

第46回
トポロジーシンポジウム
講演集

1999年7月

於 北海道大学 学術交流会館

平成11年度科学研究費 基盤研究 (A)

課題番号 09304011

川久保勝夫先生を悼む

4月24日急逝された川久保勝夫先生（大阪大学大学院理学研究科教授）は、数学研究、とりわけ変換群論に関する第一級の国際的数学者として活躍して来られました。数学研究上のよい刺激を受けた数学者、特にトポロジストは私のみならず多数おられることと確信します。日本数学会関係の仕事についても、学術委員長の重責を担われたことをはじめとして、多数なされていることは皆様ご承知のとおりです。特に、トポロジー分科会関係では、評議員、トポロジー科研費分担者会議委員、また昨年発足したトポロジー研究連絡会議委員として、多年に渡りトポロジー研究の直接的運営に深く関わり、研究の発展、後進の指導に尽力されました。

川久保勝夫先生のご逝去を悼み、トポロジー研究連絡会議を代表して、ここに謹んで哀悼の辞を捧げる次第です。

6月2日

トポロジー研究連絡会議議長 河内明夫

序

この講演集は1999年7月26日～29日の間、北海道大学において開催される第46回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ講演者より集めた原稿を印刷したもので、

1999年度 科学研究費 基盤研究 (A)
研究代表者 河内明夫 (大阪市立大学理学部)
研究題目 結び目理論と多様体の幾何学
課題番号 09304011

により作成されたものである。

その目的は、シンポジウム参加者が各講演をよりよく理解し、研究討論を活発に行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

世話人：森本 雅治 (岡山大学環境理工学部)
泉屋 周一 (北海道大学大学院理学研究科)

第46回トポロジーシンポジウム

7月26日(月)

- 14:00~15:00 榎田 幹也 (阪市大理)
トポロジーから見たトーリック多様体論 1
- 15:20~16:20 河本 裕介 (広大理)
ループ空間の高次ホモトピー可換性について 10

7月27日(火)

- 9:40~10:40 Stephan Wilson (Johns Hopkins 大)
The impossible made easy: Learning to calculate with
generalized cohomology 20
- 11:00~12:00 Takeshi Torii (鳥居 猛 京大理)
Topological realization of level structures over Johnson-Wilson
theory 32
- 13:40~14:40 Victor Goryunov (Liverpool 大)
Enumeration of rational functions 42
- 15:00~16:00 Jozef Przytycki (George Washington 大)
The Kauffman bracket skein algebra of a surface times the
interval has no zero divisors 52
- 16:20~17:20 Andrew Kricker (東工大情報理工)
Calculations of Kontsevich's universal finite type invariant of
knots via surgery formulae and Habiro's clasper moves 62

7月28日 (水)

- 9 : 40 ~ 10 : 40 安原 晃 (学芸大教育)
Local moves on spatial graphs (谷山公規氏との共同研究) 81
- 11 : 00 ~ 12 : 00 佐藤 進 (阪市大理)
Projections in 2-knot theory 95
- 13 : 40 ~ 14 : 40 江田 勝哉 (早稲田大理工)
Hawaiian earring の基本群について (1次元ペアノ空間の基本群) 107
- 15 : 00 ~ 16 : 00 笠川 良司 (東工大理工)
曲面の写像類群と指数コサイクルと ρ -不変量 116
- 16 : 20 ~ 17 : 20 寺嶋 郁二 (東大数理)
量子コホモロジーと共形場理論 126

7月29日 (木)

- 9 : 40 ~ 10 : 40 足立 二郎 (阪大理)
接分布と曲線の幾何学 134
- 11 : 00 ~ 12 : 00 西村 尚史 (横浜国大教育)
可微分写像芽の右左同値の判定法 144

トポロジーから見たトーリック多様体論

栞田 幹也

大阪市立大学理学部

序.

「トーリック多様体」(toric variety) という代数幾何学の対象と「扇」(fan) という組み合わせ論の対象の間に、1対1対応がある。これにより、組み合わせ論の問題を、代数幾何学の問題に翻訳し代数幾何学の定理(例えば Riemann-Roch、強 Lefschetz)を用いて解くということがしばしばあった。R. Stanley による g -予想の解決は、その最たるものであろう。異なる数学分野を結ぶこの様な架け橋に、私は魅了される。

本講演では、トーリック多様体論をトポロジーの立場から眺め、トーリック多様体論のトポロジー版を考える。つまり、トポロジーと組み合わせ論の間に架け橋を構築することを試みる。

トポロジーの観点からすると、対象をトーリック多様体に限る必要はなく、もっと広い幾何学対象(これをトーラス多様体と呼ぶ)を取り扱うのが自然である。その際現れてくる組み合わせ論の対象は、扇が幾重にも重なった「多重扇」(multi-fan) である。この多重扇の重なりは、Todd 種数に対応する。よく知られているように、トーリック多様体の Todd 種数は1である。(我々の立場からすると) それ故、トーリック多様体の扇は、重なりのないものとなると解釈できる。

我々の議論では、同変コホモロジーが中心的な役割を演ずる。これは1960年頃 A. Borel によって導入され、群作用の情報をよく含んでいることが知られている。また、同変 K 群などより取り扱いやすいという利点がある。最近(と言っても15年ほど前になるが)、Atiyah-Bott [AB] たちにより、群作用を持つ symplectic 多様体の研究に同変コホモロジーが非常に有効であることが認識されている([A] 参照)。これと同様に、トーリック多様体やトーラス多様体の研究において同変コホモロジーは非常に相性がよい。服部先生によると、同変コホモロジーはトーリック多様体の「着物」とのことである。

以上の書き方では、我々の議論がトーリック多様体論を含んだ形で展開されている様な印象を与えるが、そうではない。以下の2つの問題点がある。

- (1) 我々は、コンパクトで滑らかな多様体しか扱っていない。一方、トーリック多様体論では、コンパクトでないものや特異点を許すものも扱っている。
- (2) トーリック多様体論は、トーリック多様体と扇との間の「両方通行の架け橋」である。しかし、(今の所) 我々の理論は、トーラス多様体に多重扇を対応させることが出来るというだけの「一方通行の架け橋」である。勝手に多重扇を与えたとき、それに対応するトーラス多様体が(ある意味で) 唯一だけあるということは、判っていない。

§1. トーリック多様体と扇.

トーリック多様体と扇について復習しよう。まず、トーリック多様体の定義から始める。 $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ とする。

定義. $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用をもつ既約かつ正規な代数多様体で $(\mathbb{C}^*)^n$ と同型な開軌道を持つものを n 次元トーリック多様体 (toric variety) という。

注. 小田 [O]、Fulton [F] では、扇を用いてトーリック多様体を定義しているが、我々は、トーリック多様体から扇への対応に関心があるので上の定義を採用する。

$(\mathbb{C}^*)^n$ と同型な開軌道を持つことより、 n 次元トーリック多様体 M の大部分は $(\mathbb{C}^*)^n$ である。実は、 M は有限個の $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道からなる。一番大きい軌道が $(\mathbb{C}^*)^n$ と同型で、それ以外は次元の下がった軌道である。「こんなものが沢山あるのだろうか」と言うのが、トーリック幾何を始めたときの私の印象であったが、実は十分豊富にある。2つ典型的な例を挙げる。一般のトーリック多様体は、それらの親戚と思つてよい(?)

例. 次で定義される $(g_1, \dots, g_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ 作用を持った \mathbb{C}^n

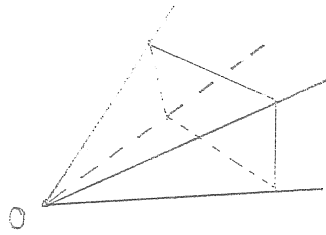
$$(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n \rightarrow (g_1 z_1, \dots, g_n z_n) \in \mathbb{C}^n.$$

例. 次で定義される $(g_1, \dots, g_n) \in (\mathbb{C}^*)^n$ 作用を持った $\mathbb{C}P^n$

$$[z_0, z_1, \dots, z_n] \in \mathbb{C}P^n \rightarrow [z_0, g_1 z_1, \dots, g_n z_n] \in \mathbb{C}P^n.$$

実際、それぞれ $(1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^n$, $[1, \dots, 1] \in \mathbb{C}P^n$ の $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道は開集合である。この例から分かる様に、トーリック多様体は、コンパクトなものコンパクトでないもの両方ある。また、特異点を持つものもあるが、最も面白い (または、よく研究されている) ものは、コンパクトで非特異なものである。それらは (群作用込みでの) $(\mathbb{C}^*)^n$ のコンパクト化である。そのようなコンパクト化として、 $\mathbb{C}P^n$ 以外にすぐに思いつくものとして、直積 $\mathbb{C}P^{n_1} \times \dots \times \mathbb{C}P^{n_k}$ ($n_1 + \dots + n_k = n$) がある。また、直積の代わりに射影束をとつてもよい。Hirzebruch 曲面は、 $\mathbb{C}P^1$ 上の複素 2 次元ベクトル束の射影束として得られ、 $\mathbb{C}P^2$, $\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ 以外の $(\mathbb{C}^*)^2$ のコンパクト化である。こう見てくると $(\mathbb{C}^*)^n$ のコンパクト化は沢山ありそうである。では、一体どれくらいあるのだろうか。トーリック多様体論によると、この問題は扇という組合せ論の言葉に翻訳される。

扇を定義する前に一言言葉を用意する。整数を成分とする有限個のベクトルで張られる \mathbb{R}^n 内の錐で、0 でない線形部分空間を含まないもの (つまり、原点が尖った頂点になっているもの) を有理強凸多面錐 (rational strongly convex polyhedral cone) という。また、多面錐と (片側に多面錐を含む) 超平面との交わりを多面錐の「面」という。従って、次の図では、通常面は我々の意味でも面であるが、角の半直線や頂点も多面錐の面である。



定義. \mathbb{R}^n 内の有限個の有理強凸多面錐の集まり Δ が次の (1)(2) の性質をみたしているとき、扇 (fan) という。

- (1) σ が Δ の元なら σ の面も Δ の元。
- (2) σ, τ が共に Δ の元なら $\sigma \cap \tau$ は σ, τ の面。

さらに言葉を用意する。

定義. 扇 Δ に含まれる錐たちの合併が \mathbb{R}^n 全体になるとき、 Δ は破れがない (complete) という。

定義. 扇 Δ に含まれる各 n 次元錐が \mathbb{Z}^n の基底で張られているとき、 Δ は非特異 (nonsingular) という。

トーリック多様体論の基本定理. n 次元トーリック多様体全体と n 次元扇全体との間に 1 対 1 対応がある。さらにこの対応において、「コンパクトなトーリック多様体」は「破れのない扇」に、「非特異なトーリック多様体」は「非特異な扇」に対応する。

例. $n = 2$ のとき

2 次元トーリック多様体

対応する 2 次元扇

$(\mathbb{C}^*)^2$

○ (原点のみからなる扇)

\mathbb{C}^2



$\mathbb{C}P^2$



トーリック多様体論の基本定理により、トーリック多様体の幾何学的性質は扇の言葉で記述できる筈である。例えば、 n 次元トーリック多様体のオイラー標数は、対応する扇の n 次元錐の個数となる。その他、コホモロジー、指数 (signature) の扇の言葉による記述も知られている。([O], [F] 参照。)

§2. トーリック多様体から扇への対応.

トーリック多様体から扇への対応を見るには、扇が定義されている空間 \mathbb{R}^n を次の様に見る必要がある。まず

$$\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) = \{ \mathbb{C}^* \text{ から } (\mathbb{C}^*)^n \text{ への準同型写像全体} \}$$

を考える。これは $(\mathbb{C}^*)^n$ の演算により群となり \mathbb{Z}^n と同型である。実際、 \mathbb{Z}^n から $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ への同型対応は

$$(m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{Z}^n \rightarrow (z \rightarrow (z^{m_1}, \dots, z^{m_n})) \in \text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$$

で与えられる。扇が定義されている空間 \mathbb{R}^n は、 $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ と思うべきもので、 $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ は格子点となる。

M をトーリック多様体とする。前節で述べたように M は有限個の $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道からなり、その一つは $(\mathbb{C}^*)^n$ と同型である。この一番大きな軌道から 1 点 x_0 をとり、 $\lambda \in \text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ に対し極限值 $\lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0$ をみる。これが存在するかどうかは判らないが、存在したとしたら、ある $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道に入っている。この極限值がどの $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道に入っているかで $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ の元が類別される。 $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ は \mathbb{Z}^n と同型な加群であったが、容易に分かるように λ と $q\lambda$ (q 自然数) は同じ類に入る。従って、一つの類は、原点を中心とした錐の中の格子点たちとなる。この類別を記述しているのが扇である。

例. $\mathbb{C}P^2$ を見てみよう。前と同じく $(\mathbb{C}^*)^2$ 作用を

$$[z_0, z_1, z_2] \rightarrow [z_0, g_1 z_1, g_2 z_2]$$

にとる。 $(\mathbb{C}^*)^2$ 軌道は 7 つあり、それぞれ

- (1) $\mathbb{C}P^2 \setminus (\{z_0 = 0\} \cup \{z_1 = 0\} \cup \{z_2 = 0\}) \cong (\mathbb{C}^*)^2$
- (2) $\{z_0 = 0\} \setminus ([0, 1, 0] \cup [0, 0, 1]) \cong \mathbb{C}^*$
- (3) $\{z_1 = 0\} \setminus ([1, 0, 0] \cup [0, 0, 1]) \cong \mathbb{C}^*$
- (4) $\{z_2 = 0\} \setminus ([1, 0, 0] \cup [0, 1, 0]) \cong \mathbb{C}^*$
- (5) $[1, 0, 0]$, (6) $[0, 1, 0]$ (7) $[0, 0, 1]$

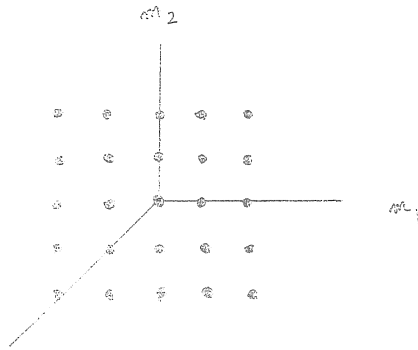
である。ここで最後の 3 点はそれぞれ $(\mathbb{C}^*)^2$ 作用の固定点である。 $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$ に対し $\lambda(z) = (z^{m_1}, z^{m_2})$ と定める。 $x_0 = [1, 1, 1]$ とおくと

$$\lambda(z)x_0 = [1, z^{m_1}, z^{m_2}].$$

ここで $z \rightarrow 0$ を見ると次の様になる。

$$\begin{aligned} m_1 = m_2 = 0 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [1, 1, 1] \in (1) \\ m_1 = m_2 < 0 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [0, 1, 1] \in (2) \\ m_1 > 0, m_2 = 0 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [1, 0, 1] \in (3) \\ m_1 = 0, m_2 > 0 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [1, 1, 0] \in (4) \\ m_1 > 0, m_2 > 0 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [1, 0, 0] \in (5) \\ m_1 < 0, m_2 > m_1 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [0, 1, 0] \in (6) \\ m_2 < 0, m_2 < m_1 \text{ のとき} & \quad \lim_{z \rightarrow 0} \lambda(z)x_0 = [0, 0, 1] \in (7) \end{aligned}$$

よって $\text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^2)$ の元は、下の図の様に類別される。



上の式で定義された7つの錐（2次元3つ、1次元3つ、0次元1つ）の集まりが、最初に定義された $(\mathbb{C}^*)^2$ 作用をもつ CP^2 の扇である。

上の考察から分かるように、 $(\mathbb{C}^*)^2$ と同型な軌道 (1) は扇の原点（つまり0次元の錐）に対応し、 \mathbb{C}^* と同型な軌道 ((2),(3),(4)) は半直線（つまり1次元の錐）に対応している。また、固定点は2次元の錐に対応している。一般に、トーリック多様体と扇の対応においては、 $(\mathbb{C}^*)^2$ 軌道の（複素）次元と対応する錐の次元はあべこべ（正確には、それらの和は n ）である。

§3. 同変コホモロジーと扇.

前節でトーリック多様体から扇を作る対応を見たが、トーリック多様体がコンパクトで非特異の場合は、同変コホモロジーを用いて扇を定義することが出来ることを見よう。まず、同変コホモロジーの定義を復習しておく。

定義. 多様体 M に Lie 群 G が作用しているとき

$$H_G^q(M) := H^q(EG \times_G M)$$

と定義し、 M の同変コホモロジーと呼ぶ。ここで、 EG は普遍 G 束で、 $EG \times_G M$ は $EG \times M$ 上の G 作用 $(u, x) \rightarrow (ug^{-1}, gx)$ ($g \in G$) の軌道空間である。

自然なファイバー束 $M \rightarrow EG \times_G M \xrightarrow{\pi} BG = EG/G$ があることに注意する。 $H_G^*(M)$ は $\pi^* : H^*(BG) \rightarrow H_G^*(M)$ を通して $H^*(BG)$ 加群となる。実は、 $H_G^*(M)$ にはカップ積があるから、もっと細かく $H^*(BG)$ 代数となる。同変コホモロジー $H_G^*(M)$ の計算には、上のファイバー束のスペクトル系列がしばしば用いられる。特に $H^{\text{odd}}(M) = H^{\text{odd}}(BG) = 0$ の場合は、このスペクトル系列は崩壊 (collapse) するから、 $H_G^*(M) \cong H^*(BG) \otimes H^*(M)$ となる。ただし、ここでの同型は「 $H^*(BG)$ 加群として」である。 M 上の G 作用の様子は、上のファイバー束の捻れ具合に反映されると思われるが、スペクトル系列が崩壊する場合、 $H_G^*(M)$ は $H^*(BG)$ 加群としては、直積 $BG \times M$ と何ら変わるところはない。しかし $H^*(BG)$ 代数としての

構造は、 M 上の G 作用の情報をよく反映する。実際、トーリック多様体の場合は、作用の「完全な情報」を与える。

以下 M はコンパクトで非特異なトーリック多様体、 $G = (\mathbb{C}^*)^n$ とする。扇を定義する上でキーとなるのは、各々の錐を定義する半直線である。例で見たように、これらの半直線は $(\mathbb{C}^*)^{n-1}$ と同型な $(\mathbb{C}^*)^n$ 軌道たちに対応していた。その軌道の閉包は、複素余次元 1 の閉代数多様体で $(\mathbb{C}^*)^n$ のある \mathbb{C}^* 部分群で固定されている。それらの閉代数多様体を M_1, \dots, M_d とする。前出の $M = \mathbb{C}P^2$ の例の場合には $d = 3$ で、 M_i たちはそれぞれ $z_j = 0$ ($j = 0, 1, 2$) で定義される部分代数多様体である。

M の組合せ論的量を一つ導入する。

定義. $\Gamma_M := \{I \subset \{1, \dots, d\} \mid \bigcap_{i \in I} M_i \neq \emptyset\}$. (これは M_i たちの交わりを記述したもので、単体複体となる。)

さて、 M_i から M への包含写像の同変 Gysin 写像 ([K] 参照)

$$H_G^q(M_i) \rightarrow H_G^{q+2}(M)$$

の $1 \in H_G^0(M)$ の像を ξ_i とおく。 ξ_i は M_i が M の中で表すホモロジー類の同変コホモロジーでの Poincaré 双対である。従って、 $\prod_{i \in I} \xi_i$ は $\bigcap_{i \in I} M_i$ の Poincaré 双対であるから $\bigcap_{i \in I} M_i = \emptyset$ (つまり $I \notin \Gamma_M$) のとき $\prod_{i \in I} \xi_i = 0$ の筈である。実は $H_G^*(M)$ の環構造はそれらのみが関係式であることが判る。

命題. 環として $H_G^*(M) = \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_d] / (\prod_{i \in I, I \notin \Gamma_M} \xi_i)$.

ξ_i には幾何学的な意味があるが、命題の右辺の環は、抽象的には単体複体 Γ_M だけで決まる。この環は、単体複体 Γ_M の face ring (又は Stanley-Reisner ring) と呼ばれ、組合せ論でよく研究されている ([S], [日比])。 $H_G^*(M)$ の環構造は、上の命題によると M_i たちの交わりの様子の情報しか与えてくれないが、 $H^*(BG)$ 代数としての構造はもっといい情報を与えてくれる。 $G = (\mathbb{C}^*)^n$ であるから $H^*(BG)$ は n 変数多項式環で n 個の生成元は $H^2(BG)$ にとれる。従って $H_G^*(M)$ の $H^*(BG)$ 代数としての構造を見るには $H^2(BG)$ の π^* による像を見ればよい。上の命題より $H_G^2(M)$ は \mathbb{Z} 上 ξ_1, \dots, ξ_d で生成されていることに注意すれば、次のキーになる事実が容易にわかる。

補題. 次式が任意の $u \in H^2(BG)$ に対して成立するような $v_i \in H_2(BG)$ が各 i に対し唯一つ定まる：

$$\pi^*(u) = \sum_{i=1}^d \langle u, v_i \rangle \xi_i$$

ここで \langle , \rangle はコホモロジーとホモロジーの自然なペアリング。

$G = (\mathbb{C}^*)^n$ であるから、よく知られている様に

$$H_2(BG) \cong [B\mathbb{C}^*, B(\mathbb{C}^*)^n] \cong \text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n).$$

この同一視を通して、ベクトル $v_i \in H_2(BG) \cong \text{Hom}(\mathbb{C}^*, (\mathbb{C}^*)^n)$ が定める半直線が、 M の扇に現れる M_i に対応する半直線であることが判る。また、扇に現れる錐は、

v_i ($i \in I, I \in \Gamma_M$) で張られる錐となる。この様にトーリック多様体 M がコンパクトで非特異の場合は、同変コホモロジーを用いて扇が再現出来る。

M がコンパクトで非特異という制限はあるが、上の見方の利点は、トーリック多様体よりもっと広い幾何学的対象にたいして、議論が成立することである。まず、群 G は $(\mathbb{C}^*)^n$ である必要はなく n 次元トーラス T^n でよい。また M は代数多様体である必要はなく C^∞ 多様体であればよい。つまり、我々の M は

T^n 作用をもつ向き付けられたコンパクト $2n$ 次元 C^∞ 多様体

ならばよい。これをトーラス多様体と呼ぶ。コンパクト非特異トーリック多様体は $(\mathbb{C}^*)^n$ 作用を T^n 作用に制限することによって、トーラス多様体と見なせる。面白いことにトーラス多様体という広い対象に対して、上の様に同変コホモロジーを用いて扇を定義すると、そこに現れる錐たちは一般に重なりをもつ。それ故、我々の扇を「多重扇」と呼ぶ。

多重扇は M の位相的性質をよく反映している。例えば、多重扇の重なり of 次数は本質的に M の Todd 種数である。また、オイラー標数、指数、コホモロジー環等も多重扇の言葉で記述できる ([M], [HM])。

§4. モーメント写像と凸多面体.

トーリック多様体論でもう一つ重要な事実は、トーリック多様体上の豊富な (ample) 直線束 L の同変 Riemann-Roch 指数 $\sum (-1)^q H^q(M; L)$ と凸多面体との関係である。ここで $H^q(M; L)$ は M 上の作用を通して $(\mathbb{C}^*)^n$ 表現とみる。実は、同変 Riemann-Roch 指数は、モーメント写像の言葉で記述出来る。

モーメント写像を簡単に復習しよう。 M を Lie 群 G の作用をもつ C^∞ 多様体とし、 ω を G で不変な M 上の 2 形式 (2-form) とする。このとき G 写像

$$\Phi : M \rightarrow \mathfrak{g}^* (= G \text{ の Lie 環の双対})$$

で

$$d\langle \Phi, X \rangle = -i_X \omega$$

をみたすものを (ω に付随した) モーメント写像という。ここで X は Lie 環 \mathfrak{g} の元で \underline{X} は X から定まる M 上の基本ベクトル場。我々は $G = T^n$ にとる。 ω が非退化 (つまり (M, ω) が symplectic 多様体) の場合、 Φ の像は凸多面体となることはよく知られているが、 ω が退化していれば、「ぐるぐる巻きの」または「捻れた」多面体が現れる (Karshon-Tolman [KT])。複素直線束 L が与えられたとき、 ω としては L の第 1 Chern 形式をとる。

$G = T^n$ のとき、自然な同一視

$$\mathfrak{g}^* = \text{Hom}(T^n, S^1) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = H^2(BT^n; \mathbb{R})$$

がある。つまり \mathfrak{g}^* の中に格子 $\text{Hom}(T^n, S^1) = H^2(BT^n, \mathbb{Z})$ があり、その格子点は複素 1 次元の T^n 表現を表す。

定理 ([F], [O] 参照). M がコンパクト非特異トーリック多様体で L が豊富な直線束のとき、 L の同変 Riemann-Roch 指数は L に付随したモーメント写像の像 (この場合凸多面体) に入っている格子点の表す複素 1 次元 T^n 表現の和となる。特に、作用を忘れると、 L の Riemann-Roch 指数がモーメント写像の像として得られる凸多面体の格子点の数と一致する。

上の定理により、凸多面体の格子点の数を数えるという (素朴な) 組合せ論の問題が、Riemann-Roch という幾何学の (深い) 定理と結びつく。この事実を用いて、Ehrhart 多項式に関する結果の別証が得られることが知られている。Ehrhart 多項式とは次のものである。 P を \mathbb{R}^n の中の凸多面体で頂点が格子点であるものとする。 P 上の格子点の数を $\#(P)$ と表す。また、自然数 m に対して P を m 倍に拡大した凸多面体を mP と表す。

定理 (Ehrhart ([日比] 参照)). $\#(mP)$ は m の n 次多項式 $f_P(m)$ で、最高次 m^n の係数は P の n 次元体積、定数項は 1。

m は自然数であったが $f_P(m)$ は多項式故、 m に $-m$ を代入することが出来る。

定理 (Ehrhart の相互律 ([日比] 参照)). $(-1)^n f_P(-m)$ は mP の (境界を除いた) 内部にある格子点の数を表す。

$\#(mP) = f_P(m)$ の最高次の係数と定数項は上述の様に知られているが、それ以外の係数に関してはあまり知られていない。しかし $n = 2$ (つまり P が凸多角形) のときは

$$\#(mP) = \text{Area}(P)m^2 + \frac{1}{2}\#(\partial P)m + 1$$

とわかる。ここで $\text{Area}(P)$ は P の面積、 $\#(\partial P)$ は P の境界上の格子点の数。上の式で $m = 1$ としたものは Pick の公式として知られている。(容易に分かるように、上の式は Pick の公式から従う。)

実は、Pick の公式は P が凸多角形とは限らず、凹みのある多角形でも成立する。しかし、その様な凹みのある多角形は、トーリック多様体 (上の豊富な直線束) のモーメント写像の像としては現れない。この事実は、トーリック多様体を含む様な幾何学対象の存在を暗示している。実際、我々の幾何学対象であるトーラス多様体 (とその上の直線束) の場合、モーメント写像として凹みのある多角形が現れる。もっと一般に、自己交叉を持つような「ぐるぐる巻き」または「捻れた」多角形が現れ、Pick の公式が (適当な修正の下で) やはり成立する ([M], [Has])。

高次元のトーラス多様体とその上の直線束 L に対しても、モーメント写像の像として捻れた凸多面体が見れるが、 L の同変 Riemann-Roch 指数はやはりモーメント写像の言葉で記述出来る ([KT], [GK], [M], [HM])。また、Ehrhart 多項式が捻れた凸多面体に対しても定義でき、Ehrhart 相互律も成立する ([HM])。

REFERENCES

- [AB] M Atiyah and R. Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, *Topology* **23** (1984), 1–28.
- [A] M. Audin, *The Topology of Torus Actions on Symplectic Manifolds*, *Progress in Math* **93**, Birkhäuser, 1991.
- [D] V.I. Danilov, *The geometry of toric varieties*, *Russian Math. Surveys* **33** (1978), 97–154.
- [DJ] M. Davis and T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, *Duke Math. J.* **61** (1991), 417–451.
- [F] W. Fulton, *Introduction to Toric Varieties*, *Ann. of Math. Studies* **131**, Princeton Univ., 1993.
- [GK] M.D. Grossberg and Y. Karshon, *Equivariant index and the moment map for completely integrable torus actions.*, *Adv. Math* **133** (1998), 185–223.
- [G] V. Guillemin, *Moment Maps and Combinatorial Invariants of Hamiltonian T^n -spaces*, *Progress in Math.* **122**, Birkhäuser, 1994.
- [Has] Y. Hashimoto, *Pick's formula and mapping degrees* (1999), preprint.
- [Hat] A. Hattori, *Almost complex toric manifolds and positive line bundles*, *Homotopy and Geometry*, *Banach Center Publications* **45** (1998), 95–114.
- [HM] A. Hattori and M. Masuda, 準備中.
- [日比] 日比孝之, *可換代数と組合せ論*, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1995.
- [KT] Y. Karshon and S. Tolman, *The moment map and line bundles over presymplectic toric manifolds*, *J. Differential Geom.* **38** (1993), 465–484.
- [K] K. Kawakubo, *The Theory of Transformation Groups*, Oxford Univ. Press, 1991.
- [M] M. Masuda, *Unitary toric manifolds, multi-fans and equivariant index*, *Tôhoku Math. J.*, (to appear).
- [O] T. Oda, *Convex Bodies and Algebraic Geometry, An Introduction to The Theory of Toric Varieties*, Springer-Verlag, 1988.
- [S] R. P. Stanley, *Combinatorics and Commutative Algebra* (second edition), *Progress in Math.* **41**, Birkhäuser, 1996.

ループ空間の高次ホモトピー可換性について

広島大学大学院 理学研究科 河本 裕介*

1 序章

ループ空間は代数的位相幾何学における重要な対象であり、Lie 群のホモトピー論など様々な観点からの研究がなされてきた。([7],[10],[15]) ループ空間を研究するための方法として、Bousfield-Kan [2] によって導入された完備化の理論を用いて、一つの素数におけるループ空間を考えるのが便利である。これにより、 \mathbf{Z}/p 係数のコホモロジーなどの手法が有効に働き、また完備化することで初めて起こる様々な新しい現象をとらえることができる。素数 p に対して、 p 完備化されたループ空間は $\text{mod } p$ ループ空間とよばれる。今回の講演の中では、コホモロジーは常に \mathbf{Z}/p 係数のコホモロジーを考え、またホモトピー同値は $\text{mod } p$ ホモトピー同値を意味するものとする。

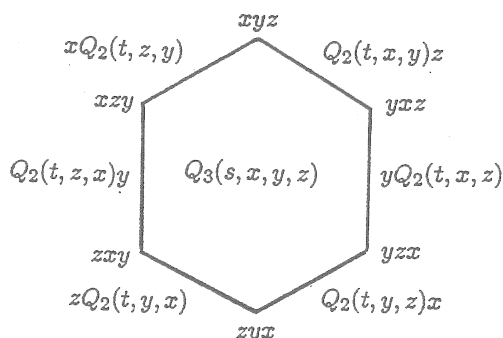
Dwyer-Wilkerson [7] は p -コンパクト群の概念を導入し、その性質についての研究を行った。連結な $\text{mod } p$ ループ空間 X が p -コンパクト群 ($\text{mod } p$ 有限ループ空間) であるとは、そのコホモロジー群 $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ が有限次元である時をいう。有限次元 CW-複体にホモトピー同値な $\text{mod } p$ ループ空間は p -コンパクト群であり、そのことからすべての連結な Lie 群は、 p 完備化すると p -コンパクト群になる。近年、 p -コンパクト群に関する多くの研究がなされ、それによって、それらが Lie 群に対して知られている多くの重要な性質を備えていることが分かってきた。([7],[18])

この講演においては、必ずしも有限ではない、しかしながらそのコホモロジー環 $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ が環として有限生成であるようなループ空間を考える。そのようなループ空間の例としては、無限次元複素射影空間 CP^∞ 、無限次元レンズ空間 $L^\infty(p^i)$ 、Lie 群 G の 3 連結ファイバー $G(3)$ などが挙げられる。

特に今回は、そのようなループ空間の高次ホモトピー可換性に関する研究結果を報告する。ホモトピー可換性が、ループ空間 (あるいはもっと一般に

* 日本学術振興会 特別研究員

H -空間)の重要な構造の一つであることはすでに不動の事実である。ホモトピー可換なループ空間の例は、 H -空間 X 上のループ空間 ΩX で与えられるが、すべてのホモトピー可換なループ空間がいつでもそのような形をしているわけではない。Sugawara [22] はループ空間の強ホモトピー可換性という概念を導入し、ホモトピー可換なループ空間が H -空間上のループ空間になるためのある種の基準を与えることに成功した。この考え方をもとにして、ループ空間に対する高次ホモトピー可換性の概念が Williams [23] によって導入された。ループ空間 X が与えられたとき、そこには結合的なループ構造が存在することが知られており、ループ空間の積は常に結合的であると仮定できる。ホモトピー可換なループ空間は C_2 -空間とよばれる。 X を C_2 -空間と仮定すると、そのホモトピー可換構造を与える写像 $Q_2 : I \times X^2 \rightarrow X$ が存在して、 $Q_2(0, x, y) = xy$ 、 $Q_2(1, x, y) = yx$ を満たす。この写像 Q_2 を用いると、次のような六角形の境界を考えることができる。



この六角形の内部を埋める写像 $Q_3 : D^2 \times X^3 \rightarrow X$ が存在するとき、 X は C_3 -空間であるといい、系列 $\{Q_2, Q_3\}$ を C_3 -空間 X の C_3 -形式とよぶ。これを一般化する形で、 C_n -空間が C_n -形式とよばれる写像の系列

$$\{Q_i : D^{i-1} \times X^i \rightarrow X\}_{1 \leq i \leq n}$$

を備えたループ空間として定義される。また C_n -形式を保存する写像として、 C_n -写像の概念も導入される。([23]) X が H -空間であるとき、そのループ空間 ΩX は C_∞ -空間になることが知られており、無限次元複素射影空間 CP^∞ 、無限次元レンズ空間 $L^\infty(p^i)$ などは C_∞ -空間である。

定理 A ([12]). p を奇素数とする。 X が単連結な C_n -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ が有限生成環であれば、ある単連結有限 C_n -空間 F と次のような C_n -ファイバー空間 (C_n -空間と C_n -写像からなるファイバー空間) が

存在する。

$$CP^\infty \times \cdots \times CP^\infty \longrightarrow X \longrightarrow F$$

定理 A を用いることで、有限生成コホモロジー環をもつ C_n -空間 X に関する様々な問題を有限 C_n -空間の場合に帰着させることができる。 $p = 2$ の場合、Slack [21] による次のようなホモトピー可換 mod 2 H -空間の分類定理が知られている。

定理 1.1 ([21]). X を単連結なホモトピー可換 mod 2 H -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbf{Z}/2)$ が有限生成環であるとき、 X は CP^∞ の有限個の直積にホモトピー同値である。

その一方で奇素数 p に対しては、Iriye-Kono [9] が、すべての連結な mod p H -空間はホモトピー可換な H -構造をもつことを示している。また、Clark-Ewing [4] によって構成された p -コンパクト群の中にも、ホモトピー可換なループ構造をもつものが多く含まれている。 $G \subset GL(l, \hat{\mathbf{Z}}_p)$ を Clark-Ewing 表に含まれる有限 pseudo-reflection 群とすると、 G は l 次元トーラスの分類空間のコホモロジー $H^*(BT^l; \mathbf{Z}/p)$ に作用する。Clark-Ewing は G の位数 $|G|$ が p と素であればある空間 $BX(G)$ でそのコホモロジーが

$$H^*(BX(G); \mathbf{Z}/p) \cong H^*(BT^l; \mathbf{Z}/p)^G$$

となるものを構成した。このとき、不変環 $H^*(BT^l; \mathbf{Z}/p)^G$ はある生成元 $y_i \in H^{2t_i}(BT^l; \mathbf{Z}/p)^G$ ($1 \leq i \leq l$) に対して

$$H^*(BT^l; \mathbf{Z}/p)^G \cong \mathbf{Z}/p[y_1, \dots, y_l]$$

となることが知られており、 $BX(G)$ のループ空間を $X(G) = \Omega BX(G)$ とおけば、 $X(G)$ は p -コンパクト群であることが分かる。 $y_i \in H^{2t_i}(BT^l; \mathbf{Z}/p)^G$ ($1 \leq i \leq l$) の次元から得られる数列 (t_1, \dots, t_l) を $X(G)$ の type と呼ぶ。McGibbon [16]、Saumell [19] によって Lie 群と p -コンパクト群のホモトピー可換性が調べられており、次の定理を得る。

定理 1.2 ([16],[19]). p を奇素数とし G を Clark-Ewing 表に含まれる有限 pseudo-reflection 群とする。 G と p の対 (G, p) が次の表に含まれるならば、

p -コンパクト群 $X(G)$ は C_2 -空間である。

G	p	$X(G)$	Types
G	$\geq 2t_i$	$S^{2t_1-1} \times \dots \times S^{2t_i-1}$	(t_1, \dots, t_i)
G_{2b}	≥ 3	$B_1(p)$	$(2, p+1)$
G_9	17	$B_7(17)$	$(8, 24)$
G_{14}	19	$B_5(19)$	$(6, 24)$
G_{17}	41	$B_{19}(41)$	$(20, 60)$
G_{20}	19	$B_{11}(19)$	$(12, 30)$
G_{24}	11	$B_3(11) \times S^{11}$	$(4, 6, 14)$
G_{30}	19	$B_1(19) \times B_{11}(19)$	$(2, 12, 20, 30)$

ここで $B_n(p)$ は $S^{2n+2p-1}$ 上の S^{2n+1} -束でそのコホモロジーが

$$H^*(B_n(p); \mathbf{Z}/p) \cong \Lambda(\sigma, \mathcal{P}^1(\sigma))$$

($\deg \sigma = 2n + 1$) であるものを表す。 ([17])

F を定理 1.2 の表で与えられた p -コンパクト群の一つとする。定理 1.2 から F は有限 C_2 -空間であり、そのコホモロジー $H^*(F; \mathbf{Z}/p)$ は群として有限次元、したがって環として有限生成である。 F の 3 次元の整係数コホモロジー群が $H^3(F; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ であるとき、写像 $[p^i]: F \rightarrow K(\mathbf{Z}, 3)$ を $[p^i]^*(v) = p^i u$ で定義する。ただし $u \in H^3(F; \mathbf{Z})$ 、 $v \in H^3(K(\mathbf{Z}, 3); \mathbf{Z})$ は生成元をあらわす。 $F\langle 3; p^i \rangle$ を $[p^i]$ のホモトピーファイバーとしたとき、 $F\langle 3; p^i \rangle$ は C_2 -空間になり、そのコホモロジー $H^*(F\langle 3; p^i \rangle; \mathbf{Z}/p)$ は有限生成環になることが分かる。特に $i=0$ のときは $F\langle 3; 1 \rangle = F\langle 3 \rangle$ は F の 3 連結ファイバーとなっている。

次の定理は、有限生成コホモロジー環をもつ C_2 -空間が、本質的にはこれらの構成から得られるものに限られることを示している。

定理 B([12]). p を奇素数とし X を単連結 mod p ループ空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ が有限生成環とする。このとき X が C_2 -空間であるための必要十分条件は、定理 1.2 の表に含まれる有限 C_2 -空間からなる系列 $\{F_i\}_{1 \leq i \leq q}$ が存在して次のホモトピー同値が成り立つことである。

$$X \simeq \prod_{i=1}^s F_i\langle 3 \rangle \times \prod_{i=s+1}^t F_i\langle 3; p^{e_i} \rangle \times \prod_{i=t+1}^q F_i \times K(\mathbf{Z}, 2)^r$$

ただし $\{e_i\}$ は $1 \leq e_i \leq e_{i+1}$ ($s+1 \leq i \leq t-1$) を満たす数列である。

また次の定理は、定理 1.1 の奇素数の場合への一般化と考えられる。

定理 C ([12]). p を奇素数とする。 X を単連結な C_p -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ が有限生成環であるとき、 X は無限次元複素射影空間 CP^∞ の有限個の直積にホモトピー同値である。

定理 C は連結な C_p -空間の場合にも一般化され、1次元球面 S^1 、無限次元複素射影空間 CP^∞ 、無限次元レンズ空間 $L^\infty(p^i)$ の直積にホモトピー同値であることが示される。(系 3.2)

Hemmi [8] は C_n -空間の概念を高次ホモトピー結合的な H -空間上に一般化した準 C_n -空間を定義し、単連結な有限準 C_p -空間は可縮であることを示した。ループ空間のカテゴリリーにおいては、準 C_n -空間は C_n -空間と一致することが知られており、定理 C は、Hemmi の結果を有限生成コホモロジー環をもつループ空間の場合に一般化している。また定理 C は、 H -空間上のループ空間、Sugawara による強ホモトピー可換ループ空間に関する Kawamoto、Lin によるいくつかの結果 [11],[12],[13] を一般化している。

2 局所化関手と定理 A の証明の概略

この章では、定理 A の証明の概略を述べる。そこにおいては、Dror Farjoun [6] によって導入された局所化関手の理論が有効に働き、特にその局所化関手がループ空間の高次ホモトピー可換性を保つことが定理 A を証明するための鍵となった。(定理 2.2) まずその局所化関手について少し説明したい。

A を空間とする。空間 X が A -局所的であるとは、 $e(f) = f(*)$ で定義される基点における評価写像

$$e : \text{Map}(A, X) \rightarrow X$$

がホモトピー同値写像になることである。この条件は基点を保つ写像空間 $\text{Map}_*(A, X)$ が可縮であることと同値である。Dror Farjoun は空間 A に対する局所化関手 $L_A : \mathcal{S}_* \rightarrow \mathcal{S}_*$ を構成した。ここで \mathcal{S}_* 基点をもつ空間のカテゴリリーを表す。空間 X に対して、その局所化 $L_A(X)$ は A -局所的であり、局所化の標準写像 $\phi_X : X \rightarrow L_A(X)$ が存在する。 ϕ_X はホモトピー普遍性をもっている。すなわち、 A -局所的な空間 Z と写像 $\zeta : X \rightarrow Z$ に対して、その拡張 $\tilde{\zeta} : L_A(X) \rightarrow Z$ がホモトピーを除いて一意的に存在し、 $\tilde{\zeta}\phi_X \simeq \zeta$ を満たす。もっと一般的に、標準写像 ϕ_X は A -局所的な空間 Z に対して次のようなホモトピー同値写像を誘導する。

$$(\phi_X)^* : \text{Map}_*(L_A(X), Z) \longrightarrow \text{Map}_*(X, Z)$$

この局所化関手は一般にはファイバー空間を保存しないが、ある条件のもとではファイバー空間をファイバー空間に移す。実際 Dror Farjoun による次の結果がある。

命題 2.1([6]). $F \rightarrow E \rightarrow B$ を連結な空間からなるファイバー空間とする。底空間 B が A -局所的か、あるいは $L_A(F)$ が可縮であれば、局所化関手 L_A はこのファイバー空間を保つ。

次の定理は、定理 A を証明するための鍵である。

定理 2.2([12]). A を空間とする。 X が C_n -空間であれば、その局所化 $L_A(X)$ は C_n -空間であり標準写像 $\phi_X : X \rightarrow L_A(X)$ は C_n -写像である。

ここで定理 A の証明の概略を述べる。

定理 A の証明. X を単連結な C_n -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbf{Z}/p)$ が有限生成環であると仮定する。 \mathbf{Z}/p の分類空間 $A = B\mathbf{Z}/p$ に対する局所化関手を考えると、定理 2.2 から X の局所化 $L_{B\mathbf{Z}/p}(X)$ は C_n -空間で、その標準写像 $\phi_X : X \rightarrow L_{B\mathbf{Z}/p}(X)$ は C_n -写像となっている。 K をそのホモトピーファイバーとすると、[23] から K は C_n -空間であり、ファイバーの包含写像 $K \rightarrow X$ は C_n -写像である。ところで、最近の Broto と Crespo による結果 [3],[5] から、ある単連結な有限 H -空間 F と次のような H -ファイバー空間が存在する。

$$CP^\infty \times \cdots \times CP^\infty \longrightarrow X \longrightarrow F$$

定義から F のコホモロジー群 $H^*(F; \mathbf{Z}/p)$ は有限次元であり、[1] から F は $B\mathbf{Z}/p$ -局所的である。命題 2.1 から、局所化関手 $L_{B\mathbf{Z}/p}$ は上のファイバー空間をファイバー空間に移すことが分かるが、[1] から $L_{B\mathbf{Z}/p}(CP^\infty)$ は可縮であることが知られているので、ホモトピー同値 $L_{B\mathbf{Z}/p}(X) \simeq F$ を得る。ファイバー空間のホモトピー可換図式を用いることで

$$K \simeq CP^\infty \times \cdots \times CP^\infty$$

が分かり、求める C_n -ファイバー空間を得る。したがって、定理 A が証明された。□

3 定理 C の証明の概略と p -コンパクト群の高次ホモトピー可換性

この章では、定理 C の証明の概略を述べる。証明の方法は、定理 A と有限 C_p -空間に対する Hemmi [8] の結果 (定理 3.1) を組み合わせることである。Hemmi [8] はループ空間の高次ホモトピー可換性の概念を高次ホモトピー結合的な H -空間の場合に拡張し、準 C_n -空間と呼ばれるものを研究した。ループ空間のカテゴリーでは、この準 C_n -空間は我々の考えている C_n -空間と一致することも示されている。

定理 3.1 ([8]). p を奇素数とする。

- (1) X が単連結な有限準 C_p -空間であれば、 X は可縮である。
- (2) X がループ空間であるとき、 X が準 C_p -空間であるための必要十分条件は、 X が C_p -空間であることである。

定理 A と定理 3.1 を用いて、定理 C は次のように証明される。

定理 C の証明. X を単連結な C_p -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ が有限生成環であると仮定する。定理 A から、ある単連結有限 C_n -空間 F と次のような C_n -ファイバー空間が存在する。

$$CP^\infty \times \cdots \times CP^\infty \longrightarrow X \longrightarrow F$$

定理 3.1 から F は可縮であり、

$$X \simeq CP^\infty \times \cdots \times CP^\infty$$

となる。したがって、定理 C が証明された。□

定理 C は連結な C_p -空間の場合にも一般化される。

系 3.2 ([12]). p を奇素数とする。 X が連結な C_p -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ が有限生成環であるとすると、 X は 1 次元球面 S^1 、無限次元複素射影空間 CP^∞ 、無限次元レンズ空間 $L^\infty(p^i)$ の有限個の直積にホモトピー同値である。

系 3.2 は、定理 C と次の補題から得られる。

補題 3.3 ([12]). X が連結な C_n -空間であれば、その普遍被覆空間 \tilde{X} は C_n -空間であり被覆写像 $\omega: \tilde{X} \rightarrow X$ は C_n -写像である。

定理 B、定理 C から、有限生成コホモロジー環をもつ C_2 -空間、 C_p -空間が分類されたが、 $2 < n < p$ に対する C_n -空間の分類の問題が残っている。定理 B の証明から次のことが分かり、したがって、 C_n -空間の分類問題は、定理 1.2 の表に含まれる p -コンパクト群の高次ホモトピー可換性を調べることに帰着される。

定理 3.4 ([12]). p を奇素数とする。 X が単連結 C_n -空間でそのコホモロジー $H^*(X; \mathbb{Z}/p)$ が有限生成環であれば、定理 B のホモトピー同値が成り立ち、さらに、それぞれの p -コンパクト群 F_i ($1 \leq i \leq q$) は C_n -空間である。

p -コンパクト群 X が p -正則 (奇数次元の球面の直積にホモトピー同値) である場合、Saumell [20] による X の高次ホモトピー可換性についての研究がある。その結果を一般化することによって、定理 1.2 の表に含まれるほとんどすべての p -コンパクト群の高次ホモトピー可換性を決定することができる。次の表において、 n は p -コンパクト群 X が C_n -空間であるが C_{n+1} -空間にはならない整数を表す。

X	p	Types	n
$S^{2t_1-1} \times \dots \times S^{2t_i-1}$	$\geq 2t_i$	(t_1, \dots, t_i)	$\lfloor p/t_i \rfloor$
$B_1(p)$	3	(2, 4)	2
	≥ 5	(2, $p+1$)	$(p-1)/2 \leq n \leq p-1$
$B_7(17)$	17	(8, 24)	2
$B_5(19)$	19	(6, 24)	3
$B_{19}(41)$	41	(20, 60)	2
$B_{11}(19)$	19	(12, 30)	3
$B_3(11) \times S^{11}$	11	(4, 6, 14)	2
$B_1(19) \times B_{11}(19)$	19	(2, 12, 20, 30)	3

上の表の中で、高次ホモトピー可換性が完全に決定されていないのは $B_1(p)$ ($p > 3$) の場合のみであるが、この場合に関しては次のような予想がある。

予想 3.4 ([8]). $p > 3$ に対して、 $B_1(p)$ は C_{p-1} -空間である。

参考文献

- [1] J. Aguadé, C. Broto, D. Notbohm, *Homotopy classification of spaces with interesting cohomology and a conjecture of Cooke, Part I*, *Topology* **33** (1994), 455-492.
- [2] A. Bousfield, D. Kan, *Homotopy limits, completions and localizations*,

Springer Lecture Notes in Math. 304 (1972).

- [3] C. Broto, J.A. Crespo, *H-spaces with noetherian mod two cohomology algebra*, Topology 38 (1999), 353-386.
- [4] A. Clark, J. Ewing, *The realization of polynomial algebras as cohomology rings*, Pacific J. Math. 50 (1974), 425-434.
- [5] J.A. Crespo, *Structure of mod p H -spaces with finiteness conditions*, Preprint.
- [6] E. Dror Farjoun, *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, Springer Lecture Notes in Math. 1622 (1996).
- [7] W.G. Dwyer, C.W. Wilkerson, *Homotopy fixed point methods for Lie groups and finite loop spaces*, Ann. of Math. 139 (1994), 395-442.
- [8] Y. Hemmi, *Higher homotopy commutativity of H -spaces and the mod p torus theorem*, Pacific J. Math. 149 (1991), 95-111.
- [9] K. Iriye, A. Kono, *Mod p retracts of G -product spaces*, Math. Z. 190 (1985), 357-363.
- [10] R.M. Kane, *The homology of Hopf spaces*, North-Holland Math. Library 40 (1988).
- [11] Y. Kawamoto, *Loop spaces of H -spaces with finitely generated cohomology*, Pacific J. Math. (to appear).
- [12] Y. Kawamoto, *Homotopy classification of higher homotopy commutative loop spaces with finitely generated cohomology*, Preprint.
- [13] Y. Kawamoto, J.P. Lin, *Homotopy commutativity of H -spaces with finitely generated cohomology*, Preprint.
- [14] J.P. Lin, *Loops of H -spaces with finitely generated cohomology rings*, Topology Appl. 60 (1994), 131-152.
- [15] J.P. Lin, *H -spaces with finiteness conditions*, Handbook of Algebraic Topology, edited by I.M. James, North-Holland (1995), 1095-1141.

- [16] C. McGibbon, *Homotopy commutativity in localized groups*, Amer. J. Math. **106** (1984), 665-687.
- [17] M. Mimura, H. Toda, *Cohomology operations and the homotopy of compact Lie groups-I*, Topology **9** (1970), 317-336.
- [18] D. Notbohm, *Classifying spaces of compact Lie groups and finite loop spaces*, Handbook of Algebraic Topology, edited by I.M. James, North-Holland (1995), 1049-1094.
- [19] L. Saumell, *Homotopy commutativity of finite loop spaces*, Math. Z. **207** (1991), 319-334.
- [20] L. Saumell, *Higher homotopy commutativity in localized groups*, Math. Z. **219** (1995), 203-213.
- [21] M. Slack, *A classification theorem for homotopy commutative mod 2 H-spaces with finitely generated cohomology rings*, Mem. Amer. Math. Soc. **92** (1991).
- [22] M. Sugawara, *On the homotopy commutativity of groups and loop spaces*, Mem. College Sci. Univ. Kyoto Ser. A **33** (1960), 257-269.
- [23] F.D. Williams, *Higher homotopy-commutativity*, Trans. Amer. Math. Soc. **139** (1969), 191-206.

THE IMPOSSIBLE MADE EASY:
LEARNING TO CALCULATE WITH
GENERALIZED COHOMOLOGY

W. STEPHEN WILSON

A *topologist* studies topological spaces and continuous maps. The typical example of a nice topological space is a *CW complex*; i.e., a space built up from cells. Let us say we have built X . We can add an n -dimensional cell, D^n , to X using any continuous map

$$f : S^{n-1} \cong \partial D^n \rightarrow X;$$

just glue D^n to X by identifying $x \in S^{n-1}$ with $f(x) \in X$. We get a space $Y = XU_f D^n$. In this way we can build a large class of topological spaces which have a certain amount of geometric intuition behind them.

A *homotopy theorist* feels that there are far too many topological spaces and continuous maps to deal with effectively. We immediately put an equivalence relation on the continuous maps from X to Y . We say $f \sim g$, f is *homotopic to* g , if f can be continuously deformed into g ; i.e., if there is a continuous map $F : X \times I \rightarrow Y$, ($I = [0, 1]$), such that $F | X \times 0 = f$ and $F | X \times 1 = g$. This is an equivalence relation and we denote the set of equivalence classes by $[X, Y]$ and call this the *homotopy classes of maps from X to Y* . We say X and Y are

homotopy equivalent or of the *same homotopy type* if we have maps $f : X \rightarrow Y$ and $g : Y \rightarrow X$ such that $g \circ f \sim I_X$ and $f \circ g \sim I_Y$. Two fundamental problems in homotopy theory are to determine if X and Y are of the same homotopy type and to compute $[X, Y]$.

To attempt to solve those problems we move on now to *algebraic topology*. Here we want to have a rule which assigns some algebraic object to every space; $X \mapsto E_*X$. This may just be a set, or have some complicated algebraic structure: groups, rings, algebras, etc. For every map $f : X \rightarrow Y$ we want a corresponding algebraic map $f_* : E_*X \rightarrow E_*Y$. If $f \sim g$ we want $f_* = g_*$. However, this property usually holds for most algebraic invariants anyway, so we are usually forced to go to homotopy theory if we use these algebraic techniques. (We also use algebraic objects E^*X where the algebraic map reverses direction from that of the topological map.) So if $f_* \neq g_*$ then $f \not\sim g$. If $X \sim Y$, then $E_*X \cong E_*Y$. The more algebraic theories we have, the better the chance of distinguishing two maps. The richer the algebraic structure, the more difficult it is to have an isomorphism. For example, it is much easier for two sets to be the same than for them to be isomorphic as groups or rings. Of course a third thing we want is computability, which we usually do not have. It is much easier to define algebraic invariants than to compute them.

We will stick to a special type of algebraic invariant, *generalized (co)homology theories*. There are a bunch of axioms for standard homology, namely it can be defined for pairs of spaces, is a homotopy functor and has some exactness properties. The final axiom for standard homology gives the homology of a point.

If this is dropped, we have axioms for a generalized homology theory.

A generalized cohomology theory consists of an infinite collection of abelian groups, $G^*(X) = \{G^k(X)\}$ and usually has even more structure, for example we will only consider those which give graded rings, i.e. have a pairing

$$G^i(X) \otimes G^j(X) \rightarrow G^{i+j}(X).$$

A theorem of Ed Brown's says that there is always a space \underline{G}_k such that

$$G^k(X) \simeq [X, \underline{G}_k].$$

Furthermore, the axioms imply that $G^*(X) \cong G^{*+1}(\Sigma X)$, where ΣX is the suspension of X . It is a homotopy theoretic fact that

$$[\Sigma X, Y] \cong [X, \Omega Y]$$

where ΩY is the loop space of Y (i.e. the topological space of all maps of the unit interval into Y which start and stop at the same "base" point). Combined, we get

$$[X, \underline{G}_n] \cong G^n X \cong G^{n+1} \Sigma X \cong [\Sigma X, \underline{G}_{n+1}] \cong [X, \Omega \underline{G}_{n+1}]$$

which can be used to show that $\Omega \underline{G}_{n+1} \cong \underline{G}_n$. From this we have that

$$G^n(X) \simeq \lim[\Sigma^k X, \underline{G}_{n+k}].$$

The limit of \underline{G}_{n+k} is the n -th suspension of G , the stable object representing the generalized cohomology theory. Generalized cohomology theories go hand in hand with generalized homology theories. For cohomology we have stable maps

$$G^n(X) \simeq \{X, \Sigma^n G\}.$$

For homology it is

$$G_n(X) \simeq \{S^n, X \wedge G\}.$$

Our first examples of algebraic invariants of this sort are the usual mod 2 homology, H_*X , and cohomology, H^*X . They both satisfy our homotopy condition. The cohomology is the dual to the homology which is just a collection of $Z/2$ vector spaces $H_*X = \{H_iX\}_{i \geq 0}$. H_nX is defined using maps of generalized n -dimensional triangles into X . In particular, H_nX tells us something about how the n -cells of X are related to the $n+1$ dimensional cells and the $n-1$ dimensional cells. Of course the first thing we do is invent homological algebra to deal with homology and get away from the geometry.

The cohomology has more structure than just a collection of vector spaces. Applying $H^*(-)$ to the diagonal map $\Delta : X \rightarrow X \times X$ we get

$$H^*X \leftarrow H^*(X \times X) \cong H^*X \otimes H^*X .$$

The isomorphism is the Künneth theorem but we must define the tensor product for this to make sense. We have

$$H^n(X \times X) \cong \bigoplus_{i+j=n} H^iX \otimes H^jX .$$

What we have now is an algebra, or more precisely, a *graded algebra*. It allows us to multiply $x_i \in H^iX$ and $x_j \in H^jX$ to get an element $x_i x_j \in H^{i+j}X$. This gives us a richer, stronger structure of the sort we want. It is easy to find X and Y with $H^*X \cong H^*Y$ as collections of vector spaces but not as graded algebras. Dually, the homology also has a more complex structure. The diagonal gives

$$\begin{array}{ccc} H_*X & \longrightarrow & H_*(X \times X) \cong H_*X \otimes H_*X \\ x & \xrightarrow{\psi} & \Sigma x' \otimes x'' \end{array}$$

with the degree of $x = \text{sum of degrees of } x' \text{ and } x''$, we call this structure a *coalgebra*. It contains the same information as the dual algebra in cohomology contains.

Our interest is in calculations. The mod 2 homology of spaces is generally assumed to be something we can calculate. In fact, each space is a special problem which has to be done in its own way; there is no “one way” to calculate the homology of spaces. It still takes a great deal of hard work to calculate these groups, if they can be calculated at all.

There are several things which make it possible to calculate the standard mod 2 homology of a space. The first is that the groups are vector spaces, a structure much easier to get a grip on than arbitrary abelian groups. The second is the Künneth isomorphism discussed above which adds the extra structure. The Künneth isomorphism is useful for a number of reasons. It allows you to calculate the homology of products of spaces you know the homology for immediately, a non-trivial extension of what you can do. Better than that is that many spaces can be constructed out of products of other spaces. A common example is when $X = \Omega Y$. If we know the homology of X we can approach the homology of Y because you can build Y from products of X . You don't get the complete answer for free, but you get a very good starting place for your calculations.

Next, the Künneth isomorphism allows you to put more structure on your homology. It is fairly common for spaces of interest to have a multiplication: $X \times X \rightarrow X$. Because of the Künneth isomorphism this puts a multiplication on the homology (or a comultiplication on the cohomology). Combined with the already existing coalgebra structure, we now have a Hopf algebra.

If the multiplication on X is homotopy commutative (and it frequently is) then our Hopf algebra is bicommutative and such objects form an abelian category which therefore has kernels and cokernels etc. When we do this, it is more than just adding structure to the homology so we can use it to distinguish our space from other spaces, it also helps us compute it. For example, there are structure theorems for Hopf algebras, so if we know our answer is a Hopf algebra, the possibilities are severely restricted. Furthermore, the abelian category aspect gives us many computational tools which are not available without it.

We want more algebraic machinery than just standard homology. The next example we offer is the collection of generalized homology theories called Morava K -theories. For each odd prime, p , and each $n > 0$, there is a theory $K(n)_*(-)$. The coefficient ring, i.e., the Morava K -theory of a point, is $K(n)_* \cong \mathbb{Z}/p[v_n, v_n^{-1}]$, with the degree of v_n equal to $2(p^n - 1)$. Although the coefficient ring is graded, we see that every non-zero element is invertible. This makes it into a “graded field.” Thus, much like our standard mod 2 homology example, our generalized homology here is also a “vector space.” This property also gives us a Künneth theorem,

$$K(n)_*(X \times Y) \cong K(n)_*X \otimes K(n)_*Y ,$$

which also leads us to Hopf algebras. In other words, most of the good properties of standard mod p homology carry over to Morava K -theory and, in practice, they have been found to be fairly computable for much the same reasons standard homology is but with very different results and applications.

The example we are interested in is another matter entirely. It is complex bordism. We want to define a sequence of abelian

groups $\Omega_n(X)$. We use manifolds to do this. Manifolds are a much better understood class of topological spaces than the general X we wish to study. We use this understanding of manifolds to study the general X and in the process find new information about the manifolds themselves.

We begin by considering all maps of all n -dimensional manifolds into X ,

$$M^n \xrightarrow{f} X .$$

There are too many such manifolds and maps. So, much like we did when we went to homotopy theory, or when homology is defined using triangles, we put an equivalence relation on these maps. If we have another map, $g : N^n \rightarrow X$, we say f and g are equivalent, or bordant, if there is an $n + 1$ dimensional manifold W^{n+1} and map $F : W^{n+1} \rightarrow X$, such that the boundary, ∂W^{n+1} , of W^{n+1} is the disjoint union of M^n and N^n ; and F restricted to this boundary is the disjoint sum of f and g . Let the equivalence classes be $\Omega_n X$. It is a finitely generated abelian group. All of the axioms for a generalized homology theory can be verified geometrically, or we could easily build a stable object representing it. Let O_n be the n -th orthogonal group and BO_n its classifying space. Take the Thom space of the universal bundle (the one point compactification of the total space of the bundle) to get MO_n . Our maps

$$\begin{array}{ccc} \xi_{n-1} \oplus R & \longrightarrow & \xi_n \\ \downarrow & & \downarrow \\ BO_{n-1} & \longrightarrow & BO_n \end{array}$$

give rise to

$$\Sigma MO_{n-1} \longrightarrow MO_n$$

and Thom transversality gives an isomorphism

$$\Omega_n X \cong \lim_{i \rightarrow \infty} [S^{n+i}, MO_i \wedge X] .$$

We usually denote $\Omega_n X$ by $MO_n X$. A generalized cohomology theory can also be defined as

$$MO^n X \cong \lim_{i \rightarrow \infty} [\Sigma^{i-n} X, MO_i] .$$

This is called unoriented cobordism. This is not so exciting because it is really just a bunch of copies of the standard mod 2 homology. To get something more useful, all we need to do is put a little structure on the manifolds we use. In particular, we assume that the stable normal bundle has a complex structure, induced by a map

$$M^n \rightarrow BU ,$$

and that this structure restricts from W^{n+1} to the boundary when we define bordism. We now get complex bordism, $MU_n X$. Again, we have Thom spaces and

$$MU_n X = \lim_{i \rightarrow \infty} [S^{2i+n} X, MU_i \wedge X]$$

and

$$MU^n X = \lim_{i \rightarrow \infty} [\Sigma^{2i-n} X, MU_i] .$$

For good reasons, MU occupies a special place in homotopy theory. It lies half way between the sphere, a main object of study in homotopy theory, and standard homology, the main tool in algebraic topology. So, it is a tool which is closer to the goal. In particular, we have maps

$$S^0 \longrightarrow MU \longrightarrow K(\mathbb{Z}/(p))$$

where S^0 is the “stable” sphere and $K(\mathbb{Z}/(p))$ is the stable object representing standard mod p cohomology. The homology

of S^0 is known and nearly trivial but its homotopy groups, although of great interest, are too tough to handle. $K(\mathbb{Z}/(p))$ has nearly trivial homotopy groups and although you can calculate its homology, (it is the dual of the Steenrod algebra), it is pretty nasty. MU , in the middle, has very nice homotopy groups and homology! Both are just (graded) polynomial algebras on generators in every even degree. In principle this seems manageable.

MU is central to the study of homotopy theory and Devinatz, Hopkins and Smith have proven the theorem which every homotopy theorist dreams about: they solved a homotopy theory problem completely in terms of an algebraic invariant. Namely, they showed that a stable self map of X is trivial after iteration if and only if the algebra map induced on $MU_*(X)$ is trivial after iteration.

This is a great theorem and establishes (along with other results) the centrality and importance of MU in homotopy theory. However, if we want to be able to use it for more problems, then the computability must be enhanced. Just a few years ago, there were very few examples of non-trivial calculations of the complex cobordism of interesting spaces.

Today, as a result of a recent breakthrough, the complex cobordism of many standard spaces has now been calculated and the answers are quite nice.

First, an old theorem of Quillen's helps us simplify things quite a bit. If you localize $MU_*(X)$ at a fixed prime p then it falls apart into a lot of copies of a much smaller theory called Brown-Peterson homology, which contains all of the same information.

The coefficient ring is

$$BP_* \simeq \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$$

where the degree of v_n is $2(p^n - 1)$. These v_n are the same v_n we saw some time ago when we discussed Morava K -theories. There is a *Morava Structure Theorem* which relates the Morava K -theories to the Brown-Peterson cohomology of a space.

It turns out that there is a concept of a “nice” answer when you calculate the Brown-Peterson cohomology of a space. M is called *Landweber Flat* if M has the property that v_n is injective on $M/(p, v_1, \dots, v_{n-1})M$ for all n . This property turns out to give Künneth isomorphisms and Hopf algebras where we have no right to expect them. It also turns out to be a property that lots and lots of standard spaces in homotopy theory produce when we take their Brown-Peterson cohomology.

To get this, we start with Morava K -theory, which can usually be calculated if necessary, and work from there. The main theorem of Ravenel, Wilson, and Yagita, [RWY98], is that if the Morava K -theory of a space is concentrated in even degrees, then the Brown-Peterson cohomology is too and is Landweber Flat. The condition of even degree Morava K -theory might seem overly restrictive, but there are many examples where it holds. In particular, it is true for the space BO , all Eilenberg-MacLane spaces, finite Postnikov systems, QS^{2n} , the image of J space, the classifying spaces for the symmetric groups and lots of other groups as well.

Since then, from the work of Kashiwabara and Wilson, we can generalize results from [RWY98]. We assume we have maps of

H -spaces

$$X_1 \xrightarrow{f_1} X_2 \xrightarrow{f_2} X_3$$

with the composition trivial. If the Morava K -theory gives an exact sequence of bicommutative Hopf algebras for all Morava K -theories

$$K_* \longrightarrow K_*X_1 \longrightarrow K_*X_2 \longrightarrow K_*X_3 \longrightarrow$$

and $BP^*(X_2)$ and $BP^*(X_3)$ are Landweber Flat, then $BP^*(X_1)$ is the cokernel of f_2^* and is also Landweber Flat.

If instead, we have

$$\longrightarrow K_*X_1 \longrightarrow K_*X_2 \longrightarrow K_*X_3 \longrightarrow K_*$$

for all Morava K -theories and $BP^*(X_1)$ and $BP^*(X_2)$ are Landweber Flat, then $BP^*(X_3)$ is the kernel of f_1^* and is also Landweber Flat.

These techniques allow for the computation of the Brown-Peterson cohomology of a large number of standard spaces in homotopy theory.

REFERENCES

- [RWY98] D. C. Ravenel, W. S. Wilson, and N. Yagita. Brown-Peterson cohomology from Morava K -theory. *K-Theory*, 15(2):149–199, 1998.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, JOHNS HOPKINS UNIVERSITY, BALTIMORE, MARYLAND 21218

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYOTO UNIVERSITY, KYOTO 606-8502 JAPAN

E-mail address: wsw@math.jhu.edu

Topological realization of level structures over Johnson-Wilson theory

Takeshi Torii (鳥居 猛 京大理)

1 Introduction

In this talk we consider the topological realization of the universal deformation with level structure and its stable splitting by Steinberg idempotent. Let $\widehat{E(n)}$ be the I_n -adic complete Johnson-Wilson spectrum. For a finite group G , the $\widehat{E(n)}$ cohomology of the classifying space of G is almost described in terms of the abelian subgroups in G by the result of Hopkins, Kuhn and Ravenel [4, 5]. Therefore it is fundamental to study the $\widehat{E(n)}$ cohomology of the classifying space of abelian groups and it intimately connects with the theory of formal group law.

The formal group law associated with $\widehat{E(n)}$ is a universal deformation of the Honda group law which is associated with the Morava K theory $K(n)$. There is an idea of the level structure for the classical theory of elliptic curves and modular forms. The generalization of the level structure for formal module and its deformation is defined by Drinfel'd [1]. In particular, Lubin-Tate's local class field theory is interpreted as the theory of the level structures of the formal \mathcal{O} -module where \mathcal{O} is an integer ring of the local field and it connects with the p -adic Morava K theory $\widehat{K(n)}$. In §3 we construct a spectrum from the classifying space of abelian groups by using the stable transfer maps whose $\widehat{E(n)}$ cohomology is rationally, that is, tensored with the field of rational numbers \mathbb{Q} , identified with the universal level structure.

The representing ring of the universal level structure is a Galois extension over the coefficient ring $\widehat{E(n)}_0$. The Galois group of this extension is the general linear group and it acts on the spectrum mentioned above. There is a particular modular representation of the general linear group. It is called Steinberg representation which is an absolutely irreducible and projective module. In §5 we consider the stable splitting of the spectrum constructed in §3 by the Steinberg idempotent and

explain the relation to the symmetric product of the sphere spectrum and the Kuhn's exact sequence.

2 The I_n -adic complete Johnson-Wilson theory

In this section we introduce the I_n -adic complete Johnson-Wilson theory $\widehat{E(n)}$ and describe the theory of the associated formal group law. Let p be a prime and $n > 0$ an integer. Let $BP^*(-)$ be the Brown-Peterson cohomology. Then $BP^*(-)$ is a generalized cohomology theory in which complex vector bundles are orientable. The coefficient ring of $BP^*(-)$ is given by

$$BP_* = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots], \quad |v_i| = 2(p^i - 1)$$

where v_i are Araki's generators. Let $x \in BP^*(\mathbb{C}P^\infty)$ be an orientation class obtained from the complex cobordism $MU^*(-)$ by using Quillen splitting. The formal group law F associated with $BP^*(-)$ is universal p -typical over $\mathbb{Z}_{(p)}$ -algebra and it is

characterized by the p -series $[p]^F(x) = \overbrace{x +_F \dots +_F x}^p$:

$$[p]^F(x) = px +_F v_1 x^p +_F v_2 x^{p^2} +_F \dots$$

We consider the following rings

$$\begin{aligned} K(n)_* &= \mathbb{F}_{p^n}[u, u^{-1}] \\ \widehat{E(n)}_* &= W\mathbb{F}_{p^n}[[u_1, \dots, u_{n-1}]] [u, u^{-1}] \end{aligned}$$

where $W\mathbb{F}_{p^n}$ is the Witt ring of the finite field \mathbb{F}_{p^n} . The degree u_i is 0 and the degree of u is 2. There are ring homomorphisms

$$\begin{array}{ccc} & BP_* & \\ \theta_{\widehat{E}} \swarrow & & \searrow \theta_K \\ \widehat{E(n)}_* & \longrightarrow & K(n) \end{array}$$

where $\theta_{\widehat{E}}$ is given by $\theta_{\widehat{E}}(v_i) = u_i u^{p^i - 1}$ ($1 \leq i < n$), $= u^{p^n - 1}$ ($i = n$), $= 0$ ($i > n$) and θ_K is obvious one. By using these homomorphisms, we obtain p -typical formal group laws over $\widehat{E(n)}_*$ and $K(n)_*$. In fact there are complex oriented cohomology theories $\widehat{E(n)}^*(-)$ and $K(n)^*(-)$ which have the formal group laws constructed

above. We call $\widehat{E(n)}^*(-)$ the I_n -adic complete Johnson-Wilson theory and $K(n)^*(-)$ the Morava K theory.

In the following we describe the meaning of the formal group law over $\widehat{E(n)}^*$. Let k be a perfect field of characteristic $p > 0$ and \mathbb{F} be a formal group law over k of finite height n . Let R be a complete Noetherian local ring with k -algebra as residue field. Then a lift or deformation of \mathbb{F} over R is a formal group law \mathbb{G} over R whose reduction to the residue field is equal to \mathbb{F} . The $*$ -isomorphism between two deformations is an isomorphism of formal group laws over R whose reduction to the residue field is identity. Lubin and Tate showed that the $*$ -isomorphism classes of deformations over R is naturally corresponding to the continuous ring homomorphism from $Wk[[u_1, \dots, u_{n-1}]]$ to R :

$$\begin{aligned} \text{Def}(R) &= \{*\text{-isomorphism classes of deformations over } R\} \\ &\cong \text{Hom}^c(Wk[[u_1, \dots, u_{n-1}]], R) \end{aligned}$$

where Wk is the ring of Witt vectors of k . In fact they constructed a universal deformation over $Wk[[u_1, \dots, u_{n-1}]]$.

In particular, let k be the finite field \mathbb{F}_{p^n} and \mathbb{F} be the p -typical formal group law over k with p -series $[p](x) = x^{p^n}$. This is the formal group law associated with the Morava K theory (Honda group law). Then the formal group law associated with the Johnson-Wilson theory $\widehat{E(n)}$ is a universal deformation of \mathbb{F} .

3 Level structures on deformations

In this section we define the level structures on deformations of a formal group law according to Drinfel'd. Let \mathbb{G}/R be a deformation of the formal group law \mathbb{F} over k . The maximal ideal \mathfrak{m}_R of R is an abelian group with respect to the formal group sum $+_{\mathbb{G}}$. The level r structure on the deformation \mathbb{G} is a group homomorphism:

$$\phi : (\mathbb{Z}/p^r)^n \longrightarrow \mathfrak{m}_R$$

satisfying the condition that the polynomial

$$\prod_{\alpha \in (\mathbb{Z}/p)^n} (X - \phi(\alpha))$$

divides the p -series of \mathbb{G} .

We recall the level structure of the classical theory of elliptic curves and modular forms. Let \mathbb{H} be the upper half plane. Corresponding $\tau \in \mathbb{H}$ to the complex torus $\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle$, we obtain a map

$$\mathbb{H} \longrightarrow \{ \text{isomorphism classes of elliptic curves}/\mathbb{C} \}$$

and this induces one-to-one correspondence

$$SL_2(\mathbb{Z}) \backslash \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \{ \text{isomorphism classes of elliptic curves}/\mathbb{C} \}.$$

Let $\Gamma(N)$ be the principal congruence subgroup of level N . $\Gamma(N)$ is the kernel of the reduction $SL_2(\mathbb{Z}) \rightarrow SL_2(\mathbb{Z}/N)$. The level N structure of an elliptic curve E is an ordered pair of the generator of the subgroup $E[N]$ of N division points. Then by corresponding $\tau \in \mathbb{H}$ to the complex torus and the pair $(\mathbb{C}/\langle 1, \tau \rangle, (1/N, \tau/N))$, we obtain the one-to-one correspondence

$$\Gamma(N) \backslash \mathbb{H} \xrightarrow{\cong} \{ \text{isomorphism classes of the elliptic curves with level } N \text{ structure} \}.$$

The modular form is a global section of the canonical bundle of the modular curve.

Roughly speaking, the definition of a level structure of a deformation is obtained by replacing the isomorphism classes of elliptic curves to the $*$ -isomorphism classes of deformations. Let Level_r be the functor from the category of complete Noetherian local rings to sets such that $\text{Level}_r(R)$ is the set of all isomorphism classes of deformations with level r structure. The following theorem is due to Drinfel'd.

Theorem 3.1 (Drinfel'd [1]). *The functor Level_r is representable by a regular local ring $D(\mathbb{Z}/p^r)^n$. The ring homomorphism $\widehat{E}(n) \rightarrow D(\mathbb{Z}/p^r)^n$, corresponding a natural transformation $\text{Level}_r \rightarrow \text{Def}$, is finite and flat.*

We consider the $\widehat{E}(n)$ cohomology of the classifying space of the elementary abelian group $(\mathbb{Z}/p)^n$. There is an S^1 bundle: $S^1 \rightarrow B(\mathbb{Z}/p) \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$. By using Gysin sequence, we obtain that

$$\widehat{E}(n)^*(B(\mathbb{Z}/p)) \cong \widehat{E}(n)_*[[x]]/([p](x)).$$

We note that $\widehat{E}(n)^*(B(\mathbb{Z}/p))$ is a free module of rank p^n by the Weierstrass preparation theorem. Therefore, by using Kunneth theorem, we obtain that

$$\widehat{E}(n)^*(B(\mathbb{Z}/p)^n) \cong \widehat{E}(n)_*[[x_1, \dots, x_n]]/([p](x_1), \dots, [p](x_n)).$$

Let $\text{Hom}((\mathbb{Z}/p)^n, \mathbb{G})$ be the functor from the category of complete Noetherian local rings to sets such that $\text{Hom}((\mathbb{Z}/p)^n, \mathbb{G})(R)$ is the set of all deformation \mathbb{G}_R with a homomorphism from $(\mathbb{Z}/p)^n$ to the maximal ideal \mathfrak{m}_R with respect to the formal group sum $+\mathbb{G}_R$. Then $\text{Hom}((\mathbb{Z}/p)^n, \mathbb{G})$ is represented by $\widehat{E(n)}^0(B(\mathbb{Z}/p)^n)$:

$$\text{Hom}((\mathbb{Z}/p)^n, \mathbb{G})(R) \cong \text{Hom}^c(\widehat{E(n)}^0(B(\mathbb{Z}/p)^n), R).$$

There is an obvious natural transformation $\text{Level}_1 \rightarrow \text{Hom}((\mathbb{Z}/p)^n, \mathbb{G})$. This induces a ring homomorphism:

$$\widehat{E(n)}^0(B(\mathbb{Z}/p)^n) \longrightarrow D((\mathbb{Z}/p)^n).$$

4 Topological realization of level structures

In this section we construct a spectrum from the classifying spaces of abelian groups by using stable transfer maps. Then we show that the $\widehat{E(n)}$ cohomology of the spectrum is rationally identified with the universal level structure.

There is a contractible free $(\mathbb{Z}/p)^n$ space $E(\mathbb{Z}/p)^n$. For the subgroup A of $(\mathbb{Z}/p)^n$, the quotient space $E(\mathbb{Z}/p)^n/A$ is a classifying space BA . Let \mathcal{W} be the set of all flags in \mathbb{F}_p^n . That is, \mathcal{W} is a set of all expanding sequences of the subspaces of \mathbb{F}_p^n : $\mathcal{W} = \{W = \{W_1 \subset \cdots \subset W_k \subset \mathbb{F}_p^n\} \mid 0 \leq \dim W_1 < \cdots < \dim W_k < n, 0 \leq k \leq n\}$. For $W \in \mathcal{W}$, we let BW be the classifying space BW_1 . In particular, we have $B\{\mathbb{F}_p^n\} = BV$. If W' is a refinement of $W \in \mathcal{W}$, then there is an obvious finite covering map $BW' \rightarrow BW$. So we obtain a strictly commutative diagram, which is indexed by the flags in \mathbb{F}_p^n , consisting of the classifying spaces of the subgroups of V and the finite covering maps between them.

We define the ordering in \mathcal{W} as follows:

$$W' \leq W \iff W' \text{ is a refinement of } W.$$

Then we regard \mathcal{W} as a small category. From the above construction, there is a functor \mathbb{B} from \mathcal{W} to the category of spaces so that $\mathbb{B}W = BW$ and $\mathbb{B}W' \rightarrow \mathbb{B}W$ is an obvious finite covering for $W' < W$. By using higher homotopy, we obtain the following lemma.

Lemma 4.1. *There is a functor \mathbb{E} from \mathcal{W} to the category of spectra such that $\mathbb{E}W \simeq \Sigma^\infty \mathbb{B}W_+$ for $W \in \mathcal{W}$ and the morphism $\mathbb{E}W \rightarrow \mathbb{E}W'$ is a transfer map for $W' < W$.*

Let $\mathcal{E} = \{\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_s) \in \mathbf{Z}^n \mid 0 \leq \epsilon_i \leq 2\}$ and $\bar{\mathcal{E}} = \{\epsilon \in \mathcal{E} \mid \epsilon_i = 0 \text{ or } 1\}$. We define the ordering in \mathcal{E} as follows:

$$\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_s) \leq \epsilon' = (\epsilon'_1, \dots, \epsilon'_s) \iff \epsilon_i \leq \epsilon'_i \text{ for all } i.$$

Then we regard \mathcal{E} as a small category and $\bar{\mathcal{E}}$ a subcategory. For $\epsilon \in \bar{\mathcal{E}}$, we let K_ϵ be the subset of $\{0, 1, \dots, n-1\}$ where $i-1 \in K_\epsilon$ if and only if $\epsilon_i = 0$. We denote the subset of \mathcal{W} consisting of the flags of type K_ϵ by \mathcal{W}_ϵ :

$$\mathcal{W}_\epsilon = \{W = \{W_1 \subset \dots \subset W_k \subset \mathbb{F}_p^s\} \mid \dim W_j = i_j\}$$

if $K_\epsilon = \{i_1 < \dots < i_k\}$. Let $\bar{\mathbb{D}}(\epsilon) = \prod_{W \in \mathcal{W}_\epsilon} \mathbb{E}W$. Then the functor \mathbb{E} induces a functor $\bar{\mathbb{D}}$ from $\bar{\mathcal{E}}$ to the category of spectra. Since $\bar{\mathbb{D}}$ is a strictly commutative diagram over $\bar{\mathcal{E}}$, we extend the diagram to a functor \mathbb{D} from \mathcal{E} to the category of spectra so that

$$\begin{aligned} \mathbb{D}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, 2, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_s) &\rightarrow \mathbb{D}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, 1, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_s) \\ &\rightarrow \mathbb{D}(\epsilon_1, \dots, \epsilon_{i-1}, 0, \epsilon_{i+1}, \dots, \epsilon_s) \end{aligned}$$

are fiber sequences. We define the spectrum $F_n(p)$ as $\mathbb{D}(2, \dots, 2)$.

$$\begin{array}{ccccc} F_2(p) & \longrightarrow & & \longrightarrow & \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \longrightarrow & \Sigma^\infty B(\mathbb{Z}/p)_+^2 & \longrightarrow & \prod_{\dim A=1} \Sigma^\infty BA_+ \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & \longrightarrow & \Sigma^\infty B\{e\}_+ & \longrightarrow & \prod_{\dim A=1} \Sigma^\infty B\{e\}_+ \end{array}$$

We explain the relation between $\widehat{E(n)}^0(B(\mathbb{Z}/p)^n)$ and $D(\mathbb{Z}/p)^n$ over \mathbb{Q} . Let A be a quotient group of $(\mathbb{Z}/p)^n$. The level(A) structure on a deformation is defined as similar way. Let $\text{Level}(A)$ be the functor from the category of Noetherian local rings to sets such that $\text{Level}(A)(R)$ is the set of deformation with level A structure. Then $\text{Level}(A)$ is represented by a regular local ring $D(A)$. For a level A structure $\phi : A \rightarrow \mathfrak{m}_R$ on a deformation \mathbb{G}/R , we obtain a homomorphism

$$(\mathbb{Z}/p)^n \longrightarrow A \xrightarrow{\phi} \mathfrak{m}_R$$

by composing with the quotient map $(\mathbb{Z}/p)^n \rightarrow A$. This induces a natural transformation $\text{Level}(A) \rightarrow \text{Hom}((\mathbb{Z}/p)^n, \mathbb{G})$. So we obtain a ring homomorphism

$$\widehat{E(n)}^0(B(\mathbb{Z}/p)^n) \longrightarrow D(A).$$

This homomorphism induces an isomorphism

$$\widehat{E(n)}^0(B(\mathbb{Z}/p)^n) \otimes \mathbb{Q} \xrightarrow{\cong} \prod_A D(A) \otimes \mathbb{Q}$$

where the product is taken over the quotient groups of $(\mathbb{Z}/p)^n$. Taking the quotient by the transfer image of the low dimensional part inductively, we obtain the following theorem.

Theorem 4.2. $\widehat{E(n)}^0(F_n(p)) \otimes \mathbb{Q} \cong D(\mathbb{Z}/p)^n \otimes \mathbb{Q}$

5 Stable splitting by Steinberg idempotent

In this section we consider the stable splitting of the spectrum $F_n(p)$ by Steinberg idempotent and describe the relation to the Kuhn's exact sequence. First we recall the stable splitting. Let X be a CW spectrum and $\{X, X\}$ the ring of self-maps of X . For $e \in \{X, X\}$, we denote by eX the infinite mapping telescope $\varinjlim (X \xrightarrow{e} X \xrightarrow{e} X \cdots)$. Then we have the following lemma.

Lemma 5.1. *If e is an idempotent, then $X \simeq eX \vee (1 - e)X$. Moreover, for any spectrum Y , $[Y, eX] = e[Y, X]$ and $[eX, Y] = [X, Y]e$.*

In particular, we let $X = B(\mathbb{Z}/p)_+^n$ the p -completion of the suspension spectrum of the classifying space $B(\mathbb{Z}/p)^n$ with disjoint base point. Then the general linear group $GL_n(\mathbb{Z}/p)$ acts on $B(\mathbb{Z}/p)_+^n$. So we obtain that $GL_n(\mathbb{Z}/p) \subset \{B(\mathbb{Z}/p)_+^n, B(\mathbb{Z}/p^n)_+\}$. Furthermore, by Segal conjecture, this induces the injection of the group ring over the p -adic integer:

$$\mathbb{Z}_p[GL_n(\mathbb{Z}/p)] \subset \{B(\mathbb{Z}/p)_+^n, B(\mathbb{Z}/p^n)_+\}.$$

We recall the Steinberg idempotent. Let B_n be a Borel subgroup of $GL_n(\mathbb{Z}/p)$ consisting of the upper triangular matrices, U_n be a unipotent subgroup consisting of the upper triangular matrices with all diagonal entries equal to 1, and Σ_n be the

symmetric group consisting of the permutation matrices. We define $\widetilde{\Sigma}_n$ and \overline{B}_n in the group ring $\mathbb{Z}_{(p)}[GL_n(\mathbb{Z}/p)]$ as follows:

$$\begin{aligned}\widetilde{\Sigma}_n &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \sigma \\ \overline{B}_n &= \sum_{b \in B_n} b.\end{aligned}$$

Then the Steinberg idempotent is defined by

$$e_n = \frac{\widetilde{\Sigma}_n \overline{B}_n}{[GL_n : U_n]}.$$

Let $R = \mathbb{F}_p[GL_n(\mathbb{Z}/p)]$ and V be a $GL_n(\mathbb{Z}/p)$ module over \mathbb{F}_p . Then the Steinberg representation $V_{st} = e_n R$ is an absolutely irreducible and projective module. The dimension of $V e_n$ over \mathbb{F}_p is the multiplicity of the Steinberg representation in the composition factors of V .

Let $M(n) = e_n B(\mathbb{Z}/p)_+^n$. We describe the relation between $M(n)$ and the symmetric product of the sphere spectrum. Let $D(n)$ be the cofibre of the diagonal map

$$\Delta : Sp^{p^{n-1}} S^0 \longrightarrow Sp^{p^n} S^0.$$

Let $u_n \in H^0(D(n); \mathbb{Z}/p)$ be the bottom class. Then we have

$$H^*(D(n); \mathbb{Z}/p) \cong \mathbb{Z}/p\{\theta^I u_n \mid I : \text{admissible, the length } l(I) \leq n\}.$$

where $I = (\epsilon_0, r_1, \epsilon_1, r_2, \dots)$, $\theta^I = \beta^{\epsilon_0} \mathcal{P}^{r_1} \beta^{\epsilon_1} \mathcal{P}^{r_2} \dots$.

Theorem 5.2 (Mitchell-Priddy [10]). *There is a natural map $D(n-1) \rightarrow D(n)$ and $M(n) \simeq \Sigma^{-n}(D(n)/D(n-1))$. The mod p cohomology of $M(n)$ has basis $\{\theta^I \mid I : \text{admissible, } l(I) = n\}$.*

We recall the Kuhn's exact sequence. There is a sequence obtained by splicing the cofibre sequences $\Sigma^{-n} D(n) \rightarrow M(n) \rightarrow \Sigma^{-n+1} D(n-1)$:

$$\dots \rightarrow M(n) \rightarrow \dots \rightarrow M(1) \rightarrow M(0) = S^0 \rightarrow H\mathbb{Z}/p.$$

Theorem 5.3 (Kuhn-Priddy [8], Kuhn [7]). *The above sequence is exact in the following sense. Let $F_{i+1} \rightarrow M(i) \rightarrow F_i$ be a cofibre sequence:*

$$\begin{array}{ccccc} \dots F_2 & & & & F_1 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & M(1) & & \\ & \rightarrow & & \rightarrow & \\ & & & & M(0) \rightarrow H\mathbb{Z}/p. \end{array}$$

Then the associated sequence of infinite loop spaces has a section:

$$\Omega^\infty F_{i+1} \xrightarrow{\cong} \Omega^\infty M(i) \longrightarrow \Omega^\infty F_i.$$

Now we consider the stable splitting of $F_n(p)$ by Steinberg idempotent. Recall the diagram using the construction of $F_n(p)$. Then $GL_n(\mathbb{Z}/p)$ acts on the diagram and $F_n(p)$ can be constructed equivariantly. Let P_k be the parabolic subgroup stabilizing the subspace spanned by the first k basis vectors.

$$P_k = \left\{ \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \in GL_n(\mathbb{F}_p) \mid X \in GL_k, Z \in GL_{n-k} \right\} \cong (GL_k \times GL_{n-k}) \rtimes Q$$

where Q is a subgroup such that the matrixes X and Z are identity. By using the homomorphism

$$P_k \longrightarrow GL_k \times GL_{n-k} \longrightarrow GL_k,$$

we regard a GL_k module M as a P_k module and let M^{GL_n} be its induced representation to GL_n .

Lemma 5.4. *If $k < n - 1$, then $M^{GL_n} e_n = 0$. If $k = n - 1$, then $\dim M^{GL_n} e_n = \dim M e_{n-1}$.*

From this lemma, the splitted diagram reduces to the sequence corresponding to the flags having the successive dimensional subspaces:

$$\begin{array}{ccc} M(2) = e_2 B(\mathbb{Z}/p)_+^2 & \longrightarrow & e_2 \prod B W_+ \simeq e_1 B \mathbb{Z}/p_+ = M(1) \\ \downarrow & & \downarrow \\ * = e_2 B\{0\}_+ & \longrightarrow & e_2 \prod B\{0\}_+ \simeq e_1 B\{0\}_+ = M(0). \end{array}$$

This is equivalent to the Kuhn's exact sequence. Hence we obtain the following theorem.

Theorem 5.5. $e_n F_n(p) \cong \Sigma^{-n} D(n)$

From this, we obtain the action of the Steenrod operation on the bottom cells of $F_n(p)$.

References

- [1] V. G. Drinfel'd. Elliptic modules. (Russian) *Mat. Sb. (N.S.)* [94(136)] (1974), 594–627, 656. English translation: *Math. USSR-Sb.* 23 (1974), no. 4, 561–592 (1976).
- [2] J. P. C. Greenlees and N. P. Strickland. Varieties and local cohomology for chromatic group cohomology rings. Preprint.
- [3] M. Hazewinkel. Formal groups and applications. *Pure and Applied Mathematics*, 78. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1978.
- [4] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn and D. C. Ravenel. Generalised group characters and complex oriented cohomology theories. Preprint.
- [5] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn and D. C. Ravenel. Morava K -theories of classifying spaces and generalized characters for finite groups. *Algebraic topology (San Feliu de Guíxols, 1990)*, 186–209, *Lecture Notes in Math.*, 1509, Springer, Berlin, 1992.
- [6] N. M. Katz and B. Mazur. Arithmetic moduli of elliptic curves. *Annals of Mathematics Studies*, 108. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1985.
- [7] N. J. Kuhn. A Kahn–Priddy sequence and a conjecture of G. W. Whitehead. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **92** (1982), no. 3, 467–483.
- [8] N. J. Kuhn and S. B. Priddy. The transfer and Whitehead's conjecture. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **98** (1985), no. 3, 459–480.
- [9] J. Lubin and J. Tate. Formal moduli for one-parameter formal Lie groups. *Bull. Soc. Math. France* **94** 1966 49–59.
- [10] S. A. Mitchell and S. B. Priddy. Stable splittings derived from the Steinberg module. *Topology* **22** (1983), no. 3, 285–298.
- [11] N. P. Strickland. Finite subgroups of formal groups. *J. Pure Appl. Algebra* **121** (1997), no. 2, 161–208.

Enumeration of rational functions

V. V. Goryunov

The topological type of a meromorphic function on a curve with a non-fixed complex structure is its equivalence class up to homeomorphisms of the domain.

In 1891 Hurwitz published [7] a conjecture yielding the number of topological types of rational functions on \mathbb{C}^1 with fixed orders of poles and fixed critical values assuming the functions Morse on the complement to the poles. Recently there appeared two combinatorial proofs of the conjecture by Goulden and Jackson [6], and Strehl [16].

We give an independent proof, from the point of view of singularity theory, in the spirit of Arnold's investigations on Laurent polynomials. We are basing on the study of geometry of the moduli space of ordered tuples of points on the line and the properties of the Lyashko-Looijenga mapping (see [2, 11, 12]) which relates to a function the unordered set of its finite critical values. Also we show that the variety of topological types of Morse functions in our context is an Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ -space.

The approach of the paper looks promising for enumeration of topological types of arbitrary meromorphic functions on $\mathbb{C}P^1$ (cf. [10, 18, 19]).

The paper is organised as follows. In section 1 we construct a partial closure of a finite covering of the space of rational functions with fixed orders of poles. In section 2 we state various degrees of this closure. In section 3 we formulate the theorem on the non-degeneracy of the Lyashko-Looijenga mapping, calculate its degree and state the homotopy type of the complement to the bifurcation diagram of rational functions. In section 4 we relate the obtained degree to the enumeration of the topological types of rational functions, and to the combinatorial problems of enumeration of the graphs with ordered edges and so-called minimal factorisations of a permutation into transpositions. The original Hurwitz formula is that giving the number of such factorisations.

The results presented here were obtained jointly with S. K. Lando and are appearing, with all the proofs, in [5].

1 The function space

A function on $\mathbb{C}P^1$ with a simple pole at a point ξ is an affine coordinate z on the line, $z(\xi) = \infty$. Hence a meromorphic function with distinct poles $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{C}P^1$ is a function

$$p_1(z_1) + \dots + p_n(z_n) + \lambda_0, \quad (1)$$

where the z_i are (dependent) affine coordinates on the projective line, $z_i(\xi_i) = \infty$, $\lambda_0 \in \mathbf{C}$, the polynomials p_i have no free terms and their degrees are the orders k_i of the poles.

Let

$$a_{ij} = z_i(\xi_j), \quad j \neq i,$$

be the coordinates of the finite poles in the charts.

For $n > 1$, we get rid of the most of the ambiguity in our choice of the z_i fixing the origins by requiring

$$\sum_{j, j \neq i} a_{ij} = 0, \quad (2)$$

and leaving just a finite number of options after rescaling the z_i to make the highest coefficient of each of the p_i to be 1.

Since the coordinate change $z_i = z_i(z_j)$ is an automorphism of the projective line, the coordinates z_i of a point of \mathbf{CP}^1 in different charts are subject to the double-ratio relations in which $a_{ii} = a_{jj} = \infty$:

$$\frac{z_i - a_{ij}}{a_{il} - a_{ij}} \cdot \frac{a_{il} - a_{ii}}{z_i - a_{ii}} = \frac{z_j - a_{jj}}{a_{jl} - a_{jj}} \cdot \frac{a_{jl} - a_{ji}}{z_j - a_{ji}},$$

that is

$$(z_i - a_{ij})(z_j - a_{ji}) = (a_{il} - a_{ij})(a_{jl} - a_{ji}), \quad (3)$$

In particular, this holds for the coordinates of the pole ξ_m :

$$(a_{im} - a_{ij})(a_{jm} - a_{ji}) = (a_{il} - a_{ij})(a_{jl} - a_{ji}). \quad (4)$$

Equations (2) and (4) define in the space $\mathbf{C}^{n(n-1)}$ with coordinates a_{ij} a subvariety of dimension $2n - 3$. It is singular in codimension 5 [15]. Jan Stevens conjectured that it does not have embedded components which is still not proved for $n > 5$. To be on the safe side, we denote by \mathcal{V}_n the top-dimensional component of this variety (rather than the variety itself).

The main object of this work is the partial closure

$$\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1} \quad (5)$$

of the space of rational functions (1) in which \mathcal{V}_n represents various choices of the n poles and \mathbf{C}^{k-n+1} stands for the choices of λ_0 and of the coefficients of the monic polynomials p_i , $k = k_1 + \dots + k_n$.

Remark 1.1 A point of \mathcal{V}_n supplies parameters for the equations (3) of a rational curve in the coordinate space \mathbf{C}^n of the z_i . If, for each i , all the numbers a_{ij} are distinct, a rational function with the poles of the orders k_i is the restriction of the function (1) to this curve. If some of the numbers coincide, the corresponding curve in \mathbf{C}^n is singular. For example, we have the arrangement of all the n coordinate axes in \mathbf{C}^n when all the a_{ij} are zeros. Our function space is the space of restrictions of functions (1) from \mathbf{C}^n to curves (3).

2 Variety \mathcal{V}_n

2.1 Degree of \mathcal{V}_n

For our further considerations we need some information about the geometry of \mathcal{V}_n .

Theorem 2.1 *The degree of the variety \mathcal{V}_n , $n > 2$, is n^{n-3} .*

We are not proving this theorem here. The only fact we would like to mention is that the proof is based on the consideration of the variety

$$\mathcal{W}_n \subset \mathbb{C}P_1^{n-2} \times \dots \times \mathbb{C}P_n^{n-2},$$

where the $\mathbb{C}P_i^{n-2}$ are the projectivisations of the coordinate planes

$$\mathbb{C}^{n-1} = \{(a_{i1}, \dots, \widehat{a_{ii}}, \dots, a_{in})\},$$

and \mathcal{W}_n is the image of the variety \mathcal{V}_n under the projection from $\mathbb{C}^{n(n-1)}$:

$$\dim \mathcal{W}_n = \dim \mathcal{V}_n - n = n - 3.$$

We see that \mathcal{W}_n is the closure of the space of ordered n -tuples of distinct points on the projective line considered up to automorphisms of the line. Thus \mathcal{W}_n is a compactification of the moduli space of such tuples.

D. Panov has shown [13] that, in general, the space \mathcal{W}_n is different from the Grothendieck-Knudsen moduli space $\overline{M}_{0,n}$ [9, 8]. He observed that the stratum in \mathcal{W}_8 corresponding to 4 pairs of coinciding points is just a point, while in $\overline{M}_{0,8}$ this is a line.

2.2 Quasi-homogeneous degrees of \mathcal{V}_n

We will also need a quasi-homogeneous version of Theorem 2.1.

Consider a subvariety V of dimension r in the coordinate space \mathbb{C}^N . Assume V to be invariant under the one-parameter group of quasi-homogeneous transformations $(x_1, \dots, x_N) \mapsto (t^{w_1}x_1, \dots, t^{w_N}x_N)$, $t \in \mathbb{C} \setminus 0$, where the w_i are positive rational numbers which we call the *weights* of the coordinate functions. Let U be the set of common solutions of r equations

$$f_i(x) = c_i, \quad i = 1, \dots, r,$$

where the f_i are generic quasi-homogeneous functions of degrees d_i and the c_i constants. Assume that U is a complete intersection which meets V just transversally, and $\mu = \mu(d_1, \dots, d_r)$ is the number of points in $V \cap U$. Then the ratio

$$\mu / \prod_{i=1}^r d_i$$

does not depend on the choice of the d_i . This number will be called the *quasi-homogeneous degree of V (with respect to the weights w_j)*.

Example 2.2 The quasi-homogeneous degree of \mathbf{C}^N itself is $1/\prod_{j=1}^N w_j$.

Now we return to our variety \mathcal{V}_n . Take arbitrary natural numbers k_1, \dots, k_n , and assign weights $1/k_i$ to the coordinates a_{ij} on $\mathbf{C}^{n(n-1)} \supset \mathcal{V}_n$.

Theorem 2.3 *The quasi-homogeneous degree of \mathcal{V}_n , $n > 2$, with respect to the chosen weights of the coordinate functions is*

$$(k_1 + \dots + k_n)^{n-3} \cdot k_1 \cdot \dots \cdot k_n .$$

Again we give no proof of this fact here.

3 Lyashko-Looijenga mapping

3.1 Bifurcation diagram of rational functions

A generic point of the space $\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}$ (5), that is a generic polynomial (1) on a generic curve defined by the equations (3), is a degree k Morse function on a rational curve with n punctures. Due to the Riemann-Hurwitz formula, it has $k + n - 2$ distinct critical values. Note that the dimension of the base $\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}$ is also $k + n - 2$, the fact which is heavily exploited in what follows.

Definition 3.1 The set $\Sigma \subset \mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}$ of functions having less than $k + n - 2$ distinct critical values is called the *bifurcation diagram of rational functions*.

There are three generic ways to drop the number of critical values corresponding to the three components of the hypersurface Σ :

Σ_m , *Maxwell stratum*: two different critical points on a smooth curve are on the same level;

Σ_c , *caustic*: there is a degenerate critical point on a smooth curve;

Σ_s : the curve is not smooth.

Note that the pair $(\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}, \Sigma)$ is trivial in the λ_0 -direction.

3.2 The covering

The Viéte mapping identifies the set of all unordered r -tuples of complex numbers with the space \mathbf{C}^r of monic polynomials in one variable of degree r . This space contains the *discriminant* hypersurface Δ of polynomials with multiple roots.

Definition 3.2 *The Lyashko-Looijenga mapping for rational functions is the mapping*

$$\mathcal{L} : \mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1} \rightarrow \mathbf{C}^{k+n-2}$$

which sends a function on a curve to the unordered set of its critical values counted with the multiplicities.

Of course, at first this mapping is defined just as a mapping

$$\mathcal{L}' : (\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}) \setminus \Sigma \rightarrow \mathbf{C}^{k+n-2} \setminus \Delta$$

which sends a Morse function on a smooth curve to an unordered $(k+n-2)$ -tuple of distinct numbers. Then one can easily verify (see, e.g. [4, 1]) that \mathcal{L}' extends to generic points of Σ . For example, the value of a generic function at a node has to be counted as critical of multiplicity 2. In what follows we are using both \mathcal{L} and \mathcal{L}' .

Theorem 3.3 *The Lyashko-Looijenga mapping \mathcal{L} is a proper finite covering. As a mapping from $(\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}) \setminus \Sigma$ to $\mathbf{C}^{k+n-2} \setminus \Delta$ it has no branching.*

The version of this theorem for ordinary polynomials in one variable is the theorem of Lyashko and Looijenga [3, 11]. The case of Laurent polynomials was considered in [4] and the $n > 2$ case in [5]. Here are some corollaries.

Corollary 3.4 *The complement $(\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}) \setminus \Sigma$ to the bifurcation diagram of rational functions is an Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ -space, where π is a subgroup of index*

$$k^{n-3}(k+n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{k_i^{k_i}}{(k_i-1)!}$$

in the Artin group $B(k+n-2)$ of braids on $k+n-2$ threads.

Proof. We have to show that the number in the corollary is the degree of the Lyashko-Looijenga mapping.

The mapping \mathcal{L} is quasi-homogenous: its coordinate functions get weights $1, 2, \dots, k+n-2$ when we assign the following weights to the parameters involved (recall the settings of (1) and (3)):

$$\text{wt } a_{ij} = 1/k_i, \quad \text{wt } \lambda_{is} = s/k_i, \quad \text{wt } \lambda_0 = 1.$$

Since the quasi-homogenous degree of a direct product of two varieties is the product of their quasi-homogenous degrees, applying Theorem 2.3 and Example 2.2 we have

$$\begin{aligned} \deg \mathcal{L} &= (k+n-2)! \cdot \deg(\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1}) \\ &= (k+n-2)! \cdot \deg \mathcal{V}_n \cdot \deg \mathbf{C}^{k-n+1} \\ &= (k+n-2)! \cdot k^{n-3} \prod_{i=1}^n k_i / \prod_{i=1}^n \frac{(k_i-1)!}{k_i^{k_i-1}} \end{aligned}$$

which is the required number. □

Remark 3.5 The corollary remains valid for both ordinary, with $k > 1$, and Laurent polynomials [3, 11, 4, 1] in spite of those cases not being covered by Theorem 2.3.

Remark 3.6 The family of functions (1) on the family of curves (2–3) which we studied in this section is a miniversal deformation of the function $z_1^{k_1} + \dots + z_n^{k_n}$ on the arrangement of the coordinate axes in \mathbf{C}^n for the natural equivalence of functions on curves. The setting here involves deforming both a function and a curve. This equivalence will be a subject of a separate paper.

4 Topological types of rational functions

4.1 The enumeration

Consider two holomorphic mappings, f and f' , from closed complex curves Γ and Γ' to \mathbf{CP}^1 . We say that they are of *the same topological type* if there exists a commutative diagram

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \longrightarrow & \Gamma' \\ f \searrow & & \swarrow f' \\ & \mathbf{CP}^1 & \end{array}$$

in which the horizontal arrow is a homeomorphism.

Mark a point (infinity) on the \mathbf{CP}^1 and call its inverse images *poles*.

Theorem 4.1 *The number of topological types of meromorphic functions on \mathbf{CP}^1 with poles of orders k_1, \dots, k_n and fixed critical values, assuming that on each finite critical level there is just one critical point and this point is Morse, is*

$$M(k_1, \dots, k_n) = \frac{k^{n-3} (k+n-2)!}{N} \prod_{i=1}^n \frac{k_i^{k_i}}{k_i!}.$$

Here $k = k_1 + \dots + k_n$ and $N = n_1! \cdot \dots \cdot n_s!$, where the n_j are the cardinalities of the sets of equal numbers among the k_i , $n_1 + \dots + n_s = n$.

Remark 4.2 To be precise there are three cases not covered by the theorem: $M(1) = M(2) = M(1, 1) = 1$.

Proof. We assume $n > 2$. For the cases $n = 1, 2$ see [1].

All the topological types of Theorem 4.1 are present in the fibre of the Lyashko-Looijenga mapping \mathcal{L}' . The points in the fibre giving the same type are obtained from each other by permuting the coordinates z_j in \mathbf{C}^n (see (1)) corresponding to the poles of the same order, and by multiplying z_i by a root of unity of order k_i . This provides the action of the group

$$G = S_{n_1} \times \dots \times S_{n_r} \times \mathbf{Z}_{k_1} \times \dots \times \mathbf{Z}_{k_n}$$

on $\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1} \setminus \Sigma$ (here S_q is the full symmetric group on q elements). The action is easily verified to be free. The Lyashko-Looijenga mapping \mathcal{L}' factors through the factorisation π_G by this action:

$$\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1} \setminus \Sigma \xrightarrow{\pi_G} \mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n} \xrightarrow{L} \mathbf{C}^{k+n-2} \setminus \Delta ,$$

$$\mathcal{L}' = L \circ \pi_G .$$

Here $\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}$ is the variety of all the topological types when the distinct Morse critical levels vary. The number of types under the question is the degree of the covering L which is the ratio of the degree of \mathcal{L}' and order of G . Now the claim follows from Corollary 3.4. \square

As a by-product we have obtained:

Corollary 4.3 (cf. [1]) *The variety $\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}$ of all topological types of meromorphic functions on \mathbf{CP}^1 with poles of orders k_1, \dots, k_n , $k = k_1 + \dots + k_n$, and with $k+n-2$ distinct critical values is naturally covered by the space $\mathcal{V}_n \times \mathbf{C}^{k-n+1} \setminus \Sigma$ of Morse rational functions with the poles of the same orders. The degree of this unramified covering is*

$$n_1! \cdot \dots \cdot n_s! \cdot \prod_{i=1}^n k_i .$$

Moreover, $\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}$ is itself the space of an unramified covering of $\mathbf{C}^{k+n-2} \setminus \Delta$ of degree $M(k_1, \dots, k_n)$.

Corollary 4.4 *The variety $\mathcal{T}_{k_1, \dots, k_n}$ of the topological types is an Eilenberg-MacLane $K(\pi, 1)$ -space for a subgroup π of index $M(k_1, \dots, k_n)$ in the braid group $B(k+n-2)$.*

4.2 Graphs associated with meromorphic functions

A way to associate a graph with a meromorphic function on a complex curve was suggested first by Zdravkovska in [17]. This approach allows one to establish an equivalence between the topological types of meromorphic functions and classification of certain graphs. Our exposition below follows that of Arnold [1].

Consider a holomorphic degree k mapping $f : \Gamma \rightarrow \mathbf{CP}^1$ of a connected compact Riemann curve. Assume it is a Morse function on the complement to the poles. Take an arbitrary finite non-critical value t_* of f . Its inverse images will be the k vertices of our graph. The number of the edges of the graph is going to be equal to the number m of finite critical values of f .

The naturally ordered edges come out when we connect t_* with all the finite critical values t_1, \dots, t_m of f by a system of m paths t_*t_i in \mathbf{C} without mutual and self-intersections. Here, after choosing the 1st critical value, the indices are assigned to the others according to the counter-clockwise order in which the paths leave t_* . Now the edge number i connects the two points of $f^{-1}(t_*)$ merging in the homotopy of the fibres $f^{-1}(t)$ while t follows the path t_*t_i .

The graph thus obtained is connected since Γ was such. It follows immediately from the Riemann theorem that any connected graph with ordered edges can be obtained in this way. By the Riemann-Hurwitz theorem, the genus g of the curve Γ involved is determined by the formula

$$2 - 2g = k - m + n,$$

where n is the number of poles of f .

The monodromy interpretation relates to the i th edge of the graph the transposition τ_i of its endpoints. The permutation $\sigma = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1 \in S_k$ is called the *Coxeter element* of the graph [1]. If k_1, \dots, k_n are the orders of the poles of f , $k_1 + \dots + k_n = k$, then σ has cyclic type (k_1, \dots, k_n) , that is it is the product of n independent cycles of these orders.

Theorem 4.5 ([1]) *Consider meromorphic functions on connected Riemann curves which have n poles of orders k_1, \dots, k_n , are Morse on the complement to the poles and have m fixed finite critical values. The number of topological types of such functions is equal to the number of graphs with $k_1 + \dots + k_n$ vertices and m ordered edges whose Coxeter element has cyclic type (k_1, \dots, k_n) .*

Thus the number $M(k_1, \dots, k_n)$ in Theorem 4.1 is the number of graphs with k vertices and $k + n - 2$ ordered edges whose Coxeter element has cyclic type (k_1, \dots, k_n) , $k_1 + \dots + k_n = k$. In fact, at this point the history developed in the opposite direction: for the first time this number came out as the number of the topological types within the interpretation given in [14] to the combinatorial result of Goulden and Jackson [6] related to the enumeration of graphs with ordered edges.

The setting of [6], repeating that by Hurwitz [7], was as follows.

Consider a permutation σ of cyclic type (k_1, \dots, k_n) on the set $\{1, 2, \dots, k\}$, $k = k_1 + \dots + k_n$. Denote by $\widehat{M}(\sigma)$ the number of its factorisations into a product of transpositions $\sigma = \tau_m \circ \dots \circ \tau_1$ such that

- τ_1, \dots, τ_m generate the symmetric group S_k ;
- m is minimal with respect to the previous requirement.

The first requirement means that σ is the Coxeter element $C(\Theta)$ of some connected edge-ordered graph Θ (equipped with an appropriate order of its vertices so that $\sigma = C(\Theta)$). The second requirement corresponds to the case of the genus zero curve.

Theorem 4.6 ([6], Hurwitz conjecture [7])

$$\widehat{M}(\sigma) = k^{n-3}(k+n-2)! \prod_{i=1}^n \frac{k_i^{k_i}}{(k_i-1)!}.$$

Proof. To obtain $\widehat{M}(\sigma)$ from the number $M(k_1, \dots, k_n)$ of the graphs with ordered edges is to count the ambiguity in ordering the vertices of the graph Θ for which $C(\Theta) = \sigma$:

- having a cycle of length k_i in σ we can assign its elements in the proper order to the vertices of Θ participating in any cycle of $C(\Theta)$ of the same length;
- this proper order is defined just up to a cyclic permutation. □

The given argument just repeats the factorisation π_G of the previous section.

Remark 4.7 Note that $\widehat{M}(\sigma)$ is the number of Corollary 3.4, that is the degree of the Lyashko-Looijenga mapping \mathcal{L} .

References

- [1] V. I. Arnold, *Topological classification of complex trigonometric polynomials and the combinatorics of graphs with an identical number of vertices and edges*, Functional Analysis and its Applications **30** (1996), 1–14.
- [2] V. I. Arnold, *Critical points of functions and the classification of caustics*, Uspekhi Mat. Nauk **29** (1974), no.3, 243–244 (in Russian).
- [3] V. I. Arnold, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of differentiable mappings*, vol.2, Birkhäuser, Boston, 1988.
- [4] V. V. Goryunov, *Geometry of bifurcation diagrams of simple projections onto the line*, Functional Analysis and its Applications **15** (1981), 77–82.
- [5] V. V. Goryunov and S. K. Lando, *On enumeration of meromorphic functions on the line*, to appear in Translations of the AMS (2).
- [6] I. P. Goulden and D. M. Jackson, *Transitive factorisations into transpositions and holomorphic mappings on the sphere*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 51–60.
- [7] A. Hurwitz, *Über Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten*, Mathematische Annalen **39** (1891), 1–66.
- [8] M. M. Kapranov, *Veronese curves and Grothendieck-Knudsen moduli space $\overline{M}_{0,n}$* , J. Algebraic Geometry **2** (1993), 239–262.
- [9] F. F. Knudsen, *The projectivity of moduli spaces of stable curves. II: the stacks $M_{g,n}$* , Math. Scand. **52** (1983), 161–199.
- [10] S. K. Lando and D. Zvonkine, *On multiplicities of the Lyashko–Looijenga mapping on the discriminant strata*, preprint, 1997. To appear in Functional Analysis and its Applications.

- [11] E. J. N. Looijenga, *The complement of the bifurcation variety of a simple singularity*, Invent. Math. **23** (1974), 105–116.
- [12] O. V. Lyashko, *Geometry of bifurcation diagrams*, J. Soviet Math. **27** (1984), 2736–2759.
- [13] D. Panov, private communication.
- [14] B. Shapiro, M. Shapiro and A. Vainshtein, *Ramified coverings of S^2 with one degenerate branching point and enumeration of edge-ordered graphs*, in: ‘Topics in Singularity Theory. V. I. Arnold’s 60th Anniversary Collection’ (A. Khovanskii, A. Varchenko and V. Vassiliev, eds.), American Mathematical Society Translations (2) **180** (1997), AMS, Providence, RI, 219–228.
- [15] J. Stevens, *The versal deformation of universal curve singularities*, Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg **63** (1993), 197–213.
- [16] V. Strehl, *Minimal transitive products of transpositions — the reconstruction of a proof of A. Hurwitz*, Sémin. Lothar. Combin. **37** (1996), 12 pp. (electronic).
- [17] S. Zdravkovska, *The topological classification of polynomial mappings*, Uspekhi Mat. Nauk **25** (1970), no.4, 179–180 (in Russian).
- [18] D. Zvonkine, *Multiplicities of the Lyashko–Looijenga map on its strata*, C. R. Acad. Sci. Paris **324** (1997), Série I, 1349–1353.
- [19] D. Zvonkine, *Transversal multiplicities of the Lyashko–Looijenga map*, C. R. Acad. Sci. Paris **325** (1997), Série I, 589–594.

V. V. Goryunov
Department of Mathematical Sciences,
Division of Pure Mathematics,
The University of Liverpool, Liverpool L69 3BX, UK
 E-mail: goryunov@liv.ac.uk

The Kauffman bracket skein algebra of a surface times the interval has no zero divisors.

Józef H. Przytycki

Department of Mathematics, George Washington University, Washington, DC
20052, USA e-mail: przytyck@gwu.edu

Summary. Let M be an oriented 3-manifold. We consider the free module of formal linear combinations of unoriented framed links in M , up to ambient isotopy. The coefficients are taken from a commutative ring with identity, R , with a fixed invertible element A . The Kauffman bracket skein module is the quotient of this module by the submodule generated by the local skein relations: $L_+ = AL_0 + A^{-1}L_\infty$ and $(L \cup T_1) = (-A^2 - A^{-2})L$, where T_1 is the trivial framed knot. In the case of M being a product of a surface and the interval, the Kauffman bracket skein module has an algebra structure. We prove that this algebra has no zero divisors, as long as the ring R has no zero divisors. This result allows us to prove, for a surface group, the conjecture by Bullock, that the coordinate ring of the $SL_2(C)$ character varieties of the group is equal to the Kauffman bracket skein algebra for $R = C$ and $A = -1$. We show also that the center of the Kauffman bracket skein algebra is generated by the boundary components of the surface. (This is a joint work with A.Sikora).

1 Introduction

Skein modules are the main objects of an algebraic topology based on knots (or position). In the same spirit as Leibniz we would call our approach *algebra situs* (位置代数).

Skein modules are quotients of free modules over ambient isotopy classes of links in a 3-manifold by properly chosen local (skein) relations.

The skein module based on the Kauffman bracket skein relation is, so far, the most extensively studied object of the *algebraic topology based on knots*. We describe

in this section the basic properties of the Kauffman Bracket Skein Module (KBSM) and list manifolds for which the structure of the module is known.

We are mostly interested in a manifold which is the product of a surface with the interval. For such a manifold KBSM has a structure of algebra and we prove that it has no zero divisors. We identify also the center of the algebra.

The Kauffman bracket skein module, $\mathcal{S}_{2,\infty}(M)$, of an oriented 3-manifold M is defined as follows [Pr-1, H-P-1]:

Definition 1.1 *Let M be an oriented 3-manifold, \mathcal{L}_{fr} the set of unoriented framed links in M (including the empty knot, \emptyset), R any commutative ring with identity and A an invertible element in R . Let $S_{2,\infty}$ be the submodule of $R\mathcal{L}_{fr}$ generated by skein expressions $L_+ - AL_0 - A^{-1}L_\infty$, where the triple L_+, L_0, L_∞ is presented in Fig.1.1, and $L \sqcup T_1 + (A^2 + A^{-2})L$, where T_1 denotes the trivial framed knot. We define the Kauffman bracket skein module, $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A)$, as the quotient $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A) = R\mathcal{L}_{fr}/S_{2,\infty}$.*

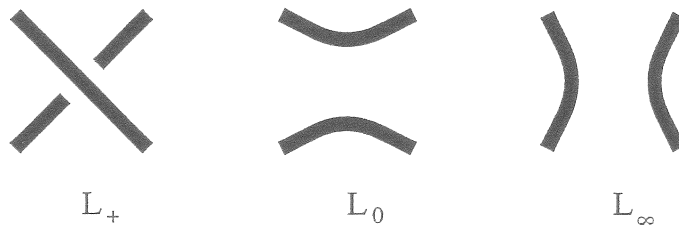


Fig. 1.1.

Notice that $L^{(1)} = -A^3L$ in $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A)$, where $L^{(1)}$ denotes a link obtained from L by twisting the framing of L by a full twist in a positive direction. We call this the framing relation. We use the simplified notation $\mathcal{S}_{2,\infty}(M)$ for $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; \mathbb{Z}[A^{\pm 1}], A)$.

Proposition 1.2 (1) *(Universal coefficients property)*

Let $r : R \rightarrow R'$ be a homomorphism of rings (commutative with 1). We can think of R' as an R module. Then the identity map on \mathcal{L}_{fr} induces isomorphism of R' (and R) modules:

$$\mathcal{S}_{2,\infty}(M; R', r(A)) \simeq \mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A) \otimes_R R'.$$

(2) *An embedding of 3-manifolds $f : M \rightarrow N$ induces the homomorphism of skein modules $f_* : \mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A) \rightarrow \mathcal{S}_{2,\infty}(N; R, A)$. This leads to a functor from the*

category of 3-manifolds and embeddings to the category of R modules.

If N is obtained from M by adding to it 2 and 3-handles, then f_* is an epimorphism. Furthermore the kernel of f is generated by relations yielded by 2-handle slidings.

- (4) If $M = F \times I$ for an oriented surface F and an interval I , then $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A)$ is an R algebra with \emptyset as an identity element and $L_1 \cdot L_2$ defined by placing L_1 above L_2 .

An embedding of oriented surfaces $f : F \rightarrow F'$ induces the homomorphism of skein algebras $f_* : \mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; R, A) \rightarrow \mathcal{S}_{2,\infty}(F' \times I; R, A)$. This leads to a functor from the category of surfaces and embeddings to the category of R algebras.

- (5) If $A = -1$ then for any M , $\mathcal{S}_{2,\infty}(M, R, -1)$ is an R -algebra. $L_1 \cdot L_2$ is defined to be a disjoint sum of links (because of $A = -1$ it does not depend on the relative position of L_1 with respect to L_2). The algebra depends only on the fundamental group of a manifold. In particular if $f : M \rightarrow N$ is a homotopy equivalence then $f_* : \mathcal{S}_{2,\infty}(M, R, -1) \rightarrow \mathcal{S}_{2,\infty}(N, R, -1)$ is an isomorphism of algebras.

- (6) The skein algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F_{0,2} \times I; R, A)$ is isomorphic to the polynomial algebra $R[\alpha]$ where α corresponds to a core of the annulus $F_{0,2}$.

The skein algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F_{0,3} \times I; R, A)$ is isomorphic to the polynomial algebra $R[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$ where the isomorphism sends boundary curves of $F_{0,3}$ to $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, respectively. $F_{g,d}$ denotes a surface of genus g and d boundary components.

In the next theorem we list manifolds for which the exact structure of the Kauffman bracket skein module has been computed.

Theorem 1.3 ([Ka, Pr-1, H-P-2, H-P-3, Bu-1]) (a) $\mathcal{S}_{2,\infty}(S^3) = Z[A^{\pm 1}]$, more precisely: \emptyset is the generator of the module and $L = \langle L \rangle T_1 = (-A^2 - A^{-2}) \langle L \rangle > \emptyset$ where $\langle L \rangle$ is the Kauffman bracket polynomial of a framed link L .

- (b) Let M be an oriented 3-manifold which is either equal to $F \times I$, where F is an oriented surface, or equal to a twisted I bundle over F ($F \hat{\times} I$), where F is an unoriented surface. Then the KBSM, $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; R, A)$, is a free R -module with a basis $B(F)$ consisting of links in F without contractible components (but including the empty knot).

- (c) $\mathcal{S}_{2,\infty}(L(p, q))$ is a free $Z[A^{\pm 1}]$ module and it has $[p/2] + 1$ generators, where $[x]$ denotes the integer part of x .

$$(d) \mathcal{S}_{2,\infty}(S^1 \times S^2) = Z[A^{\pm 1}] \oplus \bigoplus_{i=1}^{\infty} Z[A^{\pm 1}]/(1 - A^{2i+4})$$

(e) The skein module of the complement of the torus knot of type $(k, 2)$ is a free $Z[A^{\pm 1}]$ -module generated by links $U_{i,j}$ ($i \geq 0, \frac{k-1}{2} \geq j \geq 0$), where $U_{i,j}$ is composed of i meridians and j curves λ , as illustrated in Fig. 1.2.

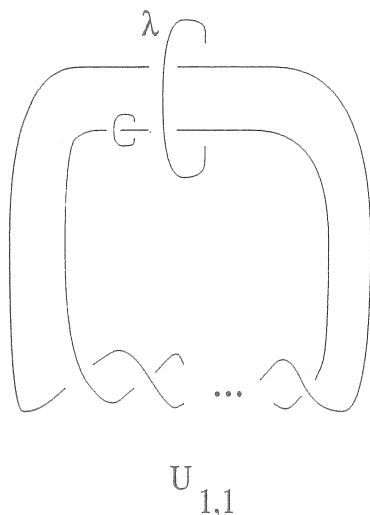


Fig. 1.2.

2 Integral domain of the skein algebra of a surface

The understanding of the Kauffman bracket skein module of the product of a surface and the interval (including handlebodies) is the first step to understand KBSM of a general 3-manifold. Furthermore the case of $F \times I$ is relatively easy to understand because we can project links onto the surface and work with diagrams of links. The structure of the Kauffman bracket skein algebra of $F \times I$ is more difficult to describe, but very useful, because the KBSM of a 3-manifold with boundary can be treated as a module over the (left) Kauffman bracket skein algebra of the regular neighborhood of the boundary¹. In the case of the surface $F_{0,n}$, $n \leq 3$ the algebra is commutative (see Proposition 1.2(6.)). Some other case were described in [B-P]. For example in the case of a torus ($T = F_{1,0}$), we get:

¹I heard this idea, for the first time, about 10 years ago from D.Yetter. Very nice application of it is given in [F-G].

Theorem 2.1 $\mathcal{S}_{2,\infty}(T \times I; R, A) = R \langle x, y, z \rangle / I_{1,0}$, where $I_{1,0}$ is the ideal generated by A -commutators

$$Axy - A^{-1}yx - (A^2 - A^{-2})z$$

$$Ayz - A^{-1}zy - (A^2 - A^{-2})x$$

$$Azx - A^{-1}xz - (A^2 - A^{-2})y$$

and the long relation

$$A^2x^2 + A^{-2}y^2 + A^2z^2 - Axyz - 2(A^2 + A^{-2}).$$

Corollary 2.2 (i) $\mathcal{S}_{2,\infty}(T \times I; Z, -1) = Z[x, y, z]/I$, where I is the ideal generated by the long relation

$$x^2 + y^2 + z^2 + xyz - 4.$$

(ii) $\mathcal{S}_{2,\infty}(T \times I; Z, -1)$ embeds in the group algebra $ZH_1(T) = Z[a^{\pm 1}, b^{\pm 1}]$ where $x \rightarrow -a - a^{-1}$, $y \rightarrow -b - b^{-1}$, and $z \rightarrow -ab - a^{-1}b^{-1}$.

(iii) $\mathcal{S}_{2,\infty}(T \times I; Z, -1)$ is a unique factorization domain.

We sketch a proof, now, that the Kauffman bracket skein algebra of the Cartesian product of an oriented surface cross interval has no zero divisors. This, combined with [Bu-5, P-S-2], guarantee that the skein algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; C, -1)$ is isomorphic to the coordinate ring of the $SL(2, C)$ character variety of the group $\pi_1(F)$, solving Bullock conjecture for this case.

Theorem 2.3 Any zero divisor of $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; R, A)$ is of the form rm where r is a zero divisor of R , for F being an oriented 2-manifold. In particular if the ring R has no zero divisors then the skein algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; R, A)$ has no zero divisors.

Corollary 2.4 If the ring R has no nilpotent elements then the skein algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; R, A)$ has no nilpotent elements.

Theorem 2.5 The center of the algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; Z[A^{\pm 1}], A)$ is a subalgebra generated by the boundary components of F .

Theorem 2.6

Let R be a ring without zero divisors. Suppose that F is an unorientable surface of an even, negative Euler characteristic, M is a twisted I bundle over F ($M = F \hat{\times} I$), and $A = \pm 1$. Then the skein algebra $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \hat{\times} I; R, A)$ has no zero divisors.

The above theorem is not true for a Klein bottle, KB . One can check that

$$\mathcal{S}_{2,\infty}(KB \hat{\times} I; R, -1) \simeq R[x, y, z]/(x^2 = z^2, xy = 2z, zy = 2x).$$

In particular

- (i) for 2 invertible in R it reduces to $R[x, y]/(x(y^2 - 4) = 0)$, thus it has zero divisors but no nilpotent elements
- (ii) For $2 = 0$ in R the skein algebra is equal to:
 $R[x, y, z]/(x^2 = z^2, xy = zy = 0)$.

In all cases $R[y]$ embeds in the algebra.

Sketch of the proof of Theorem 2.3

Because of the universal coefficients theorem [P-S-1] it suffice to work with the ring $R = Z[A^{\pm 1}]$. The case of torus requires a separated proof and follows from Theorem 2.1 (compare[B-P]). Assume now that $\pi_1(F)$ is not abelian. Let $F = F_{g,d}$ denote the oriented surface of genus g with d boundary components. Let $\mathcal{B}(F)$ denote a basis of $\mathcal{S}_{2,\infty}(F \times I; R, A)$, being a set of links (multicurves) on F without trivial (null-homotopic) component but allowing an empty curve [Pr-1, H-P-2]. Furthermore let $\mathcal{B}'(F)$ denote the subset of $\mathcal{B}(F)$ excluding parallel to boundary components (but still allowing an empty curve).

In the description of the set of simple closed curves on an oriented surfaces, we follow [Pe, FLP]. In a 1922 Breslau lecture M.Dehn [De], described a one-to-one correspondence between the set $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ of multicurves in a surface of negative Euler characteristic and a subset of $Z^{6g-6+2d}$. Namely:

Definition 2.7 (pants decomposition)

Let $A = F_{0,2} = S^1 \times [-1, 1]$ denote the standard oriented annulus and $P = F_{0,3}$ a standard oriented pair of pants (disc with two holes). Pants decomposition $\{C_i\}$ of the surface F is a multiple curve in F so that each component R of $F - \bigcup\{C_i\}$ is homeomorphic to the interior of the pair of pants. We consider also a parametrized pants decomposition. Namely we choose a small tubular neighborhood $V(C_i)$ for any curve C_i of the pant decomposition and a characteristic map (homeomorphism) $\phi_i : A \rightarrow V(C_i)$. We choose also a characteristic map $\varphi_\alpha : P \rightarrow R_\alpha$ for any pair of pants component P_α of $F - \bigcup \text{int}\{V(C_i)\}$.

For $F = F_{g,d}$, there are $3g - 3 + d$ curves $\{C_i\}$ in a pants decomposition.

Theorem 2.8 (Dehn's Theorem)

There is a parametrization of the collection $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ by a subset of $(Z_+ \cup 0)^N \times Z^N$, where $N = 3g - 3 + d$. The parameter $(m_1, \dots, m_N) \times (t_1, \dots, t_N)$ correspond to a multicurve if and only if the following conditions are satisfied.

(a) If $m_i = 0$, then $t_i \geq 0$, for each $i = 1, \dots, N$.

(b) If $C_{i_1}, C_{i_2}, C_{i_3}$ are curves which together bound a pair of pants of the decomposition of $F_{g,d}$, then the sum $m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3}$ is even. In particular if C_i separates $F_{g,d}$ then m_i is even. (m_i is the geometric crossing number of a multicurve with C_i , and t_i corresponds to the twist along C_i .)

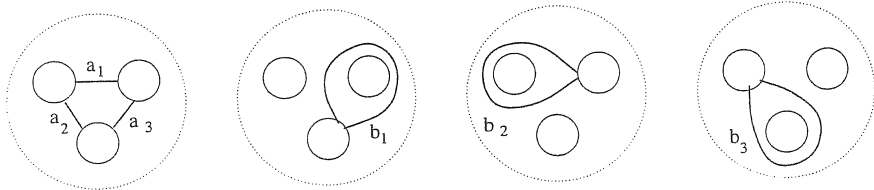
We order our curves in $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ lexicographically so that m-parameters are more important than t-parameters. That is $(m_1, \dots, m_N, t_1, \dots, t_N) < (m'_1, \dots, m'_N, t'_1, \dots, t'_N)$ if there is j such that either $m_i = m'_i$ for $i \leq j$ and $m_j < m'_j$, or $m_i = m'_i$ for any i and $t_i = t'_i$ for $i \leq j$ and $t_j < t'_j$.

Any element of the submodule of the skein module span by $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ has a leading term: the coordinate of the curve in $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ which is first in the lexicographical order.

Theorem 2.9 *If we multiply two curves then the leading term of the product corresponds to the sum of leading terms of its factors and the coefficient of the leading term of the product is equal (up to $\pm A^j$) to the product of leading coefficients.*

To prove this it suffice to analyze the product of standard arcs in a pair of pants, P , and non-boundary parallel multi-arcs in an annulus.

For this we need standard arcs on P and the annulus. For P our choice is illustrated in Fig. 2.1 and for annulus in 2.2(a).



Model curves on a sphere with 3 holes (pants)

Fig. 2.1.

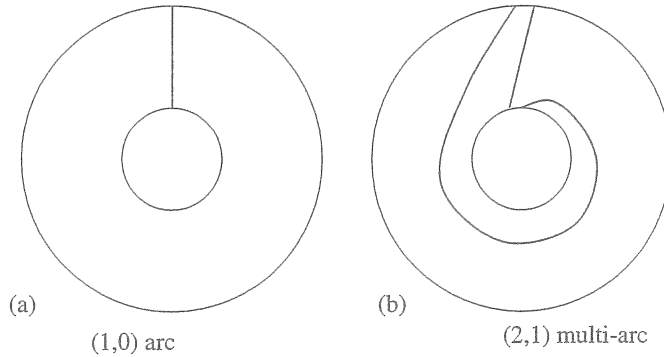


Fig. 2.2.

For the twist number we use the orientation of F , so every annulus to have a notion of a positive Dehn twist, Fig. 2.3.

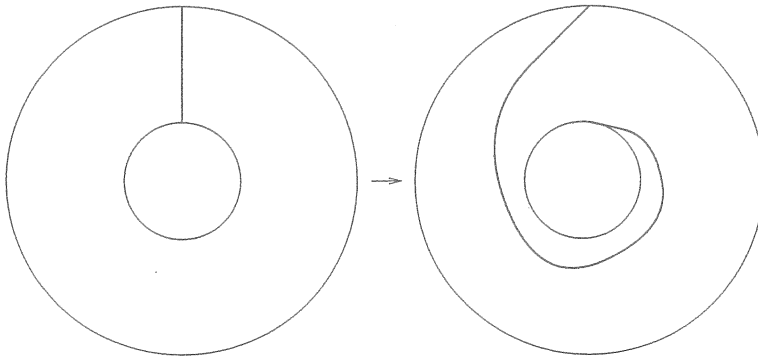


Fig. 2.3.

First notice that It gives immediately the fact that the skein module has no zero divisors. Furthermore, if $R = \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$ then for any element of $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ we can find another element of $\mathcal{B}'(F_{g,d})$ such the product of leading coefficients has “an additional” factor $\pm A^s (s > 0)$ so if we change order of elements we get $\pm A^{-s}$. From this follows that the center of the Kauffman bracket skein algebra is generated by boundary components.

Corollary 2.10 ([P-S-2])

Suppose that $M = F \bar{\times} I$, that is F is an oriented surface and $M = F \times I$ or F is an unorientable surface of an even Euler characteristic and M is a twisted I bundle over F . Then

1. $\mathcal{S}_{2,\infty}(M; C, -1) \simeq C[X(\pi_1(F))]$, where $C[X(\pi_1(F))]$ denotes the coordinate ring of the $SL_2(C)$ -character variety of the group $\pi_1(F)$.
2. The $SL_2(C)$ -character variety $X(\pi_1(F))$ is an irreducible affine algebraic set for F different from a Klein bottle.

References

- [Bu-1] D.Bullock, The $(2, \infty)$ -skein module of the complement of a $(2, 2p+1)$ torus knot, *Journal of Knot theory and its Ramifications*, 4(4) 1995, 619-632.
- [Bu-2] D.Bullock, A finite set of generators for the Kauffman bracket skein algebra, *Math.Z.*, to appear (in the preprint form the paper had the title: An integral invariant of 3-manifolds derived from the Kauffman bracket).
- [Bu-3] D.Bullock, Estimating a skein module with $SL_2(C)$ characters, *Proc. Amer. Math. Soc.* 125(6), 1997, 1835-1839.
- [Bu-4] D.Bullock, Estimating the states of the Kauffman bracket skein module, Banach Center Publications, Vol. 42, *Knot Theory*, 1988, 23-28.
- [Bu-5] D.Bullock, Rings of $SL_2(C)$ -characters and the Kauffman bracket skein module, *Comment. Math.Helv.*, 72(4), 1997, 521-542.
- [B-P] D.Bullock, J.H. Przytycki, Multiplicative structure of Kauffman bracket skein module quantizations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear; (in the preprint form the paper had the title: Kauffman bracket skein module quantization of symmetric algebra and $so(3)$).
- [De] M.Dehn, Lectures Notes from Breslau, 1922, The Archives of the University of Texas at Austin.
- [De-1] M.Dehn, Die Gruppe der Abbildungsklassen, *Acta Math.*, 69, 1938, 135-206.
- [FLP] A.Fathi, F.Laudenbach, V.Poenaru, et al., "Travaux de Thurston sur les surfaces", Asterisque 66-67, Societe Mathematique de France, Paris, 1979.

- [F-G] C.Frohman, R.Gelca, Skein modules and the noncommutative torus, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [Ho] R.D. Horowitz, Characters of free groups represented in two-dimensional special linear group, *Comm. Pure and Appl. Math.* 25, 1972, 635-649.
- [H-P-1] J. Hoste, J.H. Przytycki, A survey of skein modules of 3-manifolds; in *Knots 90, Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Related Topics*, Osaka (Japan), August 15-19, 1990, Editor A. Kawauchi, Walter de Gruyter 1992, 363-379.
- [H-P-2] J. Hoste, J.H. Przytycki, The $(2, \infty)$ -skein module of lens spaces; a generalization of the Jones polynomial, *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*, 2(3), 1993, 321-333.
- [H-P-3] J. Hoste, J.H. Przytycki, The Kauffman bracket skein module of $S^1 \times S^2$, *Math. Z.*, 220(1), 1995, 63-73.
- [Ka] L.H.Kauffman, State models and the Jones polynomial, *Topology*, 26, 1987, 395-407.
- [Ma] W. Magnus, Rings of Fricke characters and automorphism groups of free groups, *Math. Z.*, 170, 1980, 91-103.
- [Pe] R.C.Penner with J.L.Harer, *Combinatorics of Train Tracks*, Annals of Mathematics Studies, 125, Princeton University Press, 1992.
- [Pr-1] J.H. Przytycki, Skein modules of 3-manifolds, *Bull. Polish Acad. Science*, 39(1-2), 1991, 91-100.
- [Pr-2] J.H. Przytycki, *Fundamentals of Kauffman bracket skein modules*, *Kobe J. Math.*, 1999, to appear.
- [P-S-1] J.H. Przytycki, A.S. Sikora, Skein algebra of a group, Banach Center Publications, Vol. 42, *Knot Theory*, 1988, 297-306.
- [P-S-2] J.H. Przytycki, A.S. Sikora, On skein algebras and $Sl_2(C)$ -character varieties, *Topology*, to appear.
- [P-S-3] J.H. Przytycki, A.S. Sikora, Skein algebras of surfaces, in preparation.

Calculations of Kontsevich's universal finite type invariant of knots via surgery formula and Habiro's clasper moves.

Andrew Kriker

Tokyo institute of Technology

The Kontsevich integral, an invariant of oriented knots taking values in a certain Hopf algebra of graphs, is a truly remarkable artefact from mathematical physics [Kon]. The notorious difficulty of actually calculating it explicitly is the flip-side of its highly structured nature: its universality with respect to quantum group (and other Vassiliev) knot invariants, and its rich combinatorial representations of constructions from the topology of knots, like connect-sum [BN], tangle decomposition [LM], cabling [L] (see [W]) and surgery presentation [LMO]. We shall present some of this structure in Sections 2,3 and 4.

We have been given a new such construction by Kazuo Habiro, *clasper moves* [Hab]. Clasper moves are intimately connected with the general theory of Vassiliev invariants, and more specifically with the Kontsevich integral. We will explore the connection in this work (see [K] for details). Section 5 recalls Habiro's construction, and illustrates the structural properties of the Kontsevich integral mentioned above by exhibiting a calculational proof of a basic tool of clasper theory, the realisation theorem.

Our task is to find meaningful ways to dissect and calculate the Kontsevich integral. In Section 6, we will introduce "approximations" of the Kontsevich integral by composing it with certain projections defined using a combinatorial filtration on web diagrams (the *surplus filtration*). We will see that the effect of twisting a knot by a clasper move will lie a certain depth in the filtration, according to a combinatorial property of the clasper. This extends the realisation theorem. This will translate to certain statements about the effect of twisting with a clasper on the *extended Jones polynomial* of a knot.

The first non-trivial approximation (quotient associated to this filtration) is essentially a presentation of the Alexander-Conway invariant, a generalisation of the celebrated Melvin-Morton property of quantum invariants [MM]. This work will finish with some brief comments about how this may be calculated using the techniques discussed here.

0.1. Acknowledgements. *The author is supported by a Japan Society for the Promotion of Science Postdoctoral Fellowship and is grateful for the generous hospitality of the Department of Mathematics and Computer Science at the Tokyo Institute of Technology.*

1. WEB DIAGRAMS

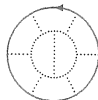
The Kontsevich integral of a knot is a formal graded series of web diagrams with complex coefficients (complex coefficients are required for its definition, though the result may be presented with rational coefficients). Web diagrams were introduced by Bar-Natan [BN], there with the name "Chinese character diagrams".

1.1. Definition. A **web diagram** is a graph with univalent and trivalent vertices, such that:

- the incident edges at a trivalent vertex are cyclically ordered:

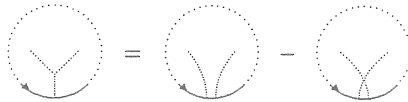
In a diagram  means .

- the univalent vertices are cyclically ordered:

This is depicted by locating them on an S^1 , e.g. .

Our target space will be complex linear combinations of web diagrams, modulo a space of relations. These relations are known as the STU relations, and the 1T relations.

1.2. Definition. • The **STU relations** are:



- and the **1T relations** are:



1.3. Remark. STU relations relate a difference of two diagrams which *differ by a reordering of a pair of adjacent univalent vertices*, to a diagram with one less univalent vertex, and one more trivalent vertex. Thus we should think of trivalent vertices, in some sense, as commutators of legs. This viewpoint will be exploited later when we introduce a combinatorial filtration of this algebra.

Notice that modulo STU relations, every web diagram can be represented by a linear combination of *chord diagrams*, that is, diagrams whose graphs have no trivalent vertices.

1.4. Definition. The **grade** of a web diagram is half the sum of the number of vertices (univalent and trivalent) of the graph. Define

$$A_n = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} - \text{linear combinations of} \\ \text{grade } n \text{ web diagrams} \end{array} \right\}}{\mathbb{C} - \text{span of STU relations}},$$

and

$$A'_n = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{C} - \text{linear combinations of} \\ \text{grade } n \text{ web diagrams} \end{array} \right\}}{\mathbb{C} - \text{span of STU and 1T relations}}.$$

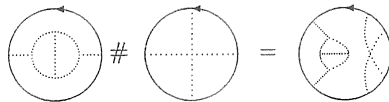
Further define A (resp. A') to be formal graded series of web diagrams (a choice of vector from each A_n (resp. A'_n)).

1.5. *Remark.* Kontsevich's original definition, of an invariant of oriented *unframed* knots took values in A' . Le and Murukami's extension, to an invariant of *framed* q -tangles (discussed below) requires the extension A .

1.6. *Remark.* The raison d'être of the Kontsevich integral is to prove the theorem that the space A'_n (or, in practice, its dual) is isomorphic to space of *Vassiliev invariants* of degree n modulo the space of invariants of degree $n - 1$. Our interest in this work will be primarily the integral itself. This approach has the disadvantage that there is no intuitive understanding presented of what a web diagram represents topologically (that is, the connection with self-intersecting knots etc). It can, however, be argued that to some extent this is a mystery also to researchers in the field (web diagrams having had their origins in perturbative Chern-Simons theory), and not a well-posed question. See [BN] for the standard development of Vassiliev theory, and [KT] for a detailed consideration of the corresponding isomorphisms in the class of *framed knots*.

There is a natural product on this algebra $\# : A_n \otimes A_m \rightarrow A_{n+m}$, defined on diagrams by taking the connect-sum of two diagrams at some choice of a point from each diagram. Note that this is only well-defined modulo STU relations.

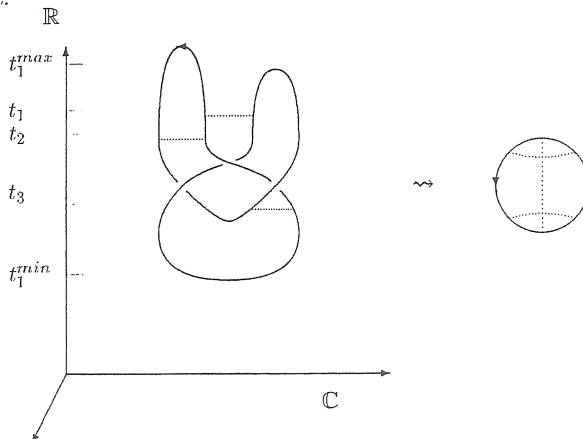
For example:



2. THE KONTSEVICH INTEGRAL

The work of many mathematicians (Chen's theory of iterated integrals, Kohno's work in the context of conformal field theories, Kontsevich's definition) culminated in the standard presentation of [BN] which we shall indicate the bare bones of. Take a knot K . Fix some representative embedding $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ and some decomposition of $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}$ so that the \mathbb{R} coordinate ("time") is a Morse function on the image of K .

We consider *decorations* of K with chords, by pairing points on K with the same time coordinate. There is associated to such a decoration an underlying chord diagram in an obvious way. We regard two decorations as equivalent if they are related by "sliding" endpoints along the knot, without crossing each other or a turning point.



Consider a chord in such a decoration. By varying the time of the placement the complex projections trace out paths in \mathbb{C} , $z(t)$ and $z'(t)$, and t will range until a turning point is reached (in the example, chord 1 will range between t_1^{\max} and t_1^{\min}).

The Kontsevich integral is a sum over the chord diagrams associated to inequivalent decorations of K , weighted by an integral expression involving the coordinate functions $z_j^i(t)$. The weight, for n chords, is

$$\frac{(-1)^{\#D}}{(2\pi i)^n} \int_{t_1 < t_2 < \dots < t_n} \prod_{i=1}^n \frac{\frac{dz_i}{dt_i} - \frac{dz'_i}{dt'_i}}{z_i - z'_i} dt_1 \wedge dt_2 \wedge \dots \wedge dt_n,$$

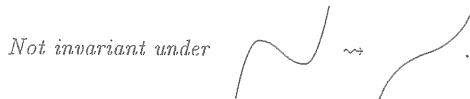
where $\#D$ counts the number of instances where the labelled segment is oriented in the direction of decreasing time, and the integration is over all realisations of a particular decoration (which is defined to be the limit of some appropriate regularised version of the integral in any region of the integration where a pair z_i and z'_i tend to the same value).

Call this:

$$Z : \{\text{embeddings } K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3\} \rightarrow A'.$$

2.1. Theorem. [Kon, BN] *This is well-defined and is invariant under isotopies in the class of knots for whom the time variable is a morse function.*

As it stands Z is not invariant under birth or cancellation of maximum-minimum pairs.



It turns out, however, that the integrals on two embeddings related by the above move only differ by a certain multiplicative factor in the algebra A , which can be explicitly accounted for. Let

$$\nu = Z(\text{figure-eight}).$$

2.2. Theorem. *Let K be some embedding of some knot $K : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ such that with respect to the decomposition $\mathbb{R}^3 \simeq \mathbb{C} \otimes \mathbb{R}$ there are $\#C$ critical points. Set ϵ to either 0, 1 or 2. Then*

$$Z_\epsilon(K) = \nu^{-\frac{\#C}{2} + \epsilon} \#Z(K)$$

is invariant under isotopies of K .

2.3. Remark. In the above notation, it has been made explicit that there are three normalisations in use, corresponding to ϵ being set to 0, 1 or 2. They are characterised by their value on the unknot: $Z_\epsilon(U) = \nu^\epsilon$. The three normalisations are useful in different contexts, and their special properties will be noted here.

- $\epsilon = 0$.

This is the normalisation originally considered by Kontsevich. This normalisation is multiplicative with respect to connect-sum of knots:

$$Z_0(K_1 \# K_2) = Z_0(K_1) \# Z_0(K_2).$$

- $\epsilon = 1$.

This normalisation extends to a functor from the category of framed q -tangles to the category of chord diagrams [LM]. The quantum link invariants of Reshetikhin and Turaev factor through this normalisation [KT].

- $\epsilon = 2$.

This normalisation behaves well with respect to Kirby-move-IIs, permitting a surgery formula for this normalisation. Z_2 was used by Le, Murukami and Ohtsuki to define a universal finite type invariant of integral homology three-spheres [LMO].

3. Z_1 - A FUNCTOR ON THE CATEGORY OF q -TANGLES

It turns out that the integral for some knot K may be written as a product (in an appropriate sense) of certain fixed series which correspond, intuitively, to the solution of the integral on certain standard pieces.

More precisely, we can extend Z_1 to a functor from the category of framed q -tangles to the category of chord diagrams. A framed q -tangle is a framed tangle (generally depicted as blackboard framed) with bracketting information on its ends:

$$\text{For example } \left(\begin{array}{c} \left(\left(\uparrow \uparrow \right) \right) \\ \left(\uparrow \uparrow \right) \end{array} \right) \text{ corresponds to } \begin{array}{c} \uparrow \\ \downarrow \end{array} .$$

The bracketting corresponds intuitively to information about the relative separation of the strands, as is indicated in the example.

The concept of chord diagram is also extended, to chord diagrams where we allow the univalent vertices to be located (up to orientation preserving diffeomorphism) on some choice of skeleton (compact oriented 1-dimensional manifold with boundary points partitioned into two ordered sets). The corresponding vector space of chord diagrams on some skeleton X will be denoted $A(X)$.

The extension (also to be denoted Z_1) evaluated on some q -tangle will be some series of chord diagrams on the associated skeleton. For example, our functor will be defined by the following maps, for some choice of associator ϕ (see below):

$$Z_1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} + \left(\frac{1}{2}\right) \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} + \frac{1}{2!} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} + \frac{1}{3!} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} + \dots$$

$$Z_1 \left(\begin{array}{c} \left(\left(\uparrow \uparrow \right) \right) \\ \left(\uparrow \uparrow \right) \end{array} \right) = \begin{array}{c} \uparrow \quad \uparrow \\ \boxed{\phi} \\ \uparrow \quad \uparrow \end{array} = 1 + \{\text{terms of higher degree}\},$$

$$Z_1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \cap \\ \uparrow \end{array} \right) = \nu \# \begin{array}{c} \uparrow \\ \cap \\ \uparrow \end{array} \quad , \quad Z_1 \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \cup \\ \uparrow \end{array} \right) = \begin{array}{c} \uparrow \\ \cup \\ \uparrow \end{array} .$$

and by the condition that the map is *functorial*, that is, respects juxtaposition (tensor product)

$$Z_1\left(\begin{array}{c} \uparrow \dots \uparrow \\ \boxed{T_1} \\ \downarrow \dots \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \dots \uparrow \\ \boxed{T_2} \\ \downarrow \dots \downarrow \end{array}\right) = \begin{array}{c} \uparrow \dots \uparrow \\ \boxed{Z_1(T_1)} \\ \downarrow \dots \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \uparrow \dots \uparrow \\ \boxed{Z_1(T_2)} \\ \downarrow \dots \downarrow \end{array}$$

and composition

$$Z_1\left(\begin{array}{c} \uparrow \dots \uparrow \\ \boxed{T_1} \\ \dots \\ \boxed{T_2} \\ \downarrow \dots \downarrow \end{array}\right) = \begin{array}{c} \uparrow \dots \uparrow \\ \boxed{Z_1(T_1)} \\ \dots \\ \boxed{Z_1(T_2)} \\ \downarrow \dots \downarrow \end{array}$$

3.1. *Remark.* Clearly, the heart of the above definition is the series ϕ , *Drinfel'd's associator* [Dr]. There is a large amount of freedom in choosing this associator in order that the construction be a well-defined functor from the category of g -tangles. Different choices generally lead to different functors, but amazingly, the same invariant when restricted to links. The algebraic context for expressing these issues is that of quasi-Hopf algebras [Dr]. The most intuitive choice is the *Knizhnik-Zamolodchikov* associator [Dr], which corresponds directly to a solution of the Kontsevich integral in a certain context. There are other associators, however, that are useful in other situations, for example an associator with rational coefficients [LM], and a (complicated) combinatorial method for constructing associators [BN2].

It is possible to give an explicit formula for the Knizhnik-Zamolodchikov associator in terms of multiple zeta functions, but the actual expression is beyond the focus of this work.

4. Z_2 - CALCULATIONS VIA SURGERY PRESENTATIONS.

Often a knot will be given via a surgery presentation. Some other knot K (perhaps the unknot U) will be decorated with some framed link L (call the total link (K, L)), such that surgery on L returns S^3 as the ambient manifold but with K twisted into some new knot type K^L .

It is a remarkable fact that there is a straightforward procedure for calculating $Z_2(K^L)$ from $Z_2((K, L))$ (the corresponding invariant of the total link, before surgery). This was discovered in the landmark [LMO], where it appears as a corollary to the construction of a diagram-valued invariant of integral homology three-spheres (universal with respect to the corresponding finite type theory).

Here our presentation will be minimal, simply exposing the combinatorial procedure.

So, take a link (as above) (K, L) where L has μ components. We will presently introduce a map $\iota_n : \bigoplus_{i=0}^{n\mu+n} A_i(\underbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{\mu+1}) \rightarrow \bigoplus_{j=0}^n A_j(S^1)$ (this map has

degree $-\mu n$) so that:

4.1. Theorem ([LMO]).

$$\text{Grad}_{\leq n}(Z_2(K^L)) = (-1)^{\sigma_+} \text{Grad}_{\leq \mu n + n}(\iota_n(Z_2((K, L)))),$$

where σ_+ is the number of positive eigenvalues of the linking matrix of L .

The map ι_n is defined on diagrams by “removing Wilson loops and gluing in special graphs”, followed by “removing closed dashed loops and replacing them with the factor $-2n$ ”.

More specifically, we consider graphs with trivalent (with their incoming edges cyclically ordered) and univalent vertices, such that the univalent vertices are ordered. Note that we require the stronger “ordered” (as opposed to “cyclically ordered”) so that we can identify the univalent vertices of different diagrams in such a sum. We consider a sequence of such sums $\{T_n^m\}$ such that the term T_n^m is a sum of graphs of degree n , with m univalent vertices.

Take a diagram to which we seek to apply ι_n . Consider some Wilson loop associated to some surgery component with m legs sitting on it. Remove the Wilson loop and join the m legs to the univalent vertices of the graph T_n^m , in the order in which they appeared on the Wilson loop. Any closed dashed loops that turn up are removed at the expense of multiplying the result by $-2n$.

For this operation to be well-defined the sequence will have to satisfy the following two conditions:

1. the T_n^m are invariant under a cyclic reordering of univalent vertices (of all terms, at once),

2. and

$$T_n^m = T_n^{m+1} - T_n^{m+1}$$

4.2. Theorem ([LMO]). *There exists such a sequence $\{T_n^m\}$ whose associated ι_n satisfies the surgery formula. This sequence is characterised by*

$$T_n^m = 0 \quad \text{if } m < 2n,$$

$$T_n^{2n} = \begin{cases} \text{the sum of diagrams obtained} \\ \text{by joining pairs of legs in chords,} \end{cases}$$

and the two conditions above.

For example (where we have only shown part of the diagram, around the Wilson loop corresponding to some surgery component),

$$\iota_2(\text{diagram}) = \iota_2(\text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3})$$

$$= -2\iota_2(\text{diagram 4}).$$

5. HABIRO'S REALISATION THEOREM

Kazuo Habiro solved the problem of finding a knot U_D for which

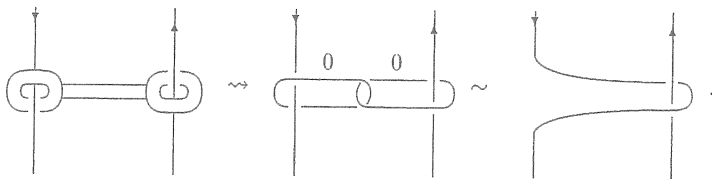
$$Z_0(U_D) - 1 = D + \{\text{terms of higher grade}\},$$

for some given primitive web diagram D . We say that U_D “realises the web diagram D ”. More generally, for any knot K there exists another K_D (in fact, many others) such that

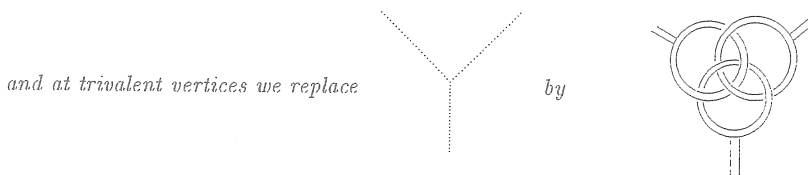
$$Z_\epsilon(K) - Z_\epsilon(K_D) = D + \{\text{terms of higher grade}\},$$

and K_D is obtained by twisting K with an appropriate *clasper move*.

The technique is this: following Habiro, we construct a framed link with K as a sublink such that when surgery is performed on the complement sublink the ambient manifold is again S^3 but with K twisted into some new knot type. The link is built by first decorating K with claspers (as below) and then replacing claspers with surgery components. A **clasper** is a band-summed pair of annuli embedded in the complement of the knot, which gives placement information for a surgery link. The defining example is:



Take a primitive web diagram D and a knot K . Decorate K with claspers as follows. Choose some embedding of the graph underlying D into S^3 such that the image of the Wilson loop realises K . We will choose some replacement of each edge of the embedded dashed graph with a clasper, as follows.



5.1. *Remark.* Let us emphasise the choices we have made in making this replacement. Firstly, we have chosen an embedding of the underlying graph. Then we chose particular embeddings of claspers to join two vertices (a choice for which there is a \mathbb{Z} -freedom, corresponding to twistings).

5.2. **Theorem** (Habiro’s realisation theorem). *Take a primitive web diagram D , and a knot K . Choose K_D according to the above construction.*

$$Z_\epsilon(K) - Z_\epsilon(K_D) = \pm D + \{\text{terms of higher grade}\},$$

where the ± 1 factor depends on the choice in a simple way.

5.3. *Remark.* We will consider the proof of this theorem, below, for $\epsilon = 2$. The theorem for the other normalisations will follow from this because the normalisation factor satisfies $\nu = 1 +$ terms of higher grade.

For example, we have that

$$Z_\epsilon(\text{Diagram}) - Z_\epsilon(\text{Circle}) = \text{Diagram} + \{\text{terms of higher grade}\}$$

Let us give a direct proof of this, in order to illustrate the many structural properties of the Z_ϵ . We should note here that the proof in this context parallels a calculation due to Le [L] of a related construction.

Take a framed knot K . If it is part of some link L' with complement sublink L denote L' by (K, L) . Denote the knot resulting from surgery on L by K^L . Let us focus on the above example. Call the unknot U , call the link presenting the “wheel” on the left hand side (U, W) , and call the diagram that $U^W - U$ realises ω .

Before we embark upon this calculation we put $U^W - U$ in a form amenable to this calculation. Mark a trivalent vertex with an x to indicate the following difference.

$$\text{Diagram with } x \text{ at vertex} = \text{Diagram} - \text{Diagram}$$

Write the sum that results from marking every trivalent vertex of (U, W) with an x by $\sum_i \alpha_i(U, W_i)$.

5.4. **Lemma.**

$$U^W - U = \sum_i \alpha_i U^{W_i}$$

Our strategy is this. Z_1 extends to a functor on the category of q -tangles. The first step, then, is to find a suitable factorisation of $\sum_i \alpha_i(U, W_i)$ for the calculation of Z_1 in low orders. Then we will normalise this result (by appropriate multiplication by ν) to obtain $Z_2(\sum_i \alpha_i(U, W_i))$. To this we can then apply the surgery formula of [LMO], to obtain $Z_2(\sum_i \alpha_i U^{W_i}) = Z_2(U^W - U)$.

The appropriate factorisation is as follows. Note that surgeries on the legs of the graph have been performed in order to put the link into this presentation. Note that only part of the bracketting is depicted (the rest is determined by the factorisation).

$$\begin{array}{c}
 Z_1 \left(\text{Diagram 1} \right) \\
 \circ \\
 Z_1 \left(\text{Diagram 2} \right) \otimes Z_1 \left(\text{Diagram 3} \right) \\
 \circ \\
 Z_1 \left(\text{Diagram 4} \right)
 \end{array}
 =
 \sum_i \alpha_i (U, W_i)$$

The heart of the calculation is Z_1 of the x -marked Borromean rings. The essential point in the calculation is that there is a presentation for the tangle containing a commutator $aba^{-1}b^{-1}$ of pure braids in such a way that when the commutator is trivialised (so if either a and a^{-1} or b and b^{-1} are replaced by the identity), the tangle is trivialised. (In other words, the Borromean rings are at least “2-trivial”). There is not enough room here to exhibit this factorisation, but we encourage the reader to see it for themselves.

Using the functorial properties of Z_1 with respect to this factorisation one can calculate directly that:

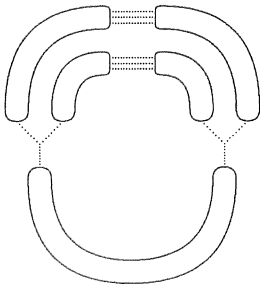
$$\begin{aligned}
 Z_1 \left(\text{Diagram 1} \right) - Z_1 \left(\text{Diagram 2} \right) &= \text{Diagram 3} - \text{Diagram 4} + \{ \text{terms of grade } \geq 2 \} \\
 &= - \text{Diagram 5} + \{ \text{terms of grade } \geq 2 \}.
 \end{aligned}$$

Let us recall the surgery description of Z_2 . Take $Z_2((K, L))$ where (K, L) is a surgery presentation for the knot K^L . The grade n piece of $Z_2(K^L)$ is obtained from the grade $n + nl$ piece of $Z_2((K, L))$. The projection

$$\iota_n : \bigoplus_{i=0}^{n\mu+n} A_i(\underbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{\mu+1}) \rightarrow \bigoplus_{j=0}^n A_j(S^1)$$

is defined on diagrams (and then extended linearly) by “glueing” a special component into the skeleton of every surgery component, and then exchanging dashed loops for $-2n$.

The calculation for the Borromean rings above may be used to derive the following statement.

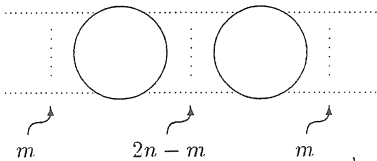
$$Z_2\left(\sum_i \alpha_i(U, W_i)\right) = \left(\frac{1}{3!}\right)\left(\frac{1}{3!}\right) \cdot \text{Diagram} + \{\text{terms in the kernel of } \iota_{<2}\} + \{\text{terms of higher grade}\}.$$


This calculation is completed by composing this series with ι_2 (i.e. perform surgery on the surgery components) to get the first non-vanishing term. This is performed via the following combinatorial lemma. Here we state it in a more general form than we will immediately use.

Let \boxed{n} represent the symmetriser on n dashed strands. For example

$$\boxed{2} \rightarrow \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2}$$


5.5. Lemma. *In the following equation, only part of a diagram is shown.*

$$\iota_n\left(\frac{1}{(2n-m)!} \left(\text{Diagram with circles and strands} \right) \right) = \iota_n\left(\boxed{m} \right)$$


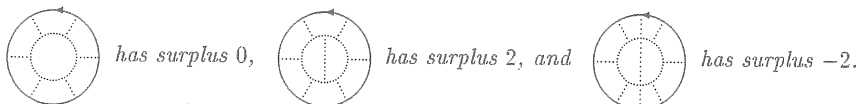
Using the specialisation of this identity to $m = 1$, twice, completes the calculation.

6. THE SURPLUS FILTRATION OF A

This section will introduce a sequence of approximations to the Kontsevich integral, by quotienting A by a certain depth in a filtration to be presently introduced, the surplus filtration.

6.1. Definition. Define the **surplus** of a web diagram to be the number of trivalent vertices minus the number of univalent vertices of the graph of the diagram.

For example:



Let $S_n A$ (resp. $S_n A'$) be the \mathbb{C} -subspace of A (resp. A') of formal graded series of diagrams of surplus n . This provides a filtration of these algebras consistent with the product ($S_i A \# S_j A \subset S_{i+j} A$).

$$A \subset S_0 A \subset S_1 A \subset S_2 A \subset \dots$$

and

$$A' = S_0 A' \subset S_1 A' \subset S_2 A' \subset \dots$$

6.2. Definition. Let $P_n : A \rightarrow \frac{A}{S_{n+1} A}$ be the associated projection. Let

$$P_n Z_\epsilon : \{\text{oriented knots}\} \rightarrow \frac{A}{S_{n+1} A}$$

be the composition of the Kontsevich integral with this projection.






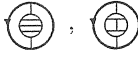

In the next section we will use this filtration to explore the intimate connection between clasper moves and the Kontsevich integral. Our first observation is the following.

6.3. Theorem. Let (K, L) be some clasper decoration of K realising some primitive, complete diagram D of surplus s .

$$Z_\epsilon(K^L) - Z_\epsilon(K) \in S_s A.$$

That is the first surprise. The second is that there is a simple presentation of the calculation of the first non-trivial projection, $P_s Z_\epsilon(K^L) - P_s Z_\epsilon(K) \in \frac{A}{S_{s+1} A}$.

Let us consider a basis for A' in low degrees. Below, degree is plotted vertically, and the number of legs (univalent vertices) horizontally.

	0	1	2	3	#of legs 4
degree 0	surplus = 0 				
1					
2			0 		
3			2 		
4			4 	0 	
5			6 	2 	

6.4. *Remark.* When composed with the weight system of the extended Jones polynomial, the label of the row (resp. column) receives an explicit interpretation as the order of the resulting polynomial in h (resp. λ (the representation index)). Observe that in this scheme, surplus measures distance from the diagonal, and thus the difference between the order in h , and in λ of the resulting polynomial. Thus statements about the Kontsevich integral of a knot having some property with respect to this filtration can be converted to statements about corresponding properties of the *extended Jones polynomial* of that knot.

6.5. *Remark.* There seems to be a pattern emerging in the basis of the first non-trivial (surplus 0) diagonal. At grade n , there appears to be a basis of all possible products (at grade n) of the following wheel diagrams:

$$\omega_2 = \text{wheel diagram with 2 spokes} , \omega_4 = \text{wheel diagram with 4 spokes} , \omega_6 = \text{wheel diagram with 6 spokes} , \dots$$

This is the case.

6.6. Lemma ([CV]).

$$\frac{A}{S_1 A} = \mathbb{C}[\omega_2, \omega_4, \dots, \omega_{2n}, \dots],$$

where the right hand side means the formal completion to formal graded series of the polynomial algebra generated (free abelian) by the wheels $\{\omega_{2n}\}$.

We may wonder whether this (the first non-trivial) projection may be determined for a given knot. The answer is startling: yes, from the coefficients of the Alexander-Conway polynomial of that knot.

Take the following representation of the Alexander-Conway polynomial (as a formal power series in the variable h):

$$\begin{aligned} C_{K^+}(h) - C_{K^-}(h) &= (e^{\frac{h}{2}} - e^{-\frac{h}{2}})C_{K^*}(h), \\ C_U(h) &= 1. \end{aligned}$$

Define $d_{2n}(K)$ to be the coefficient of h^{2n} in the power series $-\frac{1}{2}\ln(C_K(h))$.

6.7. Theorem.

$$P_0 Z(K) = \exp_{\#} \left(\sum_{n=1}^{\infty} d_{2n}(K) \omega_{2n} \right).$$

This fact underlies the celebrated **Melvin-Morton** property of the extended Jones polynomial. Issues related to this equation have been considered by many authors [BNG, C, KSA, V, W]. Proofs have always used deep universality properties of the Kontsevich integral. In the last section of this work, we will return to this result, and consider a direct calculation. In the light of this formula, it is an important problem to address, say, the next approximation $P_2 Z$. Perhaps we can approach it with clasper theory.

7. CLASPER MOVES AND THE SURPLUS FILTRATION

$Z_e(K^L - K)$ is to be calculated via surgery formulae $(\{\iota_n\})$ from $Z_2(\sum_i \alpha_i(K, L_i))$, which is itself to be calculated (via Z_1) from a q -tangle decomposition of $\sum_i \alpha_i(K, L_i)$. Thus we must first consider how to calculate the surplus of series obtained in this way. Let us extend the concept as follows.

Expand the categories of q -tangles and web diagrams to **marked q -tangles** and **marked web diagrams**. In these categories we allow components of the q -tangle (resp. the skeleton of the underlying web diagram) to be marked with a $*$. (Components will be marked to indicate which are surgery components). The Kontsevich functor is to be trivially extended by marking those components of the skeletons of the diagrams in the image of the usual Kontsevich functor which correspond to marked components of the original q -tangle.

Take a marked diagram $D \in A(X)$ on some marked skeleton X .

7.1. Definition. Let the **surplus** of D be the number of trivalent vertices minus the number of univalent vertices *located on unmarked components*.

The following lemma shows that this is the required extension.

7.2. Lemma. Take diagrams D and $E \in A$ such that $D \circ E$ is well-defined. Take diagrams F and $G \in A$. Take a diagram $H \in A(\underbrace{S^1 \sqcup S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1}_{\mu+1})$. Let n be a positive integer.

$$\begin{aligned} \text{surplus}(D \circ E) &= \text{surplus}(D) + \text{surplus}(E), \\ \text{surplus}(F \otimes G) &= \text{surplus}(F) + \text{surplus}(G), \\ \text{surplus}(\iota_n(H)) &\geq \text{surplus}(H). \end{aligned}$$

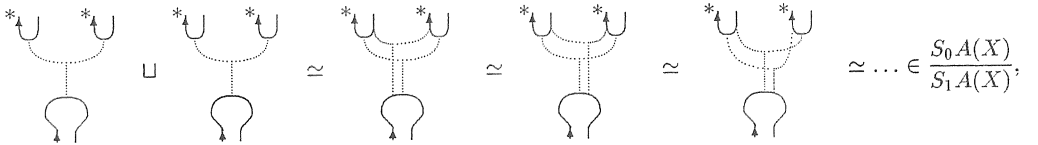
The heart of the calculation to follow is, again, Z_1 of the x -marked Borromean rings. The result of this calculation is most simply presented by introducing a product.

7.3. Definition. The product

$$\sqcup : \frac{S_p A(X)}{S_{p+1} A(X)} \otimes \frac{S_q A(X)}{S_{q+1} A(X)} \rightarrow \frac{S_{p+q} A(X)}{S_{p+q+1} A(X)},$$

is defined on diagrams A and B as the class represented by any choice of diagram $C \in \frac{S_{p+q} A}{S_{p+q+1} A}$ whose underlying dashed graph is the union of the underlying dashed graphs of A and B .

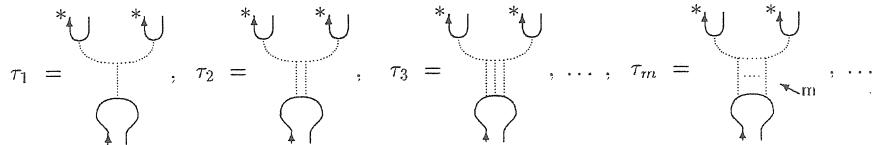
For example,



the point being, of course, that different choices are equal modulo diagrams with more internal vertices (using STU relations), and hence greater surplus.

7.4. Remark. The notation has been chosen because this is the projection of the product “disjoint union of Chinese characters” of Vassiliev theory.

The calculation will be expressed in terms of the following diagrams.



$$\text{Let } T = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \tau_m \in S_0 A(X).$$

7.5. Lemma.

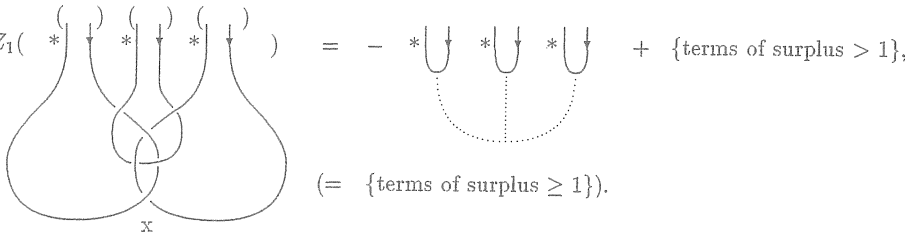
$$Z_1 \left(\begin{array}{c} \text{Diagram with two marked vertices and a crossing} \\ \text{with an } x \text{ marking} \end{array} \right) = (\nu \#_K \exp_{\sqcup}(T) - 1_B) + \{\text{terms of surplus} > 0\},$$

$$(\text{= } \{\text{sum of terms of surplus } \geq 0\}),$$

where the correction, ν , is connect-summed into the bottom component (K), and 1_B is the unique diagram on the same skeleton of grade 0 (empty dashed graph).

Call the q -tangle that is the x -marked Borromean rings that appear on the left hand side of the equation above L (for *leg*). We will further need to say something about x -marked Borromean rings that are not legs (so have all their components marked). For reasons that will become clear below, we use the following q -tangle, call it T (for *trivalent vertex*).

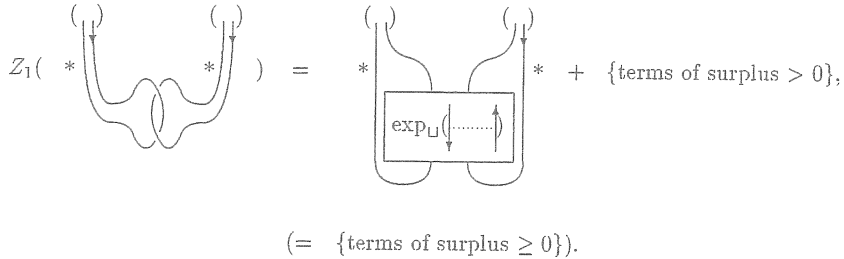
7.6. Lemma.

$$Z_1(\begin{array}{c} \text{()} \quad \text{()} \quad \text{()} \\ * \downarrow \quad * \downarrow \quad * \downarrow \\ \text{---} \end{array}) = - \begin{array}{c} \text{()} \quad \text{()} \quad \text{()} \\ * \downarrow \quad * \downarrow \quad * \downarrow \\ \text{---} \end{array} + \{\text{terms of surplus } > 1\},$$


$$(\text{= } \{\text{terms of surplus } \geq 1\}).$$

Finally, we require a statement about the “clasp”, itself (between the two components of the surgery link associated to a clasper). Call the q -tangle below, C .

7.7. Lemma.

$$Z_1(\begin{array}{c} \text{()} \quad \text{()} \\ * \downarrow \quad * \downarrow \\ \text{---} \end{array}) = \begin{array}{c} \text{()} \quad \text{()} \\ * \downarrow \quad * \downarrow \\ \text{---} \end{array} + \{\text{terms of surplus } > 0\},$$


$$(\text{= } \{\text{terms of surplus } \geq 0\}).$$

We are now ready to outline the proof of the following statement, which was made in the previous section.

7.8. Theorem. *Let (K, L) be some clasper decoration of K realising some primitive, complete diagram D of surplus s .*

$$Z_{\epsilon}(K^L) - Z_{\epsilon}(K) \in S_s A.$$

Outline of proof.

Let us deal with the simpler case where the clasper decoration has the property that when the “leaves” are forgotten the clasper graph is disjoint from K . (It turns out that we can always modify the clasper graph to get another (in this case, *extended* clasper graph, see the next Section) of the same surplus that yields the same knot while satisfying this condition).

As usual, $Z_1(\sum_i \alpha_i(K, L_i))$ will be calculated via an appropriate factorisation into q -tangles. The basic idea is to find a factorisation $P \circ Q \circ R$ where the components of P are all marked (i.e. surgery components), where the components of R are all *unmarked* (part of K), and where Q is a tensor product of the q -tangles B, T and C , so that we can calculate $Z_1(M)$ via the lemmas just stated.

Just say D has l trivalent vertices connected to legs, and s other trivalent vertices (so that it has surplus s). Then as we are assuming the condition from the first paragraph, we can certainly find a factorisation

$$\sum_i \alpha_i(K, L_i) = P \circ \underbrace{(B \otimes \dots \otimes B)}_l \otimes \underbrace{(T \otimes \dots \otimes T)}_s \otimes \underbrace{(C \otimes \dots \otimes C)}_{\frac{2l+3s}{2}} \circ R,$$

of the sort required, for appropriate P and R (see, for example, the factorisation of ω_2 presented in Section 5).

Consider, then, $Z_1(P \circ Q)$. As the Z_1 of each T is a series of terms of surplus *at least one* (and Z_1 of every other factor is a series of terms of non-negative surplus) it is immediate that $Z_1(P \circ Q)$ is a series of terms of surplus at least s .

7.9. *Technical point.* As it stands, $Z_1(R)$ may have negative surplus, so we cannot use this observation directly to deduce that $Z_1(P \circ Q \circ R)$ has surplus greater than or equal to l . We can, however, complete the proof with a lemma that indicates that the expression “factorises” in an appropriate sense. We will not present the proof of this lemma here. Using this factorisation, the argument is completed as follows. Denote by 1_A the trivial diagram on the skeleton underlying the q -tangle A .

$$\begin{aligned} Z_1(P \circ Q \circ R) &= (Z_1(P \circ Q) \circ 1_R) \sqcup (1_{P \circ Q} \circ (Z_1(R))) + \{\text{terms of surplus } \geq l\}, \\ &= (Z_1(P \circ Q) \circ 1_R) \sqcup ((Z_1(K) \# \nu^{-l}) \otimes^{2l+3s} 1_{S^1}) \\ &\quad + \{\text{terms of surplus } \geq l\}. \\ &= \{\text{terms of surplus } \geq l\}. \end{aligned}$$

□

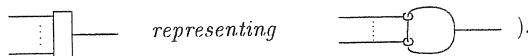
7.10. *Remark.* This factorisation formula, together with the calculations of Z_1 of the subtangles B, T and C , together with the surgery lemma (Lemma 5.5), actually presents a calculation of the first twisted diagonal of Z_e . In the final section we will explore the first quotient $P_0 Z_e$, and the Melvin-Morton-Rozansky property of the Kontsevich integral, from this point of view.

8. CALCULATING $P_0 Z$ FOR ANY KNOT

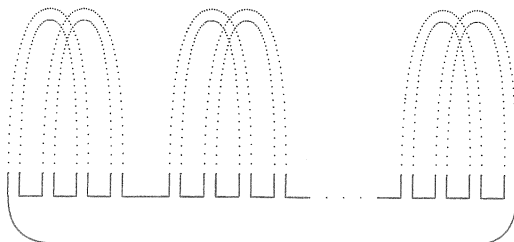
Let us finish with some brief notes on the recovery from the Alexander-Conway polynomial of K of $P_0 Z_0(K)$.

To calculate $P_0 Z_0(K)$ using the techniques outlined in this paper, we will first present a construction of *any* knot from the unknot via a twisting (of the unknot) by a complete, **extended** clasper graph.

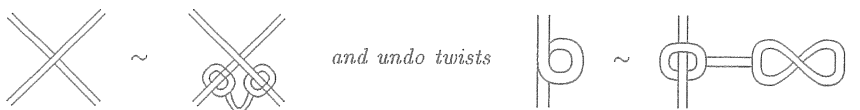
(In an extended clasper graph, we allow vertices of the following sort:



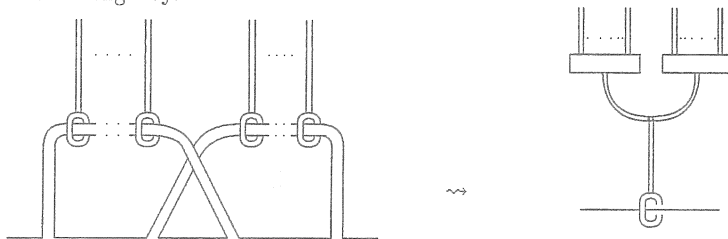
We do this via the following algorithm. Select a Seifert surface for the knot. Fix some symplectic basis of the homology of the surface $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (so that $a_i \cdot b_j = \delta_{ij}$). Contract the surface onto cycles representing this basis so that the knot is in disc-band form:



Unknot the presentation by performing band crossings with clasps:



Now we can replace the trivialised symplectic pairs by trivalent vertices, in the following way:



Thus any knot can be constructed by twisting the unknot with a *complete, extended clasper graph*.

The calculation of the first row, $P_0 Z_e(K)$ can now proceed by replacing Borromean rings via Lemma 7.5, replacing clasps via Lemma 7.7, replacing surgery components with symmetrisers by Lemma 5.5, and replacing extended vertices via a simple lemma generalising the corresponding statement for clasps (Lemma 7.7).

Let us finish by noting that Theorem 6.7 (the Melvin-Morton property of the Kontsevich integral) can be recovered from this calculation by means of an unusual formal infinite factorisation of the Alexander-Conway polynomial, by means of Amistur's identity of classical matrix theory. This research is reported in [K].

REFERENCES

- [BN] Bar-Natan, D., *On the Vassiliev knot invariants*, Topology **34** (1995), 423–472.
- [BN2] Bar-Natan, D., *Non-associative tangles*, Proceedings of the Georgia International Topology Conference 1993, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, (1997).
- [BNG] Bar-Natan, D. and Garoufalidis, S., *On the Melvin-Morton-Rozansky conjecture*, Invent. Math. **125** (1996), 103–133.
- [C] Chmutov, S.V., *Combinatorial analog of the Melvin-Morton conjecture*, published in proceedings of Knots '96, World Scientific (1997).
- [CV] Chmutov, S.V. and Varchenko, A.N., *Remarks on the Vassiliev knot invariants coming from sl_2* , Topology **36** (1997), 153–178.
- [Dr] Drinfel'd, V.G., *On quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J., **1** (1990), 829–860.
- [Hab] Habiro, K., *Clasper theory and its applications*, University of Tokyo preprint, (1998).
- [Kon] Kontsevich, M., *Vassiliev's knot invariants*, Advances in Soviet Mathematics, **16** (1993), 137–150.
- [K] Kriker, A., *Clasper moves and the rows of the Kontsevich integral*, in preparation (May 1999).
- [KSA] Kriker, A., Spence, B. and Aitchison, I., *Cabling the Vassiliev invariants*, J. Knot theory and its Rams. (1997), 687–714.
- [KT] Kassel, C. and Turaev, V., *Chord diagram invariants of tangles and graphs*, Duke Math. J. **92** (1993), 497–552.
- [L] Le, T.Q.T., *On the wheels conjecture*, talk delivered at the Workshop on Low-dimensional topology and combinatorics, M.S.R.I. 1997.
- [LM] Le, T.Q.T. and Murakami, J., *The universal Vassiliev-Kontsevich invariant for framed oriented links*, Comp. Math. **102** (1996), 42–64.
- [LMO] Le, T.Q.T., Murakami, J. and Ohtsuki, T., *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, to appear in Topology.
- [MM] Melvin, P. and Morton, H., *The coloured Jones function*, Comm. Math. Phys. **169** (1995) 501–520.
- [V] Vaintrob, A. *Melvin-Morton conjecture and primitive Feynman diagrams*, preprint q-alg/9605028.
- [W] Willerton, S. *On universal vassiliev invariants, cabling and torus knots*, University of Melbourne preprint (1998).

LOCAL MOVES ON SPATIAL GRAPHS

谷山 公規
安原 晃

東京女子大学・文理学部
東京学芸大学・教育学部

ABSTRACT

For each natural number k the C_k -moves are defined by Habiro as local moves of oriented links. We consider C_k -moves for embeddings of a finite graph into the 3-sphere. The C_k -equivalence is the equivalence relation generated by C_k -moves and ambient isotopy. It is known that C_k -equivalence implies C_{k-1} -equivalence. Habiro showed that two oriented knots are C_k -equivalent if and only if their values of any Vassiliev invariant of order less than or equal to $k - 1$ coincide. The ‘if’ part of this theorem does not hold for links. Let \mathcal{F} be a C_{k-1} -equivalence class of the spatial embeddings of a finite graph. Let \mathcal{G} be the quotient set of \mathcal{F} under the C_k -equivalence. We show that the set \mathcal{G} forms an abelian group under certain geometric operation. We define that an invariant on \mathcal{F} is finite type of order $(n; k)$. Then we show that two elements in \mathcal{F} are C_k -equivalent if and only if their values of any finite type invariant of order $(1; k)$ coincide. Unfortunately, this classification theorem is not practical. On the other hand, C_2 -equivalent classification for spatial embeddings of a graph and C_3 -equivalent classification for oriented knots were explicitly given. In fact, the first author showed that two spatial embeddings of a graph are C_2 -equivalent if and only if their Wu invariant coincide, and Habiro showed that two knots are C_3 -equivalent if and only if they have the same second coefficient of the Conway polynomial. Note that C_2 -move is equivalent to delta move defined by Murakami and Nakanishi, and that C_3 -move is equivalent to clasp-pass move defined by Habiro. We explicitly give C_3 -equivalent classifications for two-component links, three-component links, algebraically split links, and spatial embeddings of a planar graph that does not contain disjoint cycles. They are classified in terms of linking number, second coefficient of Conway polynomial of knot, modulo 2 reduction of third coefficient of Conway polynomial of two-component link, Milnor μ -invariant of three-component link, and modulo 2 reduction of fourth coefficient of Conway polynomial of three-component link. As corollaries, we have that two spatial embeddings of a graph are delta equivalent if and only if their values of any Vassiliev invariant of order 1 coincide, and that two spatial embeddings of a graph without containing disjoint cycles are clasp-pass equivalent if and only if their values of any Vassiliev invariant of order less than or equal to 2 coincide.

1. 局所変形

3次元球体 B^3 にプロパーに埋め込まれた arcs をタングルと呼ぶ。 B^3 内にプロパーに埋め込まれた円盤に、タングルが含まれるとき、そのタングルは自明であるという。ここでは、全てのタングルは自明であるものとする。タングル T と S に対し、 $t_1, t_2, \dots, t_k, s_1, s_2, \dots, s_k$ をそれぞれ T, S の成分とする。更に各 t_i に対し、ある成分 s_j が存在し、 $\partial t_i = \partial s_j$ を満たしているものとする。このとき、タングルの順序対 (T, S) を局所変形と呼ぶ。2つの局所変形 (T, S) と (T', S') が同値であるとは、向きを保つ同相写像 $h: B^3 \rightarrow B^3$ が存在し、 $h(T)$ と T' は ∂B^3 を固定してアンビエントアイソトピックで、 $h(S)$ と S' は ∂B^3 を固定してアンビエントアイソトピックであるときをいう。今後、同値な局所変形は区別しないことにする。

タングル $T = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_k$ に対し、 B^3 内の互いに非交和な円盤 D_1, D_2, \dots, D_k で $\partial D_i = (D_i \cap \partial B^3) \cup t_i$ ($i = 1, 2, \dots, k$) を満たすものを T の自明化円盤と呼ぶ。局所変形 (T, S) と T の自明化円盤 D_1, D_2, \dots, D_k に対し、 $D_i \cap \partial B^3$ の ∂B^3 内での十分小さな正則近傍を E_i とする。 E_i は円盤で $E_i \cap T = \text{int} E_i \cap T = \partial t_i$ を満たす。円周 ∂E_i 内に2つの arcs α_i, β_i を $\alpha_i \cap \beta_i = \partial \alpha_i = \partial \beta_i$ を満たすようにとり、 α_i, β_i の内部をを少し B^3 の内部に押し込めて得られた arcs をそれぞれ $\tilde{\alpha}_i, \tilde{\beta}_i$ とおく。これから、 k 通りの局所変形 $(S \cup \tilde{\alpha}_i, S \cup \tilde{\beta}_i)$ ($i = 1, 2, \dots, k$) が得られるが、これらを総称して自明化円盤 D_1, D_2, \dots, D_k に関する局所変形 (T, S) のバンド自明化変形と呼ぶ。一般に、タングルの自明化円盤はアンビエントアイソトピーの下で唯一つには定まらない。

A_k 変形を以下で帰納的に定義する。図1の局所変形を交差交換と呼ぶが、これを A_1 変形とする。各 A_k 変形 (T, S) に対し、 T の自明化円盤を選び固定する。この自明化円盤に関するバンド自明化変形を A_{k+1} 変形と呼ぶ。定義から解るように、 A_k 変形は自明化円盤の選び方に依存して決まる。そこで今後 A_k 変形には、ある固定された自明化円盤が与えられているものとする。

図1

A_k 変形 (T, S) と $T = t_1 \cup t_2 \cup \dots \cup t_{k+1}$ の自明化円盤 D_1, D_2, \dots, D_{k+1} に対し、 $\alpha = \partial B^3 \cap (D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_{k+1})$, $\beta = S$ とする。3次元球面 S^3 内の絡み目 L がタイプ k であるとは、向きを保存する埋め込み $\varphi: B^3 \rightarrow S^3$ が存在して、 $L = \varphi(\alpha \cup \beta)$ を満たすときをいう。このとき、 (α, β) を L のモデルと呼ぶ。

例. (1) 図1のタングルの自明化円盤はアンビエントアイソトピーの下で唯一つに定まる。従って、 A_1 変形の任意のバンド自明化変形は図2-(i)の局所変形と同値になる。つまり A_2 変形は唯一つに定まる。 A_2 変形が図2-(ii)の局所変形と同値であることは容易に確かめられる。図2-(ii)は δ 変形と呼ばれる局所変形で Murakami-Nakanishi [7] により定義されたものである。更にこれは、図2-(iii)の局所変形と同値になる。

(2) A_2 変形に関して自明化円盤を図3-(i)のように選ぶと、各 A_3 変形は図3-(ii)の局所変形と同値になる。

(3) 局所変形 (T, S) に対し, t, s をそれぞれ T, S の成分で $\partial s = \partial t$ であるものとする. N_1, N_2 はそれぞれ t, s の B^3 内での正則近傍で $N_1 \cap \partial B^3 = N_2 \cap \partial B^3$ を満たすものとする. 図 4 のように, $B^2 \times I$ 内にプロパーに埋め込まれた arcs の非交和を α とする. 同相写像 $\varphi_i : B^2 \times I \rightarrow N_i$ ($i = 1, 2$) で次を満たすものを考える. $\varphi_i(B^2 \times \{0, 1\}) = N_i \cap \partial B^3$, $\varphi_1(\partial\alpha) = \varphi_2(\partial\alpha)$, $\varphi_1(\alpha)$ と $\varphi_2(\alpha)$ は B^3 内で ∂B^3 を固定してアンビエントアイソトピック. このとき局所変形 $((T-t) \cup \varphi_1(\alpha), (S-s) \cup \varphi_2(\alpha))$ を, (T, S) の t と s に関するダブルと呼ぶ. 交差交換を C_1 変形と呼び, C_k 変形のダブルを C_{k+1} 変形と定める. この局所変形は Habiro [4] により定義されたものである. この C_k 変形は, ある自明化円盤を選んだときに得られる A_k 変形と一致することが示されている [3], [10].

図 2, 3, 4

局所変形 (T, S) に対し, 局所変形 (S, T) を (T, S) の逆変形と呼ぶ. 明らかに A_1 変形の逆変形は A_1 変形である. また, A_k 変形 ($k \geq 2$) の逆変形も A_k 変形である.

有限グラフ G の S^3 への埋め込みを $f, g : G \rightarrow S^3$ とする. f が g から 1 回の A_k 変形によって得られるとは, A_k 変形 (T, S) と向きを保存する埋め込み $\varphi : B^3 \rightarrow S^3$ が存在して次の条件を満たすときをいう.

- (i) $f(x) \neq g(x)$ ならば, $f(x)$ と $g(x)$ は共に $\varphi(\text{int}B^3)$ に含まれる.
- (ii) $f(V(G)) = g(V(G))$ は $\varphi(B^3)$ と共有点を持たない.
- (iii) $f(G) \cap \varphi(B^3) = \varphi(T)$ かつ $g(G) \cap \varphi(B^3) = \varphi(S)$.

ここで, $V(G)$ は G の頂点全体の集合とする. 更に, g から有限回の A_k 変形とアンビエントアイソトピーを組み合わせて f が得られるとき, f と g は A_k 同値であるという. A_k 同値はグラフ G の S^3 への埋め込み全体の集合の同値関係である. f を含む A_k 同値類を $[f]_k$ で表すことにする. A_k 変形の定義から, 1 回の A_{k+1} 変形は 2 回の A_k 変形により実現されることが解る. 従って, A_{k+1} 同値な埋め込みは A_k 同値である. 言い換えると, 次の包含関係が成立する.

$$[f]_1 \supset [f]_2 \supset \cdots \supset [f]_k \supset [f]_{k+1} \supset \cdots$$

以後の節で A_k 変形に関する我々の結果を紹介する. 第 2, 3, 4 節の結果は [14] で得られた結果であり, 第 5 節の結果は [15] で得られた結果である.

2. A_k 同値類の分類

グラフ G がサークル S^1 と同相なとき, G の S^3 への埋め込みは S^3 内の有向結び目とみなせる. Habiro [4] は次の驚くべき定理を示した.

定理 1. (Habiro [4]) 2 つの結び目 K_1 と K_2 が C_k 同値である為の必要十分条件は, 位数 $k-1$ 以下の任意の Vassiliev 不変量 v において $v(K_1) = v(K_2)$ が成立することである.

定理1は C_k 同値を A_k 同値に置き換えても成立することが示せる [16]. 上の定理において, 必要性は一般のグラフの場合にも成立する. すなわち, 埋め込み $f, g: G \rightarrow S^3$ が A_k 同値ならば, 位数 $k-1$ 以下の任意の有限型不変量 v において $v(f) = v(g)$ が成立する [14]. しかしながら, 定理の十分性は2成分絡み目の場合でさえ成立しない. 実際, Whitehead 絡み目と自明な絡み目のコンウェイ多項式の3次の係数の偶奇は異なるので C_3 同値でない (定理15). ところが, これらの位数2以下の Vassiliev 不変量は一致する事が Murakami [6] の結果からわかる. 従って, A_k 同値な埋め込みの特徴付けは Vassiliev 不変量以外の不変量を考える必要がある. 我々は A_k 同値を特徴付ける為の新しい不変量の概念を以下で導入する.

$f: G \rightarrow S^3$ を埋め込み, $L_i = K_{i1} \cup K_{i2} \cup \dots \cup K_{ik+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) をタイプ k の絡み目, (α_i, β_i) をそのモデルとする. L_1, L_2, \dots, L_n の分離和を L とする. 埋め込み $g: G \rightarrow S^3$ が L_1, L_2, \dots, L_n と f のバンド和であるとは, 互いに非交和な埋め込み $b_{ij}: I \times I \rightarrow S^3$ ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k+1$) と, 互いに非交和な向きを保存する埋め込み $\varphi_i: B^3 \rightarrow S^3 - f(G)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) で $L_i = \varphi_i(\alpha_i \cup \beta_i)$ であるものが存在し, 次の条件を満たすときをいう.

(i) 任意の i, j ($i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, k+1$) に対して, $b_{ij}(I \times I) \cap f(G) = b_{ij}(I \times I) \cap f(G - V(G)) = b_{ij}(I \times \{0\})$, $b_{ij}(I \times I) \cap (\bigcup_l \varphi_l(B^3)) = b_{ij}(I \times \{1\})$ であり, $b_{ij}(I \times \{1\})$ は $\varphi_i(\alpha_i)$ のある成分と等しい.

(ii) $f(x)$ が $\bigcup_{i,j} b_{ij}(I \times \{0\})$ に含まれない場合は $f(x) = g(x)$ が成立し, 次を満たす.

$$g(G) = (f(G) \cup L - \bigcup_{i,j} b_{ij}(I \times \partial I)) \cup \bigcup_{i,j} b_{ij}(\partial I \times I).$$

このとき, g を $F(f; \{L_1, L_2, \dots, L_n\}, \{B_1, B_2, \dots, B_n\})$ と表すことにする. ただし, $B_i = b_{i1}(I \times I) \cup b_{i2}(I \times I) \cup \dots \cup b_{ik+1}(I \times I)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) とする. また, $b_{ij}(I \times I)$ をバンド, $\varphi_i(B^3)$ を L_i に関連した3次元球体と呼ぶ.

注意. (1) 埋め込み g がタイプ k の絡み目と f のバンド和ならば, g は f と A_k 同値である. 実はこの逆も成立する (命題2.1).

(2) タイプ k の絡み目 L_1, L_2, \dots, L_n と f のバンド和 $F(f; \{L_1, L_2, \dots, L_n\}, \{B_1, B_2, \dots, B_n\})$ に対し, 図5-(i), (ii), (iii), (iv) の局所変形は A_{k+1} 変形により実現できる. 実際図5-(i) は A_k 変形のバンド自明化変形に他ならない. つまりこれは, A_{k+1} 変形である. 局所変形図5-(ii), (iii) は図5-(i) から容易に得られる. 局所変形図5-(iv) も A_{k+1} 変形で実現される (図6). 従って, バンドの位置は A_{k+1} 同値の下で自由に換えられる. ‘バンド自明化変形’ という名前は図5のこれらの変形に由来する.

図5, 6

$h: G \rightarrow S^3$ を埋め込み, H を可換群とする. 不変量 $\varphi: [h]_{k-1} \rightarrow H$ が位数 $(n; k)$ の有限型不変量であるとは, 任意の埋め込み $f \in [h]_{k-1}$ と $(n+1)$ 個のタイプ $k-1$ の絡み目 L_1, L_2, \dots, L_{n+1} との任意のバンド和 $F(f; \{L_1, L_2, \dots, L_{n+1}\}, \{B_1, B_2, \dots, B_{n+1}\})$ に対し, 次が成立するときをいう.

$$\sum_{X \subset \{1, 2, \dots, n+1\}} (-1)^{\#X} \varphi(F(f; \bigcup_{i \in X} \{L_i\}, \bigcup_{i \in X} \{B_i\})) = 0 \in H,$$

ここで, $\#X$ は集合 X の元の個数を意味する. 特に位数 $(n; 2)$ の有限型不変量を, 位数 n の有限型不変量 [11] (あるいは *Vassiliev* 不変量) と呼ぶ.

定理 2. A_{k-1} 同値な 2 つの埋め込み $f, g: G \rightarrow S^3$ が A_k 同値であるための必要十分条件は, 位数 $(1; k)$ の任意の有限型 A_k 同値不変量 φ に対して $\varphi(f) = \varphi(g)$ が成立することである.

Taniyama [13] によって, グラフ G の S^3 への 2 つの埋め込みが A_2 同値である為の必要十分条件はそれらの Wu 不変量 [19] が一致することが示されている. また, Wu 不変量は位数 $(1; 2)$ の有限型不変量であることが [13, Section 2] からわかる. 2 つの埋め込みは常に A_1 同値なので, 次の系を得る.

系 3. 埋め込み $f, g: G \rightarrow S^3$ に対し, 次の 3 つの条件は同値である.

- (i) f と g は A_2 同値である.
- (ii) f と g は同じ Wu 不変量を持つ.
- (iii) 位数 1 の任意の有限型不変量 φ に対し, $\varphi(f) = \varphi(g)$ が成立.

また, 次の命題が成立する.

命題 4. 位数 $(n+1)(k-1) - 1$ の有限型不変量 φ は, 位数 (n, k) の有限型不変量である.

3. A_k 同値群

命題 5. 2 つの埋め込み $f, g: G \rightarrow S^3$ が A_k 同値ならば, g はタイプ k の絡み目と f のバンド和にアンビエントアイソトピックである.

埋め込み $h: G \rightarrow S^3$ に対し, $[f_1]_k, [f_2]_k \in [h]_{k-1}/(A_k \text{同値})$ とする. f_1 と f_2 は共に h と A_{k-1} 同値なので, 命題 5 より, $[f_i]_k$ ($i = 1, 2$) の元としてタイプ $k-1$ の絡み目と h とのバンド和 $F(h; \mathcal{L}_i, \mathcal{B}_i)$ がとれる. ここで, バンド \mathcal{B}_1 と \mathcal{L}_1 に関連した 3 次元球体は, バンド \mathcal{B}_2 と \mathcal{L}_2 に関連した 3 次元球体のどちらとも共有点を持たないものとして差し支えない. このとき, 新しいバンド和 $F(h; \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)$ が得られる. そこで,

$$[f_1]_k +_h [f_2]_k = [F(h; \mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2, \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2)]_k.$$

と定義すると、この和 '+_h' は well-defined であり、次の定理を得る。

定理 6. 集合 $[h]_{k-1}/(A_k\text{-equivalence})$ は演算 '+_h' の下で $[h]_k$ を単位元とする可換群になる。

この群を G の $[h]_k$ を単位元とする A_k 同値群と呼び、 $\mathcal{G}_k(h; G)$ で表す。

証明. $[f]_k \in [h]_{k-1}/(A_k\text{同値})$ に対し、逆元が存在することを示せば十分である。 f と h は A_{k-1} 同値なので、命題 5 より、 f, h はそれぞれバンド和 $F(h; \mathcal{L}, \mathcal{B})$, $F(f; \mathcal{L}', \mathcal{B}')$ にアンビエントアイソトピックである。ここで、 $\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ はタイプ $k-1$ の絡み目の集合である。従って、 h は $(F(h; \mathcal{L}, \mathcal{B}); \mathcal{L}', \mathcal{B}')$ とアンビエントアイソトピックとなる。 \mathcal{L}' に関連する 3次元球体とバンド \mathcal{B}' を A_k 同値の範囲で変形することにより、これらは \mathcal{L} に関連する 3次元球体やバンド \mathcal{B} らと共有点を持たないようにできる。従って、 $F(F(h; \mathcal{L}, \mathcal{B}); \mathcal{L}', \mathcal{B}')$ はあるバンド和 $F(h; \mathcal{L} \cup \mathcal{L}'', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'')$ と A_k 同値となり (図 7), 次を得る。

$$[f]_k +_h [F(h; \mathcal{L}'', \mathcal{B}'')]_k = [F(h; \mathcal{L}, \mathcal{B})]_k +_h [F(h; \mathcal{L}'', \mathcal{B}'')]_k = [F(h; \mathcal{L} \cup \mathcal{L}'', \mathcal{B} \cup \mathcal{B}'')]_k = [h]_k.$$

これは、 $[F(h; \mathcal{L}'', \mathcal{B}'')]_k$ が $[f]_k$ の逆元であることに他ならない。 \square

図 7

注意. グラフ G の任意の埋め込み $h: G \rightarrow S^3$ に対し、 $[h]_1$ は G の S^3 への埋め込み全体の集合に一致する。 Yasuhara は [17] において、 $\mathcal{G}_2(h; G)$ をグラフホモロジー群と呼び、この群の実用的な計算方法を与えている。

定理 7. A_{k-1} 同値な 2 つの埋め込み $h_1, h_2: G \rightarrow S^3$ に対し、2 つの群 $\mathcal{G}_k(h_1; G)$, $\mathcal{G}_k(h_2; G)$ は同型である。

命題 8. 自然な射影 $p: [h]_{k-1} \rightarrow [h]_{k-1}/(A_k\text{-equivalence}) = \mathcal{G}_k(h; G)$ は位数 $(1; k)$ の有限型 A_k 同値不変量である。

定理 2 の証明. '必要性' は明らかなので、'十分性' を示す。埋め込み $f, g \in [h]_{k-1}$ に対し、それらの位数 $(1; k)$ の有限型不変量の値は一致しているものとする。命題 8 より、 $p(f) = p(g)$ を得る。ここで、 $p: [h]_{k-1} \rightarrow [h]_{k-1}/(A_k\text{-equivalence}) = \mathcal{G}_k(h; G)$ は自然な射影である。従って、 $[f]_k = [g]_k$ を得る。 \square

4. 結び目の A_k 同値群

この節で扱うグラフは、幾つかのサークルの非交和 $S_1^1 \cup S_2^1 \cup \dots \cup S_\mu^1$ と同相なものとする。埋め込み $h: S_1^1 \cup S_2^1 \cup \dots \cup S_\mu^1 \rightarrow S^3$ に対し、その像 $h(S_1^1 \cup S_2^1 \cup \dots \cup S_\mu^1)$ を L とおく。ただし、 L の成分には向きと順序が指定されているものとする。このとき、 $[h]_k$ を単位元とする A_k 同値群 $\mathcal{G}_k(h; S_1^1 \cup S_2^1 \cup \dots \cup S_\mu^1)$ を $\mathcal{G}_k(L)$ で表す。

定理 9. O を自明な結び目とする。任意の有向結び目 K に対して、 $\mathcal{G}_k(O)$ と $\mathcal{G}_k(K)$ は同型である。

注意. 一般のグラフ $G (\neq S^1)$ と埋め込み $h, h' : G \rightarrow S^3$ に対して, $\mathcal{G}_k(h; G)$ と $\mathcal{G}_k(h'; G)$ は必ずしも同型にならない. 実際, 2成分絡み目 L_1 と L_2 で, $\mathcal{G}_3(L_1)$ と $\mathcal{G}_3(L_2)$ が同型でないものが存在する [15].

Habiro [4] は, 彼独自の理論である ‘clasper theory’ を考案し, それから得られる1つの結果として, 次の補題 (A_k 変形が C_k 変形である場合) を示した. ここでは, Habiro の証明をバンド和の言葉で焼き直したものを与える.

補題 10. (Habiro [4]) 任意の結び目 K と, 任意の整数 $k \geq 1$ に対し, ある結び目 K' で $K' \# K$ が自明な結び目と A_k 同値になるものが存在する.

証明. k に関する帰納法で証明する. $k = 1$ の場合は明らかに成立する. 結び目 K' が存在し, $K' \# K$ が自明な結び目 O と A_{k-1} 同値 ($k > 1$) であると仮定する. 命題 5 より, $O = F(K' \# K; \mathcal{L}, \mathcal{B})$ とおける. ここで, \mathcal{L} はタイプ $k-1$ の結び目の集合とする. 一方, $F(K' \# K; \mathcal{L}, \mathcal{B})$ はある連結和 $K \# F(K'; \mathcal{L}, \mathcal{B}')$ と A_k 同値なる. 従って, 求める結び目 $F(K'; \mathcal{L}, \mathcal{B}')$ が得られる. \square

有向結び目の A_k 同値類全体の集合を \mathcal{K}_k と置く. $[K]_k, [K']_k \in \mathcal{K}_k$ に対し, 和を $[K]_k + [K']_k = [K \# K']_k$ と定めると, 補題 10 より, 次の定理を得る.

定理 11. (Habiro [4]) \mathcal{K}_k は演算 ‘+’ の下で, $[O]_k$ を単位元とする可換群になる.

5. Clasp-pass 同値類の分類

図 8 の局所変形は Habiro により定義されたもので, *clasp-pass* 変形と呼ばれる. *clasp-pass* 変形は C_3 変形と同値な変形である. ここでは, C_3 同値という言葉のかわりに *clasp-pass* 同値という言葉を使うことにする.

Habiro は *clasp-pass* 変形による結び目の分類定理として次の定理を示した. これは, 第 2 節で述べた定理 1 (Habiro) の特別な場合である.

定理 12. [2] [3, Proposition 7.1] S^3 内の 2 つの結び目 K_1, K_2 が *clasp-pass* 同値である為の必要十分条件は, $a_2(K_1) = a_2(K_2)$ が成立することである. ここで, a_i はコンウェイ多項式の i 次の係数を意味する.

図 8

この節では, 次の 4 つの場合: (1) 2成分絡み目; (2) 3成分の絡み目; (3) 代数的分離絡み目; (4) 非交和なサイクルを含まない平面的グラフの空間への埋め込み, に対し, *clasp-pass* 変形に関する分類定理を与える.

先に述べたように, A_2 変形は Murakami-Nakanishi [7] により定義された *delta* 変形と同値な変形である. そこで, A_2 同値という言葉のかわりに *delta* 同値という言葉を採用することにする. 2 つの空間グラフは, *clasp-pass* 同値ならば *delta* 同値であり, 逆は一般には成立しない. 従って, *clasp-pass* 分類より *delta* 分類の方が粗い類別を与える. 有向絡み

目の delta 分類に関しては、既に次の結果が知られている。これは、第 2 節で述べた系 3 の特別な場合である。

定理 13. [7] 絡み目 $L = J_1 \cup \dots \cup J_n$ と $M = K_1 \cup \dots \cup K_n$ に対し、次の 2 条件は同値である。

- (1) L と M は delta 同値である。
- (2) $lk(J_i, J_j) = lk(K_i, K_j)$ ($1 \leq i < j \leq n$) が成立。

ここで、 lk は絡み数を意味する。

絡み目 L に含まれる任意の 2 成分絡み目の絡み数が零のとき、 L を代数的分離絡み目と呼ぶ。上の定理より、代数的分離絡み目全体の集合は自明な絡み目が属する delta 同値類と一致する。次の定理は Habiro 氏の指摘により得られた。

定理 14. 代数的分離絡み目 $L = J_1 \cup \dots \cup J_n$ と $M = K_1 \cup \dots \cup K_n$ に対し、次の 2 条件は同値である。

- (1) L と M は clasp-pass 同値である。
- (2) $a_2(J_i) = a_2(K_i)$ ($1 \leq i \leq n$), $a_3(J_i \cup J_j) \equiv a_3(K_i \cup K_j) \pmod{2}$ ($1 \leq i < j \leq n$) かつ $\mu(J_i \cup J_j \cup J_k) = \mu(K_i \cup K_j \cup K_k)$ ($1 \leq i < j < k \leq n$) が成立。

ここで、 $\mu = \mu_{ijk}$ は Milnor 不変量 [5] を意味する。

定理 15. 2 成分絡み目 $L = J_1 \cup J_2$ と $M = K_1 \cup K_2$ に対し、次の 2 条件は同値である。

- (1) L と M は clasp-pass 同値である。
- (2) $lk(J_1, J_2) = lk(K_1, K_2)$, $a_2(J_i) = a_2(K_i)$ ($i = 1, 2$) かつ $a_3(L) \equiv a_3(M) \pmod{2}$ が成立。

定理 16. 3 成分絡み目 $L = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ と $M = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ に対し、次の 2 条件は同値である。

- (1) L と M は clasp-pass 同値である。
- (2) $lk(J_i, J_j) = lk(K_i, K_j)$ ($1 \leq i < j \leq 3$), $a_2(J_i) = a_2(K_i)$ ($i = 1, 2, 3$), $a_3(J_i \cup J_j) \equiv a_3(K_i \cup K_j) \pmod{2}$ ($1 \leq i < j \leq 3$), $\mu(L) = \mu(M)$ かつ $a_4(L) \equiv a_4(M) \pmod{2}$ 。

ここで、 $\mu(L) = \mu_{123}(L)$ は 3 組の絡み数 $lk(J_1, J_2)$, $lk(J_2, J_3)$, $lk(J_3, J_1)$ の最大公約数を法として定義される Milnor 不変量を意味する。

次の定理は [12, Theorem C] と [8, Theorem 1.3] から直ちに得られる。

定理 17. グラフ G に対し, 次の 2 条件は同値である.

- (1) G の全ての空間グラフが delta 同値である.
- (2) G は平面的であり, 非交和なサイクルの組を含まない.

従って, 平面的かつ非交和なサイクルを含まないグラフの埋め込みは delta 同値の範囲では区別がつかないことがわかる. clasp-pass 同値の範囲では以下の結果を得た.

定理 18. G を非交和なサイクルを含まない平面的グラフとする. f と g を G の S^3 への埋め込みとする. このとき次の 2 条件は同値である.

- (1) $f(G)$ と $g(G)$ は clasp-pass 同値である.
- (2) G の各サイクル γ に対し, $a_2(f(\gamma)) = a_2(g(\gamma))$ が成立する.

グラフ G の埋め込みに対する位数 2 以下の Vassiliev 不変量を v とすると, clasp-pass 同値な 2 つの埋め込み f, g に対し, $v(f) = v(g)$ が成立する [1] [3] [9] [14]. また, a_2 は位数 2 の Vassiliev 不変量である. 従って, 定理 18 より次の系を得る.

系 19. G を非交和なサイクルを含まない平面的グラフとし, f と g を G の S^3 への埋め込みとする. このとき次の 2 条件は同値である.

- (1) $f(G)$ と $g(G)$ は clasp-pass 同値である.
- (2) 位数 2 以下の任意の Vassiliev 不変量 v に対し, $v(f) = v(g)$ が成立する.

References

1. Gusarov, M.: On n -equivalence of knots and invariants of finite degree. In: Viro, O. (ed.) *Topology of Manifolds and Varieties*. Providence, RI: American Mathematical Society, pp. 173-192. 1994
2. K. Habiro: Clasp-pass moves on knots, unpublished.
3. Habiro, K.: Aru musubime no kyokusyo henkei no zoku ni tuite. (Japanese) Master Thesis. University of Tokyo 1994
4. Habiro, K.: Claspers and the Vassiliev skein modules. Ph.D. Thesis. University of Tokyo 1997
5. Milnor, J.: Link groups, *Ann. Math.*, **59**, 177-195 (1954).
6. Murakami, H.: Vassiliev invariants of type two for a link. *Proc. Am. Math. Soc.* **124**, 3889-3896 (1996)
7. Murakami, H., Nakanishi, Y.: On a certain move generating link-homology. *Math. Ann.* **284**, 75-89 (1989)
8. Motohashi, T., Taniyama, K.: Delta unknotting operation and vertex homotopy of spatial graphs. In: S. Suzuki (ed.) *Proceedings of Knots '96 Tokyo*, pp. 185-200. World Scientific Publ. Co. 1997
9. Ohyama, Y.: Vassiliev invariants and similarity of knots. *Proc. Am. Math. Soc.* **123**, 287-291 (1995)

10. Ohyama, Y., Taniyama, K., Yamada, S.: Realization of Vassiliev invariants by unknotting number one knots, preprint.
11. Stanford, T.: Finite-type invariants of knots, links and graphs. *Topology* **35**, 1027-1050 (1996)
12. Taniyama, K.: Cobordism, homotopy and homology of graphs in R^3 , *Topology*, **33**, 509-523 (1994).
13. Taniyama, K.: Homology classification of spatial embeddings of a graph. *Topology Appl.* **65**, 205-228 (1995)
14. Taniyama, K., Yasuhara, A.: Local moves on spatial graphs and finite type invariants, preprint.
15. Taniyama, K., Yasuhara, A.: Clasp-pass moves on knots, links and spatial graphs, preprint
16. Taniyama, K., Yasuhara, A.: Band description of knots and Vassiliev invariants, preprint
17. Yasuhara, A.: Disk/band surface and spatial-graph homology. *Topology Appl.* **69**, 173-191 (1996)
18. Yasuhara, A.: Delta-unknotting operation and adaptability of certain graphs. In: S. Suzuki (ed.) *Proceedings of Knots '96 Tokyo*, pp. 115-121. World Scientific Publ. Co. 1997
19. Wu, W. T.: On the isotopy of a complex in a Euclidean space. *I. Sci. Sin.* **9**, 21-46 (1960)

谷山 公規
〒167-8585
東京都杉並区善福寺 2-6-1
東京女子大学 文理学部 数理学科
e-mail: taniyama@twcu.ac.jp

安原 晃
〒184-8501
東京都小金井市貫井北町 4-1-1
東京学芸大学 教育学部 数学教室
e-mail: yasuhara@u-gakugei.ac.jp

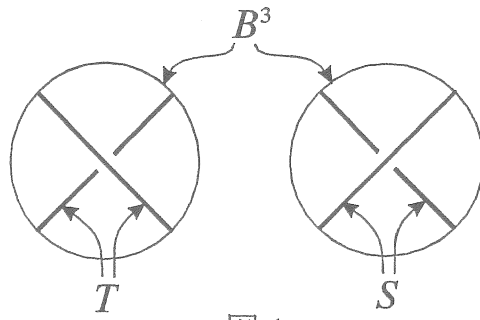


图 1

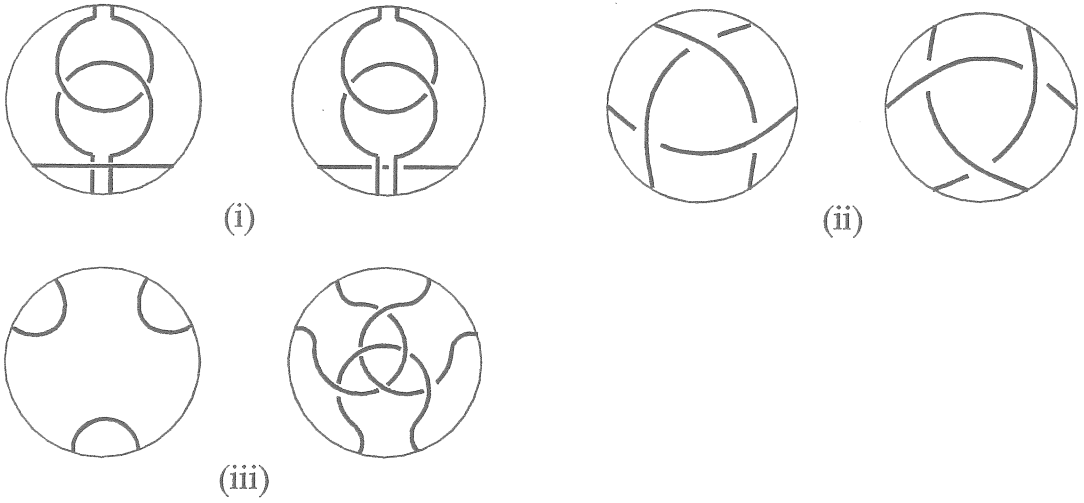


图 2

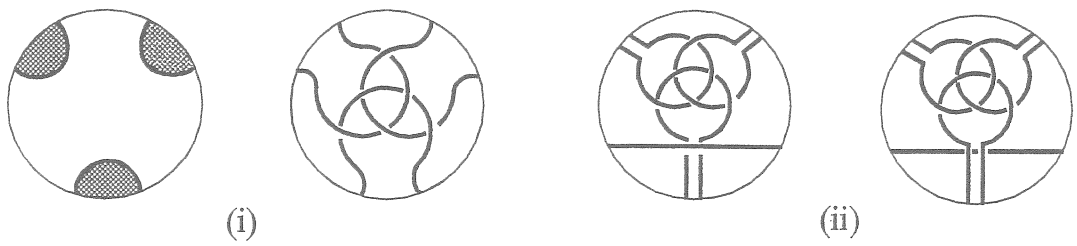


图 3

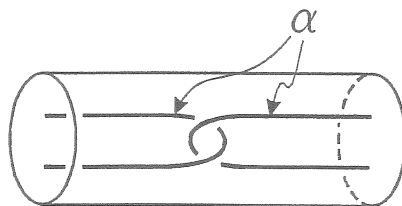


图 4

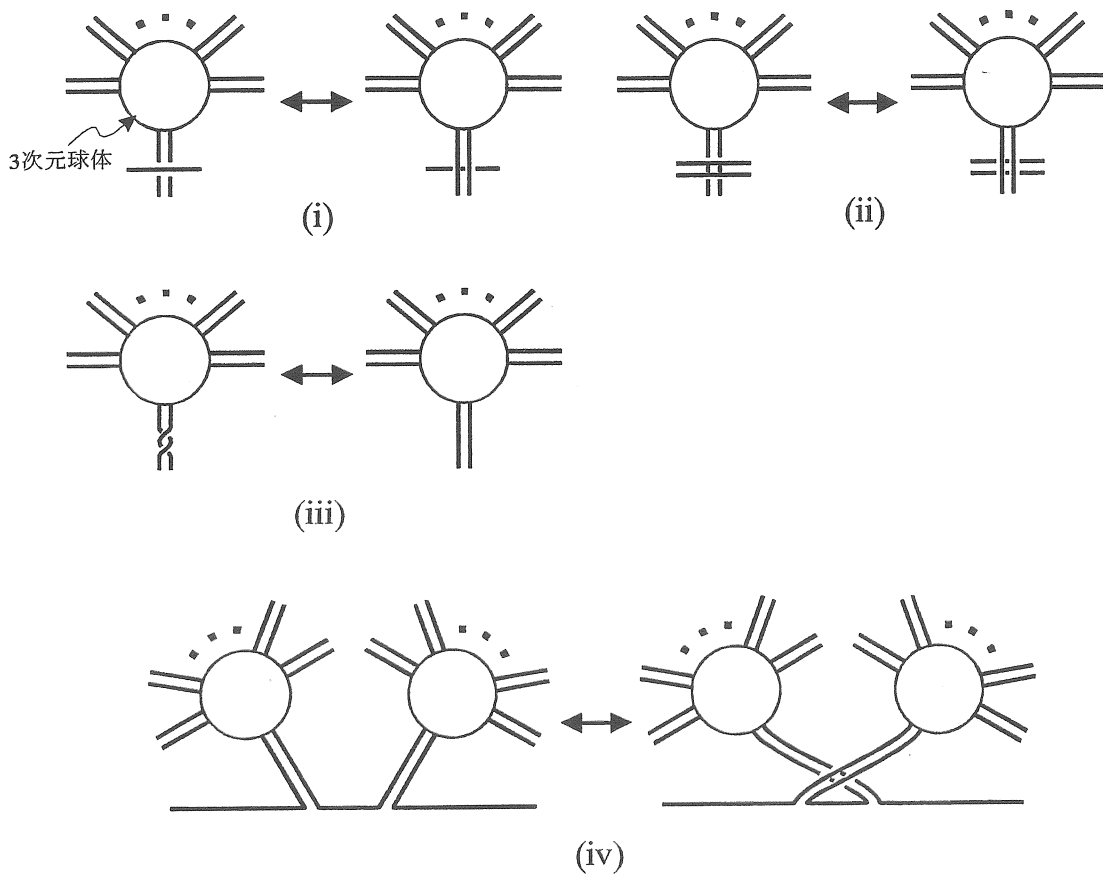


图 5

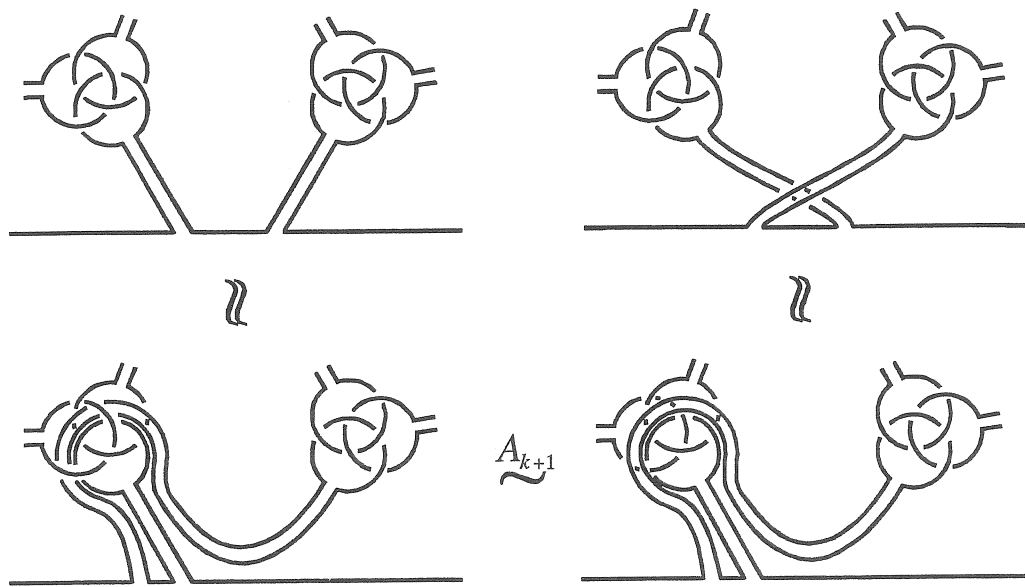


图 6

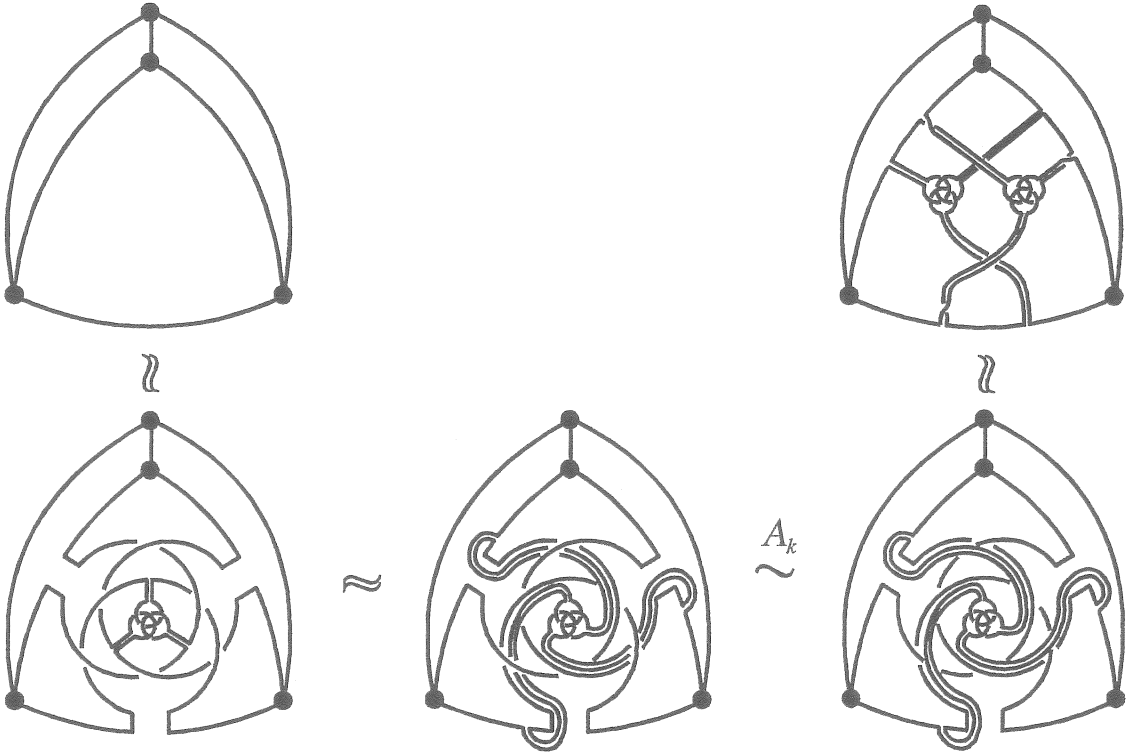


图 7

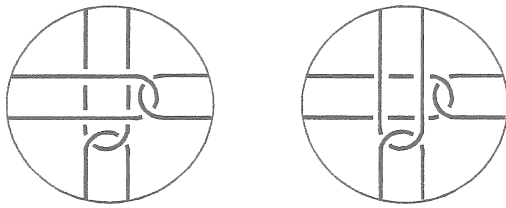


图 8

Projections in 2-knot theory

大阪市立大学理学部 佐藤進

2-knot theory における射影図の役割は、Carter と Saito らによる一連の研究によってすこしずつわかってきています。classical knot theory には図式的に定義できる不変量として、linking number や minimal crossing number がありますが、2-knot theory にもこれらに対応するような不変量が射影図から定義できます。この稿では、surface-knot の射影図がどのようなものかを説明し、筆者の結果を含めて branch point と triple point に関連する話題（特に符号とその和、最小個数について）を取り上げます。この方面の基本的な参考書としては、Carter と Saito による [3] があります。

1. 名称

2次元結び目理論 (2-knot theory) というのは、4次元多様体、特に4次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^4 や4次元球面 S^4 に、局所平坦に埋め込まれた（いくつかの成分をもつ）閉曲面を研究対象とします。この稿では、 \mathbf{R}^4 内の埋め込みを考えます。 \mathbf{R}^4 の ambient isotopy による埋め込みの同値類を、閉曲面が連結のとき surface-knot、閉曲面が非連結のとき surface-link とよびます。どの閉曲面の埋め込みを扱うかを明示したいとき、たとえば球面1個とトーラス2個の埋め込みのときには、 $S^2 \cup T^2 \cup T^2$ -link などと（この稿では）表すことにします。ただし、通称として S^2 -knot は 2-knot といいます。

2. 正則射影と正則表示

はじめに classical knot theory における knot の表示方法を復習します。ふだん \mathbf{R}^3 内の knot を絵に描くとき、射影 $\mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ による像を使いますが、特に \mathbf{R}^2 における自己交差が横断的な crossings だけからなるものを knot の

正則射影といい、その各 crossing のところで、under-path を切り取って上下を表現したものを、結び目の 正則表示 といいます (図 1)。

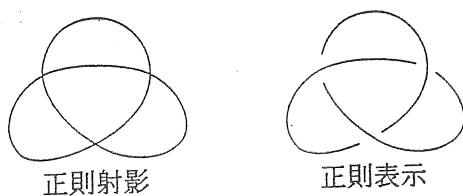


図 1

これに対して、 \mathbf{R}^4 内の surface-knot (または link) を見るときにも、適当な射影 $\mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}^3$ を用いて、 \mathbf{R}^3 へ射影した像を利用することができます。特にその自己交差の閉包 (これを double point set といいます) が、double point curves · triple points · branch points だけからなるものを、surface-knot (または link) の 正則射影 といい、各 double point curve に対して under-sheet を切り取って上下を表現したものを、surface-knot (または link) の 正則表示 ということにします (図 2)。

Carter-Saito の論文等では、正則射影を generic projection、正則表示を broken surface diagram と呼んでいますが、この稿では classical knot theory のアナロジーから、正則射影 · 正則表示の言葉を借りることにします。

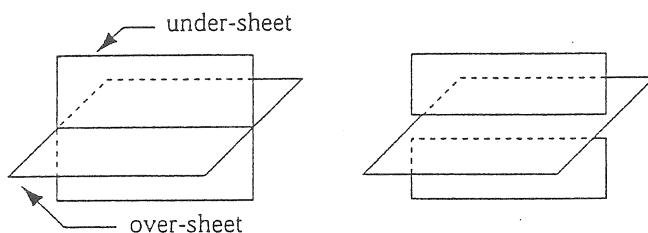


図 2

図 3 には、ある $S^2 \cup T^2 \cup T^2$ -link の正則射影 · 正則表示 · double point set

の例が描いてあります。

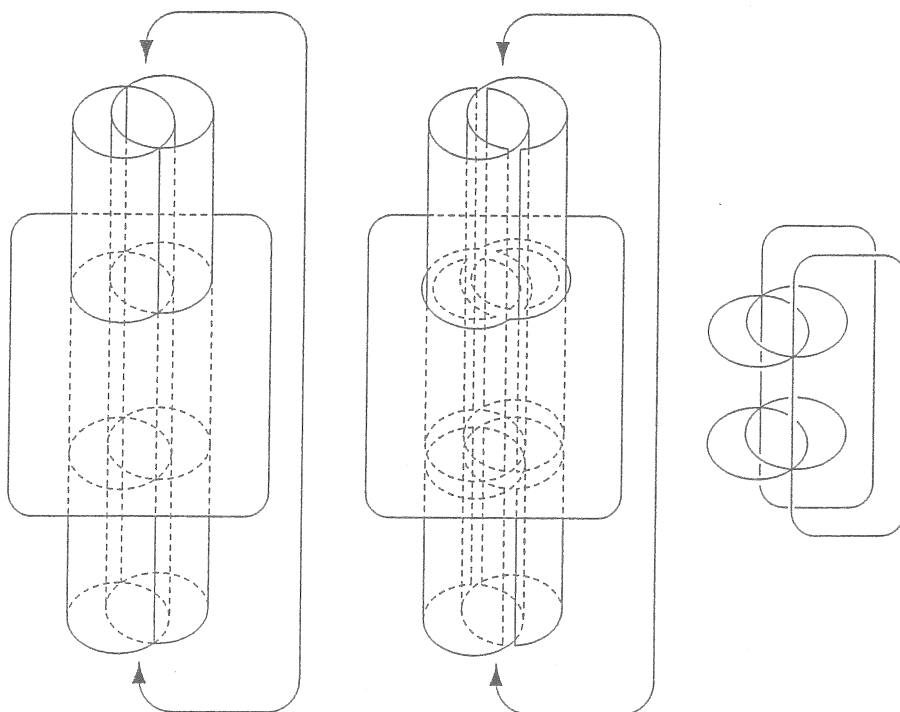


図 3

3. Branch points

この節では、正則射影上の branch point に関する話題を 2 つ挙げます。1 つ目は branch points の符号とその和について、2 つ目は branch points の最小個数についてです。

surface-knot の正則射影における branch point の近傍は、正則表示では図 4 のどちらかになっています。これらは異なるタイプの branch points で、その branch point につながる double point curve の上下の情報からその符号を

普通、図4のように定義します。

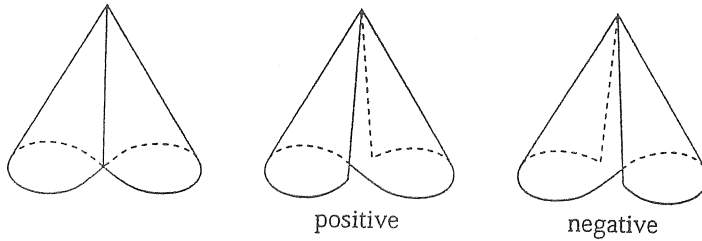


図4

branch points の符号の和に関しては、次の Banchoff の公式 が知られています。したがって、この和は正則射影の取り方によらず surface-knot の不変量になることがわかります。

定理 3.1 ([1]). surface-knot F の正則表示上のすべての branch points にわたる符号の和は、その surface-knot の埋め込みに関する Euler number $e(F)$ に一致する。

この証明は、 F を \mathbf{R}^4 内でわずかにずらして、 F と branch points のところでだけぶつかるものが構成でき、その交点での intersection number がちょうど branch point の符号に一致することから示せます。

つぎに minimal branch point number についてですが、これはちょうど classical knot theory における minimal crossing number のようなもので、与えられた surface-knot のすべての正則射影を考えて、その上にある branch points の最小個数として定義されます。これに関しては、すでに Carter と Saito によって完全に決定されています (定理 3.1 と比較してみてください)。

定理 3.2 ([2]). surface-knot F の minimal branch point number は、 $|e(F)|$ である。

この証明のポイントは図5に描いてあります。詳しい証明は [2] を見てください。

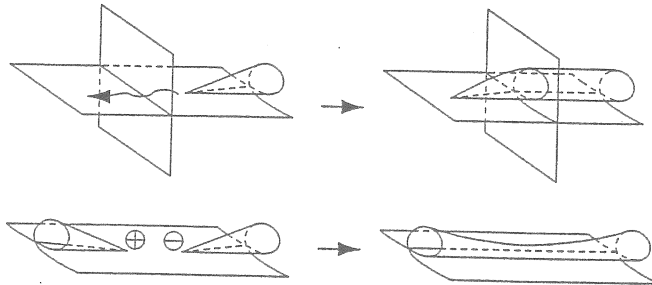


図5

ここで Whitney-Massey の定理を挙げておきます。

定理 3.3 ([6]). surface-knot F が orientable なとき、つねに $e(F) = 0$ であり、non-orientable なとき、 $e(F)$ がとりうる値は $2\chi - 4, 2\chi, \dots, 4 - 2\chi$ である。ただし、 χ は F の Euler 標数とする。

定理 3.2 と 3.3 を合わせると、たとえば orientable surface-knot は branch point を含まない正則射影（このとき \mathbf{R}^3 へのはめ込みになる）をもつこと、また P^2 -knot（射影平面の埋め込み）は branch points をちょうど 2 個持つ正則射影をもつことなどがわかります。

4. Triple points

この節では、正則射影上にある triple points に関連する 3 つの話題、

- ・ 一般の surface-link の場合に定義できる $\{0, 1\}$ に値をとる不変量、
 - ・ oriented surface-link の場合に定義できる整数値をとる不変量、
 - ・ 正則射影上の triple points の最小個数、
- についてふれます。

いま、 n 成分の oriented surface-link を $F = F_1 \cup F_2 \cup \dots \cup F_n$ とします。ただし各 F_i は orientable でも non-orientable でも構いません。 F のある正則表示上の triple point に対し、upper sheet が F_i に、middle sheet が F_j に、lower sheet が F_k に属するようなものを、 (i, j, k) タイプの triple point とよぶことにします (図6)。また F の正則表示上で、 (i, j, k) タイプの triple points の個数を $N(i, j, k)$ とおくことにします。

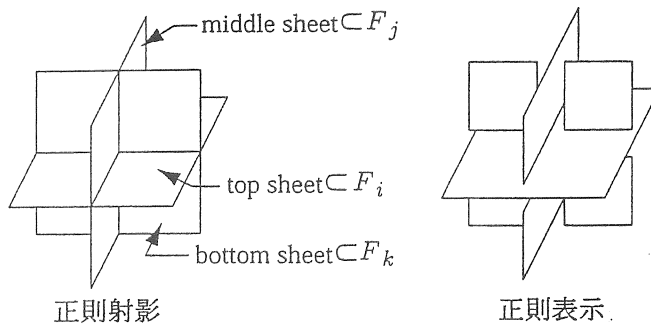


図6

図5上の変形において、 (i, i, j) タイプまたは (i, j, j) タイプの triple point が1個生じますから、たとえば $N(i, i, j)$ や $N(i, j, j)$ は F の不変量にはなりません。さらにもっと一般にどの $N(i, j, k)$ も不変量にはなりません。しかし、次のことが成り立ちます。

定理 4.1. (1) $i \neq j \neq k$ ならば、 $N(i, j, k) \pmod{2}$ は F の不変量になる。すなわち F の正則表示の取り方によらない。

(2) 2成分の surface-link $F = F_1 \cup F_2$ の場合、

$$N(1, 2, 1) \equiv N(2, 1, 2) \pmod{2},$$

特に F_1 と F_2 が orientable ならば、

$$N(1, 2, 1) \equiv N(2, 1, 2) \equiv 0 \pmod{2}.$$

(3) 3成分の surface-link $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ の場合、 $a + b + c \equiv 0 \pmod{2}$ を満たす適当な $a, b, c \in \{0, 1\}$ があって、

$$N(1, 2, 3) \equiv N(3, 2, 1) \equiv a \pmod{2},$$

$$N(3, 1, 2) \equiv N(2, 1, 3) \equiv b \pmod{2},$$

$$N(2, 3, 1) \equiv N(1, 3, 2) \equiv c \pmod{2}.$$

証明は省略します。ただし F のどの成分も orientable な場合は、後で述べる定理 4.2 から導くこともできます。non-trivial な例を挙げると、 $P^2 \cup P^2$ -link で、 $N(1, 2, 1) \equiv N(2, 1, 2) \equiv 1 \pmod{2}$ となるものがあります。

F を oriented (F のどの連結成分も orientable で orientation が指定されているもの) に限定すると、今度は整数値をとる不変量を構成することができます。そのためにまず triple point の符号について説明します。

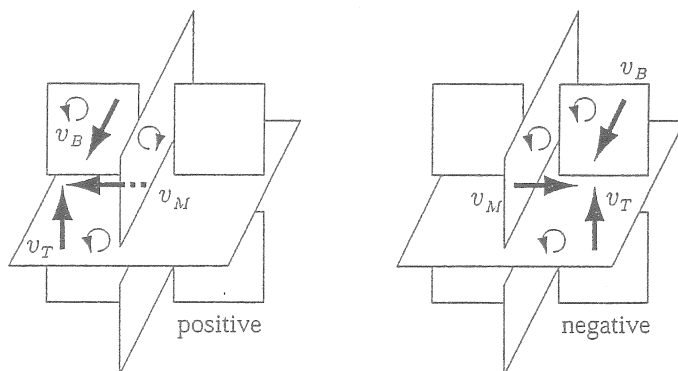


図 7

oriented surface-knot (または link) の正則表示上にある、各 triple point のまわりの upper · middle · bottle sheet に垂直なベクトルを、順に v_T, v_M, v_B とします (図 7 参照)。ただしこれらのベクトルは、それぞれの sheet の 裏から表 を指し示しているものにとります (ここで surface-knot の orientation を使い

ます)。そこで、ベクトルの3つ組 (v_T, v_M, v_B) が右手系ならその triple point の符号は正、左手系なら負、と定義します。

このとき、ちょうど classical knot theory における linking number に対応する形で、正則表示上における (i, j, k) タイプの triple points に限って符号の和をとったものを $T(i, j, k)$ とおくと、次のことが成り立つことが、最近の Carter らの研究によって示されました。

定理 4.2 ([4]). (1) $i \neq j \neq k$ ならば、 $T(i, j, k)$ は oriented surface-link の不変量になる。すなわち、oriented surface-link の正則表示の取り方によらない。
 (2) 2成分の oriented surface-link $F = F_1 \cup F_2$ の場合、

$$T(1, 2, 1) = T(2, 1, 2) = 0.$$

(3) 3成分の oriented surface-link $F = F_1 \cup F_2 \cup F_3$ の場合、 $a + b + c = 0$ を満たす適当な整数 a, b, c があって、

$$T(1, 2, 3) = -T(3, 2, 1) = a,$$

$$T(3, 1, 2) = -T(2, 1, 3) = b,$$

$$T(2, 3, 1) = -T(1, 3, 2) = c.$$

逆に $a + b + c = 0$ を満たす任意の整数 a, b, c に対して、上の等式を満たす3成分の oriented surface-link が存在する。

この $T(i, j, k)$ を triple point invariant といいます。ちなみに図3は彼らが [4] で構成したもので、これを利用して (3) の後半を示しています。明らかに $N(i, j, k) \equiv T(i, j, k) \pmod{2}$ ですから、その意味で orientable の場合は $N(i, j, k) \pmod{2}$ は $T(i, j, k)$ より劣っていますが、前者は non-orientable でも定義できるという点で、それなりに意味があるかもしれません。

最後に triple points の最小個数の話をします。surface-knot (または link) F の minimal triple point number あるいは単に triple point number とは、 F

のすべての正則射影を考えて、その上にある triple points の個数の最小値のことと定義します。これを $t(F)$ で表します。branch points の最小数と違ってこちらはよくわかっていないのが現状です。

\mathbb{R}^4 内の trivial 2-link (3-balls の埋め込みの境界になっているもの) に対して、1-handles をはって得られる surface-knot (または link) を、ribbon といいます。ribbon surface-knot (または link) F は $t(F) = 0$ をみたましますから、classical knot theory の minimal crossing number と違い、 $t(F) = 0$ だからといって F が trivial であるとは限りません。また一般には $t(F) = 0$ をみたます non-ribbon な F がありますが、 F が S^2 と同相なときは次のことが知られています。

定理 4.3 ([9]). 2-knot K が $t(K) = 0$ をみたますならば、 K は ribbon である。

surface-knot (または link) に対して 1 本の 1-handle をうまく貼ると、その正則射影で triple point を 1 個消去することができる (図 8 参照) ことなどを用いて、2-knot の場合に次のことが証明されています。

定理 4.4 ([5]). 任意の自然数 n に対して、ある 2-knot K で $t(K) > n$ をみたますものが存在する。

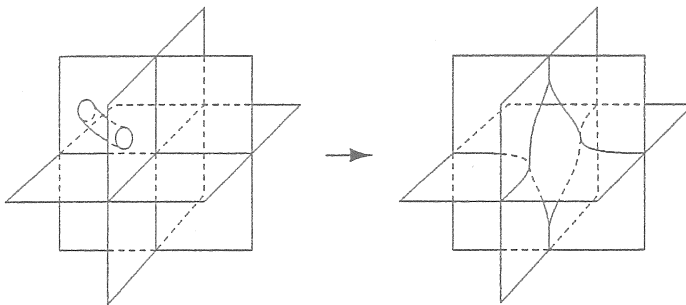


図 8

また、一般に次のことも成り立ちます。

命題 4.5 ([7]). 任意の surface-knot (または link) F に対して、 $t(F) \neq 1$.

$t(F) = 0$ 以外で、 $t(F)$ の値が決まっている例として、次のものが挙げられます。これは P^2 -irreducible な surface-link (trivial P^2 -knot との連結和に分解されないもの) に対して、triple point number の下からの評価を与えて証明できます。

定理 4.6 ([8]). 任意の自然数 m に対して、ある 2 成分の surface-link $F = F_1 \cup F_2$ で $t(F) = 2m$ をみたすものが存在する。

詳しくいうと、各 F_i は non-orientable で、Euler 標数が $2 - m$ のものです。さらに x, y をそれぞれの meridian として、 \mathbf{R}^4 における F の補空間の基本群 $\pi_1(\mathbf{R}^4 - F)$ が

$$\langle x, y \mid xyx = y, yxy = x \rangle$$

という表示を持ちます。以上をまとめてこの稿を終わりにします。

$t(F)$	0	1	2	3	4	5	...
2-knot	○ (ribbon)	×	? (†)	?	?	?	... (††)
一般	○ (ribbon とは限らない)	×	○ ($P^2 \cup P^2$)	?	○ ($Kb^2 \cup Kb^2$)	?	...

(†) あるとすれば $t(K) = 2$ を与える正則射影は branch points を含む (志摩による)。

(††) いくらでも大きな $t(K)$ をもつ 2-knot の存在は保証されている。

参考文献

- [1] T. F. Banchoff; *Double tangency theorems for pairs of submanifolds*, in Geometry Symposium Utrecht 1980 ed. Looijenga, Seirnsma, and Takens, LNM v. 894, Springer-Verlag (1981), pp. 26-48.
- [2] J. S. Carter and M. Saito; *Canceling branch points on projections of surfaces in 4-space*, Proc. of the AMS. **116**, No. 1 (Sept. 1992), 229-237.
- [3] J. S. Carter and M. Saito; *Knotted surfaces and their diagrams*, Surveys and monographs, vol. 55, A.M.S., Jan. 1998.
- [4] J. S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford and M. Saito; *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*, preprint.

- [5] S. Kamada; *2-dimensional braids and chart descriptions*, In: topics in knot theory (Erzurum/Turkey, 1992), 277-287, NATO ASI Ser. C, 399, Kluwer Academic Publ.
- [6] W. S. Massey, *Proof of a conjecture of Whitney*, Pacific J. Math. 31 (1969), pp. 143-156.
- [7] S. Satoh; *On non-orientable surfaces in 4-space which are projected with at most one triple point*, to appear in Proc. of the AMS.
- [8] S. Satoh; *Minimal triple point numbers of some non-orientable surface-links*, preprint.
- [9] T. Yajima; *On simply knotted spheres in \mathbb{R}^4* , Osaka j. Math. 1 (1969), 133-152.

HAWAIIAN EARRING の基本群について (1次元ペアノ空間の基本群)

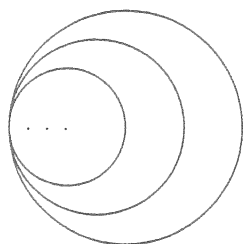
江田 勝哉

Hawaiian earring \mathbb{H} とは xy -平面の部分空間

$$\mathbb{H} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{(x, y) : (x - 1/n)^2 + y^2 = 1/n^2\}$$

です。

図 (1)



この空間は Algebraic Topology では色々なところに典型的な反例として現れる空間です。この話では次の定理の証明の概略を述べるを目標としながらこの Hawaiian earring の基本群のもつ性質を説明しようと思います。

空間 X が点 x で擬局所単連結 (semi-locally simply connected) であるとは、 x の近傍 U が存在し、 U の中の x を端点とする loop が null-homotopic であることである。ペアノ空間とは閉区間 $[0, 1]$ の連続像、つまり、連結、局所連結、コンパクト距離空間である。

定理 [8]. X, Y が 1次元ペアノ空間でいかなる点でも擬局所単連結でないとする。このとき、 X と Y の基本群が同型ならば X と Y は位相同型となる。

もちろん、この定理はすべての点で擬局所単連結でないというかなり異常な空間に対して成立するものですが、普通の空間を考える限りとても成立しそうなことです。もともと、このことを証明しようとしたのではなく、Hawaiian earring, Sierpinski gasket, Sierpinski carpet, Menger curve の基本群が非同型であるということを証明しようと思っていたので証明があっているらしいと思った後も何回か反例をつくろうとしました。どうも、成立するように思えなかったからです。以下で擬局所単連結でない点のことを wild point といいます。

この証明では Hawaiian earring の基本群が大きな役割をはたします。Hawaiian earring は一点でのみが wild point である空間ですから、定理の対象となっている空間ではありませんが、これらの空間は Hawaiian earring の重ね合わせでできているという感覚で考えると良いかもしれません。Hawaiian earring の基本群の性質として次の3つがこの証明に役立ちます。

- (1) スペッカー現象
- (2) 無限非可換性
- (3) 擬粒子性

スペッカー現象という名前は A. Blass [1] が 5 年程前に名付けたもので、次の定理をもとに命名しました。

Specker の定理 (1950) [18] $\text{Hom}(\mathbb{Z}^\omega, \mathbb{Z}) = \bigoplus_{n \in \omega} \langle p_n \rangle$ 、ここで p_n は射影。

この定理はあまり知られていないので少し説明します。(ω は非負整数の集合で最小の無限順序数を表します。) $\text{Hom}(\mathbb{Z}^\omega, \mathbb{Q})$ を考えますと、その濃度は $2^{2^{\aleph_0}}$ つまり実数の集合の部分集合全体の濃度となりとても大きいものとなります。つまり、訳のわからない準同型写像が沢山あることになるわけですが、 $\text{Hom}(\mathbb{Z}^\omega, \mathbb{Z})$ ですと準同型写像は自然な準同型写像以外にはないということをいっています。このことから自由アーベル群はある濃度まで \mathbb{Z} -reflexive となることが知られています。この定理は 2 年後の 1952 年 G.Higman [16] によって非可換に拡

張されました。 \mathbb{Z}^ω の代わりに $\varprojlim (*_{i < n} \mathbb{Z}_i : m \leq n < \omega)$ つまり有限生成の自由群の逆極限です。そして写像のいく先は自由群です。また $\varprojlim (*_{i < n} \mathbb{Z}_i : m \leq n < \omega)$ の代わりにその部分群 $*_{n < \omega} \mathbb{Z}_n$ でも成立することを述べています。この $*_{n < \omega} \mathbb{Z}_n$ が Hawaiian earring の基本群です。しかし、この群が Hawaiian earring の基本群であることが示されたのはその後の H.B.Griffiths [15] によるものです。(この証明にはギャップがあつて 1985 年 Morgan-Morrison [17] によってギャップが埋められたとされています。8 の字の空間は Hawaiian earring のレトラクトですから、Hawaiian earring の基本群の表示についての証明は 2 次の自由群となる場合の証明を含んでいなければなりません。Griffiths の証明というのはそうになっていなかったのです。逆にいえば、Griffiths の証明というのは「無限特有問題の処理の仕方」が書いてあるので円周が有限個の場合の証明を融合させれば正しい証明となっているのです。ですから、僕は証明にギャップがあつたというよりも「無限特有の処理の仕方」しか書いてなかったという方があつていると思います。)

Higman の証明したことを Hawaiian earring を使って述べると次のようになります。ここで $r_n : \mathbb{H} \rightarrow \bigcup_{i=1}^n \{(x, y) : (x - 1/i)^2 + y^2 = 1/i^2\}$ を $\bigcup_{i=n+1}^\infty \{(x, y) : (x - 1/i)^2 + y^2 = 1/i^2\}$ を o につぶすレトラクションとします。

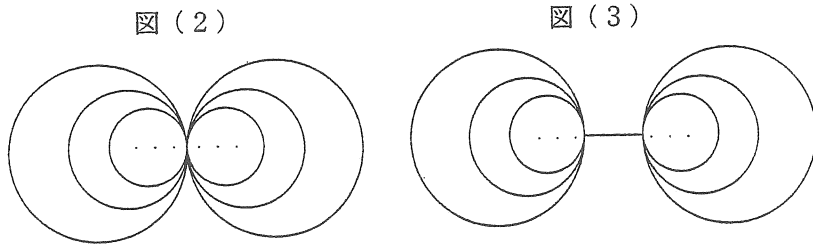
任意の準同型写像 $h : \pi_1(\mathbb{H}, o) \rightarrow F$ (F は自由群) にたいして $n < \omega$ と $\bar{h} : \pi_1(\bigcup_{i=1}^n \{(x, y) : (x - 1/i)^2 + y^2 = 1/i^2\}, o) \rightarrow F$ が存在し、 $h = \bar{h} \circ r_{n*}$ が成立する。

ここで F を Bouquet B の基本群と思つておくと、Bouquet は wild point がありませんから、結局 $h = \bar{h} \circ r_{n*}$ が成立するということは $f : \mathbb{H} \rightarrow B$ があつて $h = f_*$ となるということと同じことです。定理の証明に使うときはこれをもう少し押し進めたもの (*) 及びその一般化を使います。けれども、この上記の事実、つまり「自然な準同型写像」しか存在しないこと、そして「自然な準同型写像」とは連続写像で引

き起こされる写像であること、が代数的なものから空間的なものを引き出す基本的道具です。

次は無限非可換性です。基本群は非可換で、特異ホモロジー群は弧連結空間についてはそのアーベル化であることがよく知られています。しかし、それらの知られた性質だけに着目しても、そして特殊な空間に限ったとしても基本群にホモトピーに関する情報だけでなく位相構造の情報が入っているという感覚をもつことはできません。次の図(3)のような空間の区間の部分は局所的に良い性質をもっている空間では1点につぶしてもホモトピックであって図(2)と基本群に変わりがありませんが wild point が両端だとそうはいかないというところに着目します。

\mathbb{H} のコピーを $\mathbb{H}_e, \mathbb{H}_o$ (偶数番目の円周を集めたものと奇数番目の円周を集めたもの) とし、下図のような one point union と区間を使ってつないだものを考えます。



図(2)は Hawaiian earring と同相ですから基本群は $\ast_{n<\omega} \mathbb{Z}_n$ ですが、図(3)の基本群は自由積 $\ast_{n<\omega} \mathbb{Z}_{2n} \ast \ast_{n<\omega} \mathbb{Z}_{2n+1}$ です。この2つの群が同型でないということは次のようにしていえます。スペッカー現象によって、

(*) 任意の準同型写像 $h : \pi_1(\mathbb{H}, o) \rightarrow \pi_1(\mathbb{H}, o)$ は連続写像 $f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}$ ただし $f(o) = o$ と u によって $h = u^{-1} f_* u$ (つまり $h(x) = u^{-1} f_*(x) u$ がすべての x について成立する) という形で表されます [11, 2.11].

自由積の群は $\ast_{n<\omega} \mathbb{Z}_n$ の部分群であることからこれを使うことにより非同型であることがいえます。ここには無限非可換性ともいべき性質が関係しています。それは次のことからわかります。まず図において Hawaiian earring を Bouquet で置き換えます。すると基本群は共に可算生成の自由群であり、それらは標準的に同型です。1つの loop は Bouquet には有限回しか巻き付けないのでこうなるのですから、無限性が関係していることがわかります。次に Hawaiian earring を n -次の Hawaiian earring で置き換え n 次 Homotopy 群を考えます (ただし $n \geq 2$)。図 (1) に対応するものは \mathbb{Z}^ω となり [13]、図 (2) に対応するものは $\prod_{n<\omega} \mathbb{Z}_{2n} \oplus \prod_{n<\omega} \mathbb{Z}_{2n+1}$ となり標準的に同型です。このことから非可換性が関係していることがわかります。(n 次の Hawaiian earring の n 次 Homotopy 群が \mathbb{Z}^ω となることは n 次 Homotopy 群がただ可換であるというだけでなく、無限可換であるという側面を表していますが、このところは Whitehead 積との関係がありまだよくわからないことがあります。) この無限非可換性により2つの図形がくっついているか離れているかを表現できることになります。とくに X が1次元ペアノ連続体でどの点も wild point ならば基本群の情報が位相の情報を与える可能性が見えてきます。

(*) は $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ から1次元の空間 $\pi_1(X, x_0)$ への準同型写像 h の場合に拡張されます。つまり連続写像 $f: \mathbb{H} \rightarrow X$ と $f(o)$ から x_0 への path p があって $h = (p^{-1}fp)_*$ が成立します。これにより、単射 $i: \pi_1(X) \rightarrow \pi_1(Y)$ と X の wild point x に対して Y の wild point $\tilde{i}(x)$ が一意に存在し、 \tilde{i} は連続になります。この連続写像の存在が定理の証明では決定的な部分です。定理の条件のもとでは基本群が同型なので両方から連続写像が与えられます。それから空間の位相同型が導かれます。

この $\tilde{i}(x)$ が一意に存在するということを支える代数的な性質が $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ の擬粒子性ともいえる次の性質です。

$\pi_1(\mathbb{H}, o) \simeq A * B$ のとき A または B は有限生成である。

$\pi_1(\mathbb{H}, o)$ は最初の m 番目までの部分と残りの部分に標準的に $*_{i=0}^m \mathbb{Z}_n *$ $\times_{n \geq m} \mathbb{Z}_n$ と自由積に分解できますが図(3)の基本群 $\times_{n < \omega} \mathbb{Z}_{2n} * \times_{n < \omega} \mathbb{Z}_{2n+1}$ には分解されません。それだけでなく、どうやっても必ず一方は有限生成となります。図(2)の基本群が $\times_{n < \omega} \mathbb{Z}_n$ となることから、wild point の周りの基本群の性質は準同型写像により有限生成に潰されない限り写された先でもほとんどがある一点に関する情報であり続けるということです。これでほぼ証明の筋の説明が終わりです。Preprint はホームページに dvi-file をおいてありますので詳しいことはそちらをごらん下さい。 $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ の擬粒子性についてはもう少し一般的なことも成立するので次のように予想しています。

(予想) $A * B$ が $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ の準同型像ならば A または B は有限生成である。

Hawaiian earring の基本群の表示は H.B.Griffiths によって最初になされたことは述べました。この群は有限生成の自由群の逆極限の部分群となるため逆極限の要素としての表示を使うことも考えられますが、これは群の性質を研究するにはあまり具合が良くありません。自由群や自由積と同じように語として表すことが考え易いのです。ただ、この語は無限の長さ、たとえば有理数の順序にならんだ語です。無限語は [10] で導入し代数的性質を調べましたが、その後、筑波大学の川村一宏さんが 1 次元の空間 X の特異ホモロジー群 $H_1(X)$ が torsion-free であるということを証明したので $H_1(\mathbb{H})$ は次のように表されることがわかりました [14]。

$$H_1(\mathbb{H}) \simeq \mathbb{Z}^\omega \oplus \prod_{p:\text{prime}} A_p \oplus \bigoplus_{2^n} \mathbb{Q},$$

ここで A_p は $\bigoplus_{2^n} \mathbb{J}_p$ の p -進完備化で \mathbb{J}_p は p -進整数群である。

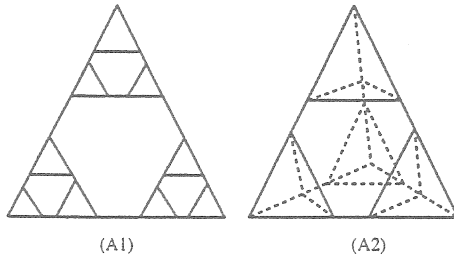
この $\prod_{p:\text{prime}} A_p \oplus \bigoplus_{2^n} \mathbb{Q}$ の部分は torsionfree algebraically compact となっている部分ですが何か空間的な性質を表しているようには見えません。この部分はつぎの性質をもっています。($n!$ の代わり p^n としたのも成立します。)

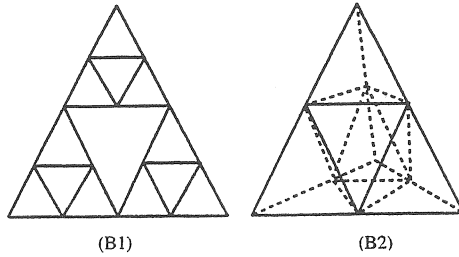
アーベル群 A の要素の列 $a_n (n < \omega)$ が $(n+1)! \mid a_{n+1} - a_n$ を満たせば $(n+1)! \mid a_\infty - a_n$ がすべての n について成立する a_∞ が存在する。

第一可算の空間 X に wild point が存在すると $H_1(X)$ にこの性質をもつ部分群が現れます。ですから、この $\prod_{p:\text{prime}} A_p \oplus \bigoplus_{2^k_0} \mathbb{Q}$ の部分は空間のなかに wild な点があることを表していると考えていいと思います。もちろん、どんな群も CW-複体の基本群になれるのですから \mathbb{Q} や \mathbb{J}_p も π_1 そして H_1 になることはあるのですがそれらは群から無理矢理につくった空間で、先に空間として存在しているものではないので、このように考えてよいと思います。

その他この話と関係のある結果を述べます。

1. (J. W. Cannon-G. Conner [4]) 一次元空間から一次元空間への埋め込みは基本群の間の埋め込みを引き起こす。
2. 1次元ペアノ連続体の基本群が $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ と同型であるのは、ある一点だけが wild point であるときである [8]。
3. 1次元ペアノ連続体に円周のコピー C があり、この C の点すべてが wild point ならばその基本群は $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ の部分群と同型にならない [9]。
4. 3の結果、次の図 B(1), B(2) の空間の基本群は $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ の部分群と同型でないが図 A(1), A(2) の空間の基本群は $\pi_1(\mathbb{H}, o)$ の部分群と同型となる [7]。





1 と 3 の結果から 1 次元ペアノ連続体の基本群を研究するのならば Menger sponge の基本群を調べることが本質的であることがわかります。[7] で無限語を使って edge-path group を無限化することをしましたが、無限語のかわりに Menger curve の path を語と思うということが考えられます。このことは、まだよく考えていません。

REFERENCES

1. A. Blass, *Cardinal characteristics and the product of countably many infinite cyclic groups*, J. Algebra **169** (1994), 512-540.
2. J. W. Cannon and G. R. Conner, *The combinatorial structure of the Hawaiian earring group*, preprint.
3. ———, *The big fundamental group, big Hawaiian earrings, and the big free groups*, preprint.
4. ———, *On the fundamental groups of one dimensional spaces*, preprint.
5. M. L. Curtis and M. Fort, Jr., *The fundamental group of one-dimensional spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **10** (1959), 140-148.
6. K. Eda, *Free subgroups of the fundamental groups of the Hawaiian earring*, J. Algebra, to appear.
7. ———, *The fundamental groups of certain one-dimensional spaces*, Tokyo J. Math., to appear.
8. ———, *The fundamental groups of one-dimensional spaces and spatial homomorphisms*, preprint.
9. ———, *The fundamental groups of one-dimensional wild spaces and the Hawaiian earring*, preprint.
10. ———, *Free σ -products and noncommutatively slender groups*, J. Algebra **148** (1992), 243-263.
11. ———, *Free σ -products and fundamental groups of subspaces of the plane*, Top. Appl. **84** (1998), 283-306.
12. ———, *The non-commutative Specker phenomenon*, J. Algebra **204** (1998), 95-107.
13. K. Eda and K. Kawamura, *Homotopy groups and homology groups the n -dimensional Hawaiian earring*, preprint.
14. ———, *The singular homology of the Hawaiian earring*, preprint.

15. H. B. Griffiths, *Infinite products of semigroups and local connectivity*, Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 455-485.
16. G. Higman, *Unrestricted free products, and variety of topological groups*, J. London Math. Soc. 27 (1952), 73-81.
17. J. W. Morgan and I. A. Morrison, *A Van Kampen theorem for weak joins*, Proc. London Math. Soc. 53 (1986), 562-576.
18. E. Specker, *Additive Gruppen von folgen ganzer Zahlen*, Portugal. Math. 9 (1950), 131-140.

早稲田大学理工学部, 東京都新宿区大久保, 〒169-0072
E-mail address: eda@logic.info.waseda.ac.jp

曲面の写像類群と指数コサイクルと ρ -不変量

笠川 良司

東京工業大学大学院理工学研究科数学専攻 研究生

1. 序文

G を群とし、 c を非自明な 2-コサイクルとする。 c は G の 2 次元コホモロジー類を定めるが、それが自明な類である場合を考える。この時、 G の 1-コチェイン d 、即ち G 上の関数で、そのコバウンダリーが c に一致するものが存在する。この事は、コホモロジー群の定義からすぐ分かる事実である。従って、1-コチェイン d がどのように書き下せるかが問題になってくる。群 G と 2-コサイクル c が共に幾何学的に定義される場合、更に 1-コチェイン d の幾何学的意味は何かが当然問題として生じる。この様な例として、群を $SL(2, \mathbb{Z})$ 、2-コサイクルとして Meyer の指数コサイクルが挙げられる [1, 12, 15]。このコサイクルは $SL(2, \mathbb{Z})$ の整数係数 2 次元コホモロジー群にねじれ元を定めることが知られている。従って、有理数係数では自明なコホモロジー類となるので、コバウンダリーが Meyer の指数コサイクルである $SL(2, \mathbb{Z})$ 上の有理数関数、即ち Meyer 関数が得られる。この場合は更に、一意性が保証される。Atiyah により、双曲的元に限るが Meyer 関数は以下を鍵とする六通りの解釈が与えられている [1]。Hirzebruch の指数欠損、Dedekind の η 関数、Quillen の determinant line bundle、志村 L-関数、Atiyah-Patodi-Singer η -不変量、断熱極限。この様に幾何学的意味を考えることにより、Meyer 関数の重要性が認識される。

この例の拡張として、任意種数の曲面の超楕円的写像類群と Meyer の指数コサイクルがある。指数コサイクル自体は曲面の全写像類群上に定義され一般には有理数係数でも自明にはならないが、写像類群の部分群である超楕円的写像類群に制限すると、上記と全く同じ状況になる。よって、超楕円的写像類群上の関数が得られる。これも Meyer 関数と呼ばれる [6, 14, 18]。この関数の幾何学的解釈は上記、即ち種数 1 の場合と比べるとまだまだ少ない。従って、幾何学的意味を与えることはこれからの問題である。

一般的な設定に戻って、群 G の 2-コサイクル c が非自明なコホモロジー類を定める場合を考える。この場合は、更に別の 2-コサイクル d' があり、 c と同じコホモロジー類を代表していると仮定する。従って、それらの差 $c - d'$ は自明な類を定めるので、 G 上のある関数 d' のコバウンダリーになっている。この設定でも前と同様に G, c, d' の全てが幾何学的に与えられている場合、 d' の幾何学的解釈が問題となる。この様な例としては、森田茂之氏による例がある [19, 20]。群として境界を一つ持った曲面の写像類群、2-コサイクルとしては Meyer の指数コサイクルと森田氏自身による交叉コサイクルをとる。この場合は、これらのある線型結合をとると自明なコホモロジー類となり、従って、その写像類群上の関数が得られる。この関数は、Heegaard 分解を経由して、3 次元ホモロジー球面の Casson 不変量と深く結びついていることが森田氏によって示されている。

以上の二例は成功した例であるが、たとえ上記の仮定を満たさなくても幾何学的手法で具体的に 2-コサイクルを与えることは意味があると考えられる。ここでは、主に曲面の写像類群、もしくはその部分群上に多様体の指数から得られる 2-コサイクルを構成し、それらの差の幾何学的解釈を与える。このことは以下に示されるように 2-コサイクルの構

成から明らかなのであるが、写像類群の言葉で書き直した恩恵として、特に種数 1, 2 の Meyer 関数への応用を述べる。

2. 群のコホモロジー

この節では群のコホモロジー群の定義を復習する [5]。\$G\$ を群とし、\$M\$ を \$G\$-加群とする。コチェイン複体 \$C^*(G, M)\$ を次で定義する。

\$n \ge 0\$ に対して、

$$C^n(G, M) = \{f: G^n \rightarrow M\}$$

と置く。この元を \$n\$-コチェインと呼ぶ。但し、\$C^0(G, M) = M\$ とする。

コバウンダリー作用素

$$\delta: C^{n-1}(G, M) \rightarrow C^n(G, M)$$

を \$f \in C^{n-1}(G, M)\$ に対して、

$$\begin{aligned} (\delta f)(g_1, \dots, g_n) &= g_1 f(g_2, \dots, g_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i f(g_1, \dots, g_{i-1}, g_i g_{i+1}, g_{i+2}, \dots, g_n) \\ &\quad + (-1)^n f(g_1, \dots, g_{n-1}) \end{aligned}$$

で定める。

\$Z^n(G, M) := \{f \in C^n(G, M) | \delta f = 0\}\$, \$B^n(G, M) := \{\delta f | f \in C^{n-1}(G, M)\}\$ と置き、それぞれの各元を \$n\$-コサイクル、\$n\$-コバウンダリーと呼ぶ。

群 \$G\$ の \$M\$ に係数を持つコホモロジー群を

$$H^n(G, M) := Z^n(G, M) / B^n(G, M)$$

で定義する。

特に \$M\$ として、自明な \$G\$-加群 \$\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}\$ でも同様) を選ぶと、

$$\begin{aligned} \delta f &= 0 & f &\in C^0(G, \mathbb{Z}) \\ \delta f(a, b) &= f(b) - f(ab) + f(a) & f &\in C^1(G, \mathbb{Z}) \\ \delta f(a, b, c) &= f(b, c) - f(ab, c) + f(a, bc) - f(a, b) & f &\in C^2(G, \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

となる。これから、\$H^1(G, \mathbb{Z}) = Z^1(G, \mathbb{Z}) = \{f: G \to \mathbb{Z} | f: \text{準同型写像}\}\$ が分かる。更に、2-コサイクル \$c\$ がコバウンダリー-のとき、\$c = \delta d\$ を満たす 1-コチェイン \$d\$ は \$H^1(G; \mathbb{Z})\$ の任意性を持つ。従って、\$H^1(G; \mathbb{Z}) = 0\$ の場合、\$d\$ は一意的に定まる。

よく知られた事実として、コホモロジー群 \$H^*(G, M)\$ は群 \$G\$ の Eilenberg-MacLane 空間 \$K(G, 1)\$ の \$G\$-加群 \$M\$ から得られる局所系 \$\tilde{M}\$ を係数とする特異コホモロジー群 \$H^*(K(G, 1); \tilde{M})\$ と同一視される。種数 1 以上の曲面は Eilenberg-MacLane 空間であることを注意しておく。

3. MEYER の指数コサイクルと MEYER 関数

この節では、曲面の写像類群上の Meyer の指数コサイクルと Meyer 関数を定義する [2, 6, 15, 18]。

先ず、多様体の指数を定義する。\$Y\$ を \$2l\$ 次元コンパクト有向多様体とする。但し、\$l\$ は偶数とする。カップ積と基本類上の評価で得られる積

$$H^l(Y; \mathbb{R}) \times H^l(Y, \partial Y; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

は

$$\hat{H}^1(Y; \mathbb{R}) := \text{Im}[H^1(Y, \partial Y; \mathbb{R}) \rightarrow H^1(Y; \mathbb{R})]$$

上、非退化対称双線型形式を誘導する。多様体 Y の指数 $\text{sign}(Y)$ をこの双線型形式の指数、即ち対応する行列の正の固有値の数と負の固有値の数の差、で定義する。特に多様体の指数は閉多様体だけでなく境界付き多様体に対しても定義され、この指数に対して Novikov の和公式が成立する。即ち、 $Y = Y_1 \cup Y_2$, $Y_1 \cap Y_2 = (\partial Y_i \text{ の連結成分})$ ($i = 1, 2$) のとき、 $\text{sign}(Y) = \text{sign}(Y_1) + \text{sign}(Y_2)$ が成立する。

Σ_g を種数 g の有向閉曲面とする。但し、 $g \geq 1$ とする。 \mathcal{M}_g を Σ_g の向きを保つ写像類群とする。 P を 2 次元球面から 3 つの開円盤を除いた曲面とすると、 P の基本群は階数 2 の自由群である。任意の $a, b \in \mathcal{M}_g$ に対して、 $M_{a,b} \rightarrow P$ を P 上の Σ_g 束で境界 $\partial M_{a,b}$ が $M_a \amalg M_b \amalg M_{(ab)^{-1}}$ であるものとする。但し M_a は $\Sigma_g \times [0, 1]/(x, 0) \sim (a(x), 1)$ で与えられる S^1 上の Σ_g 束とする。ここで M_a の構成には、 a を代表する Σ_g の微分同相写像をとって行すが、その代表の取り方に依らないことに注意しておく。

\mathcal{M}_g の Meyer の指数コサイクル

$$\text{sign}_g: \mathcal{M}_g \times \mathcal{M}_g \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $\text{sign}_g(a, b) := \text{sign}(M_{a,b})$ で定義する。実際、 $M_{a,b,c}$ を 2 次元球面から 4 つの開円盤を除いた曲面上の Σ_g 束で境界が $M_a \amalg M_b \amalg M_c \amalg M_{(abc)^{-1}}$ であるものとする、 $M_{a,b,c} = M_{a,b} \cup M_{a,b,c} = M_{a,b,c} \cup M_{b,c}$ であるので、この二つの分解に対して、Novikov の和公式を適用すると、 $\text{sign}_g(a, b) + \text{sign}_g(ab, c) = \text{sign}_g(a, bc) + \text{sign}_g(b, c)$ 、従って、 $\delta \text{sign}_g = 0$ が得られ、コサイクル条件を満たす。

一方、 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の Meyer の指数コサイクル τ_g が以下の様に定義される。

$A, B \in Sp(2g, \mathbb{Z})$ に対して、ベクトル空間 $V_{A,B}$ を

$$V_{A,B} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{2g} \times \mathbb{R}^{2g} \mid (A^{-1} - I_{2g})x + (B - I_{2g})y = 0\}$$

と置く。但し、 I_{2g} は階数 $2g$ の単位行列である。 $V_{A,B}$ 上の双線型形式 $\langle, \rangle_{A,B}$ を

$$\langle (x_1, y_1), (x_2, y_2) \rangle_{A,B} := {}^t(x_1 + y_1)J(I - B)y_2$$

で定義する。ここで、 J は $2g$ -正方行列 $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ を表す。この双線型形式は退化する場合もあるが対称形式であることが示せるので、その指数を考えることができる。Meyer の指数コサイクル

$$\tau_g: Sp(2g, \mathbb{Z}) \times Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

は $\tau_g(A, B) = \text{sign}(V_{A,B}, \langle, \rangle_{A,B})$ で定義される。ここで Meyer の指数コサイクル sign_g, τ_g は共に共役不変であることを注意しておく。即ち $\text{sign}_g(faf^{-1}, fbf^{-1}) = \text{sign}_g(a, b)$ 、 $\tau_g(CAC^{-1}, CBC^{-1}) = \tau_g(A, B)$ を満たす。

写像類群 \mathcal{M}_g の Σ_g の一次元コホモロジー群 $H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ への作用を考える。 $H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を一つとり固定すると、よく知られた表現

$$\zeta_g: \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

を得る。この表現を通して、 \mathcal{M}_g と $Sp(2g, \mathbb{Z})$ 上の Meyer の指数コサイクルは一致することがよく知られている。即ち、 $\zeta_g^* \tau_g = \text{sign}_g$ が成立する。

Meyer の指数コサイクル sign_g は非自明なコホモロジー類 $[\text{sign}_g] \in H^2(\mathcal{M}_g, \mathbb{Z})$ を定めるが、 \mathcal{M}_g の部分群である超楕円的写像類群 \mathcal{H}_g ($g = 1, 2$ の場合は、 $\mathcal{M}_g = \mathcal{H}_g$ である) に

制限すると、整数係数では、ねじれ元を定めるので、有理数係数では零元となる。一方、 $H^1(\mathcal{H}_g, \mathbb{Q}) = 0$ が知られているので、 \mathcal{H}_g の \mathbb{Q} 上の 1-コチェイン、即ち有理数係数関数

$$\phi_g: \mathcal{H}_g \rightarrow \mathbb{Q}$$

で、 $\delta\phi_g = \text{sign}_g$ を満足するものが一意的に存在する。この関数 ϕ_g は Meyer 関数と呼ばれている。

Meyer 関数は以下の性質を持つ。

1. $\phi_g(1) = 0$,
2. $\phi_g(a^{-1}) = -\phi_g(a)$,
3. $\phi_g(faf^{-1}) = \phi_g(a)$,
4. $\text{sign}_g = \delta\phi_g$, 即ち、 $\text{sign}_g(a, b) = \phi_g(b) - \phi_g(ab) + \phi_g(a)$.

但し、 $a, b, f \in \mathcal{H}_g$ とする。

$g \geq 2$ の Meyer 関数の値は \mathcal{H}_g の Lickorish 生成元、BSCC 写像などに対しては、遠藤氏、松本氏、森藤氏によって、計算されている [6, 14, 18]。

$g = 1$ の場合は、Meyer, Atiyah により、以下の様に Dedekind 和、又は Rademacher 関数を用いて書き下されている [1, 12, 15, 21]。但し、よく知られているように、 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{H}_1 = SL(2, \mathbb{Z})$ である。

先ず $SL(2, \mathbb{Z})$ と $PSL(2, \mathbb{Z})$ 上の関数を導入する。

Rademacher 関数

$$\varphi: PSL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \varphi(A) = \begin{cases} \frac{b}{d} & c = 0 \text{ の場合} \\ \frac{a+d}{c} - 12\text{sign}(c)s(a, c) & c \neq 0 \text{ の場合} \end{cases}$$

で定義する。但し $A \in SL(2, \mathbb{Z})$ は $[A] \in PSL(2, \mathbb{Z})$ のリフトとし、

$$s(a, c) := \sum_{k=1}^{|c|-1} \left(\left(\frac{k}{c} \right) \right) \left(\left(\frac{ka}{c} \right) \right)$$

は互いに素な整数 a, c に対する Dedekind 和である。ここで、 x が整数のとき $((x)) = 0$ 、そうでないとき $((x)) = x - [x] - 1/2$ である。

整数値関数

$$\nu: SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \nu(A) = \begin{cases} \text{sign}(b) & A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{Z}, \text{ の場合} \\ \text{sign}(c(a+d-2)) & \text{その他の場合,} \end{cases}$$

で定義する。 $g = 1$ の場合の Meyer 関数 $\phi_1: \mathcal{M}_1 = SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Q}$ は

$$\phi_1(A) = \frac{1}{3}\varphi(A) - \nu(A)$$

と書き表される。

4. ATIYAH の標準 2-枠 と DIFFERENCE DEGREE

この節では、写像類群上の Meyer の指数コサイクルと被覆から得られる準同型によるその引き戻しとの差を考える。

M を 3 次元有向閉多様体とすると、その接ベクトル束 TM は自明束なので、 $2TM = TM \oplus TM$ も自明であり、更に自然な $Spin(6)$ -構造をもつことが知られている。 M の 2-枠を $2TM$ の $Spin(6)$ -束としての自明化のホモトピー類で定義する。 M の二つの 2-枠 β, γ に対して、difference degree $d(\beta, \gamma)$ を $\frac{1}{2}p_1(2T([0, 1] \times M), -\beta + \gamma)$ で定義する。即ち、 $[0, 1] \times M$ の境界 $0 \times (-M)$ と $1 \times M$ 上 $-\beta$ と γ を用いて自明化を与えられたベクトル束 $2T([0, 1] \times M)$ の第一 Pontrjagin 数の $\frac{1}{2}$ で定義する。Atiyah の標準 2-枠 α_M は M を境界に持つコンパクト 4 次元有向多様体 Z に対して $sign Z = \frac{1}{6}p_1(2TZ, \alpha_M)$ を満足する 2-枠として定義される [2]。 Z の選び方に依存しないことなども確かめられる。2-枠は局所微分同相写像による引き戻しが可能であることに注意しておく。次の proposition は本質的にはよく知られた事実である [3, 4, 17]。

Proposition 1. $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を 3 次元有向閉多様体 M 上の被覆度 N の有限被覆とし、 Z を M を境界に持つコンパクト 4 次元有向多様体 Z とする。更に、被覆 π が被覆 $\tilde{Z} \rightarrow Z$ に拡張すると仮定する。この時、 $Nsign(Z) - sign(\tilde{Z}) = -\frac{1}{3}d(\pi^*\alpha_M, \alpha_{\tilde{M}})$ が成立する。但し、 $\pi^*\alpha_M$ は α_M の π による引き戻しを表す。

次にこの結果を写像類群の言葉で書き換えてみる。 Σ_g を種数 $g \geq 1$ の有向閉曲面とし、基点 $* \in \Sigma_g$ を取り、固定しておく。 $\mathcal{M}_{g,*}$ を向きと基点を保つ Σ_g の写像類群とする。

$p: \Sigma_h \rightarrow \Sigma_g$ を被覆度 N の連結な被覆とし、 Σ_h の基点 (これも $*$ で表すことにする) を被覆写像 p が Σ_g の基点に移すように取っておく。曲面 Σ_h の種数は $h = N(g-1) + 1$ で与えられる。 $K = p_*(\pi_1(\Sigma_h, *)) \subset \pi_1(\Sigma_g, *)$ と置き、 $\pi_1(\Sigma_g, *)$ への作用が部分群 K を保つもの全体からなる写像類群 $\mathcal{M}_{g,*}$ の部分群を $\mathcal{M}_{g,*}^K$ と置く。任意の $a \in \mathcal{M}_{g,*}^K$ に対して、 $\mathcal{M}_{g,*}$ の元 $\lambda(a)$ で a の持ち上げになっているものが一意に存在する。このことから、準同型

$$\lambda: \mathcal{M}_{g,*}^K \rightarrow \mathcal{M}_{h,*}$$

が得られる事が分かる。各 $a \in \mathcal{M}_{g,*}^K$ に対して、 N -被覆 $\pi_a: M_{\lambda(a)} \rightarrow M_a$ が構成できる。この被覆 π_a は S^1 上の曲面束 $M_{\lambda(a)}, M_a$ のファイバーを保つ写像になっている。difference degree を用いて、関数

$$d_K: \mathcal{M}_{g,*}^K \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $d_K(a) = d(\pi_a^*\alpha_{M_a}, \alpha_{M_{\lambda(a)}})$ で定義して置く。同様に、任意の二元 $a, b \in \mathcal{M}_{g,*}^K$ に対して、 N -被覆 $\pi_{a,b}: M_{\lambda(a), \lambda(b)} \rightarrow M_{a,b}$ が構成できる。これらの N -被覆に対して、Proposition 1 を適用して次を得る。

Corollary 2. $\mathcal{M}_{g,*}^K$ 上、 $Nsign_g - \lambda^*sign_h = -\frac{1}{3}\delta d_K$ が成立する。

特に $g = 1$ の場合を考える。この場合、写像類群 \mathcal{M}_1 を考えるというよりも $SL(2, \mathbb{Z})$ として、上の議論を繰り返してみる。この様に考える利点は、 $SL(2, \mathbb{Z})$ は原点を保つということである。整数 $n \geq 2$ に対して、 K_n を自然な準同型 $\pi_1(T^2, *) \rightarrow H_1(T^2; \mathbb{Z}_n)$ の核として与える。 $SL(2, \mathbb{Z})^{K_n} = SL(2, \mathbb{Z})$ であり、 \mathcal{M}_h に相当するものは $SL(2, \mathbb{Z})$ 自身である。更に、準同型 λ は恒等写像となる。従って、 $SL(2, \mathbb{Z})$ 上、 $(n^2 - 1)\tau_1 = -\frac{1}{3}\delta d_{K_n}$ を得る。よって、Meyer 関数の一意性から次を得る。

Corollary 3. $\phi_1 = -\frac{1}{3(n^2-1)}d_{K_n}$.

5. 捩じれ指数コサイクル

この節では3節で述べた写像類群とシンプレクティック群の Meyer の指数コサイクルのある種の一般化を述べる。

多様体の指数は多様体とその上の平坦エルミートベクトル束の組みに対して拡張される。 Y を $2l$ 次元コンパクト有向多様体とし E を Y 上の平坦 (不定値) エルミートベクトル束とする。但し、 l は奇数でもよい。

先程の多様体の指数の定義において、係数 \mathbb{R} を E (又は E から得られる局所系) に置き換える。 $\hat{H}^l(Y; E)$ の積は更に E のエルミート積を用いる。従って、 l が偶数の場合は得られる双形式はエルミート形式となるが、指数は定義できる。更に、 l が奇数の場合は歪エルミート形式が得られるので、この形式を i^l 倍すると、エルミート形式となる。 l が奇数、偶数いずれの場合も、 (Y, E) の組みに対する指数 $sign(Y, E)$ をこの様に得られたエルミート形式の指数で定義する。この拡張された指数に対しても、Novikov の和公式が成立することが知られている。

次に捩じれ指数コサイクルを定義する。 $\omega: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow U(n)$ を曲面 Σ_g の基本群のユニタリー表現とする。引き戻しによる作用で ω を保つ元全体から成る写像類群 \mathcal{M}_{g*}^ω の部分群を \mathcal{M}_{g*}^ω と置くことにする。 $p_0 \in P$ を P の基点とし固定しておく。任意の $a, b \in \mathcal{M}_{g*}^\omega$ に対して、 P 上の Σ_g 束 $M_{a,b}$ を考える。 $M_{a,b}$ は基点を保つ写像類群の元から構成したので、更に Σ_g と $p_0 \in P$ におけるファイバー $M_{a,b}|_{p_0}$ の同一視 $\iota_{p_0}: \Sigma_g \xrightarrow{\cong} M_{a,b}|_{p_0} \subset M_{a,b}$ と Σ_g の基点から得られる切断 $s: P \rightarrow M_{a,b}$ があるとしてよい。

Lemma 4. ユニタリー表現 $\omega_{a,b}: \pi_1(M_{a,b}, s(p_0)) \rightarrow U(n)$ で $\iota_{p_0}^* \omega_{a,b} = \omega$ と $s^* \omega_{a,b} = I$ を満たすものが唯一つ存在する。

$\omega_{a,b}$ から得られる $M_{a,b}$ 上の平坦エルミートベクトル束を $E_{\omega_{a,b}}$ と置く。 \mathcal{M}_{g*}^ω の捩じれ指数コサイクル

$$sign_\omega: \mathcal{M}_{g*}^\omega \times \mathcal{M}_{g*}^\omega \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $sign_\omega(a, b) := sign(M_{a,b}, E_{\omega_{a,b}})$ で定義する。これがコサイクル条件を満たすことは Novikov の和公式が成立することから従う。

次に、Lie 群 $U(p, q)$ の指数コサイクルを定義する [1]。任意の $A, B \in U(p, q)$ に対して、 $E_{A,B} \rightarrow P$ を $E_{A,B}|_{\partial P} = E_A \amalg E_B \amalg E_{(AB)^{-1}}$ となる P 上の平坦エルミートベクトル束とする。但し、 E_A は $[0, 1] \times \mathbb{C}^{p+q}/(0, v) \sim (1, Av)$ で与えられる S^1 上の平坦エルミートベクトル束を表す。

$U(p, q)$ 上の指数コサイクル

$$Sign: U(p, q) \times U(p, q) \rightarrow \mathbb{Z}$$

を $Sign(A, B) := sign(P, E_{A,B})$ で定義する。

次に \mathcal{M}_{g*}^ω のコサイクル $sign_\omega$ と $U(p, q)$ の指数コサイクル $Sign$ の関係を述べる。

表現 $\omega: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow U(n)$ によって、 \mathbb{C}^n は $\pi_1(\Sigma_g, *)$ -加群となる。この加群を V_ω で表す。従って、コホモロジー群 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), V_\omega)$ を考えることができる。このコホモロジー群には、カップ積と V_ω のエルミート積と Σ_g の基本類による評価によって、(不定値) エルミート積が定義される。 \mathcal{M}_{g*}^ω は (逆写像の) 引き戻しでこの群にエルミート積を保って作用する。エルミート積に適合した $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), V_\omega)$ の基底をとることにより、表現

$$\zeta_{g*}^\omega: \mathcal{M}_{g*}^\omega \rightarrow U(p, q)$$

を得る。ここで、 p, q はエルミート空間 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), V_\omega)$ から決まる非負整数である。

Proposition 5. 上の設定の下で、 $sign_\omega = (\zeta_{g^*}^\omega)^* Sign$ が成立する。

証明は Serre スペクトル系列を用いる [8, 16, 22]。

ω が $U(1)$ への自明な表現の場合、 $V_\omega = \mathbb{Z} \otimes \mathbb{C}$ を考慮して $Sp(2g, \mathbb{Z}) \hookrightarrow U(g, g)$ とみると τ_g は $Sign$ の制限であり、Proposition 5 は 3 節で述べた関係式 $\zeta_g^* \tau_g = sign_g$ を与える。

6. ATIYAH-PATODI-SINGER ρ -不変量

この節では、Atiyah-Patodi-Singer ρ -不変量の復習 [3] とそれに関する定理の曲面の写像類群の言葉による書き換えを行う。

一般に、 M を $2l-1$ 次元有向閉リーマン多様体とし、 $\alpha: \pi_1(M) \rightarrow U(n)$ をユニタリー表現とする。 M の偶数次形式上の自己共役作用素

$$D: \Omega^{even}(M; \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{even}(M; \mathbb{C})$$

を

$$D(\phi) = i^l (-1)^{p+1} (*d - d*)\phi$$

で定義する。ここで、 ϕ は $2p$ 次形式である。更に、 D は α によって定義されるランク n の平坦複素ベクトル束に値を持つ偶数次形式上の自己共役作用素 D_α に拡張する。作用素 D_α に対して、関数 $\eta_\alpha(s)$ を

$$\eta_\alpha(s) = \sum_{\lambda \neq 0} (sign \lambda) |\lambda|^{-s}$$

で定義する。ここで、 λ は D_α の 0 でない固有値全体を動く。 D に対するこの関数を $\eta(s)$ で表す。これらの関数は $s=0$ において有限の値で拡張する。これらの値 $\eta(0)$ 、 $\eta_\alpha(0)$ をリーマン多様体の η -不変量という。

$$\tilde{\eta}_\alpha(s) := \eta_\alpha(s) - n\eta(s) \text{ と置く。}$$

Theorem 6 (Atiyah-Patodi-Singer [3]). $\tilde{\eta}_\alpha(0)$ は計量によらない。従って、 M と α の微分同相不変量となる。この値を $\rho_\alpha(M)$ で表す。 $M = \partial N$ であり、 α は $\pi_1(N)$ のユニタリー表現に拡張するならば、

$$\rho_\alpha(M) = n \, sign(N) - sign_\alpha(N)$$

が成立する。

Atiyah-Patodi-Singer ρ -不変量の値に関して、表現 α が有限群を通して分解する場合有理数になることが知られている [3]。

次にこの定理を曲面の写像類群の言葉で書き換える。 $a \in \mathcal{M}_{g^*}^\omega$ とする。 P 上の Σ_g 束 $M_{a,b}$ の場合と同様にして、 S^1 上の Σ_g 束 M_a の基本群からのユニタリー表現 $\omega_a: \pi_1(M_a, s(1)) \rightarrow U(n)$ が一意的に構成できる。従って、Atiyah-Patodi-Singer ρ -不変量 $\rho_\omega(M_a)$ を得る。関数

$$\rho_\omega: \mathcal{M}_{g^*}^\omega \rightarrow \mathbb{R}$$

を $\rho_\omega(a) := \rho_{\omega_a}(M_a)$ で定義する。Atiyah-Patodi-Singer の定理を $N = M_{a,b}$ 、 $\alpha = \omega_{a,b}$ 、 $M = \partial M_{a,b}$ に適用して、次の proposition の前半を得る。

Proposition 7. $\mathcal{M}_{g^*}^\omega$ 上の関数 ρ_ω は $M_{g^*}^\omega$ -共役不変であり、 $n \cdot sign_g - sign_\omega = \delta \rho_\omega$ を満たす。更に、 $\mathcal{I}_{g^*} \cap \mathcal{I}_{g^*}(\omega)$ への制限は \mathbb{R} への準同型写像である。

ここで、 $\mathcal{I}_{g^*} := \text{Ker}[\zeta_{g^*}: \mathcal{M}_{g^*} \rightarrow \text{Sp}(2g; \mathbb{Z})]$, $\mathcal{I}_{g^*}(\omega) := \text{Ker}[\zeta_{g^*}^\omega: \mathcal{M}_{g^*}^\omega \rightarrow U(p, q)]$ である。特に \mathcal{I}_{g^*} は Torelli 群と呼ばれている写像類群 \mathcal{M}_{g^*} の部分群である。 ω が $U(1)$ への自明な表現の場合は $\mathcal{I}_{g^*}(\omega)$ は \mathcal{I}_{g^*} に一致する。

Proposition 7 の後半は Proposition 5 により、 $\mathcal{I}_{g^*} \cap \mathcal{I}_{g^*}(\omega)$ 上 $\text{sign}_g = \text{sign}_\omega = 0$ となることから得られる。

この様な一般的な設定では関数 ρ_ω の非自明性は得られないが、次節において、自明でない最も簡単な ω に対して、その非自明性と Meyer 関数への応用を与える。

7. 種数 1 と 2 の MEYER 関数への応用 [10, 11]

この節では Proposition 7 の応用を与える。以下非自明な表現 $\omega: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \{\pm 1\} \subset U(1)$ のみを考える。この場合、 ω の像は $\{\pm 1\}$ より、 ω を通して、 \mathbb{Z} は $\pi_1(\Sigma_g, *)$ -加群と見なせる。この加群を \mathbb{Z}_ω と置く。

Lemma 8. $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_\omega) \cong \mathbb{Z}^{2(g-1)} \oplus \mathbb{Z}_2$.

$H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), V_\omega)$ の場合と同様にして、 $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_\omega)/\text{torsion}$ にはシンプレクティック形式が定義される。これは、 $\mathbb{Z}^{2(g-1)}$ 上の標準的なシンプレクティック形式であることが確かめられる。従って、シンプレクティック基底を一つとり固定することによって、 $\mathcal{M}_{g^*}^\omega$ の $H^1(\pi_1(\Sigma_g, *), \mathbb{Z}_\omega)/\text{torsion}$ への引き戻しによる作用は表現

$$\mathcal{M}_{g^*}^\omega \rightarrow \text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z})$$

を誘導する。この表現は Looijenga による表現と関係がある [10, 13]。 $V_\omega = \mathbb{Z}_\omega \otimes \mathbb{C}$ に注意すると、表現 $\zeta_{g^*}^\omega$ の分解

$$\zeta_{g^*}^\omega: \mathcal{M}_{g^*}^\omega \rightarrow \text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z}) \hookrightarrow U(g-1, g-1)$$

が得られる。

以後、 $\text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z})$ への表現も同じ記号 $\zeta_{g^*}^\omega$ で表すことにする。

この表現の性質を述べるために写像類群 \mathcal{M}_{g^*} のある部分群を導入する。 Σ_g を二つの連結成分に分ける単純閉曲線に沿った Dehn ツイストで生成される \mathcal{M}_{g^*} の部分群を \mathcal{K}_{g^*} と置く。包含関係 $\mathcal{K}_{g^*} \subset \mathcal{I}_{g^*} \subset \mathcal{M}_{g^*}$ が知られている [9]。ここで考えている ω に対しては $\mathcal{I}_{g^*} \subset \mathcal{M}_{g^*}^\omega$ であることに注意する。

Proposition 9. 表現 $\zeta_{g^*}^\omega: \mathcal{M}_{g^*}^\omega \rightarrow \text{Sp}(2(g-1), \mathbb{Z})$ は全射である。更に、 \mathcal{K}_{g^*} の $\zeta_{g^*}^\omega$ による像は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{2(g-2)}$ を含む最小の正規部分群である。

特に $g = 2$ の場合を考える。 $\text{Sp}(2, \mathbb{Z}) = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$ に注意すると、表現

$$\zeta_{2^*}^\omega: \mathcal{M}_{2^*}^\omega \rightarrow \text{SL}(2, \mathbb{Z})$$

が得られたことになる。 $\text{SL}(2, \mathbb{Z})$ 上の指数コサイクル τ_1 は Meyer 関数 ϕ_1 を用いて、 $\tau_1 = \delta\phi_1$ と表されることを用いて、Proposition 5 と 7 より、 $\mathcal{M}_{2^*}^\omega$ 上で、

$$\text{sign}_2 = \delta\rho_\omega + \text{sign}_\omega = \delta\rho_\omega + (\zeta_{2^*}^\omega)^* \tau_1 = \delta\rho_\omega + (\zeta_{2^*}^\omega)^* (\delta\phi_1) = \delta(\rho_\omega + (\zeta_{2^*}^\omega)^* \phi_1)$$

と計算できる。 $\mathcal{M}_{2^*}^\omega$ 上の有理数値関数 μ_*^ω を

$$\mu_*^\omega = \rho_\omega + (\zeta_{2^*}^\omega)^* \phi_1$$

で定義する。

Lemma 10. 関数 μ_*^ω は次の性質を満たす。

1. $\mu_*^\omega(1) = 0,$
2. $\mu_*^\omega(a^{-1}) = -\mu_*^\omega(a),$
3. $\mu_*^{(f^{-1})^*\omega}(faf^{-1}) = \mu_*^\omega(a),$
4. $sign_2 = \delta\mu_*^\omega.$

但し、 $a \in \mathcal{M}_{2*}^\omega, f \in \mathcal{M}_{2*}$ である。

Theorem 11. 非自明な表現 $\omega: \pi_1(\Sigma_g, *) \rightarrow \{\pm 1\} \subset U(1)$ に対して、 ρ_ω は $\mathcal{I}_{g*} \cap \mathcal{I}_{g*}(\omega)$ 上非自明な整数値準同型である。更に、 $\mathcal{K}_{g*} \cap \mathcal{I}_{g*}(\omega)$ に制限しても非自明である。

証明は先ず $g = 2$ の場合に具体例を構成し、その値が0でないことを示す。その際に関数 μ_*^ω の Lemma 10 の性質を用いて計算する。一般の g の場合は $g = 2$ の例を足がかりとして、具体例を構成する。整数値に関しては、3次元多様体上の ρ -不変量は表現 ω の変形に対して \mathbb{R}/\mathbb{Z} 値関数としては一定となる([3, 7]) ことと、 $a \in \mathcal{I}_{g*}$ に対し M_a の基本群の表現 ω_a は $U(1)$ への表現として自明な表現に連続変形できる事から分かる。

最後に、Meyer 関数に対する応用を与える。再び $g = 2$ の場合に戻る。

短完全系列 $1 \rightarrow \pi_1(\Sigma_2, *) \rightarrow \mathcal{M}_{2*}^\omega \rightarrow \mathcal{M}_2^\omega \rightarrow 1$ に注意して、Lemma 10 と指数コサイクル $sign_2$ の性質を用いると、関数 μ_*^ω から関数

$$\mu^\omega: \mathcal{M}_2^\omega \rightarrow \mathbb{Q}$$

が誘導されることを確かめることができる。この関数の ω による平均をとることによって、ある種の一意性から次の定理を得る。但し、 $\mathcal{M}_g^H := \{a \in \mathcal{M}_g | a^* = id \text{ on } H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)\}$ とする。

Theorem 12. \mathcal{M}_2^H 上、 $\phi_2 = \frac{1}{15} \sum_{\omega \neq 0} \mu^\omega$ が成立する。但し、和は0でない $H^1(\Sigma_2, \mathbb{Z}_2) = Hom(\pi_1(\Sigma_2, *), \mathbb{Z}_2)$ の元 ω 全体でとる。

次に $g = 1$ の場合を考える。この場合、Proposition 5 と Lemma 8 より $sign_\omega = 0$ が分かるので、 \mathcal{M}_{1*}^ω 上、 $sign_1 = \delta\rho_\omega$ を得る。 $g = 2$ の場合と同様にして次を得る。

Proposition 13. \mathcal{M}_1^H 上、 $\phi_1 = \frac{1}{3} \sum_{\omega \neq 0} \rho_\omega$ が成立する。但し、和は0でない $H^1(\Sigma_1, \mathbb{Z}_2) = Hom(\pi_1(\Sigma_1, *), \mathbb{Z}_2)$ の元 ω 全体でとる。

この proposition と Corollary 3 を比べる事により、 \mathcal{M}_1^H 上 d_{K_n} は ρ -不変量を用いて表せる事が分かる。この事は別の方向からも示すことができる [3, 11]。この結果は Theorem 12 を写像類群 \mathcal{M}_2 上に拡張する場合に ρ -不変量の和の部分の拡張として difference degree がとれることを示していると考えられる。逆に言うと、Meyer 関数と difference degree との差は M_2 全体ではどう表されるかが問題となる。

REFERENCES

- [1] M. F. Atiyah, *The logarithm of the Dedekind η -function*, Math. Ann. 278(1987), 335-380.
- [2] M. F. Atiyah, *On framings of 3-manifolds*, Topology 29(1990), 1-7.
- [3] M. F. Atiyah, V. K. Patodi and I. M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 78(1975), 405-432.
- [4] M. F. Atiyah and I.M. Singer, *The index of elliptic operators III*, Ann. of Math. 87(1968), 546-604.
- [5] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Berlin Heidelberg New York, Springer 1982.
- [6] 遠藤 久顕, *Meyer's signature cocycle and hyperelliptic fibrations*, 研究集会'リーマン面に関連する位相幾何学' 1998年9月(於北海道大学), 予稿集(1998), 27-34.

- [7] M. S. Farber and J. P. Levine, *Jumps of the eta-invariant (With an Appendix by Shmuel Weinberger: Rationality of ρ -invariants)*, Math. Z. 223(1996), 197-246
- [8] G. Hochschild and J-P. Serre, *Cohomology of group extensions*, Trans. Amer. Math. Soc. 74(1953), 110-134.
- [9] D. Johnson, *A survey of the Torelli group*, Contemp. Math. 20(1983), 165-179.
- [10] R. Kasagawa, *On a function on the mapping class group of a surface of genus 2*, to appear in Topology Appl.
- [11] R. Kasagawa, *ρ -invariants, signature cocycles and the mapping class group of a surface*, preprint.
- [12] R. Kirby and P. Melvin, *Dedekind sums, μ -invariants and the signature cocycle*, Math. Ann. 299(1994), 231-267.
- [13] E. Looijenga, *Prym representations of mapping class groups*, Geom. Dedicata 64(1997), 69-83.
- [14] Y. Matsumoto, *Lefschetz fibrations of genus two; -a topological approach-*, in Proceedings of the 37th Taniguchi symposium on topology and Teichmüller spaces, ed. by Sadayoshi Kojima et al. 1996, World Scientific Publishing Co. pp123-148.
- [15] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. 201(1973), 239-264.
- [16] I. Moerdijk and J. -A. Svensson, *The equivariant Serre spectral sequence*, Proc. Amer. Math. Soc. 118(1993), 263-278.
- [17] T. Morifuji, *The η -invariant of mapping tori with finite monodromies*, Topology Appl. 75 (1997), 41-49.
- [18] T. Morifuji, *On Meyer's function of hyperelliptic mapping class groups*, preprint, 1998.
- [19] S. Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundle I*, Topology 28(1989), 305-323.
- [20] S. Morita, *On the structure of the Torelli group and the Casson invariant*, Topology 30(1991), 603-621.
- [21] R. Sczech, *Dedekind sums and signatures of intersection forms*, Math. Ann. 299(1994), 269-274.
- [22] G. W. Whitehead, *Elements of homotopy theory*, New york Heidelberg Berlin Springer-Verlag 1978.

〒 152-8551 東京都目黒区大岡山 2 - 12 - 1 東京工業大学大学院理工学研究科数学教室
E-mail address: kasagawa@math.titech.ac.jp

量子コホモロジーと共形場理論

寺嶋 郁二

東京大学大学院数理学研究科

1. INTRODUCTION

$Gr(r, N)$ を \mathbb{C}^N のなかの r -平面のなす Grassmann 多様体とする。 $Gr(r, N)$ の Schubert 類と Schur 多項式との間に次のような関係が成立することが知られている ([Fu], [C], [H]) :

Λ を対称多項式のなす環とする。Young 図形 λ に対応する Schur 多項式 s_λ と Schubert 類 σ_λ を考える。この時、つぎの加群としての準同型

$$\Phi : \Lambda \rightarrow H^*(Gr(r, N))$$

$$\Phi(s_\lambda) = \begin{cases} \sigma_\lambda & \text{Young 図形 } \lambda \text{ が } r \text{ 行, } N-r \text{ 列以下のとき} \\ 0 & \text{それ以外のとき} \end{cases}$$

は環としての準同型である。この事は、Schur 多項式 s_λ をユニタリ群 $U(r)$ の対応する表現 V_λ の指標と見ると、 $U(r)$ の表現環と Grassmann 多様体のコホモロジー環の構造定数が一致することを意味する。

本講演では、この事実を『量子コホモロジー環の構造定数 (Gromov-Witten 不変量) とアフィン・リー環の表現からなる Verlinde 代数の構造定数 (フュージョンルール) が一致する』という形で拡張する。さらに、Grassmann 多様体の間の自然な同型 $Gr(r, N) \cong Gr(N-r, N)$ がフュージョン・ルールの level-rank duality として知られる性質を導く事を示す。

2. GROMOV-WITTEN 不変量

(V, ω) をシンプレクティック多様体とする。雑に言えば、Gromov-Witten 不変量はリーマン面 Σ から V への擬正則写像のモジュライ空間のある種の交点数であり、つぎのように構成される：

$\mathcal{M}_{g,n}$ を n 点つきの種数 g のリーマン面のモジュライ空間とし、その元 $(\Sigma, \{p_1, \dots, p_n\})$ を $(\Sigma, \{p_i\})$ と略記する。 J を ω -tamed な概複素

This author's research is supported by Research Fellowship of the Japan Society for the Promotion of Science for Young Scientists.

構造とする (つまり、 J は任意の零でない接ベクトル $v \in TV$ に対して $\omega(v, Jv) > 0$ を満たす。) ホモロジー類 $A \in H_2(V, \mathbb{Z})$ に対して

$$\mathcal{M}_A(g, n)$$

$$:= \{(\Sigma, \{p_i\}, f) \mid (\Sigma, \{p_i\}) \in \mathcal{M}_{g,n}, f: \Sigma \rightarrow V \text{ は } J\text{-正則写像, } f_*[\Sigma] = A\}$$

と置く。ここで、 J -正則写像とは j をリーマン面 Σ の複素構造として、つぎの方程式 (Cauchy-Riemann 方程式)

$$J \cdot df + df \cdot j = 0$$

を満たすものを指す。つぎの写像

$$\begin{aligned} \phi_i: \mathcal{M}_A(g, n) &\rightarrow V \\ (\Sigma, \{p_1, \dots, p_n\}, f) &\mapsto f(p_i) \end{aligned}$$

と射影 $\pi: \mathcal{M}_A(g, n) \rightarrow \mathcal{M}_{g,n}$ を用いて、 V のコホモロジー類 x_1, \dots, x_n と $\mathcal{M}_{g,n}$ のコホモロジー類 K に対して Gromov-Witten 不変量は (形式的に)

$$\Psi_{(A,g,n)}(K; x_1, \dots, x_n) = \int_{\mathcal{M}_A(g,n)} \phi_1^*(x_1) \wedge \dots \wedge \phi_n^*(x_n) \wedge \pi^* K$$

で与えられる。モジュライ空間 $\mathcal{M}_A(g, n)$ は一般にコンパクトではなく、この定義を正当化するために多くの数学者の努力が払われ (c.f. [R-T], [K-M]), 最近、任意のシンプレクティック多様体に対して厳密な定義が与えられた。([FO], [LT], [R], [S])

$\alpha_1, \dots, \alpha_m$ を $H^*(V, \mathbb{C})$ の (同次) 基底とし、その交点行列を (g_{ij}) とする。逆行列 $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ を用いて $\alpha^j := \sum \alpha_i g^{ij}$ と置く。種数 0 の Gromov-Witten 不変量を用いて、コホモロジー群 $H^*(V, \mathbb{C})$ の元 x, y に対して、カップ積を変形して新しい積構造を

$$x \bullet y = \sum_{A \in H_2(V, \mathbb{Z})} \Psi_{(A,0,3)}([\text{pt}]^V; x, y, \alpha^i) \alpha_i e^{-t\omega(A)}$$

で定義し、この環を量子コホモロジー環という。ここで、 $[\text{pt}]^V$ は点のホモロジー類のポアンカレ双対である。(一般には無限和であり、コホモロジー群の係数を Novikov 環に拡張する必要がある。) パラメーター t を無限大にすると普通のカップ積に一致する事に注意する。

3. フュージョンルール

フュージョンルールはアフィンリー環の表現空間の間の一種の intertwining operator であるコンフォーマル・ブロックの空間の次元として定義され、共形場理論において最も基本的な量の一つである ([B], [T-U-Y])。幾何的には、リーマン面上のパラボリックベクトル束のモジュライ空間のある直線束の正則切断の空間の次元として現れる [P]。

$\hat{\mathfrak{g}}$ を単純複素リー環 \mathfrak{g} に対応するアフィンリー環とする。つまり、 c を中心元として

$$\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z)) \oplus \mathbb{C}c$$

であり、リー環の構造は (正規化された) Killing 形式 $(|)$ を用いて

$$[X \otimes f, Y \otimes g] := [X, Y] \otimes fg + c \cdot (X|Y) \operatorname{Res}_{z=0}(gdf)$$

で与える。レベルと呼ばれる正の整数 l を選ぶごとに支配的で整なウェイトの集合 P の部分集合 P_l が定まり、 P_l の各元 λ にアフィンリー環 $\hat{\mathfrak{g}}$ の可積分最高ウェイト表現と呼ばれる表現 H_λ が対応する事が知られている [K]。

コンフォーマル・ブロックの空間を定義するために、種数 g のリーマン面 Σ の有限個の点の集合 $\vec{p} = \{p_1, \dots, p_n\}$ の各元 p_i に P_l の元 λ_i を対応させ、 $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現 $H_{\vec{\lambda}} := H_{\lambda_1} \otimes \dots \otimes H_{\lambda_n}$ を考える。各点 p_i での座標 z_i を選び、 \vec{p} でのみ極をもつ有理関数の環 $\mathcal{O}(\Sigma - \vec{p})$ の元 f の p_i での Laurent 展開を $f_{p_i} \in \mathbb{C}((z_i))$ とする。 $X \otimes f_{p_i}$ を $\hat{\mathfrak{g}}$ の定義の z を z_i で置き換えたアフィンリー環の元と考え、リー環 $\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(\Sigma - \vec{p})$ の $H_{\vec{\lambda}}$ への作用を

$$(X \otimes f) \cdot (v_1 \otimes \dots \otimes v_n) = \sum_{i=1}^n v_1 \otimes \dots \otimes (X \otimes f_{p_i})v_i \otimes \dots \otimes v_n$$

で定義すると、留数定理からこれがリー環としての作用になる事が分かる。コンフォーマル・ブロックの空間を

$$V^\dagger(\vec{p}, \vec{\lambda}) := \operatorname{Hom}_{\mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(\Sigma - \vec{p})}(H_{\vec{\lambda}}, \mathbb{C})$$

で定義する。

種数 g のフュージョンルール N_g は

$$N_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \dim V^\dagger(\vec{p}, \vec{\lambda})$$

で与えられる。

P_l の元を基底とする自由 \mathbb{Z} 加群 $R_l(\mathfrak{g})$ を考え、積を

$$\lambda \cdot \mu := \sum_{\nu \in P_l} N_0(\lambda, \mu, \nu^*) \nu$$

で与え、 \mathfrak{g} の Verlinde 代数と呼ぶ。ここで、 ν^* は双対表現に対応するウェイトである。

ここまでは一般論であるが、Grassmann 多様体 $Gr(r, N)$ の Gromov-Wiiten 不変量に対応するのはリー環 $\mathfrak{u}(r) = \mathfrak{su}(r) \times \mathfrak{u}(1)$ ではなくリー群 $U(r) = SU(r) \times U(1)/\mathbb{Z}_r$ のフュージョンルールであるので、もう一段階工夫する (つまり、巡回群 \mathbb{Z}_r の作用を考慮する)：

まず、最大で r 行かつ $l = N - r$ 列である Young 図形に対応する $U(r)$ のウェイトの集合を $P_{l,N}(U(r))$ とする。 $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in P_{l,N}(U(r))$ に対して、

$$L_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \frac{1}{r^g} \sum_{z \in \mathbb{Z}_r} N_g(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, z(\lambda_n))$$

とおき、 L_g を種数 g のレベル (l, N) の $U(r)$ -フュージョンルールと呼ぶ。ここで、 λ_i を $\mathfrak{su}(r) \times \mathfrak{u}(1)$ のウェイトと見て $\mathfrak{su}(r) \times \mathfrak{u}(1)$ のフュージョンルール N_g を適用し、さらにそこへの巡回群 \mathbb{Z}_r の作用で足しあげている。

このように定義された L_g を用いて $P_{l,N}(U(r))$ を基底とする自由 \mathbb{Z} -加群 $R_{l,N}$ に上と同様に積構造を入れると積の結合性が証明でき、この代数をユニタリ群 $U(r)$ のレベル (l, N) の Verlinde 代数と呼ぶ。この時、Faltings の結果 [F] のユニタリ群版である次の結果を得る。

命題 3.1. W を $U(r)$ の Weyl 群とする。 $R_{r,N} \otimes \mathbb{C}$ の spectrum (つまり、 \mathbb{C} への代数準同型全体) は

$$\{\mathrm{Tr}_*(t)\}_{t \in T_{l,N}^{\mathrm{reg}}/W}$$

で与えられる。

ここで、 $T_{r,N}^{\mathrm{reg}}$ は $U(r)$ の標準的なトーラス T の元 $t = \mathrm{diag}(t_1, \dots, t_r)$ で二つの条件

1. $t^N = (-1)^{r-1} \mathrm{Id}$ 、 Id は恒等行列
2. $t_i \neq t_j$ $i \neq j$ のとき

を満たすもの全体であり、 $\mathrm{Tr}_*(t)$ は各ウェイト $\lambda \in P_{r,N}$ にたいして、対応する $U(r)$ の表現 V_λ のトレース $\mathrm{Tr}_{V_\lambda}(t)$ を与える線形写像である。

4. 主定理

まず、Grassmann 多様体 $Gr(r, N)$ 上の普遍ベクトル束の双対を E^* として、その Chern 類を $x_i = c_i(E^*)$ ($i = 1, \dots, r$) とすると、コホモロジー環はある多項式 $W_0 = W_0(x_1, \dots, x_r)$ を用いて

$$H^*(Gr(r, N), \mathbb{C}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] / \langle \partial W_0 / \partial x_1, \dots, \partial W_0 / \partial x_r \rangle$$

と表される。同様に、量子コホモロジー環 $QH^*(Gr(r, N), \mathbb{C})$ は Landau-Ginzburg ポテンシャルと呼ばれる多項式 $W = W_0 + (-1)^e e^{-t x_1}$ を用いて

$$QH^*(Gr(r, N), \mathbb{C}) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_r] / \langle \partial W / \partial x_1, \dots, \partial W / \partial x_r \rangle$$

と表されることが知られている ([S-T], [W])。

任意の単項式 $x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r}$ に対して種数 g の Gromov-Witten 不変量 $\Psi_{(A,g,n)}$ の $A \in H_2(Gr(r,N), \mathbb{Z})$ に関する和

$$\langle x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r} \rangle_g := \sum_{A \in H_2(Gr(r,N), \mathbb{Z})} \Psi_{(A,g,n)}(\overbrace{x_1, \dots, x_1}^{m_1 \text{ 個}}, \dots, \overbrace{x_r, \dots, x_r}^{m_r \text{ 個}})$$

を考え ($n = \sum m_i$ とする)、 \mathbb{C} -線型に拡張して任意の多項式 $F = F(x_1, \dots, x_r)$ について $\langle F \rangle_g$ を定義して種数 g の相関関数と呼ぶ。このとき、つぎの結果を得る。

定理 4.1. $\sigma_{\lambda_i} \in H^*(Gr(r,N), \mathbb{C})$ をウェイト $\lambda_i \in P_{l,N}(U(r))$ に対応する Schubert 類とすると、

$$L_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \langle \sigma_{\lambda_1} \dots \sigma_{\lambda_n} \cdot x_r^{(g-1)(r-N)} \rangle_g$$

が成り立つ。

この定理の証明は命題 3.1 で具体的に構成された Verlinde 代数 $R_{l,N} \otimes \mathbb{C}$ の spectrum が Landau-Ginzburg ポテンシャル W の臨界点の集合と自然に一致する事から得られる。Gepner の興味深い仕事 [G] について、Witten は論文 [W] の中でつぎのような戦略で定理の式を導いている：

1. リーマン面 Σ 上の主 $U(r)$ 束 P の接続 A と $\text{ad}(P)$ -値の 2 形式 Ω と $P \times_{U(r)} \mathbb{C}^{rN}$ の切断 s のなす空間上のある経路積分を考える。
2. A と Ω に関して先に積分を実行すると Grassmann 多様体を標的空間とするシグマ模型での経路積分が現れ、これが定理の右辺を与える。
3. 積分の順序を変えて、先に s 上の積分を実行し P の平坦接続のモジュライ空間の交点数に関する情報を得て、これとフュージョンルールとの間の知られている関係を用いて定理の左辺を導く。

この戦略にそって (たとえば、リーマン面 Σ を単体分割して経路積分を近似して) 証明を実行することは興味深い。

フュージョンルールは Σ 上のパラボリックベクトル束のモジュライ空間上のある直線束の正則切断の空間の次元として得られるので [P]、(Riemann-Roch の定理を考慮して) 上の定理からつぎの問題を考えることは自然である。

問題 4.2. Σ 上のパラボリックベクトル束のモジュライ空間での交点理論と Grassmann 多様体への正則写像のモジュライ空間での交点理論の間に直接的な対応はあるか？

この問題に答えるためには、正則ベクトル束と Grassmann 多様体への正則写像の間の良く知られた対応を点つきのリーマン面に (ある意味で) 拡張することが必要と思われる。

定理 4.1 から、Grassmann 多様体に関する幾何的な情報がアフィンリー環の表現論における情報をもたらすことが分かる。特に、Witten のアイデアにしたがって、Grassmann 多様体の間の自然な同型 $Gr(r, N) \cong Gr(N - r, N)$ を用いてつぎの系を得る。

系 4.3 (level-rank duality). $\lambda \in P_{l, N}(U(r))$ に対して Young 図形の転置に対応する元を $\lambda^t \in P_{r, N}(U(l))$ とする。この時、レベル (l, N) の $U(r)$ -フュージョンルール L_g とレベル (r, N) の $U(l)$ -フュージョンルール M_g について、つぎの関係式

$$L_g(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = M_g(\lambda_1^t, \dots, \lambda_n^t)$$

が成立する。

level-rank duality は Goodman-Wenzl [G-W] によって発見され、量子群 [S-A]、三次元多様体の不変量 [K-T]、WZW 模型 [N-T] などの様々な領域に現れる。

最後にもう一つ問題を考えて終りにしたい。フュージョンルールがコンフォーマル・ブロックの空間の次元として定義されていた事に注意して、

問題 4.4. Grassmann 多様体の幾何の中にコンフォーマル・ブロックの空間を見いだせるか？

この問題に答えるためには、ループ空間 $LGr(r, N)$ 上のループ群 $LU(r)$ をファイバーとする束での一般化された接続の概念が必要と思われる。つまり、境界つきのリーマン面 Σ から $Gr(r, N)$ への微分可能写像 f をループ空間 $LGr(r, N)$ の“道”と考え、“平行移動”としてループ群 $LU(r)$ の(射影)表現の間の線形写像を与え、特に f が正則写像の場合にコンフォーマル・ブロックの空間の元を与えるような枠組があれば、上の問題に答え、さらに定理 4.1 のよりはっきりとした背景が得られると思われる (c.f. [Se])。

REFERENCES

- [B] A. Beauville, *Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula.*, Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993), 75–96, Israel Math. Conf. Proc., 9, Bar-Ilan Univ., Ramat Gan, 1996.
- [C] J. Carrell, *Chern classes of the Grassmannians and Schubert calculus.*, Topology 17 (1978), no. 2, 177–182.
- [F] G. Faltings, *A proof for the Verlinde formula.*, J. Algebraic Geom. 3 (1994), no. 2, 347–374.
- [Fu] W. Fulton, *Young tableaux. With applications to representation theory and geometry.*, London Mathematical Society Student Texts, 35. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- [FO] K. Fukaya and K. Ono, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant.*, Topology 38 (1999), no. 5, 933–1048.

- [G] D.Gepner, *Fusion rings and geometry.*, Comm. Math. Phys. 141 (1991), no. 2, 381–411.
- [G-W] M.Goodman and H.Wenzl, *Littlewood-Richardson coefficients for Hecke algebras at roots of unity.*, Adv. Math. 82 (1990), no. 2, 244–265.
- [H] G.Horrocks, *On the relation of S-functions to Schubert varieties.*, Proc. London Math. Soc. (3) 7 (1957), 265–280.
- [K-T] T.Kohno and T.Takata, *Level-rank duality of Witten’s 3-manifold invariants.*, Progress in algebraic combinatorics (Fukuoka, 1993), 243–264, Adv. Stud. Pure Math., 24, Math. Soc. Japan, Tokyo, 1996.
- [K] V.Kac, *Infinite-dimensional Lie algebras.*, Third edition. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [K-M] M.Kontsevich and Y.Manin, *Gromov Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry.*, Comm. Math. Phys. 164 (1994), no. 3, 525–562.
- [LT] J.Li and G.Tian, *Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of general symplectic manifolds.*, Topics in symplectic 4-manifolds (Irvine, CA, 1996), 47–83, First Int. Press Lect. Ser., I, Internat. Press, Cambridge, MA, 1998.
- [N-T] T.Nakanishi and A.Tsuchiya, *Level-rank duality of WZW models in conformal field theory.*, Comm. Math. Phys. 144 (1992), no. 2, 351–372.
- [P] C.Pauly, *Espaces de modules de fibrés paraboliques et blocs conformes.*, Duke Math. J. 84 (1996), no. 1, 217–235.
- [R] Y.Ruan, *Virtual neighborhoods and pseudo-holomorphic curves.*, alg-geom/9611021
- [R-T] Y.Ruan and G.Tian, *Higher genus symplectic invariant and sigma model coupled with gravity*, Turkish J.Math 20(1996), no.1,
- [S] B.Siebert, *Gromov-Witten invariants of general symplectic manifolds*, dg-ga 9608005.
- [Se] G.Segal, *Elliptic cohomology (after Landweber-Stong, Ochanine, Witten, and others).*, Séminaire Bourbaki, Vol. 1987/88. Astérisque No. 161-162 (1988), Exp. No. 695, 4, 187–201 (1989).
- [S-A] H.Saleur and D.Altschüler, *Level-rank duality in quantum groups.*, Nuclear Phys. B 354 (1991), no. 2-3, 579–613.
- [S-T] B.Siebert and G.Tian, *On quantum cohomology rings of Fano manifolds and a formula of Vafa and Intriligator*, Asian J. Math. 1 (1997), no. 4, 679–695.
- [T-U-Y] A.Tsuchiya, K.Ueno, Y.Yamada, *Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries.*, Integrable systems in quantum field theory and statistical mechanics, 459–566, Adv. Stud. Pure Math., 19, Academic Press, Boston, MA, 1989.
- [W] E.Witten, *The Verlinde algebra and the cohomology of the Grassmannian*, Geometry, topology, & physics, 357–422, Conf. Proc. Lecture Notes Geom. Topology, IV, Internat. Press, Cambridge, MA, 1995.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO,
KOMABA 3-8-1 MEGURO-KU, TOKYO, 153-8914 JAPAN.

E-mail address: tera@ms.u-tokyo.ac.jp

接分布と曲線の幾何学

大阪大・理 足立 二郎

0 はじめに

多様体に幾何構造が与えられると、それとの関係により曲線の幾何学に豊かな構造が与えられます。接触多様体における、横断的結び目、Legendre 結び目等が良い例です。筆者の興味は、接分布（外微分式系）で表される幾何構造です。今回は、特に3次元多様体上の階数2の接分布と、それに関する曲線を考えたいと思います。講演題目をかなり漠然としたものにさせていただきました。色々な形で変化していった、筆者の興味の対象を包含する形のものをつけようとした結果です。具体的な内容としては、“3次元接触多様体内のジェネリックな結び目”と、“3次元多様体上の階数2のジェネリックな接分布に関するリジッドな径（みち）”の話をして頂こうと考えています。接触構造に関するトポロジーは、現在色々な意味で注目を集めている分野だと思えますが、それを含む接分布という観点から、視野を広げていきたいと思えます。

1 3次元接触多様体内のジェネリックな結び目

1.1 導入

接触構造とは、奇数次元の多様体上の最も非可積分な余次元1の接分布として定義されます。3次元接触多様体内の結び目としては、Legendre なもの（常に接触構造に接している）、横断的なもの（常に接触構造に横断的）が良く知られています。それらに対して、横断的なものの拡張として、“ジェネリックな結び目”というものを、有限個の点で接触構造に‘単純に’接しているものとして定義しました。

定義 1.1 ([Ad1]) (M, ξ) を3次元接触多様体、 ξ を（局所的に）定義する1次微分形式を α とする。埋め込み $\gamma: S^1 \rightarrow M$ で結び目を表す。方程式 $\gamma^*(\partial/\partial\theta) = 0$ が有限個の単純解を持つとき結び目 γ はジェネリックであると言う。ここで、 θ は S^1 の座標である。

注意： S^1 の全ての点 p で $\gamma^*(\partial/\partial\theta)_p = 0$ の時、結び目 γ は Legendrian, $\gamma^*(\partial/\partial\theta)_p \neq 0$ の時、結び目 γ は横断的です。

それぞれの結び目の類において、それぞれの類でのイソトピーに関する分類問題が考えられます。Legendre, 横断的な結び目に関しては、分類は非常に複雑である事が知られています。実際に分類ができているのは、タイトな接触構造に対する位相的に自明な結び目の場合くらいです。([E2], [EF] 参照。) 結び目が自明でない場合には状況は非常に難しくなります。([FT] 参照。)

しかし、ジェネリックな結び目が少なくとも1つ (必然的に2つ) 横断的でない点を持たば、状況は大きく変わってきます。接触構造がタイトであるなしに関わらず、また、任意の結び目のイソトピー類に対して、ジェネリックなイソトピーに関する分類が出来てしまうのです。結果は以下の通りです。

定理 1 ([Ad1]) Γ, Γ' を3次元接触多様体 (M, ξ) 内の、横断的ではない、ジェネリックな結び目とする。 Γ と Γ' がジェネリックにイソトピックであるということと、それらが、結び目としてイソトピックかつ、同じ数の非横断的な点を持つことは同値である。

定理 2 ([Ad1]) 結び目の任意のイソトピー類、任意の正の偶整数 $2k$ に対して、ジェネリックな結び目 $\gamma \subset (M, \xi)$ で、結び目としてはそのイソトピー類に属し、 $2k$ 個の横断的でない点を持つものが存在する。

1.2 埋め込まれた曲面に沿ったジェネリックなイソトピー

$F \subset (M, \xi)$ を3次元接触多様体に埋め込まれた曲面とします。すると、 F 上に接触構造 ξ がトレースする特異点をもった1次元葉層が考えられます。これを、接触構造に関する F 上の特性葉層と呼び、 F_ξ と書きます。特異点に於いては、接触構造と接平面が一致しています。ジェネリックには特異点は孤立していて、楕円点 (Figure 1-(d), (e), (f)) または双曲点 (Figure 1-(b)) であることが知られています。([E1], [G] 参照。)

1次微分形式や Pfaff 方程式の特異点の研究から、次のことが分かっています。

定理 1.2 ([L], [Zh]) 標準接触3次元空間 (\mathbb{R}^3, ξ_0) の曲面の非特異な点における芽は、接触微分同相写像によって $\{y = 0\}$ の原点における芽に帰着される。ここで、 ξ_0 は標準接触形式 $\alpha_0 = dz - y \cdot dx$ の核である。

定理 1.3 ([L], [Zh]) 標準接触3次元空間 (\mathbb{R}^3, ξ_0) にジェネリックに埋め込まれた曲面の特異点における芽は、接触微分同相写像によって

$$F = \left\{ z - \frac{1}{2}xy + G = 0 \right\}$$

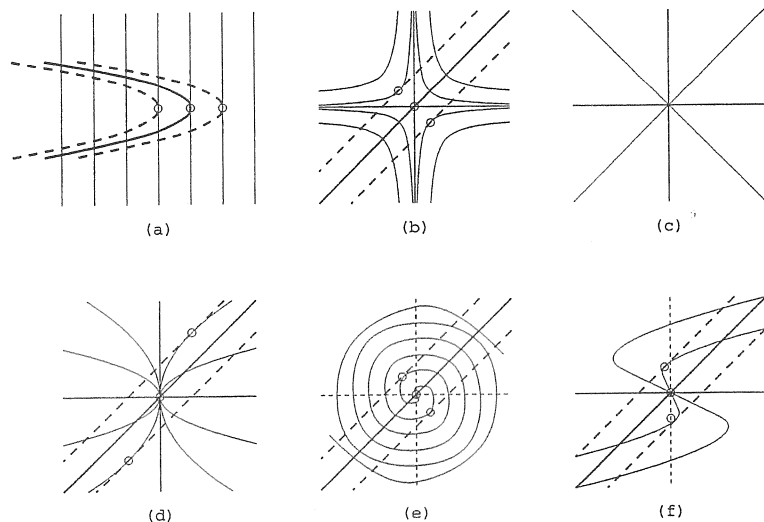


Figure 1:

の原点における芽に帰着される. ここで $G = G(x, y)$ は $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ に於ける 2 次
 の *Hamiltonian* の標準形である. ([Ar] 参照.)

今の場合, 0 または正の実数 μ, θ に対し $G(x, y) = -\mu \cdot xy$ または $G(x, y) =$
 $\pm(1/2)(\theta x^2 + y^2)$ です.

それぞれの標準形を使って局所的な特性葉層とジェネリックな曲線の様子を調べ
 と, 次の結果が得られます.

命題 1.4 ([Ad1]) $F \subset (M, \xi)$ を, 3次元接触多様体に埋め込まれた曲面とする.
 F 上の曲線 γ が特性葉層の非特異点で接触構造 ξ に “単純に”接していることは, 曲線
 γ が F 上の特性葉層 F_ξ に高々 2 次で接していることと同値である. (Figure 1-(a)
 参照.)

命題 1.5 ([Ad1]) 3次元接触多様体に埋め込まれた曲面 $F \in (M, \xi)$ 上の曲線の
 C^∞ -族 $\{\gamma_t\}_{t \in [0,1]}$ がジェネリックなイソトピーを定義することと, 次の条件を満たす
 ことと同値である,

- (i) 曲線族 γ_t は, 各 γ_t の有限個の点を除いて, 特性葉層 F_ξ に横断的である.

(ii) 横断的ではない点は、次の3タイプである。

- F_ξ の葉と γ_t が、高々2次の接触をしている点、
- F_ξ の双曲点で γ_t はセパトリックスには接していない点、
- 楕円点。

(Figure 1-(b), (d), (e), (f) 参照.)

すなわち、Figure 1 で表されるような、特性葉層の特異点を通過するジェネリックなイソトピーが存在することが分かりました。この、特異点を通過するという点が、横断的な場合との決定的な違いです。

1.3 証明のアイデア

上で準備した、ジェネリックなイソトピーのモデルを使って、結び目としては同じイソトピー類に属する結び目の間に、ジェネリックなイソトピーを構成することを考えます。結び目の間のイソトピー $\Phi: S^1 \times [0, 1] \rightarrow M$ は、有限回の埋め込み $\varphi: S^1 \times [a, b] \rightarrow M$ で表されることを示します。すると、ジェネリックな結び目の間のジェネリックなイソトピーを構成することは、その有限回の埋め込まれた円環面に沿ったジェネリックなイソトピーを構成することに帰着されます。そこで、2つのジェネリックな結び目を境界に持つ円環面上の特性葉層を見ながら、上で構成したジェネリックなイソトピーを適用していきます。境界のジェネリックな結び目を特性葉層の特異点を通過させながら、内側へ移動させていくことにより、円環面上の特性葉層には特異点がない状態にすることが出来ます。ここで注意しなければならないのは、接触構造がタイトではない場合には、特性葉層がリミットサイクルを持つことです。その場合には、埋め込まれた曲面を摂動させることによりリミットサイクル上に特異点を作ってやって、解決することが出来ます。さらに整えてやりますと、円環面の両境界のジェネリックな結び目は、Figure 2 のような状況になり、あとは容易にジェネリックなイソトピーで一致させられます。

次に、定理 2 を考えます。接触多様体に埋め込まれた曲線は、 C^0 -級で小さなイソトピーで Legendre に出来ることが知られています。([B], [E1] 参照.) そこで、特性葉層が Figure 3 の様になるように Legendre 曲線に沿って曲面を埋め込み、その曲面に沿って曲線を Figure 3 の様にずらしてやります。すると、2つずつ横断的でない点が出来、求める、ジェネリックな曲線が得られます。

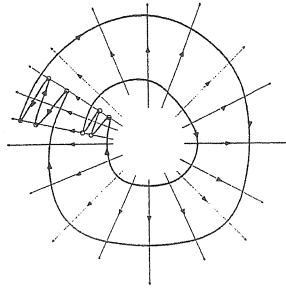


Figure 2:

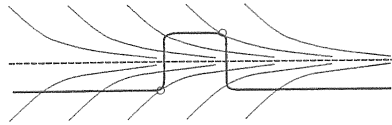


Figure 3:

2 3次元多様体上の階数2のジェネリックな接分布に関するリジッドな径

2.1 導入

多様体上の接分布とは、一般には多様体の接束の部分束として定義されるものを考えますが、ここでは、さらに一般化して、各点での次元の変化を許すものまで考えます。 M を3次元多様体とします。ここで言う M 上の階数2の“接分布”とは、

- (a) Pfaff 方程式 $\{\omega = 0\}$, ここで ω は、1次微分形式.
- (b) ベクトル場 X, Y の生成する C^∞ -関数のなす環上の加群 $\langle X, Y \rangle$.

として表わされるもので、孤立点での次元の変化を許すものです。孤立点以外では、2次元平面場です。接触構造は、最も積分不可能な接分布でした。葉層構造は、積分可能な接分布です。(葉層構造はジェネリックではありませんが。) ここでは、その中間の積分可能性を持つようなジェネリックな接分布を考えます。これらの接分布の特異点、局

所的な標準形は, J. Martinet, B. Jakubczyk, F. Przytycki, M. Ya. Zhitomirskii 達により研究されてきました。(2.2 節 参照.)

接分布に常に接する曲線は アドミッシブル と呼ばれます. 接触構造に対する Legendre 曲線に対応しています. また 径 とは, 閉区間 I のはめ込みを考えます. アドミッシブルな径のうち, 両端点を留めた C^1 -級の摂動で安定なものは, “リジッド” であると呼ばれます. このような径の存在が, R. L. Bryant, L. Hsu 達により研究されました. 彼らは Goursat 型の接分布 (各次元の多様体上の階数 2 の接分布で, 最も積分不可能なもの), 特に Engel 構造 (4 次元多様体上のもの), に関して存在に関する必要十分条件を示しました. ([BH] 参照.) また, I. Zelenko, M. Ya. Zhitomirskii 達は, 3 次元多様体上のジェネリックな階数 2 の接分布で階数一定のものに関してリジッドな径の特徴付けを行いました. ([ZZh] 参照.) そこで, ここでは階数の変化を認めたジェネリックな接分布に対して, 彼らの結果の拡張を考えます.

ここで考えている 3 次元多様体 M 上の接分布 E の階数は (a) の場合 2, 3, (b) の場合 2, 1, 0 と変化します. $\dim E_p \neq 2$ である点 $p \in M$ を退化点 と呼びます. また, 退化点または $\dim E_p = 2$ で, p において E は接触構造ではない点を 特異点 と呼びます. 接分布 E がジェネリックである場合, 特異点全体の集合 $S = S(E)$ は 2 次元曲面の構造を持ちます. これを **Martinet 曲面** と呼ぶこともあります. Martinet 曲面 $S(E)$ 上に, ベクトル場が, 0 にならない関数倍を除いて接分布 E のみに依って, 定義されます. 例えば, $E = \{\omega = 0\}$ の場合, $Z_E \lrcorner \Omega_S = \omega|_{TS}$ により Z_E が定まります. ここで, Ω_S は S の体積要素 (M が向き付け不可能の場合は, 局所的に) です. $E = \langle X, Y \rangle$ の場合もほぼ同様です. これを E の特性ベクトル場 と呼びます. 特性ベクトル場 Z_E の特異点を 不規則点, Z_E の特異点ではなくかつ E の退化点でもない点を横断的な点 と呼びます. 横断的な点全体の集合を $Tr(E)$ と書く事にします. 特性ベクトル場の特異点は, その局所的なふるまいと接分布の退化性により, 次の様に分類されることが知られています. (定理 2.1 参照.)

(a) E は, Pfaff 方程式.	(b) E は, ベクトル場の加群.
(0) 横断的な点	(0) 横断的な点
(1) 双曲点	(1) 双曲点
(2) 楕円点	(2) 楕円点
(3) 鞍点	(3) 鞍点
(4) 結節点	(4) 結節点
(5) 渦心点	(5) 渦心点
	(6) 正則な退化点

この場合のリジッドな径は, 次のように特徴づけられます.

定理 3 ([Ad2]) E を 3次元多様体 M 上のジェネリックな階数 2 の接分布とする。アドミッシブルな径 $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow M$ がリジッドであることと、次は同値である。 γ の (α, β) への制限は、 $Tr(E)$ の曲線であり、端点は、 $(a) - (0), (1), (3), (4), (5)$ または $(b) - (0), (1), (6)$ であり、少なくとも一方は、 $(a) - (0), (1), (3)$ 、対称軸の端点としての (4) 、または $(b) - (0), (1), (6)$ のいずれかである。

$(a) - (4)$ の対称軸とは、定理 2.1 の標準形に於ける $2\theta(\partial/\partial x) - (\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\theta})(\partial/\partial y)$ 方向の軸のことです。

2.2 ジェネリックな接分布の局所標準形

すべての特異点は分類されていて、局所的な標準形が次のように与えられています。([M], [Zh], [JP], [JZ] 参照.)

定理 2.1 3次元多様体 M 上のジェネリックな階数 2 の接分布 E の任意の特異点は、次のタイプのいずれかであり、それぞれの標準形に帰着される。ここで、 b, θ, λ は、モジュライである。

(a) E は、Pfaff 方程式 $\{\omega = 0\}$ の場合。

- (0) 横断的な点 : $\{dz + x^2 \cdot dy = 0\}$.
- (1) 双曲点 : $\{dz + (xz + x^2y + bx^3y^2) \cdot dy = 0\}$.
- (2) 楕円点 : $\{dz + (xz + x^3/3 + xy^2 + bx^3y^2) \cdot dy = 0\}$.
- (3) 鞍点 : $\{z \cdot dz - \theta x \cdot dx + (\theta x + y) \cdot dy = 0\}$, $\theta > 0$.
- (4) 結節点 : $\{z \cdot dz - \theta x \cdot dx + (\theta x + y) \cdot dy = 0\}$, $\theta < -4$.
- (5) 渦心点 : $\{z \cdot dz - \theta x \cdot dx + (\theta x + y) \cdot dy = 0\}$, $-4 < \theta < 0$.

(b) E は、ベクトル場の加群 $\langle X, Y \rangle$.

- (0) 横断的な点 : $\langle (\partial/\partial x), (\partial/\partial y) - x^2 \cdot (\partial/\partial z) \rangle$.
- (1) 双曲点 : $\langle (\partial/\partial x), (\partial/\partial y) - (xz + x^2y + bx^3y^2) \cdot (\partial/\partial z) \rangle$.
- (2) 楕円点 : $\langle (\partial/\partial x), (\partial/\partial y) - (xz + x^3/3 + xy^2 + bx^3y^2) \cdot (\partial/\partial z) \rangle$.
- (3) 鞍点 : $\langle (\partial/\partial x), x \cdot (\partial/\partial y) + (z + \lambda x^2 + y^2) \cdot (\partial/\partial z) \rangle$, $\lambda > 0$.
- (4) 結節点 : $\langle (\partial/\partial x), x \cdot (\partial/\partial y) + (z + \lambda x^2 + y^2) \cdot (\partial/\partial z) \rangle$, $\lambda < -4$.
- (5) 渦心点 : $\langle (\partial/\partial x), x \cdot (\partial/\partial y) + (z + \lambda x^2 + y^2) \cdot (\partial/\partial z) \rangle$, $-4 < \lambda < 0$.
- (6) 正則な退化点 : $\langle (\partial/\partial x), x \cdot (\partial/\partial y) + y \cdot (\partial/\partial z) \rangle$.

2.3 分割曲面

I. Zelenko と M. Ya. Zhitomirskii より, [ZZh]において, 分割曲面というのが定義されました. Γ を閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上で定義された径, γ を部分区間 $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ 上で定義された径とします. 実数 $\tau \in [a, b]$ を, $\text{Im}\gamma \not\subset \text{Im}\Gamma$ の時 $\tau := \inf\{t \in [a, b] \mid \gamma(t) \notin \text{Im}\Gamma\}$, $\text{Im}\gamma \subset \text{Im}\Gamma$ の時 $\tau := b$ と定義します. 像 $\gamma((\tau, b])$ を Γ に関する γ の分離部分と呼び, $SP(\gamma, \Gamma)$ と書く事にします.

E を 3 次元多様体 M 上のジェネリックな階数 2 の接分布, $\Gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow M$ をアドミッシブルな径, $U \subset M$ を $\text{Im}\Gamma$ の近傍とします. U に於いて $\text{Im}\Gamma$ を含む曲面 G で, U を 2 つの連結開部分空間 U^+ と U^- に分割するものを考えます.

定義 2.2 部分区間 $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ で定義される任意のアドミッシブルな径 γ で $\Gamma|_{[a,b]}$ に C^1 -級で十分近く, $\text{Im}\Gamma$ の点を始点に持つものに対し, $SP(\gamma, \Gamma)$ は U^+ に含まれるとき, 曲面 G を Γ の U に於ける分割曲面と呼ぶ. また, U^+ を G の正の側と呼ぶ.

定義 2.3 G は分割曲面で, かつ部分区間 $[a, b] \subset [\alpha, \beta]$ で定義される任意のアドミッシブルな径 γ で $\Gamma|_{[a,b]}$ に C^1 -級で十分近く, U^+ の点を始点に持つものに対し, 常に $\text{Im}\gamma \subset U^+$ が成り立つとき, 曲面 G は γ の U に於ける強い意味の分割曲面と呼ばれる.

注意: 定義より明らかに, 分割平面を持つならば Γ はリジッドです.

I. Zelenko と M. Ya. Zhitomirskii は, [ZZh]において, 横断的点と双曲的点の局所的な分割曲面の存在を示しました.

補題 2.4 ([ZZh]) E を (a)-(0) または (b)-(0) で定義される \mathbb{R}^3 上の接分布, $\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = (0, t, 0)$ を $[\alpha, \beta]$ で定義されたアドミッシブルな径とする. すると, 曲面 $G = \{z = 0\}$ は Γ の $U = \mathbb{R}^3$ に於ける強い意味の分割曲面である. $U^+ = \{z < 0\}$ が正の側である.

補題 2.5 ([ZZh]) E を (a)-(1) または (b)-(1) で定義された \mathbb{R}^3 上の接分布, $\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = (0, t, 0)$ を $[0, \beta]$, $\beta > 0$ で定義されたアドミッシブルな径とする. (原点は双曲点であることに注意.) すると, 曲面 $G = \{z = 0\}$ は Γ の $U = \mathbb{R}^3$ に於ける分割曲面である. $U^+ = \{z < 0\}$ が正の側である.

同様に, 鞍点, 結節点に関して, 局所的な分割曲面を構成しました.

補題 2.6 ([Ad2]) E を (a)-(3) または (4) で定義される \mathbb{R}^3 上の接分布,

$$\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = ((\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\theta})t, 2\theta t, 0)$$

を $[0, \beta]$, $\beta > 0$ で定義されたアドミッシブルな径とする. $\theta > 0, \theta < -4$ は, それぞれ(a)-(3) or (4)であたえられたもの. (原点は, 鞍点または結節点であることに注意.) すると, 曲面 $G = \{2\theta x = (\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\theta})y\}$ は Γ の $U = \mathbb{R}^3$ に於ける分割曲面である. 正の側は, (3)の場合 $U^+ = \{2\theta x > (\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\theta})y\}$, (4)の場合 $U^+ = \{2\theta x < (\theta + \sqrt{\theta^2 + 4\theta})y\}$ である.

補題 2.7 ([Ad2]) E を (a)-(3) で定義される \mathbb{R}^3 上の接分布,

$$\Gamma(t) = (\bar{x}(t), \bar{y}(t), \bar{z}(t)) = ((\theta - \sqrt{\theta^2 + 4\theta})t, 2\theta t, 0)$$

を $[0, \beta]$, $\beta > 0$ で定義されたアドミッシブルな径とする. $\theta > 0$ は, (a)-(3)であたえられたもの. (原点は, 鞍点であることに注意.) すると, 曲面

$$G = \left\{ z^2 + \frac{\theta + 4 - \sqrt{\theta^2 + 4\theta}}{\theta + 4} \{-\theta^2 + (\theta x + y) \cdot y\} = 0 \right\}$$

は Γ の $U = \mathbb{R}^3$ に於ける分割曲面である. 正の側は,

$$U^+ = \left\{ z^2 + \frac{\theta + 4 - \sqrt{\theta^2 + 4\theta}}{\theta + 4} \{-\theta^2 + (\theta x + y) \cdot y\} > 0 \right\}$$

である.

2.4 証明のアイデア

リジッドな径は, Martinet 曲面上にあることが, W. Liu と H. J. Sussman によって示されています. ([LS] 参照.) よって, あと, Martinet 曲面上の特性ベクトル場の積分曲線を調べればよいことになります. まず, 内部に双曲点, 鞍点, 結節点を持つような場合には, C^1 -級で近くにアドミッシブルな径を持つことを, 実際に構成して示します. また, Martinet 曲面上の特性ベクトル場の積分曲線で C^1 -級で近いものが取れるものは, 容易に除外できます. あとの場合, 局所的な分割曲面をつなぎ合わせて大域的な分割曲面を構成します.

References

- [Ad1] J. Adachi, *Generic knots in contact 3-manifolds*, to appear in *Internat. J. of Math.*
- [Ad2] J. Adachi, *Rigid paths of generic 2-distributions with degenerate points on 3-manifolds*, preprint.
- [Ar] V. I. Arnol'd, *Mathematical methods of classical mechanics*, *Grad. Texts in Math.* **60** (1978), Springer New York.
- [B] D. Bennequin, *Entrelacements et equations de Pfaff*, *Astérisque* **107-108** (1983), 83-161.
- [BH] R. L. Bryant and L. Hsu, *Rigidity of integral curves of rank 2 distributions*, *Invent. Math.* **114** (1993), no. 2, 435-461.
- [E1] Ya. Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J. Martinet's work*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **42** (1992), 165-192.
- [E2] Ya. Eliashberg, *Legendrian and transversal knots in tight contact 3-manifolds*, *Topological Methods in Modern Mathematics*, Publish or Perish, (1993), 171-193.
- [EF] Ya. Eliashberg and M. Fraser, *Classification of topologically trivial Legendrian knots*, *Proc. of the 1995 CRM workshop on Dynamics, Geometry, and Topology*.
- [FT] D. Fuchs and S. Tabachnikov, *Invariants of Legendrian and transverse knots in the standard contact space*, *Topology* **36**(1997), 1025-1054.
- [G] E. Giroux, *Convexité en topologie de contact*, *Comment. Math. Helv.* **66** (1991), 637-677.
- [JP] B. Jakubczyk and F. Przytycki, *Singularities of k -tuples of vector fields*, *Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.)* **213** (1984).
- [JZ] B. Jakubczyk and M. Ya. Zhitomirskiĭ, *Singularities and normal forms of generic 2-distributions on 3-manifolds*, *Studia Math.* **113** (1995), no. 3, 223-248.
- [LS] W. Liu and H. J. Sussman, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank-two distributions*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **118** (1995), no. 564.
- [L] V. V. Lychagin, *Local classification of non-linear first-order partial differential equations*, *Russian Math. Surveys* **30:1** (1975), 105-175.
- [M] J. Martinet, *Sur les singularités des formes différentielles*, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)* **20** (1970), 95-178.
- [ZZh] I. Zelenko and M. Ya. Zhitomirskiĭ, *Rigid paths of generic 2-distributions on 3-manifolds*, *Duke Math. J.* **79** (1995), no. 2, 281-307.
- [Zh] M. Ya. Zhitomirskiĭ, *Typical singularities of differential 1-forms and Pfaffian equations*, *Transl. Math. Monogr.*, **113** Amer. Math. Soc., Providence RI, 1992.

可微分写像芽の右左同値の判定法

西村尚史

横浜国立大学教育人間科学部

e-mail:takashi@edhs.ynu.ac.jp

この講演の内容は「 C^∞ 写像の局所的な比較」であり、本質的には微積分の話であるので、多くの方に楽しんで頂ければ幸いです。

局所的考察なので、

対象は、 C^∞ 写像芽 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$

であり、比較に使う

同値関係は、適当な C^∞ 座標変換により一致する、すなわち、

$\exists C^\infty$ 微分同相芽 $s: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0), t: (\mathbb{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$

such that $f \circ s(x) = t \circ g(x)$

であるとする。この同値関係は右左同値（あるいはA-同値）と呼ばれる。次の基本的問題（**recognition problem**と呼ばれる）を考える。

問題 0.1 与えられた二つの C^∞ 写像芽が右左同値かどうか判定せよ。

どちらか一方の写像芽（の原点におけるヤコビ行列）がフルランクであれば完全に決定できる、ということが陰関数定理からわかるし、どちらか一方の写像芽が線形であれば完全に決定できる、ということが階数定理からわかる。しかし、これらの場合を除外し、どちらの写像芽も非線形であり、しかも、原点が特異点となっている場合に対して

は、成熟した感のある「可微分写像の特異点論」と言えど、(1節の系 1.1 などの) 特別な場合を除き、有効な方法を用意していなかったと言えよう。典型的な例として次の写像芽の族を考えてみる。

例 0.1 $f_\alpha(x, y, z) = (x, xy + yz + z^2, \alpha xy + y^2)$ ($\alpha \in \mathbf{R}$)

この写像芽の族は $\alpha = -4$ においてのみ退化しており、 f_α ($\alpha \neq -4$) と f_{-4} とは右左同値ではありえないことが、有限次元ジェット空間内での軌道の余次元を計算する (実際はコンピュータに計算させる) ことによりわかる (§3 の注意 3.1 (2) をご参照下さい)。-4 以外の α 達、とりわけ、 $\mathbf{R} - \{-4\}$ の異なる連結成分上の α 達に対してはどのように判定できるのだろうか? このような場合でも通用する、計算が容易で統一的な判定法は残念ながらこれまでは存在しなかった。

この講演では、問題 0.1 に対し肯定的解答を与える、初等的かつ構成的 (従って計算が比較的容易) であり、しかも、統一的な判定法を紹介する (§1)。証明に使われる構成的戦略を 2 節で説明した後、この判定法はとても有用であることを納得して頂くため、この判定法を例 0.1 に対して適用してみるということを行い、 $\mathbf{R} - \{-4\}$ 上の任意の α に対し、 f_α は f_0 と右左同値であることを示してみる (§3)。この講演では判定法の証明は省略しているので、もしかすると信憑性に欠けるように思われるかもしれない。それでは困るので、時間があったら、例 0.1 に対し右左同値を与える座標変換を具体的に求めてみるということを 4 節で行いたい。誤解や混乱を避けるため強調しておく、座標変換の具体的表示はあくまで副産物であって、座標変換を具体的に求めなくても (すなわち、 C^∞ 微分同相芽の群の元がはっきりとはわからなくても) 問題 0.1 に肯定的に答える (すなわち、右左同値であることを示す) ことは可能なのである (§3 の注意 3.1 (1) をご参照下さい)。

この方法や戦略の証明等詳細は [8] をご覧下さい。この方法には、無限小対応版 ([4])、位相的右左同値についての対応版 ([5])、位相安定写像芽の位相的分類の試みへの応用 ([6]) などのヴァリエントが既に存在する。1998 年 12 月時点でこれらを統一的に解説したサーヴェイとして [7] がある。

1 判定法

定義 1.1 (1) C^∞ 写像芽 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ に対し、 $\Phi(x, 0) = f(x)$ を満たす C^∞ 写像芽 $\Phi : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ は f の変形芽と呼ばれる。

(2) C^∞ 写像芽 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ の変形芽 $\Phi : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ が局所自明であるとは、以下の図式(*)を可換にする C^∞ 微分同相芽 $h : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ 、 $H : (\mathbf{R}^p, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ が存在するときを言う。

(3) C^∞ 写像芽 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ の変形芽 $\Phi : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ が横断的局所自明であるとは、局所自明であり、図式(*)に現れる C^∞ 微分同相芽 H に対し、部分多様体芽 $(H(\{0\} \times \mathbf{R}^k), 0)$ が部分多様体芽 $(\{0\} \times \mathbf{R}^k, 0)$ に横断的であるときを言う。

$$(*) \quad \begin{array}{ccccc} (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{(\Phi, \pi)} & (\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbf{R}^k, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \parallel \\ (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi)} & (\mathbf{R}^p \times \mathbf{R}^k, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbf{R}^k, 0) \end{array}$$

与えられた2つの C^∞ 写像芽 $f, g : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ 、 C^∞ 微分同相芽 $s : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ そして C^∞ 写像芽 $M : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow GL(p, \mathbf{R})$ に対し、次の4条件(a)-(d)を定義する。

(a): $f(x) = M(x)g(s(x))$

(b): 以下の形の f の変形芽 $F : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ は局所自明。

$$F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$$

(c): 以下の形の g の変形芽 $G : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ は局所自明。

$$G(x, \lambda) = g(x) - M(s^{-1}(x))^{-1}\lambda$$

(d): 以下の形の f の変形芽 $F : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ は横断的局所自明。

$$F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$$

これら (a)-(d) を使い、 f, g に対する以下の 4 条件を定義する。

(i): f と g は 右左同値。

(ii): (a) と (b) を満たす C^∞ 微分同相芽 $s : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ と C^∞ 写像芽 $M : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ が存在する。

(iii): (a)、(b) と (c) を満たす C^∞ 微分同相芽 $s : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ と C^∞ 写像芽 $M : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ が存在する。

(iv): (a) と (d) を満たす C^∞ 微分同相芽 $s : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ と C^∞ 写像芽 $M : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ が存在する。

ちなみに、 f, g が

(v): (a) を満たす C^∞ 微分同相芽 $s : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ と C^∞ 写像芽 $M : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ が存在する。

という条件を満たすとき、 f, g は \mathcal{K} -同値と呼ばれる。

$$(i) \Rightarrow (v)$$

は常に成り立つが、逆は必ずしも成り立たない (例えば以下の例 1.1)。この \mathcal{K} -同値という概念は初めて目にされた方には不自然に見えるかもしれないが、 \mathbf{R}^n からの C^∞ 関数芽の集合 $\{(\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow \mathbf{R}^p, C^\infty\}$ に \mathbf{R} から誘導される代数構造を与えた \mathbf{R} -多元環の中で f や g の各成分関数で生成されるイデアルを考えたとき、行列 M は生成元のあいだの関係式を与え、定義域の座標変換 s は商多元環の同型を誘導する、ということに気付くと自然な同値関係であることがわかる。これは J. Mather が構造安定性問題の解決のために導入した大変重要な概念であり、解決のための最重要ステップは、右左同値と \mathcal{K} -同値を直接結びつける「Mather の分類定理」(以下の系 1.1) であった。一方で、 \mathcal{K} -同値はそれ自身興味深く、(特に位相安定写像の観点から) とても大切であり、

また、右左同値に比べるとかなり扱い易いので、「右左同値については気にせず、 \mathcal{K} -同値それ自身について調べる」ことが J. Mather 以後の可微分写像の特異点論の流れの一つになっていた。しかし他方で、一般には右左同値よりもかなり弱い同値関係であることもわかっている（例えば以下の例 1.1）ので、問題 0.1 の解決、特に肯定的解決については \mathcal{K} -同値だけでは何の情報も得られない。

我々の条件に戻る。条件 (ii) - (iv) は右左同値と \mathcal{K} -同値の狭間を埋める条件として導入された。

定理 1.1 f, g を原点でのヤコビ行列の階数がゼロの C^∞ 写像芽とする。そのとき、次が成立。

$$(i) \Leftrightarrow (ii) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$$

定理 1.1 において、階数の仮定を外すことはできない。

例 1.1 $f(x, y) = (x, y^3 + xy), g(x, y) = (x, y^3)$ とし、

$$M(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}$$

とおく。すると、 $f(x, y) = M(x, y)g(x, y)$ である。

写像芽 f は Whitney のカスプの標準形と呼ばれるもので、安定な写像芽であることがよく知られている。従って安定写像芽の定義（以下の定義 1.2）より、 f のどんな変形芽も必ず局所自明となる。特に (ii) を満たす。他方、(i) を満たさないことはすぐわかる（ f と g は位相右左同値ですらない）。

この例により、階数の仮定を外して右左同値を特徴付けるのには、条件 (ii) は弱すぎるのがわかる。しかし、次を得ることができる。

定理 1.2 $f, g: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を C^∞ 写像芽とする。

そのとき、次が成立。

$$(i) \Leftrightarrow (iii) \Leftrightarrow (iv)$$

定義 1.2 C^∞ 写像芽 f は、 f のどんな変形芽も局所自明であるとき、安定と呼ばれる。

見かけ上は異なる安定の定義が他にもいくつかあるが、それらはすべて同値である (例えば [9] を参照)。ここでは定義 1.2 を採用する。定理 1.2 の系として以下を得る。

系 1.1 ([3]) $f, g : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^p, 0)$ を安定写像芽とする。そのとき、次が成立。

$$(i) \Leftrightarrow (v)$$

この系は定理 1.2 の (i) \Leftrightarrow (iii) から従うが、一般の写像芽に対しては条件 (iii) は必ずしも使いやすすくない (局所自明性を両側でチェックするのはかなりしんどい)。条件 (iii) よりも使いやすい条件として、条件 (iv) が導入された。3 節では、この条件 (iv) はかなり有用であることを、例 0.1 に対して適用してみることで垣間見る。

2 戦略

まず、この節のみの記号を導入する。この節では 2 種類の p -次元ユークリッド空間 \mathbf{R}^p を扱う。混乱を避けるため、ターゲット空間だと考えているときは \mathbf{R}_y^p と記すことにし、パラメータ空間だと考えているときは \mathbf{R}_λ^p と記すことにする。

$f, g : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}_y^p, 0)$ 、 $M : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (GL(p, \mathbf{R}), M(0))$ を C^∞ 写像芽とし、 $s : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ を C^∞ 微分同相芽とする。今、

$$f(x) = M(x)g(s(x))$$

であり、さらに次の形の f の変形芽 $F : (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_\lambda^p, 0) \rightarrow (\mathbf{R}_y^p, 0)$ が局所自明だと仮定する。

$$F(x, \lambda) = f(x) - M(x)\lambda$$

すると、局所自明性の定義により、以下の図式を可換にする C^∞ 微分同相芽 $h: (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0))$ と $H: (\mathbf{R}_y^p \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}_y^p \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0))$ が存在することになる。

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(F, \pi_\lambda)} & (\mathbf{R}_y^p \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbf{R}_\lambda^p, 0) \\ h \downarrow & & H \downarrow & & \parallel \\ (\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{(f, \pi_\lambda)} & (\mathbf{R}_y^p \times \mathbf{R}_\lambda^p, (0, 0)) & \xrightarrow{\pi'_\lambda} & (\mathbf{R}_\lambda^p, 0) \end{array}$$

図式の可換性より、

$$h(x, \lambda) = (h_1(x, \lambda), \lambda)$$

そして

$$H(y, \lambda) = (H_1(y, \lambda), \lambda).$$

とおける。

補題 2.1 $f(h_1(x, g(s(x)))) = H_1(0, g(s(x)))$.

補題 2.2 もしも

$$(2.1) \quad \lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$$

で定義される $(\mathbf{R}_\lambda^p, 0)$ から $(\mathbf{R}_y^p, 0)$ への写像芽が C^∞ 微分同相ならば、

$$(x, \lambda) \mapsto (h_1(x, \lambda), H_1(0, \lambda))$$

で定義される写像芽による $(F^{-1}(0), (0, 0))$ の像は原点における f のグラフ芽。

補題 2.3 もしも

$$\lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$$

で定義される $(\mathbf{R}_\lambda^p, 0)$ から $(\mathbf{R}_y^p, 0)$ への写像芽が C^∞ 微分同相であれば、

$$(2.2) \quad x \mapsto h_1(x, g(s(x)))$$

で定義される $(\mathbf{R}^n, 0)$ から自分自身への写像芽も C^∞ 微分同相である。

これらの補題の証明はいずれも初等的である。詳しくは [8] をご覧下さい。次の補題 2.4 がこれらのまとめである。一見すると、補題 2.2 は必要ないようであるが、実は補題 2.3 の証明の鍵となっている。

補題 2.4 この節での仮定のもとで、もしも

$$\lambda \mapsto H_1(0, \lambda)$$

で定義される $(\mathbb{R}_\lambda^p, 0)$ から $(\mathbb{R}_y^p, 0)$ への写像芽が C^∞ 微分同相ならば、 f と g は 右左同値である。

注意 2.1

- (1) 「平行移動 $(y, \lambda) \mapsto (y - H_1(0, \lambda), \lambda)$ を H に合成すれば、合成写像芽に対する写像芽 (2.1) はゼロマップとなるので、(2.1) は意味がないのでは？」と思われるかもしれない。平行移動を H に合成した後は確かにそうだが、合成する前は十分に意味があるのである。実際、我々の戦略の本質的な所は (2.1) に注目し注意深く観察するところであり、この点において、J. Martinet の取り扱い ([2]) と完全に異なるものである。(2.1) のおかげにより、必ずしも安定でない写像芽をも扱うことができるのである。
- (2) 我々の戦略は、構成的であるがゆえに、非常に特殊な形の右左同値のみを考察している。しかし、驚くべきことに、この非常に特殊な形の右左同値のみの考察で、右左同値に対する既知の結果のほとんどすべてを復元することができる。
- (3) 位相右左同値に対しても同様の戦略が通用する ([5],[6],[7])。

3 使用例

主張 3.1 例 0.1 の f_α に対し、 $\alpha \neq -4$ ならば、 f_α と f_0 は右左同値。

主張 3.1 の証明

$$f_0(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha y & 0 & 1 \end{bmatrix} f_\alpha(x, y, z)$$

であるから、条件 (iv) の (a) は満たす。

以下の形の f_0 の変形芽 F_α を考える。

$$F_\alpha(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = f_0(x, y, z) - \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\alpha y & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

ターゲット空間 \mathbb{R}^3 の標準座標系を大文字 (X, Y, Z) で表すことにすると、明らかに、

$$-\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial}{\partial Y}, \quad -\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_3} = \frac{\partial}{\partial Z}$$

であり、さらに、代入して微分するという操作を繰り返すと次を得る。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\alpha y \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial X} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha y \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial y} (f_0) + \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ x+z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial y} (F_\alpha) - \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{bmatrix} \lambda_1 + \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ x \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\alpha}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ z \\ 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial y} (F_\alpha) + \frac{\alpha^2}{2} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\alpha}{2} (X + \lambda_1) \frac{\partial}{\partial Y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial z}(f_0) - \frac{\alpha}{4}\begin{bmatrix} 0 \\ y \\ 0 \end{bmatrix} \\
& = \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial y}(F_\alpha) + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_1\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\alpha}{2}(X + \lambda_1)\frac{\partial}{\partial Y} \\
& \quad + \frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial z}(F_\alpha) - \frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial x}(f_0) + \frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial X} \\
& = \left(-\frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial z}\right)(F_\alpha) \\
& \quad + \frac{(4+\alpha)}{4}\frac{\partial}{\partial X} + \frac{\alpha}{2}(X + \lambda_1)\frac{\partial}{\partial Y} + \frac{\alpha^2}{2}\lambda_1\frac{\partial}{\partial Z}
\end{aligned}$$

そこで

$$\xi_{1,\alpha} = -\frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi_{2,\alpha} = 0, \quad \xi_{3,\alpha} = 0$$

そして

$$\begin{aligned}
\eta_{1,\alpha} &= -\frac{(4+\alpha)}{4}\frac{\partial}{\partial X} - \frac{\alpha}{2}(X + \lambda_1)\frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\alpha^2}{2}\lambda_1\frac{\partial}{\partial Z}, \\
\eta_{2,\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \eta_{3,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial Z}
\end{aligned}$$

とおく。すると、

$$(3.1) \quad -\frac{\partial F_\alpha}{\partial \lambda_i} = \xi_{i,\alpha}(F_\alpha) - \eta_{i,\alpha} \circ (F_\alpha, \pi_\lambda) \quad (i = 1, 2, 3)$$

と

$$(3.2) \quad \eta_{1,\alpha}(0,0) = -\frac{(4+\alpha)}{4}\frac{\partial}{\partial X}, \quad \eta_{2,\alpha}(0,0) = -\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \eta_{3,\alpha}(0,0) = -\frac{\partial}{\partial Z}$$

を得る。

(3.1) より, C^∞ ベクトル場芽

$$\xi_{i,\alpha} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i}, \quad \eta_{i,\alpha} + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

を積分すれば、以下の図式を可換にする C^∞ 微分同相芽

$$\begin{aligned} h_\alpha^{-1} &: (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) \rightarrow (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) \\ H_\alpha^{-1} &: (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) \rightarrow (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) \end{aligned}$$

を得ることができる。

$$\begin{array}{ccccc} (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) & \xrightarrow{(F_\alpha, \pi)} & (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbf{R}^3, 0) \\ \uparrow h_\alpha^{-1} & & \uparrow H_\alpha^{-1} & & \parallel \\ (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) & \xrightarrow{(f_0, \pi)} & (\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3, (0,0)) & \xrightarrow{\pi'} & (\mathbf{R}^3, 0) \end{array}$$

従って、 F_α は局所自明である。

さらに、

$$\frac{\partial H_\alpha^{-1}}{\partial \lambda_i}(0,0) = \eta_{i,\alpha}(0,0) + \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \quad (i = 1, 2, 3)$$

なので、 $\alpha \neq -4$ ならば $(H_\alpha^{-1}(\{0\} \times \mathbf{R}^3), (0,0))$ は $(\{0\} \times \mathbf{R}^3, (0,0))$ に横断している、従って、 $(H_\alpha(\{0\} \times \mathbf{R}^3), (0,0))$ は $(\{0\} \times \mathbf{R}^3, (0,0))$ に横断している、ということが (3.2) からわかる。よって、 $\alpha \neq -4$ ならば、条件 (iv) の (d) も満たしている。

従って定理 1.2 より、 $\alpha \neq -4$ ならば f_α は f_0 と右左同値であることがわかる。 \square

注意 3.1

- (1) 上の証明でお分かりのように、(3.1) から F_α の局所自明性が従うし、(3.2) から横断性も得られる。主張 3.1 を示すのに必要な情報は \mathcal{K} -同値性と (3.1) と (3.2) だけなのである。座標変換の具体的な形は一切必要ない。具体的な形を知りたいのはベクトル場芽 $\eta_{i,\alpha}$ の定数項のみなのである。
- (2) 「 $\alpha \neq -4$ に対し、 f_α と f_{-4} は右左同値でない」ということをも示しているわけではない。(定理 1.2 は必要十分な形なので) 定理 1.2 を使い示せるのが望ましいが、群 $\mathcal{K} (\{(s, M)\})$ という群) の f_0 に対するアイソトロピー部分群のすべての元について

考察せねばならず、実際は無理。このようなネガティブな結論を得るための標準的かつ強力な方法は「普遍開折を調べる」というものだが、この例の場合は f_α は有限確定ではなく、普遍開折は存在しない。しかし、高次の項を忘れてしまい「有限次元ジェット空間内の軌道の余次元」を計算し違いが現れれば十分なのでこれを計算することにする。私の手計算ではまず間違いなく間違えてしまうが、幸いなことに「有限次元ジェット空間内の軌道の接空間」の詳細な情報を数秒のうちに得ることが出来る、信頼できる Maple パッケージ「Transversal」が Neil Kirk(Liverpool University) によって開発されている ([1]) ので、それを感謝して使うと、

$J^4(3, 3)$ における f_α ($\alpha \neq -4$) の軌道の余次元は 1 2。

$J^4(3, 3)$ における f_{-4} の軌道の余次元は 1 7。

となり、右左同値でないことがわかる。

4 右左同値を与える座標変換の具体的な形

$\Xi_{i,\alpha} : (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, (0, 0)) \rightarrow (\mathbb{R}^3, 0)$ をベクトル場芽 $\xi_{i,\alpha}$ のローカルフロア芽とする ($i = 1, 2, 3$)。すると、3節より

$$\xi_{1,\alpha} = -\frac{\alpha}{4} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\alpha}{4} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \xi_{2,\alpha} = 0, \quad \xi_{3,\alpha} = 0$$

であったので次を得る。

$$\begin{aligned} & \Xi_{1,\alpha}(\lambda_1; \Xi_{2,\alpha}(\lambda_2; \Xi_{3,\alpha}(\lambda_3; (x, y, z)))) \\ &= \left(x - \frac{\alpha}{4}\lambda_1, y - \frac{\alpha}{2}\lambda_1, z + \frac{\alpha}{4}\lambda_1\right) \end{aligned}$$

従って、

$$\begin{aligned} & h_\alpha((x, y, z), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \\ &= \left(\left(x + \frac{\alpha}{4}\lambda_1, y + \frac{\alpha}{2}\lambda_1, z - \frac{\alpha}{4}\lambda_1\right), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)\right) \end{aligned}$$

となり

$$\begin{aligned} & h_\alpha((x, y, z), f_\alpha(x, y, z)) \\ &= \left(\left(\frac{4+\alpha}{4}x, y + \frac{\alpha}{2}x, z - \frac{\alpha}{4}x \right), f_\alpha(x, y, z) \right) \end{aligned}$$

を得ることになる。そこで

$$s_\alpha(x, y, z) = \left(\frac{4+\alpha}{4}x, y + \frac{\alpha}{2}x, z - \frac{\alpha}{4}x \right)$$

とおく (2節の写像芽(2.2)を参照)。

次に、 $\Theta_{i,\alpha} : (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^3, (0, 0)) \rightarrow (\mathbf{R}^3, 0)$ をベクトル場芽 $\eta_{i,\alpha}$ のローカルフロー芽とする ($i = 1, 2, 3$)。すると、3節より

$$\begin{aligned} \eta_{1,\alpha} &= -\frac{4+\alpha}{4} \frac{\partial}{\partial X} - \frac{\alpha}{2} (X + \lambda_1) \frac{\partial}{\partial Y} - \frac{\alpha^2}{2} \lambda_1 \frac{\partial}{\partial Z}, \\ \eta_{2,\alpha} &= -\frac{\partial}{\partial Y}, \quad \eta_{3,\alpha} = -\frac{\partial}{\partial Z} \end{aligned}$$

であったので次を得る。

$$\begin{aligned} & \Theta_{1,\alpha}(\lambda_1; \Theta_{2,\alpha}(\lambda_2; \Theta_{3,\alpha}(\lambda_3; (X, Y, Z)))) \\ &= \Theta_{1,\alpha}(\lambda_1; \Theta_{2,\alpha}(\lambda_2; (X, Y, Z - \lambda_3))) \\ &= \Theta_{1,\alpha}(\lambda_1; (X, Y - \lambda_2, Z - \lambda_3)) \\ &= \left(X - \frac{4+\alpha}{4} \lambda_1, Y - \lambda_2 - \frac{\alpha}{2} X \lambda_1 + \frac{\alpha^2}{16} \lambda_1^2, Z - \lambda_3 - \frac{\alpha^2}{4} \lambda_1^2 \right) \end{aligned}$$

よって

$$H_{2,\alpha} = Y + \lambda_2 + \frac{\alpha}{2} \left(X + \frac{4+\alpha}{4} \lambda_1 \right) \lambda_1 - \frac{\alpha^2}{16} \lambda_1^2$$

とおいて、

$$\begin{aligned} & H_\alpha((X, Y, Z), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \\ &= \left(\left(X + \frac{4+\alpha}{4} \lambda_1, H_{2,\alpha}, Z + \lambda_3 + \frac{\alpha^2}{4} \lambda_1^2 \right), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right) \end{aligned}$$

を得る。従って

$$\begin{aligned} & H_\alpha((0, 0, 0), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)) \\ &= \left(\left(\frac{(4 + \alpha)}{4} \lambda_1, \lambda_2 + \frac{(8\alpha + \alpha^2)}{16} \lambda_1^2, \lambda_3 + \frac{\alpha^2}{4} \lambda_1^2 \right), (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \right) \end{aligned}$$

となるので、

$$t_\alpha(X, Y, Z) = \left(\frac{(4 + \alpha)}{4} X, Y + \frac{(8\alpha + \alpha^2)}{16} X^2, Z + \frac{\alpha^2}{4} X^2 \right)$$

とおく (2節の写像芽 (2.1) を参照)。

すると、2節の補題 2.1 にあるように、確かに

$$f_0 \circ s_\alpha(x, y, z) = t_\alpha \circ f_\alpha(x, y, z)$$

となっている。

参考文献

- [1] Kirk, N., Transversal: A Maple Package for Singularity Theory. User Manual, Ver. 3.1, Preprint, University of Liverpool, 1998.
- [2] Martinet, J., Déploiements versals des applications différentiables et classification des applications stables. In *Singularités d'Applications Différentiables*, eds. O. Burlet and F. Ronga, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 535, Springer, Berlin, 1976, pp. 1-44.
- [3] Mather, J., Stability of C^∞ mappings, IV, Classification of stable map-germs by \mathbf{R} -algebras. *Publ. Math. I. H. E. S.*, 1970, **37**, 223-248.
- [4] Nishimura, T., Isomorphism of smooth map germs with isomorphic local algebras. In *Real Analytic and Algebraic Singularities*, eds. T. Fukuda, T. Fukui, S. Izumiya and S. Koike, Pitman Research Notes in Mathematics Series, Vol. 381, Longman Scientific & Technical, Harlow, 1998, pp. 94-106.

- [5] Nishimura, T., Topological equivalence of \mathcal{K} -equivalent map germs. *Journal of the London Mathematical Society*, (to appear).
- [6] Nishimura, T., C^r \mathcal{K} -versality of the graph deformation of a C^r stable map-germ. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, (to appear).
- [7] Nishimura, T., Recognizing right-left equivalence locally. In *Causitics '98*, eds. S. Janeczko and V. Zakalyukin, Banach Center Publications, Polish Academy of Sciences, Warszawa, (to appear).
- [8] Nishimura, T., Criteria for right-left equivalence of smooth map-germs. Preprint, Yokohama National University, 1998.
- [9] du Plessis, A. A. and Wall, C. T. C., *The Geometry of Topological Stability*, London Mathematical Society Monographs New Series, Vol. 9, Oxford University Press, Oxford, 1995.

尚、[4],[5],[6], [7],[8] は次のサイトからダウンロード可能です。

Japanese Singularity Network
(<http://indy.math.sci.hokudai.ac.jp/~jsn/>)

