトピー同値となるか?

注 1.1 James の 'Handbook of algebraic topology' によると、問題 2 (*LS category*) と問題 1 0 (*co-H-spaces*) は共に各々の領域で正しいと信じられ、'the Ganea conjecture' と呼ばれていた。

定義 1.2

$$\text{cat } X = \text{Min} \left\{ m \mid \begin{array}{l} \exists \{U_0, \dots, U_m; \text{ open in } X\} \\ X = \bigcup_{i=0}^m U_i, \text{ each } U_i \text{ is contractible in } X \end{array} \right\}$$

定理 1.3 (Lusternik-Schnirelmann 1934 [37])

閉多様体 M 上定義されたいかなる C^∞ -写像も $\text{cat } M + 1$ 個以上の *critical points* を持つ。

以下の位相不変量 $\text{gcat } X$ も同様に定義されるが、R. H. Fox によってホモトピー不変でないことが知られている。さらにガネアによってこれをホモトピー不変量に変形した $\text{Cat } X$ が与えられている。

$$\text{gcat } X = \text{Min} \left\{ m \mid \begin{array}{l} \exists \{U_0, \dots, U_m; \text{ open in } X\} \\ X = \bigcup_{i=0}^m U_i, \text{ each } U_i \text{ is contractible} \end{array} \right\}$$

$$\text{Cat } X = \text{Min} \{ m \mid \exists \{Y(\simeq X)\} \text{ gcat } Y = m \}$$

定理 1.4 (Ganea 1971 [15])

$$\text{Cat } X - 1 \leq \text{cat } X \leq \text{Cat } X \leq \text{gcat } X.$$

注 1.5 *co-H*空間は *Lie*群を一般化した *Hopf*空間の双対として考えだされたが、*LS-cat* の言葉では $\text{cat } X = 1$ を満たす空間 X として特徴づけられる。(Ganea, [16])

2 問題 1 0 (co-H空間に関するガネア予想)

良く知られているように (Browder など)、semi-simple *Lie*群や有限 *Hopf*空間はトーラス T^r と $H^1(D) = 0$ を満たす空間 D の直積にホモトピー同値である。この双対が正しいかというのがこの問題である。

定義 2.1 1次元ブーケ $\bigvee^r S^1$ と単連結な空間との一点和にホモトピー同値な $co-H$ 空間をここでは「標準的」と呼ぶ。

例えば懸垂空間や、単連結な $co-H$ 空間などの $co-loop$ 構造をもつ $co-H$ 空間は標準的である。70年代に Berstein-Dror(1976), Hilton-Mislin-Roitberg(1978)等によってこの問題が研究された。その特徴として挙げられるのは、与えられた「 $co-H$ 構造」を用いて、ホモトピー同値写像をつくり出すというものである。

事実 2.2 $co-H$ 空間 X に対してガネアの条件 1)は、以下の条件 2)~5)と同値である。

- 1) (Ganea) X は「標準的」である。
- 2) (Berstein-Dror) X の $co-H$ 構造をうまく選ぶと、 B の X に対する co 作用は結合的である。
- 3) (Hilton-Mislin-Roitberg) X の $co-H$ 構造をうまく選ぶと、右 (左) co シーリング写像 $\phi: X \vee X \rightarrow X \vee X$ がホモトピー同値となる。
- 4) (Hilton-Mislin-Roitberg) X の $co-H$ 構造を co ループとなるように選べる。つまりホモトピー集合 $[X, -]$ は自然な代数的ループ構造を持つ。
- 5) (Hilton-Mislin-Roitberg) X の $co-H$ 構造をうまく選ぶと、 $e = i \circ j$ がホモトピー集合 $[X, X]$ の中で右 (左) ループ的な元となる。

80年代以後はこれらの結果とは対照的に、 $co-H$ 構造に依存しない結果が得られた。

定理 2.3 (Henn 1983 [21]) *almost*有理な (普遍被覆が有理化されている) $co-H$ 空間は標準的である。

定義 2.4 空間 X が (*almost*)安定次元 $\leq k$ とは、その普遍被覆の簡約常ホモロジー群 $\bar{H}_*(X; \mathbb{Z})$ が連続した k 個の次元に集中し最高次元に *torsion* 元がないこととする。

定理 2.5 (Komatsu 1992 [36]) X をバウンダリリンクの外側とする。(このとき X の (*almost*)安定次元は1以下) もし X が $co-H$ 空間ならば、 X は標準的である。

定理 2.6 (Saito, Sumi, I. 1997 [30]) (almost)安定次元 2 以下の $co-H$ 空間は標準的である。

この証明のキーポイントは以下の結果である。

定理 2.7 ([30]) $co-H$ 空間 X は基本群 π が自由群で $B = B\pi$ は 1 次元ブーケとなり、 $p(X) : \tilde{X} \rightarrow X$ をその普遍被覆写像とすると、次の図式を可換とする同型 $H_*(\tilde{X}, \tilde{B}) \cong \mathbb{Z}\pi \otimes H_*(X, B)$ がある。

$$\begin{array}{ccc} H_*(\tilde{X}, \tilde{B}) & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{Z}\pi \otimes H_*(X, B) \\ p(X)_* \downarrow & & \downarrow \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}\pi} (-) \\ H_*(X, B) & \xlongequal{\quad} & H_*(X, B), \end{array} \quad (2.1)$$

これは次の補題を用いて証明され、その本質的な部分は Bass による射影的 $\mathbb{Z}\pi$ -加群が自由であることの証明に依存している。

補題 2.8 適当な加群 M から誘導された $\mathbb{Z}\pi$ -加群 $\mathbb{Z}\pi \otimes M$ の直和因子である $\mathbb{Z}\pi$ -加群 P は、やはり何らかの加群 P_0 から誘導された $\mathbb{Z}\pi$ -加群 $\mathbb{Z}\pi \otimes P_0$ に同型となる。

上記の [30] の主結果が (almost) 安定次元 2 で止まるべき理由は技術的なもの以外には見当たらず、(almost) 安定次元 4 までは証明可能であるように見える。その理由は球面のホモトピー群が低い次元では \mathbb{Z} と 2-torsion しか持たないからである。しかし $\pi_3^S(S^0) \cong \mathbb{Z}/24\mathbb{Z}$, $24 = 2^3 \cdot 3$ という事実から、次のような標準的でない空間を排除できないことが分かる。

定理 2.9 ([28]) $co-H$ 空間の族 $\{R_n = S^1 \vee S^{n+1} \cup_{\Psi} e^{n+5}\}_{n \geq 4}$ で、各々が次の条件を満たすものが存在する。

- (1) $\text{cat } R_n = 1 < 2 = \text{Cat } R_n = \text{gcat } R_n$
- (2) R_n は標準的でない。
- (3) R_n の各素数への (almost) 局所化は標準的である。
- (4) R_n の有理化は標準的である。
- (5) $\pi_q(R_n) \cong \pi_q(S^1 \vee (S^{n+1} \cup e^{n+5}))$ for any $q \geq 0$.

定理 2.9 の略証 まず $C_n = S^{n+1} \cup_{\nu_{n+1}} e^{n+5}$ とおくと、 C_n は素数 2 と 3 において Steenrod 作用素が自明でなく、その p -完備化が atomic (分解しない) となる。そこで R_n が次を満たすように Ψ を与える。

$$\begin{aligned}\tilde{H}_*(\widetilde{R}_n; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}\pi\{x_{n+1}, x_{n+5}\}, \\ \tilde{H}_*(\widetilde{R}_n; \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2\pi\{x'_{n+1}, x'_{n+5}\}, \quad x'_{n+5}\mathcal{S}q^4 = x'_{n+1}, \\ \tilde{H}_*(\widetilde{R}_n; \mathbb{F}_3) &\cong \mathbb{F}_3\pi\{x''_{n+1}, x''_{n+5}\}, \quad x''_{n+5}\mathcal{P}^1 = \tau \cdot x''_{n+1}.\end{aligned}$$

ただし τ は $\pi \cong \mathbb{Z}$ の生成元であり、 x_{n+1} 等は各 cell に対応したホモロジーの生成元である。一方で次が成立する。

$$\begin{aligned}\tilde{H}_*(S^1 \vee C_n; \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z}\pi\{u_{n+1}, u_{n+5}\}, \\ \tilde{H}_*(S^1 \vee C_n; \mathbb{F}_2) &\cong \mathbb{F}_2\pi\{u'_{n+1}, u'_{n+5}\}, \quad u'_{n+5}\mathcal{S}q^4 = u'_{n+1}, \\ \tilde{H}_*(S^1 \vee C_n; \mathbb{F}_3) &\cong \mathbb{F}_3\pi\{u''_{n+1}, u''_{n+5}\}, \quad u''_{n+5}\mathcal{P}^1 = u''_{n+1}.\end{aligned}$$

すると各々の素数において、 R_n から $S^1 \vee C_n$ へのホモトピー同値が得られる。実際それは $\mathbb{Z}\pi$ の可逆元である 1 や τ を用いて作られる。 R_n が標準的でないことは次の補題から証明される。

補題 2.10 $\mathbb{Z}\pi$ の可逆元の全体は $\pm\pi \subset \mathbb{Z}\pi$ である。

もしホモトピー同値写像 $f: R_n \rightarrow S^1 \vee C_n$ が存在すれば、 f は普遍被覆のホモロジーにおいて $\mathbb{Z}\pi$ -加群の同型を誘導する。したがって次を満たす整数 i, j がとれる。

$$\tilde{f}_*x_{n+1} = \pm\tau^i u_{n+1} \quad \tilde{f}_*x_{n+5} = \pm\tau^j u_{n+5}$$

この関係式を \mathbb{F}_2 または \mathbb{F}_3 に落して考えると各々 $i = j$ と $i = j - 1$ を得る。これは明らかに矛盾であるので、 R_n は標準的でない。また R_n が co-H 空間であることは [30] の結果から分かる。 証終.

予想 1 co-H 空間の各素数への (almost) 完備化は Ganea の予想 (問題 10) を満たす。

3 A_∞ 構造と L-S category

空間 X に対して、そのループ空間 ΩX は A_∞ 構造を持つ — 言い換えれば、準ファイバー空間の列 $\{p_m^{\Omega X} : E^{m+1}(\Omega X) \rightarrow P^m(\Omega X)\}$ で、次の可換図を成立させるものが存在する。

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \Omega X & \xrightarrow{p_1^{\Omega X}} & E^2(\Omega X) & \xrightarrow{p_2^{\Omega X}} & \cdots & \xrightarrow{p_m^{\Omega X}} & E^{m+1}(\Omega X) & \xrightarrow{p_{m+1}^{\Omega X}} & \cdots & \xrightarrow{p_\infty^{\Omega X}} & E^\infty(\Omega X) \\
 \downarrow p_1^{\Omega X} & & \downarrow p_2^{\Omega X} & & & \downarrow p_m^{\Omega X} & & \downarrow p_{m+1}^{\Omega X} & & & \downarrow p_\infty^{\Omega X} \\
 \{*\} & \hookrightarrow & P^1(\Omega X) & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & P^{m-1}(\Omega X) & \hookrightarrow & P^m(\Omega X) & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & P^\infty(\Omega X) \simeq X
 \end{array}$$

注 3.1 この条件をみたす準ファイバー空間列は一意的ではないが、その列から、ループ空間の高次ホモトピー結合性が導かれ、これを用いることで、ある種の普遍性をみたす標準的な準ファイバー空間列をとることができる。(Stasheff [48])

定理 3.2 ([15] or [27]) 位相空間 X に対して、 $\text{cat } X \leq m$ である為には、ホモトピー同値 $h^X : X \simeq P^\infty(\Omega X)$ の部分空間 $P^m(\Omega X) \xrightarrow{e_m^X} P^\infty(\Omega X)$ への圧縮 $\sigma(X) : X \rightarrow P^m(\Omega X)$ の存在が必要十分である。

そこで $\sigma(X)$ を $\text{cat } X \leq m$ の構造写像とよぶ。さらに nilpotent 空間 X に対して、局所化された LS-cat を考えることができる。

定義 3.3 ([27]) 位相空間 X に対して、 $\text{cat}_p X \leq m$ とは、ホモトピー同値 $h^X : X \simeq P^\infty(\Omega X)$ の部分空間 $P^m(\Omega X) \xrightarrow{e_m^X} P^\infty(\Omega X)$ への圧縮 $\sigma(X) : X \rightarrow P^m(\Omega X)$ が素数 p において存在することである。

定理 3.4 ([27]) 位相空間 X と Y に対して、 $\text{cat } X \times Y \leq m$ である為には、ホモトピー同値 $h^X \times h^Y : X \times Y \simeq P^\infty(\Omega X) \times P^\infty(\Omega Y)$ の部分空間 $P^i(\Omega X) \times P^j(\Omega Y) \hookrightarrow P^\infty(\Omega X) \times P^\infty(\Omega Y)$ への圧縮 $\sigma(X \times Y) : X \times Y \rightarrow \bigcup_{i+j=m} P^i(\Omega X) \times P^j(\Omega Y)$ の存在が必要十分である。

4 問題 2 (LS cat に関するガネア予想)

有理ホモトピー論における Jessup による Ganea 予想の類似定理についての結果を Hess が cat の有理化である cat_0 に対するものに改良し、この世界では Ganea 予想が正しいことがほぼ確かめられた。

定理 4.1 (Jessup 1990 [35], Hess 1991 [22])

$$\text{cat}_0 X \times S^n = \text{cat}_0 X + 1, n \geq 2.$$

また Singhof による古典的な結果を Rudyak が改良し、ある種の多様体の族に対して Ganea 予想 (問題 2) が正しいことが分かった。

定理 4.2 (Singhof 1979 [46], Rudyak 1997 [43], 1999 [44])

その次元と cat の値に関するある不等式を満たす多様体については Ganea 予想 (問題 2) は正しい。

4.1 (高次 Hopf 不変量)

A_m 空間 G に対して高次 Hopf 普遍量は高次結合性を与えるホモトピーの存在に対する障害として定義される、次のような写像である。

$$H_m : [\hat{E}^{m+1}(G), P^m(G)] \rightarrow [\hat{E}^{m+1}(G), \hat{E}^{m+1}(\Omega P^m(G))]$$

ただし、 $\hat{E}^{m+1}(G)$ は G の $m+1$ 個の join であり、 $m \geq 2$ または G が球面の場合には H_m は準同型となる。これを一般化して次を得る。

定義 4.3

- 1) 懸垂空間 V と $\text{cat } X \leq m$ を満たす空間 X に対し、次の (非安定) ホップ不変量が定義される。

$$\begin{aligned} H_m^S : [V, X] &\rightarrow 2^{[V, E^{m+1}(\Omega X)]}, \\ H_m^S(f) &= \left\{ H_m^{\sigma(X)}(f) \mid \sigma(X) \text{ は } \text{cat } X = m \text{ に対する構造写像} \right\} \\ &\subset [\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)] \quad \text{for } f \in [\Sigma V, X] \end{aligned}$$

- 2) これに安定化関手 Σ^∞ を合成することで次の (安定) ホップ不変量が定義される。

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_m^S : [V, X] &\xrightarrow{H_m^S} 2^{[V, E^{m+1}(\Omega X)]} \xrightarrow{\Sigma^\infty} 2^{\{V, E^{m+1}(\Omega X)\}} \\ \mathcal{H}_m^S(f) &= \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_m^{\sigma(X)}(f) \\ = \Sigma^\infty H_m^{\sigma(X)}(f) \end{array} \mid \begin{array}{l} \sigma(X) \text{ は } \text{cat } X = m \text{ に対する構造} \\ \text{写像} \end{array} \right\} \\ &\subset \{\Sigma V, E^{m+1}(\Omega X)\} \quad \text{for } f \in [\Sigma V, X] \end{aligned}$$

4.2 (integral case)

懸垂空間 V と位相空間 X を共に $(d-1)$ -連結 ($d \geq 2$) とし、さらに $\text{cat } X = m$ とする。

定理 4.4 ([26]) X が $\dim X \leq d \cdot \text{cat } X + d - 2$ ($n \geq 1$) を満たすとすると、 $W = X \cup_f C(V)$ ($f: V \rightarrow X$) に対して次が成立する。

$$\text{cat } W = \text{cat } X + 1 \quad \text{iff} \quad H_m^S(f) \neq 0.$$

定理 4.5 ([26]) X が $\dim X \leq d \cdot \text{cat } X + d - 2$ ($n \geq 1$) を満たすとすると、 $W = X \cup_f C(V)$ ($f: V \rightarrow X$) がさらに $\text{cat } W = \text{cat } X + 1$ を満たすとき、次が成立する。

$$\text{cat } W \times S^n = \text{cat } W \quad \text{if} \quad \Sigma_*^n H_m^S(f) \ni 0.$$

$$\text{cat } W \times S^n = \text{cat } W + 1 \quad \text{if} \quad \Sigma_*^{n+1} H_m^S(f) \neq 0.$$

系 4.5.1 X が $\dim X \leq d \cdot \text{cat } X + d - 2$ ($n \geq 1$) を満たし、 $H_m^S(f) \neq 0$ とする。 $\text{cat } W \times S^n = \text{cat } W + 1$ が全ての $n \geq 1$ で成立する為には、「 $H_m^S(f) \neq 0$ 」が成立することが必要十分である。

S^{15} が Hopf 空間でない (Toda [51], Adams [1]) ことから次を得る。

例 4.6 ([27]) $\text{cat}(Q \times S^n) = \text{cat } Q = 2$ が全ての $n \geq 1$ について成立する複体 $Q = S^8 \cup e^{30}$ が存在する。

4.3 (local case)

例 4.7 例 4.6 を局所化すると、次を得る。(ただし p は奇素数)

$$\text{cat}_2(Q \times S^k) = \text{cat}_2 Q = 2,$$

$$\text{cat}_p(Q \times S^k) = 2 \quad \text{and} \quad \text{cat}_p Q = 1.$$

例 4.8 ([25], [27], [26]) 奇素数 p と $m \geq 2$ に対して、 $\text{cat}(Q(p, m)) = m$ である複体 $Q(p, m) = \mathbb{C}P^{m-1} \cup e^{2m+4p-6}$ で次を満たすものが存在する。

$$\text{cat}(Q(p, m) \times S^n) = m, \quad n \geq 2.$$

$$\text{cat}_q(Q(p, m) \times S^n) = m, \quad \text{cat}_q Q(p, m) = m - 1, \quad n \geq 1.$$

この $Q(3, 2) = S^2 \cup e^{10}$ が知られている最小の次元の反例である。この後 Vandembroucq, Stanley らによって様々な反例が同様な方法で得られている。

予想 2 任意の *nilpotent* 空間 Z に対して $\text{cat}_0 Z \times S^1 = \text{cat}_0 Z + 1$ が成立する。

5 問題 4 (球面上の球面束の LS cat)

$r \geq 1, q \geq 1$ とし、 E を S^{q+1} 上の S^r -束とする。このとき E は $E \simeq S^r \cup_\alpha e^{q+1} \cup_\psi e^{q+r+1}$ と CW 分割される。ただし、 $\alpha: S^q \rightarrow S^r$, $\psi: S^{q+r} \rightarrow Q = S^r \cup_\alpha e^{q+1}$ は接着写像である。

事実 5.1 ($\alpha = 1_{S^r}$ の場合)

$\text{cat} Q = 0$ で $\text{cat} E = 1$ である。

事実 5.2 ($\alpha \neq 1_{S^r}$ だが $H_1(\alpha) = 0$ の場合)

$\text{cat} Q = 1$ で $\text{cat} E = 2$ である。

これらの場合、Berstein-Hilton および Singhof によってさらに $\text{cat} Q \times S^n = \text{cat} Q + 1$ かつ $\text{cat} E \times S^n = \text{cat} E + 1$ が全ての $n \geq 1$ で成立する。

定理 5.3 ([26]) ($H_1(\alpha) \neq 0$ だが $H_2^S(\psi) \ni 0$ の場合)

$\text{cat} Q = 2$ で $\text{cat} E = 2$ である。

この場合、Singhof によってさらに $\text{cat} E \times S^n = \text{cat} E + 1$ が全ての $n \geq 1$ で成立する。しかしこれより後は、既に見たように、 $\text{cat} Q \times S^n = \text{cat} Q + 1$ は成立しないことがある。

定理 5.4 ([26]) ($H_1(\alpha) \neq 0$ かつ $H_2^S(\psi) \not\ni 0$ の場合)

$\text{cat} Q = 2$ で $\text{cat} E = 3$ である。

このとき $\Sigma_*^n H_2^S(\psi) \ni 0$ ならば $\text{cat } E \times S^n = \text{cat } E$ である。

しかし ψ の高次 Hopf 不変量の計算はやはり簡単ではない。

定理 5.5 ([26]) ($\Sigma^{r+1} h_2(\alpha) \neq 0$ の場合)

$\text{cat } Q = 2$ で $\text{cat } E = 3$ である。

6 問題 2 に対する多様体としての反例

p を奇素数とする。このとき $\alpha_1(3) : S^{2p} \rightarrow S^3$ は co-H 写像だが $\alpha_2(3) : S^{4p-2} \rightarrow S^3$ はそうでない。実際 $H_1(\alpha_2(3)) = x\alpha_1(2p+1)$, $x \neq 0$ が成立する。(Toda) さて、co-H 写像 $\beta = \alpha_1(3) \circ \alpha_2(2p)$ の懸垂 $\Sigma\beta : S^{6p-4} \rightarrow S^4$ により、 S^4 上の S^2 -束 CP^3 の引き戻しをとり、 M_p とする。従って M_p は閉多様体と考えることができ、次のような CW 分割を持つ。

$$M_p \simeq S^2 \cup_{\alpha} e^{6p-4} \cup_{\psi(\beta)} e^{6p-2}, \quad \alpha = \eta_2 \circ \beta.$$

球面の安定ホモトピー群の奇数成分に関する Oka の結果から次を得る。

補題 6.1 $\Sigma_* H_2^S(\psi(\alpha_1(3) \circ \alpha_2(2p)))$ は $\pm \Sigma^3(\alpha_1(3) \circ \alpha_2(2p))$ とボトムセルの包含写像との合成を一つの元とする。

定理 6.2 ([26]) 閉多様体 N_p で $\text{cat } N_p = \text{cat}(N_p - P)$, $P \in N_p$ を満たすものが $p \geq 5$ に対して存在する。

2000年5月に、ガネア予想に対する CW 複体の場合の反例 $Q(3, 2)$ を用いて、上記と同様な性質を持つ多様体が構成できることが Lambrecht, Vandembroucq, Stanley によってアナウンスされた。

定理 6.2 の略証 $p \geq 5$ のとき、 M_p は閉多様体であり、Toda によって次が知られている。

$$\begin{aligned} \alpha_1(3) \circ \alpha_2(2p) \neq 0, \quad \Sigma^1(\alpha_1(3) \circ \alpha_2(2p)) \neq 0 \quad \text{but} \\ \Sigma^2(\alpha_1(3) \circ \alpha_2(2p)) \in \pi_{6p-3}(S^5)_{(p)} = 0. \end{aligned}$$

従って定理 6.1 により、 $\text{cat}(S^2 \cup_{\alpha} e^{6p-4}) = 2$, $2 \leq \text{cat} M_p \leq 3$ がわかる。もし $\text{cat} M_p = 2$ ならば $N_p = M_p$ とおく。そうでないなら $\text{cat} M_p = 3 = \text{cat} M_p \times S^1$ であり、 $\text{cat} M_p \times S^1 = \text{cat} M_p \cup (S^2 \cup e^{6p-4}) \times S^1 = 3$ となる。そこで $N_p = M_p \times S^1$ とおけばよい。 証終.

定理 6.3 ([26]) 閉多様体 M で $\text{cat}(M \times S^n) = \text{cat} M$ が $n \geq 2$ で成立するものが存在する。

従ってガネア予想 (問題 2) は閉多様体に対しても成立しない。現在までの所、これが知られている唯一の多様体としての反例である。

定理 6.3 の略証 $M = M_3$ とおく。Toda によって、次が知られている。

$$\begin{aligned} \alpha_1(3) \circ \alpha_2(6) &\neq 0, \quad \Sigma^3(\alpha_1(3) \circ \alpha_2(6)) \neq 0 \text{ but} \\ \Sigma^4(\alpha_1(3) \circ \alpha_2(6)) &= 0 \text{ in } \pi_{17}(S^7)_{(3)} = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}. \end{aligned}$$

従って定理 6.1 により、 $\text{cat} M = 3$, $\text{cat} M \times S^n = \text{cat} M = 3$ が $n \geq 2$ に対して成立する。 証終.

注 6.4 $N = M_3 \times S^2$ とすると $\text{cat} M \times S^2 = \text{cat} M \cup (S^2 \cup e^{14}) \times S^2 = 3$ であることから、 $\text{cat} N = \text{cat} N - \{P\}$, $P \in N$ が成立している。

参考文献

- [1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104.
- [2] M. Arkowitz, *Co-H-spaces*, Handbook of algebraic topology, 1143–1173, North Holland, Amsterdam, 1995.
- [3] M. Bendersky, *A functor which localizes the higher homotopy groups of an arbitrary CW-complex*, Lecture Notes in Math. 418, Springer Verlag, Berlin (1975), 13–21.
- [4] I. Bernstein and E. Dror, *On the homotopy type of non-simply connected co-H-space*, Ill. Jour. Math. **20** (1976), 528–534.
- [5] I. Bernstein and P. J. Hilton, *Category and generalised Hopf invariants*, Illinois. J. Math. **12** (1968), 421–432.
- [6] J. M. Boardman and B. Steer, *On Hopf invariants*, Comment. Math. Helv. **42** (1967), 180–221.
- [7] W. Browder, *Torsion in Hopf space*, Ann. Math. **74** (1961), 24–51.

- [8] O. Cornea, Strong LS category equals cone-length, *Topology* **34** (1995), 377–381.
- [9] O. Cornea, *Cone-length and Lusternik-Schnirelmann category*, *Topology* **33** (1994), 95–111.
- [10] O. Cornea, *There is just one rational cone-length*, *Trans. Amer. Math. Soc.* **344** (1994), 835–848.
- [11] C. R. Curjel, *A note on spaces of category ≤ 2* , *Math. Z.* **80** (1963), 293–299.
- [12] B. Eckmann and P. Hilton, *Décomposition homologique d'un polyèdre simplement connexe*, *C. R. Acad. Sci. Paris* **248** (1959), 2054–2056.
- [13] S. Eilenberg and T. Ganea, *On the Lusternik-Schnirelmann category of abstract groups*, *Ann. of Math.* **65** (1957), 517–518.
- [14] R. H. Fox, *On the Lusternik-Schnirelmann category*, *Ann. of Math. (2)* **42**, (1941), 333–370.
- [15] T. Ganea, *Lusternik-Schnirelmann category and strong category*, *Illinois. J. Math.* **11** (1967), 417–427.
- [16] T. Ganea, *Cogroups and suspensions*, *Invent. Math.* **9** (1970), 185–197.
- [17] T. Ganea, *Some problems on numerical homotopy invariants*, *Symposium on Algebraic Topology*, *Lect. Notes in Math.* **249**, Springer Verlag, Berlin (1971) 13–22.
- [18] D. Goncalves, *Mod 2 homotopy associative H-spaces*, *Geometric Applications of Homotopy Theory I*, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), *Lect. Notes in Math.* **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 198–216.
- [19] J. R. Harper, *Cogroups which are not Suspensions*, *Algebraic Topology*, (Arcata CA 1986), *Lect. Notes in Math.* **1370**, Springer Verlag, Berlin (1989) 63–86.
- [20] J. R. Harper, *Cogroups which are not Suspensions II*, *Fields Inst. Comm.* **19**, (1998), 131–135.
- [21] W. Henn, *On almost rational co-H-spaces*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **87**, (1983), 164–168.
- [22] K. P. Hess, *A proof of Ganea's Conjecture for Rational Spaces*, *Topology* **30** (1991), 205–214.
- [23] P. Hilton, G. Mislin and J. Roitberg, *On co-H-spaces*, *Comment. Math. Helv.* **53** (1978), 1–14.
- [24] J. R. Hubbuck, *Two examples on finite H-spaces*, *Geometric Applications of Homotopy Theory I*, (Proc. Conf., Evanston Ill. 1977), *Lect. Notes in Math.* **657**, Springer Verlag, Berlin (1978) 282–291.
- [25] N. Iwase, *Projective spaces associated with an A_∞ -structure and Ganea's conjecture on LS category*, *GSM Kyushu U. preprint series 1997-17* (1997).
- [26] N. Iwase, *A_∞ -method in Lusternik-Schnirelmann category*, *GSM Kyushu U. preprint series 1998-13* (1998).
- [27] N. Iwase, *Ganea's conjecture on Lusternik-Schnirelmann category*, *Bull. Lon. Math. Soc.*, **30** (1998), 623–634.
- [28] N. Iwase, *The Ganea conjecture on Co-H-spaces*, to appear in *Topology*.
- [29] N. Iwase and M. Mimura, *Higher homotopy associativity*, *Algebraic Topology*, (Arcata CA 1986), *Lect. Notes in Math.* **1370**, Springer Verlag, Berlin (1989) 193–220.
- [30] N. Iwase, S. Saito and T. Sumi, *Homology of the universal covering space of a co-H-space*, *GSM Kyushu U. preprint series 1996-9* (1996).
- [31] I. M. James, *On category, in the sense of Lusternik-Schnirelmann*, *Topology* **17** (1978), 331–348.

- [32] I. M. James, *Fiberwise Topology*, Cambridge University Press, Cambridge 1989.
- [33] I. M. James, *Introduction to Fiberwise Homotopy Theory*, Handbook of algebraic topology, 169-194, North Holland, Amsterdam, 1995.
- [34] I. M. James, *Lusternik-Schnirelmann Category*, "Handbook of algebraic topology", 1293-1310, North Holland, Amsterdam, 1995.
- [35] B. Jessup, *Rational L-S category and a conjecture of Ganea*, Trans. Amer. Math. Soc. **317** (1990), 655-660.
- [36] K. Komatsu, *A boundary link is trivial if the Lusternik-Schnirelmann category of its complement is one*, Osaka J. Math. **29** (1992), 329-337.
- [37] L. Lusternik and L. Schnirelmann, "*Méthodes Topologiques dan les Problèmes Variationnels*", Paris Hermann et Cie, Actualités Scientifiques et Industrielles **188** (1934).
- [38] P. Lambrecht, D. Stanley and L. Vandembroucq, *Embedding up to homotopy of two-cones into Euclidean space*, preprint.
- [39] J. P. May, *Fiberwise localization and completion*, Trans. Amer. Math. Soc. **258** (1980), 127-146.
- [40] N. Oda, *Pairings and copairings in the category of topological spaces*, Publ. RIMS Kyoto Univ. **28** (1992), 83-97.
- [41] S. Oka, *The stable homotopy Groups of Spheres I*, Hiroshima Math. J. **1** (1971), 305-337.
- [42] D. G. Quillen, *Homotopical Algebra*, SLNM **43**, Springer Verlag, Berlin, 1967.
- [43] Y. B. Rudyak, *On the Ganea conjecture for manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 2511-2512.
- [44] Y. B. Rudyak, *On category weight and its applications*, Topology **38** (1999), 37-55.
- [45] S. Saito, *On higher coassociativity*, Hiroshima Math. J. **6** (1976), 589-617.
- [46] W. Singhof, *Minimal coverings of manifolds with balls*, Manuscripta Math. **29** (1979), 385-415.
- [47] D. Stanley, *Spaces with Lusternik-Schnirelmann category n and cone length $n + 1$* , preprint.
- [48] J. D. Stasheff, *Homotopy associativity of H-spaces, I, II*, Trans. Amer. Math. Soc. **108** (1963), 275-292, 293-312.
- [49] M. Sugawara, *On a condition that a space is an H-space*, Math. J. Okayama Univ. **5** (1956/57), 109-129.
- [50] M. Sugawara, *A condition that a space is group-like*, Math. J. Okayama Univ. **7** (1957), 123-149.
- [51] H. Toda, *Non-existence of mappings of S^{31} into S^{16} with Hopf invariant 1*, J. Inst. Polytech. Osaka City Univ. Ser. A **8** (1957), 31-34.
- [52] H. Toda, "*Composition methods in Homotopy groups of spheres*", Princeton Univ. Press, Princeton N.Y., Ann. of math. studies **49** (1962).
- [53] L. Vandembroucq, *Adjunction spaces satisfying the Ganea conjecture*, preprint.
- [54] G. W. Whitehead, "*Elements of Homotopy Theory*", Springer Verlag, Berlin, GTM series **61** (1978).
- [55] A. Zabrodsky, "*Hopf spaces*", Notas de Matemática (59), North-Holland Publ. Co., Amsterdam, North-Holland Mathematics Studies, **22** (1976).

実代数的特異点族の同程度特異性問題

小池敏司 (兵庫教育大学)

特異点の分類問題や安定性問題を考える時、そこで用いられる同値関係に関する自明性定理を示すことが重要になる。その時、扱う自明性が妥当なものかどうかという疑問に対して、その自明性に関して有限性定理(または、局所有限性定理)が成り立つかどうかを問うことは自然なことと思われる。

ここでは、実代数的集合族や(より一般に)ナッシュ集合族の自明性について、その有限性を問題にする。それらの集合族に対する有限性定理が成り立つことは、位相自明性に関しては、福田 [12]、Varčenko [44] によって知られており、更に強く半代数的自明性に関しては、Hardt [17] によって知られている。ついでながら、位相自明性に関して有限性が成り立つものとしては、他にも多項式関数芽族(福田 [12])や2変数多項式写像芽族(青木 [1]、Sabbah [32])があり、一方、3変数多項式写像芽族の中には、位相同値に関してモデュライが現れるものがあることも知られている(中居 [31])。

我々は、ナッシュ集合族の位相または半代数的自明性の有限性に関して次のこと考える。

問題 構造的な意味で、より強い自明性に関して有限性定理が成り立たないだろうか。

$F(x; t)$ を t でパラメータ付けられたナッシュ写像の族とする。そうすると、上の問題をもう少し具体的に書き直すことができる。即ち、パラメータ空間の有限分割の後、 $F^{-1}(0)$ で定義されるナッシュ集合の特異点解消が存在し、上の(より強い)なんらかの自明性が下の $F^{-1}(0)$ の位相的または半代数的自明性を誘導していないかということである。このことは、下の特異空間の位相自明性が上の滑らかな空間のより強い自明性から得られるという状況のもと、または、上の滑らかな居心地のいい空間から下の特異なギクシャクした空間の構造をブロー・ダウンを通して眺めるという状況のもと、有限性定理が成り立つかどうかを問うているわけで、それほど不自然な問題意識とは思われない。

上に述べた問題は、ナッシュ集合の特異点を含めた意味での実代数的特異点^が、いつ同程度特異かという問題に関連している。複素特異点の同程度特異性問題に関しては、Zariski [48, 49, 50, 51] に始まる多くの研究がなされている。特に、Teissier [38] は複素解析的特異点の同程度特異性に関連して、弱同時特異点解消 (weak simultaneous resolution) や強同時特異点解消 (strong simultaneous resolution) の概念を導入している。一方、実特異点の場合の同程度特異性問題に関する研究は、複素に比べて複雑で多くの問題があるはずなのだが、歴史も長くなく、それ程多くの研究もなされていない。その中では、Kuo [24, 25, 26] の始めたブロー解析性 (blow-analyticity) の研究は広がりを見せ始めている。詳しくは、福井-小池-Kuo [14] を見られたい。

次の1節では、半代数的やナッシュの概念の定義と、それらに関する基本的性質を列挙する。続いて、2節ではナッシュ同時特異点解消の定義を、3節ではナッシュ・イソトピー補題を述べる。4節以降では、上に述べた問題に端を発した有限性問題について、4節では孤立特異点のときに得られた結果を、5節では非孤立特異点のときに得られた結果を述べる。

1 半代数的集合とナッシュ集合

\mathbb{R}^n の半代数的集合 (semialgebraic set) とは、次の形をした集合の有限和で表される集合のことである：

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f_1(x) = \cdots = f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, \cdots, g_m(x) > 0\}$$

ただし、 $f_1, \dots, f_k, g_1, \dots, g_m$ は、 \mathbb{R}^n 上定義された多項式関数である。 $r = 1, 2, \dots, \infty, \omega$ とする。 \mathbb{R}^n の半代数的集合が C^r 級ナッシュ多様体 (C^r Nash manifold) であるとは、それが \mathbb{R}^n の C^r 級部分多様体のときいう。 $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$ を C^r 級ナッシュ多様体とする。 C^s 級写像 $f: M \rightarrow N$ ($s \leq r$) が C^s 級ナッシュ写像 (C^s Nash mapping) であるとは、 f のグラフが $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の半代数的集合のときいう。 C^0 ナッシュ写像のことを、ここでは半代数的写像 (semialgebraic mapping) と呼ぶことにする。

定理 (1.1) (Malgrange [29]) (1) C^∞ 級ナッシュ多様体は、 C^ω 級ナッシュ多様体である。
(2) C^ω 級ナッシュ多様体間の C^∞ 級ナッシュ写像は、 C^ω 級ナッシュ写像である。

以下、 C^ω 級ナッシュ多様体、 C^ω 級ナッシュ写像のことを、それぞれ、ナッシュ多様体、ナッシュ写像と呼び、ナッシュ写像の零点集合のことをナッシュ集合 (Nash set) と呼ぶ。

定理 (1.2) (Tarski-Seidenberg 定理 [33]) A を \mathbb{R}^k の半代数的集合、 $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^m$ を半代数的写像とする。このとき、像 $f(A)$ も \mathbb{R}^m の半代数的集合になる。

定理 (1.3) (Lojasiewicz の半代数的三角形分割定理 [27, 28]) 有限個からなる \mathbb{R}^n の (有界) 半代数的集合系 X_α が与えられたとき、次を満たす単体分割 $\mathbb{R}^n = \cup_a C_a$ と \mathbb{R}^n の自己同形写像 τ が存在する：

- (1) 各 X_α は $\tau(C_a)$ の有限和である。
- (2) $\tau(C_a)$ は \mathbb{R}^n のナッシュ多様体であり、各 a に対し、 τ は C_a から $\tau(C_a)$ へのナッシュ微分同相写像を誘導する。

2 ナッシュ同時特異点解消

本節では、ナッシュ・カテゴリーにおける特異点解消について述べる。 M, U をナッシュ多様体、 V を U のナッシュ集合とし、 $\Pi: M \rightarrow U$ を固有ナッシュモディフィケーション (proper Nash modification) とする。このとき、 Π が U における V のナッシュ特異点解消 (Nash resolution) であるとは、次を満たす滑らかな中心 (smooth centre) C_j を持つブロー・アップ (blow up) $\sigma_{j+1}: M_{j+1} \rightarrow M_j$ の有限列、但し、各 σ_j, M_j, C_j はナッシュ級である、が存在するときいう：

- (1) Π は σ_j 達の合成である。
- (2) Π の臨界値集合は、ナッシュ因子 (Nash divisor) D_1, \dots, D_d の和である。
- (3) V' (V の M における Π の精密変換像 (strict transform)) は、 M のナッシュ部分多様体である。
- (4) V', D_1, \dots, D_d 達は、同時に正規交叉 (normal crossing) のみを持つ。
- (5) V の中に $\Pi|_{\Pi^{-1}(V-T)}: \Pi^{-1}(V-T) \rightarrow V-T$ がナッシュ同型写像となる、次元の下がったナッシュ集合 (または半代数的集合) T が存在する。

上に述べたナッシュ特異点解消に関して、次の大定理が知られている。

定理 (2.1) (広中 [18, 19], Bierstone-Milman [5, 6, 7]) ナッシュ多様体 U のナッシュ集合 V に対し、 U における V のナッシュ特異点解消 $\Pi : M \rightarrow U$ が存在する。

注意 (2.2) ナッシュ・カテゴリーにおける特異点解消定理 (定理 (2.1)) に関しては、Bierstone-Milman [7] のなかの特異点解消定理に含まれる形で初めて述べられた。数年前にトロント大学に招いて頂いた時に、Bierstone, Milman 両氏より、広中先生が代数多様体 (algebraic variety) の特異点解消定理を証明された当時、ナッシュの概念自体が存在しなかったので注意されなかつただけで、広中先生の方法で定理 (2.1) は示される。従って、自分達の仕事を引用するときには、広中先生の仕事を前に引用するようにとの指摘があった。ここではそれに従っている。

M, U, I をナッシュ多様体、 \mathcal{V} を U のナッシュ集合とする。更に、 $\Pi : M \rightarrow U$ を固有ナッシュモディフィケーション、 $q : U \rightarrow I$ を上へのナッシュ沈め込みとする。また、各 $t \in I$ に対し、 $U_t = q^{-1}(t)$, $V_t = \mathcal{V} \cap U_t$, $M_t = (q \circ \Pi)^{-1}(t)$ とおく。このとき、 Π が I 上の U における \mathcal{V} のナッシュ同時特異点解消 (Nash simultaneous resolution) であるとは、次を満たす滑らかな中心 \tilde{C}_j を持つブロー・アップ $\tilde{\sigma}_{j+1} : M_{j+1} \rightarrow M_j$ の有限列、但し、 $\tilde{\sigma}_j, M_j, \tilde{C}_j$ はナッシュ級、が存在するときいう：

- (1) Π は $\tilde{\sigma}_j$ 達の合成である。
- (2) Π の臨界値集合は、ナッシュ因子 $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d$ の和である。
- (3) \mathcal{V}' (\mathcal{V} の M における Π による精密変換像) は、 M のナッシュ部分多様体である。
- (4) $\mathcal{V}', \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_d$ 達は、同時に正規交叉のみを持つ。制限

$$\begin{aligned} q \circ \Pi|_{\mathcal{V}'} : \mathcal{V}' &\rightarrow I, \\ q \circ \Pi|_{\mathcal{D}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{j_s}} : \mathcal{D}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{j_s} &\rightarrow I, \\ q \circ \Pi|_{\mathcal{V}' \cap \mathcal{D}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{j_s}} : \mathcal{V}' \cap \mathcal{D}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{j_s} &\rightarrow I \quad (1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq d) \end{aligned}$$

は、上への沈め込みである。

(5) \mathcal{V} 中の次元の下がったナッシュ集合 (または半代数的集合) \mathcal{T} で、各 $t \in I$ に対し $\mathcal{T} \cap V_t$ も V_t 中で次元が下がった集合であり、 $\Pi|_{\Pi^{-1}(\mathcal{V}-\mathcal{T})} : \Pi^{-1}(\mathcal{V}-\mathcal{T}) \rightarrow \mathcal{V}-\mathcal{T}$ がナッシュ同型写像となるものが存在する。

3 ナッシュ・イソトピー補題

この節では、ナッシュ自明性を示すための道具となるナッシュ・イソトピー補題を述べる。 M を境界のあることも許したナッシュ多様体、 N_1, \dots, N_b は境界のあることも許した M のナッシュ部分多様体で、 $N_0 = \partial M$, N_1, \dots, N_b は正規交叉しているとする。更に、 $\partial N_i \subset N_0$ ($i = 1, \dots, b$) を仮定する。そのとき、次が成り立つ。

定理 (3.1) (福井-小池-塩田 [15]) $\varpi : M \rightarrow \mathbb{R}^k$ は上への固有ナッシュ沈め込みで、 $0 \leq i_1 < \dots < i_s \leq b$ に対し、

$$\varpi|_{N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_s}} : N_{i_1} \cap \dots \cap N_{i_s} \rightarrow \mathbb{R}^k$$

もまた上への固有沈め込みとする。そのとき、ナッシュ微分同相写像

$$\phi : (M; N_1, \dots, N_b) \rightarrow ((M)_0; (N_1)_0, \dots, (N_b)_0) \times \mathbb{R}^k$$

で、 $\varpi \circ \phi^{-1} : (M)_0 \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ が自然な射影となるものが存在する。ここで、 $Z \subset M$ に対し、 $(Z)_0$ は $(\varpi|_Z)^{-1}(0)$ を表すものとする。

注意 (3.2) 上の定理の証明より、次のことが成立する。

(1) 定理において、 \mathbb{R}^k をあるユークリッド空間の開単体にナッシュ同型なナッシュ多様体に置き換えることができる。

(2) 定理の ϕ は M, N_1, \dots, N_b だけでなく、それらの任意の共通部分もナッシュ自明化する。

以下、上の定理の持つ意味と経過等を述べる。集合族や写像族の C^∞ 級自明性 (もっと一般に C^r 級自明性) や解析的自明性を示そうとするときのお決まりの手段は、そのクラスのベクトル場の積分を用いる方法である。しかし、一般にナッシュ級のベクトル場の積分は、必ずしもナッシュ級とは限らない ([15] 2.1 節参照)。そういう意味で、上のナッシュ・イソトピー補題は、ナッシュ自明性を示すうえで便利なものである。ナッシュのカテゴリーでは積分の方法は有効でないが、それに代わって「塩田の近似定理」([35, 36, 34]) というパワフルな大道具を持っている。実際、上のイソトピー補題の証明では、その近似定理が本質的な役割を果たす。

ナッシュ・イソトピー補題は、最初は M が境界のない多様体のときだけに示され (Coste-塩田 [10])、次に M が境界のある多様体の場合に示された (Coste-塩田 [11])。いずれの場合も、部分多様体は扱われていない。それらの結果を用いて、小池 [22] では、境界のないナッシュ多様体 M とナッシュ部分多様体 N の対の場合を扱っている。上の結果は、それらの結果をはるかに含んだ正規交叉の場合のイソトピー補題であるが、これが前節で述べた代数的同時特異点解消やナッシュ同時特異点解消の自明性を示すために適用することを念頭にしていることは、容易に察せられるであろう。

4 ナッシュ自明同時特異点解消

$\Pi : M \rightarrow U$ を 2 節の意味での I 上の U におけるナッシュ集合 $\mathcal{V} = \{F = 0\}$ のナッシュ同時特異点解消とする。 $t_0 \in I$ とする。このとき、以下の条件を満たすナッシュ微分同相写像 $\phi : M \rightarrow M_{t_0} \times I$ が存在するとき、 Π は I 上 U における \mathcal{V} のナッシュ自明同時特異点解消 (Nash trivial simultaneous resolution) を与えるという :

(1) $(q \circ \Pi) \circ \phi^{-1} : M_{t_0} \times I \rightarrow I$ は、自然な射影である。

(2) $\phi(\mathcal{V}) = V'_{t_0} \times I$

$$\phi(\mathcal{D}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{j_s}) = (D_{j_1, t_0} \cap \dots \cap D_{j_s, t_0}) \times I$$

$$\phi(\mathcal{V} \cap \mathcal{D}_{j_1} \cap \dots \cap \mathcal{D}_{j_s}) = (V'_{t_0} \cap D_{j_1, t_0} \cap \dots \cap D_{j_s, t_0}) \times I \quad (1 \leq j_1 < \dots < j_s \leq d)$$

局所的な場合に、 $\{0\} \times I$ の周りでの I 上 $\mathbb{R}^n \times I$ における $F^{-1}(0)$ のナッシュ自明同時特異点解消の概念も同様に定義することができる。このとき、更に $\phi(\Pi^{-1}(\{0\} \times I)) = \pi_{t_0}^{-1}(0) \times I$ という条件を課すことができる。

ここで、いくつか記号を準備する。 $f_t : X \rightarrow Y$ ($t \in J$) を写像とする。このとき、写像 $F : X \times J \rightarrow Y$ を $F(x; t) = f_t(x)$ で定義する。 $Q \subset J$ に対し、 $F_Q = F|_{X \times Q}$ とおく。以下、本稿ではこの記号を用いることにする。

最初にコンパクトの場合を考える。 N をコンパクト・ナッシュ多様体、 J をあるユークリッド空間の半代数的集合とする。 $f_t : N \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($t \in J$) をナッシュ写像とし、 F もナッシュ写像であると仮定する。ここで

$$K = \{t \in J \mid f_t^{-1}(0) \cap S(f_t) \text{ は孤立集合} \}$$

とおく。但し、 $S(f_t)$ は f_t の特異点集合を表すものとする。このとき、Hardt [17] の半代数的自明性定理を用いることにより、 K は J の半代数的部分集合であることが直ちにわかる (小池 [23])。

ナッシュ自明同時特異点解消に関して有限性定理が成り立つ。

定理 I (小池 [23]) 以下の条件を満たす有限分割

$$J = Q_1 \cup \cdots \cup Q_s \cup Q_{s+1} \cup \cdots \cup Q_u$$

で K に適合するもの、即ち、 $K = Q_1 \cup \cdots \cup Q_s$ 、 $J - K = Q_{s+1} \cup \cdots \cup Q_u$ となるものが存在する：

(1) 各 Q_i は、あるユークリッド空間の開単体にナッシュ同型なナッシュ多様体である。

(2) 各 i に対し、 Q_i 上 $N \times Q_i$ における $F_{Q_i}^{-1}(0)$ のナッシュ自明同時特異点解消 $\Pi_i : M_i \rightarrow N \times Q_i$ が存在する。

特に、 $1 \leq i \leq s$ に対しては、上のナッシュ自明が Q_i 上 $N \times Q_i$ における $F_{Q_i}^{-1}(0)$ の半代数的自明を誘導する。(このとき、 $(N \times Q_i, F_{Q_i}^{-1}(0))$ は、 Q_i に沿って Π_i -ブロー・ナッシュ自明化 (Blow-Nash trivialisation) を許容するという。)

ここで、定理の証明の枠組みを簡単に述べる。最初に J を半代数的三角形分割定理 (定理 (1.3)) を用いて、有限個のナッシュ多様体に分割する。その中で、 J と同じ次元のユークリッド空間の開単体にナッシュ同型なナッシュ多様体 Q_i 達のみ注目する。次に、特異点解消定理 (定理 (2.1)) を用いて、 $N \times Q_i$ における $F_{Q_i}^{-1}(0)$ の特異点解消を行う。この後、半代数的三角形分割定理、Tarski-Seidenberg 定理 (定理 (1.2))、Sard の定理を何度も用いて Q_i の有限三角形分割を行うことにより、 Q_i 即ち J と同じ次元のユークリッド空間の開単体とナッシュ同型な Q_i のナッシュ部分多様体に対して、ナッシュ・イソトピー補題 (定理 (3.1)) が適用できるようにすることができる。従って、そのような部分多様体上のナッシュ自明同時特異点解消が導かれる。最初に除かれた、 J の次元より低い有限個のナッシュ多様体達と、次に各 Q_i から除かれた Q_i の次元より低い有限個のナッシュ部分多様体達の和集合は、 J の次元より低い半代数的集合となる。これを J と思って上の操作を繰り返す。 J の次元は有限であることから、有限回の操作を行うことにより、上の定理が示される。

次に、局所的な場合を考える。 J をあるユークリッド空間の半代数的集合、 $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ ($t \in J$) をナッシュ写像とし、 F もナッシュ写像であると仮定する。ここで、

$$K = \{t \in J \mid 0 \in \mathbb{R}^n \text{ における芽として、} f_t^{-1}(0) \cap S(f_t) \subseteq \{0\} \}$$

とおく。このとき、Tarski-Seidenberg 定理を 2 回用いることにより、 K は J の半代数的集合であることが示される (福井-小池-塩田 [15])。

定理 II (小池 [23]) 局所的な場合にも、定理 I に対応する結果が成り立つ。

注意 (4.1) ナッシュ写像の孤立特異点を持つ零点集合族に対するブロー・ナッシュ自明性に関する有限性定理、即ち、定理 II(2) の後半部分は、論文 [15] (福井-小池-塩田) で示した。しかし、これは、我々のナッシュ自明同時特異点解消に関する有限性定理の特別な場合と捉えるほうが自然であると思われる。

1993年に論文 [15] を書き上げた当時、ナッシュ・カテゴリーにおける特異点解消定理を知らなかった。従って、多項式写像の孤立特異点を持つ零点集合族に対するブロー・ナッシュ自明性に関する有限性定理を証明した後、ナッシュ写像の零点集合族の場合を Artin-Mazur 定理 [2] を用いて多項式写像の零点集合族の話に帰着して示すという方法を取った。しかし、最初から定理 (2.1) の特異点解消定理を用いれば、このような手法を用いる必要はない。

トポロジーの分野では、局所的な問題は大域的な問題に比べて易しく、それ程興味深くないと言われることが多い。しかし、微分トポロジーの一分野である実特異点論では、必ずしもそうではない。例えば、孤立特異点を持つ実多項式写像 $P: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^6$ が、局所同相写像により局所的に射影に位相同値であるかどうかという問題は、ポアンカレ予想と同値な命題であったりする (Church-Lamotke [9])。

上に述べたナッシュ自明同時特異点解消に関する有限性定理については、局所的な場合の証明の方が、わずかであるがコンパクトな大域的な場合より難しい。というのは、イソトピー補題を適用するとき、コンパクトの場合は写像の固有性が自動的に満たされるのに比べ、局所的な場合はそうではないからである。似たようなことは福田 [12] でも起こっており、福田先生は、それを克服するために局所イソトピー補題を証明されている (オリジナルには、その証明が与えられていたが、出版されたものには結果のみである)。我々は局所イソトピー補題を示したりはしない。その代わりに、局所的なものを扱うときに、閉近傍、即ち、境界のある多様体のなかで考えるという手段を用いる。定理 II の証明においては、イソトピー補題を適用できるようにするため、近傍として、境界が考えているナッシュ集合の精密変換像や例外因子 (exceptional divisor) に横断的になるような境界のあるナッシュ多様体を構成する必要があった。そのために、[23] では「特異点解消を通したミルナー半径の一様性 (uniformity of Milnor radius via desingularization)」の概念を導入し、これに関する有限性定理を最初に示した。孤立特異点の場合は、状況はより簡単である。このときは、考えている下のナッシュ集合族に対する通常の意味でのミルナー半径の一様性に関して、有限性定理を示せば十分である。そうすると、ミルナー半径の一様性を持つ近傍の上への引き戻しは境界のあるナッシュ多様体で、その境界は精密変換像と横断的に交わり、例外因子とは交わりを持たないという意味で横断的になるからである。孤立特異点の場合のミルナー半径の一様性に関する有限性を示すときに役立つのが、「Thom 型の不等式」である。実際、[15] のなかでは、定理 II(2) の後半部分を示すために Thom 型の不等式を用いた。Thom 型の不等式の謂れについては、Bekka-小池 [4] を見られたい。

5 ブロー半代数的自明性

前節で与えたナッシュ自明同時特異点解消に関する有限性定理において、孤立特異点の場合には、上のナッシュ自明が下の半代数的自明を自動的に誘導した。このような誘導が、非孤立特異点の場合にも起こるのであろうか。このとき、孤立特異点の場合とは状況は一変する。もともと我々の考えていたのはナッシュ集合族の自明性だったが、非孤立特異点の場合には、その特異点解消写像族の自明性を示さなければならなくなる。序で述べたモデュライが現れる中居の例、ブロー・アップは Thom 写像でないこと、ブロー・アップそのものは簡単な構造を持つ写像であるが、その合成は極めて複雑な構造を持つこと等を考慮に入れると、ブロー・ナッシュ自明性どころかブロー位相自明性に関して有限性定理が成り立つかどうかも問題である。ここでは、ブロー半代数的自明性に関して得られた部分的結果を述べる。

前節同様、最初にコンパクトな場合を述べる。 $f_t: N \rightarrow \mathbb{R}^k$ ($t \in J$) と K を定理 I におけるものと同じものとする。更に、 N の次元は 3 以下であると仮定する。このとき、次が成り立つ。

定理 III (小池 [23]) 以下の条件を満たす有限分割

$$J = Q_1 \cup \cdots \cup Q_s \cup Q_{s+1} \cup \cdots \cup Q_u$$

で K に適合するもの、即ち、 $K = Q_1 \cup \cdots \cup Q_s$ 、 $J - K = Q_{s+1} \cup \cdots \cup Q_u$ となるものが存在する：

- (1) 各 Q_i は、あるユークリッド空間の開単体にナッシュ同型なナッシュ多様体である。
 - (2) 各 i に対し、 Q_i 上 $N \times Q_i$ における $F_{Q_i}^{-1}(0)$ のナッシュ同時特異点解消 $\Pi_i: \mathcal{M}_i \rightarrow N \times Q_i$ で、 $(N \times Q_i, F_{Q_i}^{-1}(0))$ が Q_i に沿って Π_i -ブロー半代数的自明性を許容するものが存在する。
- 更に、 N の次元が 2 以下のとき、または N の次元が 3 で $1 \leq i \leq s$ (孤立特異点) のとき、 $(N \times Q_i, F_{Q_i}^{-1}(0))$ は Q_i に沿って Π_i -ブロー・ナッシュ自明性を許容する。

次に、局所的な場合を述べる。 $f_t: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^k, 0)$ ($t \in J$) と K を定理 II におけるものと同じものとする。更に、 $n \leq 3$ とする。このとき、次が成り立つ。

定理 IV (小池 [23]) 局所的な場合にも、定理 III に対応する結果が成り立つ。

上の定理を示すためには、定理の主張からもわかるように、 N の次元または n が 3 のときに、非孤立特異点を持つナッシュ集合族に対し、ブロー半代数的自明性に関して有限性定理を示せば十分である。このことは、本質的には「Thom のイソトピー補題」と呼ばれるものを用いて示される。

ここで層化理論 (Stratification Theory) について簡単に概説する。「Thom の第一イソトピー補題」というのは、ホイットニー正則 (Whitney regular) な層化空間がパラメータ空間上、局所位相自明になるというタイプの定理である。一方、「Thom の第二イソトピー補題」というのは、ホイットニー正則な層化空間からホイットニー正則な層化空間への層化写像が、Thom 条件 (a_f) (condition (a_f)) のもとパラメータ空間上、局所位相自明になるというタイプの定理である。層化理論を厳密に述べようとすると準備が大変なので、極めて大雑把に述べた。詳しくは、ホイットニー層化集合 (Whitney stratification) については Whitney [45, 46, 47] を、Thom のイソトピー補題については Thom [39, 40, 41] を、その読みやすい証明については Mather [30] または Gibson-Wirthmüller-du Plessis-Looijenga [16] を見て下さい。ついでながら、ホイットニー正則性や Thom 条件 (a_f) は、層化集合に付随する管状近傍系のレトラクションやコントロール関数に関する条件で特徴付けられることにも注意しておく (Trotman [42, 43]、小池 [20]、Bekka [3])。

Thom のイソトピー補題は、 C^2 級のカテゴリーで示されている。即ち、層化集合を構成する各滑層 (stratum) が C^2 級、層化写像も C^2 級という状況のもと、位相自明性が導かれている。一方、半代数的なカテゴリーでも、もとのイソトピー補題と同じ条件のもと半代数的自明性が導かれないか、即ち、「Thom のイソトピー補題の半代数的版」が示されないかということが実代数幾何学の分野の大きな問題の一つであった。これは、近年、論文 [15] の共著者でもある名古屋大学の塩田昌弘氏によって、 C^2 どころか C^1 ナッシュのカテゴリーで示された ([37])。

上の定理は、塩田氏による「Thom の第一イソトピー補題の半代数的版」、それと「Thom の第二イソトピー補題の半代数的版」については、その証明から条件 (a_f) の仮定を弱める代わりに、結論も「パラメータ空間の有限分割のあと半代数的自明性が導かれる」という形に弱めた変形のイソトピー補題を、特異点解消写像族に対して組み合わせて用いるという手法で証明した。

付記 論文 [21] の中で、複素の場合においてさえ、位相自明性が必ずしもホイットニー (b)-正則性を導かない例として有名な Briançon-Speder 族 ([8]) が、実の場合には、その零点集合族が原点を通る解析弧の接触性を保つ位相同型で自明化されないこと (結果として、リップシツ自明化もされないこと) を示した。一方、Briançon-Speder 族は孤立特異点を持つ擬斉次多項式関数族であるが、実関数芽族としてブロー解析の自明であることが知られていた (福井 [13])。これらの事実をもとに、この零点集合族を自明化する最も強い自明性の模索から、擬斉次多項式写像の零点集合族に対して、モディファイド・ナッシュ自明性の概念を導入し、擬斉次多項式写像の孤立特異点を持つ零点集合族はモディファイド・ナッシュ自明であることを示した ([22])。その結果は、信州大学における第 40 回トポロジー・シンポジウムで報告した。そのときの定理の証明の枠組より、モディファイド・ナッシュ自明性 (もしくはブロー・ナッシュ自明性) に関する話を、より一般の局所的な場合の話に適用するためのアイデアを得た。そして、福井敏純氏 (埼玉大学) と塩田昌弘氏と共同で、孤立特異点を持つ場合に、モディファイド・ナッシュ自明性に関する有限分類定理やいくつかの自明性定理、それらを示すためのナッシュ・イソトピー補題等を示した ([15])。今回の話は、それらの話の延長上にあることを付記して終える。

参考文献

- [1] K. Aoki and H. Noguchi : *On topological types of polynomial map germs of plane to plane*, Memoirs of the School of Science and Engineering, Waseda University, **44** (1980), 133-156.
- [2] M. Artin and B. Mazur : *On periodic points*, Ann. of Math., **81** (1965), 82-99.
- [3] K. Bekka : *C-régularité et trivialité topologique*, Singularity Theory and its Applications, Lect. Notes in Math., **1462**, Springer-Verlag, 1991, pp. 42-62.
- [4] K. Bekka and S. Koike : *The Kuo condition, an inequality of Thom's type and (c)-regularity*, Topology, **37** (1998), 45-62.
- [5] E. Bierstone and P.D. Milman : *Uniformization of analytic spaces*, J. Amer. Math. Soc., **2** (1989), 801-836.
- [6] E. Bierstone and P.D. Milman : *A simple constructive proof of canonical resolution of singularities*, Effective Methods in Algebraic Geometry, Progress in Math., **94**, Birkhäuser, 1991, pp. 11-30.
- [7] E. Bierstone and P.D. Milman : *Canonical desingularization in characteristic zero by blowing up the maximum strata of a local invariant*, Invent. math. **128** (1997), 207-302.
- [8] J. Briançon and J.P. Speder : *La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney*, C. R. Acad. Sci. Paris, **280** (1975), 365-367.
- [9] P. Church and K. Lamotke : *Non trivial polynomial isolated singularities*, Indag. Math., **37**(2) (1975), 149-153.
- [10] M. Coste and M. Shiota : *Nash triviality in families of Nash manifolds*, Invent. math., **108** (1992), 349-368.

- [11] M. Coste and M. Shiota : *Thom's first isotopy lemma: a semialgebraic version with uniform bounds*, Real analytic and algebraic geometry (eds. F. Broglia, M. Galbiati and A. Tognoli), Walter de Gruyter (1995), 83-101.
- [12] T. Fukuda : *Types topologiques des polynômes*, Publ. Math. IHES, **46** (1976), 87-106.
- [13] T. Fukui : *Modified analytic trivialization via weighted blowing up*, J. Math. Soc. Japan, **44** (1992), 455-459.
- [14] T. Fukui, S. Koike and T.C. Kuo : *Blow-analytic equisingularities, properties, problems and progress*, Real Analytic and Algebraic Singularities, Pitman Research Notes in Mathematics Series, **381**, 1998, pp. 8-29.
- [15] T. Fukui, S. Koike and M. Shiota : *Modified Nash triviality of a family of zero-sets of real polynomial mappings*, Ann. Inst. Fourier, **48** (1998), 1395-1440.
- [16] C.G. Gibson, K. Wirthmüller, A. du Plessis and E.J.N. Looijenga : *Topological stability of smooth mappings*, Lect. Notes in Math., Springer, **552** (1976).
- [17] R.M. Hardt : *Semi-algebraic local triviality in semi-algebraic mappings*, Amer. J. Math., **102** (1979), 291-302.
- [18] H. Hironaka : *Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero: I, II*, Ann. of Math., **79** (1964), 109-302.
- [19] H. Hironaka : *Idealistic exponents of singularity*, Algebraic geometry, J.J. Sylvester Sympos., Johns Hopkins Univ., Baltimore 1976, pp. 52-125.
- [20] S. Koike : *On condition (a_f) of a stratified mapping*, Ann. Inst. Fourier, **33**(1) (1983), 177-184.
- [21] S. Koike : *On strong C^0 -equivalence of real analytic functions*, J. Math. Soc. Japan, **45** (1993), 313-320.
- [22] S. Koike : *Modified Nash triviality theorem for a family of zero-sets of weighted homogeneous polynomial mappings*, J. Math. Soc. Japan, **49** (1997), 617-631.
- [23] S. Koike : *Nash trivial simultaneous resolution for a family of zero-sets of Nash mappings*, Math. Zeitschrift (2000) (to appear).
- [24] T.C. Kuo : *Une classification des singularités réelles*, C. R. Acad. Sci. Paris, **288** (1979), 809-812.
- [25] T.C. Kuo : *The modified analytic trivialization of singularities*, J. Math. Soc. Japan, **32** (1980), 605-614.
- [26] T.C. Kuo : *On classification of real singularities*, Invent. math., **82** (1985), 257-262.
- [27] S. Lojasiewicz : *Triangulation of semi-analytic sets*, Ann. Scu. Norm. di Pisa, **18** (1964), 449-474.

- [28] S. Lojasiewicz : *Ensembles semi-analytiques*, I.H.E.S. Lect. Note, 1965.
- [29] B. Malgrange : *Ideals of differentiable functions*, Oxford Univ. Press, 1966.
- [30] J. Mather : *Notes on topological stability*, Lect. Notes, Harvard University (1970).
- [31] I. Nakai : *On topological types of polynomial mappings*, *Topology*, **23** (1984), 45-66.
- [32] C. Sabbah : *Le type topologique éclaté d'une application analytique*, *Singularities, Proc. Sympos. Pure Math.*, **40**, Part 2 (1980), 433-440.
- [33] A. Seidenberg : *A new decision method for elementary algebra*, *Ann. of Math.*, **60** (1954), 365-374.
- [34] M. Shiota : *Classification of Nash manifolds*, *Ann. Inst. Fourier*, **33**(3) (1983), 209-232.
- [35] M. Shiota : *Approximation theorems for Nash mappings and Nash manifolds*, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **293** (1986), 319-337.
- [36] M. Shiota : *Nash manifolds*, *Lect. Notes in Math.*, **1269**, Springer-Verlag, 1987.
- [37] M. Shiota : *Geometry of subanalytic and semialgebraic sets*, *Progress in Math.*, **150**, Birkhäuser, 1997.
- [38] B. Teissier : *Resolution simultanée I, II*, *Seminaire sur les Singularités des Surfaces*, *Lect. Notes in Math.*, **777**, Springer-Verlag, 1980, pp.71-146.
- [39] R. Thom : *Local topological properties of differentiable mappings*, Oxford Univ. Press, London, 1964, pp.191-202.
- [40] R. Thom : *Propriétés différentielles locales des ensembles analytiques*, *Seminaire Bourbaki* **281** (1964-65).
- [41] R. Thom : *Ensembles et morphismes stratifiés*, *Bull. A.M.S.*, **75** (1969), 240-284.
- [42] D.J.A. Trotman : *Geometric versions of Whitney regularity for smooth stratifications*, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, **12** (1979), 453-463.
- [43] D.J.A. Trotman : *Comparing regularity conditions on stratifications*, *Singularities, Proc. Sympos. Pure Math.*, **40**, Part 2 (1980), 575-586.
- [44] A.N. Varčenko : *Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings*, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, **36** (1972), 957-1019.
- [45] H. Whitney : *Elementary structure of real algebraic varieties*, *Ann. of Math.*, **66** (1957), 545-556.
- [46] H. Whitney : *Local topological properties of analytic varieties*, *Differential and Combinatorial Topology* (ed. S.S. Cairns), A Symposium in Honor of M. Morse, Princeton Univ. Press (1965), 205-244.

- [47] H. Whitney : *Tangents to an analytic variety*, Ann. of Math., **81** (1965), 496-549.
- [48] O. Zariski : *Studies in equisingularity I. Equivalent singularities of plane algebroid curves*, Amer. J. Math., **87** (1965), 507-536.
- [49] O. Zariski : *Studies in equisingularity II. Equisingularity in codimension 1 (and characteristic zero)*, Amer. J. Math., **87** (1965), 972-1006.
- [50] O. Zariski : *Studies in equisingularity III. Saturation of local rings and equisingularity*, Amer. J. Math., **90** (1968), 961-1032.
- [51] O. Zariski : *Some open questions in the theory of singularities*, Bull. Amer. Math. Soc., **77** (1971), 481-491.

1 テーマの紹介

1.1 あらまし

写像は 2 つの多様体 (定義域多様体と行き先の多様体) を比較する手段である。写像の特異値集合, すなわち行き先の多様体の部分集合で, そこを境に写像のファイバーの diffeo. type が切り替わる部分に着目しよう。この集合は, いわば多様体が多様体に投ずる影と言ってよい。写像または定義域多様体の特徴をあらわす最も素朴な対象のひとつである。ここでは写像の行き先を平面 \mathbf{R}^2 として, 特異値集合を手がかりに写像や定義域多様体 (以下, 単に多様体と呼ぶ) に迫りたい。写像としては, 安定写像と呼ばれる程度の良いものを考察の対象とする。

この設定の下では, 特異値集合は平面に描かれた 1 次元の模様 (部分集合) となる。場合により, さらに特異点のタイプを表す index を付加して考える。この模様から写像または多様体の様子を調べることが, 以下のテーマである。残念ながら, まだ理論を形成する核となるような結果は得られていない。ここでは, これまでの研究の一部を紹介して, テーマを理解してもらうことを目指すことにする。なお, この研究は L. Wilson の (とくに初期の) 仕事に触発されたものである ([Wil])。

1.2 Morse 関数の場合

Morse 関数のもっとも簡単な (= 行き先が \mathbf{R} の) 安定写像である。テーマをめぐる事情をはっきりとさせるために, これについて考えておこう。Morse 関数 $f: M \rightarrow \mathbf{R}$ の特異値集合は, M をコンパクト多様体とすれば, 有限個の点である。よく知られているように,

- Morse の恒等式によって index 付特異値集合から Euler 標数 (という粗い性質) が復元される。

一方で, すぐに判るように

- Morse 関数の特異値集合から多様体を (従って Morse 関数も) 一意に (up to diffeomorphism で) 復元することはできない。

たとえば twisted sphere $D^n \cup D^n$ は特異値が 2 点からなる Morse 関数を持つ多様体に他ならないし, Heegaard genus g のどんな 3-多様体も, 特異値が $2g+2$ 点からなる (ファイバーが連結な) Morse 関数をもつ。しかし見方を変えると, この命名自体が特異値から多様体を眺めていることに他ならない。すなわち, 特異値から多様体 (写像) を一意に復元することは無理だが, つぎの間には意味がある。

“特異値を共有する多様体の族は, どんな性質を共有するか”

twisted sphere の研究 (Γ_n の研究) に見られるように, 多様体を次元にとらわれずに縦断的 (横断的?) に眺められるのも, 特異値から多様体を見ることの特徴である。

われわれの場合, 特異値は「模様」を描くので, Morse 関数の場合よりもずっときめ細かな情報を内蔵していることを期待してしまう。この期待やいかに。以下にこれをめぐるさまざまな観察結果を述べる。

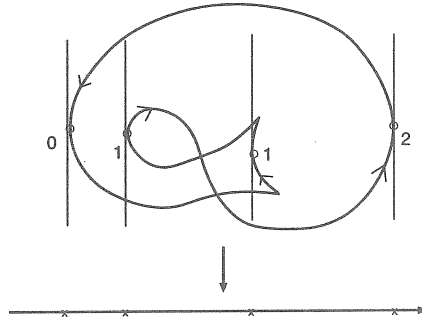


Figure 3: H. Levine の手法, トーラスのボトル投影

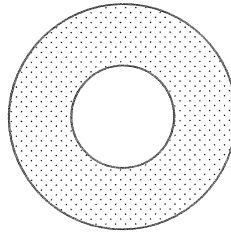


Figure 4: Σ^n -bundle / S^1 の平面像

3.2 Morse データの復元

- 平面像 + index から Euler 標数が復元できる

J. Mather の一般論により, 平面への安定写像 f に generic な projection $\gamma: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を合成すると Morse 関数になる。従って Morse 関数から収集できる情報は, 平面像からも収集できるはずである。H. Levine はこの様子を具体的に調べて, C_f と特異点の index から合成後の Morse 関数の特異点と index を得る公式を得た ([L2])。

例 T^2 の bottle projection では, 図 3 のように critical value と index が計算される。

3.3 より細やかな性質

- 平面像は handle の種類と数よりも細やかな性質を伝えている

例 A を (境界付) annulus とする。Levine の手法により, $(A, \partial A)$ を平面像とする多様体は, $0, 1, n-1, n$ handle を順次接着した構造をもつ (図 4)。この写像は definite fold というもっとも単純な特異点しか持たない。佐伯, Porto-Furuya らの結果により ([Sa],[PF],[BdR]), この平面像をもつ多様体は直感を裏切らず, S^1 上の twisted sphere バンドルに限られることが示せる。

例 4 次元多様体の例を見ておこう ([K4])。多様体 $S^2 \times S^2, S^2 \tilde{\times} S^2$ は図 5 a のような特異値集合 (同心 2 円) の安定写像を持つ。特異値の 2 つの連結成分に, 外側 (像の境界) に 0, もう一方に 2 というように index を与えると, この像を持つ多様体は逆にこの 2 つに限ら

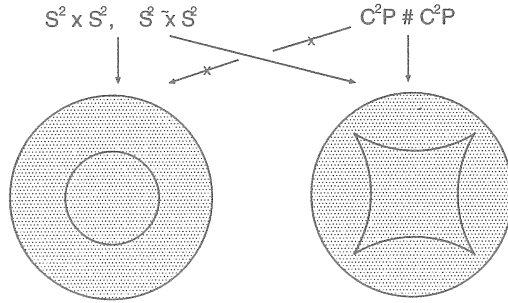


Figure 5: 二つの平面像: 図 a (左), 図 b(右)

れてしまうことが示せる。特に $C^2P \# C^2P$ は左図のような安定写像を持たない。一方、上の 3 つの多様体の全てが、右図のような特異値の安定写像を持つ。

ところが Levine の手法では、この二つの (index 付) 模様から全く同じ情報、“多様体は、0, 2, 2, 4 ハンドルを順番に接着して得られる”しか得られない。つまり、図 a の模様には Levine の方法では取り出せていない多様体の性質が遺伝している。

試みに 図 a の模様を持つ 2 次元多様体を探してみると、二つの球面 $S^2 \times S^0$ が見えて来る。さらに、3 次元で探してみると、 $S^2 \times S^1$ の二つの球面 $S^2 \times \{Np, Sp\}$ (Np:North pole, Sp:South pole) の像が S^1 の height function による像で結ばれている様子が見えて来る (例 3.1 参照)。このようにして順次目を慣らしていくと、模様 a からは、二種類の球面、高さを保つファイブレーションというイメージが浮かびあがってくる。

この模様の語り掛けてくる事を模様によらず一般的に、的確に表現することがこの研究の目標である。

問題 特異値の語りかけてくることをすっきりと定式化せよ。

次の節では、ケーススタディとして、具体的な特異値集合をひとつ固定し、その平面像をもつ多様体族 (または写像) について考えてみよう。

4 あさがお型平面像を持つ多様体 ([K3],[K4],[K5])

4.1 あさがお型の平面像とその由来

図のような平面像を D_k と記し、その形状から“あさがお型の平面像”と名付けよう。このような平面像をもつ安定写像は、曲面の 4 重折り畳みで実現される。以下、この写像を簡単に k -カスプ「あさがお射」と呼ぼう。

定理 4.1 2,3,4 次元の向き付け可能な閉多様体 M^n が、 k -カスプあさがお射 $f: M \rightarrow \mathbf{R}^2$ を持つとする。カスプの index を a とする。このとき、

1. M は群 G の作用をもち、その orbit space は k -多角形 Δ_k である。ただし、 G は

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2 & \quad n=2 \text{ のとき} \\ O(2) \times \mathbf{Z}_2 & \quad n=3 \text{ のとき} \\ O(3) \times \mathbf{Z}_2 & \quad n=4, a=2 \text{ のとき} \\ S^1 \times S^1 & \quad n=4, a=1 \text{ のとき。} \end{aligned}$$

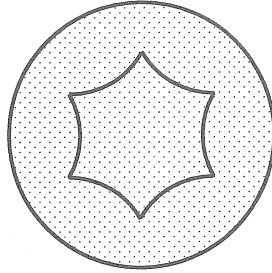


Figure 6: あさがお型平面像 $D_k, k = 6$

2. f は上の作用の orbit map $g : M \rightarrow \Delta_k$ を摂動したものと A -同型。

注意 $n = 3$ のとき, $a = 1, n = 4$ のとき $a = 1$ または 2 である。

これから, M の次元が 4 以下のとき, あさがお射 f は 2 次元の場合と同じ由来を持つことが分かる。他次元の多様体についても同種の定理が得られることが期待される。ただし, G 作用の存在には特殊な事情が介在しているので (たとえば $O(1), O(2)$ の可換性など), 本質的なことは次の写像 $g : M \rightarrow \Delta_k$ の存在と思われる。

問題 向き付け可能な閉多様体 M が あさがお射 f を持つならば, それは次の写像 $g : M \rightarrow \Delta_k$ の安定摂動か。ただし, g は $D^{a+1} \times D^{b+1} \rightarrow \mathbf{R}^2; (z, w) \mapsto (|z|^2, |w|^2)$ の k 個のコピーを張り合わせた写像, $b = n - 2 - a$ 。

これについては, 限られた index ($a \leq 2$ または $a = \dim M - 2$) についての肯定的な解答が得られている。また (どんな index に対しても), つぎの事が判っている:

D_k を, 各々がちょうどカスプ像をひとつ含む様に k -個の扇型 F_1, F_2, \dots, F_k に「等分」しておく。これの f による引き戻しを E_i と書く。

定理 4.2 それぞれの E_i の上で f の A -同型類は一意で, 写像 $D^{a+1} \times D^{b+1} \rightarrow \mathbf{R}^2; (z, w) \mapsto (|z|^2, |w|^2)$ の摂動である。

しかし, $D^{a+1} \times D^{b+1}$ 上のこの semi-local な g を M 全体に拡張できるかどうか判らない。この難しさは “ f を保つ $S^a \times D^{b+1}$ や $D^{a+1} \times S^b$ の self-diffeo. の, f を保つ isotopy 類” に起因する。 $S^a \times D^{b+1}$ や $D^{a+1} \times S^b$ の上で f は「もっとも単純」な Morse 関数であるが, それでもこの isotopy 類の考察は難しい。

問題 Morse 関数を保つ自己微分同相射の isotopy 類を研究せよ。

つぎに, f の由来を離れて, 他に見えてくることを探してみよう。見当をつけるために, とりあえず $n = 3, 4$ の場合を考えてみよう。

4.2 あさがお射を持つ $3, 4$ 次元多様体

まず, Levine の手法を応用して M のハンドル分解を調べておく。

命題 4.3 $3, 4$ 次元の閉多様体 M が k -カスプあさがお射 f を持つとする。このとき,

1. 前節の分割 $M = \bigcup E_i$ は M のハンドル分解を与える。
2. 各ハンドルの index はつぎの様になる; E_1 は $0, E_k$ は n ($n = \dim M$), 残りの E_2, \dots, E_{k-1} は交互に $a+1, b+1, a+1, \dots$ 。ただし, a はカスプの index, $b = n - 2 - a$ 。

注意 k が奇数のときには $a = b$ である。また、この命題はどんな次元の M についても成り立つ。

3,4 次元の場合には、前節の間にある Morse 関数の isotopy 類を手作業で調べることができるので、さらに次のことが言える (見える)。

命題 4.4 上と同じ仮定, 記号のもとに,

1. 隣りあった二つの E_i (i.e., $E_i \cup E_{i+1}$, 添字は mod k で考える) には S^{a+1} 上の D^{b+1} -bundle, または S^{b+1} 上の D^{a+1} -bundle の構造が, i を取り換えるごとに交互に入る。
2. 特に, M はこの二種類の bundle を $k-2$ 頂点の直線グラフに従って "plumbing" した境界付き多様体に, D^n を接着して得られる。

この命題の 2 次元版 ($a = b = 0$) を見ておくと, f の次元を越えた類似性がよく見て取れる。また 2 から, 多様体 M は, 曲面の様子を色濃く残した多様体と言える。実際にその微分同相類を決定することも難しくない。

系 4.5 上と同じ仮定, 記号のもとに, M はつぎのいずれかの多様体と微分同相。

$$\begin{array}{lll} S^3, & \#_p S^2 \times S^1 & n = 3 \text{ の場合} \\ S^4, & \#_p S^2 \times S^2, \#_p \mathbb{C}^2 P \#_q \overline{\mathbb{C}^2 P}, & n = 4, a = 1 \text{ の場合} \\ S^4, & \#_p S^3 \times S^1 & n = 4, a = 2 \text{ の場合} \end{array}$$

上の命題をもう少し精密に検証すると, つぎのように言い替えることができる。

命題 4.6 [paraphrase] M に埋め込まれた球面の族 S_1, S_2, \dots, S_k があり, つぎを満たす。

1. S_1, S_2, \dots, S_k は交互に S^{a+1}, S^{b+1} と微分同相。
2. 各 S_i は隣り合った二つのカスプを含み, S_{i-1} および S_{i+1} (添字は mod k で考える) とそれぞれ別のカスプで transverse に交差する。
3. 各 S_i を同相 (homeo.) で変形して, その像を C_f の隣り合ったカスプをむすぶ arc に押し込むことができる。
4. 特に, M は $\cup S_i$ の tubular 近傍の境界に $S^a \times S^b \times D^2$ を接着した多様体。

すなわち, 単に M が plumbing で得られているというだけでなく, あさがお射は, それを非常にすなおに, つまり, plumbing の core が transverse に交わっている様子をそのまま D_f に伝えている。

命題 4.7 $\dim M = 2, 3, 4$ のとき, 命題の条件 (4.4 の 2 または 4.6 の 4) を満たす多様体 M にあさがお射を構成することができる。

従って, これらの命題は, あさがお射をもつ 2, 3, 4-多様体の特徴付けを与えている。本当は, 次元に因われない特徴付けが欲しいのであるが, これらの命題は, そのための足掛かりと思うことにしよう。

問題 これらの命題は 5 次元以上の M についても成り立つか。

たとえば, 命題の多様体 (4.6, 4) を一般化して $((a, b)$ タイプの) cyclic plumbed manifolds という多様体の族を考えることができる。この多様体はあさがお射を持つことが示せる。しかし, 逆が良く分からない。命題の sphere を twisted sphere に弱めれば 4.6 は正しいのだが, 本当に sphere になり得ない場合があるのかどうかは分からない。

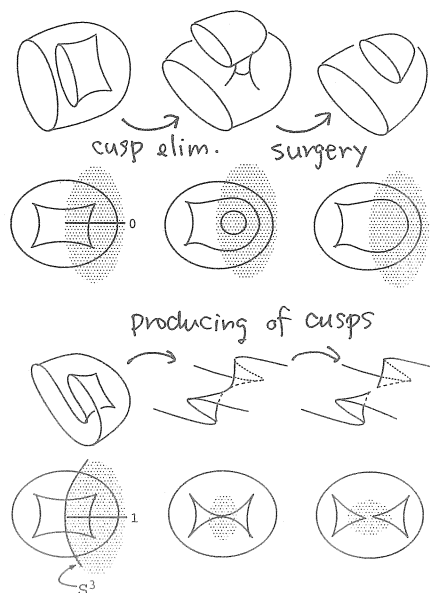


Figure 7: $n = 4, a = 1$ の場合の map 版 Neumann 変形

4.3 Neumann 変形の視覚化

特異値集合から多様体を眺める好例として, M をカusp index 1 のあさがお射 f をもつ向きの付いた閉 4-多様体とし, 特異値の変形によって多様体 M の微分同相類を決定する様子を紹介する。方法は, 基本的に Neumann の方法 ([NW]) と同じであるが, 大きな違いは, 変形が写像付きで行われる事, 写像を通じて全ての変形の 2 次元のアナログが常に「見える」事 (Neumann の方法の visual 化) である。この方法で, 実は多様体の微分同相類だけでなく, 写像の A -同型類も決定される。

つぎの補題はよく知られている。

補題 4.8 1. M の微分同相類は $S_i, i = 1, \dots, k$ の自己交点数 a_1, a_2, \dots, a_k と符号 \pm (plumbing の sign ($k - 2$ 個) の積) で決定される。

2. $a_i = 0$ または ± 1 となる i がある。

つぎの補題は例えば Levine の方法 (3.2 節) で示せる ($\Gamma_4 = 0$ なので)。

補題 4.9 $k = 2$ のとき, M は S^4 と微分同相。

つぎの事も命題 4.3, 4.4, 4.6 のどれからでも分かる。

補題 4.10 $k = 3$ のとき, M は C^2P と微分同相。

簡単のため $k = 4$ のときを紹介する。補題 4.8 により $a_1 = 0$ であったとする。このとき, $S_1 (\cong S^2)$ を除去する surgery によって, 図のように写像 f を変形することができる。補題 4.9 により, 新しい多様体は S^4 。従って, M は $S^2 \times S^2$ または $S^2 \tilde{\times} S^2$ と微分同相。

補題 4.8 により $a_1 = 1$ または -1 であったとする。このとき、図の中央線に f を制限すると、 S^3 の Morse 関数が得られる。これの中 2 つの特異点は canceling pair であるので、“cusp の生成” ホモトピー ([L1]) により写像を図のように変形することができる。補題 4.10 から、これは $\mathbf{C}^2 P \# \mathbf{C}^2 P$ と微分同相。 $k \geq 5$ のときも同様の手続きで M の微分同相類を知ることができる。

4.4 変形操作の副産物

上で述べた方法による $k = 4$ のあさがお射の A-同型類の分類から、つぎの様な例が見出される。

○ 同じ多様体からの安定写像で、特異値と特異点の index を共有するが A-同型でない写像がある。

実際、 $(p, 0, -p, 0)$ から決定される多様体は p が even のとき、 $S^2 \times S^2$ 、そうでないとき $S^2 \tilde{\times} S^2$ と微分同相になる (Hirzebruch 曲面)。特異点の index はカスプの index で決定されてしまうので、これらの平面像は同じ index を付与される。一方、 D_4 を十文字に分割する 2 直線を取り、逆像を「計算」すると、 $S^2 \times S^1$ および $L(p, 1)$ となる。これから、 p が同じ parity を持っても写像としては決して同型にならないことが分かる。このような写像は p に応じて無限個ある。

○ 多様体が一意に復元できる例

上の補題は $\dim M = 4$ という限定のもとで、 D_2, D_3 上に多様体が一意に復元できることを主張している。実は写像も一意に復元される。

5 平面像の実現, 写像の構成など

平面像がなにを伝えているかという問題にアプローチするには、具体的な特異値集合についての考察を積み上げることが必要と考えている。では、これに適する (= あまりに複雑すぎず、かといって特殊すぎない) 特異値集合とは、ということ、次のようなこともまだ掘めていない。

問題 どのような「模様」が安定写像の特異値として現れるか。

多様体の次元により実現される模様には差があることは分かっている。例えば、曲面の平面像にはなっているが、それ以外の次元の多様体の平面像には決してなり得ない模様がある。

問題 n -多様体の平面像は $n - 1$ 次元以下の多様体で実現できるか。

また、平面や空間への安定写像は前述のように豊富に存在するのだが、具体的な構成は意外に難しく、構成例は少ない。豊富に存在することが禍して (?) 労多く実りの保証されない仕事といえる。筆者が数年前に構成した $\mathbf{C}^2 P$ の立体像 (\mathbf{R}^3 への安定写像) のひとつ ([K2]) が、最近、佐伯氏によって別目的から再構成されたことは大変に嬉しい例外である。しかし、具体例の構成と観察はとても重要である。とくに複素曲面の平面像、立体像の構成は「手頃」で、像を眺めていると曲面のあらたなハンドル分解、曲面にひそむ対称性や重要な部分多様体の発見につながるかもしれない。

問題 たくさんの安定写像を具体的に構成せよ。

6 大域的な写像の理論

ここに述べた研究は「大域的な写像の理論」という項目に分類される。特異点として definite 型の fold 一種類しか現れない写像については事情が大分異なり、Burle, de Rham, 佐伯, 佐

久間らの研究により、現れる多様体、および平面像が判明している。特異点集合から多様体を眺める研究は、特異点論の主要テーマのひとつで、Thom, 福田, 佐伯, 大本, 佐久間らの多くの研究がある。

ここではあさがお射について述べたが、この他の平面像についても解析が進められている。ただし、前述のように系統的な理論はまだ得られていない。Viroの構成した、4-多様体の微分構造を変えない対数変換を写像を用いて解釈しなおした例 ([K1]) も、特異値から多様体を探る一例と言えるかもしれない。

参考文献

- [BdR] O. Bulet and G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à 3 dimensions dans le plan*, l'Enseign. Math. **20**(1974), 275–292.
- [GG] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Grad. Texts in Math. **14**, Springer (1973).
- [K1] M. Kobayashi, *Stabilities of $S^3 \times S^1$, $S^2 \times S^2$ and of Pao manifolds under logarithmic transformations*, preprint, 1996.
- [K2] M. Kobayashi, *Two stable maps of C^2P into \mathbf{R}^3* , Memoirs. Coll. Edu. Akita Univ (Natural Sci). **51**(1997), 5–12.
- [K3] M. Kobayashi, *On a global perturbation of the map $(|z|^2, |w|^2)$* , preprint, 2000.
- [K4] M. Kobayashi, *Planar projections of linear plumbed 3 and 4 manifolds*, In preparation.
- [K5] M. Kobayashi, *Manifolds with the same discriminant as the 'foldings of surfaces into four'*, In preparation.
- [L1] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3**, suppl. 2 (1965), 263–296.
- [L2] H. Levine, *Mappings of manifolds into the plane*, Amer. J. Math. **88** (1966), 357–365.
- [Ma] J. Mather, *Stability of C^∞ mappings: VI. The nice dimensions*, Proc. Liverpool Singularities - Symposium I, Lect. Notes in Math. vol. 192, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1971.
- [NF] 野口広, 福田拓生, 初等カタストロフィー, 共立出版 (1971).
- [NW] W. Neumann and S. Weintraub, *Four-manifolds constructed via plumbing*, Math. Ann. **238**(1978), 71–78
- [PF] P. Proto and Y. Furuya, *On special generic maps from a closed manifold into the plane*, Topology Appl. **35**(1990), 41–52.
- [Sa] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidian spaces*, Topology Appl. **49**(1993), 265–293.
- [Wil] L. Wilson, *Equivalence of stable mappings between two-dimensional manifolds*, J. Diff. Geom. **11**(1976), 1–14.

The twisted Maurer-Cartan solutions and Some invariants given by moduli stacks

大阪市大数学教室 望月拓郎

1 Introduction

Donaldson invariant と Seiberg-Witten invariant に関連した二つの問題 (Witten 予想と Kotschick-Morgan 予想) を代数幾何の側から論じます。

(X, g) を 4次元リーマン多様体とします。Donaldson invariant と Seiberg-Witten invariant がそれぞれ ASD connection の moduli と Seiberg-Witten equation の解の moduli を用いて定義されました。形式的には Donaldson invariant の定義の formalism は次のようなものでした。 M を ASD connection の moduli、 E を $M \times X$ 上の universal bundle とし、

$$\begin{aligned}\pi_i &: M \times X^l \longrightarrow M \times X, & (m, x_1, \dots, x_l) &\longmapsto (m, x_i) \\ \pi_0 &: M \times X^l \longrightarrow X^l, & (m, x_1, \dots, x_l) &\longmapsto (x_1, \dots, x_l)\end{aligned}$$

を projection とします。さらに $[M]$ を M の fundamental class とします。この時、

$$\pi_{0*} \left(\prod p_1(\pi_i^* E) \cap ([M] \times [X^l]) \right)$$

という homology class が X^l 上に得られます。これを $H^*(X)^{\otimes l}$ 上の汎関数と見たものが Donaldson invariant でした。この formalism を以下では formalism (D) と呼ぶことにします。formalism (D) では fundamental class $[M]$ と universal vector bundle E が用いられています。また、射影 $M \times X^l \longrightarrow X^l$ による (co)homology class の push forward が用いられています。

$b_2^+ = 1$ の時の Donaldson invariant の metric への依存の様子を記述したのが Kotschick-Morgan 予想でした。また、Witten 予想は Donaldson invariant が Seiberg-Witten invariant で (その具体的な形まで含めて) 書けることを述べたものでした。これらの問題は Pidstrigach-Tyurin、Feehan-Leness 達によって研究されました。

われわれは代数幾何でこれらに対応する問題を考えます。大雑把に言って、Kähler 曲面では ASD connection と stable bundle が対応し、Seiberg-Witten equation の解は semistable pair (holomorphic line bundle とその holomorphic section の組) に対応しました。そこで、polarized smooth surface (X, L) が与えられた時、rank 2 の semistable sheaf の moduli や semistable pair の moduli から invariant を構成し、これらの関係や polarization L への依存を調べるのがわれわれの問題です。

Problem 1.1 (X, L) 上の rank 2 の semistable sheaf の moduli stack より formalism (D) を用いて invariant Φ_D^L を構成せよ。abelian pair の moduli より invariant Φ_{SW} を構成せよ。

Problem 1.2 Φ_D^L の L を動かした時の挙動を調べよ。 ($\dim H^2(X, \mathcal{O}) > 0$ ならば、 L のとり方に依存しないことも含めて)

Problem 1.3 Φ_D^L と Φ_{SW} の関係を調べよ。

Problem 1.1 について

Morgan、Li による結果が以前から良く知られています。formalism (D) を用いるには moduli に fundamental class と universal bundle が必要でした。first Chern class が c_1 、second Chern class が c_2 であるような polarization L に関する semistable sheaf の S-equivalence class の coarse moduli scheme を $M^L(c_1, c_2)$ とあらわすとして、 c_1 に対して c_2 が十分に大きければ $M^L(c_1, c_2)$ が generic に smooth であるので fundamental class が自然に存在します。彼らはこれを用いて invariant を構成し微分幾何的に定義されるものと一致することを示しました。(ただし、coarse moduli を用いると一般には universal bundle が存在しないので、少し条件がつかしました。) われわれは Gromov-Witten invariant の研究で得られた moduli stack の virtual fundamental class の理論を用いて、(いろいろな条件をつけずに) invariant を構成します。大雑把にいうと、twisted deformation の理論を用いると、smooth surface 上の semistable sheaf の moduli stack には quasi manifold structure が与えられて、本質的には moduli が smooth だと思って議論することができます。これを用いて fundamental class を構成することができます。semistable sheaf の moduli stack は U/G という形の Artin stack になってくるので、このようなものの Chow group について調べることも必要になります。このアブストラクトでは Problem 1.1 にはこれ以上触れません。

Problem 1.2 について

Ellingsrud-Göttsche [2] や Friedman-Quin [4] は上で述べた $M^L(c_1, c_2)$ を用いて得られた invariant について Problem 1.2 を研究しました。彼らの方法は次のようなものでした。 L_1, L_2 を X の二つの polarization とします。 $L_2^n = L_1^n \otimes \mathcal{O}(D)$ であるとして n が十分に大きければ E の L_2 -semistability と $E \otimes \mathcal{O}(D)$ の L_1 -semistability は同値であることがわかります。そこで、 E の D における β -parabolic structure を考えます。(これは $E(\beta \cdot D)$ の L_1 -semistability を考えることに対応します。) Φ_β を semistable β -parabolic sheaf の moduli より得られる invariant とします。 β を 0 から 1 まで動かすと有限個の critical value $\{\beta_1, \dots, \beta_n\}$ で moduli の変化が生じます。こうして上の Problem 1.2 は次の問題に置き換えられます。

Problem 1.4 parabolic structure の weight β を動かした時の invariant Φ_β の挙動を調べよ。

L_1, L_2 の間の壁が良いものであるならば β_i における moduli の変化は非常に扱い易いものであることがわかります。 $\beta_-, \beta_+ \in [0, 1]$ を、 $\beta_- < \beta_0 < \beta_+$ であり区間 $[\beta_-, \beta_+]$ に含まれる critical value は β_0 のみであるようにとります。 M_e ($e = \pm$) を β_e -semistable sheaf の moduli とします。この時、 M_+ と M_- は次のような flip でつながれることがわかります。ある variety \tilde{M} と morphism $f_- : \tilde{M} \rightarrow M_-$, $f_+ : \tilde{M} \rightarrow M_+$ があります。morphism f_e は closed set $M_e^c \subset M_e$ に沿った blow up であり、 $f_-^{-1}(M_-) = f_+^{-1}(M_+) (= D \text{ とおく})$ です。

Ellingsrud-Göttsche, Friedman-Quin は、 L_1 と L_2 の間の壁が良いものであれば M_e^e が滑らかであり M_e が M_e^e のまわりで滑らかであることを示しました。invariant はだいたいの universal bundle の Chern class と思えますから、 M_e とその上の universal bundle の代わりに \tilde{M} と universal bundle の pull back を用いても得ることができます。すると二つの invariant の差は \tilde{M} 上の二つの bundle の Chern class の差としてあらわされ、これは exceptional divisor D におけるデータで書くことができます。今の場合 M_e^e はよくわかり、0-次元 subscheme の Hilbert scheme の直積 $Hilb^1(X) \times Hilb^2(X)$ 上 projective space bundle の構造をもち、 D はその fiber product になっています。このことを用いて Ellingsrud-Göttsche, Friedman-Quin 達は invariant の差を (壁が良い場合に) 計算することができました。

彼らのように flip をとらえると、必ずしもものごとが滑らかでない場合に議論するのは難しいようです。一般の場合にも拡張できるような議論の仕方を後で与えます。

以下で X は単連結な smooth projective surface をあらわし、その上の polarization $\mathcal{O}(1)$ は固定されているものとします。polarized smooth surface $(X, \mathcal{O}(1))$ に対して次のようなものを考えます。

- \mathcal{M}_δ : δ -semistable pair の moduli stack
- $\mathcal{M}(P)$: Hilbert polynomial が P である semistable sheaf の moduli stack
- $SW(P)$: E の Hilbert polynomial が P である abelian pair (E, ϕ) moduli stack
- $\mathcal{E}(P)$: $X \times \mathcal{M}(P)$ ($X \times SW(P)$) 上の universal sheaf
- $Hilb^l(X)$: X の長さ l の 0-dimensional subscheme の Hilbert scheme
- \mathcal{Z}_l : $X \times Hilb^l(X)$ の universal cycle
- I_l : ideal sheaf of \mathcal{Z}_l

$\pi : X \times \mathcal{M}(P_1) \times SW(P_2) \rightarrow \mathcal{M}(P_1) \times SW(P_2)$ として $\mathcal{M}(P_1) \times SW(P_2)$ 上の sheaf の complex より得られる K 群の元 $\pi_1(\mathcal{E}(P_1)^\vee \cdot \mathcal{E}(P_2))$, $\pi_1(\mathcal{E}(P_2)^\vee \cdot \mathcal{E}(P_1)) - \mathcal{E}(P_1)$ をそれぞれ \mathfrak{D}^+ , \mathfrak{D}^- とおきます。

P が rank 1 の torsion-free sheaf の Hilbert polynomial であるとする。 E が torsion free でその Hilbert polynomial P_E が P である時、適当な line bundle E' があって $E = E' \otimes I_Z$ と書ける。ここで Z は長さが $P_{E'} - P_E$ の 0-dimensional subscheme です。したがって、 $\mathcal{M}(P_1)$ の適当な connected component を考えると、line bundle の Hilbert polynomial \tilde{P} があって $\mathcal{M}(\tilde{P}) \times Hilb^1$ とあらわされ、 $\mathcal{E}(P) = \mathcal{E}(\tilde{P}) \otimes I_l$ と書けます。そこで、 $\mathfrak{E}(P) = \mathcal{E}(\tilde{P}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_l}$ と置きます。

line bundle L について $X \times Hilb^n$ から j 成分への射影を π_j として $Hilb^n(X)$ 上の vector bundle $L^{[n]}$ を $L^{[n]} := \pi_{2*}(\pi_1^* L \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{Z}_n})$ のように定義します。

2 方針

Problem 1.3, 1.4 を扱う方針を述べます。類似の構造を持っているので Problem 1.3 を説明します。

Definition 2.1 torsion-free sheaf E と $\phi \in H^0(X, E)$ の pair (E, ϕ) を Bradlow pair と呼びます。

高々一次の有理係数多項式 δ (十分大きな t について $\delta(t) > 0$) 全体のなす集合を \mathcal{P} とあらわすことにします。この時、 \mathcal{P} には次のような順序が入ります。

$$\delta_1 \leq \delta_2 \iff \delta_1(t) \leq \delta_2(t) \quad (\text{十分大きい } t).$$

$\delta \in \mathcal{P}$ を一つ固定した時、pair (E, ϕ) の δ -Hilbert polynomial $P_{(E, \phi)}^\delta(t)$ を

$$P_{(E, \phi)}^\delta(t) = \begin{cases} P_E(t) & (\phi = 0) \\ P_E(t) + \delta(t) & (\phi \neq 0) \end{cases}$$

のように定義します。 F が E の subsheaf であり、 $\phi \in H^0(X, F) \subset H^0(X, E)$ ならば $\phi' = \phi$, $\phi \notin H^0(X, F)$ ならば $\phi' = 0$ である時、 (F, ϕ') が (E, ϕ) の subobject であるという。

Definition 2.2 (E, ϕ) が δ -semistable であるのは、任意の subobject (F, ϕ') に対して

$$(\text{rank } E)P_{(F, \phi')}^\delta \leq (\text{rank } F)P_{(E, \phi)}^\delta$$

という関係が成り立つこととして定義する。

δ -semistable な object の moduli stack を \mathcal{M}_δ と書き、 \mathcal{M}_δ より formalism (D) で得られる invariant を Φ_δ と書くことにします。

δ が十分小さい時、 (E, ϕ) が δ -semistable であれば E が semistable sheaf であることがわかります。また、 δ が十分に大きい時、 $\mathcal{M}_\delta = \emptyset$ であることも簡単にわかります。

Definition 2.3 reducible な δ -semistable Bradlow pair $(E_1, \phi_1) \oplus E_2$ が存在する時、 δ が critical であると呼ぶ。

多項式 δ_0 が critical、 $\delta_- < \delta_0 < \delta_+$ であり、 δ_- と δ_+ の間の critical なものは δ_0 のみとします。

reducible な Bradlow pair $(E_1, \phi) \oplus E_2$ が δ_0 -semistable であるとし、この時、 $P_{E_1} + \delta_0 = P_{E_2}$ が成り立っています。 $P_{(E_1, \phi)}^\delta$ は δ が増加すると増加し、 $P_{(E_2, 0)}^\delta = P_{E_2}$ は δ によらず一定です。したがって $P_{(E_1, \phi)}^{\delta_0} = P_{E_2}$ の時、 $\delta_- < \delta_0 < \delta_+$ ならば $P_{(E_1, \phi)}^{\delta_-} < P_{E_2} < P_{(E_1, \phi)}^{\delta_+}$ であるから、Bradlow pair (E, ϕ) で $(E_1, \phi) \rightarrow (E, \phi) \rightarrow E_2$ という filtration をもつものは δ_- -semistable であり、かつ、 δ_+ -semistable ではないことがわかります。(このようなものの moduli を \mathcal{M}_- と書くことにする。) 同様に、 $E_2 \rightarrow (E, \phi) \rightarrow (E_1, \phi_1)$ という filtration をもつものは δ_+ -semistable であり、かつ δ_- -semistable ではないことがわかります。(このようなものの moduli を \mathcal{M}_+ と書くことにします。)

逆に、 δ_- -semistable であり δ_+ -semistable でなければ $(E_1, \phi) \rightarrow (E, \phi) \rightarrow E_2$ という filtration を持つことなどがわかります

Proposition 2.1 moduli \mathcal{M}_δ の transition は critical な δ で起こる。したがって、 $D(\delta_0) = \Phi_{\delta_+} - \Phi_{\delta_-}$ と置くと

$$\Phi_\delta = \sum_{\substack{\delta_0: \text{critical} \\ \delta_0 > \delta}} D(\delta_0)$$

という等式が成り立つ。さらに、critical δ_0 に対して δ_-, δ_+ を δ_0 に十分近く $\delta_- < \delta_0 < \delta_+$ のようにとると、 \mathcal{M}_{δ_-} と \mathcal{M}_{δ_+} の差は $\mathcal{M}_-, \mathcal{M}_+$ である。すなわち

$$\mathcal{M}_{\delta_-} - \mathcal{M}_- \simeq \mathcal{M}_{\delta_+} - \mathcal{M}_+.$$

δ が十分に小さい時 Φ_δ と Φ を結びつけ、critical な δ_0 について $D(\delta_0)$ を Φ_{SW} と結びつけることができれば、 Φ と Φ_{SW} の関係が得られます。

\mathcal{M}_δ^e は形式的には次のような構造を持っています。 $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ から (E_1, ϕ_1) の moduli $SW(P_1)$ と E_2 の moduli $\mathcal{M}(P_2)$ の moduli の直積への morphism があります。この morphism の fiber は形式的には $Ext^1((E_1, \phi_1), E_2)$ と $Ext^1(E_2, E_1)$ です。 \mathcal{M}_+ についてももう少し詳しく述べておくと、 $X \times SW(P_1) \times \mathcal{M}(P_2)$ 上に sheaf $RHom(E_1, E_2) \rightarrow E_2$ があり、その push forward として得られる $SW(P_1) \times \mathcal{M}(P_2)$ 上に $R\pi_*(RHom(E_1, E_2) \rightarrow E_2)$ があり、 \mathcal{M}_+ はこの complex の H^1 -part としての構造を持ちます。また、 $\mathcal{M}_+ \hookrightarrow \mathcal{M}$ の normal direction は $RHom(E_2, E_1)$ によって制御されます。

$D(\delta_0)$ を調べるために次の二つの step を考えます。

Step 1. $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ の substack $\mathcal{M}_-, \mathcal{M}_+$ に localize する。すなわち invariant の差 $\Phi_+ - \Phi_-$ を $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ におけるデータで計算される量 Φ_+, Φ_- の差としてあらわす。 $\mathcal{M}_+, \mathcal{M}_-$ は Hilbert scheme 上の直積上の fibration としての構造を持っていることより、Hilbert scheme 上のある種の sheaf の特性数の計算に持ち込める。

Step 2. Hilbert scheme に関して知られている方法を用いて Φ_+, Φ_- が TX, E_1, E_2 の特性類の universal な多項式で書けることを示す。

2.1 Step 1

2.1.1 master space の構成

Hilbert polynomial が P であるような semistable sheaf の moduli は次のように構成されました。十分に大きい自然数 N と $P(N)$ 次元の vector space V を固定します。 E を Hilbert polynomial P である semistable sheaf とするとこれは $H^0(X, E \otimes \mathcal{O}(N)) \otimes \mathcal{O}_X(-N) \rightarrow E$ を考えることで、 $V(-N) := V \otimes \mathcal{O}(-N)$ の quotient sheaf と見ることができます。そこで、 $V(-N)$ の quotient sheaf の moduli U を考えると、これは projective variety になりました。これには $G = PGL(V)$ の作用があり、canonical な G -polarization \mathcal{L} がありました。これに関する semistable point 全体 U^{ss} を G でわることによって moduli stack が得られました。

δ -semistable pair の場合にはこの構成を少し修正します。ある G -polarized projective space \mathbb{P}^N があって $\mathcal{O}(n_1, n_2) := U \times \mathbb{P}^N$ 上には $\mathcal{L}^{n_1} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(n_2)$ という G -polarization の族が得られます。 $U \times \mathbb{P}^N$ の closed set W が定まる。 δ によって定まる自然数の組 (n_1, n_2) があって、 W に含まれる $\mathcal{O}(n_1, n_2)$ -semistable point 全体を $W^{ss(n_1, n_2)}$ と表した時、 $\mathcal{M}_\delta = W^{ss(n_1, n_2)}/G$ となります。したがって δ の variation は polarization $\mathcal{O}(n_1, n_2)$ の variation に置き換えられます。

一般に G を reductive group、 U を G -quasi projective variety、 $\mathcal{L}_+, \mathcal{L}_-$ を G -polarization とします。 \mathcal{L}_i -semistable point 全体のなす open set を U_i と表す。この時、 U_i/G という algebraic stack が得られます。polarization を \mathcal{L}_- から \mathcal{L}_+ に変えると open set U_- が U_+ に変化し、algebraic stack U_-/G が U_+/G に変化しています。このような状況を捉えるために形式的には Thaddeus にならって次のような議論をする。

$\mathbb{P} = \mathbb{P}(\mathcal{L}_+^{-1} \oplus \mathcal{L}_-^{-1})$ とおく。この上には G -polarization $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$ があります。 \mathcal{L} -semistable point 全体を \mathbb{P}^{ss} とおき $M = \mathbb{P}^{ss}/G$ とおき、これを master space と呼ぶ。

\mathbb{P}^{ss} には natural な torus action ρ があり、その不動点集合は二つの成分を持ち、それぞれ

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_- &= \mathbb{P}(0 \oplus \mathcal{L}_-^{-1}) \simeq U_- \\ \mathbb{P}_+ &= \mathbb{P}(\mathcal{L}_+^{-1} \oplus 0) \simeq U_+\end{aligned}$$

です。この torus action ρ は G の作用と可換なので M への torus action が得られます。これも ρ で表すことにします。この作用の不動点は大雑把に言って3つの成分に分かれます。 $\mathbb{P}_-, \mathbb{P}_+$ から induce されるものをそれぞれ M_-, M_+ とあらわします。もう一つは torus の作用と G の作用が重なってしまうところから生じます。つまり、 G の U への作用の不動点 x の stabilizer が torus $G_{m,x}$ を含む時、その torus $G_{m,x}$ が $\mathbb{P} \rightarrow U$ の x 上の fiber 方向に非自明に作用するならば、 M までいくと G_m の作用の不動点を与えることがわかります。

2.1.2 局所化 (モース理論的な見方)

前節で述べた状況はシンプレクティック幾何的には次のように見ることができます。 S^1 が symplectic manifold M に symplectic に作用しているとします。

不動点集合は3つの成分 M_-, M_+, M_0 を持ち、 M_-, M_+ の codimension は2と仮定します。torus action より誘導される \mathbb{R} の作用で $t \rightarrow -\infty$ の時 general には M_- にいき、 $t \rightarrow \infty$ の時 general には M_+ にいくとします。この時、 M_- と M_+ は次のような意味でほとんど同型です。

$M_- = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow \infty} t \cdot x \in M_0\}$ $M_+ = \{x \in M \mid \lim_{t \rightarrow -\infty} t \cdot x \in M_0\}$ とおきます。さらに $\bar{M}_e = (M_e - M_0)/(S^1 \times \mathbb{R})$ とおきます。

この時、 $(M - (M_+^+ \cup M_+ \cup M_-))/S^1 \times \mathbb{R}$ は M_- に同型であり、 $(M - (M_- \cup M_+ \cup M_-))/S^1 \times \mathbb{R}$ は M_+ に同型です。

$$M_+ - M_+^+ \simeq (M - (M_+^+ \cup M_- \cup M_+ \cup M_-)) \simeq M_- - M_-$$

です。つまり、 M_+, M_- の topology の違いは \bar{M}_+^+ と \bar{M}_- の部分です。

E を M 上の G_m -vector bundle とすると、 E は M_+, M_- 上に vector bundle E_+, E_- が induce されます。この時、 E_+, E_- より得られる特性数の差を計算したいとします。この差を \bar{M}_+^+, \bar{M}_- で計算できる量であらわすことを考えます。(局所化)

トポロジーでは、不動点 M_0, M_+, M_- をとりのぞいて S^1 でわって得られるものが用いて議論しました。

これを代数幾何では以下のように考えることができます。 $\mathcal{N}_{M^0}M$ には次のように与えられる二つの torus action があります。一つは M への torus action より induce されるものです。 $\mathcal{N}_{M^0}M = \mathcal{N}_{M^0}M^- \oplus \mathcal{N}_{M^0}M^+$ という分解がありますが、 $\mathcal{N}_{M^0}M^-$ 方向について weight -1 で、 $\mathcal{N}_{M^0}M^+$ 方向について weight 1 です。

ここで $(\mathcal{N}_{M^0}M - \mathcal{N}_{M^0}M^-)/G_m$ と $(\mathcal{N}_{M^0}M - \mathcal{N}_{M^0}M^+)/G_m$ の E より定まる特性数の差というものを考えることができます。この二つは compact ではないのでそれ自体では特性数は定義できませんが、compact な部分をとりどくと同型なので特性数の差は定義できます。

もう一つの torus action は $\mathcal{N}_{M^0}M$ が vector bundle であることから自然に得られます。つまり $\mathcal{N}_{M^0}M^-$ 方向 $\mathcal{N}_{M^0}M^+$ 方向のいずれについても weight 1 として定義します。

この作用はもう一つの作用と可換であるのでわたったところへの作用が induce されます。この作用の不動点は M^-, M^+ になります。

特性数は equivariant なものに持ち上げられます。したがって $D(\delta_0)$ は Borel localization を用いることでそれぞれの不動点集合 M^-, M^+ に局所化されます。

でてくるものが滑らかなでない時には、局所化しておくことによって、fundamental class を得るための構造を滑らかなものに変形することができます。そうして、局所化されたもののある程度計算すると次のような結果が得られます。

Theorem 2.1 $D(\delta_0)$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_j \binom{-r(\tilde{\mathcal{D}}^+) - i}{k} (-1)^{k_2 - r(\tilde{\mathcal{D}}^+) - i - k} s_i(\tilde{\mathcal{D}}^+) s_{j+k+1-r(\tilde{\mathcal{D}}^-)}(\tilde{\mathcal{D}}^-) - \right. \\ & \left. \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \omega_j \binom{-r(\tilde{\mathcal{D}}^-) - i}{k} (-1)^{-r(\tilde{\mathcal{D}}^-) - i - k_2 - r(\tilde{\mathcal{D}}^-) - i - k} s_i(\tilde{\mathcal{D}}^-) s_{j+k+1-r(\tilde{\mathcal{D}}^+)}(\tilde{\mathcal{D}}^+) \right) \\ & \cap Eu(\mathcal{E}_1)Eu(\mathcal{E}_2) \cap ([Hilb^{l_1} \times SW(\tilde{P}_1) \times Hilb^{l_2} \times Pic(\tilde{P}_2)] \times \prod_{i=1}^k a_i) \quad (1) \end{aligned}$$

ここで s_i は Segre class をあらわし、 ω_j は universal bundle の Chern class の適当な多項式であり、 $a_i \in H^2(X)$ である。

同様にして Problem 1.3 でも invariant の transition について同様の公式が得られます。特に $\dim H^2(X, \mathcal{O}) \neq 0$ の時 ($b^+ > 1$ に対応)、invariant が polarization のとり方に依存しないことがわかります。

2.2 Step 2 (Hilbert scheme 上のある種の sheaf の特性数について)

Ellingsrud-Göttsche-Lehn [3] の方法を用います。

X を smooth projective surface とします。 $Hilb^{n,n-1}(X)$ を X の 0-cycle の pair (ξ, ξ') で $\xi \subset \xi'$, $length(\xi) = n - 1$, $length(\xi') = n$ のようなものの moduli とします。自然な morphism $\psi : Hilb^{n,n-1} \rightarrow Hilb^n$, $\phi : Hilb^{n,n-1} \rightarrow Hilb^{n-1}$ および $\rho : Hilb^{n-1,n}(X) \rightarrow X$ があります。Ellingsrud, Göttsche and Lehn は $\rho \times \phi : Hilb^{n-1,n} \rightarrow X \times Hilb^{n-1}$ が $\mathbb{P}(I_{n-1})$

に同型であることを示しました。ただし、 I_{n-1} は universal cycle $\mathcal{Z}_{n-1} \subset X \times \text{Hilb}^{n-1}$ の ideal sheaf です。tautological line bundle を \mathcal{L} と書くことにします。この時次の補題が得られます。

Lemma 2.1 X を smooth surface、 T を variety とし、 F を $X \times T$ 上の vector bundle とする。 K 群 $K(X \times \text{Hilb}^n(X) \times T)$ の元

$$\begin{aligned} a_n &= p_{01}^! I_{\mathcal{Z}_n} \cdot p_{02}^! F, \\ b_n &= p_{01}^! I_{\mathcal{Z}_n}^\vee \cdot p_{02}^! F, \end{aligned}$$

を考える。ここで p_{01}, p_{02} は射影 $p_{01} : X \times \text{Hilb}^n(X) \times T \rightarrow S \times \text{Hilb}^n(X)$ 、 $p_{02} : X \times \text{Hilb}^n(X) \times T \rightarrow \text{Hilb}^n(S) \times T$ をあらわすとする。この時、次の等式が得られる。

$$\begin{aligned} (\psi \times 1_T)^! p_{12}^!(a_n) &= (\phi \times 1_T)^! p_{12}^!(a_{n-1}) - (\rho \times 1_T)^! F p_1^! \mathcal{L}, \\ (\psi \times 1_T)^! p_{12}^!(b_n) &= (\phi \times 1_T)^! p_{12}^!(b_{n-1}) - (\rho \times 1_T)^! F \rho^! \omega_X^\vee p_1^! \mathcal{L} \end{aligned}$$

射影 $\prod_{i=1}^l \text{Hilb}^{n_i} \times X^m$, $(s_i, \dots, s_i; x_1, \dots, x_m) \mapsto (s_j, x_k)$ を $q_{i,k}$ で表します。さらに、 i 番目と j 番目の成分をとりだす射影 $X^m \rightarrow X^2$ を $p_{i,j}$ であらわします。

この時、次の補題が得られます。

Lemma 2.2 f を (適当な変数の) 多項式とする。 $\prod_i \text{Hilb}^{n_i}(X) \times X^m$ の K 群の元 $q_{ij}^! I_{n_i}$ 、 $p_{ij}^! \mathcal{O}_\Delta$ 、 $p_i^! T_X$ 、 $q_i^* L_j$ 、 $p_i^* L_j$ の Chern class を f の変数に代入したものを f と書くことにする。この時 f のみに依存して定まる多項式 \tilde{f} で次が成り立つようなものが存在する。

$$\tilde{f} \cap [\text{Hilb}^{n_1-1} \times \prod_{i=2}^l \text{Hilb}^{n_i} \times X^{m+1}] = f \cap [\prod_i \text{Hilb}^{n_i} \times X^m].$$

これより次の命題が得られます。

Proposition 2.2 sheaf $\tilde{\mathcal{D}}_+$ 、 $\tilde{\mathcal{D}}_-$ 、 $\mathcal{O}_{\mathcal{Z}_1}$ の特性数は、 $T(X)$ 、 E_+ 、 E_- の特性数のみに依存する。のみに依存する。

上の結果を用いると単連結な X について次の結果を得ます。

Theorem 2.2 $D(\delta)$ について上で得られた式は Φ_{SW} の一次結合であらわされ、その係数は TX 、 E'_1 、 E'_2 の特性数の多項式 (X には依存しない) であらわされる。ここで E'_1 、 E'_2 は critical な δ で現れる line bundle である。

3 高階化

今まで述べてきたのは rank 1, rank 2 の object の moduli を用いた理論でした。これをより高階の object の場合に拡張していくのは自然な問題です。

最初に問題になるのは formalism (D) に必要な push forward

$$\pi_{0*} : CH_*(\mathcal{M} \times X^k) \rightarrow CH_*(X^l)$$

を用意することです。そのために semistable sheaf の moduli stack \mathcal{M} の 0-cycle の degree の理論が必要になります。

しかし、 \mathcal{M} は一般には Artin stack になりますが、Artin stack の 0-cycle に対する degree の一般論はまだ確立されていないようです。困難は inseparability (Hausdorff でなくなること) と正の次元を持つ stabilizer (automorphism) の存在です。

separable な Deligne-Mumford stack (topology における orbifold に対応する) であれば、0-cycle の degree の理論はよく知られています。この時出発点になるのは (代数閉体 k 上で話をすれば)、有限群 G を stabilizer に持つ一点 k/G には degree $1/|G|$ を与えることでした。 G が正の次元を持つと $1/|G|$ というのは意味をなさなくなります。 G が正の次元を持つような Artin stack の最も簡単な例としては次のようなものがあります。 X を smooth projective variety として、 E を $\text{rank } E = \dim X$ であるような vector bundle とします。このとき、 E の X への自明な作用より X/E という 0-dimensional Artin stack が定義されます。これの $\text{degreedeg}(X/E)$ は上のようには定義できません。実はこの場合はいくつかの理由から、 $\text{deg}(Eu(E) \cap [X])$ ($Eu(E)$ は E の Euler class で、 $[X]$ は X の自然な fundamental class です) と置くべきだと考えられます。しかし、一般には状況がもっと複雑です。rank 2 の semistable sheaf の moduli の場合は、stabilizer が自明でなくなるのがどのような時かを全て調べることも簡単でしたが (E に $L \subset E, E/L \simeq L$ という filtration が入る場合だけ)、rank が 3 以上になるともっと複雑なので、systematic な方法が必要になります。

また、stabilizer が自明であっても inseparability があると rational equivalent で degree が保存されるには、単純に一点の degree を 1 とするわけにはいかなくなります。単純な例は二本の affine line $A_x^1 = \text{Spec } k[x], A_y^1 = \text{Spec } k[y]$ を

$$A_x^1 - \{O_x\} \simeq A_y^1 - \{O_y\} \simeq \text{Spec } k[t, t^{-1}], \quad x = y = t$$

の同型ではりあわせたものです。(ここで O_x, O_y はそれぞれの原点をあらわします。) このように貼り合わせると、二つの原点 O_x, O_y が inseparable になります。 O_x, O_y 以外の一点 P がこの二点と rational equivalent なので、 O_x, O_y の degree を w_x, w_y とすると $w_x + w_y = 1$ を満たさなければなりません。一般に l 本の affine line $A_{x_j}^1$ ($j = 1, \dots, l$) を $A_{x_j}^1 - \{O_{x_j}\} \simeq \text{Spec } k[t, t^{-1}], x_j = t$ という同型で貼り合わせて得られるものを $X(l)$ と表すことにします。この時、 $l \leq l'$ であれば proper morphism $X(l') \rightarrow X(l)$ がいくつかありますが、これらについて compatible であるように degree を与えることができないことはすぐにわかります。したがってある程度条件をつけなければならないことがわかります。rank 2 の semistable sheaf の moduli に出てくる inseparability は実質的には上に挙げた二本の line のはりわせのような単純なものだけでしたが、rank が 3 以上になるともっと複雑になります。

semistable sheaf の moduli にあらわれる inseparability は、 $(n \times n)$ -matrix 全体のなす vector space $M(n)$ への $n-1$ 次元 algebraic torus G_m^{n-1} の作用 $A \mapsto gAg^{-1}, A \in M(n), g \in G_m^{n-1}$ をモデルとして制御することができます。そこで Artin stack $M(n)/G_m^{n-1}$ の automorphism を持たない 0 次元 cycle Z の degree を $\text{deg}(Z) = \text{deg}(\bar{O}_Z)/D$ とおきます。ここで O_Z は Z に対応する $M(n)$ の free orbit であり、 \bar{O}_Z は、 $M(n)$ の projective completion $\bar{M}(n)$ における closure です。 $\text{deg}(\bar{O}_Z)$ は \bar{O}_Z の projective space $\bar{M}(n)$ における degree です。また D は $M(n)$ における general orbit を Z' として $D = \text{deg}(\bar{O}_{Z'})$ です。このように

おくと、localには degree が保たれることがわかります。これを用いて M の stabilizer を持たない 0-cycle の degree を与えます。

stabilizer の問題は次のように考えます。semistable sheaf には stable sheaf による filtration F が入り、 $\{Gr_i = F_i/F_{i-1}\}$ は filtration の取り方によらないことがわかります。またこの分解より moduli に帰納的な構造が得られます。この構造について、より端にあるところにおしつけていくことを考えて、例として述べた X/E の場合に帰着します。

こうして得られる invariant について rank 2 の場合の transition 理論を拡張したいと考えるのは自然です。理想としては rank r の moduli を用いて得られる invariant をより低い rank の object の moduli の product を用いて得られる invariant に帰着すること、さらにその操作を inductive に続けることで、rank 1 の object の moduli の直積上の量で書いてしまうことが目標となります。Hilbert scheme の直積上の sheaf の特性類についての前節の議論を用いると、結果的には abelian pair (Seiberg-Witten) より得られる invariant と TX と line bundle L_i の特性類の和の形になることが期待されます。したがって本質的に新しい invariant を得ることよりはそこに現れる関係が興味の対象になります。

rank 2 の場合の議論を parallel に進めようとする、厄介になるのは inseparability についてです。rank 3 の場合は制御できるようになっていますが、より高階の場合はかなり複雑でまだよくわかっていません。

参考文献

- [1] S. K. Donaldson, The Seiberg-Witten equations and 4-manifold topology, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 33, No.1, 45–70.
- [2] G. Ellingsrud and L. Göttsche, Variation of Moduli spaces and Donaldson invariants under change of polarization, J. Reine Angew. Math. 467 (1995), 1–49.
- [3] G. Ellingsrud, L. Göttsche and M. Lehn, On the Cobordism Class of the Hilbert Scheme, math.AG/9904095.
- [4] R. Friedman and Z. Qin, Flips of moduli spaces and transition formulas for Donaldson polynomial invariants of rational surfaces, Communications in Analysis and Geometry, Vol. 3, No.1, 11–83, 1995.
- [5] T. Mochizuki, Gromov-Witten class and A Perturbation theory in Algebraic Geometry, preprint.
- [6] T. Mochizuki, The twisted Maurer-Cartan solutions and Some invariants given by moduli stacks, preprint.
- [7] M. Thaddeus, Geometric invariant theory and flips, J. Amer. Math. Soc. 9 (1996), no. 3, 691–723.

e-mail address

takuro@sci.osaka-cu.ac.jp

ON UNKNOTTING NUMBERS AND FOUR-DIMENSIONAL CLASP NUMBERS OF LINKS

TOMOMI KAWAMURA (川村 友美)

ABSTRACT. We estimate the unknotting number and the four-dimensional clasp number of a link, considering the greatest euler characteristic for an oriented two-manifold in the four-ball bounded by the link. Combining with a result due to Rudolph, we prove that an inequality stronger than the Bennequin unknotting inequality actually holds for any link diagram. As an application, we show the equality conjectured by Boileau and Weber for a closed positive braid diagram. Then, combining with a result due to Fielder, the lowest degree of the Jones polynomial defined the unknotting number for the link which has such a diagram.

1. 序および主結果

以下で絡み目とは3次元球面 S^3 内になめらかに埋め込まれた向きづけられた閉1次元多様体のこととし、連結成分が1つの絡み目を結び目と呼ぶ。絡み目 L の the *unknotting number* (結び目解消数) $u(L)$ とは自明な絡み目を得るのに必要な交差交換の最小数のことである。

結び目解消数は4次元種数以上になることはよく知られている [21]。ここで絡み目 L の4次元種数とは、 L が4次元円板内で張るなめらかな有向2次元部分多様体で閉じた成分のないものの種数の最小値のことである。結び目解消数を評価するために、本稿では次のような絡み目不変量を考える。与えられた有向絡み目 L に対し、4次元円板 D^4 内になめらかにうめ込まれた、閉じた成分の無い有向2次元多様体で、境界は3次元球面 ∂D^4 上 L となるようなものを F とする。このような2次元多様体 F のオイラー数 $\chi(F)$ の最大値を、絡み目 L の the *slice euler characteristic* (スライスオイラー数) と呼び、 $\chi_s(L)$ と書く。また、絡み目 L に対し、 L の成分数と同数の2次元円板の4次元円板へのはめこみで、境界は3次元球面上 L であり、特異点は二重点のみであるものを考える。そのようなはめこみの二重点の

The author is supported by JSPS Research Fellowships for Young Scientists.

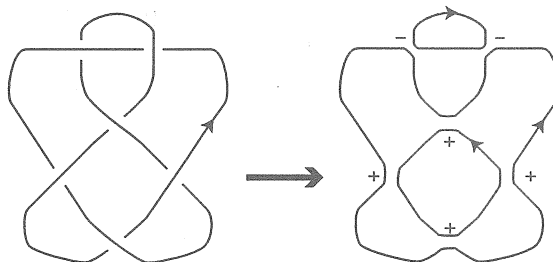


FIGURE 1. 絡み目の射影図とザイフェルト円周

個数の最小値を，絡み目 L の *the four-dimensional clasp number* (4次元クラスプ数) と呼び、 $c_s(L)$ と書くことにする．各不変量の定義から次がわかる．

定理 1.1. 成分数 r の有向絡み目 L に対し、 $u(L) \geq c_s(L) \geq \frac{1}{2}(r - \chi_s(L))$ が成り立つ．

この不等式と，Rudolph が [20] で述べたスライスオイラー数に関する不等式 (即ち定理 3.1) より，Bennequin [2] が予想した結び目解消数の評価式よりも強い不等式が成立することが言える．

その不等式を述べるための準備をする．有向絡み目の射影図 D が与えられたとする．このとき，正の交差の個数から負の交差の個数を引いた数 $w(D)$ は D の *the writhe* と呼ばれている．射影図の全ての交差を向きに沿って平滑化して得られる円周は *Seifert circle* (ザイフェルト円周) と呼ばれている．以下，ザイフェルト円周で正の交差とは接しないが少なくとも 2 個の負の交差と接するものを *a strongly negative circle* と呼び，そうでないザイフェルト円周を *a non-negative circle* と呼ぶことにする．

例えば自明な結び目の自明な射影図にはザイフェルト円周が 1 個だけあり，それは *non-negative* である．自明な結び目の (-1) -framed の *blackboard diagram* は 2 個のザイフェルト円周があるが，どちらも *non-negative* である．また，Figure 1 の左側にかかれた射影図に対しては，右側にかかれたように 3 個のザイフェルト円周が得られ，そのうち上側の円周は *strongly negative* であり，下側の同心の 2 個の円周は *non-negative* である．

Rudolph が [20] で述べた不等式 (即ち定理 3.1) と定理 1.1 より，次が成立する．

系 1.2. 成分数 r の有向絡み目 L の任意の射影図 D_L に対し D_L の *non-negative circles* と *strongly negative circles* の個数をそれぞれ $s_{\geq}(D_L)$ ， $s_{<}(D_L)$ と書くことにする．このとき

次の不等式が成立する：

$$u(L) \geq c_s(L) \geq \frac{1}{2}\{r - (s_{\geq}(D_L) - s_{<}(D_L)) + w(D_L)\}.$$

絡み目の射影図 D の Seifert circles の個数を $s(D)$ とおく．成分数 r の絡み目 L の射影図 D_L が閉じたブレイドの射影図になっているとする．Bennequin は文献 [2] でこのとき不等式 $u(L) \geq \frac{1}{2}(r - s(D_L) + |w(D_L)|)$ が成り立つことを予想した．この不等式を the *Bennequin unknotting inequality* と呼ぶ．Rudolph は文献 [18] で the *slice-Bennequin inequality* $\chi_s(L) \leq s(D_L) - w(L)$ を示していて，実はこれと定理 1.1 とを合わせると the *Bennequin unknotting inequality* が示される．Stoimenow は文献 [22] の中で，任意の閉じたブレイドの射影図について the *Bennequin unknotting inequality* が成り立つならば任意の結び目の射影図に対しても成立することを示している．実は，the *Bennequin unknotting inequality* も the *slice-Bennequin inequality* も，Vogel [24] や Yamada [25] のアルゴリズムによって，任意の絡み目の射影図に拡張することができる．系 1.2 の不等式は，the *Bennequin unknotting inequality* よりもよい評価を与えている．

交差が正のみの閉じたブレイドの射影図のことを a *closed positive braid diagram* と呼ぶ．成分数 r の絡み目 L が closed positive braid diagram D_L で表されているとする．射影図 D_L の交差数を $x(D_L)$ と書くことにする．Boileau と Weber は文献 [3] で，このときは等式 $u(L) = \frac{1}{2}(r - s(D_L) + x(D_L))$ が成立することを予想した．系 1.2 より，交差が正のみの閉じたブレイドについては結び目解消数だけでなく，4次元クラスプ数も得られる．

定理 1.3. 成分数 r の絡み目 L が closed positive braid diagram D_L で表されているとする．射影図 D_L の Seifert circles の個数を $s(D_L)$ ，交差数を $x(D)$ とする．このとき次の等式が成り立つ：

$$u(L) = c_s(L) = \frac{1}{2}(r - s(D_L) + x(D_L)).$$

以上の結果の応用として，Fiedler の結果 [4, Theorem 2] と合わせると，絡み目の Jones 多項式の最小次数と結び目解消数の関係について次の系 1.4 のような結果が得られる．ここで絡み目 L の Jones 多項式 $V(L; t)$ とは次で定義される絡み目不変量である [6]．

$$\begin{aligned} V(\text{a trivial knot}; t) &= 1 \\ t^{-1}V(\text{crossing}; t) - tV(\text{crossing}; t) &= (t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})V(\text{crossing}; t). \end{aligned}$$

系 1.4. 成分数 r の絡み目 L が $\text{closed positive braid diagram } D_L$ で表されているとする. このとき次が成り立つ.

$$\min \deg V(L; t) = u(L) - \frac{1}{2}(r - 1).$$

2. 4次元クラスプ数

任意の絡み目は有限回の交差交換でほどくことができることが知られている. このことから次の補題が得られる.

補題 2.1. 任意の絡み目 L に対し, 4次元円板 D^4 内に横断的にはめ込まれた L の成分数と同数の2次元円板で, 境界が L , 特異点は有限個の二重点のみとなるようなものが存在する. \square

この補題より4次元クラスプ数は well-defined な絡み目不変量であることがわかる.

文献 [21] で Shibuya は, 種数 0 の有向曲面の, 絡み目 L を境界とするような4次元円板内への横断的にはめ込みを考え, その二重点の最小個数 $c^*(L)$ を4次元クラスプ数と定義した. 定義より $c^*(L) \leq c_s(L)$ が成り立つ. 結び目の場合は c^* と c_s は同じものであるが, 一般には等号は成立しない. 例えば L が Hopf link のときは, $c^*(L) = 0$ かつ $c_s(L) = 1$ である. しかし Shibuya による不変量 c^* が well-defined であることの証明は, c_s のと同様である. 4次元クラスプ数 c_s を本稿で前節のように定義したのは, 絡み目の向きによらず, 鏡像をとっても変わらない点, 結び目解消数の評価するのに都合がよりよいと思われるからである.

定理 1.1 の証明. 補題 2.1 の直前で述べたことより, $u(L) \geq c_s(L)$ が示される. 不等式 $c_s(L) \geq (r - \chi_s(L))/2$ を示す.

ちょうど c 個の二重点のみを特異点とし, 境界を L とするような D^4 内への円板たちのはめこみの像を F' とする. Hopf 絡み目上の cone として各二重点の F' での小さな近傍が小さな4次元球内でとれる. その小さな4次元球の境界上で, この Hopf 絡み目は annulus を張る. 各二重点に対し, F' での二重点の近傍をこのような annulus と置き換えることにより, 新たな2次元部分多様体 $F \subset D^4$ を得る. この F は $L = \partial F$ なるなめらかな有向2

次元多様体とみなせ、閉じた成分も持たない。従って次が成り立つ：

$$\begin{aligned}\chi_s(L) &\geq \chi(F) \\ &= \chi((r \text{ disks}) - (2c \text{ small disks})) + c\chi(\text{annulus}) - 2c\chi(\text{circle}) \\ &= r - 2c.\end{aligned}$$

ゆえに不等式 $c_s(L) \geq \frac{1}{2}(r - \chi_s(L))$ が成り立つ。 \square

文献 [20] で Rudolph は、 $r = 1$ のとき $u(L) \geq (r - \chi_s(L))/2$ が成り立つことについて触れている。このとき L は結び目であり、 $g^*(L) = (r - \chi_s(L))/2$ が成立する。成分数が 2 以上のときはこの等式は一般には成立しない。実際 Hopf 絡み目の場合、4 次種数は 0 であり、スライスオイラー数は 0 である。

文献 [21] で Shibuya は、どの絡み目に対しても $g^* \leq c^* \leq u$ が成り立つことを示した。定理 1.1 の証明はその議論とほぼ同様である。文献 [14] で Murakami と Yasuhara は、4 次元クラスプ数 c^* と 4 次元種数が等しくない結び目の例が存在することを証明した。その例とは、文献 [16] の結び目の表で 8_{16} と呼ばれている結び目である。この結び目の 4 次種数が 1 であることは既に知られていたが、彼らは文献 [14] で $c^*(8_{16}) = 2$ が成立することを示した。従って等式 $c_s(L) = (r - \chi_s(L))/2$ は一般には成立しない。また結び目解消数と 4 次元クラスプ数が等しくない例として、スライス結び目をあげることができる。

注意 2.2. 結び目の kinkiness という、Gompf が文献 [5] で定義した不変量と 4 次元クラスプ数を比較しよう。結び目 K を境界とするような D^4 内への円板の横断的なはめ込みの正の二重点の最小個数と負の二重点の最小個数をそれぞれ $k_+(K)$, $k_-(K)$ と書く。結び目 K の kinkiness とは、 $k(K) = (k_+(K), k_-(K))$ のことである。定義より $c_s(K) \geq k_+(K) + k_-(K)$ が成り立つ。

3. THE BENNEQUIN UNKNOTTING INEQUALITY

系 1.2 は、Rudolph が述べた次の不等式から得られる。

定理 3.1 (Rudolph [20]). 絡み目 L とその任意の射影図 D_L に対し、 D_L の *non-negative circles* の個数を $s_{\geq}(D_L)$, *strongly negative circles* の個数を $s_{<}(D_L)$ とおく。このとき次の不等式が成り立つ：

$$\chi_s(L) \leq (s_{\geq}(D_L) - s_{<}(D_L)) - w(D_L).$$

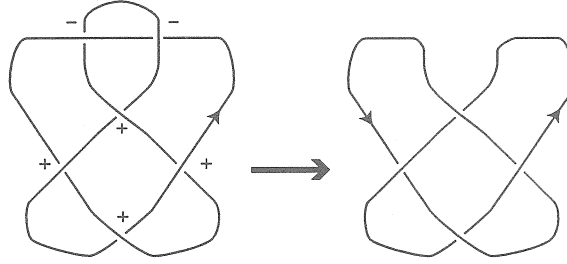


FIGURE 2. D_L から D_L^+ を構成する

Rudolph は [20] でこのスライスオイラー数の評価式を、正の交差が少なくとも 1 つ以上ある場合のみ示している．よってここで改めて証明する．

定理 3.1 を示す際、Nakamura [15] や Rudolph [18][20] の結果を使う．文献 [15][20] で彼らは、positive links、即ち負の交差のない射影図で表せる絡み目は quasipositive であることを示した．ここで a *quasipositive link* とは a closed quasipositive braid diagram で表せる絡み目のことで、a *quasipositive braid* とは positive braid の共役の積で表せるブレイドのことである．Rudolph は、任意の quasipositive link は 2 次複素空間内のある代数曲線とある 3 次球面内の交差として表せることを文献 [17] で示し、いわゆる the generalized adjunction formula を適用することによって、等式 $\chi_s(L) = s(D_L) - w(D_L)$ が任意の closed quasipositive braid diagram D_L に対して成り立つことを文献 [18] で示した．実はこの等式から先ほど触れた the slice-Bennequin inequality が示されたのである．ここで the generalized adjunction formula とは、ある閉 4 次元多様体内に埋め込まれた有向閉曲面の種類に関する不等式であり、Kronheimer, Mrowka, Morgan, Szabó, Taubes [9][10][11][13] によってゲージ理論の手法で示されたものである．Nakamura や Rudolph の議論は任意の positive link diagram D_L に対して等式 $\chi_s(L) = s(D_L) - x(D_L)$ が成り立つことも示している．ここで $x(D_L)$ は D_L の交差数を表す．

定理 3.1 の証明．射影図 D_L が少なくとも 1 個 non-negative circle をもつときは、Rudolph [20] の議論の通りである．Figure 2 のように、与えられた絡み目射影図 D_L の負の交差を平滑化し、strongly negative circles を消去して得られる絡み目射影図を D_L^+ 、射影図 D_L^+ で表される絡み目を L^+ とおく．この絡み目射影図 D_L^+ の交差は全て正である．従って Nakamura [15] や Rudolph [20] の結果より、 D_L^+ にザイフェルトのアルゴリズムを適用して得られるザイフェルト曲面 Q は、絡み目 L^+ のスライスオイラー数を実現する．(ここ

でザイフェルト曲面とは、絡み目が S^3 内に張る有向 2 次元多様体で閉じた成分の無いものである。本稿では連結性は仮定しない。またザイフェルトのアルゴリズムとは、射影図の各ザイフェルト円周に円板を張らせ、それらを交差に沿ったバンドでつなぐことによりザイフェルト曲面を構成するものである。) 一方、射影図 D_L にザイフェルトのアルゴリズムを適用して得られるザイフェルト曲面を S とおき、 Q は S の内部にあるものとみなす。絡み目 L のスライスオイラー数 $\chi_s(L)$ を与える 4 次元円板 D^4 内の 2 次元多様体と $S - Q$ との和は、 L^+ が D^4 内に張る 2 次元多様体とみなせるので、

$$\chi_s(L^+) = \chi(Q) \geq \chi_s(L) + \chi(S) - \chi(Q)$$

を得る。Rudolph [19] と同様にこれを整理すると不等式 $\chi_s(L) \leq 2\chi(Q) - \chi(S)$ を得る。この右辺を、射影図 D_L の正負の交点と strongly negative circles と non-negative circles の個数で表すと、射影図 D_L に non-negative circle が少なくとも 1 つ存在するとき

$$\chi_s(L) \leq (s_{\geq}(D_L) - s_{<}(D_L)) - w(D_L)$$

が成立することが示される。

射影図 D_L に non-negative circle が存在しない場合は、鏡像が正の交差のみになるので、 $(s_{\geq}(D_L) - s_{<}(D_L)) - w(D_L)$ はちょうど L のスライスオイラー数の (-1) 倍になる。従ってこのときは、 $\chi_s(L) \leq 0$ を示せばよい。今の場合、射影図 D_L のザイフェルト円周は全て strongly negative なので各円周に接する交点は 2 個以上である。従って $s(D_L) \leq x(D_L)$ を得、 $\chi_s(L) = s(D_L) - x(D_L) \leq 0$ が示される。□

系 1.2 は定理 1.1 と定理 3.1 の不等式を合わせることによって示される。また、定理 1.3 は次の補題と系 1.2 によって得られる。

補題 3.2 (Boileau-Weber [3]). 成分数 r の有向絡み目 L が *closed positive braid diagram* で表されたとする。射影図 D_L のザイフェルト円周の個数を $s(D_L)$ 、交差数を $x(D_L)$ とおく。このとき次の不等式が成り立つ：

$$u(L) \leq \frac{1}{2}(r - s(D_L) + x(D_L)).$$

□

注意 3.3. Vogel や Yamada のアルゴリズムによる絡み目射影図の変形で writhe やザイフェルト円周の個数は変化しないが、 $(s_{\geq} - s_{<})$ という値は変化することがある。

ここで例として、定理 1.3 を適用してトーラス絡み目の結び目解消数や 4 次元クラスプ数を計算してみる。

例 3.4. (p, q) 型トーラス絡み目を $T(p, q)$ と書くことにする。ここでは p と q は正の整数であるとする。整数 p と q の最大公約数を d と書くことにする。このとき次の等式が成り立つ：

$$u(T(p, q)) = c_s(T(p, q)) = \frac{1}{2}\{(p-1)(q-1) + d - 1\}.$$

証明. 絡み目 $T(p, q)$ の成分数は d である。絡み目 $T(p, q)$ は p 個のザイフェルト円周と $(p-1)q$ 個の交差をもつ closed positive braid diagram で表されるので、定理 1.3 より示したい等式が得られる。□

文献 [12] で Milnor は代数的絡み目の結び目解消数が特異点の δ -invariant に等しくなることを予想した。ここで δ -invariant とは代数曲線の“局所的な二重点の個数”のことである。この予想が正しいことは、Kronheimer と Mrowka のゲージ理論の手法による結果 [9][10] の系として示される。上の例はこの予想のトーラス絡み目についての別証明になっている。特異点の the Milnor number を μ ，絡み目の成分数を r とする。Milnor は文献 [12] で等式 $2\delta = \mu + r - 1$ を示している。 (p, q) 型トーラス絡み目に対し $\mu = (p-1)(q-1)$ かつ $r = d$ であるので、等式 $u(T(p, q)) = c_s(T(p, q)) = \delta$ が成り立つことがわかる。

注意 3.5. Rudolph が示した quasipositive link diagram D_L で表されるときに成立する等式 $\chi_s(L) = s(D_L) - w(D_L)$ を直接適用して、Tanaka は文献 [23] で、いくつかの交差数 10 の結び目の 4 次種数と結び目解消数を決定した。著者も文献 [8] で、Auckly のレクチャーノート [1] で触れられている the generalized adjunction formula を直接使う結び目解消数の評価の議論と同様の方法で、2 つの交差数 10 の結び目の結び目解消数を決定した。

4. ジョーンズ多項式の最小次数

系 1.4 の証明は定理 1.3 と Fiedler の結果 [4] を合わせることによって得られる。Fiedler の結果について説明しておく。ブレイド $\beta \in \mathbf{B}_n$ を標準的な生成元 $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ によって表したとき、各 σ_i と σ_i^{-1} が β にあらわれる回数をそれぞれ $x_i^+(\beta)$ ， $x_i^-(\beta)$ と書くことにする。このとき writhe は $w(\beta) = \sum_i (x_i^+(\beta) - x_i^-(\beta))$ となる。また、 $x_i^-(\beta) > x_i^+(\beta)$ となる i の個数を $b^-(\beta)$ とおく。Fiedler は Kauffman の結果 [7] によって次の等式を導いた。

定理 4.1 (Fiedler [4]). ブレイド $\beta \in \mathbf{B}_n$ に対応する有向絡み目を $L(\beta)$ とする. ブレイド β を生成元で表したとき σ_i^{-1} が現れるときは $\sigma_i, \sigma_{i-1}^{-1}, \sigma_{i+1}^{-1}$ は現れないものとする. このとき次の等式が成り立つ:

$$\min \deg V(L(\beta); t) = \frac{1}{2}(w(\beta) + 1 - n) - \sum_i x_i^-(\beta) + b^-(\beta).$$

□

系 1.4 の証明. 成分数 r の有向絡み目 L が a closed positive braid diagram D_L で表されるとする. Stoimenow が文献 [22] で述べているように, 定理 4.1 より, そのような絡み目 L に対して等式 $\min \deg V(L; t) = \frac{1}{2}(x(D_L) + 1 - s(D_L))$ が成り立つ. 従って定理 1.3 より a closed positive braid diagram で表される成分数 r の有向絡み目 L に対し, 等式 $\min \deg V(L; t) = u(L) - \frac{1}{2}(r - 1)$ が成り立つ. □

謝辞. この研究に関して, 数々の励ましと助言を下さいました指導教官の河野俊丈先生に深く感謝致します. また, 4次元クラスプ数に関して情報を提供して下さいました村上斉先生, 安原晃先生, Bennequin の予想した不等式について知識を提供して下さいました松田浩氏にも感謝申し上げます.

REFERENCES

- [1] D. Auckly, *Surgery, knots, and the Seiberg-Witten equations*, Lectures for the 1995 TGRCIW, preprint.
- [2] D. Bennequin, *Entrelacement et équations de Pfaff*, Astérisque, **107-108** (1983), 87-161.
- [3] M. Boileau and C. Weber, *Le problème de J. Milnor sur le nombre gordien des nœuds algébriques*, Enseign. Math. **30** (1984), 173-222.
- [4] T. Fiedler, *On the degree of the Jones polynomial*, Topology **30** (1991), 1-8.
- [5] R. Gompf, *Smooth concordance of topologically sliced knots*, Topology **25** (1986), 353-373.
- [6] V. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, Bull. Amer.Math. Soc. **12** (1985), 103-111.
- [7] L. Kauffman, *State models and the Jones polynomial*, Topology **26** (1987), 395-407.
- [8] T. Kawamura, *The unknotting numbers of 10_{139} and 10_{152} are 4*, Osaka J. Math. **35** (1998), 539-546.
- [9] P. Kronheimer and T. Mrowka, *Gauge theory for embedded surfaces, I*, Topology **32** (1993), 773-826.
- [10] ———, *Gauge theory for embedded surfaces, II*, Topology **34** (1995), 37-97.

- [11] ———, *The genus of embedded surfaces in the projective plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 797-808.
- [12] J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies **61** (1968), Princeton Univ. Press.
- [13] J. Morgan, Z. Szabó and C. Taubes, *A product formula for the Seiberg-Witten invariants and the generalized Thom conjecture*, J. Differential Geom. **44** (1996), 706-788.
- [14] H. Murakami and A. Yasuhara, *Four-genus and four-dimensional clasp number of a knot*, to appear in Proc. Amer. Math. Soc.
- [15] T. Nakamura, *Four-genus and unknotting number of positive knots and links*, to appear in Osaka J. Math **37** (2000).
- [16] D. Rolfsen, *Knots and links*, Mathematics Lecture Series **7**, Publish or Perish, Inc., Berkeley, Calif. (1976).
- [17] L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191-201.
- [18] ———, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc. **29** (1993), 51-59.
- [19] ———, *Quasipositive plumbing (Constructions of quasipositive knots and links, V)*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1998), 257-267.
- [20] ———, *Positive links are strongly quasipositive*, Geometry and Topology Monographs **2** (1999): Proc. of the Kirbyfest, 555-562.
- [21] T. Shibuya, *Some relations among various numerical invariants for links*, Osaka J. Math. **11** (1974), 313-322.
- [22] A. Stoimenow, *Positive knots, closed braids and the Jones polynomial*, preprint (1999).
- [23] T. Tanaka, *Unknotting numbers of quasipositive knots*, Topology Appl. **88** (1998) 239-246.
- [24] P. Vogel, *Representation of links by braids: A new algorithm*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 104-113.
- [25] S. Yamada, *The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link*, Invent. Math. **89** (1987), 347-356.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU, TOKYO 153-8914, JAPAN

E-mail address: kawamura@ms.u-tokyo.ac.jp

ザイフェルト・ホモロジー 3 球面の ホモロジー・コボルディズム不変量

福本善洋

平成 12 年 6 月 8 日

1 はじめに

本稿は東京大学の古田幹雄氏と京都大学の上正明氏との共同研究 [6] の報告です. 本稿では w -不変量と呼ばれるホモロジー・コボルディズム不変量の明示公式に含まれている典型的な項がある種の相互律を満たしていることを紹介します. そしてそのことを用いて, ザイフェルト・ホモロジー 3 球面で特異ファイバーが高々 6 本のもの全体の集合において w -不変量と, W. ノイマンと L. ジーベンマンによって導入された $\bar{\mu}$ -不変量 [12], [16] とが等しいことを紹介します. このことは同時に N. サベリエフによりインスタントン・フレアーホモロジーを用いて導入された ν -不変量が上述の集合においてホモロジー・コボルディズム不変性を持つことも意味します [14]. また, 上記の相互律に関連して古典テータ関数の B. ベルントの結果 [1] をご指摘下さった津田塾大学の福原真二氏に感謝致します.

2 ホモロジー・コボルディズム不変量

はじめに, ホモロジー・コボルディズムに関して幾つかの知られた事実を述べる. 尚, 本稿では特に断らない限り, 滑らかで向き付け可能な $(V-)$ 多様体の圏において議論する. 二つの整数係数ホモロジー 3 次元球面 Σ_0 と Σ_1 が向き付けられた整数係数ホモロジー・コボルダントであるとは (i) 交わりを持たない和 $\Sigma_0 \amalg -\Sigma_1$ が滑らかなコンパクト 4 次元多様体 W の境界で, かつ (ii) 各射入 $\Sigma_i \hookrightarrow W$ ($i = 0, 1$) が整数係数ホモロジーの同型, $H_*(\Sigma_i; \mathbf{Z}) \cong H_*(W; \mathbf{Z})$ を誘導する. 向き付けられた整数係数のホモロジー 3 球面全体のなす集合は連結和に関してアーベル群の構造が入り, これを Θ_3^H と表記し, 向き付けられた整数係数ホモロジー 3 球面のホモロジー・コボルディズム群と呼ぶ. ここで, ホモロジー 3 球面が零にホモロジー・コボルダントであることはそれが非輪状 4 次元多様体の境界であるということに注意す

る. ホモロジー 3 球面が非輪状 4 次元多様体の境界として実現されることへの一つの障害を与える不変量としてロホリン不変量 (μ -不変量) が知られている. ロホリン不変量はホモロジー 3 球面に対して, $\mathbf{Z}/2$ に値を持つ不変量として以下のように定義される. Σ をホモロジー 3 球面としたとき, Σ を境界を持つようなスピンの 4 次元多様体 Y をとり, μ -不変量を $\mu(\Sigma) := \text{sign } Y/8 \pmod{2}$ と定める. ここで右辺がスピンの 4 次元多様体 Y の取り方に依存しないことは符合数に関するノビコフの加法性とロホリンの定理より従う. 定義によって μ -不変量は Σ のホモロジー・コボルディズム類の取り方に依存しないことが従う. そこでもし $\mu(\Sigma) \neq 0$ であれば Σ は Θ_3^H において奇数の位数を持ち, 特に Σ は非輪状 4 次元多様体の境界とはなり得ないことが分かる. 以下の性質を満たすようなホモロジー 3 球面が存在するかどうかという問題は高次元の位相多様体の三角形分割可能性と関連した現在まで未解決の問題である. (i) $\mu(\Sigma) \neq 0$. (ii) Σ は Θ_3^H において位数 2 を持つ. 松本堯生氏 [11], D. Galewski and R. Stern [9] の定理から次が従う. 「5 次元以上の任意の閉じた位相多様体が三角形分割可能であるための必要十分条件は上記の (i), (ii) を満たすホモロジー 3 次元球面が一つでも存在することである.」一方, W. ノイマンと L. ジーベンマンによって導入された $\bar{\mu}$ -不変量 [12], [16] は μ -不変量の整数値への持ち上げを与えておりそれは鉛管型のホモロジー 3 次元球面全体に対して定義されている. このロホリン不変量の整数値への持ち上げでホモロジー・コボルディズム不変性を持つものを構成することは上記の問題と同様に現在までのところ未解決の問題であり, この $\bar{\mu}$ -不変量もその試みの一つと言える. しかし, 非輪状 4 次元多様体の境界として知られているホモロジー 3 球面に対してその値が消えるという状況証拠の他にこの不変量のホモロジーコボルディズム不変性を示唆する議論は知られていないと思われる. 古田幹雄氏との共同研究 [5] ではロホリン不変量の整数値への持ち上げを与える別の不変量をサイバーク・ウイッテン理論の考察 [7] から構成した. ホモロジー 3 次元球面 Σ , それを境界として実現し $b_1(X) = 0$ を満たす 4 次元 V -多様体 X , そしてその上のスピンの c 構造 c とからなる三つ組み (Σ, X, c) を考える. w -不変量はこのような三つ組みに対して整数に値を持つ可微分同相不変量である. 集合 $\mathcal{X}(1, 1)$ をホモロジー 3 球面 Σ , Σ を境界を持つスピンの 4 次元 V -多様体 X で $b_1(X) = 0$, $b_2^+(X) \leq 1$ を満たすもの, そして X 上のスピンの構造 c とからなる三つ組み全体の集合とすると, $w(\Sigma, X, c)$ は (X, c) のとり方に依存せず, さらに Σ のホモロジー・コボルディズム類のとり方にも依存しないことがサイバーク・ウイッテン理論 (10/8-定理 [7]) から従う. 従ってホモロジー 3 球面の集合を $\mathcal{S}(1, 1) = \{\Sigma | (\Sigma, X, c) \in \mathcal{X}(1, 1)\}$ と定めれば写像 $\mathcal{S}(1, 1) \ni \Sigma \mapsto w(\Sigma, X, c) \in \mathbf{Z}$, $(\Sigma, X, c) \in \mathcal{X}(1, 1)$ はホモロジー・コボルディズム不変量を与えることが分かる. 鉛管型ホモロジー 3 球面に対してはそれらが $\mathcal{S}(1, 1)$ に属するための十分条件を鉛管グラフの組み合わせ論的な条件によって与えることができ, さらにそれらに対する w -不変量の値の明示公式を得ることができる [2]. また, V -多様体の特異点の爆発操作のもとで w が不変であるという性質を示すことで, blow-down 操作を経

由して $\mathcal{X}(1, 1)$ に落ちるスピンの鉛管 4 次元多様体の境界として実現されるような鉛管型ホモロジー 3 球面に対しては、 w -不変量はノイマンとジーベンマンの不変量 $\bar{\mu}$ と一致し、そのホモロジー・コボルディズム不変性を持つことを証明することができる [3]。そこで、いかなるホモロジー 3 球面が集合 $\mathcal{S}(1, 1)$ に属するかという問題が考えられる。この報告ではそのような低いベッチ数を持つスピン 4 次元 V -多様体の境界として実現されるホモロジー 3 球面をある程度組織的に構成する一つの方法を紹介する。これらの方法を用いて実際に以下のことが分かる。

1. 高々 6 本の特異ファイバーを持つザイフェルト・ホモロジー 3 球面全体の集合 $\mathcal{S}_{\leq 6}^{\text{Seifert}}$ は集合 $\mathcal{S}(1, 1)$ に含まれる。
2. もし、ホモロジー 3 球面 $\Sigma \in \mathcal{S}_{\leq 6}^{\text{Seifert}}$ が $\mu(\Sigma) \neq 0$ を満たせば Σ は Θ_3^H で無限位数を持つ。
3. $\bar{\mu}$ -不変量は $\mathcal{S}_{\leq 6}^{\text{Seifert}}$ においてホモロジーコボルディズム不変性を持つ。

N. サベリエフはインスタントン・フレアーホモロジーを用いて整数に値を持つ不変量 (ν -不変量) をホモロジー 3 球面に対して構成し、それがザイフェルト・ホモロジー 3 球面に対しては $\bar{\mu}$ -不変量と一致することを示した [14]。このことは同時に ν -不変量が集合 $\mathcal{S}_{\leq 6}^{\text{Seifert}}$ においてホモロジー・コボルディズム不変性を持つことを意味する。

3 w -不変量

この章では w -不変量の定義、並びにそれに関する幾つかの性質について述べる。ホモロジー 3 球面 Σ 、コンパクト 4 次元 V -多様体 X で Σ を境界に持ち $b_1(X) = 0$ を満たすもの、そして X 上のスピン c 構造 c とからなる三つ組み (Σ, X, c) を考える。ここで、 V -多様体 X には高々孤立商特異点が内点に存在すると仮定する。 V -多様体とは通常が多様体に対して商特異点を許したものである。詳しくは [13] を参照。 Y を $\partial Y = -\Sigma$ を満たすスピン 4 次元多様体としたとき X と Y を Σ に沿って貼り合わせ閉じた 4 次元 V -多様体 $X \cup_{\Sigma} Y$ を構成する。 Σ がホモロジー 3 球面であることから X 上のスピン c 構造 c と Y 上のスピン構造は一意的に貼り合わさって、 $X \cup_{\Sigma} Y$ 上のスピン c 構造を定め、これを改めて c と表記する。 $\mathcal{D}(X \cup_{\Sigma} Y)$ を $X \cup_{\Sigma} Y$ 上 c で捻った Dirac 作用素とすると、 w -不変量は次のように定義される。

定義 1 [5]

$$w(\Sigma, X, c) := \frac{1}{2} \text{ind}_{\mathbb{R}} \mathcal{D}(X \cup_{\Sigma} Y) + \frac{1}{8} \text{sign } Y.$$

ここで、上式右辺の各項は整数であることに注意する。 V -多様体上の楕円型作用素の切除定理、並びにアティア・シンガーの指数定理により不変量 $w(\Sigma, X, c)$ は Y とその上のスピン構造のとり方に依存しない

[5]. また, $w(\Sigma, X, c)$ は三つ組み (Σ, X, c) の境界連結和に関して加法性を持つ.

$$w(\Sigma_1, X_1, c_1) + w(\Sigma_2, X_2, c_2) = w(\Sigma_1 \# \Sigma_2, X_1 \natural X_2, c_1 \natural c_2)$$

集合 $\mathcal{X}(k^+, k^-)$ を三つ組み (Σ, X, c) で $b_2^\pm(X) \leq k^\pm$ かつ c はスピン構造であるもの全体の集合と定める. さらに $S(k^+, k^-)$ を, ある (X, c) に対して $(\Sigma, X, c) \in \mathcal{X}(k^+, k^-)$ なる Σ 全体の集合とする. このとき次が成り立つ.

定理 1 [5]

1. もし c がスピン構造への簡約を持てば $w(\Sigma, X, c) \equiv \mu(\Sigma) \pmod{2}$.
2. $k^+ + k^- \leq 2$ のとき, $w(\Sigma, X, c)$ は $(\Sigma, X, c) \in \mathcal{X}(k^+, k^-)$ を満たす (X, c) のとり方に依存しない. さらに写像:

$$w(k^+, k^-) : S(k^+, k^-) \ni \Sigma \mapsto w(\Sigma, X, c) \in \mathbb{Z}$$

はホモロジー・コボルディズム不変量である.

3. $k^\pm \leq 1$ であるとき, $\Sigma \in S(k^+, k^-)$ に対して, $w(k^+, k^-)(\Sigma) \neq 0$ ならば Σ を幾つ連結和しても非輪状 4 次元多様体の境界とはなり得ない.

スピン構造 c に対する $w(\Sigma, X, c)$ はロホリン不変量の整数値への持ち上げを与えることから

系 1 $k^\pm \leq 1$ であるとき, $\Sigma \in S(k^+, k^-)$ かつ $\mu(\Sigma) \neq 0$ であるならば Σ を幾つ連結和しても非輪状 4 次元多様体の境界とはなり得ない.

注:

- 1) 集合 $S(k^+, k^-)$ は連結和に関して閉じていないことに注意.
- 2) ザイフェルト・ホモロジー 3 球面 $\Sigma(p_1, \dots, p_n)$ であってどれか一つの α_i が偶数であるものは集合 $S(0, 1)$ に属する [5].
- 2) V-球面上の円板 V-束を二つ鉛管操作して得られるスピン鉛管 4 次元 V-多様体 P で $b_2^\pm(P) = 1$ を満たすものの境界として実現されるホモロジー 3 球面は集合 $S(1, 1)$ に属する [2].

4 w -不変量の明示公式

(Σ, X, c) をホモロジー 3 球面 Σ と Σ を境界とする 4 次元 V-多様体 X で $b_1(X) = 0$ を満たすもの, そして X の上のスピン構造 c からなる三つ組みとする. いま, X 上の特異点はレンズ空間 $L(p_i, q_i)$ の錘 $cL(p_i, q_i)$ の形をしていると仮定する. 境界を $-\Sigma$ とするスピン 4 次元多様体 Y をとり X と Y を境界 Σ に沿って貼り合わせ

閉じた4次元V-多様体 $X \cup_{\Sigma} Y$ を構成する. このとき w -不変量 $w(\Sigma, X, c)$ は次で与えられた.

$$w(\Sigma, X, c) = \frac{1}{2} \text{ind}_{\mathbb{R}} \mathcal{D}(X \cup_{\Sigma} Y) + \frac{1}{8} \text{sign } Y.$$

不変量の明示公式を与えるにあたり互いに素な二つの整数 p, q と $\epsilon = \pm 1$ に対して次の和を定義する [6].

定義 2

$$\sigma(q, p, \epsilon) := \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{|p|-1} \left(\cot\left(\frac{\pi k}{p}\right) \cot\left(\frac{\pi qk}{p}\right) + 2\epsilon^k \text{cosec}\left(\frac{\pi k}{p}\right) \text{cosec}\left(\frac{\pi qk}{p}\right) \right).$$

するとアティヤ・シンガー・川崎の指数定理 [10] から w -不変量 $w(\Sigma, X, c)$ の明示公式は次で与えられることが分かる [6].

$$w(\Sigma, X, c) = -\frac{1}{8} (\text{sign } X + \sum_i \sigma(q_i, p_i, \epsilon_i)).$$

ここで $\sigma(q_i, p_i, \epsilon_i)$ は i 番目の特異点 $cL(p_i, q_i)$ からの寄与, $\epsilon_i = \pm 1$ はスピノル構造 c により定まるものであり, より詳しくは特異点 $cL(p_i, q_i)$ に近傍上のスピノル束の局所一意化への \mathbb{Z}/p_i -作用のリフトにより定まるものである [6]. デデキント和と同様にこれらの特異点への局所化 $\sigma(q, p, \epsilon)$ は以下の性質をみたすことが分かる.

命題 1 [6]

1. $\sigma(q + cp, p, \epsilon) = \sigma(q, p, (-1)^c \epsilon)$.
2. $\sigma(-q, p, \epsilon) = \sigma(q, -p, \epsilon) = -\sigma(q, p, \epsilon)$.
3. (相互律) $p + q \equiv 1 \pmod{2}$ なる互いに素な整数 p, q に対して

$$\sigma(p, q, -1) + \sigma(q, p, -1) = -\text{sgn}(pq)$$

が成り立つ.

性質 1. と 2. は $\sigma(q, p, \epsilon)$ の定義から直ちに従う. 性質 3. の相互律は $p + q \equiv 1 \pmod{2}$ のときの重み付き射影空間 $\mathbb{C}P^2(p, q, 1)$ 上の Dirac 作用素の指数の消滅から従う. 実際, $p + q + r \equiv 0 \pmod{2}$ を満たす互いに素な (p, q, r) にたいする重み付き射影空間 $\mathbb{C}P^2(p, q, r)$ を考え, その上の Dirac 作用素の指数がいつでも消滅することを用いて 3 項関係を示すことができ [4] 上記の相互律はその特別な例といえる. この消滅は $\mathbb{C}P^2(p, q, r)$ に正のスカラー曲率をもつリーマン計量が入ること, 或いは, $\mathbb{C}P^2(p, q, r)$ が非自明な S^1 -作用を許容することから従う. また, このことは古田幹雄氏の $\frac{10}{8}$ -定理からも従う [5].

注: 津田塾大学の福原真二氏からのご指摘により以下のことが分かる.

B. ベルント [1] によって古典テータ関数の変換公式から $h+k \equiv 1 \pmod{2}$ なる互いに素な整数 h, k に対して関数

$$S(h, k) := \sum_{j=1}^{|k|} (-1)^{j+1+\lfloor hj/k \rfloor},$$

が定義され (ここでは $S(h, k)$ を $k \leq 0$ の場合にも拡張している), 次の相互律が示されている.

$$S(h, k) + S(k, h) = 3.$$

これは $\sigma(q, p, \epsilon)$ の相互律と本質的に同じであり $s(h, k) = S(h, k) - 1$ とおくことで $s(h, k) = -\sigma(h, k, -1)$ が成り立つ.

$\sigma(q, p, \epsilon)$ に関する上記の性質を用いて以下のことが従う

命題 2 p, q を $|p| > |q|$ かつ $p+q \pmod{1}$ を満たす互いに素な整数とする. このとき連分数展開

$$\frac{p}{q} = [\alpha_1, \dots, \alpha_s] := \alpha_1 - \frac{1}{\alpha_2 - \frac{1}{\dots - \frac{1}{\alpha_s}}}$$

(すべての α_i が偶数かつ $|\alpha_i| \geq 2$) の下で

$$\sigma(q, p, \epsilon) = -\sum_{i=1}^s \operatorname{sgn} \alpha_i.$$

が成立する.

5 w -不変量とノイマン・ジーベンマン不変量

この章では, ノイマン・ジーベンマンの不変量に関する定義と幾つかの知られた事実を述べ, 最後に w -不変量との関係を論じたい. ノイマン・ジーベンマン不変量は鉛管型ホモロジー 3 球面に対して定義され, 整数の値を持つ不変量であり, それはロホリン不変量の整数値への持ち上げを与えるものである. Γ を整数の重みの付いた樹木グラフとし, $P(\Gamma)$ を Γ に従って鉛管操作をすることにより構成される鉛管 4 次元多様体とする. 鉛管操作とはグラフの各頂点に対してその頂点に載っている整数をオイラー数とする球面上の

円板束を対応させ, 頂点同士が辺で結ばれていればそれぞれの円板束上の局所自明化を一つとり, その間を低空間とファイバーの座標を入れ換える写像で貼り合わせるという操作である. このとき $P(\Gamma)$ の交叉行列 I_Γ は

$$(I_\Gamma)_{kk'} = \begin{cases} m_k & (k = k') \\ 1 & (k \neq k' \text{ かつ } (k, k') \text{ が辺で結ばれている}) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

により与えられる. $\Sigma(\Gamma)$ を $P(\Gamma)$ の境界とすると, Γ が樹木グラフであるとき $\Sigma(\Gamma)$ がホモロジー 3 球面となるためには

$$(HS) \quad \det I_\Gamma = \pm 1$$

となることが必要十分であり, かつこの条件の下で $P(\Gamma)$ がスピンであるためには

$$(SP) \quad \text{すべての } m_k \text{ が偶数である}$$

ことが必要十分である. いま, グラフ Γ が条件 (HS) を満たすとすると, 球面型整数ウー類 $c \in H_2(P(\Gamma); \mathbf{Z})$ と呼ばれるホモロジー類で以下の条件を満たすものが一意に存在する.

1. 任意の $x \in H_2(P(\Gamma); \mathbf{Z})$ に対して $c \cdot x \equiv x \cdot x \pmod{2}$.
2. $H_2(P(\Gamma); \mathbf{Z})$ の標準基底 $\{[E_i]\}$, $E_i \cong S^2$ を用いて

$$c = \sum_i \varepsilon_i [E_i], \quad \varepsilon_i = 0, 1$$

と表示できる.

このときノイマン・ジーベンマン不変量 ($\bar{\mu}$ -不変量) [12], [16] は鉛管型ホモロジー 3 球面 $\Sigma(\Gamma)$ に対して以下のように定義される不変量である.

定義 3

$$\bar{\mu}(\Sigma(\Gamma)) := \frac{1}{8}(\text{sign } P(\Gamma) - c \cdot c) \in \mathbf{Z}$$

ここでケルベアとミルナーの定理から $\bar{\mu}$ -不変量はロホリン不変量の整数値への持ち上げを与えることが従う.

$$\bar{\mu}(\Sigma(\Gamma)) \equiv \mu(\Sigma(\Gamma)) \pmod{2}.$$

いま, 鉛管型ホモロジー 3 球面 $\Sigma(\Gamma)$ で以下の条件を満たすもの全体のなす集合を $\mathcal{S}^{\text{plumb}}(k^+, k^-)$ とおく.

1. Γ は条件 (HS) と (SP) を満たす整数の重みが付いたグラフである.
2. Γ のザイフェルトグラフ [2], [3] としてのブローダウン $\hat{\Gamma}$ が $b^\pm(\hat{\Gamma}) \leq k^\pm$ を満たす.

例えば, ザイフェルト・ホモロジー 3 球面 $\Sigma(p_1, \dots, p_n)$ でどれか一つの p_i が偶数であるものは集合 $\mathcal{S}^{\text{plumb}}(0, 1)$ に属する. このとき次の定理が成り立つ [3].

定理 2 $k^+ + k^- \leq 2$ を満たすと仮定する. このとき, $\bar{\mu}$ -不変量

$$\bar{\mu}(k^+, k^-) : \mathcal{S}^{\text{plumb}}(k^+, k^-) \ni \Sigma(\Gamma) \mapsto \bar{\mu}(\Sigma(\Gamma)) \in \mathbf{Z}$$

はホモロジー・コボルディズム不変量である.

上記の定理は三つ組み $(\Sigma(\Gamma), P(\Gamma), c)$ に対する w -不変量が (i) V -多様体としてのブローアップ操作の下で不変である (ii) $P(\Gamma)$ が滑らかなスピンの 4 次元多様体であるとき $w(\Sigma(\Gamma), P(\Gamma), c) = -\bar{\mu}(\Sigma(\Gamma))$ が成立することから従う. 性質 (ii) は定義から直ちに従い, また性質 (i) は上記の w -不変量の明示公式に現れた相互律そのものであるといえる.

一方, 上述の定理は例えばザイフェルト・ホモロジー 3 球面 $\Sigma(p_1, \dots, p_n)$ に限って考えても重複度 p_i のうちどれか一つが偶数である必要がある. そしてこの条件はザイフェルト・ホモロジー 3 球面 Σ を境界とする 4 次元 V -多様体 X として S^1 -束に付随する D^2 -束とっていることによる. しかし, Σ を境界とする 4 次元 V -多様体を構成する他の方法を考察し, さらにそれらに対する w -不変量および $\bar{\mu}$ -不変量の明示公式を詳しくみることでこの条件は特異ファイバーの数が 6 本以下のときは必要ないことが分かる.

定理 3 [6]

1. $\Sigma = \Sigma(p_1, \dots, p_n)$ をザイフェルト・ホモロジー 3 球面とする. すべての p_i が奇数であるとき, Σ を境界とし, 次を満たすスピンの 4 次元 V 多様体 X が存在する.

$$(a) \quad b_1(X) = 0, \quad b_2^+(X) = n - 1, \quad b_2^-(X) = 1,$$

$$(b) \quad w(\Sigma, X, c) = -\bar{\mu}(\Sigma).$$

2. $\Sigma = \Sigma(p_1, \dots, p_n)$ ($n \leq 6$) をザイフェルトホモロジー 3 球面で特異ファイバーが高々 6 本であるものとする. すべての p_i が奇数であるとき, Σ を境界とし, 次を満たすスピンの 4 次元 V 多様体 Y が存在する.

$$(a) \quad b_1(Y) = 0, \quad b_2^+(Y) \leq 1, \quad b_2^-(Y) \leq 1,$$

$$(b) \quad w(\Sigma, X, c) = w(\Sigma, Y, c').$$

以下の系は定理 1 と定理 3 から従い, 枠付き絡み目の考察による N. サベリエフの結果 [15] を含む.

系 2 Σ をザイフェルト・ホモロジー 3 球面であってどれか一つの特異ファイバーの重複度が偶数であるか, 或いは高々 6 本の特異ファイバーを持ったものであるとする. このとき $\mu(\Sigma) \neq 0$ であれば, Σ は Θ_3^H において無限位数を持つ.

● 定理3の主張1における4次元V多様体 X の構成法：

いま, ザイフェルト・ホモロジー3球面 $\Sigma = \Sigma(p_1, \dots, p_n)$ のザイフェルト不変量を $\{(p_1, q_1), \dots, (p_n, q_n)\}$ とする. このとき, Σ がホモロジー球面であることから p_1, \dots, p_n は互いに素であり, $\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i} = \frac{1}{p_1 \cdots p_n}$ を満たすことに注意する. また, ザイフェルト不変量は, Σ を球面上の特異 S^1 -束とみなしたときのオイラー数 $e(\Sigma)$ が $e(\Sigma) = -\sum_{i=1}^n \frac{q_i}{p_i}$ であるという規約に従っている. 次の軌道型をもつ S^1 -作用を許容した4次元V多様体 $\pi: X \rightarrow X^*$ を考える.

1. 軌道空間 X^* は3次元球体である.
2. 例外集合 ΣX^* は n 本の $(p_j, -q_j)$ 型の線分 I_j である.
3. 線分 I_i は S^1 -作用の不動点の π による像を始点とし ∂X^* を終点とする.

このとき X は $\Sigma(p_1, \dots, p_n)$ を境界とし $b_1(X) = 0$ とするスピンの4次元V多様体となる. すべての p_i は奇数であることより, q_i を条件

$$(*) \begin{cases} p_i > 0, q_i > 0 \quad (i = 1, \dots, n-1), & p_n > 0, q_n < 0 \\ q_1 \equiv \dots \equiv q_{n-1} \equiv 0 \pmod{2}, & q_n \equiv 1 \pmod{2} \end{cases}$$

を満たすようにとりなおすと $b_2^+(X) = n-2$, $b_2^-(X) = 1$ となることがわかる. いま; 連分数展開

$$\frac{p_i + q_i}{q_i} = [\alpha_1^i, \dots, \alpha_{m_i}^i] \quad (i \leq n-1)$$

$$\frac{p_n - q_n}{q_n} = [\alpha_1^n, \dots, \alpha_{m_n}^n]$$

で $|\alpha_k^i| \geq 2$ かつ α_k^i が偶数なるものをとると w -不変量, $\bar{\mu}$ -不変量はともに以下の表示を持つ.

$$w(\Sigma, X, c) = \bar{\mu}(\Sigma) = \frac{1}{8} \left(1 - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^{m_i} \operatorname{sgn} \alpha_k^i \right)$$

● 定理3の主張2における4次元V多様体 Y の構成法：

いま, $n = 6$ としてザイフェルト不変量を $\{(p_1, q_1), \dots, (p_6, q_6)\}$ としたとき次の軌道型をもつ S^1 -作用を許容した4次元V多様体 $\pi: Y \rightarrow Y^*$ を考える.

1. 軌道空間 Y^* は3次元球体である.
2. Y は3点の不動点を持つ.
3. 例外集合 ΣY^* は n 本の $(p_j, -q_j)$ 型の線分 I_j ($j = 1, \dots, 6$) を持ち, I_{2i-1} と I_{2i} はともに i 番目の不動点の π による像を始点とし終点を ∂Y^* とする. ($i = 1, 2, 3$)

このとき Y は Σ を境界とし, $b_1(Y) = 0$ なるスピンの 4 次元 V 多様体となる. ここで, $Q_i = p_{2i-1}q_{2i} + q_{2i-1}p_{2i}$ ($i = 1, 2, 3$) とおき, q_i 達を条件 (*) を満たしながら $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$, $Q_3 < 0$ を満たすようにとりなおすと Y は $b_2^+(Y) = 1$, $b_2^-(Y) = 1$ を満たすことが分かる.

近年, N. サベリエフがインスタントン・フレアーホモロジーを用いてホモロジー 3 球面の可微分同相不変量 ν -不変量を定義し, 特にザイフェルト・ホモロジー 3 球面に対しては $\bar{\mu}$ と一致することを示している [14]. このことと上述の定理から次の系を得る.

系 3 $\mathcal{S}_{\leq 6}^{\text{Seifert}}$ を高々 6 本の特異ファイバーを持つザイフェルト・ホモロジー 3 球面全体の集合とすると ν -不変量

$$\nu(0, 1) : \mathcal{S}_{\leq 6}^{\text{Seifert}} \ni \Sigma(\Gamma) \mapsto \nu(\Sigma(\Gamma)) \in \mathbb{Z}$$

はホモロジー・コボルディズム不変量である.

参考文献

- [1] B. Berndt, "Analytic Eisenstein series, theta-functions, and series relations in the spirit of Ramanujan," J. Reine Angew. Math. 303/304 (1978), 332-365.
- [2] Y. Fukumoto, "Plumbed homology 3-spheres bounding acyclic 4-manifolds," to appear in J. Math. Kyoto Univ. 40 vol.4
- [3] Y. Fukumoto, "On an invariant of plumbed homology 3-spheres," to appear in J. Math. Kyoto Univ. 40 vol.2.
- [4] Y. Fukumoto, "A reciprocity law and the localization of the Dirac operator on the weighted projective space," preprint.
- [5] Y. Fukumoto and M. Furuta, "Homology 3-spheres bounding acyclic 4-manifolds," to appear in Math. Res. Lett.
- [6] Y. Fukumoto, M. Furuta and M. Ue, " w -invariants and Neumann-Siebenmann invariants for Seifert homology 3-spheres," preprint.
- [7] M. Furuta, "11/8 conjecture and monopole equation," preprint
- [8] M. Furuta and B. Steer, "Seifert fibered homology 3-spheres and the Yang-Mills equations on Riemann surfaces with marked points," Adv. in Math. 96 (1992), 38-102.

- [9] D. Galewski and R. Stern, "Classification of simplicial triangulation of topological manifolds," *Ann. of Math.* 111 (1980), 1-34.
- [10] T. Kawasaki, "The index of elliptic operators over V-manifolds," *Nagoya Math. J.* 84 (1981), 135-137.
- [11] T. Matumoto, "Triangulation of manifolds," *Proc. Sympos. Pure Math.* 32 (1978), Part II, 3-7.
- [12] W. Neumann, "An invariant of plumbed homology 3-spheres," *Lecture Notes in Math.* 788, Springer-Verlag, 1980, 125-144.
- [13] I. Satake, "The Gauss-Bonnet theorem for V-manifolds," *J. of the Math. Soc. of Japan*, 9 (1957), 464-492.
- [14] N. Saveliev, "Floer homology of Brieskorn homology spheres," in Nikolai Saveliev's homepage: <http://www.math.lsa.umich.edu/saveliev/>
- [15] N. Saveliev, "Dehn surgery along torus knots," *Topology Appl.* 83 (1998), 193-202.
- [16] L. Siebenmann, "On vanishing of the Rohlin invariant and nonfinitely amphicheiral homology 3-spheres," *Lecture Notes in Math.* 788, Springer-Verlag, 1980, 172-222.

