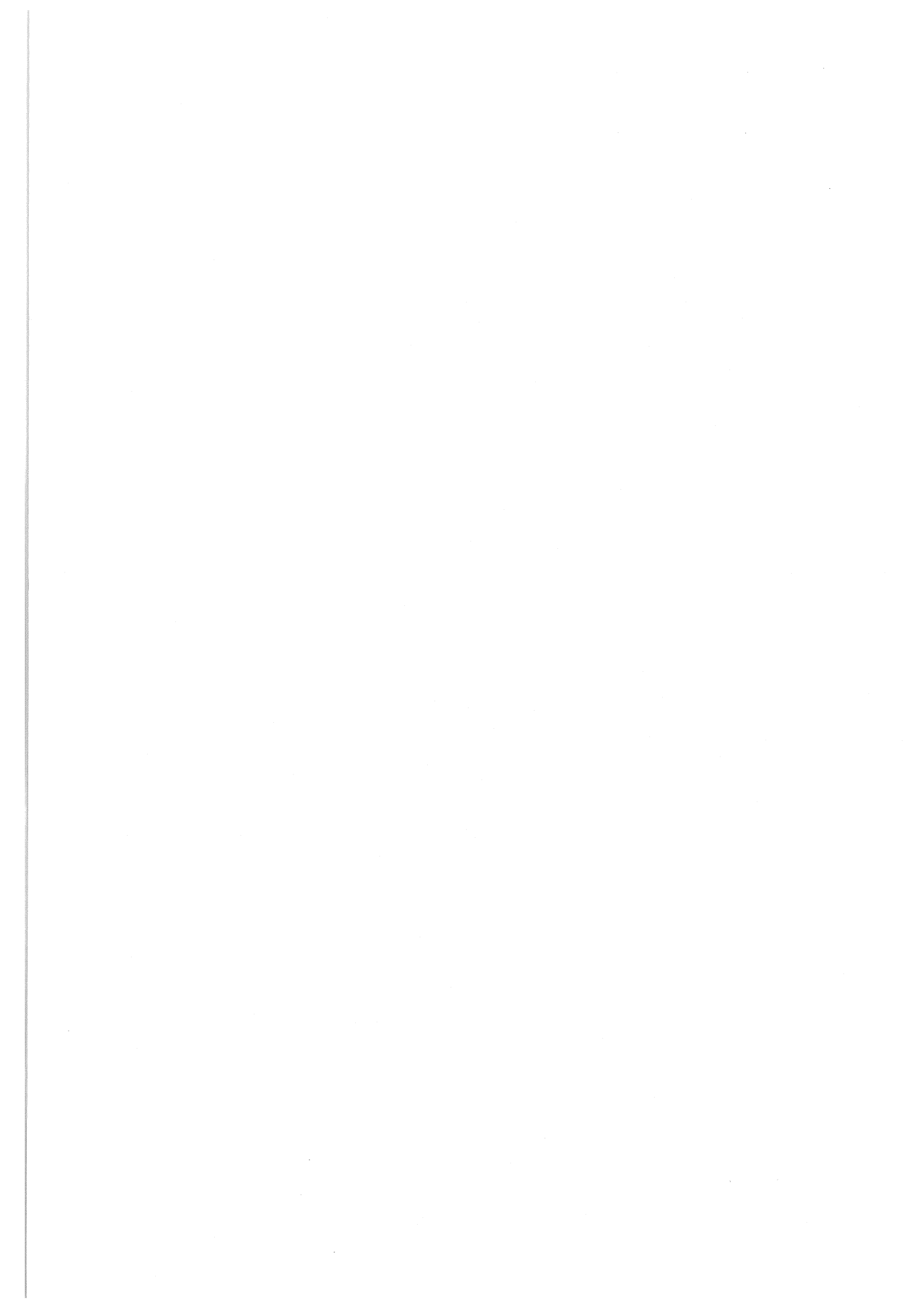


第45回
トポロジーシンポジウム
講演集

1998年7月
於 山口大学 大学会館

平成10年度科学研究費 基盤研究 (A)

課題番号 09304011



序

この講演集は1998年7月22日から25日の間、山口大学で開催される第45回全日本トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。

その目的は参加者が講演をよりよく理解して、研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立たせることにある。

この講演集は、

平成10年度科学研究費基盤研究(A)
「結び目理論と多様体の幾何学」
課題番号 09304011

により作られたものであることを付記しておく。

1998年7月

基盤研究(A) 09304011
研究代表者 河内 明夫

第45回トポロジーシンポジウム

世話人：小島定吉（東工大情報理工）
森本雅治（岡山大環境理工）
小宮克弘（山口大理）

プログラム

7月22日（水）

- 14:45 - 15:45 泉屋 周一（北大理）
特異点論と古典的微分幾何学 1
- 16:15 - 17:15 平澤 美可三（阪大理）
Construction of essential laminations
in link complements using branched surfaces 13

7月23日（木）

- 9:45 - 10:45 佐伯 修（広島大理）
微分可能写像の特異点の消去問題について 27
- 11:00 - 12:00 小沢 哲也（名城大理工）
平面曲線のトポロジー 37
- 13:30 - 14:30 竹田 雄一郎（都立大理）
Milnor 予想について（Voevodsky の仕事の紹介） 49
- 14:45 - 15:45 知念 直紹（筑波大ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー）
Maps from $(n+2)$ -manifolds whose fibers have
the homotopy type of closed n -manifolds 77
- 16:15 - 17:15 松本 眞（慶大理工）
写像類群のアルティン群による簡明な表示 83
- 18:00 - 懇親会（於 山口大学 大学会館 レストラン）

7月24日(金)

9:45-10:45	村上 斉 (早大理工) 3次元多様体の不変量の近況	93
11:00-12:00	赤穂 まなぶ (京大理) Seiberg-Witten 不変量を使った 絡み目の種数の評価について	101
13:30-14:30	Jerzy Dydak (U. of Tennessee) Epimorphisms and monomorphisms in proper homotopy	113
14:45-15:45	野田 健夫 (東大数理) C^2 級の不安定葉層および安定葉層を持つ 射影的アノソフ流について	115
16:15-17:15	秋田 利之 (福岡大理) Torelli 群と Torelli 空間のホモロジー	125

7月25日(土)

9:45-10:45	三松 佳彦 (中大理工) Projective Anosov flows (= bi-contact structures) on 3-manifolds	137
11:00-12:00	山下 靖 (奈良女大理) 重みつき配置空間の幾何	151

特異点論と古典的微分幾何学

泉屋 周一

北大理

1 応用特異点論について

最近、色々な機会において「応用特異点論」と言う分野を標榜している。この分野はいわゆる、可微分写像の特異点論を応用可能なすべての分野をさすと言って良い。その意味では、佐伯修氏の微分位相幾何学への応用も応用特異点論の一つである。現在までの私の研究対象としては、偏微分方程式への応用と今回ここで紹介する古典的微分幾何学への応用が主要な物と言える。偏微分方程式への応用については最近、解説記事(数理科学6月号[8])と著書(泉屋・石川著「応用特異点論」共立1998)で発表する機会が与えられたので、この話題についてはそれらを参照していただきたい。さらに、今までに私が少しでも考えさらに将来考えたい話題としては、(重力場レンズ現象、ポロノイ図形、ウルフ図形、コンピュータグラフィックス、地震学や海洋音響学)への応用があげられるがはたさてどれだけ出来ることやらと言うのが正直な感想である。元気で才能の豊かな新人の登場を期待したい。

2 曲線のジェネリックユークリッド微分幾何学

モースの理論は多様体の微分構造や位相構造の研究に大変役に立ったことはトポロジーの専門家には承知の事実である。そこでこの考えをより精密な構造に対して適用すると「ある幾何学にたいしてその幾何を Klein の意味で記述する変換群にたいして不変な関数を多様体上で考えるとその関数の特異点とその多様体の幾何学的不変量を導く」と言うことが出来よう。この考えは変分原理の延長上として Thom が提出したもので実際にそれをユークリッド微分幾何学に対して実行して見せたのは Porteous[20]である。最初に、平面曲線にたいして特異点論の微分幾何への応用について紹介する。詳しくは Bruce と Giblin の著書 [3] や原論文を参照してほしい。

ここで単位速度平面曲線とは開区間 I 上の可微分写像 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^2$ で $\|\gamma'(s)\| = 1$ をみたすものとする。ここで、 $\|x\|$ はユークリッドノルムを表し、 $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$ とする。任意の \mathbb{R}^2 へのはめ込み γ は弧長パラメータに変換すれば単位速度平面曲線となるので、最初からそう仮定しても一般性を失わない。ここで、 $T(s) = \gamma'(s)$ とおき $T(s)$ を反時計回りの方向に π だけ回転させて得られたベクトルを $N(s)$ であらわす。このとき $T(s)$ を単位接ベクトル、 $N(s)$ を単位法ベクトルと呼ぶ。さらに関数 $\kappa(s)$ を $\kappa(s) = x_1''(s)x_2'(s) - x_1'(s)x_2''(s)$ と定めて、 γ の s における曲率と呼ぶ。このとき以下の Frenet-Serret の公式が成り立つ:

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s). \end{cases}$$

ここで単位速度平面曲線 $\gamma(s)$ に対して、距離 2 乗関数 $F: I \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ を $F(s, x) = \|\gamma(s) - x\|^2$ で高さ関数 $H: I \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}$ を $H(s, v) = \langle \gamma(s), v \rangle$ で定義する。ここで、 $\langle u, v \rangle$ は標準内積を表す。これら、距離 2 乗関数や高さ関数はモース理論においてもしばしば登場する関数であるが、その定義からユークリッド変換群で不変なものであり、トムの思想ではユークリッド微分幾何的な不変量を記述するはずである。実際、以下の命題が成り立つ。

命題 2.1 $\gamma(s)$ を単位速度平面曲線とする。

(A) γ 上の距離 2 乗関数 F に対して、 $f_x(s) = F(s, x)$ と定めると以下が成り立つ:

(1) $f_x'(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\gamma(s) - x = \lambda N(s)$ となる実数 λ が存在することである。言い換えると、点 x は $\gamma(s)$ の法線上にあることである。

(2) $f'_x(s) = f''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s) \neq 0$ でかつ $x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ が成り立つことである。

(3) $f'_x(s) = f''_x(s) = f'''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s) \neq 0$ と $\kappa'(s) = 0$ が成り立ちかつ $x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ となることである。

(4) $f'_x(s) = f''_x(s) = f'''_x(s) = f''''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s) \neq 0$ と $\kappa'(s) = \kappa''(s) = 0$ が成り立ちかつ $x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s)$ となることである。

(B) γ 上の高さ関数 H に対して、 $h_v(s) = H(s, v)$ と定めると以下が成り立つ：

(1) $h'_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm N(s)$ となることである。

(2) $h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm N(s)$ でありかつ $\kappa(s) = 0$ が成り立つことである。

(3) $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm N(s)$ でありかつ $\kappa(s) = \kappa'(s) = 0$ となることである。

モース理論はモース関数と言う単独の関数が多様体上に存在するときその微分構造や位相構造を研究することができるというものであったがここでは単独の関数ではなく関数族（開折）を考えることにより、より精密な情報を得ることが出来る。そこで1変数関数の開折理論の復習を行う： $F : (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbf{R}$ を可微分関数芽とする。このとき、 F を $f(t) = F(t, x_0)$ の r -パラメータ開折であると言う。開折理論において最も重要な概念は2種類の普遍開折 (\mathcal{R} -普遍開折と \mathcal{R}^+ -普遍開折) であるが、ここではその性質のみを使い定義や基本的な性質は述べない。詳しくは野口-福田 [18] か泉屋-石川 [9] を参照することを勧める。ここで、可微分関数芽 $f(t)$ が t_0 で A_k -型特異点を持つとは任意の $1 \leq p \leq k$ にたいして $f^{(p)}(t_0) = 0$ を満たし、かつ $f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$ を満たすこととする。この場合、 $f(t)$ の開折 $F(t, x)$ が普遍開折になるための代数的な判定条件が存在するが、詳しくは Bruce と Giblin の著書 [3] を参照して欲しい。開折に付随して、2種類の重要な不変集合が存在する。 F の分岐集合とは

$$B_F = \left\{ x \in \mathbf{R}^r \mid \text{there exists } t \text{ with } \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0 \text{ at } (t, x) \right\}$$

のことであり F の判別集合とは

$$D_F = \left\{ x \in \mathbf{R}^r \mid \text{there exists } t \text{ with } F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0 \text{ at } (t, x) \right\}.$$

の事である。

ここで普遍開折に関する分類定理を引用する。

定理 2.1 $F : (\mathbf{R} \times \mathbf{R}^r, (t_0, x_0)) \rightarrow \mathbf{R}$ を t_0 で A_k -型特異点を持つ可微分関数芽 $f(t)$ の r -パラメータ開折とする。

(1) F を \mathcal{R}^+ -普遍開折とする。このとき、

(a) $k = 2$ のとき B_F は $\{0\} \times \mathbf{R}^{r-1}$ に局所微分同相である。

(b) $k = 3$ のとき B_F は $C \times \mathbf{R}^{r-2}$ に局所微分同相である。

(c) $k = 4$ のとき B_F は $SW \times \mathbf{R}^{r-3}$ に局所微分同相である。

(2) F を \mathcal{R} -普遍開折とする。このとき、

(a) $k = 1$ のとき D_F は $\{0\} \times \mathbf{R}^{r-1}$ に局所微分同相である。

(b) $k = 2$ のとき D_F は $C \times \mathbf{R}^{r-2}$ に局所微分同相である。

(c) $k = 3$ のとき D_F は $SW \times \mathbf{R}^{r-3}$ に局所微分同相である。

ここで $C = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 = x_2^2\}$ はカuspであり $SW = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3u^4 + u^2v, x_2 = 4u^3 + 2uv, x_3 = v, (u, v) \in \mathbf{R}\}$ はツバメの尾である。

ここで、命題 2.1 からわかることは、距離 2 乗関数 F の分岐集合 B_F が

$$EV_\gamma = \left\{ x \in \mathbf{R}^2 \mid x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) \right\}$$

で与えられることである。一方この集合 EV_γ は古典的には縮閉線として知られている。Bruce と Giblin[3] によると、ジェネリックな γ に対しては距離 2 乗関数 F は $f_x(s)$ が A_i 型 ($i \leq 3$) の特異点を持つこととさらにこの場合 $F(s, x)$ はいつも $f_x(s)$ の \mathcal{R}^+ 普遍開折となることがわかる。このことは、ジェネリックな γ に対する B_F の特異点は定理 2.2 からカスプであることを意味している。即ち、ジェネリックな γ の縮閉線の特異点はカスプであることがわかる。さらに高さ関数についてはこの関数を開折とみて判別集合を考えるとそれは γ の双対曲線 (ペダル曲線) に一致し、この場合もまたジェネリックな γ の双対曲線の特異点はカスプであることが同様に示される。この場合もそのカスプに対応する γ 上の点は $\kappa(s) = 0$ 、 $\kappa'(s) \neq 0$ をみたす点であることがわかり、それは γ の変曲点と呼ばれる。この様に平面曲線上の距離 2 乗関数と高さ関数の特異点はその曲線のユークリッド微分幾何学的不変量 $\kappa(s)$ と深く関係している。また、縮閉線や双対曲線をコンピュータなどで図示してそのカスプを見つけだせば元々の曲線上の頂点や変曲点の存在を保証していることとなる。

さて、空間曲線に対しても距離 2 乗関数や高さ関数は有効である。この場合も単位速度空間曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ (即ち $\|\gamma'(s)\| = 1$ を満たす) を考えると、Frenet-Serret の公式

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = -\tau(s)N(s) \end{cases}$$

が成り立つ。ただし、 $\kappa(s) \neq 0$ は曲率、 $\tau(s)$ は捩率をあらわす。この場合も以下の命題が成り立つ。

命題 2.2 $\gamma(s)$ を $\kappa(s) \neq 0$ であるような単位速度空間曲線とする。

(A) γ 上の距離 2 乗関数 F に対して、 $f_x(s) = F(s, x)$ と定めると以下が成り立つ：

- (1) $f'_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は点 x が $\gamma(s)$ の法平面上にあることである。
- (2) $f'_x(s) = f''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\mu \in \mathbb{R}$ が存在して

$$x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) + \mu B(s)$$

が成り立つことである。

- (3) $f'_x(s) = f''_x(s) = f'''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\tau(s) \neq 0$ で

$$x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}B(s)$$

または $\tau(s) = \kappa'(s) = 0$ をみたすことである。

(B) γ 上の高さ関数 H に対して、 $h_v(s) = H(s, v)$ と定めると以下が成り立つ：

- (1) $h'_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は v が法平面上のベクトルとなることである。
- (2) $h'_v(s) = h''_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm B(s)$ が成り立つことである。
- (3) $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm B(s)$ でありかつ $\tau(s) = 0$ となることである。
- (4) $h'_v(s) = h''_v(s) = h'''_v(s) = h''''_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm B(s)$ でありかつ $\tau(s) = \tau'(s) = 0$ となることである。

命題 2.3 (A) からわかることは、距離 2 乗関数の分岐集合は線織面

$$F_\gamma = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) + \mu B(s), (s, \mu) \in I \times \mathbb{R}\}$$

となることである。これは方程式 $f'_x(s) = 0$ が γ の法平面を定めていることから γ の法平面族の作る包絡面であり γ の焦曲面 (または、極曲面) と呼ばれる。これは 1 パラメータの平面族の包絡面なので可展開面であることが古典的に知られている。焦曲面は γ の近傍では滑らかな曲面であるが一般には特異点をもつ。その特異点集合が命題 2.3 (A)(4) から $\tau(s) \neq 0$ 、 $\kappa'(s) \neq 0$ の条件のもとでは

$$x = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)}N(s) - \frac{\kappa'(s)}{\kappa^2(s)\tau(s)}B(s)$$

であることがわかる。これは γ の接触球の中心(曲率中心)の軌跡である。ただし、接触球とは γ に少なくとも3次の接触をする球のことである。ここでも、ジェネリックな γ に対しては距離2乗関数 F は $f_x(s)$ が A_i 型($i \leq 4$)の特異点を持つこととさらに $\tau(s) \neq 0$ と言う仮定のもとで、 $F(s, x)$ はいつも $f_x(s)$ の \mathcal{R}^+ 普遍開折となることがわかる。このことは、ジェネリックな γ に対する B_F の特異点は定理2.2から $C \times \mathbf{R}$ か SW に局所微分同相であることを意味している。即ち、ジェネリックな γ の焦面の特異点はカスプの軌跡とツバメの尾であることがわかる。さらにツバメの尾に対応する γ 上の点はその点で接触球がちょうど4次の接触をする点である。このように距離2乗関数の特異点により法平面の包絡面の特異点のと曲率中心とを結びつけさらにその点の幾何学的意味を解釈できる。高さ関数についても同様にその分岐集合が球面上の従法線標形となることがわかり、こちらの場合は従法線標形の軌跡がカスプになる点 s は $\tau(s) = 0, r'(s) \neq 0$ なる点に対応していることがわかる。

ここで、空間曲線のFrenet標構に伴って3種の平面族が存在する。一つは法平面で主法線と従法線で張られ、一つは接触平面で接線と主法線で張られ、もう一つは展直平面で接線と従法線で張られるものである。ここで、上記のPorteous[20]の結果により、法平面族の包絡面である焦面の特異点については良く理解できた。一方、接触平面族の包絡面はその曲線の接線を母線としてもつ線織面で接線曲面として古くから知られているものである。この曲面は可展開面であり元々の曲線に沿ってカスプの軌跡が常に特異点として現れることは、古典的なBouquetの公式から知られている。しかし、ジェネリックな特異点の分類は1982年のCleave[5]による研究まで約100年もの間知られていなかった事は驚くべき事である。この曲面については、関数として $F(s, x) = \langle \gamma(s) - x, B(s) \rangle$ を考えればその判別集合が接線曲面に対応することがわかるが、関数は $\tau(s) \neq 0$ で A_2 型の特異点を持ちその場合は \mathcal{R} -普遍開折であることがわかりその点ではカスプの軌跡となるという古典的結果以上の何物も導かれない。この事実から、接線曲面の特異点の研究のためには、他の方法が必要となる。実際、上記Cleaveの研究以降、Mond[16], Scherbak[22], 石川[7]等により大変詳しく研究されている。しかし、展直平面族の包絡面である展直曲面については最近までまったく研究がされていない。この展直曲面は中心にある曲線が常に測地線となる曲面として知られている(定義を覚えて見れば明らか)。この曲面の特異点の分類とその対応する幾何学的性質はアファイン微分幾何への特異点論の過程で最近発見された([13, 25])。ここでは、時間的経緯に沿ってアファイン微分幾何学への特異点論の応用を述べたあと再びこの話題に戻る事とする。

曲面にたいしての同様な研究としてはPorteous[20, 21], Banchoff他[1], Mochida他[15]などがある。これらの研究は主としてガウス写像の特異点の研究である。

3 曲線のジェネリックアファイン微分幾何学

ユークリッド微分幾何学以外の、他の種類の幾何学に対しての特異点論の応用は、驚くべき事に最近までまったく試みがなく1996年になって初めてアファイン微分幾何学への応用が発見された[11, 12]。この節で述べることは佐野貴志(北大博士課程3年)との共同研究で得られたものである。 \mathbf{R}^2 上2つのベクトル $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2)$ で張られる平行四辺形の面積は行列式 $|a, b| = a_1 b_2 - a_2 b_1$ の絶対値であたえられるとする。 $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $|\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)| \neq 0$ をみたすような曲線(凸曲線と呼ぶ)とする。ただし、 $\dot{\gamma}(t) = \frac{d\gamma}{dt}(t)$ である。このとき、アファイン弧長を

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\dot{\gamma}(t), \ddot{\gamma}(t)|^{\frac{1}{3}} dt$$

によって与える。このとき、パラメーター s は $|\gamma'(s), \gamma''(s)| = 1$ と言う性質をもち、かつ弧長パラメーターはこの性質で特徴づけられる。ここで、 $\gamma'(s) = \frac{d\gamma}{ds}(s)$ とする。このとき、ユークリッド微分幾何の場合と同様に以下のFrenet-Serret型公式が成り立つ：

$$N'(s) = -k_a(s)T(s)$$

ただし、 $k_a(s) = |\gamma''(s), \gamma'''(s)|$ でありアファイン曲率と呼ばれ、 $T(s) = \gamma'(s), N(s) = \gamma''(s)$ で $N(s)$ はアファイン法線ベクトルと呼ばれる。 $k_a(s) \neq 0$ と仮定するとき $\gamma(s) + \frac{1}{k_a(s)}N(s)$ をアファイン曲率中心と呼びその軌跡をアファイン縮閉線と呼ぶ。さらに曲線 $N: I \rightarrow \mathbf{R}^2$ をアファイン法曲線と呼ぶ。このアファイン法曲線概念はユークリッド微分幾何の場合のガウス写像の類似である。ユークリッド微分幾何の場合はベクトルのノルムに意味があったので単位法線ベクトルを対応させる写像を

ガウス写像と呼びその値は単位円上にあったが、アファイン微分幾何の場合ノルムは存在しないのでアファイン法線ベクトルの値は平面 \mathbf{R}^2 上にとりその像は曲線である。ちなみに、ここで言うアファイン微分幾何は正確には等積幾何であり、等積変換 $SL(2, \mathbf{R})$ で不変な幾何学である。ところで、古典的 (Blaschke[2]) には、凸曲線にたいして $\gamma(s)$ が放物的点であるとはその点で5点接触をする一意的な放物線が存在すること、またその点が6触点とは6点接触をする2次曲線がただ一つ存在する点と呼ぶ。このとき以下の事実が知られている。

命題 3.1 (1) $p = \gamma(s)$ が放物的点であるための必要十分条件は $k_a(s) = 0$ を満たすことである。
 (2) $p = \gamma(s)$ が6触点であるための必要十分条件は $k'_a(s) = 0$ を満たすことである。

この意味で解釈すると、アファイン縮閉線は γ と5点接触をするような一意的な2次曲線の中心の軌跡である。また、6触点をアファイン頂点、放物的点をアファイン変曲点とも呼ぶ。

Fidal[6] はジェネリックには6触点が少なくとも一つは存在することを示した。しかし、凸閉曲線にたいして6触点が最低6個存在することは Blaschke[2] においてすでに知られている事実である。そうでなくとも、アファイン曲率 k_a は最大最小をもつので2個以上もつことは明らかである。では、何故、Fidal はこのような明らかな事を論文として発表したのかと言うと彼の6触点へのアプローチがユークリッド微分幾何的であったからである。実際、ユークリッド構造は一つの等積構造と考えられるので、ユークリッド平面 \mathbf{E}^3 においても6触点と言う概念は定義できる。この場合、ユークリッド微分幾何学での曲線の曲率を用いて6触点を書き表すと以下ようになる：

$$36k(t)^4\dot{k}(t) + 40\dot{k}(t)^3 - 45k(t)\dot{k}(t)\ddot{k}(t) + 9k(t)^2k^{(3)}(t) = 0.$$

この関係式を見ればユークリッド微分幾何的なアプローチはいかに困難を伴うかは容易に想像できる。しかし、我々のアファイン微分幾何学的アプローチは

「え～!!! ウソ～???

と叫びたくなるほど簡単なのである。

ここで、前記のアファイン弧長を考える以下2種類の関数を考えるのが自然である：

$$(1) F: I \times \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}; F(s, x) = |\gamma'(s), \gamma(s) - x|$$

$$(2) H: I \times S^2 \rightarrow \mathbf{R}; H(s, u) = |\gamma'(s), u|$$

(1) の関数 $F(s, x)$ をアファイン距離3乗関数と呼び、(2) の関数 $H(s, v)$ をアファイン高さ関数と呼ぶ。これらの特異点については以下の事実がわかる。

命題 3.2 $\gamma(s)$ をアファイン弧長でパラメーター付けられた曲線とする。

(A) γ 上のアファイン距離3乗関数にたいして、以下が成り立つ：

(1) $f'_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\gamma(s) - x = \lambda\gamma''(s)$ となる実数 λ が存在することである。

(2) $f'_x(s) = f''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $k_a(s) \neq 0$ でありかつ $x = \gamma(s) + \frac{1}{k_a(s)}\gamma''(s)$ となることである。

(3) $f'_x(s) = f''_x(s) = f'''_x(s) = 0$ であるための必要十分条件は $k_a(s) \neq 0$ と $k'_a(s) = 0$ が成り立ちかつ $x = \gamma(s) + \frac{1}{k_a(s)}\gamma''(s)$ となることである。

(4) $f'_x(s) = f''_x(s) = f'''_x(s) = 0$ かつ $f^{(4)}(s) \neq 0$ であるための必要十分条件は $k_a(s) \neq 0$ 、 $k'_a(s) = 0$ 、 $k''_a(s) \neq 0$ かつ $x = \gamma(s) + \frac{1}{k_a(s)}\gamma''(s)$ となることである。

(B) γ 上のアファイン高さ関数にたいして、以下が成り立つ：

(1) $h'_u(s) = 0$ であるための必要十分条件は $u = \lambda\gamma''(s)$ となる実数 λ が存在することである。

(2) $h'_u(s) = h''_u(s) = 0$ であるための必要十分条件は $k_a(s) = 0$ でありかつ $u = \lambda\gamma''(s)$ なる実数 λ が存在することである。

(3) $h'_u(s) = h''_u(s) = h'''_u(s) = 0$ であるための必要十分条件は $k_a(s) = k'_a(s) = 0$ でありかつ $u = \lambda\gamma''(s)$ なる実数 λ が存在する事である。

この命題3.1からわかることは、アファイン距離3乗関数の分岐集合 B_F がアファイン縮閉線であることであり、さらに若干の議論をおこなうとアファイン高さ関数に対応する関数族 $\tilde{H}(s, v, y) = H(s, v) - y$ を (v, y) をパラメーターと見なしてその判別集合 $D_{\tilde{H}}$ を考えるとそれはアファイン法曲線に微分同相であることがわかる。また、これらの関数族は Fidal[6] の意味でのジェネリックな仮定の下には \mathcal{R}^+ -普遍開折及び \mathcal{R}^+ -普遍開折となることがわかり、したがってアファイン縮閉線の特異点はカスプとなり対応する γ 上の点は6触点となることがわかる。さらに、アファイン法曲線の特異点もカスプとな

り対応する点は放物的点となる事がわかる。これらの、事実からユークリッド微分幾何の場合と同様にアファイン縮閉線やアファイン法曲線をコンピューターで描くことにより6触点や放物的点の存在を認識することが可能となる。アファインの場合は5点接触や6点接触といった高次の接触を扱うのでユークリッドの場合よりありがたみが増すといえよう。

我々はこの平面曲線の研究に気をよくして、空間曲線のアファイン微分幾何へ特異点論を応用することを始めた。しかし、当初のもくろみとは違い空間曲線の場合には思うように話が進まなかった。実は、空間曲線に関するアファイン微分幾何の古典理論は殆ど存在しない。ここで考える空間曲線は $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ で $|\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)| = 1$ をみたすものである。この場合も Frenet-Serret 型の公式が成り立つ：

$$\begin{cases} T'(s) = N(s) \\ N'(s) = B(s) \\ B'(s) = -\kappa_a(s)N(s) - \tau_a(s)T(s). \end{cases}$$

ここで、 $T(s) = \gamma'(s)$, $N(s) = \gamma''(s)$, $B(s) = \gamma'''(s)$, $\kappa_a(s) = |\gamma'(s), \gamma'''(s), \gamma^{(4)}(s)|$ かつ $\tau_a(s) = -|\gamma''(s), \gamma'''(s), \gamma^{(4)}(s)|$ とおき、 $\kappa_a(s)$ をアファイン曲率、 $\tau_a(s)$ をアファイン振率と呼ぶ。当初、ここでもアファイン距離関数及び高さ関数をうまく定義してこの Frenet-Serret 型公式をもとにユークリッド微分幾何の空間曲線の場合と同様な議論が可能であろうと予測して研究をスタートした。じつさい、関数としては：

(1) $F: I \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$; $F(s, x) = |\gamma'(s), \gamma'''(s), \gamma(s) - x|$

(2) $H: I \times S^2 \rightarrow \mathbf{R}$; $H(s, u) = |\gamma'(s), \gamma''(s), u|$

を考え、(1) の関数 $F(s, x)$ をアファイン距離6乗関数と呼び、(2) の関数 $H(s, v)$ をアファイン高さ関数と呼ぶ。これらの関数を考えれば良いことはすぐに想像がついた。しかし、前記と同様な考察をおこなうと以下の命題を得る。

命題 3.3 $\gamma(s)$ をアファイン弧長でパラメーター付けられた空間曲線とする。

(A) γ 上のアファイン距離 δ 乗関数にたいして、以下が成り立つ：

(1) $f'_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $u = \gamma(s_0) - \lambda\gamma'(s_0) - \mu\gamma'''(s_0)$ となる実数 λ が存在することである。

(2) $f''_u(s_0) = f'''_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $u = \gamma(s_0) - \mu(\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0))$ となる実数 μ が存在することである。

(3) $f'_u(s_0) = f''_u(s_0) = f'''_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0) \neq 0$ が成り立ちかつ $u = \gamma(s_0) + \frac{1}{\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0)}(\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0))$ となることである。

(4) $f'_u(s_0) = f''_u(s_0) = f'''_u(s_0) = f^{(4)}(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0) \neq 0$, $\tau'_a(s_0) - \kappa''_a(s_0) = 0$ でありかつ $u = \gamma(s_0) + \frac{1}{\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0)}(\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0))$ となることである。

(B) γ 上のアファイン高さ関数について以下が成り立つ：

(1) $h'_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $u = \lambda\gamma'(s_0) + \mu\gamma'''(s_0)$ となる零でない実数 λ が存在することである。

(2) $h''_u(s_0) = h'''_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $u = \mu(\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0))$ となる零でない実数 μ が存在することである。

(3) $h'_u(s_0) = h''_u(s_0) = h'''_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0) = 0$ が成り立ちかつ $u = \mu(\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0))$ となる零でない実数 μ が存在することである。

(4) $h'_u(s_0) = h''_u(s_0) = h'''_u(s_0) = h^{(4)}_u(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0) = \tau'_a(s_0) - \kappa''_a(s_0) = 0$ が成り立ちかつ $u = \mu(\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0))$ となる零でない実数 λ が存在することである。

ここで命題 2.1 と命題 3.2 を比較すると殆ど平行な主張が成り立っている。このため、我々は空間曲線にも安直な予想を立てて研究を開始したのである。しかし、命題 2.2 と命題 3.3 ではまったく似てもつかない形になっている。ここで命題 3.3 に現れる $\tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0)$ や $\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0)$ は何物であるか？これは、前記の Frenet-Serret 型の公式からは理解できない代物である。実はこの古典的な標構 $T(s) = \gamma'(s)$, $N(s) = \gamma''(s)$, $B(s) = \gamma'''(s)$ は良い標構ではないのである。何故ならば $\tau_a \equiv 0$ であっても $B(s)$ は一定のベクトルではない。ここで、ユークリッド微分幾何学における Frenet 標構を思い出しみると振率 $\tau \equiv 0$ のときその従法線ベクトル $B(s)$ は一定であった。即ち振率とは従法線ベクトルの振れを記述する量なのである。(同じ事を言っているが、古典的教科

書では平面曲線からの離れ具合を記述する量であることが強調されすぎていてこの大事な事実が忘れられている). したがって, τ_a はアファイン振率と呼ぶに相応しいものではない. アファイン (等積) 微分幾何で大切な量は体積であり, 標構 $T(s), N(s), B(s)$ も体積が $|T(s), N(s), B(s)| = 1$ となるように決められている. ここで, $T(s)$ と $B(s)$ の定義は平面曲線の場合とくらべても, またこれらによって張られる平面が (アファイン的な概念である) 接触平面なのでこれらの定義はまだゆるせるとして, $|T(s), N(s), \tilde{B}(s)| = 1$ が成り立つように $\tilde{B}(s)$ を選ぶ選び方は無限個ある. この事実がユークリッド微分幾何との本質的な違いである (正規直交系なら $B(s)$ 方向は一意的に決まった). ではどのような方向がアファイン従法線方向として相応しいか? その一つの候補者が命題 3.4 に現れる, $\kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0)$ である. ここで, $\tilde{T}(s) = \gamma'(s)$, $\tilde{N}(s) = \gamma''(s)$, $\tilde{B}(s) = \kappa_a(s_0)\gamma'(s_0) + \gamma'''(s_0)$ とおき $\sigma_a(s) = \tau_a(s_0) - \kappa'_a(s_0)$ とおくと以下の Frenet-Serret 型の公式をえる:

$$\begin{cases} \tilde{T}'(s) = \tilde{N}(s) \\ \tilde{N}'(s) = -\kappa_a(s)\tilde{T}(s) + \tilde{B}(s) \\ \tilde{B}'(s) = -\sigma_a(s)\tilde{T}(s). \end{cases}$$

この標構を採用すれば $\sigma_a(s)$ が上記の意味で振率になっていることがわかる.

さて, この Frenet-Serret 型公式をもちいて命題 3.4 の意味を解釈すると, 命題 3.3 (A) からアファイン距離 6 乗関数の分岐集合は

$$AR_\gamma = \{x \in \mathbf{R} \mid x = \gamma(s) + \mu\tilde{B}(s), \mu \in \mathbf{R}\}$$

である. この場合 $\partial f(s, x)/\partial s = 0$ は s を固定するとその点における接ベクトル $\tilde{T}(s)$ と (新しく定めた) 従法線ベクトル $\tilde{B}(s)$ によって張られる平面の方程式である. この平面をアファイン展直平面と呼ぶ. したがってその包絡面である AR_γ をアファイン展直曲面と呼ぶ. さらに, アファイン距離 6 乗関数はジェネリックな γ に対して A_i 型 ($i \leq 4$) の特異点しかもたない事いつでも $F(s, x)$ は $f_x(s)$ の \mathbf{R}^+ -普遍開折であることが示される (実際にはかなり大変な計算だ!!!). したがって, ここでも定理 2.1 が使えて, 展直曲面が局所的にツバメの尾に微分同相な点に対応する元々の曲線 γ 上の点は $\sigma'_a(s) = 0$ を満たす点である事がわかる. さらに, 平面曲線の場合と同様にアファイン高さ関数 H について対応する関数 $\tilde{H}(s, u, y)$ をとりその判別集合を考えると曲面

$$AG_\gamma = \{\nu T(s) + N(s) \mid \nu \in \mathbf{R}, s \in I\}$$

の特異点の分類が出来る. この曲面をアファイン展直ガウス曲面と呼ぶ. この曲面の特異点もカスプ (の軌跡) とツバメの尾がジェネリックなものであるが, カスプに対応する γ 上の点は $\sigma_a(s) = 0$ かつ $\sigma'_a(s) \neq 0$ をみたし, ツバメの尾に対応する点は $\sigma_a(s) = \sigma'_a(s) = 0$ かつ $\sigma''_a(s) \neq 0$ を満たす点である. これらの考察から等積不変量 $\sigma_a(s)$ が重要なものであることがわかるがその詳しい幾何学的意味や大域的性質については良くわかっていない. たとえば, $\sigma_a(s) = 0$ を満たす点をユークリッド微分幾何との類似から空間曲線のアファイン頂点と呼ぶのが適当であるが, この点に関する 6 頂点定理 「空間曲線 γ で $|\gamma'(s), \gamma''(s), \gamma'''(s)| \neq 0$ を満たすもののアファイン頂点は 6 個以上ある」 は成り立つのであろうか?

4 ジェネリックユークリッド微分幾何再訪: 展直曲面

ここでは, 勝見春代, 山崎太夏子 (お茶の水女子大修士課程修了) との共同研究 [13, 25] で行った (ユークリッド的) 展直曲面の特異点と幾何学的不変量との関連について述べる.

$\gamma(s)$ を 2 節と同様にユークリッド空間内の単位速度空間曲線とする. このとき, アファイン微分幾何からの逆輸入として体積的距離関数 (または, 従法線の距離関数) $F: I \times \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ を $F(s, u) = |T(s) N(s) \gamma(s) - u| = \langle \gamma(s) - u, B(s) \rangle$ で定義する. また, 体積の高さ関数 (または, 接線の高さ関数) $G: I \times S^2 \rightarrow \mathbf{R}$ を $G(s, v) = |N(s) B(s) v| = \langle T(s), v \rangle$ で定義する. このとき, 以下の命題が成り立つ:

命題 4.1 $\gamma(s)$ を単位速度空間曲線で $\kappa(s) \neq 0$ かつ $\tau(s) \neq 0$ をみたすものとする.

(A) 体積的距離関数 F にたいして以下が成り立つ:

- (1) $f'_u(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\gamma(s) - u \in \langle T(s), B(s) \rangle$ である。
(2) $f''_{uu}(s) = f''_{uu}(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\gamma(s) - u = \mu((\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s))$ となる実数 μ が存在することである。
(3) $f'''_{uu}(s) = f'''_{uu}(s) = f'''_{uu}(s) = 0$ であるための必要十分条件は $\gamma(s) - u = \frac{1}{(\tau/\kappa)'(s)}((\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s))$ となりかつ $(\tau/\kappa)'(s) \neq 0$ が成り立つことである。
(B) 体積の高さ関数 G にたいして以下が成り立つ：
(1) $g'_v(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \lambda T(s) + \mu B(s)$, $\lambda^2 + \mu^2 = 1$ となるような実数 λ, μ が存在することである。
(2) $g''_{vv}(s) = g''_{vv}(s) = 0$ であるための必要十分条件は $v = \pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}((\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s))$ となることである。
(3) $g'''_{vv}(s) = g'''_{vv}(s) = g'''_{vv}(s) = 0$ であるための必要十分条件は

$$v = \pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}((\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s))$$

でありかつ $(\tau/\kappa)'(s) = 0$ が成り立つことである。

この命題から体積的距離関数の分岐集合は線織面

$$R_\gamma = \{u = \gamma(s) + \mu((\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s)) \mid \mu \in \mathbf{R}, s \in I\}$$

となることがわかる。このとき、 $\partial F/\partial s(s, u) = 0$ は s を固定するごとに γ の展直平面を定めるので、 R_γ は γ の展直曲面である。このとき、その母線方向 $D(s) = \tau(s)T(s) + \kappa(s)B(s)$ は γ のダルブーベクトルと呼ばれる [14]。また体積の高さ関数の分岐集合は

$$D_\gamma = \left\{ v = \pm \frac{\kappa(s)}{\sqrt{\tau^2(s) + \kappa^2(s)}}((\tau/\kappa)(s)T(s) + B(s)) \mid s \in I \right\}$$

であることがわかる。この球面曲線は $\frac{D(s)}{\|D(s)\|}$ の像に一致し、 γ のダルブー球面表示 (ダルブー標形) と呼ばれる。これらの計算結果から不変量 $(\tau/\kappa)(s)$ の意味を考察する必要が生ずる。この場合、特に $(\tau/\kappa)'(s) = 0$ なる点の意味付けが重要となる。そこで $(\tau/\kappa)(s) \equiv \text{const}$ である曲線を考えてこの様な曲線は古典的には定傾曲線として知られている。定傾曲線はある柱面上の曲線 (実は測地線) でその母線方向に一定角を保つような曲線である。従って、その接線球面表示 (接線標形) は球面上の円を描くものである。このとき、 $\kappa(s_0) \neq 0$ かつ $\tau(s_0) \neq 0$ を満たす曲線上の点 $\gamma(s_0)$ を通って γ にその点で 3 次以上の接触をして曲率が $\kappa(s)$ に等しいような定傾曲線がただ一つ存在することが、曲線の自然方程式を解くことによってわかる。従って、 $(\tau/\kappa)(s)$ に関する幾何学では、定傾曲線が平面曲線に対する円や直線の役割を担うようなモデル曲線となる。実際、定傾曲線の接線球面表示は球面上の円だったので、上記の主張は γ の接線球面表示 $T(s)$ に $T(s_0)$ で 2 次の接触をする (定傾曲線の接線球面表示であるような) 円が存在する事を示している。展直曲面のジェネリックな特異点はここでもカスプの軌跡とツバメの尾であることがわかり、そのような点では $(\tau/\kappa)'(s) \neq 0$ であることがわかる。従って、展直曲面の特異点では曲線 γ がその点において定傾曲線と非常に違っていることを表している。一方、ダルブー球面表示は 3 次以上の接触をする定傾曲線の母線方向を表していて、その定傾曲線の接線球面表示 (円) の中心方向の軌跡である。この場合、ジェネリックにはダルブー球面表示の特異点はカスプであることがわかり、しかもその点では $(\tau/\kappa)'(0) = 0$ を満たす。この場合その 3 次以上の接触をする定傾曲線が 4 次の接触をすることを意味する。この事より、ダルブー球面表示の特異点は曲線 γ がその点で定傾曲線に非常に近い形をしていることを表している事がわかる。

このように、体積的距離関数と体積の高さ関数の特異点はユークリッド空間曲線の (τ/κ) に関する豊富な幾何学を導く。奇妙な事に、この幾何学は定傾曲線と言う古典的な概念が存在するにも関わらずこれまで研究されてきた形跡がみあたらない。モービウスの帯を代数曲線の展直曲面 (従って、可展開面) として実現出来ると言う Schwarz [23] の研究以外 Math. Review の検索にも現れないものである。

5 曲線のジェネリックローレンツ微分幾何学

ローレンツ微分幾何学の曲面や曲線に対して同様な研究を行う試みを斐 東河、佐野貴志 (北大大学院博士課程3年) との共同研究 [10, 19] によって最近始めた。ここで考える空間はミンコフスキー空間 \mathbf{R}_1^3 である。この空間は \mathbf{R}^3 上に擬内積 $\langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ を考えたものである。このとき、ベクトル x が $\langle x, x \rangle > 0$ を満たすとき空間的 $\langle x, x \rangle < 0$ を満たすとき時間的、 $\langle x, x \rangle = 0$ を満たすとき光的であると言う。

$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3, \gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ を正則曲線とする。曲線 γ が bf 空間的曲線であるとはその接ベクトル $\dot{\gamma}(t)$ が空間的であることとする。また、ベクトル x のノルムを $\|x\| = \sqrt{|\langle x, x \rangle|}$ で定める。また空間的曲線に対してはユークリッド空間の場合と同様に弧長 $s = s(t)$ によるパラメータ付けがいつでも可能でこの場合もやはり単位速度曲線として性質 $\|\dot{\gamma}(s)\| = 1$ で特徴付けられる。このとき、 $T(s) = \dot{\gamma}(s)$ とおき、単位接ベクトル $\kappa(s) = \sqrt{|\langle \gamma''(s), \gamma''(s) \rangle|}$ を曲率、 $\kappa(s) \neq 0$ のとき $\gamma''(s) = \kappa(s) \cdot N(s)$ で決まる $N(s)$ を単位主法線ベクトルと呼ぶ。さらに、ベクトル x の符号 $\text{sign}(x)$ を x が空間的なとき 1、光的なとき 0 さらに時間的なとき -1 と定める。このとき、 $\delta(\gamma(s)) = \text{sign}(N(s))$ とおく。

また $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}_1^3$ に対して擬外積を

$$x \wedge y = (-(x_2y_3 - x_3y_2), x_3y_1 - x_1y_3, x_1y_2 - x_2y_1)$$

で定める。このとき、 $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ を単位従法線ベクトルと呼ぶ。さらに、以下の Frenet-Serret 型の公式が成り立つ：

$$\begin{cases} T'(s) = \kappa(s)N(s) \\ N'(s) = -\delta(\gamma(s))\kappa(s)T(s) + \tau(s)B(s) \\ B'(s) = \tau(s)N(s). \end{cases}$$

ここで $\tau(s)$ は捩率をあらわす。しかし、この公式は $\kappa(s) = 0$ なる点では成り立たない。そこで、 $N(s) = \gamma''(s)$ と $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ を考え、 $N(s)$ を単に主法線ベクトル、 $B(s)$ を従法線ベクトルと呼ぶ。このとき、 $\kappa(s) \neq 0$ なる点では $\langle N(s) \pm B(s), N(s) \pm B(s) \rangle = 0$ となる。 $\kappa(s) = 0$ のとき $N(s)$ は光的であり、従って $\gamma(s)$ の擬法平面内で $N(s)$ に擬直交するベクトルは $N(s)$ に平行であることがわかる。また、 $N(s) \pm B(s) \neq 0$ であることがわかり、 $N(s) \pm B(s)$ は $N(s)$ に平行な光的ベクトルであることがわかる。ここで、

$$S_+^1 = \{x \in \mathbf{R}_1^3 \mid x = (1, x_2, x_3), x_2^2 + x_3^2 = 1\},$$

$$C_p = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}_1^3 \mid -(x_1 - p_1)^2 + (x_2 - p_2)^2 + (x_3 - p_3)^2 = 0\},$$

とおく。ただし、 $p = (p_1, p_2, p_3)$ とする。このとき、 S_+^1 を光的単位円と呼び $C_p^* = C_p - \{p\}$ を p を頂点とする光錐と呼ぶ。任意の光的ベクトル $x = (x_1, x_2, x_3)$ に対して、 $\tilde{x} = (1, \frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}) \in S_+^1$ と表す。

$\kappa(s) = 0$ なるときは $N(s) \pm B(s) = \widetilde{N}(s)$ である。

ここで、空間的曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}_1^3$ 上の 2 種類のローレンツ不変関数を導入する。ローレンツ距離 2 乗関数 $G: I \times \mathbf{R}_1^3 \rightarrow \mathbf{R}$ を $G(s, v) = \langle \gamma - v, \gamma - v \rangle$ で光錐の高さ関数 $H: I \times S_+^1 \rightarrow \mathbf{R}$ を $H(s, v) = \langle \gamma, v \rangle$ で定義する。

命題 5.1 $\gamma(s)$ を単位速度空間的曲線とする。

(A) $\kappa(s) \neq 0$ をみたく γ 上のローレンツ距離 2 乗関数 G にたいして以下が成り立つ：

(1) $g(s_0) = g'(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\gamma(s_0) - v = \lambda(N(s_0) \pm B(s_0))$ なる ($\lambda \in \mathbf{R} - \{0\}$) が存在することである。

(2) $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s_0) \neq 0$ が成り立ち $v = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\delta(\gamma(s_0))(N(s_0) \pm B(s_0))$ となることである。

(3) $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = g^{(3)}(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s_0) \neq 0$ 、 $(\kappa' \mp \kappa \cdot \tau)(s_0) = 0$ が成り立ち $v = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\delta(\gamma(s_0))(N(s_0) \pm B(s_0))$ となることである。

(4) $g(s_0) = g'(s_0) = g''(s_0) = g^{(3)}(s_0) = g^{(4)}(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s_0) \neq 0$ 、 $(\kappa' \mp \kappa \cdot \tau)(s_0) = (k' \mp k \cdot \tau)'(s_0) = 0$ が成り立ち $v = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)}\delta(\gamma(s_0))(N(s_0) \pm B(s_0))$ となることである。

(B) $\gamma''(s) \neq 0$ を満たす曲線 γ 上の光錐の高さ関数 H に対して以下が成り立つ:

(1) $h'(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は v は $\gamma(s_0)$ の擬法平面に属する. 特に, $\kappa(s_0) \neq 0$ のとき $v = \mathbf{N}(s_0) \pm \mathbf{B}(s_0)$ と書かれる.

(2) $h'(s_0) = h''(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s_0) = 0$ であり $v = \mathbf{N}(s_0) \pm \mathbf{B}(s_0) = \widetilde{\mathbf{N}}(s_0)$ が成り立つことである.

(3) $h'(s_0) = h''(s_0) = h^{(3)}(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は $\kappa(s_0) = \langle N'(s_0), N(s_0) \rangle = 0$ が成り立ち $v = \mathbf{N}(s_0) \pm \mathbf{B}(s_0) = \widetilde{\mathbf{N}}(s_0)$ となることである.

(4) $h'(s_0) = h''(s_0) = h^{(3)}(s_0) = h^{(4)}(s_0) = 0$ であるための必要十分条件は

$$\kappa(s_0) = \langle N'(s_0), N(s_0) \rangle = \langle N''(s_0), N(s_0) \rangle = 0$$

が成り立ち $v = \mathbf{N}(s_0) \pm \mathbf{B}(s_0) = \widetilde{\mathbf{N}}(s_0)$ となることである.

ここで注意することは, このローレンツ距離 2 乗関数を素直に使えば, ユークリッド微分幾何で得られた事実のアナロジーが出来る. 実際すぐ思いつくことは, ローレンツ焦面などが考えられるわけで, ユークリッドの場合との違いは接触球を考えるかわりに接触擬球や接触双曲平面を考えればまったく平行な議論が成り立つ. それはそれで面白い(?) ことなのかも知れないが, やはり, ローレンツ微分幾何学特有の性質や不変量が絞り出されれば面白い. いま, ユークリッドの場合との本質的な違いは光錐の存在である. 実際, 命題 5.1 からわかることは, ローレンツ距離 2 乗関数の判別集合は

$$LD_{\gamma}^{\pm} = \{v = \gamma(s) + u(\mathbf{N}(s) + \mathbf{B}(s)) \mid u \in \mathbf{R}, s \in I\}$$

となることであり, この曲面を γ の光錐的曲面とよぶ. その特異点は曲線

$$v = \gamma(s_0) + \frac{1}{\kappa(s_0)} \delta(\gamma(s_0)) (\mathbf{N}(s_0) \pm \mathbf{B}(s_0))$$

である. 実際この場合も定理 2.1 からジェネリックな空間的曲線 γ にたいして特異点はカスプの軌跡とツバメの尾であることがわかる. そしてツバメの尾に対応する γ 上の点は $(\kappa' \mp \kappa \cdot \tau)(s_0) = 0$ を満たす. そこでまた, このローレンツ不変量 $(\kappa' \mp \kappa \cdot \tau)$ の幾何学的意味を考察する必要がでてくる. 実際以下の事実が成り立つ.

命題 5.2 (1) γ を空間的単位速度曲線で $\kappa(s) \neq 0$ をみたすものとする. このとき, $(\kappa' \mp \kappa \tau)(s) \equiv 0$ であるための必要十分条件は $p_{\pm} = \gamma(s) + \frac{1}{\kappa(s)\delta(\gamma)} (\mathbf{N}(s) \pm \mathbf{B}(s))$ が定ベクトルであることである. このとき, γ は p を頂点とする光錐 $C_{p_{\pm}}^*$ 上にある.

(2) γ を空間的単位速度曲線で $\gamma''(s) \neq 0$ を満たすものとする. このとき $\kappa(s) \equiv 0$ であるための必要十分条件は $\gamma''(s)$ が原点を頂点とする光錐 C_0^* 上の曲線であることである.

この命題 5.2 がローレンツ不変量 $(\kappa' \mp \kappa \cdot \tau)$ は光錐との接触の位数を計る量であることが想像できる. 実際, 任意の空間的曲線で $\kappa(s) \neq 0$ を満たす γ 上の各点には 3 点接触するような光錐がただ一つ存在することがわかる. この光錐を γ の接触光錐とよぶと, 光錐的曲面の特異点集合はこの接触光錐の頂点の軌跡であることがわかり, ツバメの尾に対応する接触光錐は 4 点接触することがわかる. 光錐の高さ関数についてはその分岐集合が C_0^* 上の曲線

$$LP_{\gamma}^+(s) = \langle \gamma(s), \mathbf{N}(s) + \mathbf{B}(s) \rangle \cdot (\mathbf{N}(s) + \mathbf{B}(s))$$

に対応することがわかる. この曲線を γ の光錐的双対曲線 (光錐的ペダル曲線) と呼ぶ. この曲線の特異点もジェネリックにはカスプであることがわかりそれは $\kappa(s) = \langle N'(s), N(s) \rangle = 0$ か $\langle N''(s), N(s) \rangle \neq 0$ であることがわかる. ふたたび, 命題 5.2 からその点は γ'' が光錐 C_0^* と 3 点接触する γ 上の点に対応していることがわかる. このとき, 写像 $LG_{\gamma}^+ : I \rightarrow S_{\perp}^1$ を $LG_{\gamma}^+(s) = \mathbf{N}(s) + \mathbf{B}(s)$ で定め光錐的ガウス写像と呼ぶと, 光錐的双対曲線のカスプに対応して光錐的ガウス写像が折り目特異点をもつことがわかる. これらの考察からわかることは, 3 次元ミンコフスキー空間内の空間的曲線は余次元が 2 であるがあたかも平面曲線のような振る舞いをする事がわかる. 従って, 4 次元ミンコフスキー空間ないの空間的曲面についてもそのガウス写像が定義されその特異点の研究が可能であると予測できる.

6 線織面と線叢のジェネリック微分幾何学

これまでの節では主として空間曲線の微分幾何学に特異点論を応用して得られた結果を説明してきた。これらの例において、曲線に付随し現れた特異点を持つ曲面はすべて可展開面であった。可展開面は古くから線織面であることが知られている。そこで、

「可展開面に現れるジェネリックな特異点と一般の線織面に現れるジェネリックな特異点は差があるのであろうか？」

と言う素朴な疑問がおこる。この質問は可展開面に関する講演をすると必ずされる質問である。

ここではこの素朴な疑問にたいして部分的な解答を与える。 \mathbf{R}^3 内の線織面とは(局所的には) $F_{(\gamma,\delta)}(s,t) = \gamma(s) + t\delta(s)$ で定義される写像 $F_{(\gamma,\delta)} : I \times J \rightarrow \mathbf{R}^3$ の像として与えられる曲面である。ただし、 $\gamma : I \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\delta : I \rightarrow S^2$ は可微分写像で I, J は開区間とする。このとき我々は γ を導線 (a directrix) δ を方向曲線 (a director curve)、 s を固定して t を動かしたときに得られる直線を母線 (ruling) と呼ぶ。線織面は上の素朴な興味以外にも工学から研究の動機がある。古くは歯車の設計上重要な分野であり今世紀初頭の微分幾何学では研究の主要な対象であった。また、近年は建築学の分野で重要な曲面である。実際線織面は直線を敷き詰めた曲面なので剛体で構成されている建築物は線織面だと作りやすいと言う利点がある。この様に良く研究されてきた曲面であるが、その特異点の分類は知られていない。ここで、前記の素朴な疑問に対して我々は以下のようにジェネリックな答えを与える： $C_{pr}^\infty(I, \mathbf{R}^3 \times S^2)$ をプロパーな可微分写像 $(\gamma, \delta) : I \rightarrow \mathbf{R}^3 \times S^2$ 全体の空間とする(ホイットニートポロジーを与える)。ただし、 I は有界開区間とする。このとき以下が成り立つ。

定理 6.1 開かつ稠密な部分集合 $\mathcal{O} \subset C_{pr}^\infty(I, \mathbf{R}^3 \times S^2)$ が存在して、任意の $(\gamma, \delta) \in \mathcal{O}$ に対する線織面 $F_{(\gamma,\delta)}$ の特異点はホイットニーの傘のみである。

ただし、ホイットニーの傘とは局所的に (x_1^2, x_2, x_1x_2) という写像に座標変換で移るような特異点のことである。

ここで、ホイットニーの傘は2次元多様体から3次元多様体への可微分写像全体のなす空間のなかでジェネリックな写像が持つただ一種類の特異点であることがホイットニーにより証明されている[24]。一方前節までの可展開面にはホイットニーの傘は現れなかった。実際、可展開面の特異点は錐の頂点以外は孤立特異点が現れない。またジェネリックには曲線として特異点が現れることが知られている。したがって、ホイットニーの傘は可展開面の特異点としては現れない事がわかる。線織面は直線によって敷き詰められていると言う曲面一般のなかでは非常に強い制約を受けているにも関わらずジェネリックな特異点は一般の特異曲面のジェネリックな特異点と同じ種類のものである。しかし、余次元が1上になると状況は変わる。2次元から3次元への可微分写像芽のジェネリックな1パラメーター族は[4, 17]において以下のものが現れることが知られている： $S_1^\pm : (x_1, x_2^2, x_2(t + x_2^2 \pm x_1^2))$ しかし、この写像芽は線織面としては実現できないのがわかる。

一方、3次元空間のなかで重要な特異点を持った曲面として波面がある。波面は局所的には曲面の族の包絡面として得られることが知られている。従って、可展開面は平面の1パラメーター族の包絡面なので波面である。さらにそれは線織面でもある。このような曲面を線織波面と呼ぶ。波面の特異点はアーノルド等の分類により、ツバメの尾、カスプ軌跡であることが知られている。従ってホイットニーの傘とはまったく違った特異点である。このとき、また以下のような素朴な疑問がわく。

可展開面と線織波面の特異点はいかに違うのか？

この講演のゴールはこの質問に答えることである。非柱面的線織面 $F_{(\gamma,\delta)}$ とは任意の点 $s \in I$ において $\delta'(s) \neq 0$ を満たす事とする。ここで柱面は線織面 $F_{(\gamma,\delta)}$ で $\delta(s)$ が定ベクトルであることなので上記の様に呼ばれる。このとき我々は以下の定理を証明した。

定理 6.2 非柱面的線織波面 $F_{(\gamma,\delta)}$ が特異点 p_0 を持つならば $F_{(\gamma,\delta)}$ は p_0 の近くでは可展開面である。

非特異曲面は常に波面であることがわかる。例えば一葉双曲面などは線織波面であるが曲率は負になるのでそれは可展開面ではない。

線織面が \mathbf{R}^3 のなかで1パラメーターに依存して動く直線によって描かれる曲面であったのに対してこの節のもう一つの主題である線叢とは2パラメーターに依存して動く直線の族をの事である。重要な例としては曲面の法線からなる法線叢があり、一般の線叢が法線叢となるための条件等は古典的に知られている。線叢の特異点論的研究については5月末現在まだなにも結果がでていないが、線織面の開折理論など面白そうなのが考えられそうな感触がある。7月のシンポジウム当日まででどれだけ研究が進むか？皆さんのご期待に背かないよう努力したい。ただし、

何も出来なくてもお許し下さい!!!

参考文献

- [1] T. Banchoff, T. Gaffney and C. McCrory, *Cusps of Gauss mappings*, Research Notes in Math. 55 Pitman, 1982.
- [2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II, Affine Differentialgeometrie*, Springer, 1923.
- [3] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and singularities (second edition)*, Cambridge University press, 1992.
- [4] X-Y. Chen and T. Matumoto, *On generic 1-parametr families of C^∞ -maps of an n -manifold into a $(2n - 2)$ -manifold*, Hiroshima Math. Jour. 14 (1985), 547-550.
- [5] J. P. Cleave, *The normal form of the tangent developable at points of zero torsion on space curves*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88 (1980), 403-407
- [6] D. L. Fidal, *The existence of sextactic points*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 96 (1984), 433-436.
- [7] G. Ishikawa, *Developable of a curve and determinacy relative to osculation-type*, Quart. J. Math. Oxford 46 (1995), 437-451.
- [8] 泉屋周一, 編微分方程式と特異点, 数理科学, 36 6月号 (1998), 29-36.
- [9] 泉屋周一-石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版, 1998, 近刊.
- [10] S. Izumiya, D. Pei and T. Sano, *The lightcone Gauss map and the lightcone developable of a spacelike curve in Minkowski 3-space*, Hokkaido University preprint series in Math. 411 1998.
- [11] S. Izumiya and T. Sano, *Generic affine differential geometry of plane curves*, Proc. Edinburgh Math. Soc. (1998 掲載予定).
- [12] S. Izumiya and T. Sano, *Generic affine differential geometry of space curves*, Proc. Royal Soc. Edinburgh A 128 (1998), 301-314
- [13] 勝見春世, 空間曲線に付随する展直曲面の特異点について, お茶の水女子大修士論文, 1998.
- [14] J. Koenderink, *Solid shape*, The MIT Press, 1990.
- [15] D.K.H. Mochida, R.C. Romero-Fuster, and M.A. Ruas, *The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint*, Geometriae Dedicata 54 (1995), 323-332.
- [16] D. Mond, *Singularities of the tangent developable surface of a space curve*, Quart. J. Math. Oxford 40 (1989), 79-91.
- [17] D. Mond, *On the classification of germs of maps from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3* , Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 333-369.
- [18] 野口広-福田拓生, 初等カタストロフイー, 共立全書 208 共立出版, 1976.
- [19] D. Pei *Singularities of $\mathbb{R}P^2$ -valued Gauss maps of surfaces in Minkowski 3-space*, Hokkaido Math. J. (1998 掲載予定).
- [20] I. Porteous, *The normal singularities of submanifold*, J. Diff. Geom. 5 (1971), 543-564
- [21] I. Porteous, *Geometric differentiation for the intelligence of curves and surfaces*, Cambridge university press, 1994.
- [22] O.P. Scherbak, *Projectively dual space curves and Legendre singularities*, Sel. Math. Sov. 5-4 (1986), 391-421.
- [23] G. Schwarz, *A Pretender to the title "Canonical Moebius Strip"*, Pacific J. Math. 143, 195-200.
- [24] H. Whitney, *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n-1)$ -space*, Annals of Math. 45 (1944), 247-293.
- [25] 山崎太夏子, 空間曲線に付随する Darboux 標形及び展直 Gauss 曲面の特異点について, お茶の水女子大修士論文, 1998.

Construction of essential laminations in link complements using branched surfaces

平澤 美可三¹

大阪大学大学院理学研究科

1. Introduction

三次元多様体の研究においては、その内部に含まれる二次元の対象及びその補空間を調べることは非常に有効な手法の一つである (例えば Waldhausen による incompressible surface を用いた Haken 多様体の研究や、Gabai による三次元多様体上の taut な葉層構造の研究などがこれにあたる)。1989年 Gabai-Oertel は essential lamination と呼ばれる、incompressible surface と葉層構造の hybrid (混成物) とでも呼ばれるべき二次元の対象物を定義し、その性質について調べ、例えば与えられた三次元多様体が essential lamination を含むならば、その普遍被覆は三次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に同相になる等、興味深い性質を報告している。特に彼らは三次元多様体上に essential lamination が存在することと、その多様体上に essential branched surface と呼ばれるコンパクトな 2次元複体が存在することが同値であることを示しているが、この事実はその後の lamination の研究に重大な指針を与えることになる。即ち、1990年代に入ると Brittenham 等は結び目の補空間など多くの具体的な三次元多様体内に直接 essential branched surface を構成することにより essential lamination の存在を示すことに成功した。また Wu は結び目の補空間内の essential lamination はほとんどの場合その結び目に沿った Dehn surgery で得られる空間内でもまた essential lamination になっていることを示した。この Wu の結果により、結び目の補空間内に essential lamination を構成することは、その結び目の Dehn surgery によって得られる空間の研究において重要な役割を果たすことが分かる。実際1990年代半ば頃から Brittenham, Delman, Roberts 等によって、この手法を用いて、多くの結び目が 'strong' Property P (定義 2.1参照) を満たすことが示されているなどこれに関連して結び目理論の新しい展開が見られている。

今回の講演では、これらの流れについて概説し、また最近得られたいくつかの結果について報告する。

2. 歴史的背景と問題

・1980年代までの展開

Incompressible surface を含むような irreducible 三次元多様体は Haken 多様体と呼ばれ、三次元多様体論において重要な研究対象になっている。Haken 多様体に関しては Waldhausen [Wal, 1968]が、多様体を incompressible surface に沿って切り開くという操作を繰り返すことにより三次元球体にまで分解できるという事実(hierarchy)を用いて、その普遍被覆が三次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^3 に同相になることや、(三次元多様体が閉じている場合は) その同相類が基本群で定まることなどを示している。また Jaco-Oertel [JO, 1984] は Haken によって創始された normal surface の理論 [Hak, 1961] を用いて、与えられた三次元多様体が Haken 多様体であるかどうかを判定するアルゴリズムを与えた。この normal surface の理論の中に現れる normal disks を '束ねる'事により branched surface と呼ばれる対象物が自然に得られる。Floyd-Oertel はこれにいくつかの条件を付加し incompressible branched surface と呼ばれる概念を定義し、三次元多様体内のすべての incompressible surface は

¹hirasawa@math.sci.osaka-u.ac.jp

有限個の incompressible branched surface によって記述されることを示した[FO, 1984]. その後 Oertel は incompressible branched surface に関する詳細な研究を進め Reebless (定義 3.7 参照) な incompressible branched surface によって carry される surface は全て incompressible であるという結果を得ている[Oe, 1984]. 一方, ちょうどその頃から D. Gabai は三次元多様体上の taut な葉層構造及びそれを用いた一連の研究により三次元多様体論, 結び目理論において著しい結果を発表し始めていた[GaI 1983, GaII, III, 1987]. 特に論文 [GaIII, 1987] において, 彼は結び目の補空間上に性質の良い葉層構造が存在することを示したが, その過程で, ‘途中まで構成された葉層構造’とも呼ばれるべき対象物を取り扱いこれを lamination と呼んだ. (因みに Thurston はそれ以前に双曲的曲面上の自己交差を持たない geodesic の和集合になっている閉集合を geodesic lamination と呼んでいた.) 1989年 Gabai と Oertel [GO, 1989] は incompressible surface の一般化として essential lamination と呼ばれる概念を提唱し, それらの基本的性質について調べ, 例えば与えられた三次元多様体 M が essential lamination を含むならば, その普遍被覆は \mathbf{R}^3 に同相になる等, 興味深い性質を報告している. (以下, M は essential lamination を含むとき, laminar であるという.) また彼らはその論文の中で essential branched surface (lamination を fully carry するような incompressible, かつ Reebless な branched surface で, その補空間が indecomposable になるもの. 定義 3.7参照) の概念を定義し三次元多様体が laminar になる為にはその多様体内に essential branched surface が存在することが必要十分であることを示した. Lamination は一般に non-compact な対象物であるから, ‘手で扱う’には技術的に困難が伴うが, branched surface は (branch locus など取り扱いに難しいところもあるが) compact な対象物であるので比較的取り扱いは易しい. Gabai-Oertel のこの結果は三次元多様体内の essential lamination を研究するためにはこの比較的取り扱いやすい branched surface を調べればよいことを保証している. なお, 具体的な incompressible branched surface を結び目や絡み目の補空間に構成するという仕事は, star link に対して Oertel [Oe, 1984], two bridge knot に対して Hatcher-Thurston [HT, 1985], two bridge link に関して Floyd-Hatcher [FH1, 1988], Montesinos knot に対して Hatcher-Oertel [HO, 1989] 等によって既になされていた.

・1990年代の状況

上記のような流れに触発されて, 1990年代に入ると essential lamination に関連して以下のようないくつかの展開が見られるようになってきた.

1. 結び目の補空間における essential lamination と strong property P.

具体的な結び目に対してその補空間内に essential branched surface を構成するという仕事は Delman [De1, 1995], 等によってなされたが, 特にこれらの essential lamination はその結び目に沿って非自明な Dehn surgery を行つて得られる多様体内でも essential であること (この性質を persistently essential と呼ぶ. 定義 4.1 参照), 従つてそれらの普遍被覆は \mathbf{R}^3 に同相になること, が示されている. (これに関して Wu [Wu1, 1992] は, 結び目の補空間内に essential lamination \mathcal{L} が存在するならば, その結び目で Dehn surgery して得られる多様体の中でも ‘ほとんどの場合’ \mathcal{L} は essential になっていることを示した.) 実際, 多くの結び目が persistently essential lamination を許容することが Brittenham 等によって示されている ([Br12, preprint], [BR1, draft], Wu [Wu2, 1996], Hayashi [Hay, 1998]). そ

ここで、次の概念を導入する。

定義 2.1 三次元球面 S^3 内の結び目 K が *strong property P* を持つとは、 K で非自明な Dehn surgery を行って得られるすべての多様体の普遍被覆が \mathbb{R}^3 に同相になること。

注意：Strong property P を持たない結び目も存在する。例えば cable 結び目で Dehn surgery して得られる多様体で reducible なものが存在することが知られている。また Fintushell-Stern によって $(-2, 3, 7)$ pretzel 結び目で 18- 及び 19-surgery を行って得られる多様体はレンズ空間になること、従って、その普遍被覆は S^3 になること、が示されている。

これに関しては1997年7月に Univ. Georgia で開催された Georgia Topology Conference で次のような問題が提出されている。

問題 1 :

- ・ K が persistently laminar ならば、 K は persistently essential lamination を許容するか？
- ・ K が strong property P をもつならば、 K は persistently laminar か？
- ・ K が non-cable, non-fibered な結び目ならば、 K は strong property P をもつか？

第4節でこれに関連した結果を報告する。

2. Essential lamination の normal surface 理論

次の問題は essential lamination の理論において基本的である。

問題 2 : どのような三次元多様体が essential lamination を許容するか？

これに関しては Brittenham が基本群が無限群となるような irreducible な Seifert fibered space で essential lamination を許容しないものが存在することを示している [Br1, 1993] がこれ以外の例はまだ知られていないようである。(後述の問題 3 参照) この問題に対する一つのアプローチとして Jaco-Oertel の Haken 多様体の判定アルゴリズムの類似を essential lamination に対して作るという方法が考えられる。歴史的に見ても normal surface の理論が出发点となり branched surface が定義され更に essential branched surface (=essential lamination) の概念に至ったわけであるから、このような考え方は自然であろう。実際この方向の試みが Brittenham を中心になされており、regular な cell 分解 \mathcal{C} をもつ三次元多様体が essential lamination \mathcal{L}_0 を含むならば (一般には \mathcal{L}_0 とは異なる) essential lamination \mathcal{L} で \mathcal{C} に関して normal form になっているものが存在することが示されている [Br4, 1995], [Br8, preprint], [Gabai, 1997年7月 Georgia Topology Conference での講演]. これを更に推し進めることによって、与えられた三次元多様体が essential lamination を含むかどうか判定するアルゴリズムが存在することが期待されているが、これに関してはまだいくつかの技術的困難がありまだ最終結果は得られていない (第4節でこれに関連した結果を報告する) .

なお上の問題 2 に関連して次のような問題もある。

問題 3: 双曲的な三次元多様体で essential lamination を許容しないようなものが存在するか.

これに関して Brittenham は $(-2, 3, 7)$ pretzel 結び目で $35/2$ -surgery して得られる多様体はその候補であると述べている (1998年1月奈良女子大学での講演).

3. その他の話題

以上の話題の他に, Brittenham による Seifert fibered space 内の essential lamination の特徴づけ [Br1, 1993], Brittenham-Naimi-Roberts による Graph manifold 内の essential lamination に関する研究 [BNR, 1997] 等がある. また Haken 多様体に関する Waldhausen の結果を laminar な多様体に対して拡張する試みが Gabai-Kazez によってなされている [GK3, 1997].

以上最近までの lamination に関連した話題について述べましたが, ここで記した以外にも多くの話題があります. それらの文献のうち, 講演者が気付いたものは本講演録の References に挙げておきました. その中で特に lamination に関する総合的な報告としては [Ga, 1990], [Ga2, 1997], 日本語で書かれたものとしては [Goda], [Toris] があります. また <http://www.math.unt.edu/britten/> には Brittenham による lamination の紹介などが, また <http://gauss.math.nara-wu.ac.jp/home/sm29041/index.htm> には小林毅先生による, 1997年7月の Georgia Top. Conf (メインテーマは三次元多様体上の foliation と lamination) のノート, 及び 1998年1月に奈良女子大学で行われた topology project (三次元多様体上の層状化) のノートがあります.

3. 用語

この節では, lamination, branched surface, 及びそれらが essential であるという概念などを紹介する (より詳しくは [GO] を参照).

M をコンパクトで向き付けられた三次元多様体とする.

定義 3.1 M の部分集合 \mathcal{L} が lamination であるとは, それが M の閉部分集合の葉層となっていることをいう. 即ち, M は $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ の形の開集合族 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ で被われ, 各 U_α に対して, $\mathcal{L} \cap U_\alpha = \mathbf{R}^2 \times C$ (C は閉集合) となる. また \mathcal{L} の弧状連結成分を leaf とよぶ.

定義 3.2 M 上の Riemannian metric から導かれる $M - \mathcal{L}$ 上の path metric で $M - \mathcal{L}$ を完備化した空間を $M_{\mathcal{L}}$ とかく. $\partial M_{\mathcal{L}}$ は \mathcal{L} の leaves のコピーからなる.

定義 3.3 Disc の境界から a closed arc を取り除いたものを, disc with end と呼ぶ. D を disc with end とする. \mathcal{L} または $\partial M_{\mathcal{L}}$ が end-incompressible であるとは, 任意の proper embedding $d : (D, \partial D) \rightarrow (M_{\mathcal{L}}, \partial M_{\mathcal{L}})$ に対し, proper embedding $d' : (D, \partial D) \rightarrow \partial M_{\mathcal{L}}$ が存在して, $d = d'$ on ∂D となることをいう.

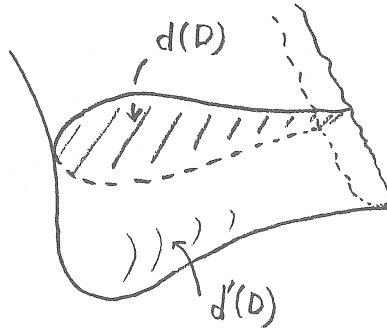


Figure 1

定義 3.4 閉三次元多様体 (resp. 境界付き三次元多様体) M 内で \mathcal{L} が *essential lamination* であるとは以下の三つの条件を満たすこととする.

- (1) 各 leaf は solid torus を bound する torus 及び sphere ではない (resp. これに加えて closed disc でもない).
- (2) $M_{\mathcal{L}}$ は irreducible.
- (3) $\partial M_{\mathcal{L}}$ は incompressible かつ end-incompressible. (resp. $\partial M \cap M_{\mathcal{L}}$ 及び $\partial M_{\mathcal{L}} - \partial M$ は $M_{\mathcal{L}}$ 内で incompressible かつ $\partial M_{\mathcal{L}} - \partial M$ は $M_{\mathcal{L}}$ 内で ∂ -injective).

定義 3.5 各点が次の図のいずれかに同相な近傍をもつような compact singular surface B を *branched surface* とよぶ. その regular neighborhood $N(B)$ を図のようにとり, これを *fibered neighborhood* とよぶことにする. 特に B が closed のときには, この境界は I -fiber に transverse な *horizontal boundary* $\partial_h N(B)$ と I -fiber に tangent な *vertical boundary* $\partial_v N(B)$ (これは annulus の非交和) に分かれる.

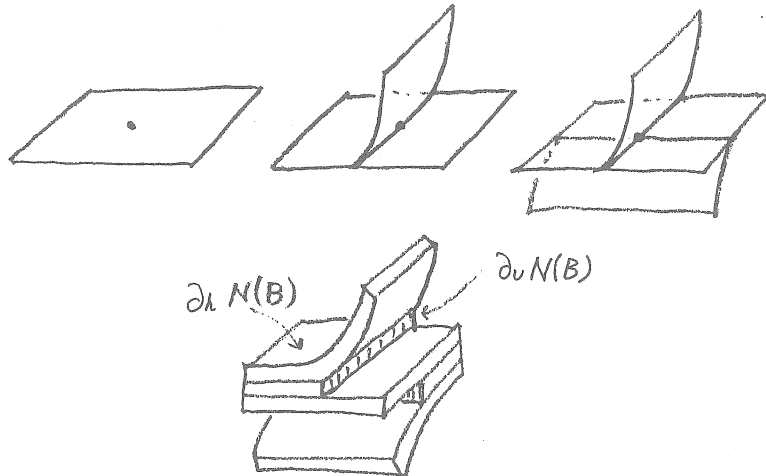


Figure 2

定義 3.6 B が lamination \mathcal{L} を *carry* するとは, \mathcal{L} を isotopy で $N(B)$ の内部まで動かして I -fiber といたる所で transverse に交わるようにできることとする. (特に, 全ての I -fiber と交わるようにできるとき, *fully carry* するという.)

定義 3.7 Branched surface B が *essential* であるとは以下の七つの条件を満たすこととする.

- (1) B は disc of contact および half-disc of contact をもたない.
- (2) $\partial_h N(B)$ は $\text{cl}(M - N(B))$ 内で incompressible かつ ∂ -incompressible.
- (3) $\text{cl}(M - N(B))$ 内に monogon は存在しない.
- (4) $\partial_h N(B)$ は M 内に properly embedded disc または sphere を成分にもたない.
- (5) $\text{cl}(M - N(B))$ は irreducible かつ $\text{cl}(\partial M - N(B))$ は $\text{cl}(M - N(B))$ 内で incompressible.
- (6) B は Reeb branched surface を含まない.
- (7) B は lamination を fully carry する.

ここで, 定義の中に現れた *monogon*, *disc of contact*, *Reeb branched surface* は以下の図で表されるものである. (5) を満たすとき, $\text{cl}(M - N(B))$ は *indecomposable* であるという. 向き付けられた irreducible な多様体内では, (1) と (2) を満たすものは *incompressible branched surface* とよばれる [FO, 1984].

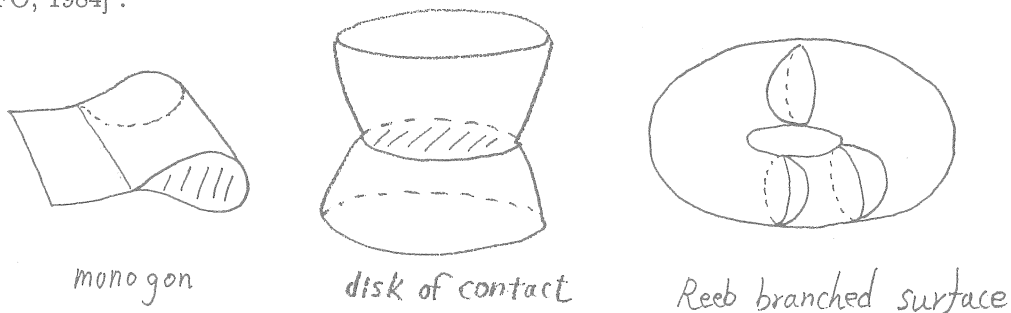


Figure 3

4. 結び目, 絡み目の補空間内の essential branched surface に関するいくつかの結果

この節では小林毅先生との共同研究による論文 [HK, preprint] 及び Brittenham, 林忠一郎先生, 小林毅先生, 下川航也氏との共著論文 [BHHS, preprint] の内容について報告する.

1. Pre-taut sutured manifolds と essential laminations

定義 4.1 結び目 K が *persistently laminar* であるとは K で非自明な Dehn surgery をして得られる任意の多様体が essential lamination を含むこととする.

定義 4.2 K の補空間 $E(K)$ に含まれる closed essential lamination \mathcal{L} , 又は closed essential branched surface B が K に関して *persistently essential* であるとは, K で非自明な Dehn surgery をして得られる任意の多様体内でもそれらが essential であることとする.

注意: K の補空間が *persistently essential* な lamination 又は branched surface をもてば K は *persistently laminar*, 従って [GO] より strong property P をもつことがわかる.

Brittenham-Roberts [BR1, draft] は, S^3 内の結び目の incompressible Seifert surface から branched surface を構成する一つの方法を導入し (この方法を自明な結び目に対して適用した様子を

表したのが次の図である) その外部に含まれる結び目 K がある条件を満たすならば K の補空間 $E(K)$ 内でその branched surface は K に関して persistently essential になることを示した.

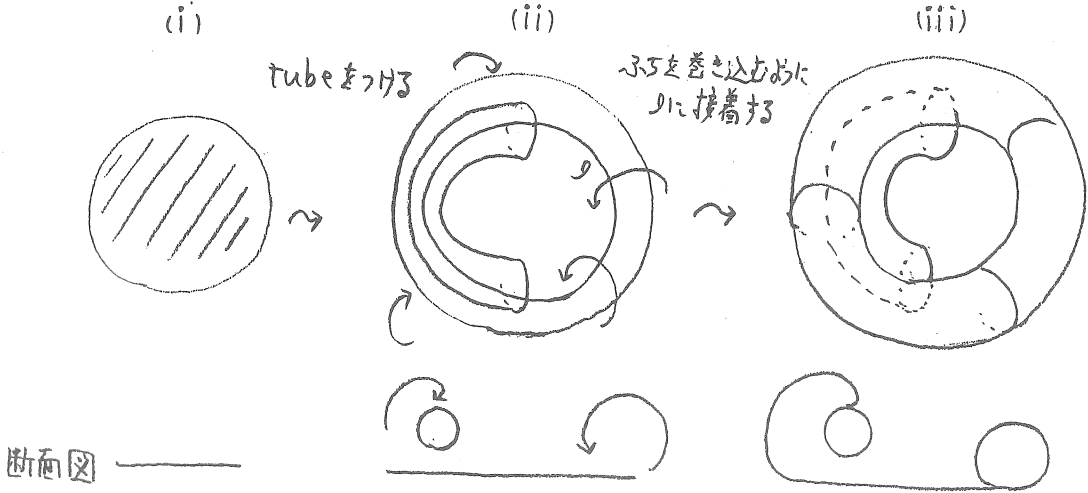
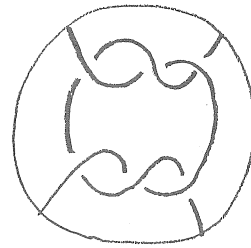
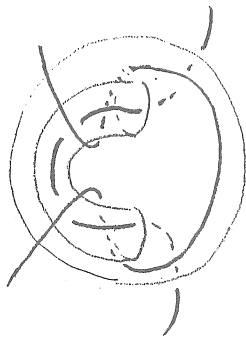


Figure 4



persistently laminar tangle

Figure 5

Figure 4 より, 結び目 K が Figure 5 のような tangle を持てば, K は persistently laminar になることが分かる. 彼らはこのような性質をもつ tangle を *persistently laminar tangle* とよんでいる.

我々は, suture manifold の理論を用いてこれらの結果をいくつかの方向で拡張することに成功した. 以下その結果について報告する.

定義 4.3 多様体対 (M, γ) は次の条件を満たすとき *sutured manifold* とよばれる.

- (1) $\gamma \subset \partial M$ は, annulus と torus の非交和. (これらの annulus の union を $A(\gamma)$ で, torus の union を $T(\gamma)$ で表す.)
- (2) $A(\gamma)$ の各成分は, *suture* と呼ばれる oriented core loop を含む. (suture の集合を $s(\gamma)$ で表す.)
- (3) $R(\gamma) = \text{cl}(\partial M - \gamma)$ には向きが付いていて, $\partial R(\gamma)$ の各成分は γ 内で, $s(\gamma)$ のある成分に, homologous となる. ($R_+(\gamma)$ (resp. $R_-(\gamma)$) で $R(\gamma)$ の成分のうち, positive normal vectors が M に関して外向き (resp. 内向き) のもの全体を表す.

定義 4.4 Surface F に対し, $\chi_-(F) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i |\chi(F_i)|$ と定義する. 但し和は, $\chi(F_i) \leq 0$ となるような F の連結成分 F_i 全体でとる. $H_2(M, \mathbf{R})$ の integral lattice homology class a に対し, Thurston norm を $x(a) \stackrel{\text{def}}{=} \min\{\chi_-(F) \mid [F] = a, F \text{ embedded in } M\}$ として定義する.

定義 4.5 Sutured manifold (M, γ) は M が irreducible で, $R(\gamma)$ が incompressible かつ $H_2(M, \gamma)$ の元として norm minimizing であるとき *taut* であるという.

定義 4.6 Sutured manifold (M, γ) が *pre-taut* であるとは, ある taut sutured manifold $(\tilde{M}, \tilde{\gamma})$ が存在して, (M, γ) は $R_+(\tilde{\gamma})$ と $R_-(\tilde{\gamma})$ のそれぞれに 1-handle を取り付けて得られ, かつ $\gamma = \tilde{\gamma}$ となることとする. ここで, $R_+(\tilde{\gamma})$ (resp. $R_-(\tilde{\gamma})$) に取り付けた 1-handle の co-core を D_+ (resp. D_-) として, $D_+ \cup D_-$ を pre-taut sutured manifold (M, γ) の *canonical disk pair* とよぶ.

このとき, 次が成り立つ.

定理 1. (M, γ) を pre-taut sutured manifold で non-separating closed surface を含まないものとする. K を $\text{int}M$ 内の結び目で, M 内では canonical disk pair のいずれの成分とも ambient isotopy ではずせないものとする. その時, sutured manifold $(\text{cl}(M - N(K)), \gamma \cup \partial N(K))$ は taut である.

定義 4.7 M 内の結び目 K が cable 結び目であるとは, M 内の solid torus V で, つぎのようなものがあることとする. $K \subset \partial V$, K は V 内の disk を bound しない, かつ V 内で V の core curve に isotopic でない.

M とその内部にある結び目 K に対し, K に沿った $\frac{p}{q}$ -surgery を行って得られた多様体を $M(K, p/q)$ であらわすことにする.

定理 2. (M, γ) を pre-taut sutured manifold で, M が non-separating closed surface を含まないものとする. K を $\text{int}M$ 内の non-cable な結び目で, M 内では canonical disk pair のいずれの成分とも ambient isotopy ではずせないものとする. その時, 任意の $p/q \neq 1/0$ に対し, sutured manifold $(M(K, p/q), \gamma)$ は taut である. 特に, $M(K, p/q)$ は irreducible で, $R_+(\gamma)$ と $R_-(\gamma)$ は $M(K, p/q)$ 内で incompressible である.

定理 2 の証明は, S_p -atoroidal manifold の Dehn filling に関する Gabai の結果 [GaII, Corollary 2.4] と solid torus 内の結び目の Dehn surgery に関する Scharlemann の定理 [Sc, Theorem] を使う.

次に sutured manifold と branched surface の関係について述べる.

Branched surface は *oriented* (すなわち, $N(B)$ 上の I -fiber による 1-foliation には, global な向きが与えられている) なものを考える.

定義 4.8 M 内の branched surface B に対し, closed oriented transversal とは, M 内の simple closed curve α で, $N(B)$ とは fiber で交わりそこではそれらの向きが同調しているものとする.

定義 4.9 *Homology branched surface* [Oe2, 1986] とは, M 内の向き付けられた branched surface B で, B の各点に対し, そこで B と交わるような closed oriented transversal が存在するものである.

B を M^3 内の homology branched surface とする. すると, $(\text{cl}(M^3 - N(B)), \partial_0 N(B))$ は自然に sutured manifold structure をもつので, 次が定義できる.

定義 4.10 Homology branched surface B に対し, その complementary sutured manifold とは, sutured manifold $(\text{cl}(M^3 - N(B)), \partial_0 N(B))$ のこととする.

このとき, 次が成り立つ.

定理 3. B を S^3 内の homology branched surface で, その complementary sutured manifold が pre-taut なものとする. K を $\text{cl}(S^3 - N(B))$ 内の non-cable な結び目で, $\text{cl}(S^3 - N(B))$ 内では canonical disk pair のいずれの成分とも ambient isotopy ではずせないものとする.

その時, B は $E(K)$ 内で essential ならば, persistently essential である.

この定理の帰結として, 例えば次のようなことがわかる. (cf. 問題 1)

Brittenham-Roberts の branched surface B (Figure 4) について考える. B は homology branched surface で, その complementary sutured manifold は pre-taut になっていることがわかる (Figure 6). 従って定理 3 より, D_+ や D_- と isotopy ではずせない任意の non-cable 結び目は strong property P をもつ.

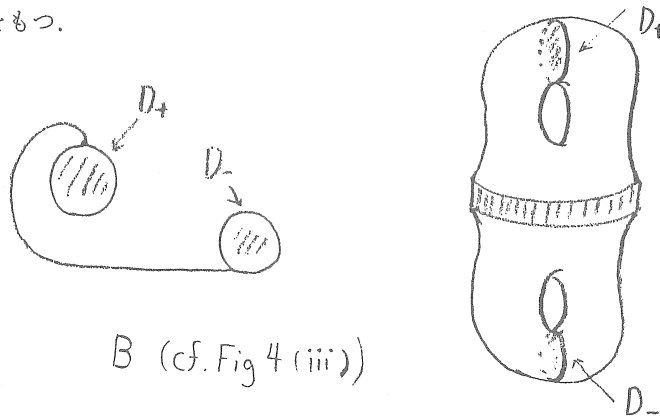


Figure 6

2. Standard positions of branched surfaces in the exterior of links

論文 [Me,1984] の中で Menasco は交代絡み目の外部に含まれる closed surface の standard position と呼ばれる概念を定義し, それを用いて reduced で prime な alternating diagram E で表示されている絡み目の外部には essential torus は存在しないことなどを示している.

われわれはこのアイディアと2節で概説した essential lamination の存在判定の方法のアイディアを結び付ける試みを論文 [BHHKS, preprint] の中で行っている. 以下, この論文の内容について紹介する.

Menasco による絡み目の補空間内の closed surface の standard position の定義に倣って, S^3 内の絡み目 L の補空間における closed branched surface B に対し, L の diagram E に関する standard position を定義する.

S を projection sphere とする. L は, E の各交点のところでは bubble とよばれる 2-sphere 上にあると考えて, L と E を同一視する (Figure 7). bubble が bound する 3-ball を *crossing ball* とよぶ. S_+ (resp. S_-) を, S と各 bubble の交わりをその bubble の上 (resp. 下) 半分で置き換えて得られる 2-sphere とし, S_+ (resp. S_-) が bound する S_+ の上 (下) にある 3-ball を B_+ (resp. B_-) とする.

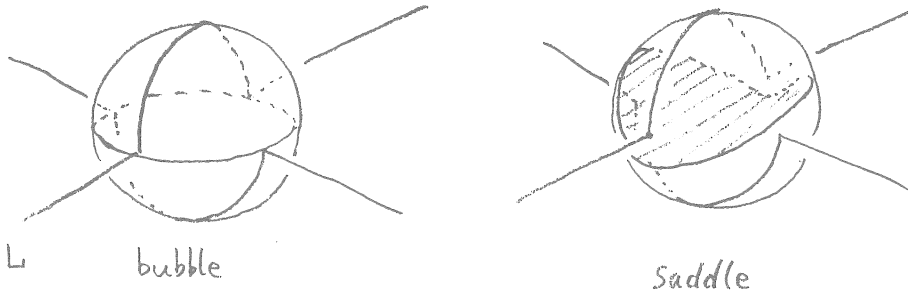


Figure 7

定義 4.11 絡み目 L の補空間 $E(L) = \text{cl}(S^3 - N(L))$ 内の closed branched surface B は, 次の六つの条件を満たすとき, L の diagram E に関して *standard position* にあるという.

(1) B は各 crossing ball と saddle (Figure 7) の union で交わる. 特に, branch locus と crossing ball は交わらない.

(2) B は S_+ や S_- と横断的に交わる. 従って, $B \cap S_+$ (resp. $B \cap S_-$) は train track τ_+ (resp. τ_-) になる.

(3) B 全ての branch locus は S と交わる.

(4) B_+ (resp. B_-) には, 有限個の mutually disjoint smooth disk $D_1^+ \cup \dots \cup D_m^+$ ($D_1^- \cup \dots \cup D_n^-$ resp.) が S に proper に埋め込まれていて, branched surface $B \cap B^+$ (resp. $B \cap B^-$) は $D_1^+ \cup \dots \cup D_m^+$ (resp. $D_1^- \cup \dots \cup D_n^-$) を 'pinch' したものになっている.

(5) $B \cap B^+$ (resp. $B \cap B^-$) に proper に埋め込まれた各 smooth disk D^+ (resp. D^-) に対し, 次が成り立つ.

(5-1) D^+ (resp. D^-) の境界は bubble と交わる.

(5-2) D^+ (resp. D^-) の境界は, saddle の同じ側を二回以上通ることはない.

(6) τ_{\pm} に埋め込まれた smooth circle で一つの region に含まれてしまうものはない. また τ_{\pm} に埋め込まれた circle で, 一つの region の中で monogon を bound するものもない. (ここで region とは, $S - S \cap \{ \text{crossing balls} \} - E$ の各連結成分のことである.)

まず [Br8, preprint] に基づいて、次の定理を用意する。

定理 4. E を S^3 内の絡み目 L の connected diagram とする. L の補空間 $E(L)$ が境界のない essential lamination \mathcal{L}_0 をもつとする. そのとき, $E(L)$ 内には E に関して standard position にある essential branched surface B に fully carry されるような essential lamination \mathcal{L} が存在する. しかも, \mathcal{L}_0 が M を L で Dehn surgery して得られた多様体 M 内で essential ならば, \mathcal{L} も M 内で essential となるように \mathcal{L} をとることができる. 特に, \mathcal{L}_0 が $\partial E(L)$ の成分に平行な toral leaf をもたないならば, \mathcal{L} もそうなるようにとれる.

これにより, 絡み目の補空間内の essential lamination を調べるには, 絡み目の diagram に関して standard position にある essential branched surface を調べればよいことになる.

絡み目の diagram に関して standard position にある branched surface B は, projection 2-sphere 上の train track で表すことができる. そして, B が essential になるための十分条件を train track の形によって記述するのが次の定理である.

定理 5. L を S^3 内の交代絡み目とし, E を projection 2-sphere S 上における L の reduced で connected な alternating diagram とする. B を E に関して standard position にある branched surface とする. もし, B が ‘ある 7つの条件’ (これらは技術的な条件で, 記述が長いのでここでは省略する) を満たせば, B は essential になるための条件の内, (1) ~ (6) (即ち ‘(7): lamination を fully carry する’ 以外の条件) を満たす.

最後の条件 (7) に関して, \mathcal{L} として, affine lamination に注目すると, standard position にある branched surface B が affine lamination を fully carry する必要十分条件を, B を表す train track の admissible な weight system に関する条件で述べる事ができた.

定義 4.12 [Oe3, 1998]. $\mathcal{L} \subset M$ の transverse affine structure とは, 普遍被覆 \tilde{M} への \mathcal{L} の持ち上げ $\tilde{\mathcal{L}}$ の transverse measure μ で, \tilde{M} の任意の covering translation α に対し, ある $\phi(\alpha) \geq 0$ により $\alpha^*(\mu) = \phi(\alpha) \cdot \mu$ となるものである. ここで, $\alpha^*(\mu)$ は measure μ の pull-back である. \mathcal{L} は transverse affine structure を持つとき, affine lamination と呼ばれる.

train track τ の positive admissible weights の system とは, τ の各 edge に与えられた positive number (weight) の system で, τ の各 vertex で switch condition (Figure 8) と呼ばれる条件を満たしているものである.

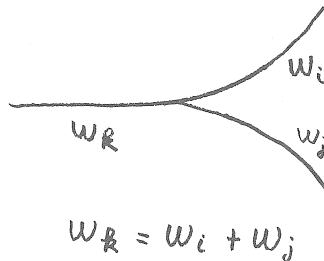


Figure 8

定理 6. Branched surface B が affine lamination を fully carry する必要十分条件は, B を表す train track の positive admissible weights の system で, ある ‘2つの条件’ (これらは技術的な条件で, 記述が長いのでここでは省略する) を満たすものが存在することである.

最後に, この講演録の作成にご協力くださった奈良女子大学の小林毅先生に感謝の意を表したいと思います.

References

- [Br1] M. Brittenham: *Essential laminations in Seifert fibered spaces*, Topology, 32 (1993), 61-85.
- [Br2] ———: *Essential laminations in non-Haken 3-manifolds*, Topology Appl., 53 (1993), 317-324.
- [Br3] ———: *Essential laminations and deformations of homotopy equivalences: From essential pullback to homeomorphism*, Topology Appl., 60 (1994), 249-265.
- [Br4] ———: *Essential laminations and Haken normal form*, Pacific J. Math., 168 (1995), 217-234.
- [Br5] ———: *Essential laminations and Haken normal form: laminations with no holonomy*, Comm. Anal. Geom., 3 (1995), 465-477.
- [Br6] ———: *Essential laminations in I-bundles*, to appear in Trans.A.M.S.
- [Br7] ———: *Small Seifert-fibered spaces and Dehn surgery on 2-bridge knots*, to appear in Topology.
- [Br8] ———: *Essential laminations and Haken normal form, II: regular cell decompositions*, preprint.
- [Br9] ———: *Essential laminations and deformations of homotopy equivalences, II: the structure of pullbacks*, preprint.
- [Br10] ———: *Essential laminations in Seifert-fibered spaces: boundary behavior*, preprint.
- [Br11] ———: *Essential laminations, small Seifert fibered spaces, and Dehn filling*, preprint.
- [Br12] ———: *Persistently laminar tangles*, preprint.
- [BHHKS] M. Brittenham, C. Hayashi, M. Hirasawa, T. Kobayashi and K. Shimokawa: *Essential laminations and branched surfaces in the exterior of links*, preprint
- [BNR] M. Brittenham, R. Naimi and R. Roberts: *Graph manifolds and taut foliations*, J. Diff. Geom., 45 (1997), 446-470
- [BR1] M. Brittenham and R. Roberts: *Persistent laminations from Seifert surfaces*, preprint.
- [BR2] M. Brittenham and R. Roberts: *When incompressible tori meet essential laminations*, preprint.
- [BW] M. Brittenham and Y.Q. Wu: *The classification of Dehn surgeries on 2-bridge knots*, preprint.
- [Cl] W. Claus: *Essential laminations in closed Seifert-fibered spaces*, Thesis, University of Texas, Austin, TX (1991).
- [De1] C. Delman: *Essential laminations and Dehn surgery on 2-bridge knots*, Topology Appl., 63 (1995), 201-221.
- [De2] ———: *Constructing essential laminations and taut foliations which survive all Dehn surgeries*, to appear in Topology Appl.
- [FH] W. Floyd and A. Hatcher: *Incompressible surfaces in punctured torus bundles*, Topology Appl., 13 (1982), 263-282.
- [FH1] W. Floyd and A. Hatcher: *The space of incompressible surfaces in a 2-bridge link complement*, Trans. A. M. S., 305 (1988), 575-599.
- [FO] W. Floyd and U. Oertel: *Incompressible surfaces via branched surfaces*, Topology 23 (1984) 117-125

- [Ga] D. Gabai: *Foliations and 3-manifolds*, Proceedings ICM Kyoto (1990), 609-619.
- [GaI] ———: *Foliations and the topology of 3-manifolds.*, J. Diff. Geom., 18 (1983), 445-503
- [GaII] ———: *Foliations and the topology of 3-manifolds II.*, J. Diff. Geom., 26 (1987), 461-478.
- [GaIII] ———: *Foliations and the topology of 3-manifolds III.*, J. Diff. Geom., 26 (1987), 479-536.
- [Ga1] ———: *Taut foliations of 3-manifolds and suspensions of S^1* , Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 42 (1992), 193-208.
- [Ga2] ———: *Problems in foliations and laminations*, In 'Geometric Topology', AMS/IP Studies in Advanced Math., Vol 2 (1997), Part 2.
- [GK1] D. Gabai and W. Kazez: *Pseudo-Anosov maps and surgery on fibred 2-bridge knots*, Topology Appl. 37 (1990), 93-100.
- [GK2] ———: *3-manifolds with essential laminations are covered by solid tori*, London Math. Soc., (2) 47 (1993), 557-576.
- [GK3] ———: *Homotopy, Isotopy and Genuine laminations of 3-manifolds*, In 'Geometric Topology', AMS/IP Studies in Advanced Math., Vol 2 (1997), Part 1, 123-138.
- [GO] D. Gabai and U. Oertel: *Essential laminations in 3-manifolds*, Ann. of Math., 130 (1989), 41-73.
- [Godaj] H. Goda: 三次元多様体上の essential lamination とその応用について, 第44回全日本トポロジーシンポジウム講演集, (1997), 1-8.
- [Hak] W. Haken: *Theorie der Normalflächen*, Acta Math., 105 (1961) 245-375.
- [Hat1] A. Hatcher: *On boundary curves of incompressible surfaces*, Pacific J. Math., 99 (1982), 373-377.
- [Hat2] ———: *Some examples of essential laminations in 3-manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 42 (1992), 313-325.
- [HO] A. Hatcher and U. Oertel: *Boundary slopes for Montesinos knots*, Topology, 28 (1989), 453-480
- [HT] A. Hatcher and W. Thurston: *Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements*, Invent. Math. 79 (1985), 225-246.
- [Hay] C. Hayashi: *Tangles and tubing operations*, to appear in Topology appl.
- [HK] M. Hirasawa and T. Kobayashi: *Pre-taut sutured manifolds and essential laminations*, preprint
- [JO] W. Jaco and U. Oertel: *An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold*, Topology, 23(1984) 195-209
- [Me] W. Menasco: *Closed incompressible surfaces in alternating knot and link complements*, Topology, 23 (1984), 37-44.
- [Na1] R. Naimi: *Essential laminations in 3-manifolds obtained by surgery on 2-bridge knots*, Geometric topology (Haifa, 1992), Contemp. Math., 164 (1994), 183-186.
- [Na2] ———: *Foliations transverse to fibers of Seifert manifolds*, Comment. Math. Helv., 69 (1994), 155-162
- [Na3] ———: *Constructing essential laminations in some 3-manifolds*, Pacific J. Math., 180 (1997), 153-186
- [Oe] U. Oertel: *Incompressible branched surfaces*: Invent. Math., 76 (1984), 385-410
- [Oe2] ———: *Homology branched surfaces: Thurston's norm on $H_2(M^3)$* , In: Low dimensional topology and Kleinian groups (Coventry/Durham, 1984), (1986), 253-272, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 112, Cambridge Univ. Press.
- [Oe3] ———: *Affine laminations and their stretch factors*, Pacific J. Math., 182 (1998), 303-328
- [Pa] C.F.B. Palmeira: *Open manifolds foliated by planes*, Ann. Math., (2) 107 (1978), no. 1, 109-131.
- [Ro] R. Roberts: *Constructing taut foliations*, Comm. Math. Helv., 70 (1995), 516-545.
- [Sc] M. Scharlemann: *Producing reducible 3-manifolds by surgery on a knot*, Topology, 29 (1990), 481-500.

- [Toris] I. Torisu: *Essential laminations and Dehn surgeries*, ‘結び目の位置と三次元多様体の構造’ 報告集, (1996), 87-112.
- [Wal] F. Waldhausen: *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math., 87 (1968), 56-88
- [Wu1] Y. Q. Wu: *Essential laminations in surgeried 3-manifolds*, Proc. A.M.S., 115 (1992), 245-249.
- [Wu2] _____: *Dehn surgery on arborescent knots*, J. Diff. Geom., 43 (1996), 171-197.
- [Wu3] _____: *Dehn surgery on arborescent links*, to appear in Trans. A.M.S.

1 序

本講演では、 C^∞ 級多様体間の微分可能写像に対する特異点の消去問題について、最近得られた結果を、総合的に報告する¹。

まず、 M, N を C^∞ 級多様体とし、 $f: M \rightarrow N$ を C^∞ 級写像とする。このとき、次の問題が自然に考えられる。

問題 1. f をホモトピーで動かして、与えられた型 Σ の特異点² を持たない写像に変形できるか？

たとえば、 N としてユークリッド空間 \mathbb{R}^{2n-1} ($n = \dim M \geq 2$) を考え、 Σ として微分の階数が n より小さくなる特異点の型全体を考えると、上の問題は肯定的に解かれるが、これはホイットニーのはめ込み定理 [31] に他ならない。

ところで、上の問題を考えるには f のジェット拡大を用いるのが普通である。今、十分大きな自然数 r に対し、 $J^r(M, N)$ を $M \times N$ 上の r ジェット束³ とし、 $j^r f: M \rightarrow J^r(M, N)$ を、 f の r ジェット拡大⁴ とする⁵。さらに、 $\Sigma(M, N) \subset J^r(M, N)$ を、特異点の型 Σ に対応した偏微分係数全体からなる部分束とすると、上の問題 1 は次のようにいいかえられる。

問題 2. $f: M \rightarrow N$ をホモトピーで動かして、 $j^r g(M) \cap \Sigma(M, N) = \emptyset$ なる g に変形できるか？

次の問題は上の問題と深く関係する。

問題 3. $j^r f: M \rightarrow J^r(M, N)$ をホモトピーで動かして、 $\psi(M) \cap \Sigma(M, N) = \emptyset$ なる $\psi: M \rightarrow J^r(M, N)$ に変形できるか？

* e-mail address: saeki@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

¹ 本講演の大部分は、佐久間一浩氏 (近畿大) との共同研究であり、一部は菊地茂樹氏 (弘前大) との共同研究である。

² C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、そこでの f の微分の階数が $\min\{\dim M, \dim N\}$ より小さい M の点を、 f の特異点という。写像芽に対しても同様のことが定義できる。さらに、2つの写像芽が、定義域と値域でそれぞれ C^∞ 級座標変換をして互いにうつりあうとき、それらは右左同値であるという。特異点の型とは、特異点を持った写像芽の右左同値類 (の和集合) のことである。

³ $M \times N$ の各点 (x, y) の上に、 $x \in M$ を $y \in N$ にうつす C^∞ 級写像芽の r 階までの偏微分係数全体の空間がファイバーとしてのっているようなファイバー束。全空間 $J^r(M, N)$ は C^∞ 級多様体の構造を持つ。

⁴ $x \in M$ に対し、 f の x での r 階までの偏微分係数 $((x, f(x)) \in M \times N$ 上のファイバーの元) を対応させる写像。多様体間の写像として、 C^∞ 級になる。

⁵ 詳しくは、たとえば [12] を参照。

問題 2 が肯定的に解ければ、もちろん問題 3 も肯定的に解けるが、一般にその逆はいえない。しかし、Gromov [13], Èliášberg [10], [11], du Plessis [5], [6], [7] らの仕事により、これら 2 つの問題はある種の状況において同値となることが示されている。

ところで、上の問題 3 を考える上で大変重要なのが Thom 多項式⁶ の概念である。今、特異点の型 Σ がある「良い」条件⁶ を満たしたとしよう。このとき、もし f が十分にジェネリック⁷ ならば

$$\Sigma(f) = (j^r f)^{-1}(\Sigma(M, N))(C M)$$

の開包 $\bar{\Sigma}(f)$ は基本類 $[\bar{\Sigma}(f)] \in H_*(M; \mathbb{Z}_2)$ を持つことがわかり、しかもその Poincaré dual が、difference bundle $f^*TN - TM$ (TM, TN はそれぞれ M, N の接空間を表す) の Stiefel-Whitney classes の多項式で書けることが知られている [15]。この多項式は M, N, f などによらず、 Σ のみによって決まることが知られており、この多項式のことを Thom 多項式というのである。

ところで、もし $j^r f$ がある写像 $\psi: M \rightarrow J^r(M, N)$ で $\psi(M) \cap \Sigma(M, N) = \emptyset$ なるものにホモトピックになったとすると、必然的に $[\bar{\Sigma}(f)] = 0$ とならなければならないことが確かめられる。つまり、このホモロジー類 $[\bar{\Sigma}(f)]$ (の Poincaré dual)⁸ をある種の障害類だと思えることができる。そこで次の問題が生じる。

問題 4. $[\bar{\Sigma}(f)] = 0$ ならば、 f をホモトピーで動かして、与えられた型 Σ の特異点を持たない写像に変形できるか？

本講演では、まず上の問題 4 をめぐる最近の結果についていくつか報告しようと思う。さらに、Thom 多項式ではとらえられない例として、多様体の微分構造が関わってくる現象があることについても解説する。

以下、多様体や写像はすべて C^∞ 級とし、特に断りのない限り (コ) ホモロジー群はすべて \mathbb{Z}_2 係数で考えるものとする。

2 4次元多様体間の安定写像

この節では、問題 1 が肯定的に解ける例として、4次元多様体の間の写像について解説する⁹。

M を向き付けられた 4次元閉多様体とし、 N を安定的に平行化可能¹⁰ な 4次元多様体とする。以下、 $C^\infty(M, N)$ で、 M から N への C^∞ 級写像全体の空間に C^∞ 位相を入れた

⁶ 正確にいうと、 $J^r(n, p)$ を $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ なる写像芽の r ジェット全体のなす空間 (ある次元のユークリッド空間と同一視できる) としたとき、 Σ に対応する集合が $J^r(n, p)$ の semi-algebraic set になる、ということ。

⁷ 正確には、 $\Sigma(M, N)$ を stratify したときに、それらの strata と $j^r f$ が横断的に交わるということ。

⁸ このコホモロジー類そのものを Thom 多項式という場合もあるが、本来は、 f の Σ に付随したコホモロジー類とも呼ぶべきであろう。

⁹ 本節の内容は佐久間一浩氏 (近畿大) との共同研究である [25]。

¹⁰ M 上のある次元の自明なベクトル束 ε に対して、Whitney sum $TM \oplus \varepsilon$ が M 上の自明なベクトル束になるとき、 M を安定的に平行化可能であるという。

ものを表すことにする。 C^∞ 級写像 $f: M \rightarrow N$ が安定写像であるとは、 f の $C^\infty(M, N)$ における近傍 U_f があって、任意の $g \in U_f$ に対して図式

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & N \\ h_1 \downarrow & & \downarrow h_2 \\ M & \xrightarrow{g} & N \end{array}$$

を可換にする微分同相写像 h_1, h_2 が存在するときをいう。 Mather [20] の結果により、安定写像全体の集合は $C^\infty(M, N)$ の中で常に open dense であることに注意する。

さて、上のような安定写像に現れる特異点は Mather の理論を使うことにより完全に決定することができ ([12] 等参照), A_1 (fold), A_2 (cusp), A_3 (swallow tail), A_4 (butterfly), $\Sigma^{2,0}$ (umbilic) の5種類であることが知られている¹¹。さらに、今まで知られている種々の結果を用いることにより、それらの Thom 多項式を以下のように完全に決定することができる。

特異点の型 Σ	$\dim \Sigma(f)$	Thom 多項式
A_1	3	0
A_2	2	w_2
A_3	1	0
A_4	0	0
$\Sigma^{2,0}$	0	w_2^2 (Z 係数では p_1)

ここで、 $w_i \in H^i(M)$ は M の i -th Stiefel-Whitney class を表す。なお、 $\Sigma^{2,0}(f)$ には自然な向きが入り (たとえば [30] 参照), $[\Sigma^{2,0}(f)] \in H_0(M; \mathbb{Z})$ と思うことができるが、上の表の最後に書いてあることは、この (Z 係数での) Poincaré dual が M の 1-st Pontryagin class $p_1 \in H^4(M; \mathbb{Z})$ に一致することを意味する。

上で出てくる特異点のうち、次元が 0 のものについては次のことが知られていた¹²。

定理 1 (安藤 [2], [3])。 $p_1 = 0$ ならば¹³ 任意の写像 $f: M \rightarrow N$ をホモトピーで動かして、 $\Sigma^{2,0}, A_4$ 型の特異点を持たない安定写像に変形できる。

そこで、1 次元以上の特異点の消去が問題となるが、これについて次を得た¹⁴。

定理 2 (佐伯, 佐久間 [25])。 $f: M \rightarrow N$ が $\Sigma^{2,0}, A_4, A_3$ 型の特異点を持たない安定写像にホモトピックとなるための必要十分条件は $p_1 = 0$ となることである。

¹¹ 実は umbilic には、さらに elliptic と hyperbolic の2種類がある。

¹² 安藤氏はもっと一般的な状況で定理 1 を証明しているが、いずれにしても次元が 0 の特異点集合のみ扱っている。

¹³ この条件は、 M の signature が 0 になることと同値である。

¹⁴ ここでの状況に限らず、0 次元の特異点の消去に関してはいくつかの結果が既に知られていた (たとえば、 [31], [19], [2], [3], [30] など)。1 次元以上の特異点の消去についての本質的な結果は、筆者の知る限り上の定理 2 が最初である。

定理 2 は, Èliašberg の homotopy principle¹⁵ [10] を応用することによって証明できる.

さらに, $w_2 = 0$ となると, A_2 型の特異点に付随したホモロジー類も消えるが, このときは M が安定的に平行化可能となるので, Èliašberg [10] の結果より, どんな f も A_1 型の特異点しか持たない安定写像にホモトピックとなる.

以上をまとめると, 我々の状況では, 問題 4 が肯定的に解決された¹⁶ ことになる¹⁷.

3 4次元から3次元への安定写像

次に, 問題 4 が否定的に解ける例として, 4次元多様体から3次元多様体への写像について解説しよう.

M を向き付け可能な4次元閉多様体, N を向き付け可能な3次元多様体とする. これらに対しても, 写像 $f: M \rightarrow N$ が安定であるということを前節と同様に定義できる. そして, この状況で安定写像に現れる特異点は, A_1 (fold), A_2 (cusp), A_3 (swallow tail) の3種類であることもわかる. しかも, これらの Thom 多項式は以下のようになることも知られている.

特異点の型 Σ	$\dim \Sigma(f)$	Thom 多項式
A_1	2	w_2
A_2	1	0
A_3	0	0

安藤 [3] により, 0次元の A_3 型の特異点は消去できることが知られている. では, 1次元の A_2 型の特異点についてはどうであろうか? 実は, 一般には消去できないことが次のようにわかった.

定理 3 ([22]). $H_*(M; \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{C}P^2; \mathbb{Z})$ とすると, どんな $f: M \rightarrow N$ も, A_2, A_3 型の特異点を持たない安定写像にホモトピックにならない.

証明のアイデアは以下の通りである. もし A_2, A_3 型の特異点を持たない安定写像 $g: M \rightarrow N$ が存在したとすると, $A_1(g)$ は M に埋め込まれた閉曲面で, しかも上の Thom

¹⁵ $g: M \rightarrow N$ が, M, N の接空間の間の写像で, $M - C$ (C は M の閉集合) 上で A_1 型の特異点に対応した特異点しかもたないものにリフトできるならば, 実際に g は $M - C$ 上で A_1 型の特異点しか持たない写像にホモトピーで動かせる, という定理.

¹⁶ A_1 型の特異点に付随したホモロジー類も消えるので, この特異点の消去も問題になるように見える. しかし, もし消去できてしまうと, その写像ははめ込み (あるいは沈め込みと言っても同じ) となってしまうので, たとえば N が開多様体とすると, 容易に矛盾が導ける. したがって, A_1 型の特異点に関しては, 問題 4 自体あまり意味を持たなくなってしまうのである.

¹⁷ ここでの結果は, たとえば du Plessis の結果 [5], [6], [7] からは出てこない. ここで出てくる特異点が, 彼の結果を適用するための条件を満たさないからである.

多項式の計算から、特性曲面¹⁸であることがわかる。一方、 A_1 型の特異点は局所的に

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto (x_1, x_2, \pm x_3^2 \pm x_4^2)$$

と書けるので、これを使うと、 $A_1(g)$ の法オイラー数が消えることがわかる。あとは、特性曲面に対する Rohlin 型の定理 [14] を適用すると、 M の交点形式の形から矛盾が導ける。

A_3 型の特異点の Thom 多項式が常に 0 であったことを思い出すと、結局上の状況で、問題 4 が否定的に解かれたことになる。

なお、上の状況で、 $J^r f: M \rightarrow J^r(M, N)$ が、 $\psi: M \rightarrow J^r(M, N)$ で $\psi(M) \cap (A_2(M, N) \cup A_3(M, N)) = \emptyset$ なるものにホモトピックかどうかはわかっていない。また、 $H_*(M; \mathbf{Z}) \cong H_*(CP^2; \mathbf{Z})$ という条件を、「 M のオイラー標数が奇数である」という条件でおきかえられるかどうかはわかっていない ([29] 参照)。

4 Morin 写像と Hopf 不変量 1 の問題

M を n 次元閉多様体、 N を p 次元多様体 ($n \geq p$) とする¹⁹。写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、点 $q \in M$ が A_k 型の Morin 特異点である ($1 \leq k \leq p$) とは、 $q, f(q)$ のまわりの適当な局所座標を用いて f が

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto \left(x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p^{k+1} + \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_p^{k-i} \pm x_{p+1}^2 \pm \dots \pm x_n^2 \right)$$

と表せるときをいう²⁰ ([21])。さらに f が特異点として Morin 特異点しか持たないとき、 f を Morin 写像という²¹。

たとえば $N = \mathbf{R}$ のときは、Morin 写像は Morse 関数²² に他ならない。そして、 $p \leq 3$ のときは、どんな写像も Morin 写像で近似できることが知られている。 $p \geq 4$ のときは一般に、与えられた多様体 M, N に対してその間に Morin 写像があるかどうかはわからない。たとえば、§2 の状況で $p_1 \neq 0$ とすると、umbilic (これは Morin 特異点ではない) が必ず出てくるので、 M から N への Morin 写像は存在すらしない。

より一般の次元では、次の定理が証明できる。

定理 4 (菊地, 佐伯, 佐久間 [18], [26])。 M のオイラー標数が奇数であり、 N が概平行化可能²³ であるとする。

(1) もし、 A_1 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f: M \rightarrow N$ が存在すれば、 $p = 1, 3, 7$ でなければならない。

¹⁸ 4 次元閉多様体に埋め込まれた閉曲面で、その表すホモロジー類の Poincaré dual が w_2 と一致するものを特性曲面という。

¹⁹ 本節の内容は、菊地茂樹氏 (弘前大) [18], 佐久間一浩氏 (近畿大) [26] との共同研究である。

²⁰ §2, 3 で出てきた A_k 型の特異点は、実はここでの意味の Morin 特異点になっている。

²¹ Morin 写像は、いたる所微分の階数が $p-1$ 以上で、そのジェット拡大がすべての Thom-Boardman strata (たとえば [12] 参照) に横断的なもの、としても特徴付けられる。

²² ただしここでは、「すべての臨界値が異なる」という条件は考えない。

²³ 1 点を取り除いてできる多様体が平行化可能のとき、もとの多様体を概平行化可能であるという。

(2) もし, A_1, A_2 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \rightarrow N$ が存在すれば, $p = 1, 2, 3, 4, 7, 8$ でなければならない.

(3) p が偶数で, A_1, A_2, A_3 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \rightarrow N$ が存在すれば, $p = 2, 4, 8$ でなければならない.

注意. 上にあげた p の各値に対しては, 実際に (そこにある型の特異点しか持たない) Morin 写像を構成することができる.

たとえば定理 4 (1) は次のようなアイデアで証明できる. もし, A_1 型の特異点しか持たない Morin 写像 $f : M \rightarrow N$ が存在したとすると, $A_1(f)$ は M の $p-1$ 次元部分多様体であり, $f|_{A_1(f)} : A_1(f) \rightarrow N$ は余次元 1 のはめ込みになることがわかる. さらに, M のオイラー標数と $A_1(f)$ のオイラー標数の偶奇は等しく ([24]), 仮定により, $A_1(f)$ のオイラー標数は奇数となる. よって, 特に $p-1$ は偶数である. さて, はめこみ $f|_{A_1(f)}$ を自己横断的なはめ込み $\psi : A_1(f) \rightarrow N$ にホモトピーで動かしたときの p 重点の個数の偶奇は, $A_1(f)$ のオイラー標数の偶奇に等しいことが²⁴, Herbert の公式 [16] を用いることにより容易に証明できる²⁴. したがって, ψ の p 重点の個数は奇数である. ところが, Eccles の結果 [8], [9] により, 余次元 1 の自己横断的なはめ込みで p 重点の個数が奇数であるようなものが存在するためには,

$$S^{2p+1} \rightarrow S^{p+1}$$

なる連続写像で Hopf 不変量が 1 であるものが存在することが必要十分である. したがって, Adams [1] の有名な結果より $p = 1, 3, 7$ となる ($p \geq 1$ に注意).

以上のように, Morin 写像の存在問題と, Hopf 不変量 1 の問題は密接に関連している.

ところで, 上の定理 4 は問題 4 と次のように関連している. 定理 4 の状況で, A_k 型の特異点の Thom 多項式は必ずしも消えるとはいえないが, ある状況では消えることが確かめられる. たとえば, $n-p=1$ のとき, A_k 型の特異点の Thom 多項式は, $k=1, 3$ を除いて常に消えることが知られている. そして, A_3 型の特異点の Thom 多項式は, $w_1 w_3$ であることも知られている. したがって, $w_1 w_3 = 0$ なる状況では, Morin 特異点に付随したホモロジー類はすべて消えることになる. 定理 4 は, そういった状況であっても, p がそこにあげた値でない限りは, 対応した特異点を消去することはできないことを意味している. つまり, ある種の状況において, 問題 4 が否定的に解かれているといえる²⁵.

²⁴ p が偶数であることが必要である.

²⁵ ただし多少注意が必要である. というのは, Morin 特異点以外の特異点の Thom 多項式をここでは考えていないからである. たとえば §2 の状況で $p_1 \neq 0$ とすると, 仮に Morin 特異点の Thom 多項式が消えていても, umbilic は消せないから, それに隣接して現れる A_2 型や A_3 型の特異点も決して消去出来ないことになる. したがって, 問題 4 を考える際には, 本来は, 与えられた型の特異点に隣接して現れる特異点も込めて考える必要があるのである.

5 微分構造と special generic map

これまでの、特異点の消去問題を Thom 多項式というある意味で homotopy theoretic な観点から考えてきたが、微分位相幾何学的立場から、次のような問題も考えられる²⁶。

問題 5. 多様体 M_1, M_2, N で、 M_1 と M_2 は同相だが、 M_1 上には N への与えられた型 Σ の特異点を持たない写像は存在するが、 M_2 上には存在しない、という例はあるか？

もし上のような例が存在すれば、 M_1 と M_2 は微分同相にはなり得ない。もしなってしまうとすると、その微分同相写像（の逆写像）を合成することにより、まったく同じ特異点を持った写像が M_2 上にも作れてしまうからである。したがって、もし上のような例が存在すれば、それは位相多様体 M_1 の上に微分構造が 2 つ以上入ることを意味する。

たとえば一番顕著な例として、初めから M_1, M_2 として、同相だが微分同相でない多様体を取ってこよう。そして $N = M_1$ とおくと、 M_1 上には N への特異点をまったく持たない写像（つまり微分同相写像）が存在するが、 M_2 上には存在しないことになり、上の問題 5 の解答を与えることになる。

では、もう少し本質的に特異点が現れる例はないものでしょうか？

そこで次のような写像のクラスを考える。 M を n 次元閉多様体、 N を p 次元多様体 ($n \geq p$) とする。写像 $f: M \rightarrow N$ に対して、点 $q \in M$ が definite fold であるとは、 $q, f(q)$ のまわりの適当な局所座標を用いて f が

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \mapsto (x_1, x_2, \dots, x_{p-1}, x_p^2 + x_{p+1}^2 + \dots + x_n^2)$$

と表せるときをいう（特に definite fold は A_1 型の Morin 特異点である）²⁷。さらに f が特異点として definite fold しか持たないとき、 f を special generic map²⁸ という ([4], [23])。

Special generic map はかなり特殊な写像であるが、もっとも簡単な（ジェネリックな）特異点（すなわち definite fold）しか持たない写像ということもあり、特異点の大域的位相幾何学の観点から、最近特に盛んに研究されている。たとえば、問題 5 に関連して次のことが知られている。

定理 5 ([23])。 $f: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ をホモトピー n 球面 Σ^n 上の special generic map とする。もし $n - p = 1, 2, 3$ かつ $n \geq 5$ ならば、 Σ^n は標準的な n 次元球面 S^n に微分同相である。

ホモトピー n 球面 Σ^n は常に安定的に平行化可能だから、Éliášberg [11] の結果より、 Σ^n から \mathbb{R}^p への、特異点として A_1 型の特異点しか持たない写像 $g: \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ が常に存在

²⁶ 本節の内容も大部分、佐久間一浩氏との共同研究である [27], [28]。

²⁷ $N = \mathbb{R}$ の場合は、Morse 関数の最大値、最小値を与える点がそうである。Definite fold は、ある意味でもっとも簡単な特異点であるといえる。

²⁸ これは、ジェネリックな写像（ある意味で豊富に存在する写像ということ）の中で特殊なもの、の意。

する。しかし、もし Σ^n が異種球面 (exotic sphere) ²⁹ ならば、ある状況下で、 g をホモトピーでどう動かしても、definite fold 以外の A_1 型の Morin 特異点 (これを indefinite fold という) を消去できない、ということを示している。これは、問題 1 がある多様体について肯定的に解けても、それと同相な多様体上で肯定的に解けないこともある、ということの意味している。つまり、問題 1 が多様体の微分構造と深く関わっていることもある、ということである。

上のような例は、4次元から3次元への写像においても多く見られる。たとえば、4次元多様体の例として一番手軽なのは、複素解析的曲面 (の複素構造を忘れた実4次元多様体) であるが、これに関して最近次を得た。

定理 6 (佐伯, 佐久間 [28])。 M をコンパクトな複素解析的曲面とする。 M を実4次元多様体とみなしたとき、 M から \mathbf{R}^3 への special generic map が存在するための必要十分条件は、 M が線織面 (ruled surface) ³⁰ , 又は、 primary Hopf surface ³¹ (と複素解析的に同型) となることである。

たとえば、一般型の複素解析的曲面の中には、 \mathbf{R}^3 への special generic map を許容する4次元多様体 (たとえば、 $S^2 \times S^2$ 多数の連結和) と同相になるものが存在することが知られている。上の定理 6 より、一般型の複素解析的曲面は \mathbf{R}^3 への special generic map を許容しないから、こういった例も問題 5 の解答を与えるわけである。

この他にも問題 5 の解答を与える例はたくさんある。たとえば、次もそのような例を与える定理である。

定理 7 (佐伯, 佐久間 [27])。 K を K3 surface ³² (の複素構造を忘れて得られる実4次元多様体) とし、 $S^1 \tilde{\times} S^3$ を S^1 上の non-orientable S^3 -束とする。すると、各 $k \geq 0$ に対して、 $M_1 = (S^1 \tilde{\times} S^3) \# (\#^{k+1} S^2 \times S^2)$ は $M_2 = (S^1 \tilde{\times} S^3) \# K \# (\#^k S^2 \times S^2)$ と同相で、 M_1 上には \mathbf{R}^3 への special generic map が存在するが、 M_2 上には存在しない。

このように、special generic map の存在 (あるいは、definite でない fold の消去) 問題は、多様体の微分構造に深く関わっているのである。

注意。 Definite fold に対応した Thom 多項式は存在しないことに注意しておく。 Definite fold もそうでない fold もすべて一緒にして (A_1 型の特異点全体として考えて) 初めて Thom 多項式が意味を持つのである ³³。

²⁹ 標準的球面 S^n と同相だが、微分同相でない多様体のこと。良く知られているように、異種球面は豊富に存在する [17]。

³⁰ コンパクトなリーマン面上の CP^1 束。

³¹ $S^1 \times S^3$ と微分同相な複素解析的曲面。

³² コンパクトな複素解析的曲面で、その標準直線束が自明で、不正則数 q が 0 となるもの。 CP^3 内の degree 4 の非特異代数的曲面などがその例である。

³³ このことは、たとえば Morse 関数を考えてみればすぐわかる。多様体上の Morse 関数で、極大・極小を与える点があわせて奇数個のものを作るのも、偶数個のものを作るのも、容易である。

参考文献

- [1] J. F. Adams, *On the non-existence of elements of Hopf invariant one*, Ann. of Math. **72** (1960), 20–104.
- [2] Y. Ando, *Elimination of certain Thom-Boardman singularities of order two*, J. Math. Soc. Japan **34** (1982), 241–267.
- [3] Y. Ando, *On the elimination of Morin singularities*, J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 471–487; Erratum, **39** (1987), 537.
- [4] O. Burchard et G. de Rham, *Sur certaines applications génériques d'une variété close à trois dimensions dans le plan*, Enseign. Math. **20** (1974), 275–292.
- [5] A. A. du Plessis, *Maps without certain singularities*, Comment. Math. Helv. **50** (1975), 363–382.
- [6] A. A. du Plessis, *Homotopy classification of regular sections*, Compositio Math. **32** (1976), 301–333.
- [7] A. A. du Plessis, *Contact invariant regularity conditions*, Lecture Notes in Math., vol.535, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1976, pp.205–236.
- [8] P. J. Eccles, *Multiple points of codimension one immersions*, Lecture Notes in Math., vol.788, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1980, pp. 23–38.
- [9] P. J. Eccles, *Codimension one immersions and the Kervaire invariant one problem*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **90** (1981), 483–493.
- [10] J. M. Èliašberg, *On singularities of folding type*, Math. USSR Izv. **5** (1970), 1119–1134.
- [11] J. M. Èliašberg, *Surgery of singularities of smooth mappings*, Math. USSR Izv. **6** (1972), 1302–1326.
- [12] M. Golubitsky and V. Guillemin, *Stable mappings and their singularities*, Graduate Texts in Math., no.14, Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1973.
- [13] M. L. Gromov, *Partial differential relations*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3.Folge Band 9, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1986.
- [14] L. Guillou et A. Marin, *Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature*, C. R. Acad. Sci. Paris **285** (1977), 95–98.
- [15] A. Haefliger et A. Kosinski, *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables*, Séminaire H. Cartan, E. N. S., 1956/57, Exposé no.8.

- [16] R. J. Herbert, *Multiple points of immersed manifolds*, Mem. Amer. Math. Soc. **34**, no.250, 1981.
- [17] M. A. Kervaire and J. W. Milnor, *Groups of homotopy spheres: I*, Ann. of Math. **77** (1963), 504–537.
- [18] S. Kikuchi and O. Saeki, *Remarks on the topology of folds*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** (1995), 905–908.
- [19] H. Levine, *Elimination of cusps*, Topology **3** (suppl. 2) (1965), 263–296.
- [20] J. Mather, *Stability of C^∞ -mappings : VI, The nice dimensions*, Proceedings of Liverpool Singularities – Symposium I, Lecture Notes in Math., vol.192, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971, pp.207–253.
- [21] B. Morin, *Formes canoniques des singularités d'une application différentiable*, C. R. Acad. Sci. Paris **260** (1965), 5662–5665, 6503–6506.
- [22] O. Saeki, *Notes on the topology of folds*, J. Math. Soc. Japan **44** (1992), 551–566.
- [23] O. Saeki, *Topology of special generic maps of manifolds into Euclidean spaces*, Topology Appl. **49** (1993), 265–293.
- [24] O. Saeki, *Studying the topology of Morin singularities from a global viewpoint*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **117** (1995), 223–235.
- [25] O. Saeki and K. Sakuma, *Stable maps between 4-manifolds and elimination of their singularities*, to appear in J. London Math. Soc.
- [26] O. Saeki and K. Sakuma, *Maps with only Morin singularities and the Hopf invariant one problem*, to appear in Math. Proc. Camb. Phil. Soc.
- [27] O. Saeki and K. Sakuma, *On special generic maps into \mathbf{R}^3* , to appear in Pacific J. Math.
- [28] O. Saeki and K. Sakuma, *Special generic maps of 4-manifolds and compact complex analytic surfaces*, preprint, 1997.
- [29] K. Sakuma, *On the topology of simple fold maps*, Tokyo J. Math. **17** (1994), 21–31.
- [30] R. Stingley, *Singularities of maps between 4-manifolds*, Ph.D. thesis, SUNY-Stony Brook, 1993.
- [31] H. Whitney, *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space*, Ann. of Math. **45** (1944), 247–293.

平面閉曲線のトポロジー

小沢 哲也

名城大学 理工学部 数学科

1 はじめに

位相的に安定な平面閉曲線 c は次の局所的な性質で特徴付けられる: それは S^1 から \mathbb{R}^2 への immersion であって, 横断的 2 重点以外は embedding である. これから我々が問題とするのは安定な平面閉曲線 (以下, これらを安定曲線, あるいは単に曲線と呼ぶ) に対する位相不変量である. S^1 の自然な向きにより各曲線も向き付けられているものとする.

写像空間 $C^\infty(S^1, \mathbb{R}^2)$ の中で安定曲線全体は open dense な subset をなし, その補集合は余次元が 1 の stratified set である. 余次元が 1 の stratum (discriminant hypersurface) は次のようにして特徴付けられる. それは曲線上に, 安定曲線にない次の性質で特徴付けられる点をただ 1 つ持つ:

(c) cusp point, (t) triple point, (s) self tangent point.

ただし, (s) の点では 2 つの曲率円は異なるものとする. これらの点に対応する hypersurfaces を, cusp point hypersurface, triple point hypersurface, self tangency hypersurface と呼ぶ. この 3 種類の discriminant hypersurfaces を $\mathcal{H}_c, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_s$ で表す.

余次元が 2 以上の strata も曲線の位相幾何にとって重要な意味を持ち, この stratification の相対複体の位相型は安定曲線の topology の研究の主要な対象である. このことに関する詳しいことは例えば [Va] を参照されたい.

Gauss は平面曲線に Gauss diagram (Gauss word) を対応させ, 曲線のトポロジーの問題を組み合わせ論の問題としてあつかった. 与えられた Gauss diagram がいつ平面曲線のそれとなるかという planarity problem には種々の答えが与えられているが, まだまだ議論の余地がある (例えば [K-T] 参照).

Whitney による曲線の回転数と正則ホモトピーに関する研究はよく知られている. 回転数に関する一連の論文の中で彼は次の公式を示している (c.f. [Wh]): 曲線上に自己交点でない点 x を starting point として選ぶと, 各自己交点 v の weight $w_x(v)$ が定義される (weight の定義は定義 2.1 を参照). このとき, 曲線の回転数 R は

$$R(c) = \sum_v w_x(v) + 2d(x) \quad (1)$$

と表される. ただし, $d(x)$ は点 x の深さを表す (点の深さは定義 2.2 を参照).

S^1 の \mathbf{R}^2 への immersion はいつ D^2 内部 (あるいはそれに handles を付けたもの) に immersion として拡張可能か, という問題もある. これに対し Blank (Poenaru [Po] による紹介) および Bailey [Ba] 等による答があるが, これにもまだ議論の余地がある.

Arnold [Ar] は 3 つの新しい曲線の位相不変量 J^\pm , St を導入した. それらは曲線のトポロジーだけでなく, \mathbf{R}^3 の Legendrean knots や 4 頂点問題などにも応用された. Arnold 自身の定義は, triple point hypersurface を横切るとき (曲線の perestroika) のこれらの不変量の変化を定めるような仕方によるものであった. その一つを彼は strangeness 不変量と呼んだ. それは triple point perestroika に感じやすい不変量であった.

Polyak は Gauss diagram を使った Arnold's 不変量の表示を与えられている ([Po] 参照). 一方で, Shumakovitchi [Sh] も Arnold の strangeness 不変量を直接に計算する方法を見いだした. それは, 曲線の頂点 v に関する和を使って strangeness 不変量が

$$St(c) = \sum_v w_x(v)d(v) + d(x)^2 - \frac{1}{4} \quad (2)$$

と表されることを示すものである.

我々がこれから見ていきたいことははじめに, 位相不変量の列 $\{I_{\alpha\beta}^\epsilon\}$ ($\epsilon = +, -, 0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$) とそれらの Vassiliev の意味での order に関する事柄である. 曲線の 1 つの自己交点で向きを保つようにつなぎ換えると (splicing, あるいは smoothing ともいう), 2 つの連結成分に分かれる. それぞれの連結成分上の交点数を α 乗し, それにその交点の深さを β 乗した値をかけて, それをすべての自己交点に渡り足し上げたものが不変量 $I_{\alpha\beta}^\epsilon$ である (詳しくは定義 3.1 参照).

曲線の不変量の Vassiliev の意味での order の定義は一意的に定まるものではない. immersion : $S^1 \rightarrow \mathbf{R}^2$ の空間内の discriminant set (安定曲線以外の集合) の特異点で, 上に挙げた 3 種類の hypersurface の normal crossing のみを考え, それらの周りでの不変量の交代和が消えるか否かで, 我々は order を考える. 不変量 $I_{\alpha\beta}^\epsilon$ のこの意味での order は $\alpha + 1$ に等しいことが示される.

つぎに, 我々は安定曲線に対するもう 1 つの系列の位相不変量を導入するが, それは strangeness 不変量の高次版ともいえるものである ([A-O] 参照). この研究の主要な動機となるものは, 先に挙げた 2 つの式 (1), (2) である. これらに共通することは, 曲線の頂点 v に関する和と starting point の深さととの和でそれぞれの不変量が表されていることである. 頂点に関する和の部分为主要項と考え, starting point の深さの部分は, 主要項の値が starting point によらないようにするための補正項と見なし, これらを深さの次数が高いものに拡張したい. すなわち, 自然数 k に対し,

$$\sum_v w_x(v)d(v)^k + F_k(d(x)) \quad (3)$$

を考え、これが starting point の選び方によらないように多項式 F_k を選ぶことができるか、という問題を考える。結論をいえば、 F_k として $k+1$ 次 Bernoulli 多項式を用いることにより問題は解決する (定理 4.1)。

Arnold による不変量の定義は、それぞれのタイプの discriminant hypersurface の両側での不変量の jump を決めることにより、定数項を除いた部分の不変量を決定するものであった。定理 4.1 で得た新しい不変量に対し、我々も各 type の discriminant hypersurface に関する値の jump を調べる (節 5.2)。その結果、我々が得た不変量は strangeness 不変量の自然な拡張であることがわかる。そこで、これらの不変量を level k の strangeness 不変量と呼ぶことにする。これらの Vassiliev の意味での order はすべて 1 である。

2 用語と記号に関する準備

安定曲線 $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が 1 つ与えられると、それは \mathbb{R}^2 の stratification $S_0 \cup S_1 \cup S_2$ を自然に導く。 S_0, S_1, S_2 の各連結成分をそれぞれ c の頂点, edge, 領域とよぶ。

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の通常の向きにより、曲線 $c: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ も向き付けられているものとして扱う。

2.1 頂点の weight と深さ

安定曲線の頂点に対し weight を定義する。曲線 c の edge 上に 1 点 x を固定し、それをその曲線の starting point と考える。 c の 1 つの頂点 v をとる。 x を出発し c 上をその向きにしたがって動く点が v に最初に到達したときの c の接ベクトルを e_1 とし、2 度目に v に到達したときの接ベクトルを e_2 とおく。

Definition 2.1 $\{e_1, e_2\}$ が \mathbb{R}^2 の向きに関し、正の向きを持つ線形基底であるとき、 v の weight を -1 とおき、負の向きを持つとき $+1$ とおく。starting point x に関する頂点 v の weight を $w_x(v)$ と書く。

つぎに曲線 c に関する平面上の各点 p の深さ $d(p)$ を定義する。

Definition 2.2 p が曲線上にないとき、 p を中心とする c の回転数を p の深さと定義する。すなわち、 p の深さは写像

$$S^1 \ni q \mapsto \frac{c(q) - p}{\|c(q) - p\|} \in S^1$$

の写像度である。 p が c の edge 上の点であるときは、 p を境界に持つ 2 つの領域上の点の深さの平均を p の深さとする。また、 p が c の頂点のときは、やはり p を境

界に持つ4つの領域(そのうちの2つが同一の領域である場合もある)の上の点の深さの平均を p の深さとおく.

p が edge 上の点でなければ, 深さ $d(p)$ は整数であり, p が edge 上の点のときは半整数である.

2.2 Discriminant 超平面の co-orientations

Discriminant hypersurface の co-orientation を定義することはすなわち, それらを横断的に横切る path がいつ正の向きでいつ負の向きかを定義することに他ならない.

2.2.1 Triple point hypersurface

triple point hypersurface を横切るときを考える. 横切る直前にあった1つの三角形(消える三角形)が hypersurface 上で triple point となり, 横切った後では新しい1つの三角形が生まれる. 消える三角形の3つの辺はもとの S^1 上では3つの segments をなす. S^1 の向きに応じてこの3つの辺に, したがって消える三角形に cyclic order が定まる. 一方, 各辺はそれぞれ独自に向きを持つ. 消える三角形の cyclic order と向きは一致する辺の個数が偶数個のとき, 消える三角形の符号を $+1$ とし, その個数が奇数のとき -1 と置く. 新しく生まれる三角形の符号も同様に定義するとき, それは消える三角形と常に反対の符号を持つことが容易に確かめられる.

triple point hypersurface を横切るとき, 消える三角形の符号が -1 であればこれを正の向きと定義する.

2.2.2 Cusp point hypersurface

cusp point hypersurface を横切るとき, 回転数が1増す方向に横切る場合を正の方向と定める.

2.2.3 Self tangency hypersurface

同じ向きに接する self tangency hypersurface の場合は新しく自己交点が生まれるように横切る方向を正の方向とする. 反対向きに接する self tangency hypersurface の場合は新しく自己交点が生まれるように横切る方向を負の方向とする.

3 不変量 $I_{\alpha\beta}^c$

不変量 $I_{\alpha\beta}^c$ の定義とその Vassiliev の意味での order について述べる.

3.1 $I_{\alpha\beta}^\epsilon$ の定義

安定曲線 c の 1 つの頂点 v での 2 つの向き付けられた単位接ベクトルを e_1, e_2 と置く。ただし、この順序で \mathbb{R}^2 の向きを表わすように添え字を付ける。頂点 v の近傍で向きに応じて曲線をつなぎ変え (splicing) してできる 2 つの閉曲線を c_v^+, c_v^- と置く。 c_v^+ は e_1 方向に v から進んだ成分であり、 c_v^- は e_2 方向である。 c_v^+, c_v^- の自己交点数を、それぞれ $k^+(v), k^-(v)$ と置き、 c_v^+ と c_v^- との交点数を $k^0(v)$ と置く。

Definition 3.1 自然数 α, β を fix する。また、 ϵ は $+, 0, -$ のいずれかとする。 $I_{\alpha\beta}^\epsilon(c)$ を次のように置く：

$$I_{\alpha\beta}^\epsilon(c) = \sum_v (k^\epsilon(v))^\alpha (d(v))^\beta.$$

3.2 不変量 $I_{\alpha\beta}^\epsilon$ の order

discriminant hypersurfaces $\mathcal{H}_c, \mathcal{H}_t, \mathcal{H}_s$ の normal crossing 上にある点を正規不安定曲線と呼び、正規不安定曲線を通る discriminant hypersurfaces の個数が k 個のとき、その曲線を k 次正規不安定曲線と呼ぶことにする。

k 次正規不安定曲線 c を考え、 c を通る discriminant hypersurfaces を H_1, \dots, H_k とかこう。集合 $A \subset \{1, \dots, k\}$ に対し c_A と書いたら、 c の近傍にある安定曲線で、 $j \in A$ のとき H_j の正の側にあり、 $j \notin A$ のとき H_j の負の側にあるものを表すことにする。ここで領域の正負はその hypersurface に対して定義された co-orientation に関して定まるもののことである。

Definition 3.2 曲線の位相不変量 I を考える。すべての $k+1$ 次正規不安定曲線 c に対し、交代和

$$\sum_{A \subset \{1, \dots, k+1\}} (-1)^{|A|} I(c_A)$$

が消えるとき、この不変量の order は k 以下であると定義する。order がちょうど k のとき、 $\mathcal{O}(I) = k$ と書くことにする。

Theorem 3.1 各 $\epsilon (= \pm, \text{または } 0)$ 、各 $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し、

$$\mathcal{O}(I_{\alpha\beta}^\epsilon) = \alpha + 1$$

が成り立つ。

4 高次 strangeness 不変量

次の定理 4.1 は高次 strangeness 不変量を定めるための基本的なものである。これに連結和に関する和公式を要請すると不変量が一意的に定まる。

4.1 Starting point に関する不変性

Theorem 4.1 k を正の整数, F を多項式とする。安定曲線 c に対し, 頂点に関する level k の和

$$S(x) = \sum_v w_x(v) d(v)^k + F(d(x)) \quad (4)$$

が starting point x の取り方によらないための必要十分条件は,

$$F(d) - \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(d + \frac{1}{2}) \equiv \text{const.}$$

となることである。ただし, \mathbf{B}_{k+1} は $k+1$ 次 Bernoulli 多項式を表わす。

ここで, Bernoulli 多項式 $\{\mathbf{B}_k\}$ は次で定義される:

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathbf{B}_k(x)}{k!} t^k. \quad (5)$$

Bernoulli 多項式が満たす種々の性質の中で, 我々が使うのは次である: 任意の整数 $k \geq 0, m, n$ with $m \leq n$ に対し,

$$m^k + (m+1)^k + \cdots + n^k = \frac{1}{k+1} (\mathbf{B}_{k+1}(n+1) - \mathbf{B}_{k+1}(m)) \quad (6)$$

が成り立つ。また, この等式は Bernoulli 多項式を定数項を除き特徴づけるものである。

Bernoulli 多項式のはじめのいくつかを記しておく:

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1; \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \end{aligned}$$

である。

定理の証明： 安定曲線 c 上の連続する 2 つの edges を考え、その間にある頂点を v とする。また、 v の前後に starting points x, y を取る。曲線の他の部分が v を横切るので、それが下から上へ行く場合 (a) と上から下へ行く場合 (b) に分け、 $S(y) - S(x)$ を計算する。

(a) のとき $w_x(v) = -w_y(v) = -1$ であり、 v の深さ $d_0 = d(v)$ を使って、 x, y の深さは $d(x) = d_0 + \frac{1}{2}$, $d(y) = d_0 - \frac{1}{2}$ とかける。したがって、

$$S(y) - S(x) = F(d_0 - \frac{1}{2}) - F(d_0 + \frac{1}{2}) + 2d_0^k$$

となる。

(b) のときは、 $w_x(v) = -w_y(v) = 1$ であり、 x, y の深さは $d(x) = d_0 - \frac{1}{2}$, $d(y) = d_0 + \frac{1}{2}$ となるので、

$$S(y) - S(x) = F(d_0 + \frac{1}{2}) - F(d_0 - \frac{1}{2}) - 2d_0^k$$

である。

したがって、いずれにせよ F が

$$F(d + \frac{1}{2}) - F(d - \frac{1}{2}) = 2d^k, \quad (\forall d \in \mathbf{Z})$$

を満たすことが、和 $S(x)$ が starting point x の取り方に依存しないための必要十分条件であるがわかり、これは F が Bernoulli 多項式を使って定理の式で表わされることを意味する。 Q.E.D.

以上により、level k の和

$$S(x) = \sum_v w_x(v) d(v)^k + \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(d(x) + \frac{1}{2}) + \text{const.} \quad (7)$$

は starting point x にはよらない曲線 c 自身の位相不変量であることがわかった。以下、我々はこの不変量を $St_k(c)$ と書き、level k の strangeness 不変量とよぶ。この時点では定数の選び方には任意性があるが、次節で調べるように、連結和に関する和公式が成り立つことを要求すると、定数が一意的に定まる。

4.2 連結和

2 つの曲線 c_1, c_2 の連結和を $c_1 \parallel c_2$ で表わす。連結和は必ずしも一意的に定まらないので、 $c_1 \parallel c_2$ は連結和によって得られる曲線の 1 つを表わすことになる。また、連結和 $c_1 \parallel c_2$ を含む命題が述べられたときには、その命題が連結和によって得られる全ての曲線に対して成り立つことを意味するものとする。

回転数 R は連結和に関し次を満たす：連結和でつなく部分の edge の深さが $+\frac{1}{2}$ (または, $-\frac{1}{2}$) であるとき,

$$R(c_1 \# c_2) = R(c_1) + R(c_2) - 1 \quad (\text{resp. } +1).$$

Arnold の strangeness 不変量 St は曲線の連結和に関する和公式

$$St(c_1 \# c_2) = St(c_1) + St(c_2)$$

を満たす。本節の目標は、不変量 St_k が連結和に関し strangeness 不変量同様の和公式を満たすかどうかを調べることである。

Theorem 4.2 level $k \geq 1$ の strangeness 不変量 St_k が連結和に関する和公式

$$St_k(c_1 \# c_2) = St_k(c_1) + St_k(c_2)$$

を満たすための必要十分条件は、 St_k の定数項を $-\frac{2}{k+1}B_{k+1}(0)$ とすること、すなわち

$$St_k(x) = \sum_v w_x(v) d(v)^k + \frac{2}{k+1} \left\{ \mathbf{B}_{k+1}\left(d(x) + \frac{1}{2}\right) - B_{k+1}(0) \right\} \quad (8)$$

と置くことである。

Remark 4.1 level k の strangeness 不変量 St_k は $k = 0$ のときは回転数と一致し、 $k = 1$ のときは Arnold's strangeness 不変量と一致する。

5 基点を用いない表記と局所性

5.1 基点を用いない表記

節 4, 4.2 で得られた不変量 St_k の表記は starting point を用いるものであった。本節は、これを starting point を使わないで表すこと、すなわち次を証明することが目的である：

Theorem 5.1

$$St_k(c) = \frac{1}{n(c)} \left\{ I_{1,k}^+(c) - I_{1,k}^-(c) + \frac{1}{k+1} I_{0,k}^0(c) + \frac{2}{k+1} \sum_v \mathbf{B}_{k+1}(d(v)) \right\} - \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(0). \quad (9)$$

ただし、 $n(c)$ は曲線 c の自己交点数 (頂点の個数) であり、 \mathbf{B}_{k+1} は $k+1$ 次 Bernoulli 多項式である。

5.1.1 定理 5.1 の証明

St_k の定義式 (8) を次の 3 つの部分に分ける:

$$(a) \sum_v w_x(v) d(v)^k, \quad (b) \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(d(x) + \frac{1}{2}), \quad (c) \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(0).$$

St_k は starting point $x \in S_1$ の取り方によらないので, S_1 の各 connected component (すなわち各 edge) から 1 つずつ starting point x をとり, 上の (a), (b), (c) をすべての starting points に関して足しあげる. S_1 の component 数は $2n$ であることに注意する ($n = n(c)$).

(c) の量はもともと starting point を含まないので

$$\sum_x \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(0) = \frac{4n}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(0)$$

である.

(b) に関する和について: 1 つの頂点 v に流れ込む 2 つの edges は互いに異なる. それぞれの edge 上に starting point x, x' をとる. $d_0 = d(v)$ と置くと, x, x' の深さは

$$d(x) = d_0 + \frac{1}{2}, \quad d(x') = d_0 - \frac{1}{2}$$

となる. したがって,

$$\begin{aligned} & \mathbf{B}_{k+1}(d(x) + \frac{1}{2}) + \mathbf{B}_{k+1}(d(x') + \frac{1}{2}) \\ &= \mathbf{B}_{k+1}(d_0 + 1) + \mathbf{B}_{k+1}(d_0) \\ &= d(v)^k + 2\mathbf{B}_{k+1}(d(v)). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} & \sum_x \frac{2}{k+1} \mathbf{B}_{k+1}(d(x) + \frac{1}{2}) \\ &= \frac{2}{k+1} \sum_v \{d(v)^k + 2\mathbf{B}_{k+1}(d(v))\} \\ &= \frac{2}{k+1} I_{0,k}^0(c) + \frac{4}{k+1} \sum_v \mathbf{B}_{k+1}(d(v)) \end{aligned}$$

(a) に関する和について: はじめに, 頂点 $v \in S_0$ を fix し, 和 $\sum_x w_x(v)$ について考える. 曲線 c は v に関し, positive part c_+ と negative part c_- に分かれる. starting point x が c_+ 上にあるとき, $w_x(v) = 1$ であり, c_- 上にあるとき, $w_x(v) = -1$ である.

c_+ 上の edges の個数は, 自己交点を 2 重に数えれば全交点数に 1 を加えたものに等しい. すなわち, それは $2k^+(v) + k^0(v) + 1$ に等しい. c_- についても同様であることから,

$$\sum_x w_x(v) = 2(k^+(v) - k^-(v))$$

となる。したがって、

$$\sum_x \sum_v w_x(v) d(v)^k = 2(I_{1,k}^+(c) - I_{1,k}^-(c))$$

を得る。

(a), (b), (c) に関する以上の和を $2n$ で割って、求める式 (8) を得る。 Q.E.D.

5.2 局所性

この節では 3 種類の perestroika による St_k の jump を調べる。また、以下で示されることからこの不変量の Vassiliev order は 1 であることがわかる (c.f. [Oz]).

5.2.1 Triple point perestroik

triple point perestroika に関する St_k の jump を調べる。そのため triple point v の深さ $d(v)$ を、 v を境界点とする 6 つの領域の深さの平均として定義する。 $d(v)$ は常に半整数であることに注意する。

triple point hypersurface を正の方向に横切る path を考える。その path 上で、hypersurface を横切る直前の点 c_0 と、横切った直後の点 c_1 を 1 つずつとる。

Proposition 5.1

$$St_k(c_1) - St_k(c_0) = \left(d(v) + \frac{1}{2}\right)^k - \left(d(v) - \frac{1}{2}\right)^k \quad (10)$$

ただし、 v は path が triple point hypersurface を横切るときに現れる曲線上の triple point を表す。

消える三角形の cyclic order, 各辺の向き等を考えると triple point perestroika は多くの場合がありうるが、それらに関し、頂点の深さの変化, 各頂点の weight は次の 2 つに分類される。3 つの頂点 v_1, v_2, v_3 の weight はそれぞれ c_0, c_1 に関して同じ値であることに注意する。

場合 1 :

$$w_x(v_1) = w_x(v_2) = w_x(v_3) = 1$$

$$\begin{aligned} d_0(v_1) &= d_0, & d_0(v_2) &= d_0 + 1, & d_0(v_3) &= d_0, \\ d_1(v_1) &= d_0 + 1, & d_1(v_2) &= d_0, & d_1(v_3) &= d_0 + 1 \end{aligned}$$

ただし, d_0 は triple point v の深さを表す. したがって, このとき

$$St_k(c_1) - St_k(c_0) = \left(d_0 + \frac{1}{2}\right)^k - \left(d_0 - \frac{1}{2}\right)^k \quad (11)$$

場合 2 : 3 つの頂点 v_1, v_2, v_3 の weight と深さはそれぞれ

$$-w_x(v_1) = w_x(v_2) = -w_x(v_3) = 1$$

$$\begin{aligned} d_0(v_1) &= d_0 + 1, & d_0(v_2) &= d_0 + 1, & d_0(v_3) &= d_0 + 1, \\ d_1(v_1) &= d_0 + 2, & d_1(v_2) &= d_0 + 2, & d_1(v_3) &= d_0 + 2 \end{aligned}$$

この場合も同様に式 (11) が成り立つ.

5.2.2 Cusp point perestroika

p を曲線 c 上の cusp point とする. p の深さは, p を境界に持つ 2 つの領域のうち p を取り囲む方の領域の深さとして, それを定義し, このときもやはり $d(p)$ とかく.

cusp point hypersurface を正の方向に横切る path を考える. その path 上で, hypersurface を横切る直前の点 c_0 と, 横切った直後の点 c_1 を 1 つずつとる.

Proposition 5.2

$$St_k(c_1) - St_k(c_0) = (d(p))^k \quad (12)$$

ただし, p は path が cusp point hypersurface を横切るときに現れる曲線上の cusp point を表す.

5.2.3 Self tangency perestroika

1 つの self tangency hypersurface の両側にある 2 つの曲線 c_0, c_1 の St_k の値の差を調べる.

同じ向きで接する場合も反対向きで接する場合も, この perestroika で生まれる頂点 v_1, v_2 の weight に関し, $w_x(v_1) = -w_x(v_2)$ が成り立ち, またそれぞれの深さは一致している. したがって, いずれの場合も self tangency perestroika に関し不変である.

Proposition 5.3

$$St_k(c_0) = St_k(c_1).$$

参考文献

- [Ar] Arnol'd, V.I., *Topological Invariants of Plane Curves and Caustics*, Univ. Lecture Series Vol.5 (1994)
- [Ba] Bailey, K.D., Extending closed plane curves to immersions of the disk with n handles, *Trans. A.M.S.* 206(1975), 1-24.
- [K-T] Kobayashi, O. and Tanio, H. Rotation numbers for curves on a torus, *Geom. Dedicata* 61(1996), 1-9
- [Po] Poenaru, V., Extension des immersions en codimension 1, (d'après S. Blank), *Séminaire Bourbaki* 1967/68, No.342.
- [Sh] Shumakovitch, A., Explicit Formulas for Strangeness of Plane Curves, *Algebra i Analiz* 7(3)(1995), 165-199.
- [Va] Vassiliev, A., *Complements of Discriminants of Smooth Maps: Topology and Applications*, *Transl. of Math. Monog.*, Vol. 98, A.M.S. 1994.
- [Wh] Whitney, H., On regular closed curves in the plane, *Compos. Math.* 4(1937), 276-284.
- [Oz] Ozawa, T., Finite order topological invariants of plane curves, Preprint (1998).
- [A-O] Arakawa, H. and Ozawa, T., A generalization of Arnold's strangeness invariant, in preparation.

MILNOR 予想について (VOEVODSKY の仕事の紹介)

竹田 雄一郎

CONTENTS

1. What is Milnor conjecture?	2
1.1. Introduction	2
1.2. Easy observations	3
2. Derived categories of motives	4
2.1. Singular homology of algebraic varieties	4
2.2. Nisnevich topology	5
2.3. Pretheory	6
2.4. Geometrical motives	7
2.5. Sheaf-theoretic motives	7
3. Homotopy category of algebraic varieties	9
3.1. Construction of homotopy category	9
3.2. Steenrod algebra	12
3.3. Realization functor	13
3.4. Algebraic cobordism	14
3.5. Preliminaries on stable homotopy theory	14
4. Proof of Milnor conjecture	17
4.1. Motives and Bloch-Kato conjecture	17
4.2. Hilbert theorem 90 and Bloch-Kato conjecture	19
4.3. Splitting varieties	22
4.4. Pfister quadrics and their motives	23
4.5. Completion of the proof	26
References	27

Introductionの前に言い訳を少し書きます。本講演の目的はV.VoevodskyによるMilnor予想の証明を紹介することです。しかし、彼は既存の数学の理論や道具を使ってこの予想を解いたわけではありません。彼は(主にA.Suslinと共同で)モチーフのderived categoryを構成し、それを土台に代数多様体のホモトピー論を展開し、それらの理論を駆使してMilnor予想を解いたわけです。彼のモチーフやホモトピー論に関する仕事はMilnor予想を解くために用意されたわけではないし、彼によって構築されたそれらの壮大な理論は単に一つの予想が解けたという事実を差し引いたとしても興味深いと思います。

筆者が本講演を引き受けたときに考えたことは、単なる証明のあらましを説明するだけではなくて、どちらかというとその理論的枠組のほうに力点を置いて話をしたいということでした。しかしモチーフとMilnor予想に関する彼のpreprintはいくつもあるので、そのすべてを限られた時間で紹介することはとてもできません。

ということで現時点ではという話をしたらよいかとても考えることができないので、この予稿の中で Voevodsky の Milnor 予想に関わる仕事を自分なりにまとめてみることにしました。だから、これは実際の講演を想定して書かれていません。これを書きあげてから講演の内容を考えたいと思います。

モチーフと Milnor 予想に関する Voevodsky の論文は [17, 21, 22, 4, 18, 23, 19, 24, 25] です。そのうちの [17, 22, 23, 19, 25] を取りあげて解説しています。preprint が多いのですが、すべて *K*-theory preprint archive で入手できます。関連する M.Rost の論文もそこにあります。近々それらモチーフに関する論文をまとめて Princeton の Ann. Math. Studies のシリーズから出版されるそうです。また、これらの論文の紹介がいくつかあります ([8, 3, 5])。特に B. Kahn の Bourbaki Seminar の報告集 [5] はこの予稿を書く上で大変参考になりました。これも *K*-theory の preprint archive にありますので、興味のある方は読んでみて下さい。

最後に、この予稿は限られた時間の中でかなり急いで書きあげたものなので、タイプミスだけでなく、重大な勘違いや事実誤認があるかもしれません。また、説明の拙いところや証明のつけられなかった部分も多々あります。そのため読みにくい予稿になったかもしれませんが、御容赦頂きたいと思います。

1. WHAT IS MILNOR CONJECTURE?

1.1. Introduction. k を体とする。 k の Milnor K 理論とは、 k の可逆元からなる乗法群 k^\times のテンサー積の直和を、 $a \in k^\times - \{1\}$ に対する $a \otimes (1 - a)$ で生成される両側イデアルで割ったものである。つまり、

$$K_*^M(k) = \left(\bigoplus_{n \geq 0} \overbrace{k^\times \otimes_{\mathbb{Z}} \cdots \otimes_{\mathbb{Z}} k^\times}^{n \text{ times}} \right) / \langle a \otimes (1 - a); a \in k^\times - \{1\} \rangle$$

で表される次数つき環である。 $a_1 \otimes \cdots \otimes a_n$ に対応する $K_n^M(k)$ の元を $\{a_1, \dots, a_n\}$ と表す。このとき、 $K_*^M(k)$ は次数つき可換環になる。次数が 0 と 1 の場合は明らかにわかっていて、 $K_0^M(k) = \mathbb{Z}, K_1^M(k) = k^\times$ となる。

m を $\text{char } k$ と素な正の整数とする。 k の Galois 加群としての Kummer sequence

$$0 \rightarrow \mu_m \rightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{\times m} \mathbb{G}_m \rightarrow \mathcal{K}$$

を考え、それに付随する Galois cohomology の long exact sequence と Hilbert の定理 90 ($H^1(k; \mathbb{G}_m) = \mathcal{K}$) より、

$$H^1(k; \mu_m) \simeq k^\times / (k^\times)^m$$

がいえる。このことから $K_1^M(k)$ と $H^1(k; \mu_m)$ の間に自然な同型ができる。[20, Thm.3.1] によると、この同型は

$$u_{n,m}(k) : K_n^M(k)/m \rightarrow H^n(k; \mu_m^{\otimes n})$$

に拡張される。この写像を k の norm residue morphism という。

Conjecture 1.1. [2, 6] 任意の体 k について $u_{n,m}(k)$ は同型である。

この予想はもともと、 $m = 2$ のときに J.Milnor によって提出されたものである [11]。したがって特に $m = 2$ のときこれを Milnor 予想という。

この予想は $n = 0, 1$ のときは自明である。 $n = 2$ のときは Merkurjev-Suslin によって証明された ([10])。しかし n が 3 以上のときはまだ解かれていない。 $m = 2$ に限ると Merkurjev-Suslin と Rost が独立に $n = 3$ の場合を証明した。今回 V.Voevodsky によって解かれたのは m が 2 巾でかつすべての n についてである。

証明の方針を説明する。まず k が複素数体の部分体で m が素数の場合に帰着させる (§1.2)。それから、予想を motif に関する条件 (Hilbert Theorem 90) に帰着させる (§4.1, §4.2)。この条件を証明する帰納法のステップを作って、ある条件を満たす variety が存在すればそれがうまく働くことを示す (§4.3)。最後にその条件を満たす variety が $m = 2$ のときは存在することを示す (§4.4, §4.5)。

1.2. Easy observations. motif の話に入る前に (motif を用いなくても) 簡単に証明できる事実を解説する。具体的にいうと、Bloch-Kato 予想を m が素数で k が複素数体の部分体の場合にまで帰着させる。まず Bloch-Kato 予想は m が素数の中のときに帰着できることはすぐにわかる。

Proposition 1.1. k'/k を p 次拡大とする。 m が p と素なとき、 $u_{n,m}(k')$ が同型ならば、 $u_{n,m}(k)$ も同型である。

Proof. 次の可換図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} K_n^M(k)/m & \xrightarrow{i} & K_n^M(k')/m & \xrightarrow{\text{Nm}} & K_n^M(k)/m \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n(k; \mu_m^{\otimes n}) & \xrightarrow{i} & H^n(k'; \mu_m^{\otimes n}) & \xrightarrow{\text{Nm}} & H^n(k; \mu_m^{\otimes n}) \end{array}$$

ここで i は体の拡大より自然に決まる写像で、Nm は norm map である。すると Nm $\circ i$ は p 倍写像になるので同型になる。よって上の可換図式から Prop.1.1 は正しいことがわかる。□

この命題は Milnor 予想の証明の中で頻繁に用いる。これから先に「transfer の議論」と書いてあるところは、すべて上の証明の議論を適用している。

Proposition 1.2. l を char k 以外の素数とする。このとき、 $u_{n-1,l}(k)$ と $u_{n,l}(k)$ が同型ならば、 $u_{n,l^\nu}(k)$ も同型になる。

Proof. transfer の議論を使って k を k に原始 l 乗根を付加してできる体におきかえることにより、 k は原始 l 乗根 ζ を含むとしてよい。 ν の帰納法で証明する。次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccccc} K_{n-1}^M(k)/l & \longrightarrow & K_n^M(k)/l^\nu & \longrightarrow & K_n^M(k)/l^{\nu+1} & \longrightarrow & K_n^M(k)/l \longrightarrow 0 \\ u_{n-1,l} \downarrow & & u_{n,\nu} \downarrow & & u_{n,\nu+1} \downarrow & & u_{n,l} \downarrow \\ H^{n-1}(k; \mu_l^{\otimes(n-1)}) & \longrightarrow & H^n(k; \mu_l^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(k; \mu_{l^{\nu+1}}^{\otimes n}) & \longrightarrow & H^n(k; \mu_l^{\otimes n}) \end{array}$$

ここで上の一番左の写像は $\{\zeta\} \in K_1^M(k)$ をかける写像で、下の一番左の写像は $\zeta \in H^0(k; \mu_l)$ をかけて Bockstein 準同型をとる写像である。するとこの図式は可換で、 $K_n^M(k)/l^\nu$ の所を除いて exact である。よってこの図式から Prop.1.2 が正しいことがいえる。□

Proposition 1.3. 任意の標数 0 の体 K と素数 l について、 $u_{n+1,l}(K)$ が同型ならば、任意の l でない正標数の体 k について、 $u_{n,l}(k)$ は同型である。

Proof: transfer に関する議論から k は l と素な次数の拡大体を持たないとしてよい。特に k は完全体である。 R を k の Witt 環、 π を R の uniformizer、 K をその商体とする。体の場合と同様に R の Milnor K 群を R の unit group R^\times について体のときと同様に定義する。ここで次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccccc} K_n^M(k)/l & \xrightarrow{i_K} & K_{n+1}^M(K)/l & \xrightarrow{p_K} & K_n^M(k)/l \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H^n(k; \mu_l^{\otimes n}) & \xrightarrow{i_H} & H^{n+1}(K; \mu_l^{\otimes(n+1)}) & \xrightarrow{p_H} & H^n(k; \mu_l^{\otimes n}) \end{array}$$

上の図式で、 i_K は自然な写像

$$K_n^M(k)/l \xleftarrow{\sim} K_n^M(R)/l \rightarrow K_n^M(K)/l$$

と、 $(\pi) \in K_1^M(K)$ をかける写像の合成で、 p_K は residue map である。 i_H, p_H も同様に定義する。縦の写像はすべて norm residue map である。するとこの命題は、上の図式が可換になることと、 $p_K \circ i_K, p_H \circ i_H$ がともに恒等写像になることからいえる。 \square

最後に Milnor K 群と Galois cohomology は体の filtered limit と両立するから、 Conj.1.1 は素体上有限生成な体 k の場合に帰着できる。よって、 k は \mathbb{C} の部分体としてよい。

2. DERIVED CATEGORIES OF MOTIVES

2.1. Singular homology of algebraic varieties. この章では、 Suslin-Voevodsky の最初の論文 [17] を振り返ってみる。 S を irreducible scheme とし、 X を S 上の scheme とする。 Δ^\bullet を standard cosimplicial complex とする。すなわち、

$$\Delta^n = \text{Spec}(\mathbb{Z}[\approx_\nu, \dots, \approx_\nu] / \sum \approx_\nu - \nu)$$

で、 coface map と codegeneracy map は座標 $\{t_i\}$ から自然に入れる。 $C_n(X/S)$ を $X \times \Delta^n$ の closed integral subscheme で $S \times \Delta^n$ 上 finite かつ全射であるようなもの達で生成される自由アーベル群とする。すると Δ^\bullet の cosimplicial structure から $C_\bullet(X/S)$ はアーベル群の simplicial object になる。 X/S の singular homology と singular cohomology をそれぞれ

$$\begin{aligned} H_*^{sing}(X/S) &= H_*(C_\bullet(X/S)) \\ H^*_{sing}(X/S) &= H^*(\text{Hom}(C_\bullet(X/S), \mathbb{Z})) \end{aligned}$$

で定義する。係数つきの (co)homology も自然に定義される。

[17] には 2 つの重要な概念が登場する。それは qfh sheaf と transfer map である。(定義は [17] を見て下さい。) qfh topology を用いることの利点は 2 つあって、それは一般の variety の命題を smooth な場合に帰着できることと、有限係数の qfh-sheaf には自然に transfer map が定義されることである。また、homotopy invariant な qfh-sheaf については、有限係数で rigidity theorem [17, Thm.4.4] が成り立つなどの強力な性質がある。[17] の主定理は次の通りである。

Theorem 2.1. [17, Cor.7.8] $S = \text{Spec} k$ が標数 0 の代数閉体で、 X が k 上の variety のとき、

$$H^*_{sing}(X/k; \mathbb{Z}/\ell) \simeq \mathbb{H}^*_{\sim}(\mathbb{X}; \mathbb{Z}/\ell)$$

が成り立つ。

Proof. まず、qfh cohomology と etale cohomology の比較定理が成り立つこと、つまり

$$H_{et}^*(X; \mathbb{Z}/\kappa) \simeq \mathbb{H}_{\text{ét}}^*(\mathbb{X}; \mathbb{Z}/\kappa)$$

を示す ([17, Cor.10.10])。\$k\$ 上の normal integral scheme \$S\$ に対して、\$z_0^c(X)(S) = C_0(X \times S/S)\$ とする。\$z_0^c(X)\$ は一意的に \$k\$-variety のなす圏の qfh-sheaf に拡張され ([17, Thm.6.2])、それは \$X\$ で表現される qfh-sheaf \$\mathbb{Z}(\mathbb{X})\$ と同型になる ([17, Thm.6.7])。よって

$$H_{qfh}^*(X; \mathbb{Z}/\kappa) \simeq \text{Ext}_{\text{ét}}^*(F_\mu(\mathbb{X}), \mathbb{Z}/\kappa)$$

が成り立つ。

\$z_n^c(X)(S) = z_0^c(X)(S \times \Delta^n)\$ とすると、\$z_0^c(X)\$ は qfh-sheaf の simplicial object になる。\$\text{Ext}_{qfh}^*(z_0^c(X), \mathbb{Z}/\kappa)\$ に付随する spectral sequence をみることにより

$$\text{Ext}_{qfh}^*(z_0^c(X), \mathbb{Z}/\kappa) \simeq \text{Ext}_{\text{ét}}^*(F_\bullet(\mathbb{X}), \mathbb{Z}/\kappa)$$

であることがわかる ([17, Cor.7.3])。\$z_0^c(X)\$ の cohomology sheaf は homotopy invariant であり ([17, Cor.7.5])、qfh-sheaf は必ず transfer map を持つ ([17, §5])。よって \$z_0^c(X)\$ の cohomology sheaf は rigidity theorem ([17, Thm.4.4]) が成り立つので、qfh-sheaf の Ext とその Spec \$k\$ での値をとったアーベル群としての Ext が同型になる ([17, Thm.4.5])。すなわち、

$$\begin{aligned} \text{Ext}_{qfh}^*(z_0^c(X), \mathbb{Z}/\kappa) &\simeq \text{Ext}_{Ab}^*(z_0^c(X)(k), \mathbb{Z}/\kappa) \\ &= \text{Ext}_{Ab}^*(C_\bullet(X), \mathbb{Z}/\kappa) \\ &= H_{sing}^*(X/k; \mathbb{Z}/\kappa) \end{aligned}$$

がいえる。これらの同型をつなぎあわせれば Thm.2.1 の同型が得られる。 \$\square\$

\$S\$ を normal connected variety とするとき、\$z_0^c(X)^{eff}(S)\$ を effective cycle のなす \$z_0^c(X)(S)\$ の submonoid とする。すると [17, Thm.6.8] より

$$z_0^c(X)^{eff}(S) \simeq \text{Hom}(S, \coprod_{d=0}^{\infty} S^d X)$$

が成り立つ。ここで \$S^d X\$ は \$X\$ の \$d\$-th symmetric product である。\$S = \Delta^\bullet\$ として両辺のアーベル群化をとると

$$C_0(X \times \Delta^\bullet) \simeq \text{Hom}(\Delta^\bullet, \coprod_{d=0}^{\infty} S^d X)^+$$

がいえる。つまり、Thm.2.1 はトポロジーにおける Dold-Thom の定理の類似になっている。

2.2. Nisnevich topology. Nisnevich 位相のことはあまり知られていないように思うので、ここでごくごく簡単に説明しておくことにする ([13])。Nisnevich 位相とは Zariski 位相より細かくて etale 位相より粗い位相で、次のように定義される。\$f : U \to X\$ が Nisnevich covering であるとは、\$f\$ が etale covering であり、任意の \$x \in X\$ に対してその residue field が同型になるような \$u \in f^{-1}(x)\$ が存在することをいう。このような covering によって定義される Grothendieck 位相のことを Nisnevich 位相という。例えば \$X\$ が体の場合は、任意の Nisnevich covering には splitting morphism が存在するので、その Nisnevich 位相は自明な

ものと同値になる。したがって、 X の各点 x が X の Nisnevich site X_{Nis} の point を決める。 $x \in X$ での stalk はその local ring $\mathcal{O}_{x,\delta}$ の henselization $\mathcal{O}_{x,\delta}^h$ になる。

2.3. Pretheory. [17] でみたとうり、presheaf に homotopy invariant かつ transfer map を持つという仮定をつけると、それだけで驚く程多くの性質を持つことがわかる。[17] の主定理もそれらの性質を用いて証明されたのであった。

pretheory とは一言でいうと transfer map 付きの presheaf のことである。といっても以降は smooth variety のみを扱うので、transfer の定義も [17] とは少し違っている。しかし、これに homotopy invariant という条件をつけ加えるとたくさんの性質を導きだすことができる。

Definition 2.2. [22, Def.3.1] k を体とし、 Sm/k を k -smooth variety、つまり k 上 smooth of finite type な separated scheme のなす圏とする。pretheory (F, ϕ, A) とは次のようなものである。

- 1) A は additive category である。
- 2) $F : Sm/k \rightarrow A$ は反変関手で、 $F(X \amalg Y) = F(X) \oplus F(Y)$ を満たす。
- 3) S を smooth variety とし、 $p : X \rightarrow S$ を smooth curve とすると、群の準同型

$$\phi_{X/S} : C_0(X/S) \rightarrow \text{Hom}(F(X), F(S))$$

があつて次を満たす。

- i) $i : S \rightarrow X$ を $p : X \rightarrow S$ の section とすると、 $\phi_{X/S}(i(S)) = F(i)$ を満たす。
- ii) smooth curve の cartesian square

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{g} & X_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ S_1 & \xrightarrow{f} & S_2 \end{array}$$

と $Z \in C_0(X_2/S_2)$ に対して、 $F(f) \circ \phi_{X_2/S_2}(Z) = \phi_{X_1/S_1}(f^*(Z)) \circ F(g)$ が成り立つ。

以降は pretheory はアーベル群に値を持つものだけを考える。これからは transfer map とアーベル群の圏を省略して、pretheory をただの F と表す。 k 上の pretheory F が homotopy invariant であるとは、任意の smooth variety X に対し、 $F(X) \rightarrow F(X \times \mathbb{A}^n)$ が同型になることをいう。

[22] の中で homotopy invariant pretheory の持つ多くの性質について議論されている。詳しくはその論文を見てもらうことにして、ここでは Milnor 予想の証明に必要な命題だけを紹介する。

Proposition 2.3. [22, Cor.4.17] F を homotopy invariant pretheory とする。 W を smooth semi local scheme とし U をその open subscheme とするとき、 $F(W) \rightarrow F(U)$ は単射になる。特に W を smooth local scheme、 K をその商体とするとき、 $F(W) \rightarrow F(\text{Spec } K)$ は単射になる。

Proposition 2.4. [22, Prop.4.25, Thm.4.26] F を完全体 k 上の homotopy invariant pretheory とすると、 $U \mapsto H_{Zar}^i(U; F_{Zar})$ もまた homotopy invariant pretheory になる。

Proposition 2.5. [22, Thm.5.7] F を完全体 k 上の *homotopy invariant pretheory* とする。 X を k -smooth variety とすると、

$$H_{Zar}^i(X; F_{Zar}) \simeq H_{Nis}^i(X; F_{Nis})$$

は同型になる。

2.4. Geometrical motives. この章では、幾何学的な Motif の圏を構成する。 k -smooth variety X, Y に対して、 $c(X, Y)$ を $X \times Y$ の integral closed subvariety のうちで X 上 finite かつ X のある連結成分の上で全射になっているようなもの達で生成される自由アーベル群とする。すると、correspondence によって

$$c(X_1, X_2) \times c(X_2, X_3) \rightarrow c(X_1, X_3)$$

が定義できる。したがって、 k -smooth variety を object にとり、 $c(X, Y)$ を morphism とすることによって圏が定義できる。これを、 $SmCor(k)$ と表すことにする。smooth variety X の決める $SmCor(k)$ の object を $[X]$ と表す。 $f: X \rightarrow Y$ に対してそのグラフ $\Gamma_f \subset X \times Y$ を対応させることにより、 Sm/k から $SmCor(k)$ への関手が定義できる。

$\mathcal{H}^1(S\mathcal{D}C\mathcal{I}\nabla(\parallel))$ を $SmCor(k)$ の bounded complex のなす homotopy category とする。任意の smooth variety X に対する

$$[X \times \mathbb{A}^k] \xrightarrow{[-k]} [X]$$

と、任意の smooth scheme X とその開集合による covering $X = U \cup V$ に対する

$$[U \cap V] \xrightarrow{[i_U] \oplus [i_V]} [U] \oplus [V] \xrightarrow{[j_U] - [j_V]} [X]$$

という2つのタイプの complex を含む最小の thick full subcategory を \bar{T} とする。 $\mathcal{H}^1(S\mathcal{D}C\mathcal{I}\nabla(\parallel))$ を \bar{T} で局所化した category の pseudo-abelian envelop を $DM_{gm}^{eff}(k)$ と表し category of effective geometrical motives という。

$$M_{gm}: Sm/k \rightarrow DM_{gm}^{eff}(k)$$

を自然に決まる functor とする。

$DM_{gm}^{eff}(k)$ は triangulated category になり、 $M_{gm}(X) \otimes M_{gm}(Y) = M_{gm}(X \times Y)$ を拡張することによって tensor structure が入る。 $DM_{gm}^{eff}(k)$ の Tate motif $\mathbb{Z}(k)$ を

$$cone(M_{gm}(\text{Spec } k) \rightarrow M_{gm}(\mathbb{P}^k))[-k]$$

で定義する。正の整数 q に対して $\mathbb{Z}(q) = \mathbb{Z}(k)^{\otimes q}$ とする。Tate motif の双対 $\mathbb{Z}(-k)$ をつけ加えることによって category of geometrical motives $DM_{gm}(k)$ が構成される。

2.5. Sheaf-theoretic motives. presheaf with transfer とは、 $SmCor(k)$ からアーベル群のなす圏への反変関手のことをいう。特にそれが Nisnevich 位相で sheaf になるとき、Nisnevich sheaf with transfer という。 F を presheaf with transfer とすると、その Nisnevich 位相での sheaf 化もまた presheaf with transfer になる。つまり、その sheaf 化 F_{Nis} は Nisnevich sheaf with transfer になる。それから、presheaf with transfer は pretheory になることに注意する。2つの presheaf with transfer の間の準同型は、反変関手の自然変換として定義する。

smooth variety X で表現される presheaf with transfer を $L(X)$ と表す。つまり、 $L(X)(Y) = c(Y, X)$ と定義する。 $L(X)$ は Nisnevich sheaf with transfer になり ([23, Lem.3.1.2])、次が成り立つ。

Proposition 2.6. [23, Prop.3.1.7] X を k -smooth variety、 F を homotopy invariant pretheory とすると、

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))}^i(L(X), F) \simeq H_{\mathrm{Nis}}^i(X; F)$$

が成り立つ。

presheaf with transfer F が homotopy invariant とは、任意の smooth variety X に対して、引き戻し写像

$$pr^* : F(X) \rightarrow F(X \times \mathbb{A}^1)$$

が同型になるようなものをいう。presheaf with transfer のなす category を $\mathrm{Preshv}(\mathrm{SmCor}(k))$ と表し、Nisnevich sheaf with transfer のなす full subcategory を $\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ と表す。 $D^-(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k)))$ を Nisnevich sheaf with transfer の bounded above complex のなす derived category とし、その cohomology が homotopy invariant になっているような complex からなる full subcategory を $DM_{-}^{eff}(k)$ と表す。

任意の Nisnevich sheaf with transfer F に対し、新しい Nisnevich sheaf with transfer $C_n(F)$ を

$$C_n(F)(X) = F(X \times \Delta^n)$$

で定義する。すると $n \mapsto C_n(F)$ は Nisnevich sheaf with transfer の simplicial object となり、自然に bounded above complex を作る事ができる。それも同じ記号 $C_*(F)$ で表す。

Proposition 2.7. [23, Prop.3.2.3] 上のようにして定義した functor

$$C_* : \mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k)) \rightarrow DM_{-}^{eff}(k)$$

は

$$\mathrm{RC}_* : D^-(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))) \rightarrow DM_{-}^{eff}(k)$$

に拡張する。 RC_* は自然な embedding の left adjoint functor になる。 \mathcal{A} を

$$L(X \times \mathbb{A}^k) \rightarrow \mathbb{L}(X)$$

なる complex を含む $D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ の最小の thick full subcategory とすると、 RC_* によって、 $DM_{-}^{eff}(k)$ と $D^-\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))$ の \mathcal{A} による局所化は category 同値になる。

Theorem 2.8. [23, Thm.3.2.6] k を完全体とすると、次の tensor triangulated category の可換図式がある。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}^1(S \uparrow \mathcal{C} \downarrow \nabla(\parallel)) & \xrightarrow{L} & D^-(\mathrm{Shv}_{\mathrm{Nis}}(\mathrm{SmCor}(k))) \\ M_{gm} \downarrow & & \downarrow \mathrm{RC}_* \\ DM_{gm}^{eff}(k) & \xrightarrow{i} & DM_{-}^{eff}(k) \end{array}$$

さらに、函手 i は full embedding になる。つまり i により決まる写像

$$\mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(A, B) \simeq \mathrm{Hom}_{DM_{-}^{eff}(k)}(i(A), i(B))$$

は同型になる。

Thm.2.8 にでてくる圏の tensor structure については注意を要する。 $\mathcal{H}^l(S\downarrow C\downarrow \nabla(\parallel))$ には variety の直積によって \otimes を定義したが、他の3つの圏の tensor は Thm.2.8 の関手 L, M_{gm}, \mathbf{RC}_* が \otimes を保つように定義する。その結果、 $DM_{gm}^{eff}(k)$ の tensor structure は sheaf の \otimes から導かれるものでは決してない。実際、自然な埋め込み $DM_{gm}^{eff}(k) \rightarrow D^-(Shv_{Nis}(SmCor(k)))$ は \otimes を保たないのである。

§2.3 において homotopy invariant pretheory が豊かな性質を持つことを見た。Prop.2.7 の意味していることは、Suslin complex をとる functor C_* は、presheaf からその sheaf 化をとると同じような universality を持っているということである。そういう意味で $C_*(F)$ は F の「homotopy invariant 化」といえる。

Thm.2.8 を用いて effective motif の derived category $DM_{gm}^{eff}(k)$ における色々な性質が導かれる。例えば、singular variety の motif や compact support をもつ motif の構成や、Tate motif の可逆性が証明される。また、今までに知られていた Bloch's higher Chow group や bivariant cyclic homology を $DM_{gm}^{eff}(k)$ の Hom としてあらわすことができる。より詳しくいうと、 $DM_{gm}^{eff}(k)$ での主張を functor i によって $DM_{gm}^{eff}(k)$ の主張に置きかえて、sheaf with transfer すなわち pretheory の一般論 (§2.3) を使って上に挙げた性質は導かれる。したがって smooth variety X のきめる motif $M_{gm}(X)$ に対応する $DM_{gm}^{eff}(k)$ の object は興味あるところだが、それは Thm.2.4 で主張しているように X の Suslin complex $C_*(L(X))$ になる。

最後に $DM_{gm}^{eff}(k)$ の Tate motif $\mathbb{Z}(\kappa)$ に対応する $DM_{gm}^{eff}(k)$ の object を構成する。 $1 \leq i \leq n$ に対して、

$$j_i : L((\mathbb{A}^k - \{P\})^{\kappa - \kappa^i}) \rightarrow L((\mathbb{A}^k - \{P\})^{\kappa})$$

を i 番目の座標を 1 とするような埋め込みとする。すべての i に対する j_i の像を F_n とする。 $\mathbb{Z}(\kappa)$ を

$$\mathbb{Z}(\kappa) = C_*(L((\mathbb{A}^k - \{P\})^{\kappa}) / \mathbb{F}_{\kappa})[-\kappa]$$

で定義する。 $DM_{gm}^{eff}(k)$ の \otimes の定義と Suslin complex の Mayer-Vietoris sequence によりこれが $DM_{gm}^{eff}(k)$ の Tate motif の像になることがわかる。

3. HOMOTOPY CATEGORY OF ALGEBRAIC VARIETIES

3.1. Construction of homotopy category. この章にでてくる定理や命題については、§3.5にあるものを除いて基本的に証明をつけることができない。筆者にもその証明がわからないのである。なぜなら、ここで紹介する algebraic variety の homotopy category については [25] には引用されているだけで、Morel-Voevodsky による論文 [12] の中に証明もあわせて詳しく書かれているらしいのだが、これがまだ未完成で出回っていないのである。筆者もつい最近その (未完成の) コピーを手に入れて眺めてみたのだが、(何せ 100 ページ以上あるものなので) その証明らしきものを発見することができなかった。

$\Delta^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ を、 k -smooth variety のなす圏に Nisnevich 位相を入れることによって定義される Nisnevich site $(Sm/k)_{Nis}$ 上で、集合に値をもつ sheaf の simplicial object のなす category とする。 $\Delta^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object には、simplicial smooth variety (representable sheaf と同一視する) や集合に値を持つ sheaf (自然に simplicial object と見なせる) や simplicial set (constant sheaf と見なす) が含まれている。

smooth variety U とその点 $u \in U$ をとる。 $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object \mathcal{X} に対して、

$$\mathcal{X}(\text{Spec } \mathcal{O}'_{u,\Gamma}) = \varinjlim_{\alpha \in U_\alpha} \mathcal{X}(U_\alpha)$$

とおく。ただし、 U_α は u の Nisnevich 位相での近傍全体を走る。つまり、 $\mathcal{X}(\text{Spec } \mathcal{O}'_{u,\Gamma})$ は \mathcal{X} の $u \in U$ での stalk である。 $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の morphism $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ が simplicial weak equivalence であるとは、任意の smooth variety U とその任意の点 $u \in U$ に対して、

$$\mathcal{X}(\text{Spec } \mathcal{O}'_{u,\Gamma}) \rightarrow \mathcal{Y}(\text{Spec } \mathcal{O}'_{u,\Gamma})$$

が simplicial set として weak equivalence、つまりその homotopy 群がすべて同型になることをいう。 $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ を simplicial weak equivalence で局所化した category を $\mathcal{H}_f(\Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel))$ と表す。

k -smooth variety X に対し、simplicial smooth variety $\check{C}(X)$ を $\check{C}(X)_n = X^{n+1}$ で定義する。 $\check{C}(X)$ を X の Čech nerve という。このとき次が成り立つ。証明は簡単なので省略する。

Lemma 3.1. [25, Lem.3.8] X, Y を k -smooth variety とし、 $\text{Hom}(Y, X)$ は空でない と仮定する。このとき、

$$\check{C}(X) \times Y \rightarrow Y$$

は simplicial weak equivalence になる。

$\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object \mathcal{X} が \mathbb{A}^k -local であるとは、任意の $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object \mathcal{Y} に対して、

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_f(\Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel))}(\mathcal{Y}, \mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_f(\Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel))}(\mathcal{Y} \times \mathbb{A}^k, \mathcal{X})$$

が全単射になることである。 $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の morphism $f: \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Y}'$ が \mathbb{A}^k -weak equivalence であるとは、任意の \mathbb{A}^k -local object \mathcal{X} に対して、

$$\text{Hom}_{\mathcal{H}_f(\Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel))}(\mathcal{Y}', \mathcal{X}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}_f(\Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel))}(\mathcal{Y}, \mathcal{X})$$

が全単射になることである。 $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ を \mathbb{A}^k -local equivalence で局所化して得られる category を $\mathcal{H}(\parallel)$ と表し、 k -variety の homotopy category という。

$\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ を基点つきの simplicial sheaf のなす category とする。すなわち $\mathcal{X} \in \Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel)$ とは、各 smooth variety U に対して $\mathcal{X}(U)$ の基点が指定されていて、sheaf の制限写像がその基点を保つもののことをいう。 $\mathcal{X} \in \Delta^{\vee}S(\underline{\square}_N)_f(S\Downarrow/\parallel)$ に対して、基点を付加することによって $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object を作ることができる。これを \mathcal{X}_+ と表す。基点を持たない場合と同様にして基点つきの homotopy category $\mathcal{H}_+(\parallel)$ が定義できる。 $\Delta^{op}Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object は各 smooth variety に対して基点つき simplicial set を対応させるので、自然に smash product \wedge を定義することができる。

T を次の cocartesian square で定義される基点つき simplicial sheaf とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{A}^k - \{k\} & \longrightarrow & \mathbb{A}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec}(k) & \longrightarrow & T \end{array}$$

ただし、基点は $1 \in \mathbb{A}^k$ とする。また、 S_s^1 を一次元球面、 S_t^1 を $(\mathbb{A}^k - \{\nu\}, \mathbb{K})$ とする。 T は $\mathbb{A}^k - \{\nu\} \rightarrow \mathbb{A}^k$ の $\mathcal{H}_*(\|)$ の中での homotopy cofiber であるが、明らかに $(\mathbb{A}^k, \mathbb{K})$ は可縮なので、 T は $S_s^1 \wedge S_t^1$ と同値になる。

$\Delta^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ の morphism $f : \mathcal{X}, \mathcal{Y}$ に対し、その cone を simplicial presheaf $U \mapsto cone(f(U))$ の sheaf 化として定義する。自然に決まる列

$$\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y} \rightarrow]\mathbb{R} \setminus \{ \} \rightarrow S_T^\infty \wedge \mathcal{X}$$

を cofiber sequence という。

各整数 i に対する $E_i \in \Delta^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ と $e_i : T \wedge E_i \rightarrow E_{i+1}$ の組 $\mathbf{E} = (E_i, e_i)$ のことを T -spectrum という。 $\mathcal{H}_*(\|)$ のときと同様にして、 T -spectrum の圏の中で \mathbb{A}^k -weak equivalence morphism を可逆化することによって、 T -spectrum の homotopy category が構成できる。それを k -variety の stable homotopy category とよび、 $\mathcal{SH}(\|)$ と表す。

基点つき simplicial sheaf $\mathcal{X} \in \mathcal{H}_*(\|)$ に対して自然に T -spectrum

$$\Sigma_T^\infty \mathcal{X} = (T^\wedge \wedge \mathcal{X}, \gamma)$$

が決まる。これは homotopy category 間の関手 $\mathcal{H}_*(\|) \rightarrow \mathcal{SH}(\|)$ を導く。

Theorem 3.2. [25, Thm.3.10] *smash product* \wedge によって $\mathcal{SH}(\|)$ の tensor structure を定義すると、 $\mathcal{SH}(\|)$ は以下の性質を満たす tensor triangulated category になる。

- 1) $\mathbf{E}[1] = S_s^1 \wedge \mathbf{E}$
- 2) Σ_T^∞ は cofiber sequence を distinguished triangle に移す。
- 3) Σ_T^∞ は smash product を保つ。
- 4) T は可逆になる。

Thm.3.2 より S_s^1, S_t^1 はともに $\mathcal{SH}(\|)$ の中で可逆である。すなわち、ある $S_s^{-1}, S_t^{-1} \in \mathcal{SH}(\|)$ が存在して、 $S_s^1 \wedge S_s^{-1} \simeq S^0, S_t^1 \wedge S_t^{-1} \simeq S^0$ なる同型が存在する。 $S^{p,q} = S_s^q \wedge S_t^{p-q}$ とし、 $\mathcal{SH}(\|)$ の object \mathbf{E} に対して、 $\mathbf{E}(\mathbf{q})[\mathbf{p}] = S^{p,q} \wedge \mathbf{E}$ とする。 \mathbf{E} が定義する cohomology theory $\tilde{E}^{*,*}$ と homology theory $\tilde{E}_{*,*}$ をそれぞれ

$$\begin{aligned} \tilde{E}^{p,q}(\mathcal{X}) &= \text{Hom}_{\mathcal{SH}(\|)}(\mathcal{X}, \mathbf{E}(\mathbf{q})[\mathbf{p}]) \\ \tilde{E}_{p,q}(\mathcal{X}) &= \text{Hom}_{\mathcal{SH}(\|)}(S^{\vee \mathbf{H}}, \mathbf{E}(\mathbf{q})[\mathbf{p}] \wedge \mathcal{X}) \end{aligned}$$

で定義する。 \mathcal{X} が simplicial variety のとき $E^{p,q}(\mathcal{X}) = \tilde{E}^{\vee \mathbf{H}}(\mathcal{X}_+)$ とする。

$(SmCor(k))_{Nis}$ 上の sheaf $L(\mathbb{A}^k)/L(\mathbb{A}^k - \{\nu\})$ をゼロを基点として $\Delta^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object と見なしたものを $K(\mathbb{Z}(\nu), \mathbb{K}(\nu))$ と表す。サイクルの直積から sheaf の準同型 $\mathbb{A}^k \times L(\mathbb{A}^k) \rightarrow L(\mathbb{A}^{k+k})$ が定義できる。これは

$$e_n : T \wedge K(\mathbb{Z}(\nu), \mathbb{K}(\nu)) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{Z}(\nu + \mathbb{K}), \mathbb{K}(\nu + \mathbb{K}))$$

を導く。このようにしてできる T -spectrum $\mathbf{H}_Z = (K(\mathbb{Z}(\nu), \mathbb{K}(\nu)), \nu)$ を Eilenberg-MacLane spectrum という。ただし、 $n < 0$ のときは、 $K(\mathbb{Z}(\nu), \mathbb{K}(\nu)) = \{*\}$ とする。サイクルの直積から $L(\mathbb{A}^k) \times L(\mathbb{A}^n) \rightarrow L(\mathbb{A}^{k+n})$ が定義でき、これは

$$K(\mathbb{Z}(\nu), \mathbb{K}(\nu)) \wedge K(\mathbb{Z}(\nu), \mathbb{K}(\nu)) \rightarrow \mathbb{K}(\mathbb{Z}(\nu + \nu), \mathbb{K}(\nu + \nu))$$

を導く。この写像は e_n, e_m, e_{n+m} と compatible なので、spectrum の積

$$m : \mathbf{H}_Z \wedge \mathbf{H}_Z \rightarrow \mathbf{H}_Z$$

を導く。これらのことを \mathbb{Z} -係数のかわりに \mathbb{Z}/κ -係数で考えることにより、mod- n Eilenberg-MacLane spectrum $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\kappa}$ が定義できる。

Thm.3.3 は motif の derived category と algebraic variety の homotopy 論を結びつける重要な定理である。しかし、前述のとうり証明は筆者にはわからない。([5] には証明の概略が書かれています。)

Theorem 3.3. k を標数 0 の体とする。 \mathcal{X} を smooth simplicial scheme とするとき、

$$H^{p,q}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{N}\square\sim}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}(\mathbb{1}))$$

が成り立つ。

3.2. Steenrod algebra. この章では、特異コホモロジーにおける Steenrod algebra の $\mathcal{SH}(\mathbb{1})$ での類似として、motivic Steenrod algebra を定義しその性質を列挙する。素数 l に対し mod- l motivic Steenrod algebra $\mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow)$ を、

$$\mathcal{A}^{v^{\mathbb{1}}}(\mathbb{1}, \downarrow) = \tilde{\mathcal{H}}^{v^{\mathbb{1}}}(\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle) = \text{Hom}_{\mathcal{SH}(\mathbb{1})}(\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}, \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}(\mathfrak{q})[p])$$

で定義する。

Proposition 3.4. [25, Thm.3.14] 次が成り立つ。

- 1) $q < 0$ ならば $\mathcal{A}^{v^{\mathbb{1}}}(\mathbb{1}, \downarrow) = 1$
- 2) $\mathcal{A}^{v^{\mathbb{1}}}(\mathbb{1}, \downarrow) \simeq \mathbb{Z}/\langle l \rangle$ で、これは $id_{\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}}$ で生成される。

Proposition 3.5. [25, Thm.3.15] $H_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{*,*} = \tilde{H}^{*,*}(S^0; \mathbb{Z}/\langle l \rangle)$ を $\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}$ の係数環とするとき、Künneth 準同型

$$\mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow) \otimes_{\mathcal{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{*,*}} \mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow) \rightarrow \tilde{\mathcal{H}}^{*,*}(\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle)$$

は同型になる。このことから $\mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow)$ には coproduct map

$$\Delta : \mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow) \rightarrow \mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow) \otimes_{\mathcal{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{*,*}} \mathcal{A}^{*,*}(\mathbb{1}, \downarrow)$$

が定義できることがわかる。

ここで、cohomology operation の公式を導くために、係数環 $H_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{*,*}$ の元を 2 つ定義する。 $H_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{0,1} = \mu_l$ なので、 $\tau \in H_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{0,1}$ を $l = 2$ ならばゼロでない元、 $l \neq 2$ ならばゼロとして定義する。 $\rho \in H_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}^{1,1} = k^\times / l$ を -1 に対応する元として定義する。また、Bockstein 準同型 $\beta \in \mathcal{A}^{\infty, \downarrow}(\mathbb{1}, \downarrow)$ を以下の distinguished triangle

$$\mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \rightarrow \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{\beta} \mathbf{S}_s^1 \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}$$

の boundary morphism として定義する。

Proposition 3.6. [25, Thm.3.16] k は標数 0 とすると、各 $i \geq 0$ に対して次を満たす operation $P^i \in \mathcal{A}^{\infty, \downarrow}(\mathbb{1}, \downarrow)$ が存在する。

- 1) $P^0 = id$

- 2) 任意の *simplicial smooth scheme* \mathcal{X} と $u \in H^{n,i}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle)$ に対して、 $n < 2i$ ならば $P^i(u) = 0$ で、 $n = 2i$ ならば $P^i(u) = u^l$
 3) Δ を *coproduct map* とすると、

$$\Delta(P^i) = \sum_{a+b=i} P^a \otimes P^b + \tau \sum_{a+b=i-1} \beta P^a \otimes \beta P^b$$

Prop.3.6 で出てきた P^i は reduced power の類似である。ただし $l = 2$ のときは P^i は平方作用素 Sq^{2i} の類似で、 βP^i が Sq^{2i+1} の類似と見なすことができる。そうすると Prop. の 3) はちょうど Cartan formula に対応していることがわかる。

Proposition 3.7. [25, Thm.3.17] k は標数 0 とする。Milnor operation $Q_i \in A^{2i-1, i-1}(k, l)$ を帰納的に $Q_0 = \beta, Q_{i+1} = [Q_i, P^i]$ で定義する。 Q_i は以下の性質も持つ。

- 1) $Q_i Q_j + Q_j Q_i = 0, Q_i^2 = 0$
- 2) $\Delta(Q_i) = 1 \otimes Q_i + Q_i \otimes 1 + \sum \rho^{n_j} \phi_j \otimes \psi_j$
 ただし $n_j > 0$ かつ ϕ_j, ψ_j の *bidegree* (p, q) は $p > 2q$ を満たす。
- 3) 各 $i > 0$ に対して $q_i \in A^{2i-2, i-1}(k, l)$ が存在して、 $Q_i = [\beta, q_i]$ を満たす。

3.3. Realization functor. この章では、体 k は複素数体 \mathbb{C} の部分体とする。 k -smooth variety に対して、複素多様体 $X(\mathbb{C})$ の singular simplicial set を $Sing(X(\mathbb{C}))$ と表す。

$\Delta_{\bullet}^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ の object \mathcal{X} に対して、 $rr(\mathcal{X}) \in \Delta_{\bullet}^{op} S(\square_{Nis} S \Downarrow //)$ を \mathcal{X} の representable sheaf による分解とする。つまり各 n に対して $rr(\mathcal{X}) \downarrow_n$ は smooth variety による representable sheaf の直和であり、かつ $\Delta_{\bullet}^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ の weak equivalence $rr(\mathcal{X}) \simeq \mathcal{X}$ があるとする。 \mathcal{H} を simplicial set のなす homotopy category とすると、 $\Delta_{\bullet}^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ から \mathcal{H} への関手

$$t_{\mathbb{C}} : \Delta_{\bullet}^{op} Shv_{Nis}(Sm/k) \rightarrow \mathcal{H}$$

が $t_{\mathbb{C}}(\mathcal{X}) = S \downarrow \{ \nabla \nabla(\mathcal{X})(\mathbb{C}) \}$ で定義できる。

T は $\mathbb{A}^k - \{ \ast \} \rightarrow \mathbb{A}^k$ の cone だから、 $t_{\mathbb{C}}(T) = S^2$ になる。したがって T -spectrum \mathbb{E} に対して $t_{\mathbb{C}}(\mathbb{E})$ は topological な意味での spectrum になる。このようにして $\mathcal{H}_{\bullet}(\square //)$ から spectrum のなす stable homotopy category $S\mathcal{H}$ への関手

$$t_{\mathbb{C}} : \mathcal{H}_{\bullet}(\square //) \rightarrow S\mathcal{H}$$

が定義できる。

Dold-Thom の定理より、 $K(\mathbb{Z}(\times), \mathbb{F}(\times))$ の topological realization は $2n$ 次の Eilenberg-MacLane 空間になる。このことから、 $t_{\mathbb{C}}(\mathbb{H}_{\mathbb{Z}})$ は topology における Eilenberg-MacLane spectrum に一致する。 $\mathbb{Z}/\langle l \rangle$ -係数でも同様である。よって、Steenrod 代数の間の写像

$$t_{\mathbb{C}} : \mathcal{A}^{*,*}(\downarrow, //) \rightarrow \mathcal{A}^*(\downarrow)$$

が定義される。ここで $\mathcal{A}^*(\downarrow)$ は topological mod- l Steenrod algebra である。topology における reduced power の一意性から、 l が奇数のときは $t_{\mathbb{C}}(P^i) = P^i$ 、 $l = 2$ のときは $t_{\mathbb{C}}(P^i) = Sq^{2i}$ となることがわかる。このことから $t_{\mathbb{C}}$ によって、motivic Milnor operation と topological なそれとが対応していることもわかる。

3.4. Algebraic cobordism. この章では、代数的なコボルディズムを表現する T -spectrum を構成する。 X を k -smooth variety とし、 \mathcal{E} を X 上の vector bundle とする。 \mathcal{E} の 0-section の像を $s(X)$ で表す。このとき、 \mathcal{E} の Thom 空間 $Th(\mathcal{E})$ を以下の cocartesian square で定義する。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} - f(\mathcal{X}) & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Spec } k & \longrightarrow & Th(\mathcal{E}) \end{array}$$

T の定義と同様に、 Thom 空間 $Th(\mathcal{E})$ は自然な埋め込み $\mathcal{E} - f(\mathcal{X}) \hookrightarrow \mathcal{E}$ の $\Delta^{op} Shv_{Nis}(Sm/k)$ での cone と同じものである。したがって \mathcal{O} を自明な line bundle とすると、 $Th(\mathcal{O} \oplus \mathcal{E}) = T \wedge T \langle (\mathcal{E}) \rangle$ が成り立つ。 Thom spectrum の構成と同様に Grassmannian の tautological bundle の Thom 空間の極限をとることにより、 T -spectrum MGL が定義できる。これを algebraic cobordism spectrum という。

Proposition 3.8. [25, Thm.3.21] k を標数 0 の体とする。このとき、 $p > 2q$ ならば $\tilde{H}^{p,q}(MGL; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ で $\tilde{H}^{p,q}(MGL; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$ である。

この命題は、代数的な Thom 空間についても Thom 同型が成り立つ ([25, Lem.3.20]) ことからわかる。よって、 Thom class $\tau \in \tilde{H}^{0,0}(MGL; \mathbb{Z})$ が定義できる。

k は \mathbb{C} の部分体とすると、 topological realization によって \mathcal{E} の Thom 複体は $\mathcal{E}(\mathbb{C})$ の Thom 複体にうつるので、 MGL は complex cobordism spectrum MU にうつる。このとき、次が成り立つ。

Proposition 3.9. [25, Thm.3.22] X を次元 d の k 上 smooth projective variety とする。このとき、ある $\phi_X \in MGL_{2d,d}(X)$ があって、 $t_{\mathbb{C}}(\phi_X) \in MU_{2d}(X(\mathbb{C}))$ は $X(\mathbb{C})$ の fundamental class になっている。

Proof: $X(\mathbb{C})$ の fundamental class は $X(\mathbb{C})$ の恒等写像が決める bordism class の元なので、その Pontrjagin-Thom 構成の代数幾何的な analogy が存在することをいえばよい。が、筆者にわかるのはここまでである。[5] にはその証明の outline があるが、筆者の力不足で理解できませんでした。

3.5. Preliminaries on stable homotopy theory. この章では、Milnor 予想の証明に必要な安定ホモトピー論や algebraic variety のホモトピー論の結果を紹介する。

$s_i \in H^{2i}(BU; \mathbb{Z})$ を以下の性質を満たす複素ベクトル束の特性類とする。

- 1) $s_i(E \oplus F) = s_i(E) + s_i(F)$
- 2) 直線束 L に対して、 $s_i(L) = c_1(L)^i$

Thom 同型 $H^*(MU; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{H}^*(BU; \mathbb{Z})$ をとおして、 s_i を $H^{2i}(MU; \mathbb{Z})$ の元と見なす。 $\mathbb{Z}/\langle - \rangle$ -係数の元も同じく s_i で表す。

Definition 3.10. cobordism の元 $a \in MU_{2(ln-1)}$ が (ν_n, l) -element であるとは、以下の条件を満たすときをいう。

- 1) a の $H_{2(ln-1)}(MU, \mathbb{Z})$ への像は l で割れる。
- 2) $s_{ln-1}(a)$ は mod l^2 で 0 でない。

複素多様体 X が (ν_n, l) -variety であるとは、その次元が $l^n - 1$ であって、 X のすべての特性数が l で割れて、 $s_n(X)$ が $\text{mod } l$ で 0 でないことをいう。このとき明らかに X によって決まる cobordism class $[X] \in MU_{2(l^n-1)}$ は (ν_n, l) -element になる。

Milnor operation $Q_n \in \mathcal{A}^{\epsilon^{\dagger}-\infty}(\dagger)$ を Eilenberg-MacLane spectrum の間の写像と見なし、その homotopy fiber を Φ_n^{top} とする。つまり、

$$S^{2(l^n-1)} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{u} \Phi_n^{\text{top}} \xrightarrow{v} \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{Q_n} S^{2l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}$$

なる distinguished triangle があるとする。このとき、次の補題が成り立つ。

Lemma 3.11. [25, Lem.3.6] $\phi : \mathbf{MU} \rightarrow \Phi_n^{\text{top}}$ を次の図式を可換にする写像とする。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MU} & \xrightarrow{\phi} & \Phi_n^{\text{top}} \\ \tau \downarrow & & v \downarrow \\ \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} & \xrightarrow{id} & \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \end{array}$$

任意の (ν_n, l) -element $a \in \mathbf{MU}_{2(l^n-1)}$ に対して、 $\phi_*(a) \neq 0$ 。

Proof: $a : S^{2(l^n-1)} \rightarrow \mathbf{MU}$ の cofiber を \mathbf{E} とおく。Thom class $\tau \in H^0(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle)$ は $H^0(\mathbf{E}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle)$ に持ち上がる。それを τ_a とおく。上の cofiber sequence より $\phi_*(a) \neq 0$ を示すには、 $Q_n(\tau_a) \neq 0$ をいえばよい。ところが τ_a は \mathbb{Z} -係数にもちあがるので $\beta(\tau_a) = 0$ である。よって $Q_n(\tau_a) = \beta q_n(\tau_a)$ だから、 $q_n(\tau_a) \in H^{2(l^n-1)}(\mathbf{E}; \mathbb{Z}/\langle l^k \rangle)$ が $\mathbb{Z}/\langle l^k \rangle$ -係数に持ち上がらないことを示せばよい。上の cofiber sequence から導かれる可換図式

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{2(l^n-1)}(\mathbf{E}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle) & \longrightarrow & H^{2(l^n-1)}(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle) & \xrightarrow{a} & \mathbb{Z}/\langle l \rangle \\ & & \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ 0 & \longrightarrow & H^{2(l^n-1)}(\mathbf{E}; \mathbb{Z}/\langle l^k \rangle) & \longrightarrow & H^{2(l^n-1)}(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}/\langle l^k \rangle) & \xrightarrow{a} & \mathbb{Z}/\langle l^k \rangle \end{array}$$

において、 $q_n(\tau_a) \in H^{2(l^n-1)}(\mathbf{E}; \mathbb{Z}/\langle l \rangle)$ の像は $q_n(\tau)$ である。よって、任意の $q_n(\tau)$ の持ち上げ $f \in H^{2(l^n-1)}(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}/\langle l^k \rangle)$ について $f(a) \neq 0$ をいえばよい。

特性類 s_n と Thom class の簡単な計算から、 $H^{2(l^n-1)}(\mathbf{MU}; \mathbb{Z}/\langle l^k \rangle)$ の中で $s_{l^n-1} = q_n(\tau)$ であることがわかる ([25, Lem.3.4])。したがって、 f はある $c \in H^{2(l^n-1)}(\mathbf{MU}; \mathbb{Z})$ を使って modulo l^2 で $s_{l^n-1} + lc$ と表せる。 (ν_n, l) -element の定義の 1) より $c(a) = 0 \pmod{l}$ であることがわかる。また (ν_n, l) -element の定義の 2) より $s_{l^n-1}(a) \neq 0 \pmod{l^2}$ である。よって $f(a) \neq 0 \pmod{l^2}$ なので、補題は証明された。 \square

motivic Milnor operation Q_n を Eilenberg-MacLane spectrum の間の写像と見なして、その homotopy fiber を Φ_n とおく。つまり、

$$T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{u} \Phi_n \xrightarrow{v} \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{Q_n} S^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}$$

という cofiber sequence があるとする。 $\tilde{\tau}$ を

$$\tilde{\tau} : T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{\tau \wedge id} \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle} \xrightarrow{m} \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle l \rangle}$$

で定義する。このとき次の補題が成り立つ。

Lemma 3.12. [25, Lem.3.23] 次の図式を可換にする $\tilde{\phi}_n : \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n \rightarrow \Phi_n$ が存在する。

$$\begin{array}{ccccc} \mathbf{MGL} \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} & \longrightarrow & \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n & \longrightarrow & \mathbf{MGL} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} \\ \tilde{\tau} \downarrow & & \tilde{\phi}_n \downarrow & & \tilde{\tau} \downarrow \\ T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} & \xrightarrow{u} & \Phi_n & \xrightarrow{v} & \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} \end{array}$$

Proof: 証明は次の図式が可換なことからわかる。

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MGL} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} & \xrightarrow{Q_n} & \mathbf{MGL} \wedge S_5^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} & \xrightarrow{Q_n} & S_5^1 \wedge T^{l^n-1} \wedge \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} \quad \square \end{array}$$

\mathcal{Y} を T -spectrum とし、 $\phi_{\mathcal{Y}} \in \widetilde{\mathbf{MGL}}_{2d,d}(\mathcal{Y})$ とする。 T -spectrum \mathcal{X} と $\alpha \in \tilde{\Phi}_n^{p,q}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X})$ に対し $p_{\phi_{\mathcal{Y}}, \phi_n}(\alpha)$ を

$$p_{\phi_{\mathcal{Y}}, \phi_n}(\alpha) : T^d \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{\phi_{\mathcal{Y}} \wedge \lceil} \mathbf{MGL} \wedge \mathcal{Y} \wedge \mathcal{X} \xrightarrow{\lceil \wedge \alpha} \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n(\mathfrak{q})[\mathfrak{p}] \xrightarrow{\tilde{\phi}_n} \Phi_n(\mathfrak{q})[\mathfrak{p}]$$

なる morphism とする。すると

$$p_{\phi_{\mathcal{Y}}, \phi_n} : \tilde{\Phi}_n^{p,q}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \rightarrow \tilde{\Phi}_n^{\vee^{-\in \lceil, \mathbb{H} \lceil}(\mathcal{X})$$

という写像ができる。

Proposition 3.13. [25, Prop.3.24] 上の記号のもとで、 $d = l^n - 1$ とする。自然な写像 $p : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{S}'$ に対して、 $t_{\mathbb{C}}(p(\phi_{\mathcal{Y}})) \in MU_{2d}$ が (ν_n, l) -element であると仮定する。このとき、Lem.3.9 を満たす $\tilde{\phi}_n$ に対して、以下の図式は $(\mathbb{Z}/\langle \rangle)^{\times}$ のスカラー倍を除くと可換になる。

$$\begin{array}{ccc} \tilde{\Phi}_n^{p,q}(\mathcal{X}) & \xrightarrow{p^*} & \tilde{\Phi}_n^{p,q}(\mathcal{Y} \wedge \mathcal{X}) \\ \downarrow v & & \downarrow p_{\phi_{\mathcal{Y}}, \tilde{\phi}_n} \\ \tilde{H}^{p,q}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}/\langle \rangle) & \xrightarrow{u} & \tilde{\Phi}_n^{p-2(l^n-1), q-(l^n-1)}(\mathcal{X}) \end{array}$$

Proof: $\alpha \in \tilde{\Phi}_n^{p,q}(\mathcal{X})$ とすると、 $p_{\phi_{\mathcal{Y}}, \phi_n} \circ p^*(\alpha)$ は次の写像 f と α の合成と一致する。

$$f : T^{l^n-1} \wedge \Phi_n \xrightarrow{p_*(\phi_{\mathcal{Y}}) \wedge \text{id}} \mathbf{MGL} \wedge \Phi_n \xrightarrow{\tilde{\phi}_n} \Phi_n$$

f と $u \circ v$ はともに $T^{l^n-1} \wedge \Phi_n$ から Φ_n への写像なので、それらが互いにスカラー倍の関係にあることをいえばよいが、 $\tilde{\Phi}_n^{l^n-1, l^n-1}(\Phi_n) \simeq \mathbb{Z}/\langle \rangle$ なので、 f が 0 でないことを示せばよい。topological realization をとって、 $t_{\mathbb{C}}(f) \neq 0$ を示せばよい。

$b : S^0 \rightarrow \Phi_n$ を $b \circ v = 1$ となる写像とする。次の図式

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{MU} & \xrightarrow{t_{\mathbb{C}}(\tilde{\phi}_n) \circ \text{id} \wedge b} & \Phi_n \\ \tau \downarrow & & \downarrow v \\ \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbf{H}_{\mathbb{Z}/\langle \rangle} \end{array}$$

は可換になるので、Lem.3.11 より図式の上の横向きの写像による $t_C(p_*(\phi_y))$ の像は 0 でない。しかしそれは

$$S^{2(l^n-1)} \xrightarrow{id \wedge \flat} S^{2(l^n-1)} \wedge \Phi_n^{top} \xrightarrow{t_C(f)} \Phi_n^{top}$$

に一致する。よって $t_C(f) \neq 0$ がいえた。 \square

X を k 上の smooth variety とする。 I_X を

$$\bigoplus_{i \geq 0} MGL_{2i,i}(X) \rightarrow \bigoplus_{i \geq 0} MGL_{2i,i}(\text{Spec } k) \xrightarrow{t_C} MU_*$$

の像とする。

Theorem 3.14. [25, Thm.3.25] I_X が (ν_n, l) -element を含んでいるとする。 $\tilde{\mathcal{X}}$ を以下の distinguished triangle で与えられる $\Delta_{\text{Shv}_{\text{Nis}}^{\text{op}}}(Sm/k)$ の object とする。

$$\tilde{\mathcal{X}} \rightarrow \Sigma_T^\infty \check{C}(X)_+ \rightarrow S^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}[1]$$

このとき、任意の p, q について次の列は exact になる。

$$\tilde{H}^{p-2l^n+1, q-l^n+1}(\tilde{\mathcal{X}}; \mathbb{Z}/\langle \rangle) \xrightarrow{\mathbb{Q}_k} \tilde{H}^{p,q}(\tilde{\mathcal{X}}; \mathbb{Z}/\langle \rangle) \xrightarrow{\mathbb{Q}_k} \tilde{H}^{p+k, q+k-l^n}(\tilde{\mathcal{X}}; \mathbb{Z}/\langle \rangle)$$

Proof: $Q_n^2 = 0$ なので、 $\ker Q_n$ が $\text{Im } Q_n$ に含まれることをいえばよい。 Φ_n を定義した cofiber sequence より、 $\tilde{\mathcal{X}}$ に関して $u \circ v = 0$ を示せばよい。 Lem.3.1 より

$$\Sigma_T^\infty \check{C}(X)_+ \wedge \Sigma_T^\infty X_+ \rightarrow \Sigma_T^\infty X_+$$

は weak equivalence なので、 $\tilde{\mathcal{X}} \wedge \Sigma_T^\infty X_+$ は可縮である。 Prop.3.12 を $\mathcal{Y} = \mathcal{X}_+$ として適用すると、 $\tilde{\mathcal{X}}$ に関して $u \circ v = 0$ がでてくる。 \square

4. PROOF OF MILNOR CONJECTURE

4.1. Motives and Bloch-Kato conjecture. §2.5 で定義した $\mathbb{Z}(\kappa)$ は Beilinson と Lichtenbaum によって予想されていた motivic complex のかなり有力な候補である。つまり、彼らは motivic complex の持つべき性質を公理として挙げているが、それらの公理を $\mathbb{Z}(\kappa)$ は満たすかまたは満たすだろうと思われる。したがって $\mathbb{Z}(\kappa)$ の Zariski site での cohomology を Beilinson motivic cohomology とよび、 etale site での cohomology を Lichtenbaum motivic cohomology とよぶことにする。つまり

$$H_B^{p,q}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{H}_{\mathbb{Z}\square}^p(\mathbb{X}; \mathbb{Z}(\mathbb{1}))$$

$$H_L^{p,q}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{H}_{\mathbb{Z}\square}^p(\mathbb{X}; \mathbb{Z}(\mathbb{1}))$$

と定義する。係数つきの Beilinson (Lichtenbaum) motivic cohomology も同様に定義する。 Prop.2.5 により

$$H_B^{p,q}(X; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{N}\square}^p(\mathbb{X}; \mathbb{Z}(\mathbb{1}))$$

であることに注意する。 Nisnevich 位相は etale 位相よりも粗いので、 $H_B^{p,q}(X; \mathbb{Z})$ から $H_L^{p,q}(X; \mathbb{Z})$ への自然な準同型が定義できる。 \mathbb{Q} -係数では Nisnevich cohomology と etale cohomology は同型なので、2つの cohomology は \mathbb{Q} 係数では同型になる。

Proposition 4.1. [19, Prop.3.2] 体 k について、自然な同型

$$H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{K}_k^M(\mathbb{1})$$

がある。この同型は積と *transfer map* を保つ。定義から $p > q$ のとき $H_B^{p,q}(k; \mathbb{Z}) = \mathcal{K}$ なので、上の同型から

$$H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z}/\mathcal{K}) \simeq \mathbb{K}_k^M(\mathbb{1})/\mathcal{K}$$

が導かれる。

Proof: $n = 1$ のときは $\mathbb{Z}(\mathcal{K}) \simeq \mathbb{G}_{\mathcal{K}}[-\mathcal{K}]$ なので明らか。 $L_n = L((\mathbb{A}^k - \{\mathcal{K}\})^\times)/\mathbb{F}_k$ とすると、定義より

$$H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z}) = \text{cok}(\mathbb{L}_k(\mathbb{A}^k) \xrightarrow{\partial_k - \partial_k} \mathbb{L}_k(\mathbb{1}))$$

となる。特に $H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z})$ の元は $(\mathbb{A}^k - \{\mathcal{K}\})^\times$ の zero cycle で表される。従って、体の有限次拡大 k'/k に対して、cycle の direct image によって *transfer map*

$$\text{Tr}_{k'/k} : H_B^{n,n}(k'; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}_B^{k,k}(\mathbb{1}; \mathbb{Z})$$

が定義できる。

また、 $(\mathbb{A}^k - \{\mathcal{K}\})^\times$ の k -有理点は自然に $L_n(k)$ の元を定めるので、写像

$$\mathbb{Z}[(\mathbb{1}^\times)^\times] \rightarrow \mathbb{H}_B^{k,k}(\mathbb{1}; \mathbb{Z})$$

が定義できる。 $(a_1, \dots, a_n) \in (k^\times)^n$ 上の準同型による像を $[a_1, \dots, a_n]$ と表す。このとき、次の式が成り立つ。

$$\begin{aligned} [a_1, \dots, 1, \dots, a_n] &= 0 \\ [a_1, \dots, a_k] \cdot [a_{k+1}, \dots, a_n] &= [a_1, \dots, a_n] \\ [ab] &= [a] + [b] \\ [a, 1 - a] &= 0 \text{ if } a \neq 1 \\ [a, -a] &= 0 \end{aligned}$$

よって先の準同型は Milnor K 群 $K_n^M(k)$ を経由する。それを λ と表す。

λ は *transfer map* と可換になることはすぐにわかる。 $H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z})$ は体の有限次拡大 k'/k に対する k' -有理点の *transfer* 達で生成されるので、このことから λ は全射であることがわかる。 λ が単射であることを示すには、逆写像を構成すればよい。 $(\mathbb{A}^k - \{\mathcal{K}\})^\times$ の点 v をとって、それを $H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z})$ の元と見なす。 (X_1, \dots, X_n) を \mathbb{A}^k の標準的な座標としたとき、

$$\theta(v) = \text{Tr}_{k(v)/k}(\{X_1(v), \dots, X_n(v)\}) \in K_n^M(k)$$

とすると、このようにして決まる $H_B^{n,n}(k; \mathbb{Z})$ から $K_n^M(k)$ への準同型 θ が λ の逆写像になることがわかる。 \square

Proposition 4.2. [25, Thm.2.6] k を体とし、 m を正の整数とする。 X を k 上の *smooth variety* のとき、自然な同型

$$H_L^{p,q}(X; \mathbb{Z}/\mathcal{K}) \simeq \mathbb{H}_{\sim}(\mathbb{X}; \mu_{\mathcal{K}}^{\otimes m})$$

が存在する。

Proof: [25]の中でVoevodskyはあたかも当たり前であるかのようにこの定理を説明しているが、その証明は自明ではない。なぜなら§2.5で見たように、 $DM_{-}^{eff}(k)$ の tensor structure は sheaf の \otimes とは異なるからである。よって、証明してみよう。

$q = 1$ のときは $\mathbb{Z}(\mathbb{K}) \simeq \mathbb{G}_{>}$ なので、 $\mathbb{Z}/>(\mathbb{K}) \simeq \mu_{>}$ であることはすぐわかる。任意の q に対して、

$$\mathbb{Z}/>(\mathbb{1}) \rightarrow \mu_{>}^{\otimes n}$$

の etale sheaf 化が同型になることを示せばよい。よって、strict Henselian ring に対する値が同型になることを示せばよい。ところが両辺ともに transfer map を持つので、rigidity theorem [17, Thm.4.4] により代数閉体のときに帰着される。 k を代数閉体とすると、Thm.2.1 の双対をとることにより任意の q に対し

$$H_i(C_*(L((\mathbb{A}^k - \{\mathcal{V}\})^n)) \otimes \mathbb{Z}/>) \simeq \text{Hom}(\mathbb{H}_{\approx}^{\mathbb{Z}}((\mathbb{A}^k - \{\mathcal{V}\})^n; \mathbb{Z}/>), \mathbb{Z}/>)$$

であることがいえる。これと etale cohomology の purity theorem により

$$C_*(L((\mathbb{A}^k - \{\mathcal{V}\})^n)/\mathbb{F}_n \otimes \mathbb{Z}/>)[n] \simeq \mu_{>}^{\otimes n}$$

がいえる。 □

自然な写像

$$H_B^{p,p}(X; \mathbb{Z}/>) \rightarrow \mathbb{H}_L^p(X; \mathbb{Z}/>)$$

は積を保つ。よって $X = \text{Spec } k$ のときは、Prop.3.1 と Prop.3.2 の同型を通じてこの準同型は初めに定義した norm residue morphism $u_{p,m}$ と同一視できる。

4.2. Hilbert theorem 90 and Bloch-Kato conjecture. この章では、Bloch-Kato 予想にかかわる2つの条件 $H90(n, l)$ と $BK(n, l)$ を導入し、その関係を論じる。

標数0の体について $H90(n, l)$ が成り立つとは、任意の標数0の体と $q \leq n$ に対し、 $H_L^{q+1, q}(k; \mathbb{Z}_{(\leq)}) = \mathcal{V}$ が成り立つことをいう。 $n = 0$ のときは明らかに正しく、 $n = 1$ のときはよく知られている Hilbert の定理90 ($H^1(k; \mathbb{G}_{>}) = \mathcal{V}$) から正しいことがわかる。また、 l を体 k の標数でない素数とすると、 $BK(n, l)$ が体 k 上で成り立つとは、任意の k 上の体 K と任意の $m \leq n$ に対して次の2つの性質を満たすことをいう。

- 1) norm residue morphism $u_{m, l}(K)$ が同型になる。
- 2) 任意の l 次巡回拡大 E/K について、 σ を E/K の Galois 群の生成元とすると、

$$K_m^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_m^M(E) \xrightarrow{\text{Nm}_{E/K}} K_m^M(K)$$

は exact になる。

π を big etale site から big Nisnevich site への自然な射とし、 $L(q) = \tau_{\leq q+1} \mathbf{R}\pi_*(\pi^*(\mathbb{Z}(\mathbb{1})))$ とする。つまり $L(q)$ とはその cohomology sheaf $\mathcal{H}^i(\mathcal{L}(\mathbb{1}))$ が、 $i \leq q+1$ のときは $\mathbf{R}\pi_*(\pi^*(\mathbb{Z}(\mathbb{1})))$ のそれと同じで、 $i > q+1$ のときは0になるような complex である。自然な写像 $\mathbb{Z}(\mathbb{1}) \rightarrow \mathbf{R}\pi_*(\pi^*(\mathbb{Z}(\mathbb{1})))$ は $L(q)$ を経由する。complex $K(q)$ を以下の distinguished triangle

$$\mathbb{Z}(\mathbb{1}) \rightarrow L(\mathbb{1}) \rightarrow K(\mathbb{1}) \rightarrow \mathbb{Z}(\mathbb{1})[\mathbb{K}]$$

で定義する。 $\mathbf{R}\pi_*(\pi^*(\mathbb{Z}(\mathbb{1})))$ の cohomology sheaf は homotopy invariant presheaf with transfer なので ([25, Lem.2.8])、 $L(q)$ や $K(q)$ も同じ性質を持つ。

この章の結論は、もし標数0の体について $H90(n, l)$ が成り立つならば、任意の標数0の体について $BK(n, l)$ が成り立つ、というものである (Cor.4.4, Cor.4.5)。

Proposition 4.3. [25, Thm.2.11] 標数0の体について $H90(n, l)$ が成り立つならば、 $K(n) \otimes \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}$ は *acyclic* である。

Proof: $K(n) \otimes \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}$ は homotopy invariant な Nisnevich sheaf with transfer なので、Prop.2.3 より任意の k 上の体 F について

$$H_{Nis}^p(F; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}(\times)) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{N}\square\sim}^1(\mathbb{F}; \mathbb{L}(\times) \otimes \mathbb{Z}_{(\leftarrow)})$$

が同型であることをいえばよい。しかし $p > n+1$ のときは両辺ともに0であり、 $p \leq n+1$ のときはこれは

$$H_B^{p,n}(F; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{L}}^{p,n}(\mathbb{F}; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)})$$

に他ならない。 $0 \rightarrow \mathbb{Z}_{(\leftarrow)} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\leftarrow)} \rightarrow \mathcal{K}$ なる係数の exact sequence を考えると、 $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\leftarrow)} = \varinjlim \mathbb{Z}/\langle \nu \rangle$ なので

$$H_B^{p,n}(F; \mathbb{Z}/\langle \nu \rangle) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{L}}^{p,n}(\mathbb{F}; \mathbb{Z}/\langle \nu \rangle)$$

が $p \leq n$ のときに成り立つことをいえばよい。[19, Thm.5.9, Prop.7.1] よりこれは Bockstein 準同型

$$\beta : H_{et}^n(F; \mu_l^{\otimes n}) \rightarrow H_{et}^{n+1}(F; \mu_l^{\otimes n})$$

が任意の m について零になることと同値である。ところが仮定より $H_{\mathbb{L}}^{n+1,n}(F; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) = \mathcal{K}$ なので

$$H_{\mathbb{L}}^{n,n}(F; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{L}}^{n,n}(\mathbb{F}; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)} / \langle \nu \rangle) \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{L}}^n(\mathbb{F}; \mu_{\langle \nu \rangle}^{\otimes n})$$

は全射である。このことから β はゼロであることがわかる。

ということでこの命題は [19, Thm.5.9, Prop.7.1] に帰着されたわけであるが、これらは [19] の主結果であり、時間的にも枚数的にももう余裕がないので証明は省略します。 \square

Corollary 4.4. [25, Cor.2.13] 標数0の体について $H90(n, l)$ が成り立つとする。 \mathcal{X} を任意の *simplicial smooth variety* とする。

1) $p-1 \leq q \leq n$ のとき

$$H_B^{p,q}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{L}}^{p,q}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)})$$

は同型で、 $p = q+2, q \leq n$ のときは単射になる。

2) $p \leq q \leq n$ のとき

$$H_B^{p,q}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}/\langle \nu \rangle) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{L}}^{p,q}(\mathcal{X}; \mathbb{Z}/\langle \nu \rangle)$$

は同型で、 $p = q+1, q \leq n$ のときは単射になる。

Corollary 4.5. [25, Cor.2.14] 標数0の体について $H90(n, l)$ が成り立つとする。標数0の体の l 次巡回拡大 E/F と $q \leq n$ に対して、

$$K_q^M(E) \xrightarrow{1-\sigma} K_q^M(E) \xrightarrow{\text{Nm}_{E/F}} K_q^M(F)$$

は *exact* になる。

Proof: $q = n$ のときにいえばよい。上の Milnor K 群の列の cohomology を $V(E)$ とおく。Nisnevich sheaf with transfer の complex

$$0 \rightarrow L(E) \rightarrow L(F) \xrightarrow{1-\sigma} L(F) \rightarrow L(E) \rightarrow 0$$

を \mathcal{K}° とおく。ただし、右の $L(E)$ が degree 0 であるとする。明らかに \mathcal{K}° は etale sheaf の complex として exact なので [25, Cor.2.12] により

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{SmCor}(k))}(\mathcal{K}^\circ, \mathbb{Z}_{(\leq)}(\kappa)[\kappa + \mathbb{F}]) = \mathcal{K}$$

であることがわかる。

$$E_1^{i,j} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{SmCor}(k))}(\mathcal{K}^{-}, \mathbb{Z}_{(\leq)}(\kappa)[j]) \Rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{S}\text{-}\widetilde{\mathrm{N}}\square\sim(\mathrm{S}\text{-}\mathrm{C}\times\text{-}\langle\tau\rangle)}(\mathcal{K}^\circ, \mathbb{Z}_{(\leq)}(\kappa)[\square + j])$$

なる spectral sequence を考える。Prop.2.6 より $j > n$ ならば $E_1^{i,j} = 0$ なので、特に $E_2^{2,n} = 0$ であることがわかる。ゆえに $E_1^{1,n} \rightarrow E_1^{2,n} \rightarrow E_1^{3,n}$ は exact であり、これを Milnor K 群の言葉で書き直すと

$$K_n^M(E) \otimes \mathbb{Z}_{(\leq)} \rightarrow \mathbb{K}_\kappa^M(\mathbb{E}) \otimes \mathbb{Z}_{(\leq)} \rightarrow \mathbb{K}_\kappa^M(\mathbb{F}) \otimes \mathbb{Z}_{(\leq)}$$

がでてくる。よって $V(E)$ は高々 l と素な torsion element しか持たないことがわかる。しかし

$$K_n^M(E \otimes_{\mathbb{F}} E) \xrightarrow{1-\sigma} K_n^M(E \otimes_{\mathbb{F}} E) \xrightarrow{\mathrm{Nm}_{E/\mathbb{F}}} K_n^M(E)$$

は明らかに exact なので、transfer の議論により $V(E)$ は l と素な torsion も持たない。したがって $V(E) = 0$ である。□

Proposition 4.6. [25, Prop.2.15] 標数 0 の体について $H90(n, l)$ が成り立つとする。 X を標数 0 の体 k 上の smooth variety、 U をその dense open subset とするとき、

$$H_{Nis}^*(X; K(n+1) \otimes \mathbb{Z}_{(\leq)}) \rightarrow \mathbb{H}_{\mathrm{N}\square\sim}^*(U; \mathbb{K}(\kappa + \mathbb{F}) \otimes \mathbb{Z}_{(\leq)})$$

は同型である。

Proof. $Z = X - U$ とする。 Z を smooth strata に分解して帰納法を使うと、 Z が smooth subvariety の場合に帰着できる。 $c = \mathrm{codim}_X Z$ とすると

$$M_{gm}(Z)(c)[2c-1] \rightarrow M_{gm}(U) \rightarrow M_{gm}(X) \rightarrow M_{gm}(Z)(c)[2c]$$

という $DM_{gm}^{eff}(k)$ の distinguished triangle がある ([23, Prop.3.5.4])。

$$\begin{aligned} H_{Nis}^*(X; K(n+1)) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Shv}_{Nis}(\mathrm{SmCor}(k))}(L(X), K(n+1)) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{DM_{gm}^{eff}(k)}(C_*(L(X)), K(n+1)) \end{aligned}$$

となるから、Thm.2.8 より

$$\mathrm{Hom}(C_*(L(Z))(c)[2c], K(n+1)[*]) = 0$$

を示すことに帰着できる。ところが [25, Lem.2.9] より

$$\mathrm{Hom}(C_*(L(Z))(c)[2c], K(n+1)[*]) = \mathrm{Hom}(C_*(L(Z))(c-1)[2c-1], K(n)[*-1])$$

なので、Prop.4.3 より $\otimes \mathbb{Z}_{(\leq)}$ すると 0 であることがいえる。□

4.3. **Splitting varieties.** $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ を体 k の可逆元からなる列とする。 k 上の smooth variety X が \underline{a} の l -splitting variety であるとは、 $k(X)$ を X の函数体としたとき、 Milnor K 群の元 $\{a_1, \dots, a_n\}$ が $K_n^M(k(X))$ の中で l で割れることをいう。

Theorem 4.7. [25, Thm.2.25] 標数 0 の体について $H90(n-1, l)$ が正しいと仮定する。 任意の体 k とその可逆元からなる任意の列 $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に対して、 次の性質を持つ *splitting variety* $X_{\underline{a}}$ が存在すると仮定する。

- 1) $X_{\underline{a}} \times_k k(X_{\underline{a}})$ は $k(X_{\underline{a}})$ 上 *rational*
 - 2) $H_B^{n+1, n}(\check{C}(X_{\underline{a}}); \mathbb{Z}_{(\leq)}) = \neq$
- このとき、 標数 0 の体について $H90(n, l)$ も正しい。

Proof: まず体 k が、 次数が l と素な有限次拡大体を持たないで、 かつ $K_n^M(k)/l = 0$ のとき、 $H_L^{n+1, n}(k; \mathbb{Z}_{(\leq)}) = \neq$ を示す。 $H_L^{n+1, n}(k; \mathbb{Q}) = \neq$ なので、 Bockstein 準同型

$$H_L^{n, n}(k; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}_{(\leq)}) \rightarrow \mathbb{H}_L^{\kappa+\mu, \kappa}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}_{(\leq)})$$

は全射である。 よって、 $H_{\text{ét}}^n(k; \mathbb{Z}/\leq) = \neq$ を示すことに帰着される。

まず、 任意の有限次拡大 E/k に対して $K_{n+1}^M(E)/l = 0$ であることに注意する ([25, Lem.2.22])。 $\alpha \in H_{\text{ét}}^n(k; \mathbb{Z}/\leq)$ とする。 $\alpha = 0$ を証明すればよいのだが、 今注意したことから l 次巡回拡大 E に対して、 α の $H_{\text{ét}}^n(E; \mathbb{Z}/\leq)$ への引きもどしがゼロだと仮定してよい。 すると $BK(n-1, l)$ が成り立つので、 $\chi_E \in H_{\text{ét}}^1(k; \mathbb{Z}/\leq)$ を拡大 E/k に対応する元とすると、 次の exact sequence があある ([25, Prop.2.17])。

$$H_{\text{ét}}^{n-1}(E; \mathbb{Z}/\leq) \xrightarrow{\text{Nm}_{E/\gamma}} \mathbb{H}_{\approx}^{\kappa-\mu}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/\leq) \xrightarrow{\cup \chi_E} \mathbb{H}_{\approx}^{\kappa}(\mathbb{T}; \mathbb{Z}/\leq) \rightarrow \mathbb{H}_{\approx}^{\kappa}(\mathbb{E}; \mathbb{Z}/\leq)$$

したがってある $\gamma \in H_{\text{ét}}^{n-1}(k; \mathbb{Z}/\leq)$ を用いて $\alpha = \gamma \cup \chi_E$ と表される。 条件 $BK(n-1, l)$ より γ は $K_{n-1}^M(k)/l$ の norm residue morphism の像として書けるので、 α も同じく norm residue morphism の像として書ける。 ところが $K_n^M(k)/l = 0$ なので、 $\alpha = 0$ になる。

次に、 もし任意の体 k と任意の $x \in K_n^M(k)$ に対して以下の条件を満たす有限生成拡大体 K があれば、 $H90(n, l)$ が成り立つことをいう。 その条件とは、 x の $K_n^M(K)$ での像が l で割れることと、 自然な準同型

$$H_L^{n+1, n}(k; \mathbb{Z}_{(\leq)}) \rightarrow \mathbb{H}_L^{\kappa+\mu, \kappa}(\mathbb{K}; \mathbb{Z}_{(\leq)})$$

が単射になることである。 \tilde{k} を k を含む代数閉体でその超越次元が無限のものとする。 ゼロでない $\alpha \in H_L^{n+1, n}(k; \mathbb{Z}_{(\leq)})$ をとる。 E を \tilde{k} の部分体で、 α の $H_L^{n+1, n}(E; \mathbb{Z}_{(\leq)})$ への引き戻し α_E がゼロでないようなものの中で極大なものとする。 もし $K_n^M(E)/l = 0$ ならば、 先に示したことから $H_L^{n+1, n}(E; \mathbb{Z}_{(\leq)}) = \neq$ となるので、 $K_n^M(E)/l \neq 0$ になる。 ゼロでない $x \in K_n^M(E)/l$ をとって、 上の条件を満たす拡大体を \tilde{k} に含まれるようにとる。 すると、 α_K はゼロでなくて、 x の $K_n^M(K)/l$ への引き戻しはゼロなので $E \neq K$ となり、 E の極大性に反する。 よって α はゼロである。

任意の $x \in K_n^M(k)$ は symbol の和で書けるので、 $x = \{a_1, \dots, a_n\}$ のときに上の条件を満たす拡大体 K を見つければ、 定理は証明される。

$$H_L^{n+1, n}(k; \mathbb{Z}_{(\leq)}) \rightarrow \mathbb{H}_L^{\kappa+\mu, \kappa}(\mathbb{T}(X_{\underline{a}}); \mathbb{Z}_{(\leq)})$$

が単射であることを示せばよい。

u を上の準同型の kernel の元とする。Lem.4.8 より次の同型がある。

$$\begin{aligned} H_L^{n+1,n}(k; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) &\simeq H_L^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}); \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) \\ &\simeq H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); \mathbf{R}\pi_* \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}(\kappa)) \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{N}\square\sim}^{\kappa+\#\kappa}(\check{C}(X_{\underline{a}}); \mathbb{L}(\kappa)) \end{aligned}$$

この同型をとうして u を $H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); L(n))$ の元と見なす。2) の条件から

$$H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); L(n)) \rightarrow H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); K(n))$$

は単射なので、結局

$$\begin{aligned} H_L^{n+1,n}(k; \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) &\rightarrow H_L^{n+1,n}(\check{C}(X_{\underline{a}}); \mathbb{Z}_{(\leftarrow)}) \\ &\rightarrow H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); L(n)) \rightarrow H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); K(n)) \end{aligned}$$

が単射になる。この写像による u の像がゼロであることをいえばよい。

u は \ker の元だったので、ある $X_{\underline{a}}$ の開集合 U があって、 u の U への引き戻しがゼロになる。Prop.4.6 より、 u の $X_{\underline{a}}$ への引き戻しがゼロになる。 $X_{\underline{a}}$ は $k(X_{\underline{a}})$ 上 rational なので、 $X_{\underline{a}}$ の generic point を含む $(X_{\underline{a}})^s$ の開集合 V と $X_{\underline{a}} \times \{0\}$ の generic point を含む $X_{\underline{a}} \times \mathbb{A}^N$ の開集合 W があって、 $(U, U \cap X_{\underline{a}})$ は $(W, W \cap X_{\underline{a}} \times \{0\})$ と同型になる。再び Prop.4.6 より、

$$\begin{aligned} H_{Nis}^p((X_{\underline{a}})^i; K(n)) &\simeq H_{Nis}^p(U; K(n)) \\ &\simeq H_{Nis}^p(W; K(n)) \simeq H_{Nis}^p(X_{\underline{a}} \times \mathbb{A}^N; \mathbb{K}(\kappa)) \simeq \mathbb{H}_{\mathbb{N}\square\sim}^1(X_{\underline{a}}; \mathbb{K}(\kappa)) \end{aligned}$$

このことから、次の spectral sequence

$$E_1^{p,q} = H_{Nis}^p((X_{\underline{a}})^{q+1}; K(n)) \Rightarrow H_{Nis}^{p+q}(\check{C}(X_{\underline{a}}); K(n))$$

において $q \neq 0$ ならば $E_2^{q,p} = 0$ になる。ゆえに

$$H_{Nis}^{n+1}(\check{C}(X_{\underline{a}}); K(n)) \simeq H_{Nis}^{n+1}(X_{\underline{a}}; K(n))$$

が成り立つ。これで、 $u = 0$ であることがいえた。 \square

Lemma 4.8. [25, Prop.2.7] 任意の p, q について

$$H_L^{p,q}(k; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}_L^p(\check{C}(\mathbb{X}); \mathbb{Z})$$

は同型になる。

Proof. k -variety X に対し $\mathbb{Z}_{\sim}(\mathbb{X})$ を X で表現されるアーベル群に値を持つ etale sheaf とする。このとき明らかに

$$\mathbb{Z}_{\sim}(\check{C}(\mathbb{X})) \rightarrow \mathbb{Z}_{\sim}(\mathbb{1})$$

は同型になるので、命題が正しいことがわかる。 \square

4.4. Pfister quadrics and their motives. 今までの議論によって Bloch-Kato 予想は Thm.4.7 の条件を満たす l -splitting variety を見つけることに帰着された。 $l = 2$ のときは、Pfister form に付随する 2 次超曲面 $Q_{\underline{a}}$ がそれにあたることを示す。これ以降は $H^{p,q}(X; \mathbb{Z}) = \mathbb{H}_{\mathbb{B}}^p(\mathbb{X}; \mathbb{Z})$ と表すことにする。この章では、体 k の標数は 2 でないとする。

k^\times の元の列 $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に対し、 $\langle a_1, \dots, a_n \rangle$ を $\sum a_i x_i^2$ で与えられる 2 次形式とする。

$$\begin{aligned} \ll a_1, \dots, a_n \gg &= \langle 1, -a_1 \rangle \otimes \cdots \otimes \langle 1, -a_n \rangle \\ &= x_0^2 - a_1 x_1^2 - \cdots - a_n x_n^2 + a_1 a_2 x_{1,2}^2 + \cdots + a_{n-1} a_n x_{n-1,n}^2 \\ &\quad - \cdots + (-1)^n a_1 \cdots a_n x_{1,2,\dots,n}^2 \end{aligned}$$

与えられる 2 次形式を Pfister form という。 $Q_{\underline{a}}$ を $\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg = a_n t^2$ で定義される $2^{n-1} - 1$ 次元の 2 次曲面とする。

Proposition 4.9. [25, Prop.4.2] 任意の \underline{a} に対し、 $Q_{\underline{a}}$ は \underline{a} の 2-splitting variety。

Proof: ここでは、Proposition よりも強い次の主張を n に関する帰納法で証明する。 $Q_{\underline{a}}$ が k -有理点を持てば、 \underline{a} は $K_n^M(k)$ の中で 2 で割れる。 $Q_{\underline{a}}$ は $k(Q_{\underline{a}})$ -有理点を持つので、このことから上の命題が示される。

まず $n = 2$ のときを考える。このとき、 $Q_{\underline{a}}$ は $x^2 - a_1 y^2 = a_2 z^2$ で定義される 2 次曲線である。もし $Q_{\underline{a}}$ が $[x_0 : y_0 : 0]$ なる有理点を持てば、 $\sqrt{a_1} \in k$ だから \underline{a} は 2 で割れる。もし $Q_{\underline{a}}$ が $[x_0 : y_0 : 1]$ なる有理点を持てば、 $x_0 - a_1 y_0^2 = a_2$ だから、 $\alpha = x_0 + \sqrt{a_1} y_0$ とおくと $a_2 = \text{Nm}_{k(\sqrt{a_1})/k}(\alpha)$ となる。ゆえに

$$\{a_1, a_2\} = \text{Nm}_{k(\sqrt{a_1})/k}(\{a_1, \alpha\}) = 2 \text{Nm}_{k(\sqrt{a_1})/k}(\{\sqrt{a_1}, \alpha\})$$

より 2 で割れる。

次に一般の n について証明する。もし $Q_{\underline{a}}$ が $t = 0$ なる超平面上に有理点を持つとすると、Pfister quadratic form $\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg$ は 0 を値に持つので、 $\ll a_1, \dots, a_{n-2} \gg = a_{n-1} s^2$ なる 2 次形式も 0 を値に持つ ([25, Lem.4.3])。帰納法の仮定より $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ は 2 で割れるから、 $\{a_1, \dots, a_n\}$ も 2 で割れる。

$Q_{\underline{a}}$ が $t \neq 0$ なる有理点 q を持つとする。 L を $(1, 0, \dots, 0)$ と q で張られる 2 次元部分空間とすると、ある $b \in k^\times$ があって $\ll a_1, \dots, a_{n-1} \gg|_L = \ll b \gg$ となる。また [25, Lem.4.3] より、 $\ll a_1, \dots, a_{n-2} \gg = a_{n-1} s^2$ は $k(\sqrt{b})$ で 0 を値に持つ。ゆえに帰納法の仮定より $\{a_1, \dots, a_{n-1}\}$ は $K_{n-1}^M(k(\sqrt{b}))$ の中で 2 で割れる。また、 $\ll b \gg$ は a_n を値に持つことから、 $a_n \in \text{Nm}_{k(\sqrt{b})/k}(k(\sqrt{b})^\times)$ であることがいえる。よって $n = 2$ のときと同様にして $\{a_1, \dots, a_n\}$ が 2 で割れることがいえる。 \square

Proposition 4.10. [25, Thm.4.4] $n > 1$ のとき、 $DM_{gm}^{eff}(k)$ の中で次の distinguished triangle があある。

$$M_{gm}(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(2^{n-1} - 1)[2^n - 2] \rightarrow M_{\underline{a}} \rightarrow M_{gm}(\check{C}(Q_{\underline{a}})) \rightarrow M_{gm}(\check{C}(Q_{\underline{a}}))(2^{n-1} - 1)[2^n - 1]$$

ただし、 $M_{\underline{a}}$ は $M_{gm}(Q_{\underline{a}})$ のある直和因子である。

Proof: これは本質的には、 $Q_{\underline{a}}$ の Chow motif に関する Rost の結果 ([15], [25, Thm.4.5]) から導かれる。 $DM_{gm}^{eff}(k)$ の性質も少し使うのだが、それほど難しい証明でもないので証明は原論文を見て下さい。 \square

Proposition 4.11. [25, Cor.4.9] 任意の $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に対して、

$$H^{2^n - 1, 2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) = \neq$$

Proof. Prop.4.10 より

$$\begin{aligned} H^{0,1}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) &\rightarrow H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) \\ &\rightarrow H^{2^n-1, 2^{n-1}}(M_{\underline{a}}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}^{\mu, \mu}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

は exact である。\$H^{0,1}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) = \mathcal{K}\$ だから

$$H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{H}^{\mu, \mu}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) \hookrightarrow \mathbb{H}^{\mu, \mu}(\mathbb{Q}_{\underline{a}}; \mathbb{Z})$$

は単射である。\$\bar{k}\$ を \$k\$ の代数的閉包とすると、Lem.3.1 より \$H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}) \times \text{Spec } \bar{k}; \mathbb{Z}) = \mathcal{K}\$ となる。だから以下の可換図式

$$\begin{array}{ccc} H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\mathbb{Q}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\check{C}(Q_{\underline{a}}) \times \text{Spec } \bar{k}; \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\mathbb{Q}_{\underline{a}} \times \text{Spec } \bar{k}; \mathbb{Z}) \end{array}$$

より、右の縦の写像が単射であることをいえばよい。それは Prop.4.12 からいえる。

Proposition 4.12. [25, Thm.4.8] \$\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)\$ に対し、自然な単射

$$H^{2^n-1, 2^{n-1}}(\mathbb{Q}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}^{\times}$$

がある。

Proof. Prop.4.1 の同型を sheaf 化することにより \$\mathcal{H}(\mathbb{Z}(\kappa)) \simeq \mathcal{K}^M\$ が得られる。(この同型を示すときも pretheory の一般論を用いる。) この同型から任意の次元 \$d\$ の smooth variety \$X\$ に対して

$$\begin{aligned} H_B^{2d-1, d}(X; \mathbb{Z}) &= H_{Nis}^{2d-1}(X; \mathbb{Z}()) \\ &\simeq H_{Zar}^{d-1}(X; \mathcal{H}^1(\mathbb{Z}())) \\ &\simeq \text{cok} \left(\bigoplus_{y \in X^{(d-1)}} K_2(k(y)) \rightarrow \bigoplus_{x \in X^{(d)}} K_1(k(x)) \right) \end{aligned}$$

がいえる。ここで記号の説明をすると、\$X^{(i)}\$ はその点の閉包の余次元が \$i\$ になる \$X\$ の点の集合、\$k(x)\$ は \$x\$ の residue field である。Rost の論文 [15] に従ってこの群を \$A_0(X, K_1)\$ と表す。すると \$x \in X^{(d)}\$ に対する residue field は \$k\$ 上有限なので、\$K_1(k(x))\$ から \$K_1(k) \simeq k^{\times}\$ へ norm をとる写像が作れる。それをすべての \$X^{(d)}\$ の点についてよせ集めて

$$N : A_0(X, K_1) \rightarrow k^{\times}$$

ができる。\$X = Q_{\underline{a}}\$ のとき \$N\$ が単射であることをこれから示す。

\$X_{\underline{a}}\$ を Pfister quadric、つまり \$\ll a_1, \dots, a_n \gg = 0\$ で定義される 2 次超曲面とする。\$A_0(X; K_1)\$ が \$X\$ の birational invariant であることと、\$A_0(X \times \mathbb{P}^n; \mathbb{K}_{\mu}) \simeq A_{\mu}(X; \mathbb{K}_{\mu})\$ であることから、\$A_0(Q_{\underline{a}}; \mathbb{K}_{\infty}) \simeq A_{\mu}(X_{\underline{a}}; \mathbb{K}_{\infty})\$ が成り立つ。

\$n = 2\$ のときは \$Q_{\underline{a}}\$ は 2 次曲線なので、[16, Prop.1.2] より正しい。\$\phi = \ll a_1, \dots, a_n \gg\$ とする。もし \$\phi\$ が isotropic (\$\phi(v) = 0\$ を満たす \$v \in k^N\$ が存在する) とすると、\$\phi\$ は hyperbolic form に同型である ([7, Cor.1.6])。このときは \$A_0(X_{\underline{a}}; K_1) \simeq k^{\times}\$ となることが直接計算して確かめられる。そうでない \$\phi\$ については \$N\$ の splitting \$\sigma : k^{\times} \rightarrow A_0(X_{\underline{a}}; K_1)\$ を作ってそれが全射で

あることを見ればよいのだが、それは簡単な議論から $n = 2$ のときに帰着できる。B.Kahn の survey [5] にはより詳しく書いてあるので、そちらを見て下さい。□

4.5. Completion of the proof. この章では、最後に残った Thm.4.9 の条件 2) を $Q_{\underline{a}}$ が満たしていることを示す。 k は複素数体の部分体とする。

Proposition 4.13. [25, Prop.4.10] 任意の列 $\underline{a} = (a_1, \dots, a_n)$ に対して、

$$H^{n+1,n}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}/\mathbb{F}) = \mathbb{F}$$

が成り立つ。

Proof. $\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}$ を次の distinguished triangle で定義する。

$$\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}} \rightarrow \Sigma_T^\infty(\check{C}(Q_{\underline{a}}))_+ \rightarrow S^0 \rightarrow \tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}[1]$$

$p > q$ のとき $H^{p,q}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}/\mathbb{F}) \simeq \tilde{H}^{p,q}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F})$ なので、 $\tilde{H}^{n,n+1}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F}) = \mathbb{F}$ をいえばよい。 E を $Q_{\underline{a}}(E)$ が空でない k の 2 次拡大とすると、Lem.3.1 より $\check{C}(Q_{\underline{a}} \times \text{Spec } E)$ は可縮になるので、transfer の議論から $H^{n,n+1}(\check{C}(Q_{\underline{a}}); \mathbb{Z}/\mathbb{F})$ は高々 exponent が 2 である。したがって、 $\tilde{H}^{n+1,n}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F}) \rightarrow \tilde{H}^{k+k, k}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F})$ の像がゼロであることをいえばよい。 u をその像の元とすると $\beta(u) = 0$ より $Q_1(u) = \beta q_1(u)$ となるので $Q_1(u)$ も \mathbb{Z}/\mathbb{F} 係数の cohomology からくることがわかる。このようにして $Q_{n-2}Q_{n-3} \cdots Q_1(u) \in H^{2^{n-1}, 2^{n-1}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F})$ もまた $Q_1(u)$ も \mathbb{Z}/\mathbb{F} 係数の cohomology からくることがわかる。ところが $H^{2^{n-1}, 2^{n-1}}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F})$ はゼロなので、 $Q_{n-2}Q_{n-3} \cdots Q_1(u) = 0$ であることがわかる。

もし $1 \leq i \leq n-2$ のとき $I_{Q_{\underline{a}}}$ が $(\nu_i, 2)$ -element を持つとすると、Thm.3.14 より

$$\tilde{H}^{n-i-1, n-i}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F}) \xrightarrow{\mathbb{Q}} \tilde{H}^{k-\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor + k, k-\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F}) \xrightarrow{\mathbb{Q}} \tilde{H}^{k-\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor + k, k-\lfloor \frac{n-i}{2} \rfloor}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F})$$

は exact になる。 $\tilde{H}^{n-i-1, n-i}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F}) = \mathbb{F}$ なので、

$$\tilde{H}^{n-i+2^{i+1}-2, n-i+2^{i+1}-1}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F}) \xrightarrow{\mathbb{Q}} \tilde{H}^{k-\lfloor \frac{n-i+2^{i+1}-1}{2} \rfloor + k, k-\lfloor \frac{n-i+2^{i+1}-1}{2} \rfloor}(\tilde{\mathcal{X}}_{\underline{a}}; \mathbb{Z}/\mathbb{F})$$

は単射になる。よって $Q_{n-2}Q_{n-3} \cdots Q_1$ も単射なので $u = 0$ がいえる。このことから定理は次の補題から導かれることがわかる。

Lemma 4.14. [25, Lem.4.11] $1 \leq i \leq n-2$ を満たす任意の i について、 $I_{Q_{\underline{a}}}$ は $(\nu_i, 2)$ -element を含む。

Proof. $I_{Q_{\underline{a}}}$ は $Q_{\underline{a}}$ の部分多様体の cobordism class を含むので、 Q を $\mathbb{C}P^{k^2}$ に含まれる 2 次超曲面としたとき、 Q のきめる cobordism class $[Q] \in MU_{2i+1-2}$ が $(\nu_i, 2)$ -element になることを示せばよい。

$j: Q \rightarrow \mathbb{C}P^{k^2}$ を埋め込みとすると

$$0 \rightarrow T_Q \rightarrow j^*(T_{\mathbb{C}P^{k^2}}) \rightarrow j^*(\mathcal{O}(\epsilon)) \rightarrow 1$$

なる exact sequence がある。よって任意の $z \in H^*(BU; \mathbb{Z})$ に対して定義される characteristic number は

$$z[Q] = \langle z(T_Q), [Q] \rangle_Q = \langle z(T_{\mathbb{C}P^{k^2}} - \mathcal{O}(\epsilon)), [Q] \rangle_{\mathbb{C}P^{k^2}}$$

となる。ここで $\langle \ , \ \rangle$ はホモロジーとコホモロジーの pairing を表す。 $[Q] \in H_{2^{i+1}-2}(\mathbb{C}P^{2^i}; \mathbb{Z})$ は超平面の class の 2 倍なので、 $z[Q]$ は 2 で割れる。また $z = s$ のとき、

$$s[Q] = \langle s_{2^i-1}(T_{\mathbb{C}P^{2^i}}) - s_{2^i-1}(\mathcal{O}(\epsilon)), [Q] \rangle_{\mathbb{C}P^{2^i}}$$

である。 $T_{\mathbb{C}P^{2^i}}$ は $(2^i + 1)\mathcal{O}(\infty)$ と stable equivalence なので、簡単な計算により

$$s_{2^i-1}(T_{\mathbb{C}P^{2^i}}) - s_{2^i-1}(\mathcal{O}(\epsilon)) = (\epsilon^1 + \infty - \epsilon^1 - \infty) \rfloor_{\infty} (\mathcal{O}(\infty))^{\epsilon^1 - \infty}$$

であることがわかる。 $c_1(\mathcal{O}(\infty))^{\epsilon^1 - \infty}$ は $H^{2^{i+1}-2}(\mathbb{C}P^{2^i}; \mathbb{Z})$ の生成元だから $s[Q] = 2(2^i + 1 - 2^{2^i-1})$ なので 4 で割れない。よって $[Q] \in MU_*$ が $(\nu_i, 2)$ -element であることがいえた。 \square

REFERENCES

- [1] Beilinson, A., Height pairing between algebraic cycles, *Contemp. Math.*, **67** (1987) 1–24.
- [2] Bloch, S. and Kato, K., p -adic étale cohomology, *Publ. Math. I.H.E.S.*, **63** (1986) 107–152.
- [3] Friedlander, E., Motivic complexes of Suslin and Voevodsky, Séminaire Bourbaki 833.
- [4] Friedlander, E. and Voevodsky, V., Bivariant cyclic homology, preprint.
- [5] Kahn, B., La conjecture de Milnor (d'après V.Voevodsky), Séminaire Bourbaki 834.
- [6] Kato, K., A generalization of local class field theory by using K -groups II, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **27** (1980) 603–683.
- [7] Lam, T. Y., *The algebraic theory of quadratic forms*, W. A. Benjamin, Inc., 1973.
- [8] Levine, M., Homology of algebraic varieties: An introduction to the works of Suslin and Voevodsky, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **34** (1997) 293–312.
- [9] Lichtenbaum, S., Values of Zeta-functions at non-negative integers, in *Number theory, Noordwijkerhout 1983* (Lecture Note in Math. vol.1068), ed. Jager, H., Springer-Verlag, New York, 1984, pp.127–138.
- [10] Merkurjev, A. and Suslin, A., K -cohomology of Severi-Brauer varieties and the norm residue homomorphism, *Math. USSR Izv.*, **21** (1983) 307–340.
- [11] Milnor, J., Algebraic K -theory and quadratic forms, *Invent. Math.*, **9** (1970) 318–344.
- [12] Morel, F. and Voevodsky, V., A^h -homotopy theory of schemes, preprint.
- [13] Nisnevich, Y., The completely decomposed topology on schemes and associated descent spectral sequences in algebraic K -theory, in *Algebraic K-theory: connections with geometry and topology*, eds. Jardine, J. and Snaithe, V., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1989, pp.241–342.
- [14] Rost, M., On the spinor norm and $A_0(X; \mathcal{K}_{\infty})$ for quadrics, preprint.
- [15] Rost, M., Some new results on the Chow groups of quadrics, preprint.
- [16] Suslin, A., Torsion in K_2 of fields, *K-Theory*, **1** (1987) 5–29.
- [17] Suslin, A. and Voevodsky, V., Singular homology of abstract algebraic varieties, *Invent. Math.*, **123** (1996), 61–94.
- [18] Suslin, A. and Voevodsky, V., Relative cycles and Chow sheaves, preprint.
- [19] Suslin, A. and Voevodsky, V., Bloch-Kato conjecture and motivic cohomology with finite coefficient, preprint.
- [20] Tate, J., Relations between K_2 and galois cohomology, *Invent. Math.*, **36** (1976) 257–274.
- [21] Voevodsky, V., Homology of schemes I, preprint.
- [22] Voevodsky, V., Homology of schemes II, preprint.
- [23] Voevodsky, V., Triangulated categories of motives over a field, preprint.
- [24] Voevodsky, V., Bloch-Kato conjecture for \mathbb{Z}/ℓ -coefficients and algebraic Morava K -theories, preprint.
- [25] Voevodsky, V., The Milnor conjecture, preprint.

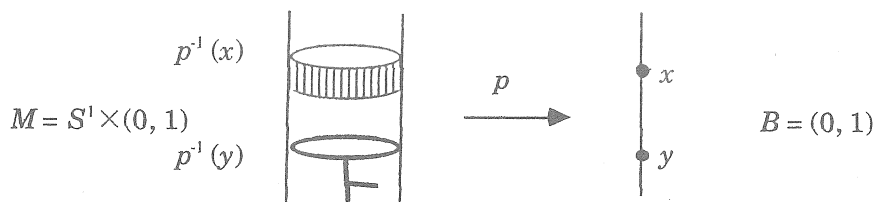
MAPS ON $(n + 2)$ -MANIFOLDS WHOSE FIBERS HAVE THE HOMOTOPY TYPE OF SOME CLOSED n -MANIFOLDS

知念 直紹 (筑波大学 ベンチャー・ビジネス・ラボラトリー)

1. 序

すべての空間は連結な距離空間でANRとし、すべての写像は proper (i.e. コンパクトの逆像はコンパクト) とする。さらに manifold は断わらない限り境界はないとする。ここで Hurewicz fibration の定義を思い出してほしい。写像 $p : M \rightarrow B$ が Hurewicz fibration であるとは、任意の写像 $\mu : X \rightarrow M$ と $\Psi : X \times [0, 1] \rightarrow B$ で $\Psi_0 = p \circ \mu$ を満たすものに対して、写像 $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow M$ が存在して $\Phi_0 = \mu$ 、 $p \circ \Phi = \Psi$ を満たしている。このとき、写像 p の各ファイバーはホモトピー同値であることが知られている。そこで次のような問題を考えよう。

問題1.1. M を $(n + k)$ -manifold、 N を closed n -manifold、写像 $p : M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。どのようなとき写像 p は Hurewicz fibration になるか？



しかしあるファイバーが内点を持てば、写像 p は Hurewicz fibration にならない(上図を参照)。そこで次のような定義を導入する。

定義1.2 [CD1]. 写像 $p : M \rightarrow B$ が approximate fibration であるとは、任意の写像 $\mu : X \rightarrow M$ と $\Psi : X \times [0, 1] \rightarrow B$ で $\Psi_0 = p \circ \mu$ を満たすものに対して、写像 $\Phi : X \times [0, 1] \rightarrow M$ が存在して $\Phi_0 = \mu$ 、 $p \circ \Phi = \Psi$ と Ψ は十分近い (i.e. 任意の open cover α に対して、 $p \circ \Phi$ と Ψ が α -near になるような写像 Φ が存在する。) ときにいう。

approximate fibration p の各ファイバーはホモトピー同値であることが知られている(各ファイバーもANRを仮定している)。さらに p の各ファイバーは内点を持っていてもいいので、上の問題をつぎのように変えることが最適と思われる。

問題 1.3. M を $(n+k)$ -manifold、 N を closed n -manifold、写像 $p: M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。どのようなとき写像 p は approximate fibration になるか？

Coram と Duvall [CD2] によって次のことが知られている。写像 $p: M \rightarrow B$ が approximate fibration であるための必要十分条件は各 $b \in B$ に対して、 b の近傍 U と retraction $R: p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(b)$ が存在して、各 $b' \in U$ と自然数 n に対して $(R|_{p^{-1}(b')})_{\#}: \pi_n(p^{-1}(b')) \rightarrow \pi_n(p^{-1}(b))$ が同型になることである。

今回は $k=2$ のときを考えることにしよう。写像 p の各ファイバー $p^{-1}(b)$ が S^1 ($n=1$) のとき、 M はザイフェルト多様体と思ってよいから、写像 p は approximate fibration にならない場合もある。次に $n=2$ について考える。前のことからトーラスあるいはクラインボトルのときは写像 p は approximate fibration にならない場合もある。 N がトーラスとクラインボトル以外の closed 2-manifold の場合は、どのような manifold M に対しても写像 p は approximate fibration になることが、Daverman [D1] によって証明された。そこで次のような定義を導入しよう。

定義 1.4. N を closed n -manifold とする。 N が codimension 2 fibrator であるとは、すべての $(n+2)$ -manifold M からの写像 $p: M \rightarrow B$ で各ファイバー $p^{-1}(b)$ が N とホモトピー同値であるものに対して、写像 p が approximate fibration になるときにいう。

よって、この言葉をつかえば、トーラスとクラインボトル以外の closed 2-manifold は codimension 2 fibrator になる。さらに Daverman [D1] は、すべての単連結な closed manifold と射影空間は codimension 2 fibrator になることを示した。すると自然に次の問題が考えられる。

問題 1.5[D1]. すべての有限基本群をもつ closed manifold は codimension 2 fibrator か？

特に有限基本群を持つ代表的な closed manifold はレンズ空間なので、

問題 1.6[D3]. すべてのレンズ空間は codimension 2 fibrator か？

本講演では上の問題について述べたいと思います。

2. 準備

M を $(n+k)$ -manifold、 N を closed n -manifold、写像 $p: M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。 B の部分空間を定義しよう。

$C_p = \{b \in B : b \text{ の近傍 } U \text{ と retraction } R: p^{-1}(U) \rightarrow p^{-1}(b) \text{ が存在して、各 } b' \in U$

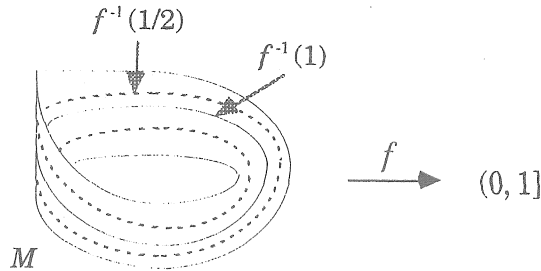
に対して $(R|p^{-1}(b'))_* : H_n(p^{-1}(b') : \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_n(p^{-1}(b) : \mathbb{Z}_2)$ が同型になる。}

もちろん写像 $p : M \rightarrow B$ が approximate fibration ならば、 $C_p' = B$ 。

定理 2.1[D1]. M を $(n+2)$ -manifold、 N を closed n -manifold、写像 $p : M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。このとき B は 2-manifold ($\partial B \neq \emptyset$ かもしれない)、 $C_p' \subset \text{Int } B$ で $D_p' = \text{Int } B \setminus C_p'$ は locally finite in B である。

$k=1$ の場合は B が 1-manifold ($\partial B \neq \emptyset$ かもしれない)になることが知られている [D8]。

例 2.2. 簡単な例を二つほどあげる。 $q : S^1 \rightarrow S^1$ を 2-1 被覆とし、 M を q の open mapping cylinder する。すると自然に M から $(0, 1]$ への写像 f が得られる。



写像 f と $(0,1)$ の恒等写像との積写像 $p : M \times (0,1) \rightarrow (0,1] \times (0,1)$ とすると、 p のファイバーは S^1 になっていて $\partial(0,1] \times (0,1) \neq \emptyset$ 。さらに写像 p は approximate fibration になっていない。

写像 $g : S^k \times S^k \rightarrow S^k \times S^k$ とする。 $\text{proj} : S^k \times S^k \rightarrow S^k$ を射影とする。写像 $g' : S^{2k+1} \rightarrow S^{k+1}$ を次のように定義する。

$$g' : S^{2k+1} = \Sigma(S^k \times S^k) \xrightarrow{\Sigma(g)} \Sigma(S^k \times S^k) \xrightarrow{\Sigma(\text{proj})} \Sigma(S^k) = S^{k+1}$$

ここで Σ は懸垂とする。 g' のファイバーは S^1 になっていて、 $k=1$ のとき g が (p, q) 型とすると像 S^2 の極点の $g_{p,q} = g'$ のファイバーは (p, q) 型の特異ファイバーになっている。またファイバーが S^1 とホモトピー同値な任意の S^3 から S^2 への写像 p' に対して、 $D_{p'}$ は二点以下になり、 p' はある $g_{p,q}$ に近似できることが知られている [CD3]。

一般に写像 p が approximate fibration あることを示すためには、次の Steps を示す必要がある。

Step 1. $p|_{p^{-1}(C_p')} : p^{-1}(C_p') \rightarrow C_p'$ は approximate fibration になること示す。

Step 2. $C_p' = B$ になることを示す。すなわち $\partial B = \emptyset$ と $D_p' = \emptyset$ を示す。

3.いくつかの結果

N を closed n -manifold とする。次の条件を考える。

(*) すべての同型 $f_* : H_n(N; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_n(N; \mathbf{Z}_2)$ を導く写像 $f : N \rightarrow N$ は、同型 $f_\# : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(N)$ を導く。

補題 3.1 [C1]. M を $(n+2)$ -manifold、 N を有限基本群を持つ closed n -manifold、写像 $p : M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。もし N が条件(*) を満たすならば、 $p \mid p^{-1}(C_p') : p^{-1}(C_p') \rightarrow C_p'$ は approximate fibration になる (**Step1** を満たす)。

もちろんほとんどの closed manifold は条件(*) を満たさない。たとえば、奇数位数基本群をもつレンズ空間は条件(*) を満たさない。条件(*) を満たす closed manifold をさがすことが問題になる。

補題 3.2 [C1]. N を closed n -manifold、同型 $f_* : H_n(N; \mathbf{Z}_2) \rightarrow H_n(N; \mathbf{Z}_2)$ を導く写像 $f : N \rightarrow N$ とする。もし N のオイラー数が 0 でなければ、 $f_\# : \pi_1(N) \rightarrow \pi_1(N)$ は全射になる。

よって有限基本群をもつ closed manifold でオイラー数が 0 でなければ、条件(*) を満たすので、**Step1** を満たす。この manifold が **Step2** を満たすことを示すことによって次の定理を証明することができる。

定理 3.3 [C1]. N を有限基本群をもつ closed manifold とする。もし N のオイラー数が 0 でなければ、 N は codimension 2 fibrator である。

次にオイラー数が 0 の場合でも考えたいので、基本群に制限を加えて条件(*) を満たすようにしたい。群 G の位数が 2 のべき乗となるとき、群 G を **2-群** という。 N を closed n -manifold で基本群が 2-群ならば、 N が条件(*) を満たすことがわかり、さらにつぎの補題が示せた。

補題 3.4 [C3]. M を $(n+2)$ -manifold、 N を closed n -manifold、写像 $p : M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。もし N の基本群が 2-群ならば、 $p \mid p^{-1}(C_p') : p^{-1}(C_p') \rightarrow C_p'$ は approximate fibration になり (**Step1** を満たす)、 $\partial B = \emptyset$ となる。

定理 3.5 [C3]. N を closed manifold とする。もし N の基本群が $\mathbf{Z}_{2^r} \times \mathbf{Z}_{2^r} \times \cdots \times \mathbf{Z}_{2^r}$ と同型ならば、 N は codimension 2 fibrator である。

系 3.6. N をレンズ空間とする。もし N の基本群の位数が2のべき乗ならば、 N は codimension 2 fibration となる。

補題3.4 から、自然に次の問題が考えられる。

問題 3.7 [C3]. もし closed manifold N の有限基本群が2-群ならば、 N は codimension 2 fibration か？

[C3]と同じときに Daverman によって下の残念な結果が得られた。

定理 3.8 [D5]. $L_{p,q}$ を (p,q) 型の3次元レンズ空間とする。もし p が奇数ならば、 $L_{p,q} \times S^1$ は codimension 2 fibration ではない。

この結果は問題1.5の反例になっている。しかし、奇数位数基本群を持つ3次元レンズ空間が codimension 2 fibration かどうかまだわかっていない。また彼は非常に興味深い結果を示した。

定理 3.9 [D5]. ある次元のレンズ空間で基本群の位数が奇数を持ち、codimension 2 fibration となるものが存在する。

$n \geq k \geq 1$ のとき、 S^{n+k} から有限次元空間への写像でファイバーが S^n とホモトピー同値なものは存在しないことが知られている [DW3]。最後に codimension 2 fibration を使って、次の定理が導かれる。

定理 3.10. N^n が有限基本群を持つ codimension 2 fibration とする。 M を $(n+2)$ -manifold、写像 $p : M \rightarrow B$ の各ファイバー $p^{-1}(b)$ は N とホモトピー同値であるとする。このとき M は $(n+2)$ 次元球面あるいはユークリッド空間と同相にならない。

REFERENCES

- [C1] N. Chinen, *Manifolds with nonzero Euler characteristic and codimension 2 fibrations*, to appear.
- [C2] N. Chinen, *Products of manifolds with nonzero Euler characteristic and codimension-2 fibrations*, submitted.
- [C3] N. Chinen, *Finte groups and approximate fibrations*, submitted.
- [Co] M. M. Cohen, *A course in simple-homotopy theory*, Springer-Verlag, New York, 1970.
- [CD1] D. Coram and P. Duvall, *Approximate fibrations*, Rocky Mountain J. Math. 7 (1977), 275-288.

- [CD2] D. Coram and P. Duvall, *Approximate fibrations and a movability condition for maps*, Pacific J. Math. **72** (1977), 41-56.
- [CD3] D. Coram and P. Duvall, *Mappings from S^3 to S^2 whose point inverses have the shape of a circle*, Gen. Topology Appl. **10** (1979), 239-246.
- [D1] R.J. Daverman, *Submanifold decompositions that induce approximate fibrations*, Topology Appl. **33** (1989), 173-184.
- [D2] R.J. Daverman, *Manifolds with finite first homology as codimension 2 fibrators*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991), 471-477.
- [D3] R.J. Daverman, *3-manifolds with geometric structure and approximate fibrations*, Indiana University Math. J. **40** (1991), 1451-1469.
- [D4] R.J. Daverman, *Hyperhopfian and approximate fibrations*, Compositio Math. **86** (1993), 159-176.
- [D5] R.J. Daverman, *Codimension 2 nonfibrators with finite fundamental groups*, preprint.
- [D6] R.J. Daverman, *Decompositions into codimension two manifolds : The Nonorientable case*, Topology Appl. **24** (1986) 71-81.
- [D7] R.J. Daverman, *Decompositions of manifolds*, Academic Press, Orlando, FL., 1986.
- [D8] R.J. Daverman, *Decompositions into codimension one manifolds*, Compositio Math. **55** (1985), 185-207.
- [DH] R.J. Daverman and L.S. Husch, *Decompositions and approximate fibrations*, Michigan Math. J. **31** (1984), 197-214.
- [DW1] R.J. Daverman and J.J. Walsh, *Decompositions into codimension two spheres and approximate fibrations*, Topology Appl. **19** (1985) 103-121.
- [DW2] R.J. Daverman and J.J. Walsh, *Decompositions into codimension two manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 273-291.
- [DW3] R.J. Daverman and J.J. Walsh, *Decompositions into submanifolds that yield generalized manifolds*, Topology Appl. **26** (1987), 143-162.
- [E] D.B.A. Epstein, *The degree of a map*, Proc. London Math. Soc. (3) **16** (1966), 369-383.
- [H] J. Hempel, *3-manifolds*, Ann. of Math. Stud., No.86, Princeton Uni. Press, Princeton, NJ, 1976.
- [M] J.R. Munkres, *Elements of Algebraic Topology*, Addison Wesley Publ. Co., New York, 1984.
- [MS] S. Mardesic and J. Segal, *Shape theory*, North-Holland Publishers, Amsterdam, 1982.
- [S] E.H. Spanier, *Algebraic topology*, (McGraw Hill, New York, 1966).

写像類群のアルティン群による簡明な表示

松本 眞

98年5月31日

ABSTRACT. 向き付け可能閉曲面の写像類群の具体的な表示は、いろいろな過程を経て Wajnryb により書き下されました。この研究では、彼の表示を書き直すと、アルティン群と呼ばれる一般化された組み紐群の言葉で簡明に記述できることを示します。一部、単なる書き直しではすまないところがあって、そこは、Brieskorn によるアルティン群と特異点変形のモノドロミーの深い関係を少し具体的に計算することでつめられます。また、書き直しといっても、Brieskorn-斎藤 恭司によるアルティン群の Normal Form の理論を計算機に実装して計算するもので、それほど単純ではありません。とは言え、あまり深いことは使っていないので、読みもの風に読めるように書こうと思います。

CONTENTS

1. 写像類群のアルティン群による表示	1
1.1. アルティン群	
1.2. 写像類群	
1.3. アルティン群による写像類群の表示	
2. 証明のあらすじ	7
2.1. なぜそうなると信じたか	
2.2. Normal form と計算機	
2.3. 最後の詰め：Hyperelliptic involution	
謝辞.	
References	10

1. 写像類群のアルティン群による表示

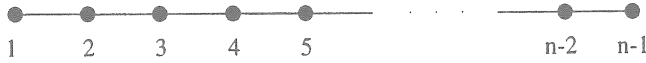
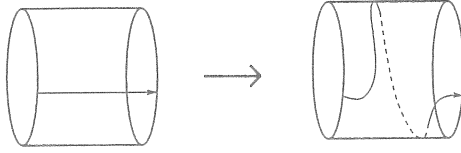
1.1. アルティン群. アルティン群と言うのはいわゆる組み紐群の、すごく単純な一般化です。アルティンが与えた n 本糸の組み紐群の表示は、生成元が $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$ で関係式が

$$\begin{aligned}\sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (|i-j|=1), \\ \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad (|i-j| \geq 2)\end{aligned}$$

です。それぞれの生成元が、二本の糸の入れ替えです。これをグラフで表すとして、可換な元は「関係が良好だから可換」、そうでない可換な元は「関係がこじれているから、可換でない」と思いまして、グラフ理論で良くあるように、関係がこじれたところだけ辺で結ぶと Figure 1 のグラフになります。これは、リー代数の業界では A_{n-1} 型 Dynkin 図形と呼ばれているものです。グラフ理論の業界では、ただ「道」と呼ばれています。

では、考え方を逆にして、グラフが与えられた時に、それに対応する群を考えてみてはどうでしょうか。ループはなくて、多重辺を許した有限グラフ Γ を考えます。この頂点を生成元とする群を考え、関係式を次のように入れます。点 a と b の間に辺が一本もない時は、二人の関係はスムーズで $ab = ba$ 、もし一本辺があったらちよつとこじれていて、可換ではないけれども $aba = bab$ 、二本あったらもっとこじれていて

この研究は、筆者の数理解析研究所・慶応大学・Max Planck Institute for Mathematics・Nice 大の滞在中に行われました。文部省科学技術研究費も投入されました。関係諸機関に感謝します。MPI preprint 97-74 にまとめましたが、そこには(主結果の証明には使わなかった)特異点変形の計算に間違いがあります。直したバージョンはお問い合わせ下さいませお送り致します。

FIGURE 1. A_{n-1} のグラフFIGURE 2. $\Sigma_0^{<2>}$ 上の Dehn twist

$abab = baba$, あとは推して知るべし。という関係式を、全ての頂点の組にいれます。(二点間の間に無限本の辺を許し、そこでは a と b の関係をいれない、というバージョンもありますが、ここでは扱いません。)

こうして表示された群を Γ に付随するアルティン群といい、 $A(\Gamma)$ で表します。例えば、 $A(A_{n-1})$ は n 本糸の組み紐群と同型になるわけです。ついでに定義すると、さらに各頂点に対して $a^2 = 1$ という関係式を入れてもっとわると、 Γ のコクスター群と呼ばれる群になります。

こんな群を導入するには、それなりの数学的背景があるわけですが、ここでは「半単純リー群に関するそうだ。」と思って、とりあえず先に進んでしまいます。(コクスター群については[5]を参照するにとどめます。アルティン群は Brieskorn [7] によって導入されたもので、グラフが Dynkin 図形の時には、それに対応する単純特異点の半普遍変形空間の、ファイバースムスローカスの基本群になっています。これについては、後で少々触れます。なぜアルティン群と名付けたかと Brieskorn に聞いたら、アルティンの Braid 群に良く似ていて、Braid じゃあないからだそうです。)

1.2. 写像類群. 写像類群の定義を思い起こしましょう。 $\Sigma_g^{n, }$ という記号で、種数 g 、境界 (の連結成分) が b 個、puncture (抜けている穴) が n 個空いている、向き付け可能曲面を表します。この時、この曲面の写像類群を、 $M_g^{n, }$ で表します。(0 は書くのを省略します。) この群は、この曲面の、向きを保つ可微分自己同相の群 (こいつは巨大すぎる) の、連結成分 (写像の集合に対してはコンパクトオープン位相をいれる) が作る群です。つまり、可微分自己同相のイソトピー同値類って言うやつです。境界については、境界上の点は全て固定し、抜けた穴も全て固定する同相写像のみを考えます。

連結成分をとったことから離散群になりますが、実は有限生成で、有限関係式による表示 (いわゆる有限表示) を持つことが McCool [18] らにより知られています。

なぜこの群が興味深いのかは、皆さんの方が僕よりも詳しいと思いますが、一言で言えばリーマン面のモジュライ orbifold という物理にも解析にも数論にも関わった対象の基本群であるという事実と、Hegaard 分解を経由して 3次元多様体と密接に関連しているという事実の二つに起因するのではないかと思います。

有限表示とわかったらば、その表示を具体的に求めて見たくなるのが人情です。以下では、境界と puncture の個数の合計が 1 個以下、つまり $b+n \leq 1$ の場合だけを考えます。(原理的には一般の場合がこの場合に帰着できるのですが、具体的な表示は与えられていないようです。)

具体的な有限個の生成元を、Dehn, Lickorish, Humphries といった人達が求めました。それは、Dehn Twist と呼ばれる元による生成元です。Figure 2 のような写像、無理に極座標表示すれば半径 $1 \leq r \leq 2$ のアヌラス上の変換 $(r \cos \theta, r \sin \theta) \mapsto (r \cos(\theta + 2\pi(r-1)), r \sin(\theta + 2\pi(r-1)))$ 、のあたえる写像類を Dehn Twist といいます。これは、円筒 $\Sigma_0^{<2>}$ の写像類群 $M_0^{<2>}$ の元を与えますが、この写像類群はこの元で生成される自由巡回群であることが知られています。この元を、“Dehn Twist” と呼びます。

さて、境界付き曲面が他の曲面に埋め込まれている時には、普通に考えて前者の写像類群から後者の写像類群に自然な準同型を引き起こします。境界は点毎に固定したから (すごく細かい事を言うと、可微分ホモトピックに変形して境界付近で微分まで自明にする必要あり)、部分曲面の自己同相は全体に拡張できるわけです。

曲面 $\Sigma_g^{n, }$ の内部に存在する単純閉曲線 C に対し、 C のその曲面での環状近傍は円筒 $\Sigma_0^{<2>}$ ですから、上

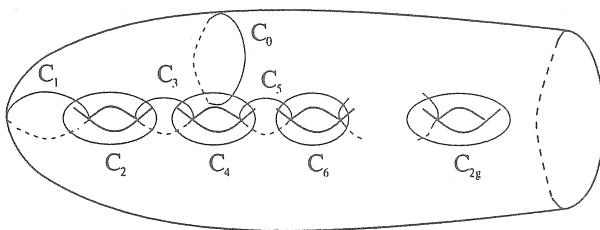


FIGURE 3. Dehn, Lickorish, Humphries による写像類群の生成元

の理屈により一つの $M_g^{n, $ の元が定まります。これを、 C に沿っての Dehn Twist と呼びます。Dehn, Lickorish, Humphries が求めた Dehn Twist による生成元は、Figure 3 に現れる $2g + 1$ 個です。(但し、 $b + n \leq 1$ とします。) Figure 3 に現れる $2g + 1$ 個の曲線に沿った Dehn twists が、ちなみに、 $2g + 1$ という数は、Dehn twist を使う限り最小の数です[13]。この結果の言っていることは、どんなひねくれた可微分同相写像を作ろうとも、この $2g + 1$ 個の曲線に沿って次々とひねって行くだけで、いつかは (ホモトピーの意味で) 自明な写像に戻せる、というものです。証明は、かなり大変みたいです。

さて、では関係式はどうかというと、もっと証明は大変で、基本的にはモース関数の変形の理論を使うようですが、僕は follow していません。ともかく、Hatcher-Thurston[12], Harer[11], 最終版は Wajnryb[21] によって与えられました。(でも、ちょっと表示が間違っていて、訂正版が Birman-Wajnryb[4] にあります。ちなみに、この辺の下りは Birman の survey[2] が読みやすいのですが、そこの hyperelliptic involution も別の形で間違っているように思えます。)

その表示とは、次のようなものです。 c_0, c_1, \dots, c_{2g} を、Figure 3 の閉曲線に対応する Dehn twists $\in M_g^{<1>}$ としましょう。

Theorem 1.1 (Wajnryb). 写像類群 $M_g^{<1>}$ は次の様な表示を持つ。生成元: a_0, a_1, \dots, a_{2g} (これらは写像類群の c_0, c_1, \dots, c_{2g} に対応する) 関係式:

(A): $a_i a_j = a_j a_i$ ($C_i \cap C_j = \emptyset$ の時), および $a_i a_j a_i = a_j a_i a_j$ ($C_i \cap C_j$ が一点集合の時)

(B): ($g \geq 2$ で必要) $(a_1 a_2 a_3)^4 = a_0 (a_4 a_3 a_2 a_1 a_1 a_2 a_3 a_4)^{-1} a_0 (a_4 a_3 a_2 a_1 a_1 a_2 a_3 a_4)$.

(C): ($g \geq 3$ で必要)

$$a_0 b_1 b_2 = a_1 a_3 a_5 b_3,$$

ここで

$$b_1 := (a_4 a_3 a_5 a_4) a_0 (a_4 a_3 a_5 a_4)^{-1},$$

$$b_2 := (a_2 a_1 a_3 a_2) b_1 (a_2 a_1 a_3 a_2)^{-1},$$

$$b_3 := (a_4^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} u a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^{-1} a_0 (a_4^{-1} a_3^{-1} a_2^{-1} a_1^{-1} u a_2 a_3 a_4 a_5 a_6),$$

$$u := (a_5 a_6) b_1 (a_5 a_6)^{-1}$$

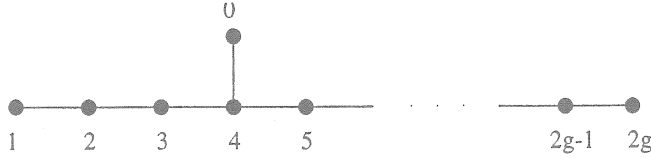
とおく。

さらに、閉曲面の写像類群 M_g の表示は、もう一つ hyperelliptic involution と呼ばれる関係式(D) を付け加えて得られる(ここでは省略する。[21][4] を参照のこと。訂正が[4] で入ったのはこの関係式)。この関係式のみが g に依存して長くなる。

対応する絵の形により、この4つの関係式(A), (B), (C), (D) はそれぞれ braid, chain, lantern, hyperelliptic 関係式と呼ばれています。これらの関係式がなぜ成り立つかは、Birman のサーベイ[2] に載っている絵を見ながら地道に曲面の基本群への作用を計算すると納得できないこともありませんが、この関係式で十分だということは僕自身は follow できていません。

さて、ここで関係式(A)を見たら、アルティン群を思い浮かべるのが自然でしょう。実際、関係式(A)は、アルティン群から写像類群への準同型

$$\rho_1 : A(T_g) \rightarrow M_g^{<1>}$$

FIGURE 4. The graph T_g

が存在すると言っているに他なりません。ここに T_g は、Figure 4 に示されたグラフです。それぞれの番号の頂点を、それぞれの番号の Dehn Twist に対応させて、アルティン群からの準同型となる必要十分条件が、(A) が成り立つことなわけです。そして、Dehn-Lickorish-Humphries の「生成元」という性質は、 ρ_1 が全射だと言っているわけです。そして、Wajnryb らの結果は、そのカーネルが正規部分群として (B), (C) で生成されるといっており、さらに $A(T_g) \rightarrow M_g$ まで行って増えるカーネルの部分は (D) を付け加えて正規部分群としての閉包をとればよいと言っているわけです。

ここまではただの言い換えです。問題は、(B), (C) といった関係式が、アルティン群というものを導入してわかりやすく言い換えられるだろうか、というものです。結論からいうと答えは Yes で、(B), (C), (D) のいずれもが部分アルティン群の中心の言葉で簡明に述べることができます。

1.3. アルティン群による写像類群の表示. そのためには、アルティン群の構造に関する基本的な言葉を導入しないといけません。

まず、グラフ Γ に対して、その誘導部分グラフ H (full 部分グラフとも呼ばれる。つまり、 H は Γ の頂点の部分集合のみから決まり、決まりかたは、その部分集合の中に両端の入っている辺は全部 H にも入れてしまうことで決まる) があると、自然に準同型 $A(H) \rightarrow A(\Gamma)$ が定まりますが、これが単射だと Van der Lek [9] により証明されているので (単射性は以下の議論で使いませんが)、 $A(H)$ を $A(\Gamma)$ の (H に伴う) 部分アルティン群と呼びます。

関係式 (B)(C)(D) は、それぞれ T_g の、ある Dynkin 部分グラフにともなう部分アルティン群の中心の生成元の言葉で書き表されます。それを述べるために、Dynkin 図形のアルティン群に対してのみ証明されている、次の定理 (Brieskorn-斎藤 恭司 [8], Satz 7.1, Satz 7.2 とその Zusatz.) をまず述べましょう。(Dynkin および拡張 Dynkin 図形以外の、一般のグラフに対するアルティン群の研究も行われていますが、それはほとんど構造が良くわかっていないようです。)

Γ を、既約ルート系の Dynkin diagram, すなわち $A_n, B_n, D_n, E_6, E_7, E_8, F_4, G_2, H_3, H_4, I_2(p)$, のうちのどれかとします。(対応するグラフは、例えば [5]。これを見なくても、以下を読むのに全く差し支えありません。)

対応する生成元 a_i に対し、その語 (すなわち生成元とその逆元の、ただの列) w が positive であるとは、 a_i^{-1} の形の元を含まないこととします。空の語も positive とします。positive な語と群の元として同じになる群の元を、positive な表示をもつ、ということにします。

Theorem 1.2 (Brieskorn-斎藤). Γ を Dynkin 図形とする。 $w \in A(\Gamma)$ に対し、次の性質を考える。

- w は a_j の積として positive な表示をもつ。
- 全ての a_i に対して、 $a_i^{-1}w$ はなお positive な表示をもつ。

すると、この二つの性質を満たす群の元の中で、もっとも小さいものがある。すなわち、 $\Delta(\Gamma)$ という群の元であって、positive な表示をもち、他に上の二つの性質をもつ w があつたら、 $\Delta(\Gamma)^{-1}w$ は positive な表示を持つものが存在する。

$\Delta(\Gamma)$ の存在は、対応するコクスター群の有限性をしてこにして、組合せ群論的に証明されます (僕はその真髄を理解していません)。 $a_i^{-1}w$ が positive な表示を持つ時に「 a_i が w を割る」と考えるなら、 $\Delta(\Gamma)$ は a_i 全ての「最小公倍数」です。 $\Delta(\Gamma)$ の幾何的意味については、あとでちょっと触れます。

$\Delta(\Gamma)$ は、次の性質を持ちます。

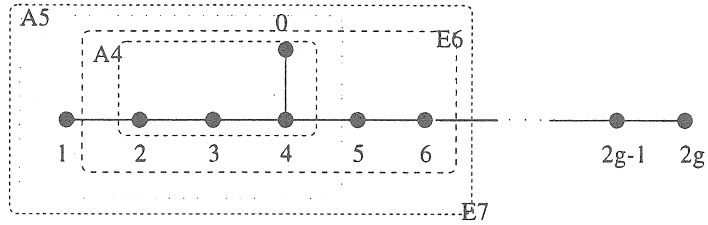


FIGURE 5. 関係式 (b),(c) を与える部分アルティン群

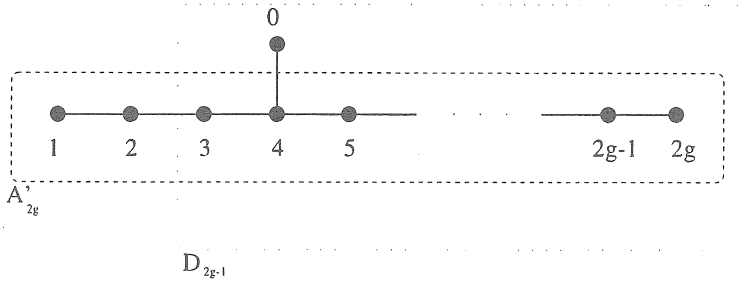


FIGURE 6. 関係式 (d),(e) を与える部分アルティン群

- (i) $\Delta(\Gamma)$ のコクスター群 (慣例にしたがって、Dynkin 図形の場合はワイル群と呼びます) での像は、最長元 w_0 となる (生成元で書いて長さが最大になる元のことですが、以下ではそれほど重要ではありません。その長さは、positive roots の数に一致します)。
- (ii) $A(\Gamma)$ の中心は、自由巡回群であり、その生成元 $c(\Gamma)$ は (二つあるがそのうちの一つは) 次の公式で与えられる。 $c(\Gamma) = \Delta(\Gamma)^2 = \Pi^h$ ($w_0 \neq -1$ の時)、 $c(\Gamma) = \Delta(\Gamma) = \Pi^{h/2}$ ($w_0 = -1$ の時)。ここに、 h はルートの Coxeter number で、 Π は生成元である a_j を好きな順番で一つずつ全部掛けたもの。

上でいっていることには、 Π は掛け算の順番に依存するが、 Π^h は依存しないことを含みます。 $w_0 = -1$ といっているのは、ワイル群は $GL(V)$ の部分群ですから、最長元が -1 倍というスカラー行列になるかどうかです。コクスター数 h については、ルートの数を生成元の数で割ったもの、と思ってもらっていいのですが、何にせよ [5] を見れば全部表に載っているものです。ですから、以下を読むのには障害になりません。さて、上の理屈により、グラフ T_g の誘導部分グラフとして現れる Dynkin 図形 Γ ごとに、群準同型

$$A(\Gamma) \rightarrow A(T_g)$$

が得られます。これによる $c(\Gamma)$ の像を、記法の濫用により再び $c(\Gamma) \in A(T_g)$ で表します。すると、主定理は次のように表されます。

T_g の部分グラフとして現れる Dynkin 図形の中で、次の 4 + 2 種類のものを考えます。その 1 : Figure 5 に書き込まれた A_4, A_5, E_6, E_7 のうちのどれか。その 2 : Figure 6 に書き込まれた A'_{2g}, D_{2g-1} のいずれか。(図から見てとれるグラフが、その型の Dynkin 図形ですから、図形とその名前の対応もこの図から読み取れます。)

Theorem 1.3. 関係式(A)のもとで、Theorem 1.1の(B)は

$$(b) \quad c(A_5) = c(A_4)^2$$

と同値。関係式(A) と (b) のもとで、関係式(C) は

$$(c) \quad c(E_7) = c(E_6)$$

と同値。関係式(A), (b), (c), のもとで、関係式(D) は

$$(d) \quad a_1^{2g-2} = c(D_{2g-1})$$

と同値。 M_g^1 の表示は関係式(A), (b), (c), および

$$(e) \quad c(A'_{2g})^2 = 1$$

で与えられる。

言い換えると、 $A(T_g)/[(b), (c)] \cong M_g^{<1>}$, $A(T_g)/[(b), (c), (e)] \cong M_g^1$, $A(T_g)/[(b), (c), (d)] \cong M_g$.

Remark 1.1. 具体的にこれらの関係式を書き下しても、簡明なものになっている。

$$\begin{aligned} c(A_4) &:= (a_0 a_2 a_3 a_4)^5 \\ c(A_5) &:= (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4)^6 \\ c(E_6) &:= (a_0 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^{12} \\ c(E_7) &:= (a_0 a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6)^9 \\ c(A'_{2g}) &:= (a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_{2g})^{2g+1} \\ c(D_{2g-1}) &:= (a_0 a_3 a_4 a_5 \cdots a_{2g})^{4g-4} \end{aligned}$$

を代入すれば良いし、カッコの中の元の掛け算の順番にはよらない。

Remark 1.2. Looijenga は、京都での筆者とのこの結果のコミュニケーションの後、独立に純代数幾何的な方法で (つまり Hatcher-Thurston を使わず) M_3^1 の似たような表示を求めることに成功している。彼の方法は平面 4 次曲線のモジュライ空間と種数 3 の超楕円曲線の張り合わせで種数 3 代数曲線のモジュライが得られる [17] ことにもとづく (現在 preprint) ものである。こちらの方向から、一般の種数での純代数幾何的な証明が得られればとても面白いと思う。))

2. 証明のあらすじ

2.1. なぜそうなると思じたか。細かいことは論文を見て頂くとして、ここではなぜアルティン群のセンターで書けるかと思いはじめたかをいいます。最初は $g = 3$ に集中していました。 $g = 2$ の時は、Birman-Hilden [3] により、6 本糸の組み紐群の商として写像類群を書くと、(みんな気づいていたのでしょうか例えば Jones [16] §10 参照) 6 本糸の組み紐群と 5 本糸の組み紐群のセンターの言葉でカーネルが表されます。 $g = 3$ では E_7 アルティン群から写像類群への全射があることがすぐわかりますが、境界無し写像類群は中心が自明ですから、少なくとも $c(E_7)$ の像は自明になります。 $c(E_6)$ の像は、6 つの Dehn Twist と可換であり、これは E_6 を形作る閉曲線の合併の環状近傍の写像類群に入るはずで、かなり特殊な形をしているはずです (だって、Dehn Twist と可換ですよ)。

それで、多分関係式はセンターで書けるんだろうなあと考えていましたが、どうやって計算したらいいかわからないでいたところ、とある機会に斎藤恭司と話す機会 (試験の採点) があり、「アルティン群には Normal form がある」と聞き、それを使ったらなんとかできました。

2.2. Normal form と計算機. [8] の面白いところの一つは、Dynkin 図形に対応するアルティン群の任意の元 w を部分アルティン群の Δ の積に一意に分解するアルゴリズムを与えている点です。その分解は、 $w = \Delta(\Gamma)^{-n} \Delta_1 \Delta_2 \cdots \Delta_s$ の形のもので、 n は $\Delta(\Gamma)^n w$ を positive にする最小の整数 n 、 Δ_1 は $\Delta(\Gamma)^n w$ を割る全ての生成元 a_i たちの張る部分アルティン群 (対応する図形が連結とは限らないが、それでもうまく行く) の Δ であり、以下帰納的に定義されます。

この Normal form を求めるアルゴリズムを LISP で書きました。(b) と (B) の同値性はとても簡単ですが、(c) と (C) は実はそのままでは同値ではありません。Wajnryb の関係式 (C) をいろいろな元で毎日共役をとっては関係式 (B) で置き直す、という作業を数か月つづけて、ある日偶然に (c) が求まりました。(今のところ、(C) を 132 個の Dehn Twists で共役をとり、一回 (B) を使うと (c) になる、という証明です。)

2.3. 最後の詰め: Hyperelliptic involution. しかし、一番簡単に思えた関係式 (D) がなかなかセンターの言葉で書けません。種数 3 でさえ、計算機を使ってもうまくいかないし、一般種数ではアルゴリズムそのものがありません。そこで、初心に戻って、「アルティン群の幾何的意味」を使おうと思いました。

何の準備もなく結果だけ言うと、「 Γ を A, D, E 型の Dynkin 図形とし、 $F \rightarrow B$ を対応する有理特異点 (複素代数曲線上の) の半普遍変形空間とする。この時、 B のファイバースムースローカスの基本群は対応するアルティン群となり、ミルナーファイバーへの Geometric Monodromy は対応する Dehn Twists で記述される。 Δ の作用は、 B に入る C^* 作用から自然に記述され、境界に沿った Dehn Twists の積になる。」という事実を使います。

A, D, E 全ての場合について Δ の写像類群への作用を具体的に書き表しました (特異点の専門家には簡単なことなのかも知れませんが、それについては [20] を参照して頂くということで、ここでは実際に必要である D_{2g-1} 特異点のみを例にとり解説します。

曲線上の D_n 型特異点というのは、 $x(x^{n-2} + y^2) = 0$ で与えられる特異点です。Brieskorn の理論 [6] より、この特異点の半普遍変形空間は、ある重みつき斉次多項式

$$F(x, y; s_1, \dots, s_n) = 0$$

で与えられた空間が、 (s_1, \dots, s_n) という n 次元空間に乗っかっている、アファイン曲線の族により与えられます。 $s_1 = \dots = s_n = 0$ でのファイバーが $x(x^{n-2} + y^2) = 0$ となります。このファミリーを $F \rightarrow B$ と書きます。

この空間の構成の方法は詳しくは述べませんが、 n 次元アファイン空間 $\hat{B} := \text{Spec} \mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ を考え、その上に、あるファミリーを乗せ、 D_n 型ワイル群を自然に作用させ、その商空間を B とするのです。環でいえば、 $\mathbb{C}[t_1, \dots, t_n]$ の不変式環の基本不変式 (対称群でいうと、基本対称式のことです) を $(P_1(t), \dots, P_n(t))$ とし (各々は n 変数斉次多項式)、 $(t_1, \dots, t_n) \mapsto (P_1(t), \dots, P_n(t))$ で $F \rightarrow B$ を引き戻してやる、つまり

$$F(x, y; P_1(t), \dots, P_n(t)) = 0$$

を考えてやるということ です。こうすると、 t 空間の方では特異なファイバーが載っているのはちょうどワイル部屋の壁となります。一部屋に n 個の壁があるのですが、それぞれの境界に載っているファイバーは一点 pinched Riemann surface になり、その壁を越えるごとに、ファイバーへの幾何的モノドロミーとして、対応する vanishing cycle での Dehn twist が引き起こされます。(\hat{B} では壁を越えて別のワイル部屋に動く道が、下の空間 B では閉じた道になっていることに注意して下さい。) さて、これらの壁は基本ルートに対応しており、Dynkin 図形の頂点と対応しているのですが、対応する vanishing cycle の単純閉曲線の交わり方が、ちょうど Dynkin 図形と同じ形になっていることが示されます。(A^1 Campo の real deformation の理論 [1] を使うと簡単にわかるらしいですが、僕には follow できないので石田 敦の結果 [14] を使いました。) そして、Brieskorn は、 B の中でファイバーがスムーズなものを作るローカス B° の基本群がアルティン群 $A(D_n)$ であるということも証明しています [7]。ではそこで、 Δ は何なのでしょう。 \hat{B} には全ての t_i を定数倍するという C^* 作用がありますが、これで一点 $t_0 \in \hat{B}$ から始めて $\exp(2\pi i u) t_0$ ($u : 0 \rightarrow 1/2$) で半回転させてやると、閉じていない道ができます。その B での像は閉じた道になることがわかります。この道が Δ なのです。あとは、この Δ を計算してやればいいのですが、話を簡単にするため Δ^2 を計算することにしましょう (この差は結構微妙で、[20] では上半平面などを持ち出す羽目になりましたが、特異点の専門家からすれば簡単なものかもしれません)。 $\exp(2\pi i u) t_0$ で変形するといっても、 $F(x, y; P_1(t), \dots, P_n(t)) = 0$ は斉次多項式ですから、下の空間の道の、曲線のファミリーへのリフトとし

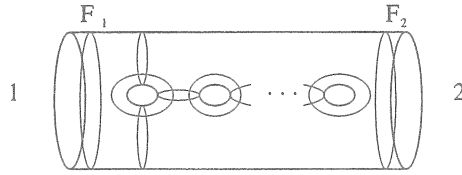
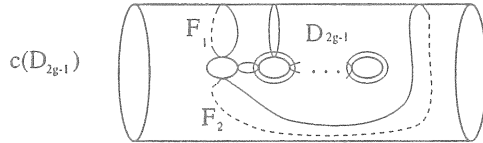
FIGURE 7. n が奇数の時の D_n 

FIGURE 8. その Humphries 生成元でのありよう

て、 $(\exp(m_x 2\pi i u)x, \exp(m_y 2\pi i u)y; P_1(\exp(2\pi i u)t_0), \dots, P_n(\exp(2\pi i u)t_0))$ をとってやれば、ファイバーは全く変形しないでもとに戻ってしまいます。(ここで m_x, m_y は t_i を一次と見て、 F を重みつき齊次多項式と見た時の x, y の重み。)。では、どこでモノドロミーが出て来るかと言うと、ミルナーファイバーを考えるとそこです。

つまり、代数幾何を離れて、トータルスペースを原点中心の開球でちょん切ります。各ファイバーは、位相的には境界つき閉曲面となります。ここで、境界には無限遠点の近傍からくる自明な直積化を入れておいて、その意味で境界を固定してファイバーへのモノドロミーを見るのが Geometric Monodromy です。つまり、この場合は

$$A(D_n) = \pi_1(B^\circ) \rightarrow M_g^{}$$

が与えられます。ここに、 b は無限遠点の個数、 g はスームスファイバーの種数です。(例えば n が奇数の時には、 $x=0$ と $x^{n-2} + y^2 = 0$ のそれぞれから一つずつ、合計 2 個無限遠点があり、種数はちょっと計算すれば $(n-1)/2$ です)。境界をとめるためには、各無限遠点の周りで Dehn Twists をしてやる必要があります。その回数は、各無限遠点を定義する局所パラメータが、 x, y の何次の多項式かを見ればわかります。Brieskorn の計算[6] で、 (x, y) の重みはそれぞれ $(2, n-2)$ であり、 $x=0$ の方から来る無限遠点の局所パラメータ $1/y$ の重みは $-(n-2)$ 、 $x^{n-2} + y^2 = 0$ の方からくる無限遠点のパラメータは、 x 直線上でこの曲線が (n が奇数だから) 2 位で分岐していることを考えると、重み -1 となります。この回転を押えて境界を止めるためには、各々の境界で Dehn Twists をそれぞれ $(n-2)$ 回、1 回施さなくてはなりません。こうして、Figure 7 において Dehn Twist の積 $F_1^{n-2} F_2$ こそが、 $c(D_n) = \Delta(D_n)^2$ の Geometric Monodromy であることが分かりました。

絵を、Dehn-Lickorish-Humphries Generator のなかに無理に埋めると Figure 8 になります。既に relation (b),(c) で境界一個つきの曲面の写像類群は求められており、簡単な考察[21] から $F_1 = F_2$ となる関係式を加えれば境界のない写像類群が求まることがわかります。 $F_1^{2g-3} F_2 = c(D_{2g-1})$ を使えば、それには (d) で十分だとわかります。

その他の特異点変形の Δ のモノドロミーもトポロジ的に面白いと思います。例えば、 $\Delta(E_6)$ は水平方向の half Dehn Twist を与え、これが Humphries[13] が生成元を減らすのに用いた元の正体であることをコメントしておきます。

謝辞。この研究にあたって、たくさんの人が色々なことを初歩から教えて下さいました。アルティン群の存在そのものを教えてくれた斎藤 恭司先生、特異点変形に関するコメントをくれた E. Brieskorn 先生、P. Slodowy 先生、全体に関連した成果を教えてくれた E. Looijenga 先生、そもその動機である写像類群の研究を喚起してくれた織田 孝幸先生に感謝します。この研究は種数 3 写像類群へのガロア作用を調べた研

究である[19]の延長にあり、その研究は組み紐群へのガロア作用を研究した伊原康隆先生との共同研究[15]に動機付けられており、数学の門へと僕に導き入れて下さった伊原先生に謝辞を述べたいと思います。

REFERENCES

1. N. A'Campo, *Le groupe de monodromie du déploiement des singularités isolée de courbes planes I*, Math. Ann. 213 (1) 1–32 (1975).
2. J.S. Birman, *Mapping class groups of surfaces*, Contemporary Mathematics 78 13–43 (1988).
3. J.S. Birman and H. Hilden, *Isotopies of homeomorphisms of Riemann surfaces and a theorem about Artin's braid group*, Ann. of Math. 97, 424–439 (1973).
4. Joan S. Birman and B. Wajnryb, *Errata: Presentations of the mapping class group*, Israel. J. Math. 88, 425–427 (1994).
5. N. Bourbaki, "Groupes et algèbres de Lie, IV, V, VI" *Éléments de Mathématique*. 1972
6. E. Brieskorn, *Singular elements of semisimple algebraic groups*, in Actes Congrès Intern. Math. 1970, t. 2, 279–284.
7. E. Brieskorn, *Die Fundamentalgruppe des Raumes der regulären Orbits einer endlichen komplexen Spiegelungsgruppe*, Inventiones Math. 12, 57–61 (1971).
8. E. Brieskorn and K. Saito, *Artin Gruppen und Coxeter Gruppen*, Invent. Math. 17, 245–271 (1972).
9. H. van der Lek, *Extended Artin groups*, Proc. Symp. Pure Math. 40–Part 2, 117–121 (1983).
10. F.A. Garside, *The braid group and other groups*, Quart. J. Math. Oxford, 2.Ser. 20, 235–254 (1969)
11. J. Harer, *The second homology group of the mapping class group of an orientable surface*, Invent. Math. 72, 221–239 (1983).
12. A. Hatcher and W. Thurston, *A presentation for the mapping class group of a closed orientable surface*, Topology 19, 221–237 (1980).
13. S.P. Humphries, *Generators for the mapping class group*. Topology of low-dimensional manifolds (Proc. Second Sussex Conf., Chelwood Gate, 1977) Lecture Notes in Math. 722, 44–47, 1979.
14. A. Ishida, *The structure of subgroup of mapping class groups generated by two Dehn twists* Proceedings of the Japan Academy 72, Ser. A, No.10 240–241 (1996).
15. Y. Ihara and M. Matsumoto, *On Galois Actions on Profinite Completions of Braid Groups*, in AMS Contemporary Math. 186 "Recent Developments in the Inverse Galois Problem." 173–200 (1994).
16. V.F.R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Mathematics, 126 (1987), 355–388.
17. E. Looijenga, *Cohomology of \mathcal{M}_3 and \mathcal{M}_3^1* , Contemporary Mathematics 150 205–228 (1993).
18. J. McCool, *Some finitely presented subgroups of the automorphism group of a free group*, J. Algebra 35, 205–213 (1975).
19. M. Matsumoto, *Galois group G_3 Singularity F_7 , and Moduli \mathcal{M}_3* London Math. Soc. Lecture Note Series 243 Geometric Galois Actions 2. The Inverse Galois Problem, Moduli Spaces and Mapping class Groups. 1997 (179–218).
20. M. Matsumoto "A presentation of mapping class groups in terms of Artin groups and geometric monodromy of singularities" submitted, Max Planck Institut Preprint 97-74 (1997)
21. B. Wajnryb, *A simple presentation for the mapping class group of an orientable surface*, Israel J. Math. 45, 157–174 (1983).

慶応大学理工学部数理科学科

E-mail address: matumoto@math.keio.ac.jp

3次元多様体の不変量の近況

村上 斉 (早稲田大学理工学部)

1998年6月1日

これは、3次元多様体の不変量に関して私が感じていることを書き連ねたものです。私の勉強不足・思い違いにより、間違った記述があるかもしれません。また、この中には私の結果は全く含まれていないことを最初にお断りしておきます。

1 3次元多様体の類別

向き付け可能な閉3次元多様体 M の Casson-Walker-Lescop 不変量 [1, 20, 13] (以下, CWL 不変量) を $\lambda(M)$ で表す。まず, C. Lescop の次の定理を考えよう [14].

定理 1.1. ([14]) M_1, M_2 をホモロジー3球面とする。その時、次の2つは同値である。

- (1) $\lambda(M_1) = \lambda(M_2)$.
- (2) ホモロジー3球面の列 $M_1 = H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \cdots \rightarrow H_n = M_2$ が存在して、 H_{i+1} は H_i の中の Alexander 多項式が1であるような結び目の ± 1 手術で得られる。

この定理は、次のようにも解釈できる。

注意 1.1. (定理 1.1 の別解釈) ホモロジー3球面の、次の2つの類別は同値である。

- (1) CWL 不変量による類別 (つまり, CWL 不変量が等しいものは同値だと思う)。
- (2) Alexander 多項式が1であるような結び目の ± 1 手術で移り合うものは同値という関係による類別。

つまり、不変量による類別が、ある種幾何的な類別と一致するのである。あるいは、次の命題はどうであろう。

定理 1.2. ([6]) 向きの付いた閉3次元多様体 M_1, M_2 に対して、次の2つは同値である。

- (1) 同型 $\phi : H_1(M_1; \mathbf{Z}) \cong H_1(M_2; \mathbf{Z})$ が存在して, それによって, linking pairing および, 3重カップ積の同型が導かれる.
- (2) 3次元多様体の列 $M_1 = H_1 \rightarrow H_2 \rightarrow \cdots \rightarrow H_n = M_2$ が存在して, H_{i+1} は H_i の中の null-homologous な結び目の ± 1 手術で得られる.

これに対する, 先ほどと同じような解釈は次のようになる.

注意 1.2. (定理 1.2 の別解釈) 閉 3 次元多様体の, 次の 2 つの類別は同等である.

- (1) linking pairing および 3 重カップ積による類別.
- (2) null-homologous な結び目の ± 1 手術で移り合うものは同値という関係による類別.

葉広和夫は, (これとは独立に) これを一般化した概念を導入した [9]. 彼はクラスパーを使うことによって, k 手術同値を考えた. 次の定理は, $k = 1$ のときは定理 1.2 に, $k = 3, 4$ のときは定理 1.1 に対応する.

定理 1.3. (葉広) 向きの付いた閉 3 次元多様体を考える.

- (1) M_1 と M_2 が 2 手術同値
 $\iff M_1$ と M_2 の linking pairing と 3 重カップ積が同型.
- (2) M_1 と M_2 が 2 手術同値
 $\iff \mu(M_1) \equiv \mu(M_2) \pmod{2}$ ($\mu(M)$ は Rohlin 不変量).
- (3) M_1 と M_2 が 3 手術同値 $\iff M_1$ と M_2 が 4 手術同値
 $\iff \lambda(M_1) = \lambda(M_2)$
- (4) $k \geq 1$ のとき,
 M_1 と M_2 が $(2k+1)$ 手術同値 $\iff M_1$ と M_2 が $(2k+2)$ 手術同値
 $\iff f_{3k}$ を任意の $3k$ 型の不変量 (大槻の意味で) とすると, $f_{3k}(M_1) = f_{3k}(M_2)$.

これは, つまり, 大槻知忠による有限型不変量 (次の節参照) による類別が k 手術同値という幾何的な類別と同等だといっている.

2 有限型不変量

この節では, 大槻により導入された有限型不変量について説明する [16].

M を整ホモロジー 3 球面全体で張られる \mathbf{C} 上のベクトル空間とする. また, 整ホモロジー 3 球面 M とその中の粹付き絡み目 \mathcal{L} に対して, $M_{\mathcal{L}}$ を, M から \mathcal{L} で手術して得られる整ホモロジー 3 球面とする. ただし, \mathcal{L} は, 単位粹 (すべての粹が ± 1) を持つ代数的分離絡み目 (各絡み数が 0) とす

る。そこで、

$$(M, \mathcal{L}) := \sum_{\emptyset \subseteq \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}} (-1)^{\#\mathcal{L}'} M_{\mathcal{L}'} \in \mathcal{M}$$

とおく。ここで、 $\#\mathcal{L}'$ は \mathcal{L}' の成分数を表す。さらに、

$$\mathcal{M}_d := \text{span}\{(M, \mathcal{L}) \mid \mathcal{L} \text{ は } d\text{-成分の単位枠を持つ代数的分離絡み目}\}$$

と定義する。

そこで、結び目の Vassiliev 不変量の定義における「交差の入れ替え」を「Dehn 手術」に置き換えて次の定義が得られる。

定義 2.1. ([16]) \mathcal{M} から \mathbb{C} への写像 v は、 $v|_{\mathcal{M}_{d+1}} = 0$ をみたすとき、次数 d の有限型 (大槻) 不変量であるという ($d \geq 0$)。ただし、 v は \mathcal{M} へ線型に拡張しておく。

定義より、次数 0 の大槻不変量は定値写像のみであることがわかる (任意の整ホモロジー 3 球面は、 S^3 から、単位枠を持つ結び目の Dehn 手術の繰り返しで得られることに注意)。また、次数 1, 2 の大槻不変量も定値写像のみであることが示されている。一般に次数 $3d, 3d+1, 3d+2$ の大槻不変量は集合として同じであることもわかる [5]。そして、最初の非自明な大槻不変量として現れるのが Casson 不変量 λ である (単に Casson 不変量といえば、整ホモロジー 3 球面に対する CWL 不変量のこと)。

定理 2.1. ([16]) Casson 不変量 λ は次数 3 の大槻不変量である。

証明. \mathcal{L} を整ホモロジー 3 球面 M 内の単位枠を持つ代数的分離絡み目とし、 $f_i = \pm 1$ を第 i 成分の枠とする。そのとき、J. Hoste の公式 [10] により

$$\lambda(M_{\mathcal{L}}) = \sum_{\emptyset \subseteq \mathcal{L}' \subseteq \mathcal{L}} \varphi(\mathcal{L}') \prod_{i \in \mathcal{L}'} f_i$$

が成り立つ。ここで、 L' は \mathcal{L}' の枠を忘れた絡み目、 $\varphi(L')$ はその Conway 多項式の $z^{\#\mathcal{L}'+1}$ の係数である。また、 $i \in \mathcal{L}'$ は \mathcal{L}' が第 i 成分を含むという意味である。

この式から,

$$\begin{aligned}
\sum_{\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}} (-1)^{\#\mathcal{L}'} \lambda(M_{\mathcal{L}'}) &= \sum_{\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}} (-1)^{\#\mathcal{L}'} \left\{ \sum_{\mathcal{L}'' \subset \mathcal{L}'} \varphi(\mathcal{L}'') \prod_{i \in \mathcal{L}''} f_i \right\} \\
&\quad (\ell = \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}' \text{ とおく}) \\
&= \sum_{\mathcal{L}'' \subset \mathcal{L}} \left\{ \sum_{\ell \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}''} (-1)^{\#\ell + \#\mathcal{L}''} \varphi(\mathcal{L}'') \prod_{i \in \mathcal{L}''} f_i \right\} \\
&= \sum_{\mathcal{L}'' \subset \mathcal{L}} (-1)^{\#\mathcal{L}''} \varphi(\mathcal{L}'') \prod_{i \in \mathcal{L}''} f_i \left\{ \sum_{\ell \subset \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}''} (-1)^{\#\ell} \right\} \\
&\quad (\text{最後の中括弧の中は, } \mathcal{L} \setminus \mathcal{L}'' = \emptyset \text{ のとき以外は } 0) \\
&= (-1)^{\#\mathcal{L}} \varphi(\mathcal{L}) \prod_{i=1}^n f_i
\end{aligned}$$

がわかる. ここで, 同じく Hoste による「 $\#\mathcal{L} > 3$ のとき $\varphi(\mathcal{L}) = 0$ 」を使うと, $\#\mathcal{L} > 3$ のとき $\lambda((M, \mathcal{L})) = 0$ がわかり, λ の次数は 3 である. \square

実際, 大槻は, 次数 3 の大槻不変量は定数倍を除いて Casson 不変量しかないことを示している.

ここで, 前節の葉広の定理 (定理 1.3) を振り返ってみよう. 大槻不変量は次数 $3k$ のものが本質的であった. そして, $2k+2$ 手術同値 (これは $2k+1$ 手術同値と同等) による類別と, 次数 $3k$ の大槻不変量による類別が同値だといっていたわけである. また, 定理 1.3(2) は大槻不変量では出てこなかったものである.

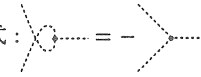
葉広の定理は, 一般の向き付けられた閉 3 次元多様体に対して成立するので, 有限型不変量の方も一般の多様体への拡張を考えるのが自然である. これは, T. Cochran と P. Melvin によってなされている [2]. (有理ホモロジー 3 球面については, S. Garoufalidis と大槻による別の拡張がある [4].)

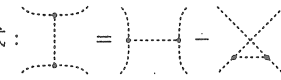
3 普遍摂動不変量

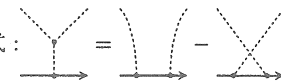
1995 年, T. Le, 村上順, 大槻により閉 3 次元多様体の普遍摂動不変量が定義された [12]. これは, ウェブ図に値を持つ閉 3 次元多様体の不変量である. この節については [15], およびその日本語訳 [19] を参照していただきたい.

ウェブ図について説明しておこう. $\bigsqcup^n S^1$ 上のウェブ図とは, 向きのついた n 個の S^1 (実線で表す) に, (連結でなくてもよい) 1-3 価グラフ (頂点から出る辺の数が 1 または 3 で, 辺に向きのついていないグラフのこと. 破線で表す) を, 1-価の頂点で貼り付けてできるグラフのことである.

ウェブ図の \mathbb{C} 上の一次結合全体を次の関係式で割ったものを $\mathcal{A}(\bigsqcup^n S^1)$ と書くことにする。

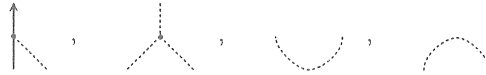
AS 関係式: 

IHX 関係式: 



STU 関係式: 



ウェブ図の意味について、少し解説しておこう。まず、単純 Lie 環 \mathfrak{g} を固定しておく。 $\mathcal{A}(\bigsqcup^n S^1)$ の元の、各円周 (実線) 上に \mathfrak{g} の既約表現を載せることにより、複素数が次のように定義される。

まず、ウェブ図の円周を垂直な直線に変えて、各頂点の近傍が次の図になるように破線を変形しておく。



ウェブ図を水平に切って、各部分には (縦に平行な部分を除いては) 上のような図しか現れないようにしておく。そして、切り口の各部分には実線と破線の切り口が現れるが、破線に対しては \mathfrak{g} , i 番目の実線に対しては \mathfrak{g} の既約表現 R_i を対応させる。また、横に並んだものはそれぞれ、テンソル積をとり、各部分には次のような写像を対応させる。

	$R \ni \rho(X)$		$\mathfrak{g} \ni [X, Y]$
↑	↑	↑	↑
$R \otimes \mathfrak{g} \ni \rho \otimes X$		$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \ni X \otimes Y$	

	$\mathbb{C} \ni B(X, Y)$		$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \ni \sum_i X_i \otimes B^*(X_i)$
↑	↑	↑	↑
$\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \ni X \otimes Y$		$\mathbb{C} \ni 1$	

ここで、 $[\ , \]$ は Lie 環の積、 B は Killing 形式、 $B^* : R \rightarrow R$ は、 B により誘導される同型、 X_i は R の基底である。このようにしてできた写像を合成することによりできる準同型 (intertwiner) $R_1 \otimes R_2 \otimes \cdots \otimes R_n \rightarrow R_1 \otimes R_2 \otimes \cdots \otimes R_n$ の trace をとることにより、 $\mathcal{A}(\bigsqcup^n S^1)$ から \mathbb{C} への写像が得られる。この写像を $W_{\mathfrak{g}, R_1, R_2, \dots, R_n} : \mathcal{A}_n(\bigsqcup^n S^1) \rightarrow \mathbb{C}$ と書く。また、このように考えると、ウェブ図は、Lie 環とその表現を抽象化したものと捉えることもできる。

$W_{\mathfrak{g}, R_1, R_2, \dots, R_n}$ が、well-defined であること、すなわち、AS, IHX, STU 各関係式により不変であることは、AS 関係式が Lie bracket の性質 $[X, Y] =$

$-[Y, X]$ に, IHX 関係式が Jacobi 恒等式 $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ に, STU 関係式が表現の定義 $\rho([X, Y]) = \rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X)$ に, それぞれ対応していることからわかる.

さて, 普遍摂動不変量であるが, その定義のためにまず, 3次元多様体を S^3 内の枠付き絡み目 \mathcal{L} で表しておく. そして, \mathcal{L} の (補正された) Kontsevich 積分を $\hat{Z}(\mathcal{L}) \in \mathcal{A}(\bigsqcup^n S^1)$ とする. これは, 枠付き絡み目の不変量である. さらに, $\hat{W}_{\mathfrak{g}, R_1, R_2, \dots, R_n}(\hat{Z}(\mathcal{L})) \in \mathbb{C}[[\hbar]]$ は, \mathcal{L} の各成分に R_1, R_2, \dots, R_n で色を付けた量子 \mathfrak{g} 不変量に一致する ($\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, R_i がすべてベクトル表現のときは, Jones 多項式の変数 t を e^{\hbar} で置き換えたもの). ただし, $\hat{W}_{\mathfrak{g}, R_1, R_2, \dots, R_n}$ は $\hat{W}_{\mathfrak{g}, R_1, R_2, \dots, R_n}(D) := W_{\mathfrak{g}, R_1, R_2, \dots, R_n}(D)\hbar^{\deg(D)}$ で定義される. ここで, $\deg(D)$ は, ウェブ図 D の頂点の数を2で割ったものである.

3次元多様体の, Lie 環 \mathfrak{g} に付随した (摂動) 量子不変量は, 荒っぽく言うと, \mathcal{L} の色付き量子 \mathfrak{g} 不変量をすべての色 (表現) について (重み付きで) 足しあげたもの (もしくは, 平均をとったもの) である. この “足しあげる” 操作はある意味では表現によらない量 (Lie 環のみによる量) を抽出する操作だといえる. ウェブ図は, Lie 環とその表現を抽象化したものであり, 破線, 実線がそれぞれ, Lie 環, 表現に対応していたことを考えると, もし, Kontsevich 積分から “実線を消す” ことができれば, 3次元多様体の不変量が得られることになる. しかも, できたものの破線に Lie 環を “代入” することにより, 任意の \mathfrak{g} に対し摂動 \mathfrak{g} 不変量が得られるはずである.

向きの付いた閉3次元多様体 M の普遍摂動不変量 $\Omega(M) \in \mathcal{A}(\emptyset)$ [12] はこのようなアイデアで構成された. そして, 実際 (有理ホモロジー3球面に対して) 摂動 $SO(3)$ 不変量 [17] (これも大槻不変量と呼ばれる) を含んでいることが大槻によって示された [18]. (その構成からいって, $\Omega(M)$ は, すべての摂動不変量を含んでいるはずである. この意味で, 普遍摂動不変量は摂動不変量に対して, 普遍的であることが予想されている.) また, これは前節で述べた (整ホモロジー3球面の) 有限型不変量をすべて含んでいることが Le によって示された [11]. つまり, $\Omega(M) \in \mathcal{A}(\emptyset)$ はウェブ図の頂点の数割る2で次数がつけられているのであるが, 次数が k の部分は次数 $3k$ の大槻不変量であり, 逆に, 任意の次数 $3k$ の大槻不変量は, $\Omega(M)$ の次数 k の部分によって決まることが示された. この意味で, 普遍摂動不変量は有限型不変量に対して普遍的であることがわかる.

ところが, この不変量は1次元 Betti 数があるとあまり強くないことが, N. Habegger [7], Habegger と A. Beliakova [8] や S. Garoufalidis と Habegger [3] によって示された. Habegger は, M の1次元 Betti 数が3より大きいとき, $\Omega(M)$ は常に1になること, および Betti 数が3のときは Casson-Walker-Lescop 不変量で決定されることを示した. Habegger と Beliakova は, 1次元 Betti 数が2のときも $\Omega(M)$ は Casson-Walker-Lescop 不変量で決定されることを示した. また, Garoufalidis と Habegger は, Betti 数が1の

ときは $\Omega(M)$ が Alexander 多項式で決まることを示した。

さて、葉広のクラスパー理論による、3次元多様体の一番ゆるやかな類別は、linking pairing と 3重カップ積によるものであった (定理 1.3)。この類別によると、整ホモロジー 3球面は一つの類に過ぎない。他の各類に対する上述の結果と同様の考察は、今後の研究の大きな課題である。(講演では、Cochran と Melvin によるこの方面の研究 [2] についてももう少し詳しく話ができるかもしれない。)

参考文献

- [1] S. Akbulut and J.D. McCarthy, *Casson's Invariant for Oriented Homology 3-spheres - An Exposition*, Mathematical Notes, vol. 36, Princeton University Press, Princeton, 1990.
- [2] T.D. Cochran and P. Melvin, *Finite type invariants for three-manifolds*.
- [3] S. Garoufalidis and N. Habegger, *The Alexander polynomial and finite type 3-manifold invariants*, (q-alg/9708002).
- [4] S. Garoufalidis and T. Ohtsuki, *On finite type 3-manifold invariants. V. Rational homology 3-spheres*, Geometry and physics (Aarhus, 1995) (New York), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., vol. 184, Dekker, New York, 1997, pp. 445–457.
- [5] ———, *On finite type 3-manifold invariants. III. Manifold weight systems*, Topology **37** (1998), no. 2, 227–243.
- [6] A. Gerges, *Surgery, bordism and equivalence of 3-manifolds*, Ph.D. thesis, Rice University, 1996.
- [7] N. Habegger, *A computation of the universal quantum 3-manifold invariant for manifolds of rank greater than 2*, preprint, Université de Nantes, 1997.
- [8] N. Habegger and A. Beliakova, *The Casson-Walker-Lescop invariant as a quantum 3-manifold invariant*, (q-alg/9708029).
- [9] K. Habiro, *Clasper Theory and Its Applications*, レクチャーノート (作成中), 早稲田大学追分セミナーハウス, 1997年9月, ノート作成者: 門上 晃久, 小池 敦, 志摩 亜希子, 新谷 哲也, 鈴木 幸太郎, 辻井 良彦, 堤 康嘉, 中川 義行, 中津留 勉, 西澤 一夫, 西原 秀明, 平澤 美可三, 藤井 茂, 松坂 文, 村上 智樹, 矢木 達也, 山内 武史, 山田 裕一.

- [10] J. Hoste, *A formula for Casson's invariant*, Trans. Amer. Math. Soc. **297** (1986), 547–562.
- [11] T.T.Q. Le, *An invariant of integral homology 3-spheres which is universal for all finite type invariants*, Solitons, geometry, and topology: on the crossroad (Providence, RI), Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, vol. 179, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 75–100.
- [12] T.T.Q. Le, J. Murakami, and T. Ohtsuki, *On a universal perturbative invariant of 3-manifolds*, Topology **37** (1998), no. 3, 539–574.
- [13] C. Lescop, *Global Surgery Formula for the Casson–Walker Invariant*, Annals of Mathematics Studies, vol. 140, Princeton University Press, Princeton, 1996.
- [14] C. Lescop, *On the kernel of the Casson invariant*, Topology **37** (1998), no. 1, 25–37.
- [15] T. Ohtsuki, *Combinatorial quantum method in 3-dimensional topology*, Lecture Notes of the workshop at Oiwake Seminar House, Waseda University, Karuizawa, September, 1996.
- [16] ———, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, J. Knot Theory Ramifications **5** (1996), 101–115.
- [17] ———, *A polynomial invariant of rational homology 3-spheres*, Invent. Math. **123** (1996), 241–257.
- [18] ———, *The perturbative $SO(3)$ invariant of rational homology 3-spheres recovers from the universal perturbative invariant*, preprint, Tokyo Institute of Technology, 1997.
- [19] ———, 量子不変量をめぐる 3次元位相幾何学の組み合わせ的方法, 重点領域研究 2 3 1 「無限可積分系」レクチャーノート, 15, (塩見真枝による [15] の日本語訳), 1997.
- [20] K. Walker, *An Extension of Casson's Invariant*, Annals of Mathematics Studies, vol. 126, Princeton University Press, Princeton, 1992.

Seiberg-Witten不変量を用いた絡み目の種数の評価について

赤穂 まなぶ
京都大学大学院理学研究科

1. イントロ

Kronheimer と Mrowka [K-M] は Seiberg-Witten 不変量を用いて Thom 予想を証明しました。ここで「証明の力」は 2 つあります。1 つは $\mathbb{C}P^2$ の (適当な計量での) Seiberg-Witten 不変量が non-zero である事、言いかえると Seiberg-Witten 方程式の解が存在するという事。もう 1 つは方程式の解を使って埋め込まれた曲面の種数を下から評価する方法、generalized adjunction formula, の 2 点です。

一方 Meng と Taubes [M-T] はある種の 3 次元多様体において (3 次元版) Seiberg-Witten 不変量と (refined) Milnor torsion invariant が等しいという事を証明しました。

これらの事からある種の 3 次元多様体において Seiberg-Witten 方程式の解の存在は古典的な不変量を見ればわかって、ある 3 次元多様体に埋め込まれた曲面の種数の下からの評価は Kronheimer と Mrowka のテクニックをそのまま 3 次元に持ち込めば「よいので」、結局ある種の 3 次元多様体では Milnor torsion invariant を用いて埋め込まれた曲面の種数の下からの評価が出来るわけです。

$L = \cup_1^m \cup_n$ を 3 次元球面内の向きを付けられた n -成分の絡み目とし、 $\Omega_L(t) \in L$ の (1 変数) Alexander 多項式 とします。Alexander 多項式の Seifert 行列による定義を考えると可く「にわが事」で可か

M. A. is supported by the JSPS Research Fellowship for Young Scientist.

$(t^2-1)^{n-1} \Omega_L(t) \equiv a_0 + a_1 t^2 + \dots + a_d t^{2d}$, $a_0 \neq 0$ とするよ様に t の中を
かけて調整してやると総目目 L の種数 $g(L)$ に関して

$$2(g(L) + n) - 2 \geq d$$

が成り立ちます。今回はこれを多変数の Alexander 多項式に関して拡張したものを紹介します。

一般形はちよと混じり入っているのを見たいので、よりした次の形を書いておきます。まず総目目 L の成分の数を 2 以上とし各 l_i, l_j ($i \neq j$) の総目目数について $lk(l_i, l_j) = 0$ と仮定しておきます。次に $\Delta_L(m_1, \dots, m_n)$ を L の多変数 Alexander 多項式とします。これは群環 $\mathbb{Z}[H_1(S^3 \setminus L; \mathbb{Z})]$ の元 t_i と思いたいのを $\pm m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n}$ 倍, $k_i \in \mathbb{Z}$, の不定係数をのぞいてしか定まりません (ただしここで m_i は l_i のメリディアンでサイクルとみなしている)。

そこで多変数 Laurent 多項式 A を

$$A \equiv \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \cdot \Delta_L(m_1, \dots, m_n) \text{ up to } \pm m_1^{k_1} \dots m_n^{k_n} \text{ 倍}$$

で対称な多変数 Laurent 多項式になるようにとります (ヒキます)。こうした時総目目 L の種数 g の Seifert 曲面 S に関して次の評価式が成り立ちます。

定理. (上の条件のもと) 任意の $K \in \{lk \in H_1(S^3 \setminus L; \mathbb{Z}) \mid A = \sum a_k \cdot k, a_k = a_{k^{-1}} \neq 0\}$

に対して

$$g \geq |\text{int}(K, S)| + (1-n).$$

が成り立つ。ただしここで $\text{int}(K, S)$ はサイクル K と S のホモトピー的交点数。

1変数 Alexander 多項式と多変数 Alexander 多項式との関係は

$(t-t^{-1}) \cdot \Delta_L(t^2, \dots, t^2) \equiv \Omega_L(t)$ up to t の巾倍 (ただしこの式は $n \geq 2$ の場合) という感じでき。多変数の時の評価式が1変数の時の評価式

とどくらい違うかと言うと次のような総目目 L が実際に作れます $[L]$ 。

$F(m_1, m_2)$ を対称な Laurent 多項式で $F(1, 1) = 1$ を満たすとして仮定しま

す。すると 2-成分の向きを付けられた総目目 $L = l_1 \vee l_2$ で $lk(l_1, l_2) = 0$

かつ $\Delta_L(m_1, m_2) = F(m_1, m_2)(m_1 - 1)(m_2 - 1)$ となるものが存在します。

例えば"系"を $L = l_1 \vee l_2$ と $lk(l_1, l_2) = 0$ かつ $\Delta_L(m_1, m_2) = (m_1^p - m_2^p + 1 - m_2^{-p} + m_1^{-p})(m_1 - 1)(m_2 - 1)$, $p \geq 0$ なるものに対し 2 変数の時に得らるる L の種数 $g(L)$ の評価式は $g(L) \geq 1$ で, 2 変数の時は $g(L) \geq 1 + p$ となる本質的に良くなる事があります。

2. Alexander 多項式といくつかの計算

ここでは Alexander 多項式及び "Alexander function" の定義, 性質と後で必要となるいくつかの計算結果を述べます。

まず X をコンパクト, 連結な 3 次元多様体とし, $p: \tilde{X} \rightarrow X$ を universal free abelian cover とします。以下 $H_1(X; \mathbb{Z})/\text{Torsion}$ を H と略記しその群環を $\mathbb{Z}[H]$ と書きます。

X のセル分割を \tilde{X} に自然に持ち上げる事により $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は $\mathbb{Z}[H]$ -module となります。 $\mathbb{Z}[H]$ は Noetherian なるので $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ は有限生成 $\mathbb{Z}[H]$ -module で更に $\mathbb{Z}[H]$ は factorial なるので $\mathbb{Z}[H]$ -module $H_*(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ の order を考える事が出来ます。

ここで環 R 上有限生成加群 A がある R -線型写像 $f: R^m \rightarrow R^n$, $m \geq n$ に対し $A \cong \text{Coker } f$ となっている時まず f の表わす行列の $n \times n$ 小行列式で生成されるイデアルは A にしかよらず, 更に R が factorial の時このイデアルの元の最大公約元を A の order と呼ぶ $\text{ord } A$ と書く事にします。もちろん $\text{ord } A$ は単元倍となる事は出来ません。

$\mathbb{Z}[H]$ -module $H_i(\tilde{X}; \mathbb{Z})$ の order を X の Alexander 多項式と呼ぶ $\Delta(X)$ と書く事にします。また各 $i=1, 2, 3$ で $\text{ord } H_i(\tilde{X}; \mathbb{Z}) \neq 0$ の時 $\prod_{i=0}^3 [\text{ord } H_i(\tilde{X}; \mathbb{Z})]^{\varepsilon(i)}$, $\varepsilon(i) = (-1)^{i+1}$, を X の Alexander function と呼ぶ $A(X)$ と書く事にします (ある i で $\text{ord } H_i(\tilde{X}; \mathbb{Z}) = 0$ の時, $A(X) = 0$ としておく)。

$\Delta(X)$ と $A(X)$ の間には次のような関係が成り立ちます [T].

X をコンパクト, 連結な 3次元多様体でオイラー数 ≤ 0 とする。この時,

$$\text{rank } H_1(X; \mathbb{Z}) \geq 2 \Rightarrow A(X) = \Delta(X)$$

$$\text{rank } H_1(X; \mathbb{Z}) = 1$$

$$\Rightarrow A(X) = \begin{cases} \Delta(X)(t-1)^{-1} & \text{if } \partial X \neq \emptyset \text{ or } \omega_1(\text{Tor } H_1(X; \mathbb{Z})) \neq 1 \\ \Delta(X)(t-1)^{-2} & \text{if } \partial X = \emptyset \text{ and } \omega_1(\text{Tor } H_1(X; \mathbb{Z})) = 1 \\ \Delta(X)(t^2-1)^{-1} & \text{if } \partial X = \emptyset, \omega_1(\text{Tor } H_1(X; \mathbb{Z})) = 1 \\ & \text{and } \omega_1(H_1(X; \mathbb{Z})) \neq 1 \end{cases}$$

ただしここで ω_1 は $H_1(X; \mathbb{Z})$ の位数無限大の生成元で $\omega_1: H_1(X; \mathbb{Z}) \rightarrow \{\pm 1\}$ は X の first Stiefel-Whitney class.

次に Alexander function の重要な性質である積公式を述べます [T].

X_1, X_2, Y をコンパクト, 連結な多様体で $Y = X_1 \cap X_2, X = X_1 \cup Y X_2$ と仮定

すると仮定する。また $j_*: \mathbb{Z}[H_1(Y; \mathbb{Z})/\text{Tor}] \rightarrow \mathbb{Z}[H_1(X; \mathbb{Z})/\text{Tor}]$,

$i_{\ell*}: \mathbb{Z}[H_1(X_{\ell}; \mathbb{Z})/\text{Tor}] \rightarrow \mathbb{Z}[H_1(X; \mathbb{Z})/\text{Tor}], \ell=1, 2$, を包含写像

から誘導される準同型とする。この時もし $j_* A(Y) \neq 0$ ならば

$$A(X) = i_{1*} A(X_1) \cdot i_{2*} A(X_2) \cdot \{j_* A(Y)\}^{-1}$$

が成り立つ。

L を 3次元球面内の向きを付けられた絡み目とする時 3次元多様体

$S^3 \setminus N(L)$ ($N(L)$ は L の管状近傍) の Alexander 多項式 (resp.

function) を L の Alexander 多項式 (resp. function) と呼ぶ。

$\Delta_L(m_1, \dots, m_n)$ or Δ_L (resp. $A_L(m_1, \dots, m_n)$ or A_L) と書く事にします。

次に後で必要となる計算をいくつか挙げておきます。

また Torres formula より次の補題はたちちに得られます。(Alexander 多項式の積公式からも得られます。)

補題1. 3次元球面内の向きを付けられたn-成分の絡み目 $L = l_1 \cup \dots \cup l_n$ に対し $2n$ -成分の絡み目 $L \cup \tilde{L} = l_1 \cup \dots \cup l_n \cup \tilde{l}_1 \cup \dots \cup \tilde{l}_n$ を図1のように定めろ。

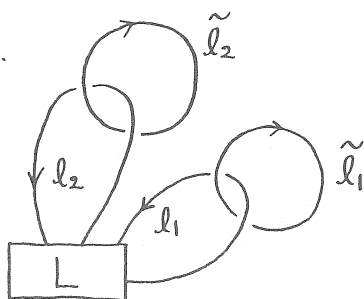


図1.

この時、 $m_i, \tilde{m}_i \in \mathbb{Z}$ を与え、 l_i, \tilde{l}_i の χ リンデーションとすると、次の式が成り立つ。

$$\prod_{i=1}^n (m_i - 1) \cdot A_L(m_1, \dots, m_n) = A_{L \cup \tilde{L}}(m_1, \dots, m_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ 個}})$$

また図2の絡み目 $h \cup h_i$ に対し与えられた χ リンデーション s_i, s_i とすると

$A_{h \cup h_i} = (s_i - 1)(s_i - 1)$ である事から補題1と Alexander function の積公式を用いる事によって次の補題2が得られます。

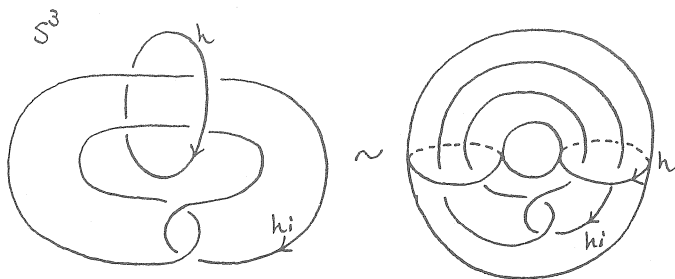


図2

補題2. 3次元球面内の向きを付けられたn-成分の絡み目 $L = l_1 \cup \dots \cup l_n$ に対し $2n$ -成分の絡み目 $L \cup h_1 \cup \dots \cup h_n$ を図3のように定める。

この時、 $m_i, s_i \in \mathbb{Z}$ を与え、 l_i, h_i の χ リンデーションとすると次の式が成り立つ。

$$A_{L \cup h_1 \cup \dots \cup h_n}(m_1, \dots, m_n, s_1, \dots, s_n) = \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \prod_{i=1}^n (s_i - 1) \cdot A_{L \cup \tilde{L}}(m_1, \dots, m_n, \underbrace{1, \dots, 1}_{n \text{ 個}})$$

ただしここで \tilde{L} は補題1の \tilde{L} とする。

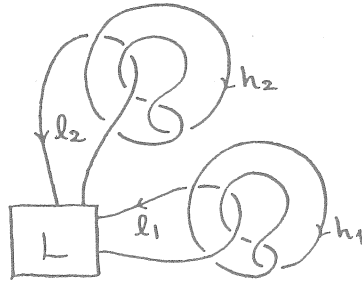


図3

絡み目 L に対し 3次元多様体 X_L を各 h_i で係数 0, 各 l_i で係数 $-\prod_{j \neq i} lk(l_i, l_j)$ の Dehn surgery をして得られるものと定義します。この時 $b_1(X_L) \geq n+1$ である事がわかり更に補題2と Alexander function の積公式より次の補題が成り立ちます。

補題3. $\pi_*: \mathbb{Z}[H_1(S^3 \setminus L; \mathbb{Z})] \rightarrow \mathbb{Z}[H_1(X_L; \mathbb{Z})/\text{Tor}]$ と包含写像

$\pi: S^3 \setminus L \hookrightarrow X_L$ から誘導される準同型とする時 次の式が成り立つ。

$$A(X_L) = \pi_* \left\{ \prod_{i=1}^n (m_i - 1) \cdot A_L(m_1, \dots, m_n) \right\}$$

3. 3次元 Seiberg-Witten 不変量 と generalized adjunction formula

まず始めに3次元 Seiberg-Witten 不変量の定義と Meng-Taubes の結果を述べます。詳しくは [M-T] を参照してください。

以下 X を連結で向きが付けられた閉3次元多様体とし、更に $b_1(X) > 1$ とします。([M-T] ではもう少し条件をゆるめている。) X の spin^c 構造 s を1つ固定すると determinant 表現から誘導される複素直線束と spin 表現から誘導されるランク2の複素ベクトル束が定まります。これを s と s をいれ $\det s, W_s$ と書いておきます。

spin^c 構造 s に対し $\det s$ の ± 1 を接続 A と W_s の切断 ϕ の組 (A, ϕ) に対する次の方程式を (3次元) Seiberg-Witten 方程式と呼ぶ可。

$$\begin{cases} F_A = \phi \otimes \phi^* - \frac{1}{2} |\phi|^2 + i\mu \\ D_A \phi = 0 \end{cases}$$

ただしここで μ は $[M-T]$ の中のいくつかの条件をみたす実 closed 2-form とし可。

(A, ϕ) が方程式の解とすると X から $U(1)$ の写像 q に対して $(2g^{-1}dq + A, q^{-1}\phi)$ もまた解となります。すなわち X から $U(1)$ の写像のなす群は方程式の解のなす空間に作用しています。この作用による商空間を \mathcal{M}_s と書く事にします。

この時実事として \mathcal{M}_s はコンパクトで向き付けられた 0次元多様体であることが分かっています。つまり \mathcal{M}_s は有限個の点から成り各点には ± 1 の符号が与えられています。

次に \mathcal{X} を以下のような集合であると定義します。

$$\mathcal{X} := \left\{ (s, \alpha) \mid s; \text{spin}^c \text{ 構造}, \alpha \in H^2(X; \mathbb{R}) / \text{Torsion} \right. \\ \left. \text{で } c_1(\det s) = \alpha \pmod{\text{Tor } H^2(X; \mathbb{R})} \right\}$$

よして写像 $SW: \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ を $(s, \alpha) \in \mathcal{X}$ に対して \mathcal{M}_s の各点の符号 ± 1 の総和を対応させると定義します。SW は X の計量などによらずに定義されます。次に $y = (s_0, \alpha_0) \in \mathcal{X}$ を一つ固定すると他の (s, α) に対し $\alpha - \alpha_0 = 2z$ なる元 $z \in H^2(X; \mathbb{R}) / \text{Torsion}$ が定まります。よして

$$SW_y(z) := \sum_{\{(s, \alpha); \alpha - \alpha_0 = 2z\}} SW(s, \alpha)$$

と定義し、更に $SW_y := \sum_z SW_y(z) \cdot z$

と定義します。これは群環 $\mathbb{R}[H^2(X; \mathbb{R}) / \text{Tor}]$ の元だとみなせる事がわかっています、つまり有限和です。 y を y' に代えると SW_y と $SW_{y'}$ は $H^2(X; \mathbb{R}) / \text{Tor}$ の元をかけたぶんだけ変わります。よして 3次元 Seiberg-Witten 不変量 $\underline{SW}(X)$ を $H^2(X; \mathbb{R}) / \text{Tor}$ の元の積 \otimes によって定まる SW_y によって定義します。

よして Meng と Taubes は次の定理を証明しました [M-T]。(説明を必要最小限に与えるためここでは次の形で書いておきます。)

(Meng-Taubes) X を連結、向きが付けられた閉 3次元多様体で $b_1(X) > 1$ と仮定する。この時 $H_1(X; \mathbb{Z})/\text{Tor} \cong H^2(X; \mathbb{Z})/\text{Tor}$ の同一視の右と次が成り立つ。

$$A(X) = \pm SW(X)$$

次に Seiberg-Witten 方程式の解を保つ埋め込まれた曲面の種数が下から評価できる事実からくりを説明します。

generalized adjunction formula. X を連結で向きが付けられた閉 3次元多様体で $b_1(X) > 1$ と仮定します。 Σ を X に滑らかに埋め込まれた閉曲面で種数 $g \geq 1$ としおきます。この時 $SW(s) \neq 0$ なる spin^c 構造 s に対して

$$2g - 2 \geq | \langle c_1(\text{det } s), [\Sigma] \rangle |$$

が成り立つ。ただし $[\Sigma]$ は Σ をサイクルとみなした時のホモロジー元で、 \langle, \rangle は H^2 と H_2 の自然な pairing としている。

証明は Kronheimer と Mrowka [K-M] のテューニークをそのまま 3次元に持ち込めば出来るのだが、天籟のほかに言うに次のように示します。まず

命題 1. (A, ϕ) が Seiberg-Witten 方程式の解ならば $|\phi|^2$ が最大の点において

$$|\phi|^2 \leq \max(0, 2|\mu| - K)$$

が成り立つ。ただしここで K はスカラー曲率で可。

これは局所的な最大値の原理を用いて証明されます。

次に Σ を X に滑らかに埋め込まれた閉曲面として $X_{\mathbb{R}}$ を図 4 のように計量を變化させたものとします。

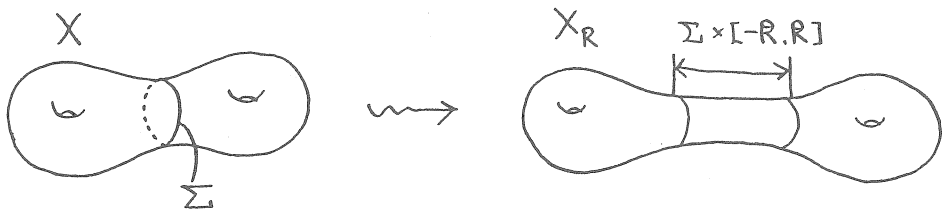


図4

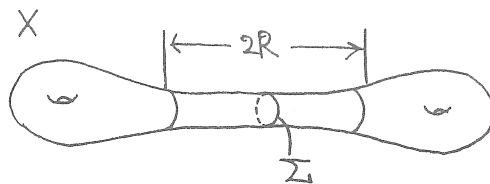
命題2. 十分大きい R に対し Seiberg-Witten 方程式が解をもつと可。この時 $\Sigma \times [-R, R]$ の部分で特に $(A(t), \phi(t)) := (A|_{\Sigma \times \{t\}}, \phi|_{\Sigma \times \{t\}})$

と可と

$$\frac{dA(t)}{dt} \equiv 0, \quad \frac{d\phi(t)}{dt} \equiv 0, \quad -\frac{R}{2} < t < \frac{R}{2}$$

と可。

今 generalized adjunction formula の仮定は $b_1(X) > 1$, $SW(s) \neq 0$ なのでこの条件下では X の計量 g (generic に) 変えてもいつでも方程式の解が存在するということになっています。そこで X の計量 g を次のようにとります。



計量 g を Σ 上で曲率 $-2\pi(4g-4)$

($\Rightarrow \Sigma$ の面積 1)

こうしておくと

$$|\langle c_1(\det s), [\Sigma] \rangle| = \left| \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} F_A \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \sup_{\Sigma} |F_A| \cdot (\Sigma \text{ の面積})$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} |\phi|^2$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{1}{2} 2\pi(4g-2) = 2g-2$$

$F_A = \phi \circ \phi^* \frac{1}{2} |\phi|^2 + i\mu$ を使う
ただし μ は小さくて可
なり無視可。

$\Sigma \times [-\frac{R}{2}, \frac{R}{2}]$ 上で命題
を使う。

となり generalized adjunction formula が証明されます。

4. 絡み目の種数の評価

L を 3次元球面内の絡み目とし、 X_L を前述した3次元多様体とします。この時に L の Seifert 曲面 S に対し X_L 内の滑らかに埋め込まれた閉曲面 \tilde{S} を図5のように定義します。

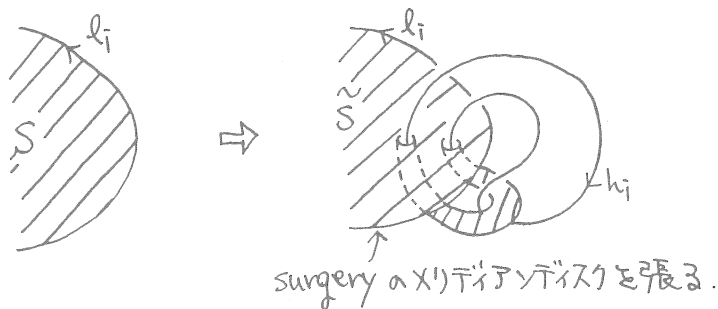


図5

S の種数を g とすると \tilde{S} の種数は $g+n$ で更に $b_1(X_L) \geq n+1$ ためからこの \tilde{S} に対して generalized adjunction formula を使ってやるというわけですね。

また $\underline{SW}(X)$ は対称な Laurent 多項式とみなせる事が知られています。つまり Meng-Taubes と合わせれば $A(X_L)$ は対称な Laurent 多項式とみなせるのでこれを A とおきます。

定理. S を絡み目 L の Seifert 曲面で種数を g とすると

$$\text{任意の } K \in \{k \in H_1(X_L; \mathbb{Z}) / \text{Tor} \mid A = \sum_k a_k \cdot k, a_k = a_{-k} \neq 0\} \text{ に対して}$$

$$g \geq |\text{int}(K, S)| + (1-n)$$

が成り立つ、ここで $\text{int}(K, S)$ は サイクル K と S のホモトピー的交点数。

証明はもうほとんど「反例がない」が generalized adjunction formula で必要とした $C_1(\det s)$ は \underline{SW} の定義からしては定まりません。しかし上の評価式を出された「けなら A のように対称にしておけば」OK なので。

$\langle k_i, k_j \rangle = 0$ には「一番すげえに書いた形の主張になります。」

参考文献

- [K-M] P.B. Kronheimer and T.S. Mrowka, The genus of embedded surfaces in the projective plane, Math. Res. Lett. 1 (1994), 797-808.
- [M-T] G. Meng and C.H. Taubes, \underline{SW} = Milnor torsion, Math. Res. Lett. 3 (1996), 661-674.
- [L] J. Levine, A method for generating link polynomial, Amer. J. Math. 89 (1967), 69-84.
- [T] V.G. Turaev, Reidemeister torsion in knot theory, Russ. Math. Surv. 41 (1986), 119-182.

EPIMORPHISMS AND MONOMORPHISMS IN PRO-HOMOTOPY AND PROPER HOMOTOPY

JERZY DYDAK AND FRANCISCO ROMERO RUIZ DEL PORTAL

ABSTRACT. A morphism of a category which is simultaneously an epimorphism and a monomorphism is called a bimorphism. A category is balanced if every bimorphism is an isomorphism. In the paper properties of bimorphisms of several categories are discussed (pro-homotopy, shape, proper homotopy) and the question of those categories being balanced is raised. Our most interesting result is that a bimorphism $f : X \rightarrow Y$ of $\text{tow}(H_0)$ is an isomorphism if Y is movable. Recall that $\text{tow}(H_0)$ is the full subcategory of $\text{pro} - H_0$ consisting of inverse sequences in H_0 , the homotopy category of pointed, connected CW complexes.

There is a considerable literature devoted to the properties of epimorphisms in the homotopy category H_0 . The question of whether H_0 is balanced has been open for a while with Dyer and Roitberg resolving it in positive and Dydak giving a simple proof of it. Essentially, both proofs consist of showing that a bimorphism of H_0 satisfies the hypothesis of the Whitehead Theorem (in the case of Dyer-Roitberg the authors prove a version of the Whitehead Theorem involving cohomology with local coefficients). Subsequently, Mukherjee generalized Dyer-Roitberg result to the equivariant case and Morón-Portal showed that the shape category of pointed, movable, metric continua is not balanced but every weak isomorphism is a bimorphism.

The purpose of this paper is to investigate if the following categories are balanced:

1. the pro-homotopy category,
2. the shape category of pointed, metric continua,
3. the proper homotopy category of rayed, strongly locally finite, connected, and connected at infinity CW complexes.

In cases 1 and 3 we are able to prove that every bimorphism is a weak isomorphism. However, it is known that one has difficulty finding an analog of the Whitehead Theorem in those categories and only partial cases are known. Thus we are not able to solve the problem of those categories being balanced completely but we provide additional assumptions to show that bimorphisms are isomorphisms.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TENNESSEE, KNOXVILLE, TENNESSEE 37996,
USA

DEPT. GEOMETRIA Y TOPOLOGIA, FAC. CC. MATEMATICAS, UNIVERSIDAD COMPLUTENSE,
28040 MADRID, SPAIN

E-mail address: dydak@math.utk.edu, R.Portal@mat.ucm.es

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ - $\mathcal{T}\mathcal{E}\mathcal{X}$

C^2 級の不安定葉層および安定葉層を持つ射影的アノソフ流について

東京大学大学院数理科学研究科 野田 健夫

1. 序

射影的アノソフ流は三松氏 [3] および Eliashberg-Thurston[1] によって定義された。これはアノソフ流と同様に不安定葉層と安定葉層を持つ。ここでは (不) 安定葉層が C^2 級であると仮定し、その葉層構造としての位相を調べ、以下の結果を得た：

- $T^2 \times I$ -モデル

$T^2 \times I$ 上の射影的アノソフ流で、境界を不安定葉層のコンパクト葉として持つものは (不) 安定葉層が C^2 級ならばある種のモデルと isotopic である。

- T^3

T^3 上の射影的アノソフ流は、(不) 安定葉層が C^2 級ならばコンパクト葉を持ち、更にモデルの有限和に分解される。

- T^2 上の S^1 束

非自明な T^2 上の S^1 束の上の射影的アノソフ流で、(不) 安定葉層が C^2 級になるものは存在しない。

- S^1 上の T^2 束

Monodromy が hyperbolic な S^1 上の T^2 束の上の射影的アノソフ流は、(不) 安定葉層が C^2 級でコンパクト葉を持つならば、モデルの有限和に分解される。

2. 定義と基本的性質

M を 3 次元閉有向多様体、 X を M 上の C^∞ 級非特異ベクトル場、 ϕ^t を X による流れとする。また、有向射影 S^1 束 (oriented projectified S^1 -bundle) $S^1(TM/T\phi)$ とは、 ϕ の normal bundle ν に対して $S^1_p(TM/T\phi) = (\nu_p - \{0\})/\mathbb{R}_+$ をファイバーとする S^1 束であるとする。

このとき射影的アノソフ流は次のように定義される：

定義 2.1. ϕ^t が射影的アノソフ流 (projectively Anosov flow) であるとは、 $S^1(TM/T\phi)$ 上に $d\phi$ -不変な 4 つの continuous section $\mathcal{E}_\pm^u, \mathcal{E}_\pm^s$ が存在し、 $\mathcal{E}_\pm^u, \mathcal{E}_\pm^s$ に含まれない点の

$d\phi$ による軌道は、 $t \rightarrow \infty$ で E_{\pm}^u に、 $t \rightarrow -\infty$ で E_{\pm}^s に漸近するときのことをいう。このとき、必然的に E_{+}^u, E_{+}^s はそれぞれ E_{-}^u, E_{-}^s に対し反対の位置にある (Figure 1)。

注意 2.2. Eliashberg-Thurston[1] で以下のように定義される等角的アノソフ流は射影的アノソフ流と同値な概念である。

ϕ^t が等角的アノソフ流 (conformally Anosov flow) であるとは、 $d\phi$ -不変な continuous splitting $TM/T\phi = \hat{E}^u \oplus \hat{E}^s$ が存在し、適当なリーマン計量 $\|\cdot\|$ と $C > 0$ をとればすべての $t > 0$ と 0 でないベクトル $v_u \in \hat{E}^u, v_s \in \hat{E}^s$ に対して

$$\frac{\|d\phi^t(v_u)\|}{\|d\phi^s(v_s)\|} \geq e^{Ct} \frac{\|v_u\|}{\|v_s\|} \quad (1)$$

が成り立つことである。

射影的アノソフ流は次のように特徴付けられる。

定義 2.3. 3次元多様体上の接平面場の組 (ξ, η) が、双接触構造 (bi-contact structure) であるとは、 ξ, η がそれぞれ正、負の接触構造であり、横断的に交わっているときのことをいう。

命題 2.4. ([1],[3]) ϕ^t が射影的アノソフ流であることと、 $\xi \cap \eta = T\phi$ となる双接触構造が存在することは同値である。

注意 2.5. アノソフ流が存在するならばそれに接する双接触構造が存在するが、逆は一般には成り立たない。この意味で射影的アノソフ流はアノソフ流の一般化である。

E_{\pm}^u, E_{\pm}^s から C^0 級接平面場 E^u, E^s が導かれる。 E^u, E^s は C^1 級るとき一意積分可能であり、余次元1の葉層構造 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ ができる。これを、それぞれ不安定葉層 (unstable foliation)、安定葉層 (stable foliation) と呼ぶ。 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ に関して次の命題が知られている。ただし、

$$\langle \alpha, \beta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \alpha \wedge d\beta + \beta \wedge d\alpha \quad (2)$$

であるとする。

命題 2.6. ([1]) ϕ^t が射影的アノソフ流で、その(不)安定葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ が C^1 級であるとする。このとき $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ を定める C^1 級1形式 α_u, α_s で

$$\langle \alpha_u, \alpha_s \rangle > 0 \quad (3)$$

となるものが存在する。逆に、1形式 α_u, α_s が上の不等式を満たすとき、 $\ker \alpha_u \cap \ker \alpha_s$ 上のベクトル場からできる流れは射影的アノソフ流であり、その(不)安定葉層は α_u, α_s によって定まる。

3. 例

はじめに基本的な例を1つ挙げる：

例 3.1. ([1]) (x, y, z) を $T^3 = \mathbb{R}^3/\mathbb{Z}^3$ の座標とする。このとき2つの1形式：

$$\alpha = dz - \cos 2\pi z dx, \quad \beta = dz + \sin 2\pi z dy \quad (4)$$

をとると、 $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$ となるので、命題 2.6 より α, β による葉層構造は射影的アノソフ流の(不)安定葉層になる (Figure 2)。

この例において、 α による葉層のコンパクト葉 ($\{z = \frac{1}{4}\}, \{z = \frac{3}{4}\}$) と β による葉層のコンパクト葉 ($\{z = 0\} = \{z = 1\}, \{z = \frac{1}{2}\}$) は z 軸に関して交互に現れており、各コンパクト葉上での流れは線形になっている。このような性質を一般化してモデルを構成することができる。

その前に $T^2 \times I$ 上の余次元 1 の基本的な葉層構造 $\mathcal{F}([\omega], i)$ ($i = 1, 2$) を定義しておく。

はじめに、 ω は T^2 上の線形な 1 形式、即ち実数 s, t に対して $\omega = s dx + t dy$ と表されているとする。

次に、 $\psi : I \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の条件を満たす関数とする：

- (i) $\psi(0) = \psi(1) = 0, |\psi(\frac{1}{2})| = 1$
- (ii) $|\psi(z)|$ は、 $0 < z < \frac{1}{2}$ で狭義単調増加、 $\frac{1}{2} < z < 1$ で狭義単調減少。

また、 $\theta : I \rightarrow \mathbb{R}$ は以下の条件を満たす関数とする：

- (i) $|\theta(0)| = |\theta(1)| = 1, \theta(\frac{1}{2}) = 0, \theta(0) = -\theta(1)$
- (ii) $\theta(z)$ は $0 < z < 1$ で狭義単調増加または狭義単調減少である。

これらの ω, ψ, θ に対し、

$$\Omega_1 = dz + \psi(z)\omega, \quad \Omega_2 = \theta(z) dz + \psi(z)\omega \quad (5)$$

は $T^2 \times I$ 上に葉層構造を定める。この Ω_i ($i = 1, 2$) によって定まるものを $\mathcal{F}([\omega], i)$ とおく (Figure 3)。

例 3.2. ($T^2 \times I$ -モデル)

はじめに、 T^2 上の線形な1形式 ω_u, ω_s で、 $\omega_u \wedge \omega_s > 0$ となるものをとる。

- $\mathcal{F}([\omega_u], i)$ ($i = 1, 2$) を定める1形式 $\Omega_u = \theta_u(z) dz + \psi_u(z) \omega_u$ を $\psi'_u(0) \neq 0, \psi'_u(1) \neq 0$ となるようにとる。
- $T^2 \times [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}], T^2 \times [\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$ 上に $\mathcal{F}([\omega_s], i)$ ($i = 1, 2$) を定める1形式 Ω'_s, Ω''_s をそれぞれとり、 $T^2 \times I (= T^2 \times [0, 1])$ 上の1形式 $\Omega_s = \theta_s(z) dz + \psi_s(z) \omega_s$ が \mathcal{C}^∞ 滑らかであり、 $\psi'_s(\frac{1}{2}) \neq 0$ になっているものとする。

このような Ω_u, Ω_s に対し、

$$(\Omega_u, \Omega_s) = (\psi'_u \psi_s - \psi_u \psi'_s) \omega_u \wedge \omega_s \wedge dz > 0 \quad (6)$$

となるので、命題 2.6 より Ω_u, Ω_s は射影的アノソフ流の(不)安定葉層を定める。

このようにして定まった $T^2 \times I$ 上の流れを $T^2 \times I$ -モデルと呼ぶことにする (Figure 4)。 $T^2 \times I$ -モデルを偶数個積み重ねて上下を貼り合わせれば T^3 上の射影的アノソフ流を構成することができる。

4. MOUSSU-ROUSSARIE の定理

ここで、主要結果の証明に必要な Moussu-Roussarie の定理 [4] を紹介する。以下において、 $\mathcal{F}([\omega], i)$ ($i = 1, 2$) は例 3.2 によって定めたものとする。

定理 4.1. \mathcal{F} を T^3 あるいは $T^2 \times I$ 上に定義された余次元1の C^2 級葉層構造とし、Reeb成分を持たず、横断的に向き付け可能であるとする ($T^2 \times I$ のときは \mathcal{F} は境界に接するものとする)。このとき次のいずれかが成り立つ。

- (i) \mathcal{F} がコンパクト葉を持たないならば T^3 上の線形な葉層構造 \mathcal{F}' 、即ち

$$\Omega = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz, \quad \alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R} \quad (7)$$

で定義される葉層構造に C^0 -isotopicである。

- (ii) \mathcal{F} がコンパクト葉を持つならば $\mathcal{F}([\omega], i)$ ($i = 1, 2$) を高々可算個積み重ねたものに C^0 -同相である。特に、 T^3 の場合には、連続性と向き付けの問題から $i = 2$ のものは(有限)偶数個である。

定義 4.2. T^2 上の2つの余次元1の葉層構造 f_0, f_1 が R -cobordantとは、 $T^2 \times I$ 上の余次元1の向き付け可能な葉層構造 \mathcal{F} で f_0, f_1 を境界に持ち、内部にReeb成分および半Reeb成分を持たないものが存在するときのことをいう。

定理 4.3. T^2 上の2つの余次元1の C^2 級葉層構造 f_0, f_1 が \mathcal{F} によって R -cobordant であるとき、次のいずれかが成り立つ：

- (i) \mathcal{F} がコンパクト葉を持つならば f_0, f_1 は線形な葉層構造に C^0 -isotopicである。
- (ii) \mathcal{F} がコンパクト葉を持たないならば、 \mathcal{F} は f_0, f_1 の isotopyを与える。

5. 主要結果

(不)安定葉層の位相に関して次が知られていた。

定理 5.1. ([3]) 射影的アノソフ流の(不)安定葉層は C^1 級ならば Reeb 成分を持たない。

系 5.2. $S^3, S^2 \times \mathbb{R}$ を普遍被覆に持つ多様体上には C^1 級の(不)安定葉層を持つ射影的アノソフ流は存在しない。

$T^2 \times I$ 上の射影的アノソフ流に関して次の結果を得た：

命題 5.3. $T^2 \times I$ 上の射影的アノソフ流の(不)安定葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ が C^2 級であり、 $T^2 \times \{0\}, T^2 \times \{1\}$ が \mathcal{F}^u のコンパクト葉のすべてであるとき、次が成り立つ。

- (i) \mathcal{F}^s は $\text{int}(T^2 \times I)$ 内にちょうど1枚コンパクト葉を持つ。
- (ii) $T^2 \times \{0\}, T^2 \times \{1\}$ 上の流れは同じ線形な流れに C^0 -isotopicである。
- (iii) $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ のコンパクト葉に関する linear holonomyは非自明である。

注意 5.4. 上の命題は、要するに、この条件の下で $T^2 \times I$ -モデルに C^0 -isotopic になるということである。特に、linear holonomyが非自明というのは例 3.2 の $\psi' \neq 0$ に対応している。

次に、 $f: T^2 \rightarrow T^2$ を T^2 の向きを保つ C^∞ 級自己同相とすると、 $M(f) \stackrel{\text{def}}{=} T^2 \times I / (x, 0) \sim (f(x), 1)$ で定まる3次元多様体を考える。

f を isotopy 類に関して分類すると $SL(2, \mathbb{Z})$ の元と考えることができ、更にそれは固有値に関して3つに分けることができる。

- (i) 2異虚固有値のとき：ある n に対して f^n は恒等写像と isotopic になる。即ち、 $M(f)$ は T^3 で有限被覆される。このとき f を楕円の (elliptic) という。
- (ii) 固有値が重根のとき： f で不変な閉曲線の homotopy 類がただ1つ存在する。また、 $M(f)$ は T^2 上の非自明な S^1 束になる。このとき f を放物的 (parabolic) という。

(iii) 2 異実固有値のとき：2つの固有ベクトル方向の線形な葉層構造で f -不変なものが存在する。このとき f を双曲的 (hyperbolic) という。

この3つの場合に対して次の結果を得た。

定理 5.5. T^3 上の射影的アノソフ流で、(不)安定葉層が C^2 級ならば $T^2 \times I$ -モデルを偶数個積み重ねたものに isotopic である。特に、 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ はコンパクト葉を (有限枚) 持つ。

定理 5.6. f が放物的のとき $M(f)$ 上の射影的アノソフ流で (不)安定葉層が C^2 級になるものは存在しない。

定理 5.7. f が双曲的のとき、 $M(f)$ 上の射影的アノソフ流で、(不)安定葉層が C^2 級であり、更にコンパクト葉を持つものは、 $T^2 \times I$ -モデルを偶数個積み重ねたものに isotopic である。また、このとき $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ を定める T^2 上の1形式 ω_u, ω_s による T^2 上の葉層構造は2つの固有ベクトル方向の線形な葉層構造である。

以上の命題および定理の証明において必要な補題を挙げておく。

まず、次の補題を使った。

補題 5.8. 点 p の ϕ^t による軌道 $o(p)$ 内に横断的に p に収束する点があるとする。このとき $o(p)$ の近傍に \mathcal{F}^u あるいは \mathcal{F}^s の葉で holonomy が非自明なものが存在する。

上の状況のとき、流れに横断的な円板 D をとると、ある増大列 $\{t_n\}$ に対し $\{p_n = \phi^{t_n}(p)\}$ が D 上 p に収束するようになれる。すると、各 n に対し p の近傍から p_n の近傍への局所同相写像 r_n が定義される。

いま D 上に p を原点とする $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ による直交座標を考え、

$$N_\varepsilon = \{(x, y) \in D : |x| < \varepsilon, |y| < \varepsilon\} \quad (8)$$

とおくと、この r_n による像は辺が $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ の葉に含まれる長方形となる。これに関して次が成り立つ。

補題 5.9. N_ε の r_n による像の縦と横の比は指数関数的に増大する。

6. 予想と問題

f が双曲的のとき、suspension によって $M(f)$ にはアノソフ流が入る。ここで、定理 5.7 に関連して次が予想される。

予想 6.1. f が双曲的のとき、 $M(f)$ 上の射影的アノソフ流で、(不)安定葉層が C^2 級であり、コンパクト葉を持たないならば、アノソフ流である。

現段階では、この条件の下で、 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ は suspension としてのアノソフ流の (不) 安定葉層に (同時にではなく) それぞれ isotopic であることがわかっている。

これから更に次のような問題が考えられる。

問題 6.2. 射影的アノソフ流は (不) 安定葉層が C^2 級でコンパクト葉を持たないならばアノソフ流であるか。

一方、コンパクト葉を持つ場合には次が予想される。

予想 6.3. 射影的アノソフ流は (不) 安定葉層が C^2 級でコンパクト葉をもつならば定理 5.5, 5.7 の形になっている。

最後に (不) 安定葉層の微分可能性について考えよう。定理 5.5, 5.6, 5.7 の仮定における C^2 級であるという条件は、Moussu-Roussarie の定理 (定理 4.1, 4.3) の適用においてしか使っていない。よって次が予想される。

予想 6.4. 定理 5.5, 5.6, 5.7 は C^1 級に対しても成立する。

では、 C^0 級ではどうだろうか。射影的アノソフ流の定義における section $\mathcal{E}_\pm^u, \mathcal{E}_\pm^s$ は C^0 級であったので、導かれる接平面場 E^u, E^s も一般には C^0 級にであり、一意積分可能とは限らない。また、 S^3 上の射影的アノソフ流で (不) 安定葉層が一意積分可能な例も知られている ([9])。このばあい系 5.2 より、(不) 安定葉層は C^0 級であることがわかる。

また、次のような問題も考えられる。

問題 6.5. 不安定葉層と安定葉層の一方が C^2 級 (あるいは C^1 級) のときに定理 5.5, 5.6, 5.7 はどのように表せるか。

REFERENCES

- [1] Y. Eliashberg and W.P. Thurston, *Confoliations*, University Lecture Series 13, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [2] H. Imanishi, *On the theorem of Denjoy-Sacksteder for codimension one foliations without holonomy*, J. Math. Kyoto Univ. 14 (1974), 607-634.

- [3] Y. Mitsumatsu, *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 45 (1995), no. 5, 1407-1421.
- [4] R. Moussu and R. Roussarie, *Relations de conjugaison et de cobordisme entre certains feuilletages*, I.H.E.S. Publ. Math. 43 (1974),142-168.
- [5] S.P. Novikov, *The topology of foliations*, Trudy Moskov. Mat. Ob. 14(1965),248-278, A.M.S. Transl.(1967),286-304.
- [6] R. Roussarie, *Plongements dans les variétés feuilletées et classification de feuilletages sans holonomie*, I.H.E.S. Publ. Math. 43 (1974),101-141.
- [7] 田村 一郎, 葉層のトポロジー, 岩波書店 (1976)
- [8] I. Tamura and A. Sato, *On transverse foliations*, I.H.E.S. Publ. Math. 54 (1981), 205-235.
- [9] H. Tsunoda, talk given at topology seminar at Izu, March 1998

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA, MEGURO-KU, TOKYO, 153 JAPAN
 e-mail address:noda@ms513yel.ms.u-tokyo.ac.jp

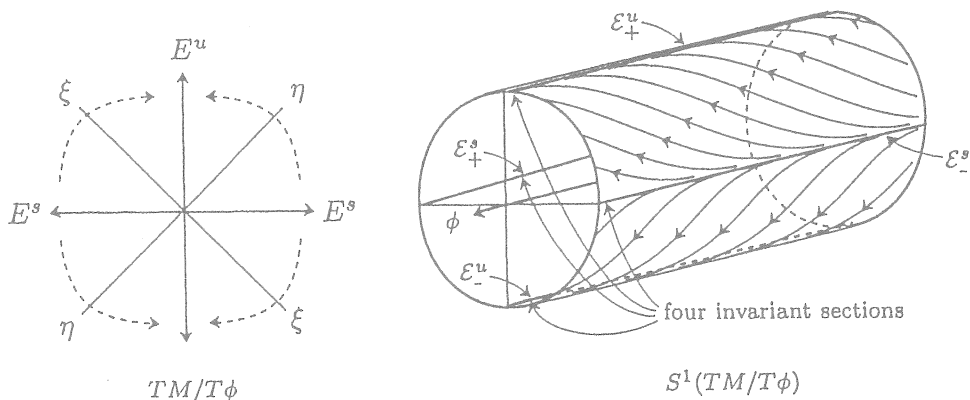


Figure 1

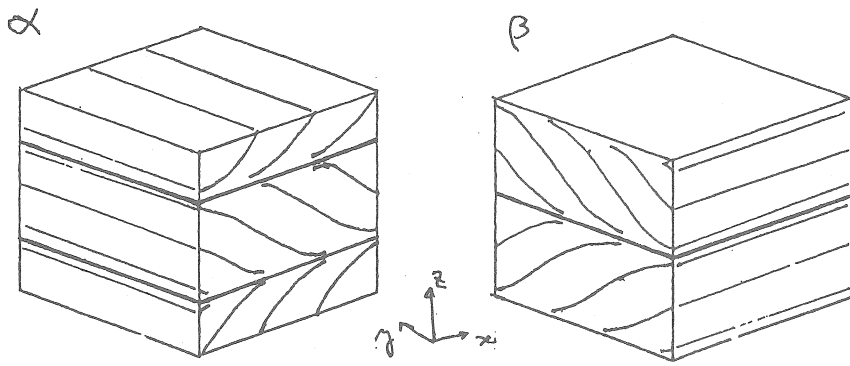


Figure 2

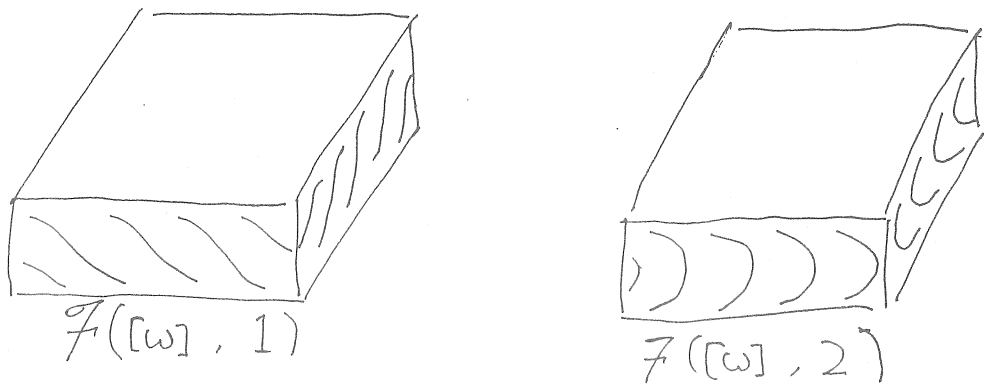


Figure 3

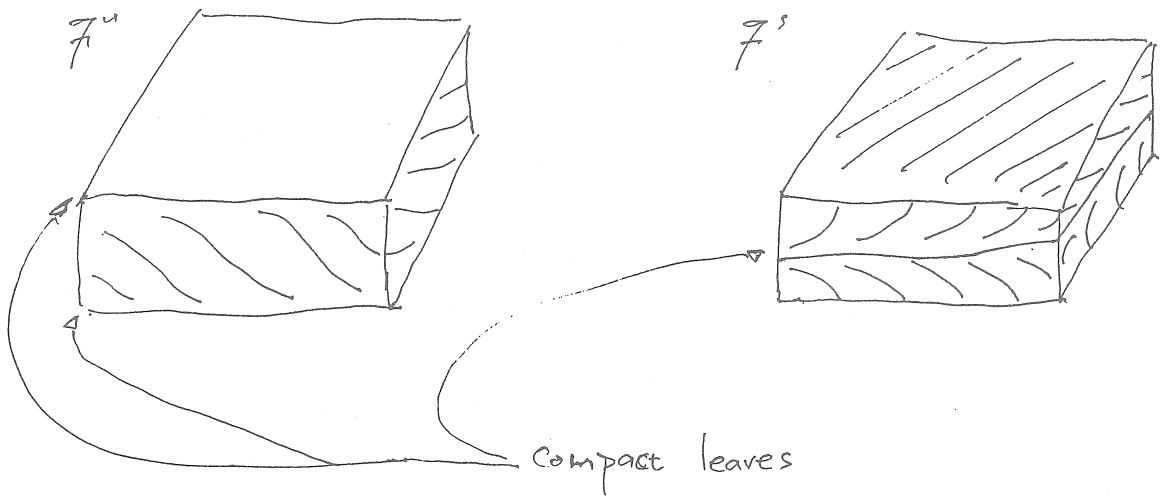


Figure 4

TORELLI 群と TORELLI 空間のホモロジー

秋田 利之 (福岡大学理学部)

1. はじめに

写像類群の部分群である Torelli 群とコンパクト Riemann 面のモデュライ空間の無限分岐被覆である Torelli 空間はトポロジー、代数幾何学、関数論などにおいて重要な研究対象です。実際 Torelli 群あるいは Torelli 空間は曲面束の特性類、3次元ホモロジー球面の様々な不変量、(レベル構造をもつ)Riemann 面のモデュライ空間などと密接に関連します。今回はとくに Torelli 群と Torelli 空間の (コ) ホモロジーに関して知られていることと最近筆者が得た結果を紹介したいと思います。

2. 定義

Σ_g を種数 g の有向閉曲面とする。本稿では種数 g は常に 2 以上と仮定する。 Σ_g の向きを保つ微分同相写像のイソトピー類全体のなす群 \mathcal{M}_g を Σ_g の写像類群 (mapping class group) という。言い換えると \mathcal{M}_g は Σ_g の向きを保つ微分同相全体からなる位相群 $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ (位相は C^∞ 位相) の連結成分の群である:

$$\mathcal{M}_g = \pi_0(\text{Diff}_+ \Sigma_g).$$

$H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ を Σ_g の 1次元ホモロジー群とする。 \mathcal{M}_g の $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ への自然な作用は交点形式を保つので $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を固定することにより表現

$$\rho: \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$$

が得られるが、この表現 ρ は古典的に全射であることが知られている。ここで $Sp(2g, \mathbb{Z})$ は

$$Sp(2g, \mathbb{Z}) = \{M \in GL(2g, \mathbb{Z}) : {}^t X J X = J\},$$
$$\left(J = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}, I_g \text{ は } g \text{ の単位行列} \right)$$

で定義され g 次の Siegel モデュラー群と呼ばれる (人によっては $Sp_g(\mathbb{Z})$ と書いたりするので注意)。表現 ρ の核 $\ker \rho$ は Torelli 群と呼ばれる。以下 Torelli 群を \mathcal{I}_g とあらわす。定義より次の群拡大が存在することがわかる:

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1.$$

1

より一般に $\Sigma_{g,r}^n$ を n 個の点 $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ が指定され境界の連結成分の個数が r 個の種数 g のコンパクト有向閉曲面とする。 $\text{Diff}_+(\Sigma_{g,r}^n, P \cup \partial\Sigma_{g,r}^n)$ を $\Sigma_{g,r}^n$ の向きを保つ微分同相写像で $P \cup \partial\Sigma_{g,r}^n$ 上恒等写像となるもの全体からなる群とする (位相は C^∞ 位相)。 $\Sigma_{g,r}^n$ の写像類群 $\mathcal{M}_{g,r}^n$ を

$$\mathcal{M}_{g,r}^n = \pi_0(\text{Diff}_+(\Sigma_{g,r}^n, P \cup \partial\Sigma_{g,r}^n))$$

により定義する。指定された点と境界のかわりにそれぞれ puncture, 埋め込まれた円板としても同じ群が得られる。とくに $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{g,0}^0$ である。 \mathcal{I}_g の場合と同様に $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を固定することにより全射表現 $\mathcal{M}_{g,r}^n \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$ が得られその核を Torelli 群と呼び $\mathcal{I}_{g,r}^n$ とあらわす。定義より次の群拡大が存在することがわかる:

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_{g,r}^n \rightarrow \mathcal{M}_{g,r}^n \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1.$$

注意 1. 実は $r+n > 1$ のとき Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}^n$ の定まった定義はない。上に述べた定義は [8, 10] で用いられたものであり [18] での定義とは異なる。

3. 背景

写像類群のコホモロジーは曲面束の特性類を与えると同時に Riemann 面のモデュライ空間のコホモロジーと (有理数体上) 一致する。同様に Torelli 群のコホモロジーは「ホモロジー的に自明な曲面束の特性類」を与えると同時に Torelli 空間と呼ばれる複素多様体のコホモロジーと一致する。この節では Torelli 群、曲面束の特性類および Torelli 空間などについて簡単に説明する。詳しくは [10, 13] を参照されたい。

3.1. **Torelli 空間.** 整数 $g \geq 2$ に対し \mathcal{T}_g を種数 g の Teichmüller 空間とする。 \mathcal{T}_g は点集合としては次のように記述される。種数 g の有向閉曲面 Σ_g を固定する。種数 g のコンパクト Riemann 面 R と向きを保つ微分同相写像 $f: R \rightarrow \Sigma_g$ のイソトピー類 $[f]$ の組 $(R, [f])$ を標識つき Riemann 面 (marked Riemann surface) という。二つの標識つき Riemann 面 $(R_1, [f_1]), (R_2, [f_2])$ は双正則写像 $h: R_1 \rightarrow R_2$ が存在して $[f_2 \circ h] = [f_1]$ を満たすとき同値であるという。 Teichmüller 空間 \mathcal{T}_g は点集合としては全ての標識つき Riemann 面の同値類と同一視されるのであった (\mathcal{T}_g の位相については [13, 14] を参照)。 \mathcal{T}_g は \mathbb{R}^{6g-6} と同相であることが知られている

写像類群 \mathcal{M}_g は

$$[\phi] \cdot (R, [f]) = (R, [\phi \circ f])$$

により \mathcal{T}_g に真性不連続に作用する。ただし $[\phi] \in \mathcal{M}_g$ は向きを保つ微分同相写像 $\phi: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ のイソトピー類をあらわす。商空間 $\mathbb{M}_g = \mathcal{T}_g / \mathcal{M}_g$ は種数 g のコンパクト Riemann 面の双正則同値類、すなわち種数 g のコンパクト

Riemann 面のモデュライ空間と同一視される。 \mathcal{T}_g が可縮であることと M_g の \mathcal{T}_g への作用が真性不連続であることから有理コホモロジーの同型

$$H^*(M_g, \mathbb{Q}) \cong H^*(\mathcal{M}_g, \mathbb{Q})$$

が成り立つ。

Torelli 群 \mathcal{I}_g は有限位数の元を持たないことが知られているので \mathcal{T}_g に自由に作用し、したがって商空間 $\mathbb{T}_g = \mathcal{T}_g/\mathcal{I}_g$ は複素多様体となる。さらに \mathcal{T}_g は可縮なので \mathbb{T}_g は \mathcal{I}_g の Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathcal{I}_g, 1)$ (あるいは分類空間 $B\mathcal{I}_g$) となる。 \mathcal{I}_g の (群の) コホモロジーは空間 $K(\mathcal{I}_g, 1)$ のコホモロジーに他ならないので同型

$$H_*(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z}) \cong H_*(\mathbb{T}_g, \mathbb{Z})$$

が成り立つ。 \mathbb{T}_g は Torelli 空間と呼ばれ、種数 g のコンパクト Riemann 面 R とシンプレクティック同型 $\gamma: H_1(R, \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ の組のモデュライと解釈されることが先に述べた Teichmüller 空間の記述から容易にわかる ([8, 10] を参照)。 M_g の \mathcal{T}_g への作用は Siegel モジュラー群 $Sp(2g, \mathbb{Z}) = M_g/\mathcal{I}_g$ の \mathbb{T}_g への真性不連続な作用を誘導し商空間 $\mathbb{T}_g/Sp(2g, \mathbb{Z})$ は M_g と一致する。言い換えれば自然な射影 $\mathbb{T}_g \rightarrow M_g$ は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ を被覆変換群とする無限分岐被覆である。

より一般に $n+r > 0$ の場合にも Teichmüller 空間 $\mathcal{T}_{g,r}^n$ が定義される。写像類群 $M_{g,r}^n$ は $\mathcal{T}_{g,r}^n$ に真性不連続に作用し商空間 $M_{g,r}^n = \mathcal{T}_{g,r}^n/M_{g,r}^n$ は n 個の点と r 個の接ベクトルが指定された種数 g のコンパクト Riemann 面のモデュライ空間と同一視される。Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}^n$ は有限位数の元を持たないので $\mathcal{T}_{g,r}^n$ に自由に作用ししたがって商空間 $\mathbb{T}_{g,r}^n = \mathcal{T}_{g,r}^n/\mathcal{I}_{g,r}^n$ は複素多様体となる。 $\mathbb{T}_{g,r}^n$ も Torelli 空間と呼ばれる。さらに $\mathcal{T}_{g,r}^n$ は可縮なので $\mathbb{T}_{g,r}^n$ は $\mathcal{I}_{g,r}^n$ の Eilenberg-MacLane 空間 $K(\mathcal{I}_{g,r}^n, 1)$ となる。したがって Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}^n$ の (コ)ホモロジーと Torelli 空間 $\mathbb{T}_{g,r}^n$ の (コ)ホモロジーは一致する。

さて g 次複素対称行列 $Z = X + \sqrt{-1}Y$ で虚部 $Y > 0$ であるもの全体の空間 \mathfrak{G}_g を次元 g の Siegel 上半空間という。

$$\sigma = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Sp(2g, \mathbb{Z}), Z \in \mathfrak{G}_g$$

に対し

$$Z \cdot \sigma = \frac{AZ + B}{CZ + D}$$

とすることにより Siegel モジュラー群 $Sp(2g, \mathbb{Z})$ は \mathfrak{G}_g に真性不連続に作用する。商空間 $\mathbb{A}_g = Sp(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathfrak{G}_g$ は次元 g の主偏極アーベル多様体のモデュライ空間と同一視される。さて Riemann 面 R に対しその Jacobi 多様体 $J(R)$ を対応させることにより周期写像 $M_g \rightarrow \mathbb{A}_g$ が定義される。周期写像が単射であるというのがいわゆる Torelli の定理であった。Torelli 空間のレベルでも周

期写像 $\mathbb{T}_g \rightarrow \mathcal{G}_g$ が定義され hyperelliptic locus 上で分岐する二重分岐被覆となっている。

Torelli 空間 \mathbb{T}_g は Riemann 面のモデュライ空間 \mathbb{M}_g と主偏極アーベル多様体のモデュライ空間 \mathbb{A}_g との差を表している。すなわち自然な射影 $\mathbb{T}_g \rightarrow \mathbb{M}_g$ と周期写像 $\mathbb{M}_g \rightarrow \mathbb{A}_g$ からなる系列

$$\mathbb{T}_g \rightarrow \mathbb{M}_g \rightarrow \mathbb{A}_g$$

はトポロジカルにはファイブレーションのように振舞う (実際には左の写像は全射、右の写像は Torelli の定理により単射なのであくまでトポロジカルな話である)。第一に $\mathbb{M}_g = \mathcal{T}_g/\mathcal{M}_g$, $\mathbb{A}_g = Sp(2g, \mathbb{Z}) \backslash \mathcal{G}_g$ はそれぞれ \mathcal{M}_g , $Sp(2g, \mathbb{Z})$ を (orbifold としての) 基本群とする orbifold の構造をつ。上の写像たちはともに orbifold の写像と見なすことができるので orbifold としての基本群 π_1^{orb} の準同型の列

$$\pi_1(\mathbb{T}_g) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{M}_g) \rightarrow \pi_1^{\text{orb}}(\mathbb{A}_g)$$

を誘導するがこれは前節でてきた完全系列

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow 1$$

に一致する。より形式的には次のようなスペクトル系列

$$E_2^{i,j} = H^i(Sp(2g, \mathbb{Z}), H^j(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q})) \Rightarrow H^{i+j}(\mathbb{M}_g, \mathbb{Q})$$

が存在し $E_2^{i,0} = H^i(\mathbb{A}_g, \mathbb{Q})$ となる (上の完全系列に対する Hochschild-Serre スペクトル系列の言い替えである)。

3.2. ホモロジー的に自明な曲面束の特性類. 有向閉曲面 Σ_g をファイバーとする微分可能な向きづけられたファイバー束 $\pi: E \rightarrow X$ を向きづけられた曲面束または Σ_g -束と呼ぶ。向きづけられた曲面束の構造群は $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ であるが $g \geq 2$ のとき Earle と Eille の結果 [6] により $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ の連結成分は可縮なので自然な射影 $\text{Diff}_+ \Sigma_g \rightarrow \mathcal{M}_g$ はホモトピー同値

$$B\text{Diff}_+ \Sigma_g \rightarrow K(\mathcal{M}_g, 1)$$

を誘導する。ただし $B\text{Diff}_+ \Sigma_g$ は $\text{Diff}_+ \Sigma_g$ の分類空間、 $K(\mathcal{M}_g, 1)$ は \mathcal{M}_g の Eilenberg-MacLane 空間である。 X 上の向きづけられた Σ_g -束は位相幾何学の一般論によりホモトピー集合 $[X, B\text{Diff}_+ \Sigma_g]$ で分類されるが上の結果より

$$[X, B\text{Diff}_+ \Sigma_g] = [X, K(\mathcal{M}_g, 1)]$$

となる。 $K(\mathcal{M}_g, 1)$ のコホモロジーは群 \mathcal{M}_g のコホモロジーと一致するので \mathcal{M}_g のコホモロジー類は曲面束の特性類とみなせる。これがトポロジーにおいて写像類群のコホモロジー (あるいは Riemann 面のモデュライ空間の有理コホモロジー) を研究する理由の一つであった (詳しくは [26] を参照)。

さて $\pi: E \rightarrow X$ を向きづけられた曲面束としよう。各 $x \in X$ に対し x 上のファイバーの座標変換たちがファイバーのホモロジーの恒等写像を誘導するとき $\pi: E \rightarrow X$ を「ホモロジー的に自明な曲面束」と呼ぶことにしよう (ここだけの用語)。 $G \subset \text{Diff}_+ \Sigma_g$ を Σ_g の微分同相写像で $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ 上恒等写像となるもの全体のなす部分群とする。すると G はホモロジー的に自明な曲面束の構造群であることが容易にわかるが、先にふれた Earle と Eells の結果により自然な写像 $G \rightarrow \mathcal{I}_g$ はホモトピー同値

$$BG \rightarrow K(\mathcal{I}_g, 1)$$

を誘導する。したがって Torelli 群のコホモロジー類はホモロジー的に自明な曲面束の特性類とみなすことができる。

3.3. その他. 種数 g のハンドル体 H_g とその向きを反対にしたコピー $-H_g$ の境界を Torelli 群の元 $\phi \in \mathcal{I}_g$ で貼り合わせることにより (向きづけ可能な) ホモロジー 3 球面 $M_\phi = H_g \cup_\phi -H_g$ が得られる。逆に任意のホモロジー 3 球面はこのようにして得られることが知られている。このことより Torelli 群の構造とホモロジー 3 球面との関係が問題となるが、ホモロジー 3 球面の Rohlin 不変量 [3], Casson 不変量 [23, 24, 25, 26, 27]、有限型不変量 [7] などと Torelli 群の構造との関係が研究されている。

他にも Torelli 群あるいは Torelli 空間は上に挙げた以外にレベル構造を持つ Riemann 面のモジュライ空間 (定義は後述) のコホモロジー、整数論などともかかわりがあるがそれらを解説するのは筆者の能力を越えるためふれない。[8, 10, 28] を参照されたい。

4. 歴史

ここでは Torelli 群のホモロジーに関する研究の歴史を振り返ることにする。実際のところは D. Johnson による一連の論文 [15, 16, 18, 19] で得られたいくつかの基本的な結果を除いて Torelli 群の構造はほとんど解っていない。(Johnson の結果については [17, 10] も参照)。Birman [2], Birman と Craggs [3], Powell [30] たちの先駆的な仕事ののち D. Johnson は種数 $g \geq 3$ の Torelli 群に対して以下に述べる結果を得た。まず Johnson は $g \geq 3$ のとき \mathcal{I}_g と $\mathcal{I}_{g,1}$ が有限生成であることを証明した [16]。また今では Johnson 準同型と呼ばれる $Sp(2g, \mathbb{Z})$ -同変な (全射) 準同型

$$\tau_{2,1}: \mathcal{I}_{g,1} \rightarrow \wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$$

と

$$\tau_2: \mathcal{I}_g \rightarrow \wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) / H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$$

を定義した [15]。ただし \wedge^3 は三重外積を表す。ここで $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ のシンプレクティック基底を x_i, y_j としたとき $x \mapsto (\sum_i x_i \wedge y_i) \wedge x$ により定義される写

像 $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z}) \hookrightarrow \wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ により $H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ を $\wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ の部分群とみなす。

さらに Johnson は Johnson 準同型の核を記述した。具体的には \mathcal{K}_g を分離単純閉曲線に沿った Dehn twist で生成される \mathcal{I}_g の部分群とする。 \mathcal{K}_g は森田茂之先生の一連の仕事 [23, 25, 27] により Casson 不変量と深く関連する。Johnson は $\ker \tau_2 = \mathcal{K}_g$ と $\ker \tau_{2,1} = \mathcal{K}_{g,1}$ を示した [18]。さらに Johnson は Torelli 群の整係数 1 次元ホモロジーを決定した [19]。具体的には Johnson 準同型 τ_2 と $\tau_{2,1}$ は 2-torsion を除いて同型になりしたがって

$$\begin{aligned} H_1(\mathcal{I}_g, \mathbb{Q}) &\cong \wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q}) / H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q}), \\ H_1(\mathcal{I}_{g,1}, \mathbb{Q}) &\cong \wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q}) \end{aligned}$$

となる。さらに 2-torsion はホモロジー 3 球面の Rohlin 不変量と関係する。上の同型は一般の Torelli 群 $\mathcal{I}_{g,r}^n$ に対する $Sp(2g, \mathbb{Z})$ -同変な同型

$$H_1(\mathcal{I}_{g,r}^n, \mathbb{Q}) \cong H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q})^{\oplus(n+r)} \oplus \wedge^3 H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q}) / H_1(\Sigma_g, \mathbb{Q})$$

へと一般化される [8, 10]。

一方 A. Miller と D. McCullough [21] は \mathcal{I}_2 が有限生成でないことを示した。G. Mess [22] は \mathcal{I}_2 が可算無限個の生成元をもつ自由群であることを stratified モース理論を用いて証明した。Johnson と J. Millson は $H_3(\mathcal{I}_3, \mathbb{Z})$ が無限生成自由アーベル群を部分群として含むことを示した ([22] を参照)。現在に至るまで $g \geq 3$ のとき $\mathcal{I}_{g,r}^n$ が有限表示を持つかどうかはわかっていない (一方 R. Hain は $g \geq 3$ のとき Torelli 群の Malcev Lie 環が有限表示可能であることを示し $g \geq 6$ のときには具体的な有限表示を与えられている [9])。Torelli 群の構造に関する他の結果は [17, 22, 10] とそれらの参考文献を参照されたい。

5. 主結果

さて $g \geq 3$ のときには Johnson の結果を用いることにより $H_1(\mathcal{I}_{g,r}^n, \mathbb{Q})$ は \mathbb{Q} 上有限次元となる。さらに Torelli 空間 $\mathcal{T}_{g,r}^n$ は有限次元複素多様体なので十分大きな i に対し $H_i(\mathcal{I}_{g,r}^n, \mathbb{Q})$ は自明である。一方 $H_*(\mathcal{I}_2, \mathbb{Q})$, $H_*(\mathcal{I}_3, \mathbb{Q})$ は無限次元となる。一般に $H_*(\mathcal{I}_{g,r}^n, \mathbb{Q})$ がどうなるかが問題となるが筆者は以下の結果を証明した。

定理 1. 全ての整数 $n, r \geq 0$ に対して $H_*(\mathcal{I}_{g,r}^n, \mathbb{Q})$ は g が $n+r$ に対して十分大きいとき無限次元となる。とくに $H_*(\mathcal{I}_g, \mathbb{Q})$, $H_*(\mathcal{I}_g^1, \mathbb{Q})$ と $H_*(\mathcal{I}_{g,1}, \mathbb{Q})$ は $g \geq 7$ に対して無限次元である。

例えば $n+r < 678$ ならば $g \geq 7$ とすれば $H_*(\mathcal{I}_{g,r}^n, \mathbb{Q})$ は無限次元となることが示せる。Johnson の結果とあわせると Torelli 群は一般には有限生成だがそのホモロジーは無有限生成であることになり、群の有限性条件 (finiteness condition) の観点からも興味深い群であることがわかる (有限性条件に関して

は [5] 参照)。Johnson は [17] で「Torelli 空間 \mathbb{T}_g^1 が有限複体のホモトピー型をもつか？」という問題を与えたが上の結果は Johnson の問題に否定的に答えるものである。

$n+r \leq 1$ に対して $\mathcal{K}_{g,r}^n$ を分離単純閉曲線に沿った Dehn twist で生成される $\mathcal{I}_{g,r}^n$ の部分群とする。 $\mathcal{K}_{g,r}^n$ の有理コホモロジー類は曲面束の二次特性類とみなすことができるのでそれ自体興味の対象となる ([27] を参照)。 $g=2$ のとき \mathcal{K}_2 は \mathcal{I}_2 と一致するので Mess の結果により無限生成自由群となる。一方 $g \geq 3$ のとき \mathcal{K}_g は自由群ではなくその構造はほとんど何もわかっていない。筆者は次の結果を得た。

定理 2. 全ての整数 $g \geq 2$ に対して有理ホモロジー $H_*(\mathcal{K}_g, \mathbb{Q})$, $H_*(\mathcal{K}_g^1, \mathbb{Q})$, $H_*(\mathcal{K}_{g,1}, \mathbb{Q})$ はいずれも無限次元である。

6. 証明の概略

定理の証明の概略を述べる。詳しくは [1] を参照されたい。簡単のため \mathcal{I}_g と \mathcal{K}_g のみを扱い $\mathcal{I}_{g,r}^n$ と $\mathcal{K}_{g,r}^n$ ($n+r > 0$) の場合は省略する。Torelli 空間の有理ホモロジー $H_*(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定すると有理ホモロジーによる Euler 数

$$\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{Q}} H_i(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q})$$

が定義される。定理たちの証明の鍵は $H_*(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q})$ が有限次元という仮定のもとで $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g)$ は Riemann 面のモデュライ空間 \mathcal{M}_g と主偏極アーベル多様体のモデュライ空間 \mathcal{A}_g の orbifold としての Euler 数を用いて

$$\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g) = e(\mathcal{M}_g)/e(\mathcal{A}_g)$$

とあらわせることである。ただし $e(-)$ は orbifold としての Euler 数をあらわす。そのためにレベル構造を持つモデュライ空間を導入する。整数 $L \geq 3$ を固定する。 $\Gamma(L)$ を $Sp(2g, \mathbb{Z})$ のレベル L の主合同部分群とする。すなわち $\Gamma(L)$ は全射準同型 (mod L reduction)

$$Sp(2g, \mathbb{Z}) \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$$

の核である。 $\Gamma(L)$ は $Sp(2g, \mathbb{Z})$ の指数有限で torsion-free な部分群でありしたがって \mathcal{S}_g に自由に作用する。商空間 $\mathcal{A}_g(L) = \Gamma(L) \backslash \mathcal{S}_g$ はレベル L 構造を持つ次元 g の主偏極アーベル多様体のモデュライ空間と同一視される。 $\mathcal{A}_g(L)$ は有限複体のホモトピー型をもつことが知られている (例えば [4, 31, 5] を参照)。

$\mathcal{M}_g(L) \subset \mathcal{M}_g$ を準同型 $\mathcal{M}_g \rightarrow Sp(2g, \mathbb{Z})$ による $\Gamma(L)$ の逆像とする。したがって次の群拡大が存在する。

$$1 \rightarrow \mathcal{I}_g \rightarrow \mathcal{M}_g(L) \rightarrow \Gamma(L) \rightarrow 1.$$

$\mathcal{M}_g(L)$ も \mathcal{M}_g の指数有限な torsion-free な部分群となり \mathcal{T}_g に自由に作用する。商空間 $\mathcal{M}_g(L) = \mathcal{T}_g / \mathcal{M}_g(L)$ はレベル L 構造を持つ種数 g の Riemann 面の

モデュライ空間と同一視される。 $\mathcal{M}_g(L)$ の \mathcal{T}_g への作用は $\Gamma(L) = \mathcal{M}_g(L)/\mathcal{I}_g$ の \mathcal{T}_g への自由な作用を誘導し商空間 $\mathbb{T}_g/\Gamma(L)$ は $\mathbb{M}_g(L)$ と一致する。 $\mathbb{M}_g(L)$ は有限複体のホモトピー型を持つことが知られている (例えば [13] を見よ)。

さて Siegel 上半空間 \mathfrak{S}_g は可縮なので射影 $\mathfrak{S}_g \rightarrow \mathbb{A}_g(L)$ は普遍主 $\Gamma(L)$ -束となる。同伴バンドル

$$\mathbb{T}_g \rightarrow \mathfrak{S}_g \times_{\Gamma(L)} \mathbb{T}_g \rightarrow \mathbb{A}_g(L) \quad (1)$$

は Torelli 空間 \mathbb{T}_g の Borel 構成に他ならない (ただし \mathbb{T}_g を $\Gamma(L)$ -空間と見なしている)。 $\Gamma(L)$ は \mathbb{T}_g に自由に作用するので、全空間 $\mathfrak{S}_g \times_{\Gamma(L)} \mathbb{T}_g$ は一般論より商空間 $\mathbb{T}_g/\Gamma(L) = \mathbb{M}_g(L)$ にホモトピー同値となる。Torelli 空間の有理ホモロジー $H_*(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定するとファイブレーションの Euler 数の積公式より

$$\chi(\mathbb{M}_g(L)) = \chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g) \cdot \chi(\mathbb{A}_g(L))$$

が成り立つ。射影 $\mathbb{A}_g(L) \rightarrow \mathbb{A}_g$ と $\mathbb{M}_g(L) \rightarrow \mathbb{M}_g$ は共に有限群 $Sp(2g, \mathbb{Z}/L\mathbb{Z})$ の作用による商であり orbifold としての被覆とみなせる。したがって

$$\begin{aligned} \chi(\mathbb{A}_g(L)) &= |Sp(2g, \mathbb{Z}/L\mathbb{Z})| \cdot e(\mathbb{A}_g) \\ \chi(\mathbb{M}_g(L)) &= |Sp(2g, \mathbb{Z}/L\mathbb{Z})| \cdot e(\mathbb{M}_g) \end{aligned}$$

となり

$$e(\mathbb{M}_g^n) = \chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g^n) \cdot e(\mathbb{A}_g) \quad (2)$$

を得る。

G. Harder [11] により

$$e(\mathbb{A}_g) = \prod_{k=1}^g \zeta(1-2k)$$

となり ([31, 5] も参照)、J. Harer と D. Zagier [12] により

$$e(\mathbb{M}_g^n) = \frac{1}{2-2g} \zeta(1-2g)$$

となる ([13, 29, 20] も見よ)。ただし ζ は Riemann の ζ 関数である。したがって

$$\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g^n) = \frac{1}{2-2g} \prod_{k=1}^{g-1} \frac{1}{\zeta(1-2k)}$$

となり $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g^n) \neq 0$ であることがわかる。しかし

$$\lim_{g \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{g-1} \frac{1}{\zeta(1-2k)} = 0$$

となることが領域 $\operatorname{Re} s > 1$ に対する ζ 関数の定義

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

と正の整数 k に関する関数等式

$$\zeta(1-2k) = (-1)^k \frac{2 \cdot (2k-1)!}{(2\pi)^{2k}} \zeta(2k)$$

から示されるので、 $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g)$ が定義より整数であることに矛盾する。

次に群 \mathcal{K}_g に関する定理の証明をのべる。 $g = 2$ のときは Torelli 群 \mathcal{I}_2 と一致するので無限生成自由群となる。以下 $g \geq 3$ とし簡単のため $H = H_1(\Sigma_g, \mathbb{Z})$ とおく。Johnson 準同型より誘導される完全系列

$$1 \rightarrow \mathcal{K}_g \rightarrow \mathcal{I}_g \xrightarrow{\tau_3} \wedge^3 H/H \rightarrow 1$$

は分類空間の間のファイブレーション

$$B\mathcal{K}_g \rightarrow B\mathcal{I}_g \rightarrow B(\wedge^3 H/H) \quad (3)$$

を誘導する。 \mathcal{I}_g の分類空間 $B\mathcal{I}_g$ は Torelli 空間 \mathbb{T}_g とホモトピー同値となる。また $\wedge^3 H/H$ は階数 $\binom{2g}{3} - 2g$ の自由アーベル群なので $B(\wedge^3 H/H)$ は $\binom{2g}{3} - 2g$ 次元のトラスとホモトピー同値となる。

$H_*(\mathcal{K}_g, \mathbb{Q}) \cong H_*(B\mathcal{K}_g, \mathbb{Q})$ が有限次元と仮定しよう。ファイブレーションの Euler 数の積公式を (3) に適用することにより $\dim_{\mathbb{Q}} H_*(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q}) < \infty$ であり (したがって $4 \leq g \leq 6$) また $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g)$ が

$$\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g) = \chi_{\mathbb{Q}}(B\mathcal{K}_g) \cdot \chi(B(\wedge^3 H/H)) = 0$$

を満たすことがわかる (最後の等式は $\chi(B(\wedge^3 H/H)) = 0$ であることによる)。しかし $\dim_{\mathbb{Q}} H_*(\mathbb{T}_g, \mathbb{Q}) < \infty$ ならば定理 1 の証明にあるように $\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g)$ は

$$\chi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{T}_g) = \frac{1}{2-2g} \prod_{k=1}^{g-1} \frac{1}{\zeta(1-2k)} \neq 0$$

を満たさなければならない。よって矛盾となる。

7. 捕捉

定理 1 と定理 2 およびその証明からは Torelli 群 \mathcal{I}_g と群 \mathcal{K}_g のホモロジーの具体的な構造はわからない。例えば「何次元のホモロジーまで有限生成か?」という問いには全く答えていない。より具体的な証明が望まれる。出発点として Torelli 群が有限表示を持つかどうかを明らかにしなければならないが (有限表示可能であれば $H_2(\mathcal{I}_g, \mathbb{Z})$ が有限生成であることがわかる)、先に触れたようにそれすらも今のところはわかっていない。

REFERENCES

1. Toshiyuki Akita, *Homological infiniteness of Torelli groups* (preprint).
2. Joan S. Birman, *On Siegel's modular group*, Math. Ann. **191** (1971), 59–68.
3. Joan S. Birman and R. Craggs, *The μ -invariant of 3-manifolds and certain structural properties of the group of homeomorphisms of a closed, oriented 2-manifold*, Trans. Amer. Math. Soc. **237** (1978), 283–309.
4. A. Borel and J.-P. Serre, *Corners and arithmetic groups*, Comment. Math. Helv. **48** (1973), 436–491, Avec un appendice: Arrondissement des variétés à coins, par A. Douady et L. Hérault.
5. Kenneth S. Brown, *Cohomology of groups*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York, 1982.
6. Clifford J. Earle and James Eells, *A fibre bundle description of Teichmüller theory*, J. Differential Geometry **3** (1969), 19–43.
7. S. Garoufalidis and J. Levine, *Finite type 3-manifold invariants and the structure of the Torelli group. I*, Invent. Math. **131** (1998), no. 3, 541–594.
8. Richard Hain, *Torelli groups and geometry of moduli spaces of curves*, Current topics in complex algebraic geometry (Berkeley, CA, 1992/93), Math. Sci. Res. Inst. Publ., vol. 28, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995, pp. 97–143.
9. ———, *Infinitesimal presentations of the Torelli groups*, J. Amer. Math. Soc. **10** (1997), no. 3, 597–651.
10. Richard Hain and Eduard Looijenga, *Mapping class groups and moduli spaces of curves*, Algebraic geometry—Santa Cruz 1995, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 62, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, pp. 97–142.
11. G. Harder, *A Gauss-Bonnet formula for discrete arithmetically defined groups*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) **4** (1971), 409–455.
12. J. Harer and D. Zagier, *The Euler characteristic of the moduli space of curves*, Invent. Math. **85** (1986), no. 3, 457–485.
13. John L. Harer, *The cohomology of the moduli space of curves*, Theory of moduli (Montecatini Terme, 1985), Lecture Notes in Math., vol. 1337, Springer, Berlin, 1988, pp. 138–221.
14. Y. Imayoshi and M. Taniguchi, タイヒミューラー空間論, 日本評論社, 1989.
15. Dennis Johnson, *An abelian quotient of the mapping class group \mathcal{I}_g* , Math. Ann. **249** (1980), no. 3, 225–242.
16. ———, *The structure of the Torelli group. I. A finite set of generators for \mathcal{I}* , Ann. of Math. (2) **118** (1983), no. 3, 423–442.
17. ———, *A survey of the Torelli group*, Low-dimensional topology (San Francisco, Calif., 1981), Contemp. Math., vol. 20, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1983, pp. 165–179.
18. ———, *The structure of the Torelli group. II. A characterization of the group generated by twists on bounding curves*, Topology **24** (1985), no. 2, 113–126.
19. ———, *The structure of the Torelli group. III. The abelianization of \mathcal{I}* , Topology **24** (1985), no. 2, 127–144.
20. Maxim Kontsevich, *Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function*, Comm. Math. Phys. **147** (1992), no. 1, 1–23.
21. Darryl McCullough and Andy Miller, *The genus 2 Torelli group is not finitely generated*, Topology Appl. **22** (1986), no. 1, 43–49.
22. Geoffrey Mess, *The Torelli groups for genus 2 and 3 surfaces*, Topology **31** (1992), no. 4, 775–790.
23. Shigeyuki Morita, *Casson's invariant for homology 3-spheres and characteristic classes of surface bundles. I*, Topology **28** (1989), no. 3, 305–323.
24. ———, *On the structure and the homology of the Torelli group*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **65** (1989), no. 5, 147–150.

25. ———, *On the structure of the Torelli group and the Casson invariant*, *Topology* **30** (1991), no. 4, 603–621.
26. ———, 曲面束の特性類と Casson 不変量, *数学* **43** (1991), no. 3, 232–247.
27. ———, *Casson invariant, signature defect of framed manifolds and the secondary characteristic classes of surface bundles*, *J. Differential Geometry* **47** (1997), no. 3, 560–599.
28. Hiroaki Nakamura, 副有限基本群のガロア剛性, *数学* **47** (1995), 197–231.
29. R. C. Penner, *Perturbative series and the moduli space of Riemann surfaces*, *J. Differential Geom.* **27** (1988), no. 1, 35–53.
30. Jerome Powell, *Two theorems on the mapping class group of a surface*, *Proc. Amer. Math. Soc.* **68** (1978), no. 3, 347–350.
31. J.-P. Serre, *Arithmetic groups*, *Homological group theory* (Proc. Sympos., Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Note Ser., vol. 36, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1979, pp. 105–136.

福岡大学理学部応用数学教室

E-mail address: akita@sm.fukuoka-u.ac.jp

3次元多様体上の双接触構造 (=射影的 ANOSOV 流)

三松 佳彦 (中央大学 理工学部)

§0 序

接触構造 (=まるで積分不可能な超平面場) と 葉層構造 (=完全積分可能な接分布) とは水と油のようなものであるが、特に3次元多様体に於ける接触構造と余次元1葉層構造の微分位相幾何の間には、近年、密接な関係があることが分かってきた。実際、双方におけるテクニックや支配的な考え方の類似は以前から多くの人々に‘何となく’認識されていた。特に Eliashberg, Gromov, Thurston の双方における仕事や、坪井、Ghys 達のこれらの事情に対する認識は、何かが存在することを十分に予想させるものであった。そして Eliashberg-Thurston による *confoliation* ([ET]) の理論の登場により遂にその秘密の一部をはっきりとした姿で見せることとなった。

ここでは、3次元多様体上の双曲的な力学系である Anosov flow から生まれた双接触構造の概念 (及びこれと同値な projectively Anosov flow) とその topology について、3次元接触 topology や *confoliation* の理論と共に報告する。

Anosov flow に付随する Anosov 葉層構造は *taut* であり、*symplectic* にも *fillable* である。又、付随する接触構造も強い意味で *symplectically fillable* (強擬凸領域の境界のようなもの) である。つまり双方共に強い凸性を示すのであるが、一般の projectively Anosov flow の場合には、付随する可積分系が微分可能性を持たず、葉層構造を定めるとは限らない。この病理現象は避け難く起り、理論の進展を妨げている。一方で、その微分可能性を適当に仮定すると、今回の野田氏の講演にあるように、よい分類などの結果が得られ始めている。このような二つの側面と構造の凸性 (特に付随する接触構造の *tight* 性) を中心に概説するつもりである。

§1 3次元多様体上の接触構造

先ず、3次元接触構造に関する基礎的な事項をまとめる。詳しくは [AV], [B1], [E4], [Gi], [K1] 等を参照のこと。簡単の為、葉層構造や接触構造は横断的に向きのついたものだけを考える。さて、3次元多様体上の接触構造とは至る所 $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ をみたす1次微分形式 (接触形式) により $\xi = \ker \alpha$ として定義される平面場 ξ のことである。接触構造 ξ は接触形式 α の選び方によらずに多様体に $\alpha \wedge d\alpha$ により向きを与える。これが多様体の向きに一致している場合に、正、又は共向な接触構造という。

古典力学的な例 閉曲面 Σ の単位余接束 $S^1(T^*\Sigma)$ に定義される Liouville 接触構造 ($\alpha = pdq$).

量子力学的な例 閉曲面 Σ 上の非自明な euler 類を持つ S^1 -束の至る所曲率の消えない S^1 -接続が決める水平分布。

最も重要な例 Hopf fibration $S^3 \rightarrow S^2$ の fibre に垂直な平面場として定義される標準的接触構造 (S^3, ξ_0) , $\alpha_0 = \sum_{i=1,2} x_i dy_i - y_i dx_i$.

これらは *tight* であり、*fillable* でもある。

Darboux の定理 接触 1 形式は局所座標 (x, y, z) の変換により $dz + xdy$ と表される。

Gray の定理 接触 1 形式の 1 径数族 ξ_t は $\dot{\Phi}_t = X_t$, $\alpha_t \wedge \dot{\alpha}_t = \iota_{X_t}(\alpha_t \wedge d\alpha_t)$ で定まる イソトピー Φ_t で追跡される。

3 次元接触構造は、tight と over twisted (OT) の二つのクラスに分かれる。 ξ が OT であるとは、 $\xi \cap \mathcal{D}$ が limit cycle を持つような埋め込まれた 2-disk \mathcal{D} が存在することである。任意の接触構造は Lutz twist ([Lu]) という (葉層構造に横断的ループに沿って Reeb 成分を挿入する turbulization にそっくりの) 操作により必ず OT に作り替えることができる。つまり tight のほうが無駄のない構造だと思われる。

Martinet の定理 任意の有向閉 3 次元多様体上に共向な接触構造が存在する。

重要な問題 任意の有向閉 3 次元多様体上に tight かつ共向な接触構造が存在するか?

OT については、次の Eliashberg の定理により、Gray の定理と合わせると OT 接触構造のイソトピー分類は平面場のイソトピー分類、つまり $[M; S^2]$ に帰着してしまう。

Eliashberg の定理 ([E1]) 任意の有向閉 3 次元多様体 M に対して $\{M$ 上の OT 接触平面場 $\} \leftrightarrow \{M$ 上の平面場 $\}$ はホモトピー同値。

§2 Fillability & Tightness

一般に接触構造が tight であることを示すのは大変に難しいが、現在おおむね 3 通りの方法が知られている。Bennequin の仕事が最初のものである。

Bennequin の定理 ([B1]) (S^3, ξ_0) は tight である。

実際 Bennequin は、Legendrian knot (link) の self-linking を Seifert 曲面の Euler 標数で評価する Bennequin の不等式を示すことによりこの定理を得たが、その不等式は更に、接触構造 ξ に横断的な knot に対する Thurston-Bennequin の不等式から得られる。

Bennequin の不等式 ([B1], [B2], [E5]) Legendrian knot Γ とその Seifert surface Σ に対して ξ の法方向への Γ の shift を Γ^\perp 、 ξ の自明化に対する Γ を一周するときの Γ の回転数を $\mu(\Gamma)$ とするとき、

$$lk(\Gamma, \Gamma^\perp) \leq -\chi(\Sigma) \pm \mu(\Gamma).$$

Thurston-Bennequin の不等式 ([B1], [B2], [E3]) Seifert 曲面 Σ をもつ knot Γ が接触構造 ξ に正の向きに横断的であるときに、 $\xi|_\Sigma$ の自明化の Γ への制限として Γ に framing X を与え、それによる Γ の shift を Γ^X とすると、

$$lk(\Gamma, \Gamma^X) \leq -\chi(\Sigma).$$

注意 まだどの様な接触構造に対して不等式が成立するかを述べていない。

実は、この不等式の設定に於ける接触構造を葉層構造に取り替えたものが Thurston の不等式と呼ばれているもので、Reeb 成分を持たない葉層に対して成立する ([Th])。Bennequin は先ずこれを S^3 上の Reeb 葉層構造に対して示した。(Reeb 葉層はもちろん Reeb 成分からできているが、'無駄のない' 良い葉層なので不等式が成り立つ。) 一般の多様体上で接触構造の tight 性と Bennequin の不等式が同値であることが、Elimination Lemma [Gi], [E3], [E4] を使うことにより示せる ([E5])。

第 2 の方法は、symplectic filling である。これは多変数複素解析に於ける強擬凸性の symplectic 版である。

複素多様体 Ω 上に proper で下に有界な狭義多重劣調和関数 ϕ が存在するとき Stein 多様体であるといい、その正則値 a の sub-level set $W = \phi^{-1}((-\infty, a])$ を強擬凸領域(または Grauert 領域)、その境界 $M = \partial W$ を強擬凸境界という。(実は関数 ϕ は境界の近傍で定義されていれば良い)。

このとき、 W の複素構造 J と両立する symplectic 構造が $\omega = -dJ^*d\phi$ により W に与えられる。つまり、 $g(u, v) = \omega(u, Jv)$ が J -不変 Riemann 計量を与える(このことと ϕ が狭義多重劣調和であることが全く同値であり、Kähler 構造が与えられたことになる)。更に $\lambda = -J^*d\phi$ が M 上の接触形式 $\alpha = \lambda|_M$ を与える。この接触構造 ξ は概複素構造 J の言葉で言うと $\xi = TM \cap J(TM)$ として与えられたことになる。接触構造 ξ に対しこの様になっている複素多様体 W を holomorphic filling、接触構造 ξ を holomorphically fillable であるという。

勾配ベクトル場 $Z = \nabla\phi$ は

$$(C): \quad \mathcal{L}_Z\omega = \omega, \quad Z \text{ は } \partial W \text{ で外向き}$$

満たすので $\iota_Z(\omega) = \lambda$ も自然に満たされるが、実際この場合 $d\lambda = \omega$ である。((S^3, ξ_0) は fillable である。($\Omega = \mathbb{C}^2, \phi(z_1, z_2) = 4^{-1}(\|z_1\|^2 + \|z_2\|^2), Z = 2^{-1} \sum_{i=1,2} (x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}), \omega = \sum_{i=1,2} dx_i \wedge dy_i$))

そこで、一度複素構造を忘れ、条件 (C) を満たすベクトル場 Z が存在する境界付き compact symplectic 多様体 (W, ω) を接触構造 $(M = \partial W, \xi)$ の strong symplectic filling、接触構造 ξ を strongly symplectically fillable である、という ([EG], [W], [B2])。この様な symplectic 多様体の境界を取り去り end を無限に伸ばしたものは完備凸 symplectic 構造とも呼ばれる。(つまり Stein の symplectic 版(の弱いもの)、Morse 関数も付いている強い version は Weinstein 多様体と呼ばれ、殆ど Stein である ([E2])。) ここでは、境界付きのものを凸 symplectic 構造と云うことにする。

もう少し弱い fillability として接触構造 $(M = \partial W, \xi)$ に対して $\omega|_\xi$ が非退化 (3次元の場合は $\omega|_\xi > 0$) なる compact symplectic 多様体 (W, ω) が存在するとき、symplectically fillable という。Holomorphic filling では境界は自動的に連結! (ϕ の Morse 理論を考えると分かる) であるが、(strong) symplectic filling の場合は M が ∂W の連結成分 (の内の幾つか) の場合も fillable ということにする (区別するときは semi-fillable という)。勿論、holomorphically fillable \Rightarrow strongly symplectically fillable \Rightarrow symplectically fillable である。

Gromov-Eliashberg の定理 ([G], [E3]) symplectically fillable \Rightarrow tight.

一つの証明は、背理法により OT-disk の存在を仮定し、それに Bishop-disk の議論を J-正則曲線の理論のせて使うと、bubbling-off にかかわる矛盾を導く ([G])。この議論の方法は、後に Hofer により OT または $\pi_2 \neq \{0\}$ の場合の Weinstein 予想の解決に逆手をとって使われた。つまり、その bubbling-off の end に周期解が見えることを見出した。([H], [HK], [L], [O])。

一方、Thurston-Bennequin の不等式を直接示すこともできる。概複素曲面内の実曲面がどの位 J-正則曲線らしくないかを位相的に計る d_- という特性数があるが、このとき ThB-不等式は $d_-(\Sigma \subset W) \leq 0$ と同値になる。やはり Bishop-disk の議論を適用してこれが示せる ([E3], [B2])。

どちらの証明でも、凸な境界には内側から J-正則曲線が接触できないということが重要である。その為に概複素構造 J が接触構造を $\xi = TM \cap J(TM)$ として定義するようにとらねばならない。このとき strong symplectic filling と symplectic filling の違いは、概複素構造 J が symplectic 構造と compatible であるか tame なだけかということになる。

ところで、 $d_-(\Sigma \subset W) \leq 0$ という式は Thom 予想と同じである!! Seiberg-Witten 理論は Thom 予想を証明できる ([KM1]) ので、これも証明できるか、又は何らかの応用があるか?と期待されていたところ、実際 Kronheimer-Mrowka により、fillable 接触構造の超平面場のホモトピー類としての有限性が証明され ([KM2])、fillable \Rightarrow tight の証明も可能であると announce されている。Symplectic filling への Seiberg-Witten 理論の適用については他にも応用が得られ始めている ([LM], [OO], [K2])。

第 3 の方法は、上に述べた Hofer の仕事の延長にあるもので、Reeb ベクトル場に可縮な周期軌道が無ければ tight である、というものである ([H], [HK])。何れにしても、symplectic filling や symplectization に対して J-正則曲線の理論を使った解析を行なうのが有効であることはもはや疑いの余地も無く、例えば、contact homology 等の概念が Hofer の一連の仕事や symplectic Floer homology の理論を背景として築かれつつある。

§3 Confoliation と Fillable 接触構造の存在

葉層構造から接触構造を作り出してしまうのが confoliation の理論の中核である。これにより fillable な接触構造が量産される。この節の第 1 部では葉層構造の接触構造への変形、第 2 部で何故 fillable 接触構造が得られるのか、の枠組みだけを Confoliations ([ET]) に従って述べる。それらを Gabai の仕事 ([Ga]) にのせてまとめて神田 雄高氏が 2 年前のトポロジーシンポジウムで解説されている (残念ながら、[K1] にはその記述は無い)。

3-1 接触構造への変形

3-1-1 Confoliation への摂動 葉層構造 \mathcal{F} の葉に沿うループ γ で非自明な linear holonomy を持つものがあれば、そのループ γ の十分小さい管状近傍 U 上だけで $\pi\mathcal{F}$ を小さく変形した平面場 ξ_1 で

- ξ_1 は U 上では正の接触構造となっている
- U の外では ξ_1 は $\tau\mathcal{F}$ と一致している

ようなものが存在する。これは、射影的 Anosov 流の概念によっても説明できる。このとき、 $\ker\alpha_1 = \xi_1$ となる 1-形式 α_1 をとれば $\alpha_1 \wedge d\alpha_1 \geq 0$ である。この様な平面場を **confoliation** と呼ぶのである。

3-1-2 Non-integrability の propagation 一般に confoliation η に対して、その contact(non-integrable) part を $C(\eta) = \{x \in M; (\beta \wedge d\beta)_x > 0\}$, foliation(integrable) part を $F(\eta) = \{x \in M; (\beta \wedge d\beta)_x = 0\}$ とするとき、 $C(\eta)$ の non-integrability を $F(\eta)$ の葉に沿って propagate させることができる。ここで β は η を定義する 1-形式である。Altschuler は熱方程式によって非可積分性を拡散させてみせた ([A]) が、Darboux 座標の作り方をよくみれば極めて簡単に座標近傍ごとに拡散させていくことができる ([ET])。

3-1-3 葉層構造の極小集合 ここでは、 C^2 -級余次元 1 葉層構造の定性理論の基礎が必要になる。

例外極小集合や、holonomy を持つ稠密極小集合は非自明な linear holonomy を持つので、holonomy の無い葉層、または compact 葉が問題である。Holonomy の無い葉層は、簡単に S^1 上の fibration で近似できる。Compact 葉が重なった部分を非自明な linear holonomy を持つように摂動するのは極めて容易である。非自明な holonomy を持ちながら linear holonomy が自明な compact 葉が厄介だが、横断的な微分構造を変更すると思えば、葉層の接束の C^0 で小さな摂動でうまく linear holonomy を創り出せる。

以上の操作により、 $(S^2 \times S^1, \zeta = \{S^2 \times \text{pt.}\})$ 以外の葉層構造は、linear holonomy の support の saturation が M 全体になるように葉層構造のまま小さく摂動できる。

この結果に、3-1-1、3-1-2 を順次適用すれば、 ζ 以外の任意の葉層構造は任意に小さい摂動で正 (勿論負も同様) の接触構造で近似される。

3-2 Symplectic Filling の生成

3-2-1 Sullivan の定理 ([ET]) 横断的に有向な余次元 1 葉層構造 (M, \mathcal{F}) に対し以下は同値。

- 任意の葉は横断的な knot と交わる
- dead end component が無い
- 各葉上正になる閉 2 形式 Ω が存在する
- 各葉が極小曲面となる Riemann 計量が存在する

この様な葉層構造を taut と云う。最初の条件により compact 葉は非自明な homology class を表す。

Taut な葉層構造 (M, \mathcal{F}) を正・負の接触構造 ξ_{\pm} で近似しておく。 $W = [-\varepsilon, \varepsilon] \times M$ 上に $\omega = \Omega + d(t\alpha)$ が定義する symplectic 構造は、 $\partial W = \{-\varepsilon, \varepsilon\} \times M$ 上の接触構造 ξ_{\pm} の symplectic filling を与えている。ここで、 α は葉層構造を定義する 1-形式。つまり (M, \mathcal{F}) は taut なら symplectically fillable。

3-2-2 Gabai の定理 ([Ga]) M^3 を irreducible で $H^1(M; \mathbb{Z}) \neq 0$ となる多様体とし、

$H_2(M; \mathbb{Z})$ の非自明な素な元 c を指定すると、 M 上の C^∞ -級 taut 葉層構造 \mathcal{F} で c を代表する compact 葉を持つものが存在する。

この定理の結果に 3-2-1 を適用すれば、Gabai の定理の仮定を満たす多様体上に正・負の semi-fillable 接触構造が存在することが分る訳である。

3-3 Linear Perturbation 葉層構造の 1 径数族による正・負の接触構造への‘線形’な変形を linear perturbation と云う。正確には、1-形式の 1 径数族 $\alpha_t, (-\varepsilon < t < \varepsilon)$ で至る所 $\alpha_0 \wedge d\alpha_0 = 0, \frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge d\alpha_t)|_0 > 0$ を満たすもの(が定義する平面場の族 ξ_t) のことである。 $\beta = \frac{d}{dt}(\alpha_t)|_0, \alpha = \alpha_0$ とおけば、 $\alpha \wedge d\beta + d\alpha \wedge \beta > 0$ と同値である。

このような葉層構造からの連続変形若しくは接触構造の葉層構造への収束 (Gray の定理を思い出せ) が、この話の今後の主題である。

ここで、Darboux の定理に関わる復習をしておく。

補題 平面場 ξ とそれに接する非特異ベクトル場 X に対し、

1) ξ が X (の生成する flow で) 保たれることと ξ が完全積分可能であることは同値。従って、 ξ が C^1 -級ならば葉層構造を定める。 ξ が C^0 -級の場合、完全積分可能であるが、解の一意性が成立しない!。

2) Flow の後ろから flow line を一点に潰す様に見ると、flow に沿って流れるときに平面場 ξ (平面上の直線素に見える) が正の方向 (時計周り) と逆) に回転していれば、 ξ は正の接触構造であり、負の方向 (時計周り) に回転していれば、 ξ は負の接触構造である。

証明 局所座標 $(x, y, z), 0 \leq x, y, z \leq 1$ を次の様にとる。

- x -軸に平行な直線は ξ に接する。

- $x = 0$ に於いては ξ は (x, y) -平面に平行。つまり、1-形式 $\alpha = dz + f(x, y, z)$ (但し、 $f(0, y, z) = 0$) により ξ が定義されているとし、 $X = \frac{\partial}{\partial x}$ であるとする。このとき、 $\alpha \wedge d\alpha = \frac{\partial f}{\partial x} dx \wedge dy \wedge dz$ である。つまり、 $\frac{\partial f}{\partial x}$ の符号がすべてを決める。

§4 Anosov Flows

完備凸な symplectic 4-多様体 (または strong filling) で、複素構造からは来ないようなものがあるか? という問に対して、最初に作られた例が McDuff による $[-1, 1] \times S^1 T^* \Sigma_g$ 上の凸 symplectic 構造であり、 $S^1 T^* \Sigma_g$ に誘導される 2 つの接触構造は、良く知られた、Liouville 接触構造と、双曲的曲面 Σ_g の Riemann 接続であった ([Mc])。

E.Ghys 及び三松により、この構成法の Lie 環 $sl(2; \mathbb{R})$ (の双対) の言葉による簡潔な記述が見出され ([L], [Mi])、さらに T^2 の hyperbolic automorphism に付随する 3 次元可解 Lie 群によっても全く同様の構成が可能である。実はこれは左不変 Anosov flow が自然に付随する Lie 群であった。

定理 4.1 ([Mi]) 3 次元有向閉多様体 M Anosov 流 ϕ_t を持つとする。このとき、 $W =$

$[-1, 1] \times M$ は凸 symplectic 構造をつまみ、strong filling である。一方、 W は 3 次元の homotopy type を持つので、Grauert ではない。

注意 複素 n 次元の Stein 多様体若しくは Grauert 領域は、それ上の狭義多重劣調和関数 ϕ の臨界点の指数が n 以下なので、Morse 理論よりその homotopy type は高々 n 次元である。特に、複素 2 次元以上では、境界は連結である。

M^3 上の Anosov flow ϕ_t とは、ある Riemann 計量に対し以下の様な性質を持つ flow 不変な接束の C^0 -分解 (Anosov 分解と云う) をもつ非特異な flow のことであった。

$$TM = T\phi \oplus E^{uu} \oplus E^{ss}, \exists c > 0,$$

$$\forall v \in E^{uu}, \|(\phi_t)_* v\| \geq \exp(ct) \|v\|, \quad t > 0,$$

$$\forall v \in E^{ss}, \|(\phi_t)_* v\| \geq \exp(ct) \|v\|, \quad t < 0.$$

$E^u = T\phi \oplus E^{uu}$ をその弱 (不) 安定平面場という。 C^r -section theorem ([HPS]) により、 E^u と E^s は C^1 -級の平面場になることが分かり、前節の補題により 2 つの余次元 1 葉層構造; (弱) 不安定葉層 \mathcal{F}^u と (弱) 安定葉層 \mathcal{F}^s を定義する。

M 上の双接触構造 (bi-contact structure) とは、 M に逆の向きを定める互いに横断的な 2 つの接触構造平面場の対 (ξ, η) ことである。

Anosov flow ϕ_t に対し、Figure 1 に示すように、 ξ と η を $T\phi$ を含み E^u と E^s に対して 45° になる 2 つの平面場とする。必要があれば、 $T\phi$ を含む C^∞ -級の平面場で C^1 -近似する。図から分かるように、

定理 4.2 ([Mi]) このようにして Anosov 流から得られた平面場の対 (ξ, η) は bi-contact structure である。

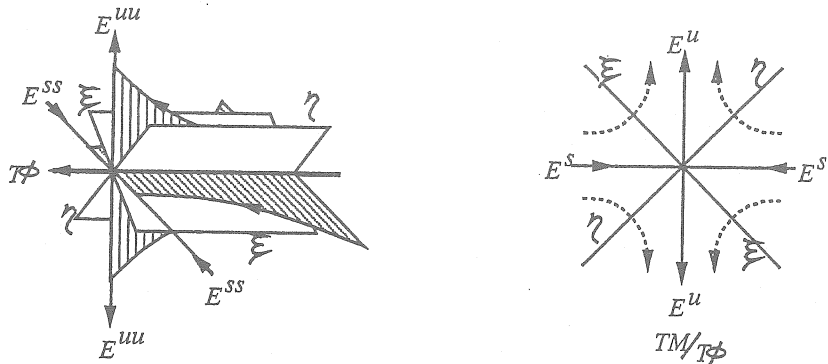


Figure 1: Anosov Flow \implies Bi-Contact Structure

定理 4.1 の証明 不安定葉層 \mathcal{F}^u の安定葉層 \mathcal{F}^s による linear perturbation ;

$$\alpha_t = \alpha^u + t\alpha^s, \quad \ker \alpha^u = E^u, \ker \alpha^s = E^s,$$

が $W = [-1, 1] \times M$ 上の凸 symplectic 構造 $\omega = d\lambda$ を与える。ここで、 λ は M 上の 1-形

式の族 α_t を $W = [-1, 1] \times M$ 上の 1-形式と考えたものである。境界 $\partial W = \{-1, 1\} \times M$ 上には、 λ の制限である $\alpha_{\pm 1} = \alpha^u \pm \alpha^s$ が ξ と η を与える。

Handel-Thurston ([HT]) に始まる一連の仕事により、Anosov flow の閉軌道を Dehn 手術して新たな Anosov flow を作ることができるので、Lie 群から構成されるもの以外にもこの様な例が非常に豊富に存在する。

逆にこの構成法で凸 symplectic 構造が得られるのは Anosov 葉層に限られるのではないと思われる。稲葉-土屋の定理 ([IT]) を使うと次が得られる。

定理 4.3 $W = [-1, 1] \times M$ 上の凸 symplectic 構造 $\omega = d\lambda$ が M 上の葉層構造 \mathcal{F} の変形 α_t により $\lambda = \alpha_t$ として与えられたとする。このとき、変形は、linear perturbation で、 $\beta = \alpha|_{t=0}$ は α と横断的になり、変形の前かが bi-contact structure を与える。更に、 $\pi_1(M)$ は指数的成長を持つ。

§5 双接触構造と射影的 Anosov 流

定理 4.2 とは逆に、bicontact structure (ξ, η) が与えられたとき、それらの交わりとして得られるベクトル場(直線場) $T\phi = \xi \cap \eta$ が flow ϕ_t を生成するが、これは Anosov 流を定めるか?
 答: No. (正解は projectively Anosov flow.)

3次元有向閉多様体上の非特異流 (M, ϕ_t) が projectively Anosov (pA) flow であるとは、flow の射影的法束 $S^1(TM/T\phi)$ に誘導される flow $T\phi_t$ に対し (Anosov の場合と同様に)、4つの $T\phi$ -不変な互いに交わらない連続切断 \mathcal{E}_\pm^u と \mathcal{E}_\pm^s (2つずつ互いに他の対蹠) が存在し、これらに含まれない点の軌道は総て、 $t \rightarrow \infty$ [resp. $t \rightarrow -\infty$] において \mathcal{E}_\pm^u [resp. \mathcal{E}_\pm^s] に吸収される。このとき \mathcal{E}_\pm^u と \mathcal{E}_\pm^s は平面場 E^u と E^s を定義する。

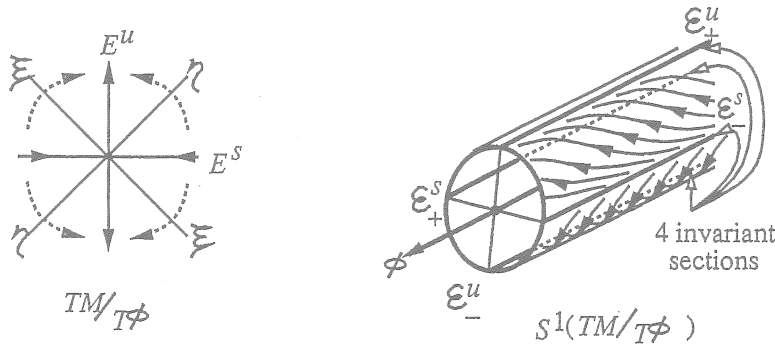


Figure 2: Bi-Contact Structure \iff Projectively Anosov Flow

定理 5.1 1) Bi-contact structure (ξ, η) から定義された flow は pA である。
 2) Anosov flow の場合と同様に pA flow から bi-contact structure (ξ, η) が得られる。

1) は次の補題から分かる。

SL(2;R) の補題 任意の正の実数 ε , 任意の自然数 k , 及び $a_i, b_i, c_i, d_i \geq \varepsilon$ を満たす任意の

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \in SL(2;R), i = 1, \dots, k,$$

の積 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A_1 \cdot \dots \cdot A_k$ に対して以下が成立する。

$$\text{Tr}A > ad > (1 + 2\varepsilon^2)^{k/2}, \quad ab, ac, bd, bc > \varepsilon^2(1 + 2\varepsilon^2)^{k-1}$$

Anosov flow から得られる双接触構造 (ξ, η) は strongly fillable であったので、一般の双接触構造にも凸性が期待される。特に、pA flow は Anosov flow よりもはるかに豊富に存在する。次の Hardorp の定理に Eliashberg-Thurston の接触構造への摂動を適用すれば、定理 5.2 を得る。

Hardorp の定理 ([Ha]) 任意の有向閉 3 次元多様体上に total foliation が存在する。

定理 5.2 任意の有向閉 3 次元多様体上に双接触構造が存在する。

ところが、Anosov の場合と異なり、弱 Anosov 分解 $E^u + E^s$ に微分可能性が保証できない。これらは §3 の補題により完全可積分であるが、積分多様体が分岐を起こし得る。実際その様な例がいくらかでも存在する。又、定理 5.3 により S^3 上の pA flow の E^u, E^s の両方が同時に C^1 -級葉層にはなれない。

定理 5.3 PA flow の弱 Anosov 分解 $E^u + E^s$ が C^1 -級とする。このとき葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ はどちらも Reeb 成分を許容しない。

証明は、田村-佐藤 ([TS]) による、Reeb 成分に横断的な葉層の分類に基づく。二つの Reeb 成分の典型的な交わりとして得られる所謂 TS-成分上で linear holonomy を調べると、pA であることに矛盾する。

Anosov にならない pA flow の具体的な構成としては、 T^3 上の例の propeller construction と云うものがある。このうち特に基本的なものは例外的に!?実解析的な (不) 安定葉層 $\mathcal{F}^u, \mathcal{F}^s$ を持つ (Figure 3)。とは云え野田 健夫氏は次の分類定理を示した。

野田の定理 ([N]) T^3 上の C^2 -級の弱 Anosov 分解 $E^u + E^s$ をもつ pA flow はこの構成法で得られる!!

系 対応する双接触構造 (ξ, η) は tight なもの同士からなり、Giroux-神田の分類による $\xi(n)$ と $\xi(-n)$ である。

又、皆川 宏之氏が提唱された S^3 (より一般に lens 空間) 上の構成法によれば、 \mathcal{F}^u が standard な Reeb 葉層、 (ξ, η) の一方は標準的接触構造となるものが作れる。

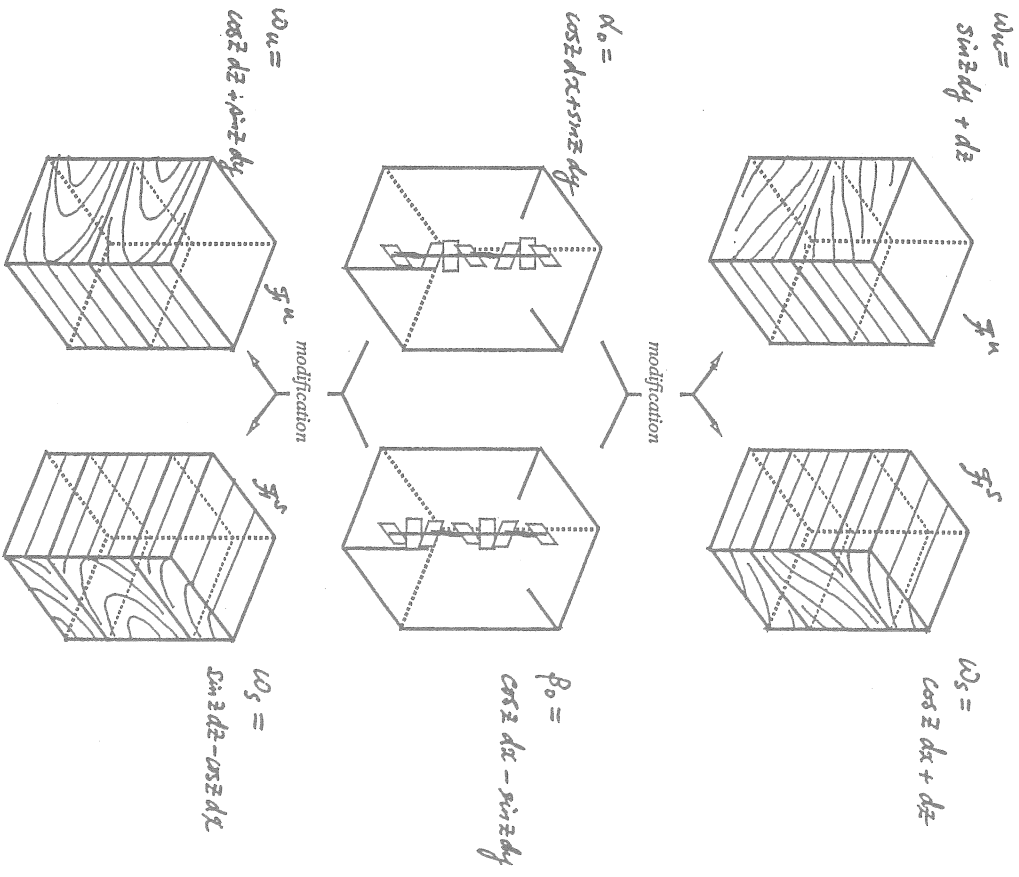


Figure 3: Fundamental Examples of Projectively Anosov Flows

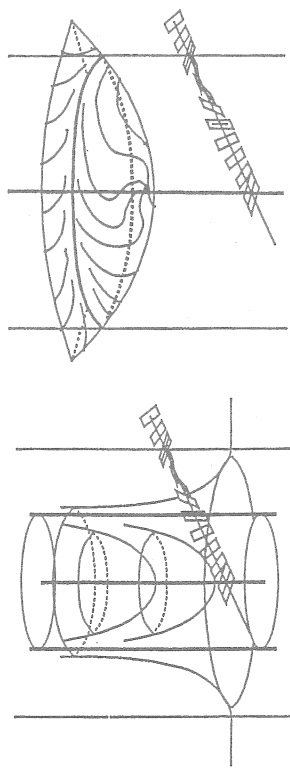


Figure 4: Lutz Twisting and Over-Twisted Contact Structures

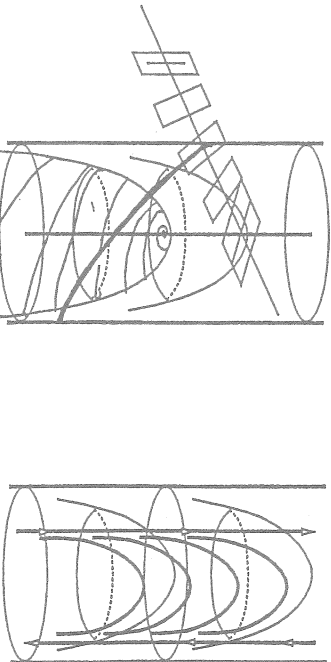


Figure 5: Lutz Twisting and Turbulization by Reeb Component

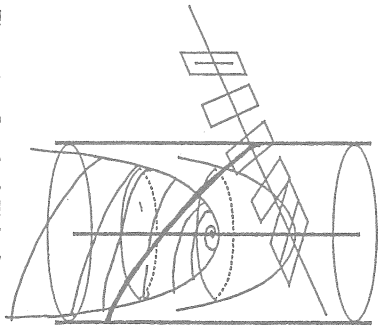


Figure 6: Standard Tight Structures Converging into the Reeb Foliation

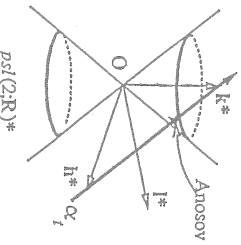


Figure 7: Transverse Pair of Foliations with Reeb Component

肝心の双接触構造の tightness についてはよく分からない。

Eliashberg の定理 ([E4]) S^3 上の正の tight 接触構造は、isotopy を除き標準的接触構造に限る。

従って負の tight 接触構造は標準構造 ξ_0 の鏡像 η_0 に限るが、この二つは双接触構造としては対をなさない。平面場としての homotopy 類が異なるからである。つまり、 S^3 上の双接触構造 (ξ, η) のうち一方は必ず OT である!!

Eliashberg の未発表の結果と定理 5.3 を合わせると、弱 Anosov 分解 $E^u + E^s$ が C^1 -級となる pA flow に付随する双接触構造 (ξ, η) は tight のものからなると思われる。葉層構造と接触構造の凸性の間に $\text{taut} \Rightarrow \text{fillable}$, w/o Reeb $\Rightarrow \text{tight}$ という関係がありそうなことを示唆している。

問題 ξ, η 共に OT な双接触構造 (ξ, η) は存在するか?

参考文献

- [A] S.Altshuler, *A geomtric heat flow for one-forms on 3-dimensional manifolds*, Illinois J. Math., 39 (1995), 98-118.
- [AV] V.I.Arnol'd & A.B.Givental', *Symplectic Geometry*, Dynamical Systems IV, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 4, Springer-Verlag, (1990).
- [B1] D.Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque, 107-108 (1983), 83-161 .
- [B2] D.Bennequin, *Topologie symplectique, convexité holomorphe, et structures de contact, d'après Y.Eliashberg, D.McDuff, et al*, Séminaire BOURBAKI, n° 725 (1989-90).
- [E1] Y.Eliashberg, *Classification of over twisted contact structure on three manifolds*, Invent. Math., 98-3 (1989), 623-637.
- [E2] Y.Eliashberg, *Topological characterization of Stein Manifolds of dimension > 2* , International J. Math., 1 (1990), 19-46.
- [E3] Y.Eliashberg, *Filling by holomorphic discs and its applications*, Geometry of Low-Dimensional Manifolds, 2, Cambridge Univ. Press, (1990), 45-67.
- [E4] Y.Eliashberg, *Contact 3-manifolds twenty years since J.Martinet's work*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 42 (1-2) (1991), 165-192.
- [E5] Y.Eliashberg, *Legendrian and transversal knots in tight conatact 3-manifolds*, Topological Method in Modern Mathematics, A Symposium in Honor of JohnMilnor's 60th Birthday, Publish or Perish Inc., (1993), 171-195.

- [EG] Y.Eliashberg & M.Gromov, *Convex symplectic manifolds*, Proc. Sympos. Pure Math. A.M.S., 52 (2) (1991), 135-162.
- [ET] Y.Eliashberg & W.Thurston, *Confoliations*, University lecture series, 13 (1998).
- [Ga] D.Gabai, *Foliations and the topology of 3-manifolds*, J. D. G., 18 (1983), 445-503.
- [Gi] E.Giroux, *Convexité en topologie de contact*, Comment. Math. Helvetici., 66 (1991), 637-677.
- [Gr] J.W.Gray, *Some global aspects of contact structures*, Ann. Math., 69 (1959), 421-450.
- [G] M.Gromov, *Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds*, Invent. Math., 82 (1985), 307-347.
- [GR] R.C.Gunning & H.Rossi, *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., (1965).
- [HT] M.Handel & W.P.Thurston, *Anosov flows on new 3-manifolds*, Invent. Math., 59 (1980), 95-103.
- [Ha] D.Hardorp, *All compact orientable three manifolds admit total foliations*, Memoirs A.M.S., 233 (1980).
- [HPS] M.Hirsch, C.Pugh, & M.Shub, *Invariant manifolds*, Springer Lecture Notes in Mathematics, 583 (1977).
- [H] H.Hofer, *Pseudoholomorphic curves in symplectizations with applications to the Weinstein conjecture in dimension three*, Invent. Math., 114 (1993), 515-563.
- [HK] H.Hofer & M.Kriener, *Holomorphic curves in contact dynamics*, PCMI '97 summer session 'Symplectic Geometry', minicourse text, preprint, (1997).
- [IT] T.Inaba & N.Tsuchiya, *Expansive foliations*, Hokkaido Math. J., 21 (1992), 39-49.
- [K1] 神田 雄高, *3次元接触多様体のトポロジーについて*, 第43回トポロジーシンポジウム講演集, (1996), 88-102.
- [K2] Y. Kanda,
- [KM1] P.B.Kronheimer & T.S..Mrowka, *Genus of embedded surfaces in projective plane*, math. Res. Lett. 1 (1995), 797-808.
- [KM2] P.B.Kronheimer & T.S..Mrowka, *Monopoles and contact structures*, Invent. Math., 130 (1997), 209-255.

- [L] F.Laudenbach, *Orbites périodiques et courbes pseudo-holomorphes, application à la conjecture de Weinstein en dimension 3, d'après H.Hofer, et al*, Séminaire BOURBAKI, n° 786 (1993-94).
- [LM] P.Lisca & G.Matić, *Tight contact structures and Seiberg-Witten invariants*, Invent. Math., 129 (1997), 509-525.
- [Lu] R.Lutz, *Structures de contact sur les fibrés principaux en cercle de dimension 3*, Ann. l'Inst. Fourier., 27, 3 (1977), 1-15.
- [Mc] D.McDuff, *Symplectic manifolds with contact type boundaries*, Invent. Math., 103 (1991), 651-671.
- [Mi] Y.Mitsumatsu, *Anosov flows and non-Stein symplectic manifolds*, Ann. l'Inst. Fourier., 45, 5 (1995), 1407-1421.
- [N] 野田 健夫, *C^2 級の不安定葉層及び安定葉層を持つ射影的アノソフ流について, この講演集*.
- [O] 小野 薫, *Hamilton 系の周期界の存在問題と J -正則写像, 研究集会 '接触幾何とその周辺', 1996 年 1 月 (於北海道大学), 予稿集, (1996), 1-22.*
- [OO] H.Ohta & K.Ono, *Simple Singularities and Topology of Symplectically Filling 4-Manifold*, preprint, (1998).
- [P] Th.Paternell, *Pseudoconvexity, the Levi problem and vanishing theorems*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, 74, Several complex Variables VII, Chapter VIII, Springer-Verlag, Berlin, (1994).
- [S] D.Sullivan, *A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces*, Comment. Math. Helvetici., 54 (1979), 218-223.
- [TS] I.Tamura & A.Sato, *On transverse foliations*, Publ. Math. I.H.E.S., 54 (1981), 205-235.
- [Th] W.P.Thurston, *Norm for Homology of 3-manifolds*, Memoirs A.M.S., 339 (1986), 99 -130.
- [W] A.Weinstein, *On the hypotheses of Rabinowitz's periodic orbit theorems*, J. Diff. Eq., 33 (1979), 353-358.

Yoshihiko MITSUMATSU
 Department of Mathematics, Chuo University
 1-13-27 Kasuga Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8551, Japan
 e-mail : yoshi@math.chuo-u.ac.jp

重みつき配置空間の幾何

山下 靖, 西 晴子, AND 小島 定吉

我々は以前の研究 [2] で、実射影直線上の $n (\geq 5)$ 個の点の配置空間について考察を行い、これらの空間は有限体積の双曲錘多様体と見なせることを述べた。さらに各点について、双曲構造を得る過程で現れるそれらの「重み」を変化させることにより、配置空間上の双曲構造の変形についても議論をした。特に $n = 5, 6$ のとき、「重み」の空間から双曲構造の変形空間への対応は局所的に単射であることが分かった。

本講演では、上の対応の (大域的な) 単射性 [5] を示すことを目標とする。

1. 準備

$X(n)$ を、射影直線 \mathbf{RP}^1 上のお互いに重ならない n 点の配置による空間を \mathbf{RP}^1 の自己同型で割った空間とする。これは以下のように書くことができる。

$$X(n) = ((\mathbf{RP}^1)^n - \mathbf{D}) / \mathrm{PGL}(2, \mathbf{R}).$$

ただし \mathbf{D} は、

$$\mathbf{D} = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbf{RP}^n \mid \alpha_i = \alpha_j \text{ for some } i \neq j\}$$

で、 $\mathrm{PGL}(2, \mathbf{R})$ はそれぞれの成分に対角的に作用する。以下では $n \geq 5$ とする。

いくつかの自明な性質を確認しておく。2 点が重なることを許していないため、 $X(n)$ は連結ではない。連結成分の数は $(n-1)!/2$ で、これは n 個の数からなる円順列からこの中のある要素に対して自分を逆順にしたものを同一視して得られる集合の数と等しい。(PGL は向きを変える作用もあるので、このような同一視が必要。) また、 $X(n)$ の要素は、中に順に現れる 3 点を $\{0, 1, \infty\}$ に送ることにより残りの点が $(0, 1)$ 区間の中に入る。よって、各連結成分の要素は $(0, 1)$ の中の小さい順に並んだ $n-3$ 点による集合と等しく、特に、 $n-3$ 次元のセルである。

九州大学の吉田正章氏は [6] において $X(n)$ の組み合わせ的コンパクト化 $X_Y(n)$ を導入した。これは、 \mathbf{D} の代わりに

$$\mathbf{D}_* = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbf{RP}^1)^n \mid \alpha_{i_1} = \alpha_{i_2} = \dots = \alpha_{i_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \text{ for some distinct } i_1, \dots, i_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}\}$$

を直積 $(\mathbf{RP}^1)^n$ から引き、上と同様の作用によって割ることにより得られる。ただし記号 $\lfloor \cdot \rfloor$ は、その数を越えない最大の整数を表すものとする。 n が偶数の場合はコンパクトではないが、無限に向かう部分にも意味付けが可能である。

Date: July 1998.

一方 Thurston [4] は複素射影直線 CP^1 上の n 点の配置空間に完備ではない複素双曲構造の族を定義した. 完備化により, 複素次元が $n-3$ である複素双曲多様体が得られる. これの内の部分を考えることにより, $X(n)$ の各連結成分に実双曲多面体構造が定義される. さらに境界の部分には点の同一視からくる適当な意味付けが可能で, 連結成分の境界の面どうしの同一視が自然に定められる. このような同一視により, $X(n)$ はある連結な実双曲多様体のなかに稠密に入っていて, この実双曲多様体は吉田氏によるものと同相であることを前半の部分で示す.

後半では, 前半で定義した双曲構造を見直すことにより $X(n)$ 上にただ一つの実双曲構造を定義するのではなく, 題目にもある「重み」に対応して, 双曲構造の族が得られるような設定をする. («重み」の具体的定義は後述.) さらに $n=5, 6$ の場合について, 上の方法で得られる族が知られている双曲構造の変形空間の中においてどのように入っているのかを考察する.

2. $X(n)$ の完備化

2.1. $X(n)$ の双曲多面体構造. この節では, 双曲多面体構造を $X(n)$ の各連結成分に与える. このような幾何化を行なうために, ユークリッド平面上の等角 n 角形で, 各頂点に 1 から n まで (単調増加とは限らず) 番号をふったものによる集合を考え, これを $E(n)$ とおく. さらに, この集合を頂点の番号を保つ平面上の相似変換による同値関係で割ったものを $E_x(n)$ とおく. このとき

Lemma 1. $X(n)$ と $E_s(n)$ は自然な同一視が可能.

したがって以下では $X(n)$ ではなく $E_s(n)$ を扱うことにする. $E_s(n)$ の連結成分は, 頂点の番号づけの円順序が同じ等角 n 角形の相似類全体と等しい.

以下では添字を簡単にするため, 頂点の番号の円順序が $1, 2, 3, \dots, n$ となっている (相似類ではなくもともとの) 等角 n 角形全体による集合を扱い, これを U と書く. U の番号を保つ相似類による集合を U_s とおく. この U_s はちょうど $X(n)$ の 1 つの連結成分に対応している. また, U の中で n 角形としての面積が 1 であるものの集合を U_1 とする. 当然 U_s と U_1 は集合として同じものである.

U のある元の頂点 i と頂点 $i+1$ を端点とする辺を x_i と書き, また同じ記号でその長さも表すことにする. するとこの長さの組 (x_1, x_2, \dots, x_n) は, これが等角 n 角形を表していたことにより

$$x_1 + x_2\zeta_n + \dots + x_n\zeta_n^{n-1} = 0$$

(ただし $\zeta_n = \exp(2\pi i/n)$) を満たす (FIGURE 1). 以下, 次の記号を使う.

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_n &:= \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_1 + x_2\zeta_n + \dots + x_n\zeta_n^{n-1} = 0\} \\ \mathcal{E}_n^+ &:= \bigcap_{j=1}^n \{x_j > 0\} \cap \mathcal{E}_n \end{aligned}$$

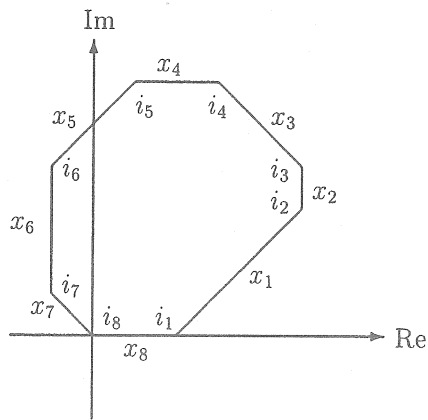


FIGURE 1. 等角多角形

明らかに $U = \mathcal{E}_n^+$ である.

P を U の元とする. 辺 x_n を複素平面の実軸に置き、他の辺をこの実軸と交わるまで延長する. そして辺の長さとして三角形を FIGURE 2 のように定める. (ただし、 A はほかのもの全部を合わせた大きな 3 角形を表す.) n が奇数の場合は $A_{n/2}$ は考えない.

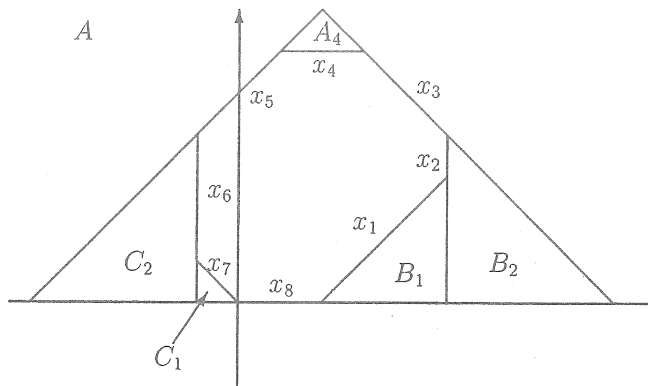


FIGURE 2

図形の面積を Area と書くことにし、 m を $(n-1)/2$ を越えない最大の整数とする. 変数 X_0, Y_j, Z_j ($j = 1, \dots, m$) と n が偶数の場合は $X_{n/2}$ を次で定義する. (以下

n が奇数のとき $X_{n/2}$ を除くことを省略する)

$$\begin{aligned} X_0 &= \sqrt{\text{Area}(A)} & X_{m+1} &= \sqrt{\text{Area}(A_{n/2})} \\ Y_j &= \sqrt{\text{Area}(B_j)} & Z_j &= \sqrt{\text{Area}(C_j)} \end{aligned}$$

すると、 $(X_0, Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_m, X_{m+1})$ は \mathcal{E}_n 上の座標を与える。

関数 Area はもともと \mathcal{E}_n^+ で定義されるものだが、これをこの座標で表示すると

$$\text{Area} = X_0^2 - \sum_j Y_j^2 - \sum_j Z_j^2 - X_{m+1}^2$$

となり、 \mathcal{E}_n 上での $(1, n-3)$ 型の 2 次形式に一意的に拡張する。これも Area と書く。

\mathcal{P}_n を $\text{Area}^{-1}(1) \cap \{X_0 > 0\}$ とおく。これは双曲空間の双曲面モデルであり U_1 は

$$\text{Area}^{-1}(1) \cap \mathcal{E}_n^+ = \text{Area}^{-1}(1) \cap \{x_i > 0\} \subset \mathcal{P}_n$$

と同相である。 \mathcal{P}_n の中ではこの領域は $\mathcal{P}_n \cap \{x_i = 0\}$ ($i = 1, \dots, n$) によって囲まれている。 $\{x_i = 0\}$ は原点を通る超平面である。このような超平面と \mathcal{P}_n との交わりは \mathcal{P}_n 内で双曲的超平面であり、 U_1 は $n-3$ 次元双曲空間の中でこのように双曲的超平面 n 枚によって囲まれた領域すなわち $n-3$ 次元双曲的多面体の内部である。

以上で $X(n)$ の連結成分に双曲多面体構造が定義できた。

この双曲的多面体および $\{x_i = 0\}$ に対応するこの多面体の境界面をそれぞれ Δ_n , F_i と書くことにし、境界の様子を述べておく。

Lemma 2. Δ_n の面は以下のように交わる。

1. $|i - j| \geq 2 \Rightarrow F_i \perp F_j$.
2. $n = 5$ か 6 ならば $F_j \cap F_{j+1} = \emptyset$.
3. $n \geq 7$ ならば

$$\cos(\omega_n) = \frac{1}{2 \cos \frac{2\pi}{n}}.$$

ただし ω_n は F_j と F_{j+1} のなす角。 ω_n の値は j の選び方によらない。

Remark . lemma 2 の式より

n	7	8	9	10	⋯	$n \rightarrow \infty$
ω_n (degree)	36.6845	45	49.2542	51.8273	⋯	$\omega_n \nearrow 60$

であり、 $\omega_n < 60$ が 7 以上の n に成立する。

Remark . $n = 5$ の場合は、 Δ_5 は 2 次元双曲空間の中で 5 本のお互いに直交するか交わらない測地線に囲まれた双曲直角 5 角形の内部である。 $n = 6$ のときは、 Δ_6 は lemma 2 によりやはりすべての面角が直角で、理想頂点を 3 つ、それ以外に頂点を 2 つ持つ双曲 6 面体である。形は 2 つの 3 角錐を底面でお互いに貼り合わせたものになっている。

2.2. $X(n)$ 連結成分の境界の貼り合わせ. 連続した添字を持つ超平面 $\{x_i = 0\}$ で Δ_n の境界上で交わることができる数は、高々 $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ である. よって境界は吉田氏の方法によってつけ加えられた点と等しいことがわかる.

ところで、上で定義した幾何構造は、 Δ_n の内部の点に点配置を対応させるだけではなく、境界上の点にも（点が重なることを許した）点配置を自然に対応させる. このような点が重なった点配置は、同一のものが複数の連結成分の境界に現れ、これらを同一視することにより連結成分（の閉包）の境界の間の同一視を定義する. $(n-1)!/2$ 個の連結成分をこのようにして張り合わせたものを \overline{X}_n と書くことにする. 辺の周りの面角の合計が 2π にならないなどの可能性があるので、一般には双曲構造に関して特異点がある双曲多様体が得られる.

最後に $X(n)$ の完備化によって付け加わった点の近傍を調べる.

$n = 5$ の場合. $X(5)$ の上による完備化は 12 個の双曲直角 5 角形を対応する辺で貼り合わせてできるものである. 貼り合わせの時に 5 角形の頂点の近傍には 4 つの直角 5 角形が集まり、全体として完備な双曲構造を持っている. 位相的には射影平面を 5 つ連結和したものと同相であることがオイラー標数から分かる.

$n = 6$ の場合. $X(6)$ は 60 個の双曲的多面体からなる. この多面体の頂点、辺、面の近傍には 貼り合わせによりそれぞれ 8、4、2 個の多面体が集まる. 多面体の辺の面角を調べると 貼り合わせで新たな特異点は生じず、全体として完備な双曲 3 次元多様体を構成していることが分かる.

$n \geq 7$ の場合は事情が上の 2 つとは異なってくる.

特に点配置として 3 つの連続した点が 1 点に退化した配置も許すことになるので、このような配置の近傍を調べる. 近傍にはその 3 つの点が再びバラバラになるような配置がある. その近くに集まる連結成分はラベルのついた 3 つの点を 1 列に並べた並べ方の数だけあり、この数は 6.

3 つの点が 1 点に退化するのは Δ_n で 2 つの超平面が交わるところに相当する. しかし Remark によりこれらの面角は $2\pi/6$ よりも小さく、ここに錐特異点が生じる.

Theorem 1. $X(n)$ の完備化は実双曲錐多様体であり：

- $n = 5$ または 6 ならば $X(n)$ は特異点を持たず、
- $n \geq 7$ ならば特異点が常に存在する.

3. 変形

3.1. 今までのところ、 $X(n)$ と等角多角形の相似類の空間とを同一視することにより、双曲構造を得てきた. 対応に用いた Schwarz-Christoffel 写像は、本来対応する多角形が等角である必要はなく、これを変化させれば最終的に得られる双曲構造が変形することは容易に想像がつく. 本節ではこの変形を調べることにする.

Θ_n を次の条件をみたす実数の組による集合とする.

$$\sum_{j=1}^n \theta_j = 2\pi \quad \text{and} \quad 0 < \theta_j + \theta_{j+1} < \pi \quad (j = 1, \dots, n)$$

以下 $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \Theta_n$ を固定する. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (\mathbf{RP}^1)^n - \mathbf{D}$ を、単位円上 n 点が境界上に指定されたものとみなし、これを正則写像によって次のような n 角形 P に移す. P の頂点は α の点の像であり、特に添字が j である点 α_j の像での外角は θ_j となっている. P の相似類は一意的に決まり、 $X_{n,\theta}$ を外角が $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ であるような n 角形全体の集合とすると、以前と同様につきが言える.

Lemma 3. $X(n)$ と $X_{n,\theta}$ は自然な同一視が可能.

$X_{n,\theta}$ の各連結成分には双曲多角形構造が以前と同様の方法によって入ることがわかる. 今回は各連結成分が合同になるわけではないが、貼り合わせに関しては問題が発生しないことが言える. その結果、全体で双曲錘多様体 $\overline{X_{n,\theta}}$ が得られる. 以下では特に $n = 5, 6$ の場合について詳しく調べていくことにする.

3.2. $\overline{X_5}$ の変形. $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_5) \in \Theta_5$ を固定する. $p = \langle i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 \rangle$ を $\{1, \dots, 5\}$ の円順列 (ただし全体を逆順にしたものは同一視) の元とする.

$U_{p,\theta}$ を、 $X_{5,\theta}$ の連結成分で頂点の番号の順列が p であるものからなるものとする. $U_{p,\theta}$ の元は、 $x_{i_a i_b}$ を頂点 i_a と i_b を結ぶ辺の長さとするとき $(x_{i_1 i_2}, x_{i_2 i_3}, \dots, x_{i_5 i_1})$ で表すことができる.

曲面の一部を図示する. (FIGURE 3)

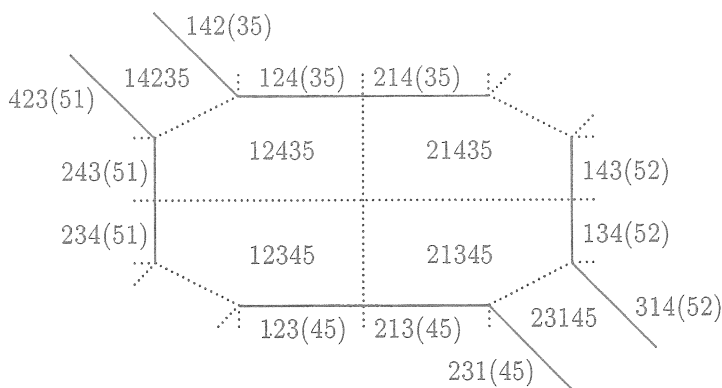


FIGURE 3

図のなかの実線の両端は同一視され、図中に4本の単純閉曲線がある. これらはお互いに交わらず平行でもないことがわかる. ラベルを読めば $i_1 i_2 i_3 (i_4 i_5)$ 、 $i_2 i_1 i_3 (i_4 i_5)$ 、 $i_2 i_3 i_1 (i_4 i_5)$ の形をした添字のもの3つが集まって閉曲線になっているので、これを

$(i_4 i_5)$ と書くことにする. 添字を入れ替えることにより, このような単純閉曲線は 10 個ある. これらは測地的であるため $\overline{X_{5,\theta}}$ 上の位置は一意的に定まり, 従ってこれらによる $\overline{X_{5,\theta}}$ の 12 個の直角 5 角形からなる胞体分割も, もとの双曲構造から一意的に決まる. すなわち, \mathcal{T} を頂点に番号のついた双曲直角 5 角形の合同類の空間とすると, Θ_5 から \mathcal{T}^{12} への写像が得られたことになる. 本節では以下この写像の逆写像の構成を行う.

上の目的のため [3] からいくつかの記号を引用する. 頂点に番号のついた双曲直角 5 角形 P が射影モデルの中にあるとし, ある決まった頂点が座標の原点に, さらにその頂点に接する 2 つの辺は x 軸と y 軸の上にあるとする. $(x, 0)$ と $(0, y)$ をこれら軸上の辺の端点の (ユークリッド) 座標とすると, P は x と y のみで決まり, \mathcal{T} は $\{(x, y) \mid 0 < x, y < 1 \text{ and } x^2 + y^2 > 1\}$ と書くことができる.

添字 $p = (i_1 i_2 i_3 i_4 i_5)$ を持つ 5 角形 $\Delta_{p,\theta}$ に対し, $(i_1 i_2)(i_3 i_4) i_5$ を原点に持ってくる頂点とし, $i_1 i_2 (i_3 i_4) i_5$ と $(i_1 i_2) i_3 i_4 i_5$ がそれぞれ x 軸と y 軸上に乗っているとす. $\Theta_{p,x,y}$ を角度 $\theta \in \Theta_5$ で $\Delta_{p,\theta} = (x, y)$ を満たすものの集合とする. これは以下のように記述される.

$(x, y) \in \mathcal{T}$ とする. 上半平面 H^2 から Θ_5 への写像 $\eta_{p,x,y}$ を次のように定義する. z を H^2 の点とする. 実軸上に 4 点 $0 < 1 - x^2 < y^2 < 1$ をとり, それぞれと z を辺で結ぶ. (Figure 4) これらの辺を図の中のように e_0, e_x, e_y, e_1 と書くことにする. e_x と e_y をそれぞれ 1 と 0 の十分近くに平行移動させ, 2 つの辺が交わらないようにする. するとこの新しい 2 辺と元からあった e_0, e_1 と x 軸で囲まれた領域が 5 角形をなす. この 5 角形の外角を図の中のように $(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_5})$ とおく. そして $\eta_{p,x,y}$ を次で定義する. $\eta_{p,x,y}(z) = (\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_5})$ [3] で我々は次を示した.

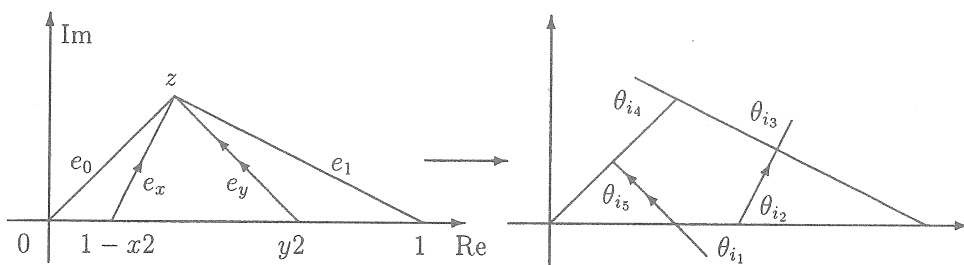


FIGURE 4. Map from z to $(\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_5})$

Lemma 4. $\eta_{p,x,y}$ は H^2 から $\Theta_{p,x,y}$ への全単射写像.

$\Phi: \Theta_5 \rightarrow \mathcal{T} \times \mathcal{T}$ を $\Phi(\theta) = (\Delta_{23451,\theta}, \Delta_{14352,\theta})$ で定義する. 次がキーとなる補題である.

Lemma 5. 写像 Φ は単射.

証明の議論は初等的なもののみである。2つの連結成分の「形」に関する情報が与えられたとき、Lemma 4 を使いながら、図4 中の z の位置が一意的に決まることを計算する。

これまでの議論を合わせると次が得られる。

Theorem 2. 対応 $\theta \mapsto \overline{X_{n,\theta}}$ によって得られる Θ_5 から $\mathcal{T}(\#^5 \mathbf{RP}^2)$ への写像は単射。

3.3. $\overline{X_6}$ の変形. $n = 5$ の場合と同様に記号 Θ_6 、 $p = \langle i_1 i_2 i_3 i_4 i_5 i_6 \rangle$ 、 $U_{p,\theta}$ and P_6 などを使う。配置空間の一部は図のようにになっている。(Figure 5)

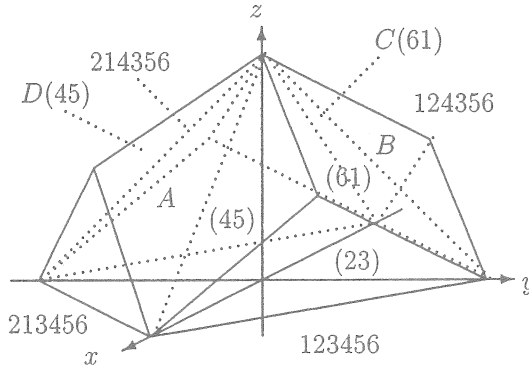


FIGURE 5

この図は全ての i に対し、外角が $\theta_i = \pi/3$ となっている場合のものである。軸上の頂点は理想頂点で、それ以外の図の中には4つ見えている頂点は P_6 に入っている。 $X(6)$ の1つの連結成分には図中の1つの象限に含まれる領域が対応する。6つの面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y = 1, y + z = 1, z + x = 1$ は (34), (12), (56), (23), (61), (45) に対応し、原点は (12)(34)(56) である。もし外角を変化させて $\theta_{i_k} + \theta_{i_{k+1}} + \theta_{i_{k+2}} < \pi$ となったら6角形の3つの頂点 i_k, i_{k+1}, i_{k+2} が1点に重なり得るので、 $(i_k i_{k+1})$ と $(i_{k+1} i_{k+2})$ は P_6 で交わり、新しい辺ができる。

外角を変化させても元からあった辺の面角は $\pi/2$ のままで ([2])、連結成分の境界の面は測地的につながる。(ただし新しくできた辺の周りでは、双曲構造は特異点を持つ。) 連結成分の境界が繋がってできる面は15あり、これらの $\overline{X_{6,\theta}}$ の中での位置は一意的に決まる。よってこれらの面による $\overline{X_{6,\theta}}$ の胞体分割はもとの双曲構造から一意的に決まる。今の場合各胞体は6面体でその数は60である。

6面体についての議論は、[1]にある。 $\Delta_{p,\theta}$ が射影モデルの中に置かれているとし、頂点 $(i_1 i_2)(i_3 i_4)(i_5 i_6)$ が原点に、面 $(i_1 i_2) i_3 i_4 i_5 i_6, i_1 i_2 (i_3 i_4) i_5 i_6, i_1 i_2 i_3 i_4 (i_5 i_6)$ がそれぞれ xy, yz, zx 平面上にあるとする。添字 i_j を j と読み替えると、状況はちょうど図5の第1象限の成分と同じである。 $(x, 0, 0), (0, y, 0), (0, 0, z)$ を、 $i_1 i_2 i_3 (i_4 i_5) i_6$ と

x 軸、 $i_2i_3i_4i_5(i_6i_1)$ と y 軸、 $i_1i_2i_3(i_4i_5)i_6$ と z 軸の交点の座標とする。これらは単位球面（双曲空間）の外で交わるかもしれないが、上の座標はもとの双曲構造から一意的に定義される。[1] の lemma 6.1 と 6.2 より、6 面体は上の (x, y, z) でその形が決まり、これらによる空間を \mathcal{T}_{hex} と書くことにする。

$\Theta_{p,x,y,z}$ で外角 $\theta \in \Theta_6$ で $\Delta_{p,\theta} = (x, y, z)$ を満たすもの全体からなる集合とする。 $\Theta_{p,x,y,z}$ は [1] では以下のように記述された。

w を H^2 の点とする。これと 0 と 1 でできる 3 角形を T と置く。 T に 3 本の辺を今から加える。 $X := x^2$ とし、辺 wX を図に加える。同様に $Y := 1 + (w - 1)y^2$ とし、辺 $0Y$ を図に加える。最後に $Z := w(1 - z^2)$ とし、辺 $1Z$ を図に加える。新しく加えた辺を平行移動させることによって、 $n = 5$ のときと同様に 6 角形が得られる。ただし移動させる方向は、上の 3 つの辺について、順に 0, 1, w とする。 $n = 5$ のときのように、 $\eta_{p,x,y,z}(w) = (\theta_{i_1}, \dots, \theta_{i_6})$ とする。

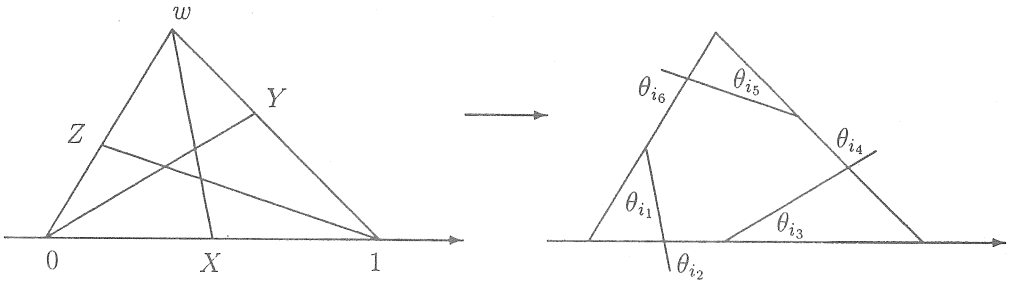


FIGURE 6. $x, y, z < 1$ case

[1] Proposition 5.3, 5.4 によると：

Lemma 6. H^2 から $\Theta_{p,x,y,z}$ への写像 $\eta_{p,x,y,z}$ は単射。

写像 $\Phi : \Theta_6 \rightarrow \mathcal{T}_{hex} \times \mathcal{T}_{hex}$ を $\Phi(\theta) = (\Delta_{123456,\theta}, \Delta_{214356,\theta})$ で定義する。この $\Delta_{123456,\theta}$ と $\Delta_{214356,\theta}$ は図 5 では第 1 象限と第 3 象限の中の成分にあたる。

Lemma 7. この写像 Φ は単射。

今までの議論を合わせると、目標の次を得る：

Theorem 3. $\theta \mapsto \overline{X_{6,\theta}}$ で定義される Θ_6 から変形空間への写像は単射。

REFERENCES

- [1] K. Ahara and K. Yamada, *Shaped of Hexagrams*, preprint, 1997.
- [2] S. Kojima, H. Nishi and Y. Yamashita, Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings, to appear in *Topology*.
- [3] S. Kojima and Y. Yamashita, Shapes of stars, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117 (1993), 845–851.

- [4] W. Thurston, *Shapes of polyhedra*, Research Report GCG 7, 1986,
- [5] Y. Yamashita, H. Nishi and S. Kojima, Configuration spaces of points on the circle and hyperbolic Dehn fillings, II, in preparation.
- [6] M. Yoshida, *The democratic compactification of configuration spaces of point sets on the real projective line*, Kyushu J. Math., 50 (1996), 493–512.

DEPARTMENT OF INFORMATION AND COMPUTER SCIENCES, NARA WOMEN'S UNIVERSITY,
KITA-UOYA NISHIMACHI, NARA 630-8506, JAPAN
E-mail address: yamasita@ics.nara-wu.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KYUSHU UNIVERSITY, 33, FUKUOKA 812-8581 JAPAN
E-mail address: nishi@math.kyushu-u.ac.jp

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL AND COMPUTING SCIENCES, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY,
OHOKAYAMA, MEGURO, TOKYO 152-8552 JAPAN
E-mail address: sadayosi@is.titech.ac.jp

