

第44回全日本
トポロジーシンポジウム
講演集

1997年 7月
於 大阪市立大学基礎教育実験棟

平成9年度科学研究費 基盤研究(A)

課題番号 08304006

序

この講演集は1997年7月28日から31日の間、
大阪市立大学で開催される第44回全日本トポロジーシ
ンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿
を印刷したものである。

その目的は参加者が講演をよりよく理解して、研究討
論を行うための一助とするとともに、記録として残すこ
とによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は、

平成9年度科学研究費基盤研究(A)

「位相幾何学の総合的研究」

課題番号08304006

により作られたものであることを付記しておく。

1997年7月

基盤研究(A)08304006

研究代表者 森田茂之

第44回全日本トポロジーシンポジウム

世話人：小島定吉(東京工大情報理工)
河内明夫 (大阪市大理)

プログラム

7月28日(月)

- 15:00~16:00 合田洋(神戸大自然)
3次元多様体上の essential lamination とその応用について 1
- 16:15~17:15 大場清(お茶の水女子大理)
井桁崩しによるリーマン面の構成について
(橋本義武(大阪市大理)との共同研究) 9

7月29日(火)

- 10:00~11:00 足助太郎(広島大理) 25
余次元の高い葉層の特性類
- 11:15~12:15 島田伊知朗(北海道大理) 37
平面曲線の補集合の基本群について
- 13:45~14:45 葉広和夫(東京大数理・研究生) 41
Claspers and the Vassiliev invariants
- 15:00~16:00 加藤久男(筑波大数学) 47
カオス的同相写像とそれを許容する空間について
- 16:15~17:15 山田耕三(静岡大教育) 59
Free topological group and the inductive limit topology

7月30日(水)

10:00~11:00	Nguyen Viet Dung (Hanoi Institute of Mathematics) Braid monodromy of arrangements of complex lines	69
11:15~12:15	大本亨(鹿児島大理) generic 写像の次数1 Vassiliev型不変量	71
13:45~14:45	松本三郎(東京工大情報理工・学振特別研究員) 3次元多様体内の圧縮不能な正則曲面	85
15:00~16:00	佃修一(京都大理・学振特別研究員) ゲージ群とその分類空間のホモトピー型	93
16:15~17:15	木村孝(埼玉大教育) 無限次元とコンパクト化	101
18:00~20:30	懇親会(「懇親会案内」をご参照下さい)	

7月31日(木)

10:00~11:00	志摩亜希子(東京大数理・学振特別研究員) 曲面結び目の3次元空間への射影について	111
11:15~12:15	金信泰造(大阪市大理) Vassiliev invariants of knots	123

三次元多様体上の Essential lamination とその応用

神戸大学大学院自然科学研究科 合田 洋

Incompressible surface を含む三次元多様体は Haken manifold と呼ばれ、その surface を手がかりとしてその surface 共々様々な形で研究されてきた。一方、taut foliation という概念は incompressible surface よりも '強い' 概念であるためその存在が言えれば強いことが言えるが、例えば cut and paste という操作に関して扱いにくい概念であったと思う。そのような状況の中、Gabai と Oertel [23] によって両者の特長を組み合わせたような Essential lamination という概念が考え出され、最近様々な結果を生み出している。特に、Dehn surgery に応用され、例えば、Wu [31] によって、「Arborescent knot は Property P を持つ」ということが示された。また、non-Haken manifold 内に存在する例もいろいろ見つかっており、それらを調べる手がかりになるのではないかと期待されている。

本講演ではそれらの一端を報告する。

1 定義

多様体 Q に対して $N(Q)$ で Q の正則近傍を ∂Q で境界を $\overset{\circ}{Q}$ または $\text{int } Q$ で内点をあらわすこととする。 M を compact orientable 3-manifold とする。

定義 1.1. \mathcal{L} が lamination であるとは、それが M の closed subset 上の foliation のときいう。

定義 1.2. $M|\mathcal{L} \stackrel{\text{def}}{=} M - \overset{\circ}{N}(\mathcal{L})$ とかく。これは M に immersed される。但し、 $M|\mathcal{L}$ は M の Riemannian metric から $M - \mathcal{L}$ によって遺伝する path metric をもつ manifold $M - \mathcal{L}$ の metric completion として定義する。

定義 1.3. D が disc with end であるとは、disc の境界から a closed arc を除いて D が得られるときいう。

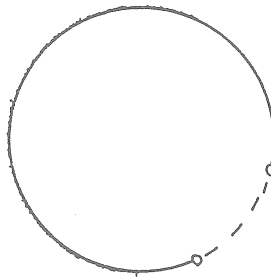


Figure 1

定義 1.4. \mathcal{L} または $\partial(M|\mathcal{L})$ が end-incompressible であるとは、任意の proper embedding $d : (D, \partial D) \rightarrow (M|\mathcal{L}, \partial(M|\mathcal{L}))$ に対し、proper embedding $d' : (D, \partial D) \rightarrow \partial(M|\mathcal{L})$ with $d = d'$ on ∂D が存在するときいう。

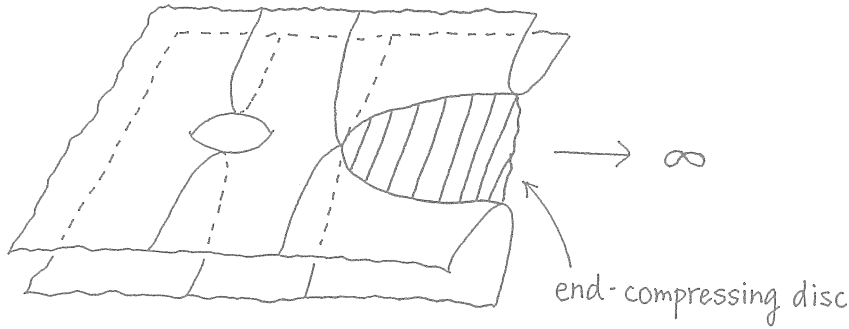


Figure 2

定義 1.5. closed 3-manifold (境界をもつ 3-manifold) 内 \mathcal{L} が *essential lamination* であるとは以下の条件を満たすときいう。

- (1) sphere または solid torus を bound する torus を leaf に持たない (+ closed disc も持たない)。
- (2) $M|\mathcal{L}$ は irreducible.
- (3) $\partial(M|\mathcal{L})$ は incompressible かつ end-incompressible. ($\partial M \cap (M|\mathcal{L})$ および $\partial(M|\mathcal{L}) - \partial M$ は $M|\mathcal{L}$ 内 incompressible かつ $\partial(M|\mathcal{L}) - \partial M$ は $M|\mathcal{L}$ 内 ∂ -injective).

lamination は foliation 同様 一般に non-compact leaf を持つので扱いにくい一面をもつが、以下の essential branched surface (compact) を合わせて考えることでそれが幾分解消される (定理 1.14 も参照)。

定義 1.6. 局所的に次の図のような所を許す compact singular surface を *branched surface* という。

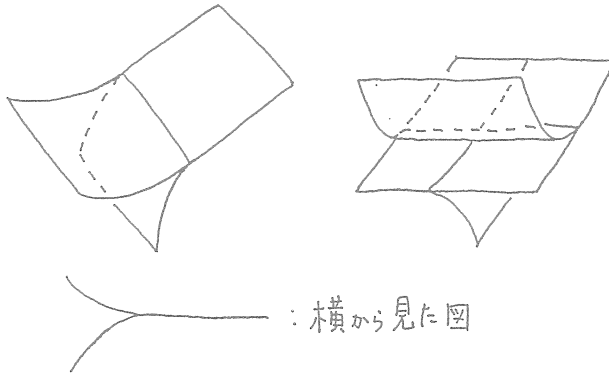


Figure 3

定義 1.7. Branched surface の regular neighborhood を Figure 4 のようにとり、これを fibered neighborhood と呼ぶことにする。この境界は vertical I -fiber ν に transverse な horizontal part, $\partial_h N(B)$, と annulus の union である vertical part, $\partial_v N(B)$, に分かれる。

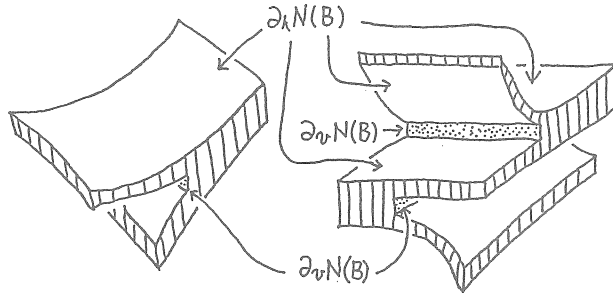


Figure 4

定義 1.8. Branched surface B に対する *disc of contact* D とは $N(B)$ に embed された disc で $\partial D \subset \text{int}(\partial_v N(B))$ となり、かつ ν に transverse なものをいう。また、*half-disc of contact* とは以下の条件を満たす disc D をいう (Figure 5 参照)。

- (i) D は $N(B)$ に embed された disc で ν に transverse,
- (ii) an arc α of ∂D is embedded in $\partial N(B) \cap \partial M$,
- (iii) $\partial D - \alpha$ is embedded in $\text{int}(\partial_v N(B))$ intersecting fibers of $\partial_v N(B)$ transversely in their interiors.

定義 1.9. $M - \overset{\circ}{N}(B)$ に embed された disc D で次の条件を満たすものを *monogon* という (Figure 6 参照)。

- (i) $D \cap N(B) = \partial D$,
- (ii) D は $\partial_v N(B)$ に single fiber で交わる。

定義 1.10. *Reeb branched surface* とは Figure 7 の branched surface のこと。

定義 1.11. B が lamination \mathcal{L} を fully carry するとは、 $N(B)$ 内 \mathcal{L} を isotopy で動かして ν といたる所で transverse に、かつ ν の全ての fiber と交わるように出来るときいう。

例 1.12. Figure 8 のようなところをもつ branched surface は lamination を fully carry しない。しかしこれが十分でないことが [23] で指摘されていて、そのより精密な判定法を見つけることが問題として提出されている。

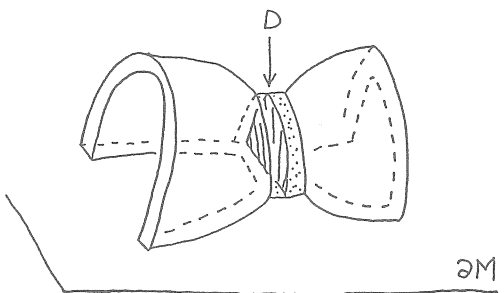


Figure 5

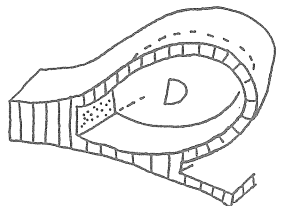


Figure 6

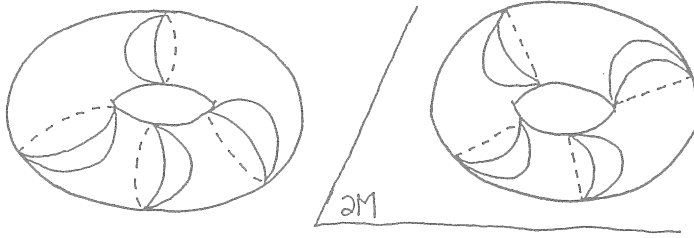


Figure 7

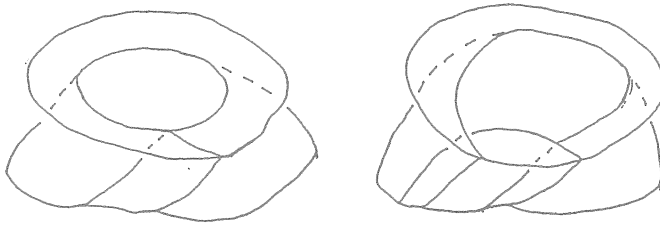


Figure 8

定義 1.13. Branched surface B が *essential* であるとは以下の条件を満たすときいう。

- (i) B は discs of contact および half-disc of contact をもたない,
- (ii) $\partial_h N(B)$ は $M - \overset{\circ}{N}(B)$ 内 incompressible かつ boundary incompressible,
- (iii) $M - \overset{\circ}{N}(B)$ 内 monogon は存在しない,
- (iv) $\partial_h N(B)$ は M 内に proper に埋め込まれた disc または sphere を成分にもたない,
- (v) $M - \overset{\circ}{N}(B)$ は irreducible かつ $\partial M - \overset{\circ}{N}(B)$ は $M - \overset{\circ}{N}(B)$ 内 incompressible,
- (vi) B は Reeb branched surface を含まない,
- (vii) B fully carries a lamination \mathcal{L} .

定理 1.14 ([23]). \mathcal{L} is an essential lamination if and only if it is fully carries by an essential branched surface.

観察. この定理からどちらを取り扱っても同じということになるが、実際に取り扱う際にはそれぞれの長所: lamination には singularity がない、branched surface は compact をいかして使うようである。

2 例

この章では [25], [26] に従って結び目補空間の Essential branched surface の一例を見ることにする。

定義 2.1. 3-ball D^3 と D^3 内の proper arcs t の組 (D^3, t) を *tangle* ということにする。特に、 t が n 本の arcs からなるとき、それを n -strings tangle という。tangle (D^3, t) が *non-split* であるとは、 t と交わらないどの様な D^3 内の proper な disc D によっても t が分離されないときいう。

定義 2.2. 次図で定義される n -strings tangle 内の punctured torus を $T(t_j)$ と書くことにする。(注：一般に t_i は絡まっていて、 t_j に沿って tube が通っている。)

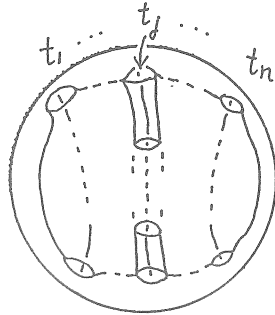


Figure 9

定理 2.3 ([25]). $(S^3, K) = (X, t) \cup (Y, u)$ 但し $(X, t), (Y, u)$ 共に non-split tangle であつ $T(t_j), T(u_k)$ が $E(t; X), E(u; Y)$ 内 incompressible となるような t_j, u_k が存在するとする。このとき、(persistent) essential lamination (essential branched surface) が $E(K)$ 内に存在する。

注：‘persistent’ とは K 上 non-trivial Dehn surgery を施して得られた 3 次元多様体内でも その lamination (branched surface) は essential になるという意味である (3 章参照)。また、 $E(t; X) = X - \mathring{N}(t)$ とする。

以下、この定理の証明の概略を見ていくことにする。

観察. knot $K, \partial X = \partial Y$ および $\partial N(K)$ を模式的に描くと次図のようになる。

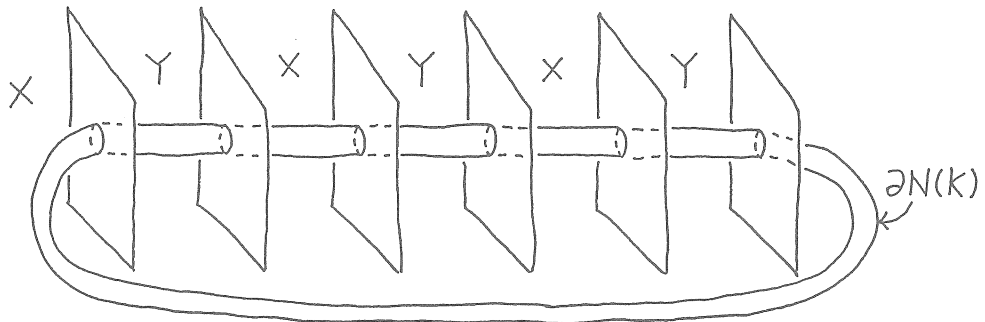


Figure 10

これを利用して $E(K)$ 内に次図のような branched surface B を作ることが出来る。

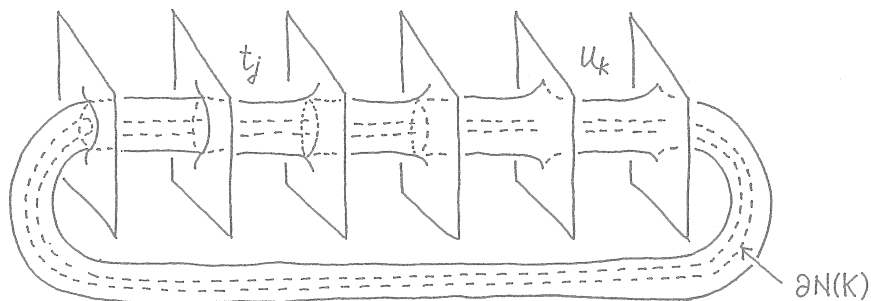


Figure 11

以下、 B が essential であることを順次見ていこう。

- (i) B (branch locus) に disc はない \Rightarrow disc of contact はない。
- (ii) $\partial_h N(B)$ は incompressible (何故なら $\partial E(K)$ がある方には disc はない。 $E(t; X) \supset \partial_h N(B)$ の一つの成分 $\stackrel{\text{homeo.}}{\cong} T(t_j)$: incompressible (仮定), $E(u; Y) \supset \partial_h N(B)$ のもう一つの成分 $\cong T(u_k)$: incompressible (仮定))。また、 B は境界を持たないので boundary incompressible.
- (iii) もし monogon があると一つの arc が trivial \Rightarrow split (仮定に反する)。
- (iv) (ii) または 構成より明らか。
- (v) これも構成より明らか。
- (vi) (i) と同様。
- (vii) この branched surface の branch curve には singularity (交点) がないので、次図のように、fibered neighborhood のところで Cantor set に沿って lamination を構成すればよい。

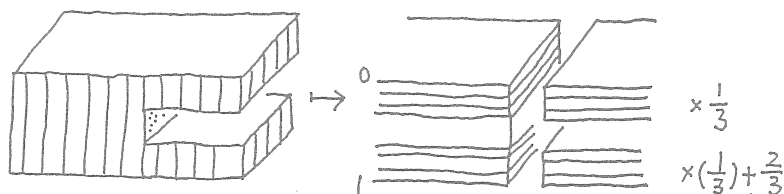


Figure 12

3 性質と応用

Essential lamination を含む 3-manifold の性質と Dehn surgery への応用の一例を述べる。基礎になっている定理は次である。

定理 3.1 ([23]). compact orientable 3-manifold が essential lamination を含めば、その universal cover は R^3 になる。

系 3.2. essential lamination を含む compact orientable 3-manifold の基本群は無限群になる。

系 3.3. essential lamination を含む compact orientable 3-manifold は irreducible である。

このことより 結び目上どのように Dehn surgery をしても essential lamination を含んでしまう 結び目 (persistent essential lamination を含む 結び目) は次の性質を持つことになる。

定義 3.4. 結び目 K が Property P をもつとは K 上の任意の nontrivial Dehn surgery で得られる 3-manifold の基本群が 1 にならないときいう。

全ての結び目がこの性質を持つのではないかという予想が property P 予想と呼ばれているが、Wu [31] は 2 章で構成したのと似た essential lamination を構成し、Arborescent knot という結び目の族に対してこの予想が成り立つことを示した。(2 章の essential lamination が persistent であることを示すのはそれほど難しくないと思います。結び目がある方に関して 定義 1.13 の条件が満たされるかどうか 2 章でやったようにチェックしていけば OK です。) また、cable knot と torus knot 以外の結び目上、任意の Dehn surgery で得られる 3-manifold は irreducible ではないかというのが、cabling conjecture と呼ばれているのであるが、系 3.3 からこの予想に対してもこの手法が有効なことがわかる。実際、Wu は同じ論文の中で Arborescent knot に対してこの予想が成り立つことも示している。

その他、essential lamination 及び それを含む 3-manifold に関する様々な結果が最近多く得られつつあります。私が知っている文献を以下にあげておきます。Essential lamination に関する問題などは [20] や Brittenham さんのホームページ (<http://math.nmsu.edu/~britten/home.html>) が参考になると思います。

References

- [1] M. Brittenham: *Essential laminations in Seifert fibered spaces*, Topology, 32 (1993), 61-85.
- [2] M. Brittenham: *Essential laminations in non-Haken 3-manifolds*, Topology Appl., 53 (1993), 317-324.
- [3] M. Brittenham: *Essential laminations and deformations of homotopy equivalences: from essential pullback to homeomorphism*, Topology Appl., 60 (1994), 249-265.
- [4] M. Brittenham: *Essential laminations and Haken normal form*, Pacific J. Math., 168 (1995), 217-234.
- [5] M. Brittenham: *Essential laminations and Haken normal form: laminations with no holonomy*, Comm. Anal. Geom., 3 (1995), 465-477.

- [6] M. Brittenham: *Essential laminations in I-bundles*, to appear in Trans.A.M.S.
- [7] M. Brittenham: *Essential laminations and Haken normal form, II: regular cell decompositions*, preprint.
- [8] M. Brittenham: *Small Seifert-fibered spaces and Dehn surgery on 2-bridge knots*, preprint.
- [9] M. Brittenham: *Essential laminations in Seifert-fibered spaces: boundary behavior*, preprint.
- [10] M. Brittenham: *Essential laminations and deformations of homotopy equivalences, II: the structure of pullbacks*, preprint.
- [11] M. Brittenham: *Persistently laminar tangles*, preprint.
- [12] M. Brittenham: *Exceptional Seifert-fibered spaces and Dehn surgery on 2-bridge knots*, preprint.
- [13] M. Brittenham: *Essential laminations, small Seifert fibered spaces, and Dehn filling*, drafts.
- [14] M. Brittenham and R. Roberts: *Persistent laminations from Seifert surfaces*, drafts.
- [15] M. Brittenham and Y.Q. Wu: *The classification of Dehn surgeries on 2-bridge knots*, preprint.
- [16] M. Brittenham, R. Naimi and R. Roberts: *Graph manifolds and taut foliations*, preprint.
- [17] C. Delman: *Essential laminations and Dehn surgery on 2-bridge knots*, Topology Appl., 63 (1995), 201-221.
- [18] C. Delman: *Constructing essential laminations and taut foliations which survive all Dehn surgeries*, to appear in Topology Appl.
- [19] D. Gabai: *Taut foliations of 3-manifolds and suspensions of S^1* , Ann. Inst. Fourier.(Grenoble), 42 (1992), 193-208.
- [20] D. Gabai: *Eight problems in the geometric theory of foliations and laminations on 3-manifolds*, the Proceedings of the 1993 Georgia Topology Conference, 1997 (Part 2).
- [21] D. Gabai and W.H. Kazez: *3-manifolds with essential laminations are covered by solid tori*, London Math. Soc., (2)47 (1993), 557-576.
- [22] D. Gabai and W.H. Kazez: *Homotopy, Isotopy and Genuine laminations of 3-manifolds*, the Proceedings of the 1993 Georgia Topology Conference, 1997 (Part 1), 123-138.
- [23] D. Gabai and U. Oertel: *Essential laminations in 3-manifolds*, Ann. of Math., 130 (1989), 41-73.
- [24] A. Hatcher: *Some examples of essential laminations in 3-manifolds*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 42 (1992), 313-325.
- [25] C. Hayashi: *Tangles and tubing operation*, preprint.
- [26] C. Hayashi: a talk at Science University of Tokyo, (1997).
- [27] R. Naimi: *Essential laminations in 3-manifolds obtained by surgery on 2-bridge knots*, Geometric topology (Haifa, 1992), Contemp. Math., 164, 183-186.
- [28] R. Roberts: *Constructing taut foliations*, Comm. Math. Helv., 70 (1995), 516-545.
- [29] I. Torisu: *Essential laminations and Dehn surgeries*, ‘結び目の位置と三次元多様体の構造’ 報告集, (1996), 87-112.
- [30] Y. Q. Wu: *Essential laminations in surgeried 3-manifolds*, Proc. A.M.S., 115 (1992), 245-249.
- [31] Y. Q. Wu: *Dehn surgery on arborescent knots*, J. Diff. Geom., 43 (1996), 171-197.

井桁崩しによるリーマン面の構成

大場 清 (お茶の水女子大学理学部)、橋本義武 (大阪市立大学理学部)

§1. 序

リーマン面とは1次元複素多様体のことであり、本講演ではコンパクトなもの(閉リーマン面)を考える。それは位相幾何学的にみれば向き付けられた実2次元閉多様体であり、その分類は種数によって完全に与えられる。しかし、複素多様体と見たときは双正則写像で移りあわないものは互いに異なると考えるので、種数 $g (\geq 1)$ を1つ決めても閉リーマン面は数多く存在し、そこに双正則同値類の集合、すなわちモジュライ空間 M_g が考えられる。 M_g は $g = 0$ のとき1点、 $g = 1$ のとき複素1次元、 $g \geq 2$ のとき複素 $3g - 3$ 次元の V -多様体であることが知られている。また、同様に n 点付きリーマン面のモジュライ空間 $M_{g,n}$ も考えられ、特に $g \geq 1$ のときは $3g - 3 + n$ 次元の複素 V -多様体であることが知られている。

これらモジュライ空間は、代数幾何や関数論の対象にとどまらず、そのトポロジーはタイヒミュラー空間・写像類群をとおして実2次元曲面をファイバーとしたファイバー束や3次元多様体と関わっているなど、トポロジストにとっても興味深いものと思われる。そこで我々は、リーマン面の複素構造が変化していく様子を目で見え捕えられるようにできないだろうか、すなわち、モジュライ空間を視覚的に捕えることはできないだろうか、というところから一つのリーマン面の構成法を考えた。それは、ガウス平面 \mathbb{C} 上の平行で長さの等しい2本の線分の対をもとにして構成する方法である。我々は [K-Y] に登場した古武術の摂理に因んでこういった線分の対をはじめ「井桁崩し」と名付けたが、省略して「井桁」と呼ぶことにした。

定義 1. “井桁”とは、(ガウス平面上の) 平行で長さの等しい2本の線分の対のことである。

井桁がガウス平面上に1つあったとしよう。そのとき、ガウス平面 \mathbb{C} をその2本の線分のところでカットし、できた2つのスリットの両側をそれぞれ平行移動により貼り合わせる。(Figure 1 の上の図。このように貼り合わせる井桁を“平行井桁”と呼ぶことにする。) さらに、無限遠点 p_∞ を付け加えてコンパクト化する。すると、位相的には種数1の向き付けられた実2次元多様体を得られる。また、平行移動は \mathbb{C} の双正則写像であるから \mathbb{C} の複素構造がそのまま生き残り、得られたものが1点 p_∞ 付き種数1のリーマン面であることがわかる。

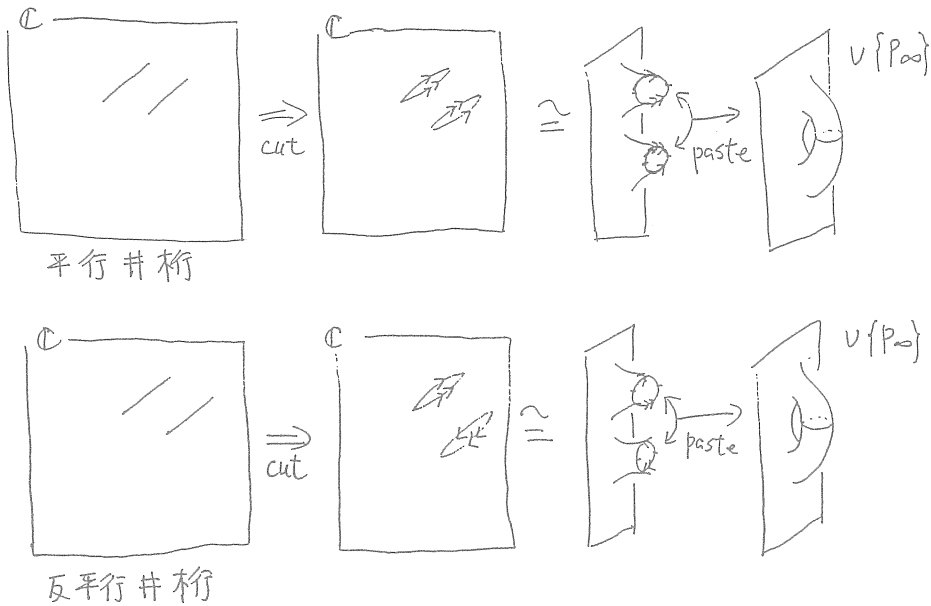


FIGURE 1. 平行井桁と反平行井桁

また、Figure 1 の下の図のように、ガウス平面にできた2つのスリットの両側を、平行移動ではなく 180 度回転で貼り合わせても、同じように1点付き種数1のリーマン面が得られる。(このように貼り合わせる井桁を“反平行井桁”と呼ぶことにする。)

上記のように、平行井桁であれ反平行井桁であれガウス平面 \mathbb{C} に井桁が1つあると種数1の1点付きリーマン面が得られる。同様に、平行か反平行かの貼り合わせ方が指定された g 個の井桁があれば、そこで同じ様に切り貼りをするにより、種数 g の1点付きリーマン面が得られる。これを“井桁（崩し）によるリーマン面の構成法”と呼んでいる。(井桁どうしが交わる時にも考えられるが、とりあえず、交わりのない g 個の井桁を考えてほしい。Figure 2)

以後、井桁は平行か反平行かの貼り合わせ方が指定されているものとする。

さて、ガウス平面 \mathbb{C} 上の1つの井桁の配置は \mathbb{C} 上の3点で決まるので、 g 個の井桁の配置は \mathbb{C} の $3g$ 個の点により決まっている。すなわち、 g 個の井桁の配置空間 $I_g\eta$ は $3g$ 次元の複素多様体であることがわかる。また、ガウス平面の正則自己同型 $\text{Aut}(\mathbb{C})$ は1次式で表わされるもの全体であり、複素2次元である。したがって、 $I_g\eta/\text{Aut}(\mathbb{C})$ は複素 $3g-2$ 次元の V -多様体であることがわかる。そして、これは $\mathcal{M}_{g,1}$ の次元と一致している。このことから、我々は1点付きリーマン面の複素構造の変化をガウス平面上の井桁の配置の変化として捕えられるのではないかと考え、研究をはじめた。基本的な問題は次のものである。

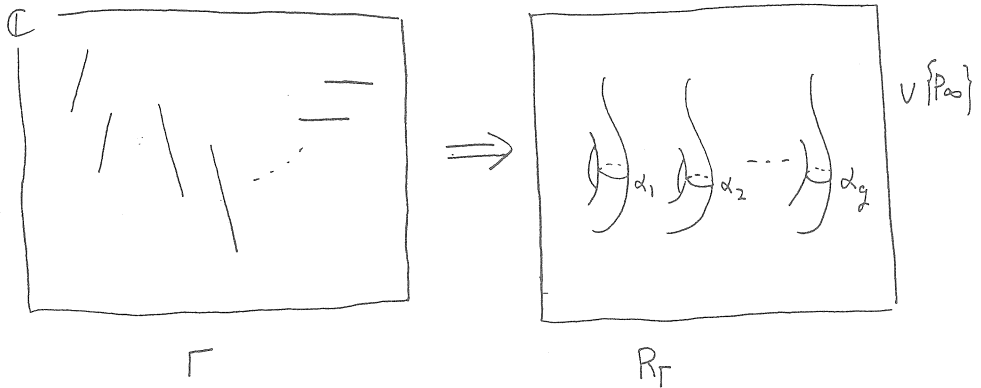


FIGURE 2. 井桁による構成法

基本問題

1. 井桁の配置の変化は局所的にモジュライを表わしているか。
2. 井桁の構成法ですべての1点付きリーマン面が構成できるか。
3. 異なる井桁の配置で同じリーマン面が構成されるのはいつか。

以下本講演では、 Γ をガウス平面に配置された g 個の交わりのない井桁の集合、 (R_Γ, p_∞) を Γ から構成される種数 g の1点付きリーマン面とする。

Remark 1. 種数1のリーマン面（楕円曲線）上で $g-1$ 個の井桁を考えれば、種数 g の（1点付きでない）リーマン面が現われる。この場合、井桁の変形の空間は、楕円曲線の変形で複素1次元、井桁の配置で複素 $3g-3$ 次元あり、楕円曲線の自己同型が1次元あるので、総合して複素 $3g-3$ 次元になる。これは、種数 g のリーマン面のモジュライ空間の次元と一致する。

§2. 同じリーマン面が構成される例

基本問題3に関連して、この節では異なる井桁の配置で同じリーマン面が構成される例を幾つか紹介する。基本問題3に関しては、次節の hyperelliptic curve のときを除き、今のところこれ以上わかっていない。

例 1. 反平行井桁の180度回転。（Figure 3で、平行四辺形 A を \mathbb{C} から切り離し、180度回転させて $\mathbb{C}-A$ にはめ直す。すると、 A の元の反平行井桁の所は切り貼りがなされ、 $\mathbb{C}-A$ に繋がるが、 A の残りの2辺の所は、 $\mathbb{C}-A$ と繋がらず、反平行井桁になる。）

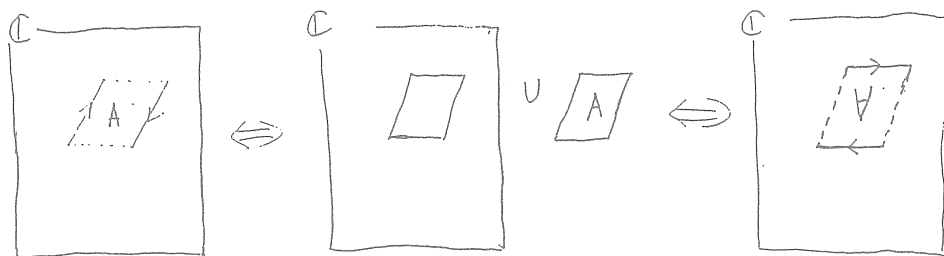


FIGURE 3. 反平行井桁の180度回転

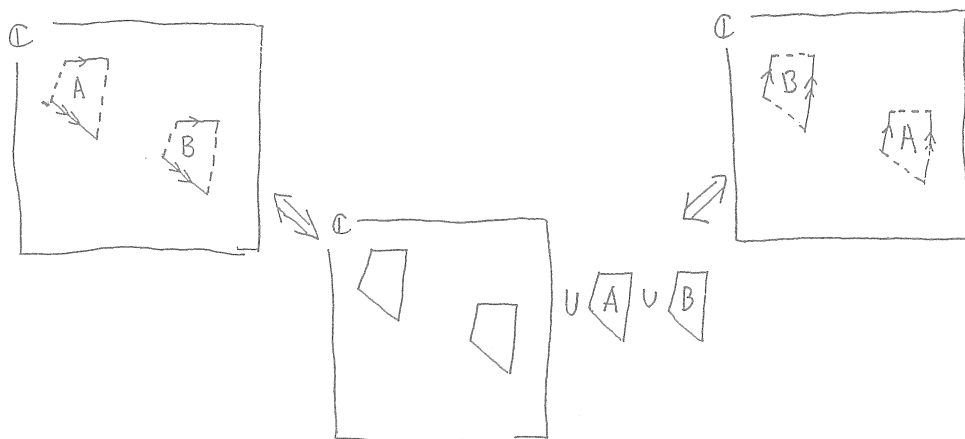


FIGURE 4. 2つの平行井桁からなる平行な合同4角形の切り替え

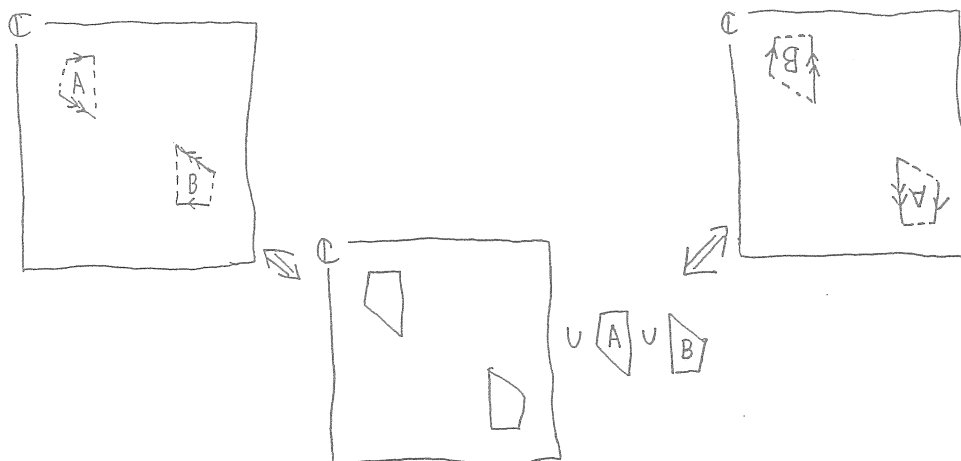


FIGURE 5. 2つの反平行井桁からなる点対称な合同4角形の切り替え。

例 2. 2つの平行井桁からなる平行な合同4角形の切り替え。(Figure 4 で、 A と B が平行移動で移りあう合同な4角形であるとき、 A, B を C から切り離し、入れ替えて $C - A \cup B$ にはめ直す。すると、 A, B の元の平行井桁の所は切り貼りがなされ、 $C - A \cup B$ に繋がるが、 A, B の残りの辺は、 $C - A \cup B$ と繋がらず、平行井桁になる。)

例 3. 2つの反平行井桁からなる点対称な合同4角形の切り替え。(Figure 5 で、 A と B が点対称な位置にある合同な4角形であるとき、 A, B を C から切り離し、入れ替えて $C - A \cup B$ にはめ直す。すると、 A, B の元の反平行井桁の所は切り貼りがなされ、 $C - A \cup B$ に繋がり、残りの辺は反平行井桁として残る。)

§3. 点対称反平行井桁による hyperelliptic curve の構成

この節では、基本問題 2 に関連して反平行井桁により任意の hyperelliptic curve が構成されることを見る。

hyperelliptic curve (超楕円曲線) とは、リーマン球面 CP_1 の 2 重分岐被覆となるリーマン面のことである。すなわち、 R が hyperelliptic curve であるとは、 R には正則な involution が存在して、その商空間が CP_1 になることを意味している。hyperelliptic curve は、 $Aut(CP_1)$ を法とした CP_1 上の異なる $2g + 2$ 個の分岐点の配置により分類される。($2g + 2$ 個のうち、 $Aut(CP_1)$ の作用で 3 点は自由に選ぶことができるので、 $0, 1, \infty$ は選ばれているものとする。(Figure 6))

Γ が反平行井桁のみからなり、各々の反平行井桁の 2 本の線分が原点对称に配置されているとき、 Γ から構成されるリーマン面 R_Γ は自然に involution をもつ。それは、 C の involution

$$\begin{aligned} C &\longrightarrow C \\ z &\longmapsto -z \end{aligned}$$

から誘導され、その商空間は CP_1 になる。すなわち、 R_Γ は hyperelliptic curve である。ここで、原点を止める $Aut(C)$ の作用により、1 つの井桁の端点が 1 であるとしてよい。井桁の端点を $\{a_1 = 1, b_1, -a_1 = -1, -b_1, a_2, b_2, -a_2, -b_2, \dots, a_g, b_g, -a_g, -b_g\}$ とすると、これら井桁端点と原点 0 , 無限遠点 ∞ に対応する R_Γ の点が involution の不動点、つまり、 $\{0, \infty, a_1^2 = 1, b_1^2, \dots, a_g^2, b_g^2\} \subset CP_1$ が 2 重被覆の分岐点集合になる。(Figure 7)

逆に、 CP_1 上の $2g + 2$ 個の異なる点 $\{0, \infty, \alpha_1 = 1, \dots, \alpha_{2g}\}$ が与えられたとき、 C 上に $4g$ 個の異なる点 $\{\pm\sqrt{\alpha_1}, \dots, \pm\sqrt{\alpha_{2g}}\}$ を用意すると、それらを端点とする原点对称反平行井桁

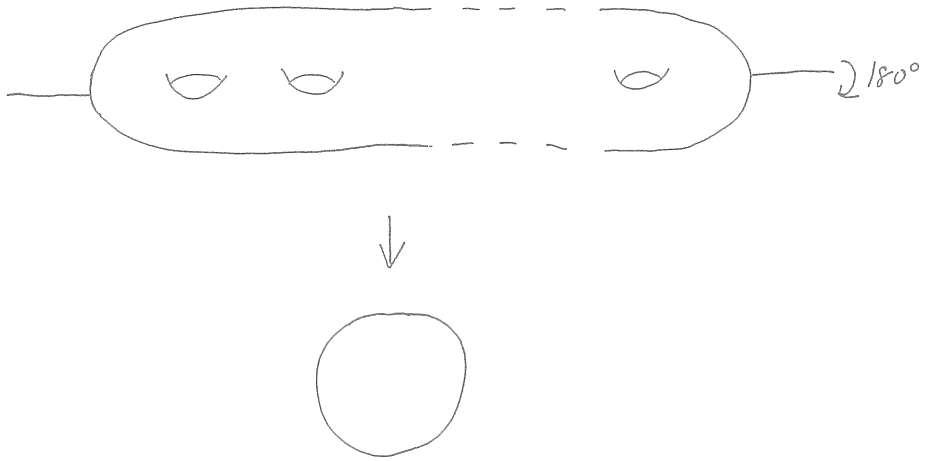


FIGURE 6. Hyperelliptic curve

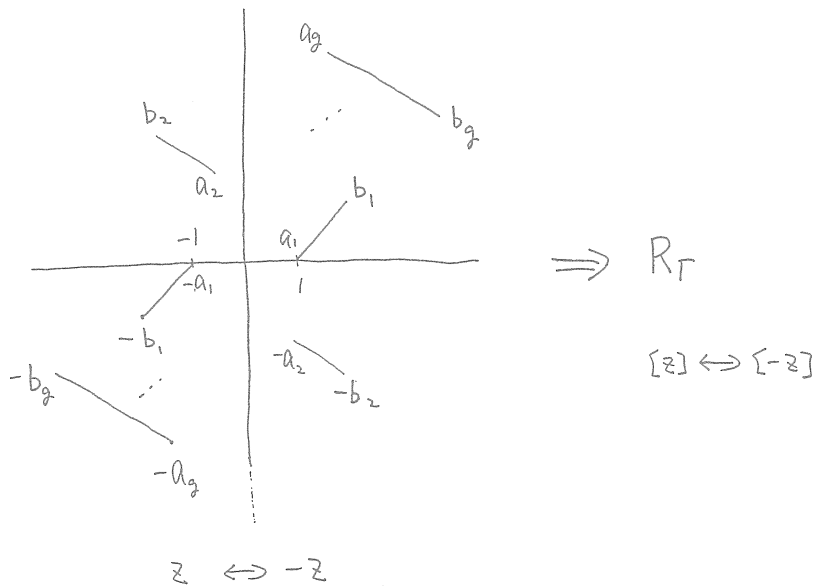


FIGURE 7. 原点对称反平行井桁と hyperelliptic curve

を作ることができる。(作り方は1意ではない。)また、種数が1又は2のリーマン面はすべて hyperelliptic であることが知られているので、以上をまとめると次の定理になる。

定理 1. Γ が原点对称反平行井桁のみからなるとき、 R_Γ は hyperelliptic curve になり、また、すべての hyperelliptic curve は原点对称反平行井桁から構成される。特に、種数 1、2 のリーマン面はすべて原点对称反平行井桁から構成される。

Remark 2. 分岐点が $\{0, \infty, \alpha_1 = 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g}\}$ である hyperelliptic curve は、次の式で与えられるものである。

$$y^2 = x(x-1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_{2g})$$

したがって、 $\{a_1 = 1, b_1, -a_1 = -1, -b_1, a_2, b_2, -a_2, -b_2, \dots, a_g, b_g, -a_g, -b_g\}$ を Γ の井桁の端点の集合とすると、 R_Γ を式で表わすと、それは端点の座標のみにより、

$$y^2 = x(x-1)(x-b_1^2)\cdots(x-a_g^2)(x-b_g^2)$$

で与えられる。

Remark 3. Γ が反平行とは限らない原点对称井桁からなるときも、同様の involution が考えられ、 R_Γ は hyperelliptic curve になるが、 $\mathbb{C}P_1$ への射影がうまく記述できず、どのような hyperelliptic curve が現われているのかわからない。

§4. 井桁とラグランジアン格子と第 2 種アーベル微分

井桁 Γ からリーマン面 (R_Γ, p_∞) を構成すると、 R_Γ 上に井桁のスリットに起因するループが g 個できる (Figure 2 の $\alpha_1, \dots, \alpha_g$)。これらのループで生成される $H_1(R_\Gamma; \mathbb{Z})$ の部分群 Λ_Γ の性質から次のようにラグランジアン格子を定義する。

定義 2. R を種数 g の任意の閉リーマン面とする。 $H_1(R; \mathbb{Z})$ の部分群 Λ がラグランジアン格子であるとは、次が成り立つことである。(“ \cdot ” は交叉数を表わす。)

$$\begin{cases} \Lambda \cong H_1(R; \mathbb{Z}) / \Lambda \cong \mathbb{Z}^g \\ \alpha \cdot \beta = 0 \quad (\forall \alpha, \forall \beta \in \Lambda) \end{cases}$$

井桁 Γ からリーマン面を構成すると、1点付きラグランジアン格子付きのリーマン面 $(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ が得られる。そして、 $\Gamma \in I_g\eta$ の上にファイバーとして $(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ を考えれば、配置空間 $I_g\eta$ 上の種数 g の 1点付きラグランジアン格子付きリーマン面をファイバーとする複素解析族が構成される。

一方、ガウス平面 \mathbb{C} の座標を ζ とし、 $\mathbb{C}P_1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ としたとき、 $d\zeta$ は ∞ のみで極 (位数 2 の極) をもつ第 2 種アーベル微分 (留数がすべて消えている meromorphic 1-form) であ

る。今、 Γ が平行井桁のみからなる集合としよう。平行移動は $d\zeta$ を保つので $d\zeta$ から R_Γ 上に第2種アーベル微分 ω_Γ が定義される。 ω_Γ は次の性質をもつことがすぐにわかる。

$$(\#) \begin{cases} \omega_\Gamma \text{ は } p_\infty \text{ でのみ極 (位数 2 の極) をもつ第 2 種アーベル微分。} \\ \int_\alpha \omega_\Gamma = 0 \quad (\forall \alpha \in \Lambda_\Gamma) \end{cases}$$

ここで、リーマン・ロッホの定理とリーマンの双1次関係式により、次の補題が成り立つ。

補題 1. 任意の1点付きラグランジアン格子付きリーマン面 (R, p, Λ) に対し、 $(\#)$ を満たす第2種アーベル微分 $\omega_{R,p,\Lambda}$ が0でない定数倍を除いて一意に存在する。特に、その零点集合 $O(R, p, \Lambda)$ が点 p とラグランジアン格子 Λ のみで確定する。

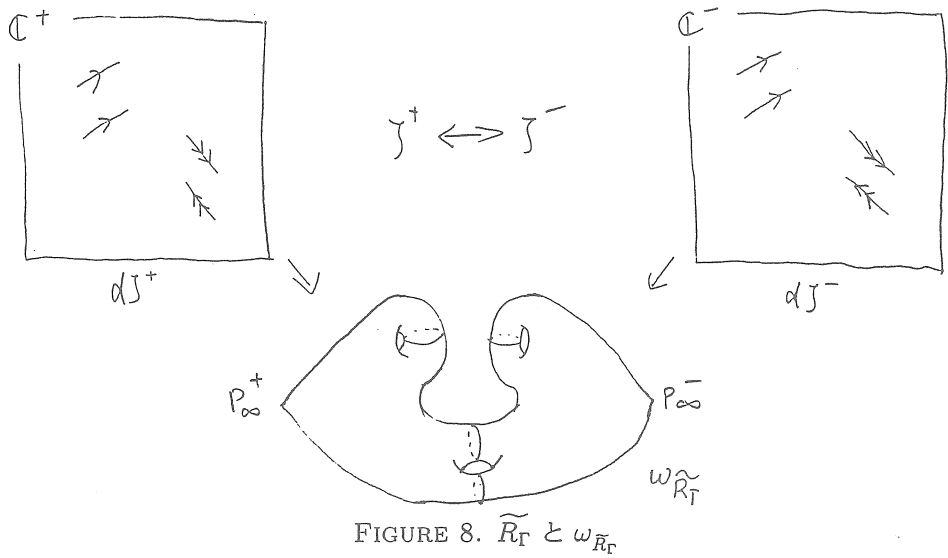
この補題から Γ が平行井桁のみからなる場合は、 $(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ に対して $\omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ は0でない定数倍を除いて ω_Γ に一致する。また、 ω_Γ の構成法から零点集合について次のことがすぐにわかる。

“零点集合 $O(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ は Γ に含まれる井桁たちの端点に対応する R_Γ の点全体の集合”

Remark 4. 任意の1点付きラグランジアン格子付きリーマン面 (R, p, Λ) に対して、 $\omega_{R,p,\Lambda}$ の零点は1位の零点であるとは限らない。一方、端点の重ならない平行井桁から構成されたリーマン面に関しては、零点がすべて1位の零点である。したがって、交わりのない平行井桁ですべての1点付きラグランジアン格子付きリーマン面を構成することはできない。しかし、1点付きリーマン面を構成できるかどうかは別の問題である。

Γ が反平行井桁を含んでいる場合にも $(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ に対して $\omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ が定数倍を除いて一意に決まるが、それは $d\zeta$ からは得られない。貼り合わせは2次微分 $(d\zeta)^2$ を保つが、アーベル微分 $d\zeta$ を保たないからである。われわれは、2次微分を考えるかわりに、 R_Γ の2重被覆 \widetilde{R}_Γ を次のように用意してその上のアーベル微分を考えた。最初にガウス平面を2枚 \mathbb{C}^+ , \mathbb{C}^- 用意し、その座標を ζ^+ , ζ^- とする。そして、同じ井桁の配置 Γ を両方に準備し、そこでカットする。そのあと、平行井桁のスリットは同じガウス平面上にあるパートナーとの間で平行移動により貼り合わせを行い、反平行井桁のスリットはもう一方のガウス平面上にあるパートナーとの間で180度回転により貼り合わせを行う。さらに2点 p_{∞}^+ , p_{∞}^- でコンパクト化したものが \widetilde{R}_Γ である。

(Figure 8. 数字は何処と何処を貼りあわせるかを示している。2重被覆 \widetilde{R}_Γ は、 R_Γ からその標準束への double valued section $[\zeta] \mapsto (d\zeta, -d\zeta)$ の像の resolution によって与えら得るものとも



いえる。) 対応は次の写像から誘導される。

$$\begin{aligned} \iota: \mathbb{C}^+ &\longrightarrow \mathbb{C}^- \\ \zeta^+ &\longmapsto \zeta^- = \zeta^+ \end{aligned}$$

ガウス平面 \mathbb{C}^+ , \mathbb{C}^- 上のアーベル微分 $d\zeta^+$, $-d\zeta^-$ は、上記の貼り合わせで保たれるので、それらから \widetilde{R}_Γ 上に自然に第2種アーベル微分 $\omega_{\widetilde{R}_\Gamma}$ が定義される。

$\omega_{\widetilde{R}_\Gamma}$ は、 p_∞^+, p_∞^- でのみ極 (位数2の極) をもち、井桁のスリットから来る $2g$ 個のループでの積分が消える第2種アーベル微分である。リーマン・ロッホの定理とリーマンの双一次関係式により、このような第2種アーベル微分の全体は2次元複素ベクトル空間となることがわかる。さらに、このベクトル空間は $\omega_{\widetilde{R}_\Gamma}$ と $\omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ の持ち上げ $\widetilde{\omega}_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ によって生成されており、これらはそれぞれ ι^* の固有値 $1, -1$ に対応する固有ベクトルである。

かくして Γ が反平行井桁を含む場合にも、 R_Γ の2重被覆 \widetilde{R}_Γ 上に、ある種のアーベル微分 $\omega_{\widetilde{R}_\Gamma}$ が0でない定数倍を除いて一意に確定する。そして、その零点集合 $O(\omega_{\widetilde{R}_\Gamma})$ は井桁の端点に対応する点全体になっている。

§5. 井桁によるリーマン面の複素解析族の局所的性質

この節では、井桁の配置の変化が1点付きリーマン面の複素構造の変化を表わしていること (基本問題1) を確かめる。第1節で述べたように、井桁の配置空間 $I_g\eta$ には $\text{Aut}(\mathbb{C})$ が作用しているので、その作用をほぼ消すために、 $I_g\eta$ の部分多様体として次のように $I_g\eta_0$ を定義する。

定義 3. $I_g\eta$ の元のなかで、 $2g$ 個の線分のうち 1 本が閉区間 $[0, 1]$ となるものの全体を、 $I_g\eta_0$ とする。($I_g\eta_0$ は $I_g\eta$ の $3g - 2$ 次元の部分多様体で、 $I_g\eta/\text{Aut}(\mathbb{C})$ の local manifold cover となっている。)

$I_g\eta_0$ 上の種数 g の 1 点付きラグランジアン格子付きリーマン面の複素解析族を考え、分類写像

$$F : I_g\eta_0 \longrightarrow \mathcal{ML}_{g,1}$$

の性質を調べる。(ここで、 $\mathcal{ML}_{g,1}$ は種数 g の 1 点付きラグランジアン格子付きリーマン面のモジュライ空間であり、 $\mathcal{M}_{g,1}$ の covering space である。 F は複素解析的な写像。)

まず、平行型のみからなる井桁の配置を考え、 $I_g\eta_0$ 中の平行井桁のみからなるものをそれぞれ $I_g\eta_0^+$ とする。そして、 $I_g\eta_0^+$ 上の種数 g の複素解析族を考え、分類写像 $F|_{I_g\eta_0^+}$ の性質を調べる。

$\Gamma \in I_g\eta_0^+$ に対し、 ω_Γ の双対ホモロジー上の積分

$$\int \omega_\Gamma : H_1(R_\Gamma - p_\infty, O(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma); \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

の像 $I(\omega_\Gamma)$ は Γ に含まれる井桁のすべての端点を含む \mathbb{C} の可算部分群である。特に、0 と 1 を含んでいる。

任意の 1 点付きラグランジアン格子付きリーマン面 (R, p, Λ) に対して、 $\omega_{R,p,\Lambda}$ は \mathbb{C}^\times だけの自由度があるが、 $H_1(R - p, O(R, p, \Lambda); \mathbb{Z})$ 上の積分の像が 0 と 1 を含んでいるような $\omega_{R,p,\Lambda}$ を考えると、それは可算個の自由度しかない。そこで、そのような $\omega_{R,p,\Lambda}$ の全体を $\Omega_{R,p,\Lambda}$ として和

$$I(R, p, \Lambda) := \bigcup_{\omega_{R,p,\Lambda} \in \Omega_{R,p,\Lambda}} I(\omega_{R,p,\Lambda})$$

を考えると、これはやはり \mathbb{C} の可算部分群で、1 点付きラグランジアン格子付きリーマン面 (R, p, Λ) の不変量である。

$\Gamma \in I_g\eta_0^+$ に対して不変量 $I(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ を考えると、それは Γ に含まれる井桁のすべての端点を含む \mathbb{C} の可算部分群である。 Γ を $I_g\eta_0^+$ の中を動かすと、 Γ に含まれる井桁の端点は連続濃度で動いていく。すなわち、不変量 $I(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ は必ず変化する。一方、分類写像 f は複素解析写像である。ここで、もし f が開写像でないとすると、不変量 $\text{Im}(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma)$ が変化しない方向があるはずであるから、開写像であることがわかる。

Γ が反平行井桁を含む場合にも \widetilde{R}_Γ 上のアーベル微分 $\omega_{\widetilde{R}_\Gamma}$ を使って同様に \mathbb{C} の可算部分群の不変量が作れ、モジュライ空間への分類写像が開写像であることがわかる。すなわち、次の定理が成り立つ。

定理 2. 分類写像

$$F : I_g \eta_0 \longrightarrow \mathcal{ML}_{g,1}$$

は開写像である。

この定理は“井桁が動けば複素構造が動く”ことを意味している。 $I_g \eta_0^+$ に関しては、さらに次のことが成り立つ。

定理 3. 任意の $\Gamma \in I_g \eta_0^+$ に対して、小平-スペンサー写像

$$\rho_\Gamma : T(I_g \eta_0^+)_\Gamma \longrightarrow H^1(R_\Gamma; \Theta(-p_\infty))$$

は同型である。(ここで、 $\Theta(-p_\infty)$ は p_∞ で零点をもつ R_Γ 上の正則ベクトル場の芽の層である。)

上の定理は $I_g \eta_0^+$ 上の複素解析族が完備で効果的に助変数付けられた族であることを意味している。

Remark 5. $\omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ の積分は Λ_Γ 上消えているので、 $\int \omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ は $H_1(R_\Gamma - p_\infty, O(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma); \mathbb{Z}) / \Lambda_\Gamma$ から \mathbb{C} への準同型を与える。 $\Gamma \in I_g \eta_0^+$ 上にファイバーとして $\text{Hom}(H_1(R_\Gamma - p_\infty, O(R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma); \mathbb{Z}) / \Lambda_\Gamma \rightarrow \mathbb{C})$ を考えることにより、 $I_g \eta_0^+$ 上に複素 $3g - 1$ 次元のベクトル束が得られる。このベクトル束は自然にフラットであり、 $\omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ は定数倍を除いて確定するから 1 次元部分束を決める。すなわち、 $\int \omega_{R_\Gamma, p_\infty, \Lambda_\Gamma}$ は、上記のベクトル束から構成される $I_g \eta_0^+$ 上の複素射影空間 $\mathbb{C}P_{3g-2}$ をファイバーとするファイバー束の正則切断である。ファイバー束が自然にフラットであることを利用して局所自明化を取り、局所的に $I_g \eta_0^+$ から $\mathbb{C}P_{3g-2}$ への写像を考えると、その微分がリーマン面の複素構造の変化を表わしている。

Remark 6. この節の議論は、井桁の端点が重ならない限り、交わった井桁でも成立する。(交わった井桁の説明は省略する。) また、楕円曲線上の井桁に関しても成立する。

§6. ハドビゲール・グリュールの定理と平行井桁の拡張

この節では平行井桁によるリーマン面の構成法を拡張して、すべての 1 点付きリーマン面にラグランジアン格子を指定することによりガウス平面から線分に沿って切り込みをいれ、平行移動により貼り合わせるにより構成できることを見る。これは基本問題 2 への 1 つのアプローチである。

まず、平面上の多角形に関するハドビゲールとグリュールの定理を紹介する。

M を \mathbb{R}^2 中の多角形の有限集合とする。 M に対して、 $\text{Area}(M)$ を M に含まれる多角形の面積の総和と定義する。また、多角形の境界になっている線分は、左側を多角形の内部とする向きを付けてベクトルと考える(境界ベクトルということにする)。このとき、 \mathbb{R}^2 の単位ベクトル v

に対して、 $J_v(M)$ を M に現われる v に平行な境界ベクトルすべての代数和として定義する。
($J_v(M)$ をハドビゲール不変量という。)

M, M' をそれぞれ \mathbb{R}^2 の中の多角形の有限集合とし、 M と M' が“線分でカットする”という操作と“平行移動で貼り合わせる”という操作を有限回行って移りあうとき、“分解平行”である、ということにすると、次の定理が成り立つ。

定理 (ハドビゲール、グリユール) . M, M' をそれぞれ \mathbb{R}^2 の中の多角形の有限集合とするとき、 $\text{Area}(M) = \text{Area}(M')$ かつ任意の単位ベクトル v に対し $J_v(M) = J_v(M')$ であるとき、そのときに限り M と M' は分解平行である。

リーマン面とその上のアーベル微分の対 (R, ω) を考えると、 R 上でまず“線分”が考えられる。つまり、道 $\gamma: [0, 1] \rightarrow R$ が“ ω -線分”であるとは、 γ は ω の極は通らず、積分

$$[0, 1] \ni t \mapsto \int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \omega \in \mathbb{C}$$

が \mathbb{C} の線分となるときをいう。 ω -線分は、 $\frac{i}{2}\omega \wedge \bar{\omega}$ で定義される R 上の metric の測地線である。

(この metric は ω の零点で conical singularity をもつ flat metric である。) R を ω -線分たちでカットすると、 ω -線分たちを境界とする境界付きリーマン面が現われる。このようなものに対して、 R の境界に含まれる交わりのない 2 本の ω -線分 $\gamma, \gamma': [0, 1] \rightarrow \partial R$ が

$$\int_{\gamma(0)}^{\gamma(t)} \omega = \int_{\gamma'(0)}^{\gamma'(t)} \omega \quad \forall t \in [0, 1]$$

を満たし、かつ、 R の内部が γ と γ' とでは反対側にあるとき、 $\gamma(t)$ と $\gamma'(t)$ ($t \in [0, 1]$) を同一視する操作が ω に関する“平行移動による貼り合わせ”になる。($\mathbb{C}P_1 (= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$ に対して、アーベル微分 $d\zeta$ を考えると、 $d\zeta$ -線分は普通の意味の \mathbb{C} の線分であり、 $d\zeta$ に関する平行移動による貼り合わせは普通の意味での平行移動による貼り合わせである。)

アーベル微分付きのリーマン面に対しては、これらの有限回の切り貼りにより移りあうときを、分解平行ということにする。(Figure 9)

次に 2 つ不変量を導入する。

定義 4. 種数 g の閉リーマン面とその上の第 2 種アーベル微分の組 (R, ω) に対して、

$$PT(\omega) := \{n_i\}_{i \in \mathbb{Z}_+} \quad (n_i \text{ は位数 } i \text{ の極の個数})$$

$$S(\omega) := \text{Im} \left(\sum_{j=1}^g \int_{\alpha_j} \bar{\omega} \int_{\beta_j} \omega \right), \quad ((\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_g, \beta_g) \text{ は } H_1(R, \mathbb{Z}) \text{ のシンプレクティック基底})$$

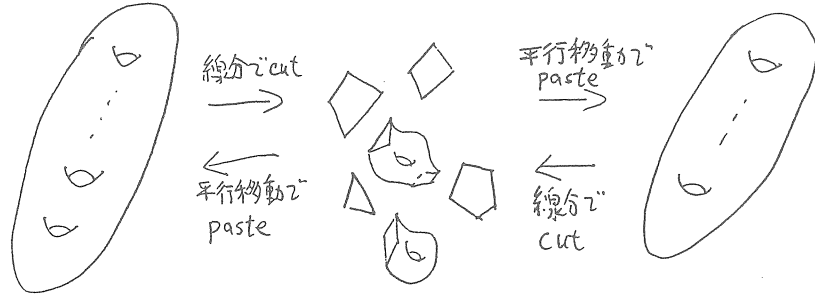


FIGURE 9. 分解平行

上記の設定によってハドビゲール・グリュールの定理を第2種アーベル微分付きのリーマン面に対する定理に作り直すことができる。

定理 4. R, R' を閉リーマン面 (種数は同じ打とは限らない)、 ω, ω' をそれぞれの上の第2種アーベル微分とする。このとき、 $PT(\omega) = PT(\omega')$ かつ $S(\omega) = S(\omega')$ のとき、そのときに限り (R, ω) と (R', ω') は分解平行である。

1点付きラグランジアン格子付きリーマン面 (R, p, Λ) に対して定数倍を除いて定まる第2種アーベル微分 $\omega_{R,p,\Lambda}$ を1つ固定し、この第2種アーベル微分付きリーマン面 $(R, \omega_{R,p,\Lambda})$ と $(\mathbb{C}P_1, d\zeta)$ を比較する。すると、第4節で見たように、これらのアーベル微分の極は共に位数2の極1個であるから $PT(\omega_{R,p,\Lambda}) = PT(d\zeta)$ となる。また、 Λ 上での $\omega_{R,p,\Lambda}$ の積分が消えていることより、 $S(\omega_{R,p,\Lambda}) = 0 = S(d\zeta)$ がわかる。以上より次の系を得る。

系 1. $(\mathbb{C}P_1, d\zeta)$ と $(R, \omega_{R,p,\Lambda})$ は分解平行。

この系は、任意の1点付きリーマン面がラグランジアン格子を設定することにより、ガウス平面から線分によるカットと平行移動による切り貼りにより構成できることを意味している。

§7. 1点付きラグランジアン格子付き楕円曲線

前節で、任意の1点付きラグランジアン格子付きリーマン面がガウス平面から、線分によるカットと平行移動による貼り合わせにより構成できることを見たが、それはある意味存在定理であり、具

体的な切り貼りの仕方を示すものではなかった。そこで、この節では種数が1のとき、つまり楕円曲線について具体的な切り貼りの方を紹介する。

Figure 10 のように1点付きラグランジアン格子付き楕円曲線 $(E(a, b, x), p_\infty, \Lambda_0)$ をガウス平面から線分によるカットと平行移動による貼り合わせ、点 p_∞ でコンパクト化して構成する。

(Figure 10 の実線はカットする場所、数字 (1), (2), ... は何処と何処を貼り合わせるかを表わしている。)

I: ($a = 0, b = 1$ で x は上半平面にある複素数か開区間 $(0, 1)$ にある実数である場合)

$$x([0, 1]) \cup (x([0, 1]) + 1)$$

でガウス平面をカットし、二つの線分 $x([0, 1])$ と $(x([0, 1]) + 1)$ の両側を平行移動で貼り合わせる。(平行井桁による構成)

II: (a, b は互いに素な正の整数、 x は上半平面にある複素数である場合)

$$x([0, 1]) \cup [0, a + b] \cup (x([0, 1]) + a + b)$$

でガウス平面をカットし、 $x([0, 1])$ と $(x([0, 1]) + a + b)$ の両側を平行移動で貼り合わせ、 $[0, a]$ の上側と $[b, a + b]$ の下側、 $[a, a + b]$ の上側と $[0, b]$ の下側を平行移動で貼り合わせる。

III: (a, b は互いに素な異なる正の整数、 x は開区間 $(\max(a, b), a + b)$ にある実数である場合)

ガウス平面を $[0, x]$ でカットし、 $[0, x - a]$ の下側と $[a, x]$ の上側、 $[x - a, b]$ の下側と $[x - b, a]$ の上側、 $[b, x]$ の下側と $[0, x - b]$ の上側をそれぞれ平行移動で貼り合わせる。

IV: (a, b は互いに素な正の整数、 $x = 0$ の場合)

ガウス平面を $[0, a + b]$ でカットし、 $[0, a]$ の上側と $[b, a + b]$ の下側、 $[a, a + b]$ の上側と $[0, b]$ の下側をそれぞれ平行移動で貼り合わせる。

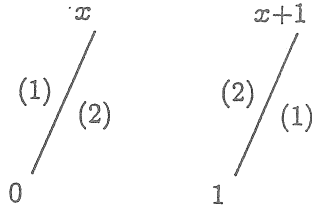
それぞれの $E(a, b, x)$ には $d\zeta$ から誘導される第2種アーベル微分 ω_0 がある。 $E(a, b, x)$ のラグランジアン格子は ω_0 の周期写像

$$\int \omega_0 : H_1(E(a, b, x); \mathbb{Z}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

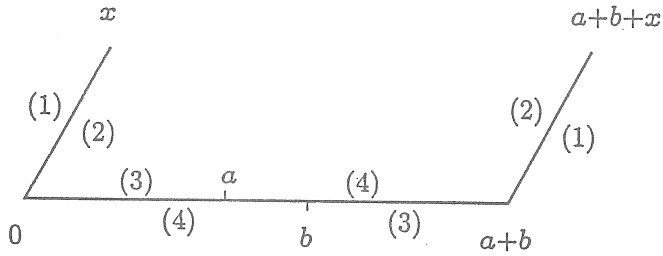
の kernel として確定する。そして、次の定理が成り立つ。

定理 5. 任意の1点付きラグランジアン格子付き楕円曲線 (E, p, Λ) に対し、上記の $(E(a, b, x), p_\infty, \Lambda_0)$ のなかに (E, p, Λ) と同型なものがただ1つ存在する。すなわち、上記のリスト $\{(E(a, b, x), p_\infty, \Lambda_0)\}$ は完全である。

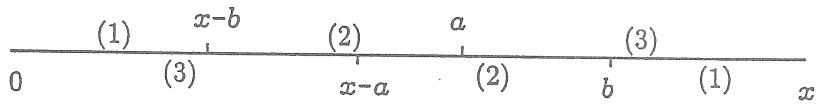
I $(E(0,1,x), p_\infty)$ where $x \in \mathbb{H} \cup (0,1)$.



II $(E(a,b,x), p_\infty)$ where $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $(a,b)=1$, $x \in \mathbb{H}$.



III $(E(a,b,x), p_\infty)$ where $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $a \neq b$, $(a,b)=1$, $x \in (\max(a,b), a+b)$.



IV $(E(a,b,0), p_\infty)$ where $a, b \in \mathbb{Z}_+$, $(a,b)=1$.

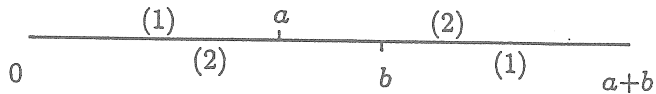


FIGURE 10. $(E(a, b, x), p_\infty, \Lambda_0)$

任意の 1 点付きラグランジアン格子付き楕円曲線 (E, p, Λ) に対し、1 を基本周期にもち、 p でのみ 2 位の極をもち、ラグランジアン格子 Λ 上では周期が消えている第 2 種アーベル微分 ω は符号を除いて確定する。したがって、metric $\frac{1}{2}\omega \wedge \bar{\omega}$ は一意に確定する。この conical singularity をもつ flat metric の測地線をじっくり観察することにより、定理 5 を証明することができる。

また、 $\{(E(a, b, x), p_\infty, \Lambda_0)\}$ に (a, b, x) を利用して複素構造が考えられ、モジュライ空間 $\mathcal{ML}_{1,1}$ の複素構造になっている。

REFERENCES

- [B] ボルチャンスキー：「面積と体積」，東京図書，(1994)
- [H-O1] Y. Hashimoto and K. Ohba : *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials*, I, preprint.
- [H-O2] Y. Hashimoto and K. Ohba : *Cutting and pasting of Riemann surfaces with Abelian differentials*, II, in preparation.
- [K] 小平邦彦：「複素多様体論 I, II, III」，岩波講座基礎数学.
- [K-Y] 甲野善紀、養老孟司：「古武術の発見」，光文社カッパ・サイエンス，(1993)
- [Mo] R. Moreli : *A theory of polyhedra*, Adv. in Math. 97 (1993), 1-73.
- [Mu] D. Mumford : *Tata lectures on Theta I*, Progress in Mathematics vol. 28, Birkhäuser, Boston-Basel-Stuttgart, (1983).
- [S] C. H. Sah : *Hilbert's third problem: scissors congruence*, Research Notes in Mathematics 33, Pitman Advanced Publishing Program, San Francisco-London-Melbourne, (1979).

余次元の高い葉層の特性類

広島大学理学部 足助 太郎

1. 序

本講演ではまず、余次元の高い場合の葉層構造の特性類の定義を Bott[4] に従って述べ、いくつか知られている事柄について触れた後、最後に横断的に複素解析的といわれる葉層の特性類について述べたい。

なお、講演の構成や特性類の導入は森田・西川・佐藤の各氏による「数学」の論説[17] を参考にした。

2. 葉層構造の特性類

以下、多様体や写像などは特に断らない限りすべて C^∞ 級とする。

定義 2.1. 多様体 M の余次元 q の葉層構造 \mathcal{F} とは、三つ組み $(\{U_\alpha\}_\alpha, \{f_\alpha\}_\alpha, \Gamma)$ で、次を満たす (極大な) ものをいう。

- 1) $\{U_\alpha\}_\alpha$ は M の開被覆
- 2) $f_\alpha : U_\alpha \rightarrow \mathbb{R}^q$ は各 U_α の上で定義された沈め込み (submersion)
- 3) Γ は \mathbb{R}^q の局所微分同相からなる擬群で、各 α, β に対して、ある Γ の元 $\gamma_{\beta\alpha}$ が存在し、 $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$\gamma_{\beta\alpha} \circ f_\alpha = f_\beta$$

が成り立つ。

\mathcal{F} が M の葉層構造のとき、 f_α の (局所的に定義された) ファイバーは条件 3) により滑らかに貼り合わさって、 M にはめ込まれた多様体になるが、このことを葉 (leaf) という。葉の次元は M の次元と葉層構造の余次元の差になる。 M の接束 TM の元で、葉に接しているもの全体は TM の対合的な部分束になるが、これを $T\mathcal{F}$ と書き、さらに $Q(\mathcal{F}) = TM/T\mathcal{F}$ と定める。また、上の定義で、 Γ が \mathbb{R}^q の向きを保つ微分同相だけからなるとき、 \mathcal{F} は横断的に向き付け可能という。以下、葉層構造はすべて横断的に向き付け可能とする。

$(M, \mathcal{F}), (M', \mathcal{F}')$ をそれぞれ葉層構造とするとき、微分可能な写像 $f : M \rightarrow M'$ が M から M' への射であるとは、 $f'_\beta \circ f$ が M の葉層構造 \mathcal{F} に属することをいう。

う。すると、葉層構造全体は圏 $C(\Gamma)$ をなす。すると、抽象的には、葉層構造の特性類は次のように定義される。

定義 2.2. (横断的に向き付け可能な) 余次元 q の葉層構造の R 係数の特性類とは、自然変換

$$\alpha : C(\Gamma) \rightarrow H^*(M; R)$$

のことである。

係数は C にすることもある。

しかしこれでは実際に特性類を計算しにくいので、一般には以下のように定義される 2 次特性類と呼ばれるものを考える。

定義 2.3. $[q]$ で、 q を超えない最大の奇数を表す。このとき、Differential Graded Algebra WO_q を以下のように定める。

$$WO_q = \Lambda[h_1, h_3, \dots, h_{[q]}] \otimes R_q[c_1, c_2, \dots, c_q],$$

ここで、微分は

$$dh_i = c_i, \quad dc_j = 0,$$

と定め、また各生成元の次数を

$$\deg c_i = 2i, \quad \deg h_i = 2i - 1$$

と定める。また、 $R_q[c_1, c_2, \dots, c_q]$ は $R[c_1, c_2, \dots, c_q]$ を次数が $2q + 1$ 以上の元からなるイデアル I で割ったものである。

すると、 $H^*(WO_q)$ は余次元 q の葉層構造の特性類を定める。つまり、次が成り立つ。

定理 2.4 (Bott[4]). 多様体 M と M の余次元 q の葉層構造が与えられると、準同型

$$\varphi : H^*(WO_q) \rightarrow H^*(M; R)$$

が定まり、これは $C(\Gamma)$ 上の自然変換を定める。

定理の写像 φ は次のように定める。まず、葉層構造 \mathcal{F} が与えられると、Bott 接続と呼ばれる、葉層構造から定まる $Q(\mathcal{F})$ の接続 ∇_B が定義される。そして第 i Chern 多項式を c_i として $\varphi(c_i) = c_i(\nabla_B)$ と定める。ここで、 $c_i(\nabla_B)$ は ∇_B からいわゆる Chern-Weil 構成により定まる M 上の微分形式である。

i が奇数のときは $c_i(\nabla_B)$ はコホモロジーの元としては自明であるが、このことを表す、つまり $dh_i(\mathcal{F}) = c_i(\nabla_B)$ となる微分形式 $h_i(\mathcal{F})$ を $Q(\mathcal{F})$ の Riemann 接続 (歪対称な接続) を使い、再び Chern-Weil 構成から定義することが出来る。そこで $\varphi(h_i) = h_i(\mathcal{F})$ と定める。

最後に、上記のイデアル I の元 c に対して $c(\nabla_B) = 0$ である (Bott の消滅定理) 事が分かり、 φ が WO_q から M 上の微分形式の空間への写像として定まる。これは明らかにコホモロジーの写像を誘導するので、再び φ と書く。

注意 2.5. つまり、 WO_q は Bott の消滅定理と、 i が奇数の時 c_i から定まる Pontrjagin 類 (にあたるもの) は自明である、という 2 つの事実を書き表したものである。

$H^*(WO_q)$ のベクトル空間としての基底は Vey によって与えられている。具体的な形を述べる前に記号を定義する。

$I = \{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, 3, \dots, [q]\}$, $J = (j_1, \dots, j_q) \in Z^q$, ただし $j_k > 0$ として、

$$h_I = h_{i_1} \cdots h_{i_r}, \quad c_J = c_1^{j_1} \cdots c_q^{j_q}$$

と定め、

$$|I| = (2i_1 - 1) + \cdots + (2i_r - 1) = \deg h_I$$

$$|J| = 2(j_1 + 2j_2 + \cdots + qj_q) = \deg c_J$$

とおく。ただし、 $h_\phi = 1$ と定める。また、 $I \neq \phi$ の時、 i_0 で I に属する最小の数を表す。

定理 2.6 (Vey[8]). $H^*(WO_q)$ のベクトル空間としての基底は $h_I c_J$, $|J| \leq 2q$ で、 I, J が次のいずれかを満たすもので与えられる。

- 1) $I = \phi$, かつ k が奇数なら $j_k = 0$
- 2) k を $j_k \neq 0$ なる最小の奇数とするとき、 $i_0 \leq k$ で、さらに $(2i_0 - 1) + |J| > 2q$ (後半の条件は $h_I c_J$ がコサイクルになっているという条件である。)

定義 2.7. $H^*(WO_q)$ の基底のうち h_* を含むものを葉層の 2 次特性類という。 φ による像も 2 次特性類と呼ぶ。

注意 2.8. 葉層の 2 次特性類としては Godbillon-Vey クラスが有名であるがこれは $H^*(WO_q)$ の元 $h_1 c_1^q$ に対応する。

3. いくつかの知られている事実

ここでは余次元の高い葉層の特性類へのいくつかのアプローチと今までに知られている事実をいくつか証明抜きに述べる。

I. 2 次特性類の 1 次独立性・非自明性、連続な変形

定義 2.7 によれば、 $q = 1$ の時には 2 次特性類は Godbillon-Vey クラス $h_1 c_1$ のみであるが、余次元 q が高くなると 2 次特性類の数が増えてくる。例えば $q = 2$ の時は $h_1 c_1^2, h_1 c_2$ と 2 つになる (ちなみに $q = 6$ ではその数は約 70 にもなる)。しかし、これらが本当にすべて本質的に異なる特性類を与えているか、もっと単純に常

に自明になってしまったりしないのかといったことは実は難しい問題である。また、後でも触れるように、葉層の2次特性類のいくつかは Chern 類などの特性類と異なり、葉層を連続的に変形していった時に連続に変化することが知られている。

まず最初に問題を言い換えると次のようになる。葉層構造にはファイバーバンドルなどと同様に分類空間が存在する。これを $B\Gamma_q$ と書くことにすると、自然性から定理 2.4 の写像は準同型

$$\varphi_0 : H^*(\text{WO}_q) \rightarrow H^*(B\Gamma_q)$$

を誘導するが、この像がどう振る舞うか、また、核が存在するのかどうか調べようということである。

余次元が 1 の時には Thurston[22] により、Godbillon-Vey クラス h_1c_1 は葉層構造をいろいろ考えた時 R の全ての値を取る、言い換えれば全射 $H^3(B\Gamma_1) \rightarrow R$ が存在することが知られているが、それに類する形で次が知られている。

定理 3.1 (Rasmussen[20]). $h_1c_1^2, h_1c_2$ は葉層構造をいろいろ考えた時、独立に動く。つまり、全射 $H^5(B\Gamma_2) \rightarrow R \oplus R$ が存在する。

特に $\varphi(h_1c_1^2), \varphi(h_1c_2)$ は一般には非自明であるし、 $\varphi(h_1c_1^2) = c\varphi(h_1c_2)$ が常に成り立つような定数 c は存在しない。

もっと強く、次のようなことも知られている。

定理 3.2 (Heitsch[11]). V を、 $H^{2q+1}(\text{WO}_q)$ の h_ic_j の形をした元で生成される R -部分空間とする。すると V の φ_0 による像は葉層構造を連続的に変形することにより、(ある一定の方法で記述できる) ベクトル空間を連続に動く。つまり、このベクトル空間の次元を d とすれば、全射 $H^{2q+1}(B\Gamma_q) \rightarrow R^d$ が存在し、この全射は葉層の連続的な変形で記述できる。

2次特性類の連続変形については、逆に次も知られている。

定理 3.3 (Heitsch[10]). \mathcal{F}_s を余次元 q の葉層構造の滑らかな 1-パラメーター族とする。このとき $(2i_0 - 1) + |J| > 2q + 1$ なるような全ての $h_{i_0c_J} \in H^*(\text{WO}_q)$ について、

$$h_{i_0c_J}(\mathcal{F}_0) = h_{i_0c_J}(\mathcal{F}_1)$$

がなりたつ。ここで $h_{i_0c_J}(\mathcal{F}_s)$, $s = 0, 1$ はそれぞれ \mathcal{F}_s に対応する $\varphi(h_{i_0c_J})$ である。

注意 3.4. 2次特性類について $(2i_0 - 1) + |J| > 2q$ であったことを思い出されたい。

葉層構造が横断的な構造を持つ時には一般の場合より特性類について詳しく調べられている。葉層構造が横断的な構造を持つとは、葉層構造の定義 (2.1) において、 Γ が特別な形に取れることを言う。例えば次のようになる。

定義 3.5. \mathcal{F} を葉層構造とする。

- 1) $q = 2q'$ で、 $\mathbf{R}^{2q'} = \mathbf{C}^{q'}$ とみた時に Γ が $\mathbf{C}^{q'}$ の複素解析的な局所微分同相となるときの、 \mathcal{F} を横断的に複素解析的な葉層という。
- 2) \mathbf{R}^q に滑らかなリーマン計量が入っていて、 Γ がこの計量を保つ時、 \mathcal{F} をリーマン葉層という。

特に、2) のリーマン葉層の場合は次の著しい結果がなりたつ。

定理 3.6. リーマン葉層 \mathcal{F} について、

$$H^*(\text{WO}_q) \rightarrow H^*(M; \mathbf{R})$$

は $* > 2q$ に対して零写像である。

これは特性類の定義の際に述べた Bott 接続と、Riemann 接続が同一に取れることによる。Pontrjagin 類が消えることから 2 次特性類が定義できたように、上の事実からリーマン葉層に対しては更にほかの (非自明で、連続的に変化するものもある) 特性類が定義できる [15,16]。一般に葉層が横断的な構造を持てば、その構造を利用して $H^*(\text{WO}_q)$ から定義されるもの以外にも多くの特性類を定義できる。このことについては横断的に複素解析的な場合に後で触れる。

そもそもこのようなある構造を持つ葉層を考えるのは、Thurston [23] にも見られるように、余次元が 2 以上の葉層構造は非常に複雑で捉えにくいので、考える葉層構造を制限して、その代わりにその性質を詳しく調べようという動機による。

II. 葉層の位相的な性質との関係

葉層の特性類の研究の最終目標はやはり葉層構造自身の理解であるから、こちらのほうが問題としては本質的であると考えられる。しかし、余次元 1 の Godbillon-Vey 類の場合と違い、一般の余次元については Godbillon-Vey 類についてさえ、葉層構造自身との関係は明確にはなっていない。ほかの特性類については、それが葉層の何を表しているのかまったくわかっていないと言ってもよいと思われる。余次元が 1 の時には次のことが知られている。

定理 3.7 (Duminy[6]). 余次元 1 の葉層構造について、resilient leaf といわれる自分自身に巻き付くような葉が存在しなければ Godbillon-Vey 類は自明である。

これの高余次元版として次が知られている。

定理 3.8 (Hurder, Katok[13]). \mathcal{F} を葉層構造とする。ほとんど全ての葉が subexponential growth を持てば \mathcal{F} の Godbillon-Vey 類は自明である。

subexponential growth の定義はここではしないが、定理の条件は resilient leaf がない、というよりも強い条件であるので、Duminy の結果の弱い形での拡張になっている。

論文 [13] のなかで、Hurder, Katok らは葉層の特性類をカレントの手法を用いて解析しているが、これには次のような事情が背景にあると思われる。つまり、定義か

らみると、葉層の2次特性類はとりあえず C^2 -カテゴリーでないと定義されないが、Godbillon-Vey 類はしばしば葉層の(せいぜい) C^1 級の性質にしかよらないような挙動を示すことがある。このことから、

- 1) 実は Godbillon-Vey 類 (や、ほかの特性類) は葉層の位相的な (あるいはせいぜい C^1 級の) 性質にしか依らないのではないか、であるとか、
- 2) さらに Godbillon-Vey 類は位相的なカテゴリーや、 C^1 カテゴリーで定義されてしまうのではないか、

ということが考えられる。2) は実は葉層の余次元や、葉層の特性類の種類によらず常に正しくない[24]が、Godbillon-Vey 類の定義域や、新しい定義域での振る舞いは余次元や葉の次元が1の時にはかなり研究されている[25]。一方1) については次が知られている。

定理 3.9 (Raby[19], Ghys-Tsuboi[7], Asuke[1], Moriyoshi[18]). 閉多様体の葉層構造の Godbillon-Vey 類は C^1 -不変である。つまり、 $(M_1, \mathcal{F}_1), (M_2, \mathcal{F}_2)$ をそれぞれ閉多様体の滑らかな葉層構造とし、 $\psi: M_1 \rightarrow M_2$ を C^1 級の微分同相で、 \mathcal{F}_1 の葉を \mathcal{F}_2 の葉へ写すものとする。このとき $GV(\mathcal{F}_i), i = 1, 2$ を (M, \mathcal{F}_i) の Godbillon-Vey 類とする時、

$$\psi^*GV(\mathcal{F}_2) = GV(\mathcal{F}_1)$$

が成り立つ。

上でも述べたように Godbillon-Vey 類は C^1 カテゴリーでは定義されないことを考えると上の定理はやや奇異にみえるが、一方でこれは Godbillon-Vey 類がしばしばみせる挙動の一つの現われとも思える。しかし、いずれにせよ上の定理が何を意味するのは今一つよくわからない。

4. 横断的に複素解析的な場合

ここでは横断的に複素解析的といわれる葉層の特性類について述べる。この節では特に断らない限り葉層はすべて横断的に複素解析的とする。また、葉層の余次元は C 上の次元をとることにする。

このような葉層を考える理由はいくつかあるが、主なものとして

- 1) 葉層の2次特性類の理論の中では、当初から考えられていた対象であること、
- 2) 1) にもかかわらず、比較的議論されたことが少ないこと、
- 3) 最近横断的に複素解析的な葉層についていくつか進展があり[5]、注目されている対象であること、

があげられる。

先に進む前に、横断的に複素解析的な葉層の特性類を定義する。

定義 4.1. Differential Graded Algebra WU_q と W_q^C を以下で定める。

$$WU_q = \Lambda[\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \dots, \tilde{u}_q] \otimes C_q[v_1, v_2, \dots, v_q] \otimes C_q[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_q]$$

$$W_q^C = \Lambda[u_1, u_2, \dots, u_q] \otimes \Lambda[\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_q] \otimes C_q[v_1, v_2, \dots, v_q] \otimes C_q[\bar{v}_1, \bar{v}_2, \dots, \bar{v}_q]$$

ここで微分は

$$d\tilde{u}_i = v_i - \bar{v}_i, \quad du_i = v_i, \quad d\bar{u}_i = \bar{v}_i, \quad dv_i = d\bar{v}_i = 0$$

と定め、各生成元の次数は

$$\deg \tilde{u}_i = \deg u_i = \deg \bar{u}_i = 2i - 1, \quad \deg v_j = \deg \bar{v}_j = 2j$$

で定める。また、 $C_q[v_1, v_2, \dots, v_q]$ などは $R_q[c_1, \dots, c_q]$ と同様に、 $C[v_1, v_2, \dots, v_q]$ を次数が $2q$ より大きい元からなるイデアル I で割ったものとして定める。

ここで自然な写像 $H^*(WU_q) \rightarrow H^*(W_q^C)$ が存在することに注意しておく。また、 $C_q[v_1, \dots, v_q]$ などの代わりに $R_q[v_1, \dots, v_q]$ などを考えても良い。

すると定理 2.4 と同様に、次が成り立つ。

定理 4.2 (Bott[3,4]). 多様体 M と M の複素余次元 q の横断的に複素解析的な葉層構造が与えられると、準同型

$$\varphi_C : H^*(WU_q) \rightarrow H^*(M; C)$$

が定まり、これは葉層の特性類を定める。また、 $Q(\mathcal{F}) = TM/T\mathcal{F}$ は今の場合複素ベクトル束になるが、これが自明な時には

$$\hat{\varphi}_C : H^*(W_q^C) \rightarrow H^*(M; C)$$

が定義され、 $Q(\mathcal{F})$ が自明な葉層構造の特性類を定める。

ここではこのようにして定まる特性類を複素な特性類と便宜的に呼ぶ。

φ_C の構成は、Chern 類 v_i は複素共役について不変 (つまり Chern 類は real な対象) であるということと、横断的に複素解析的な葉層に対する Bott の消滅定理、すなわち I の元 c に対して $c(\nabla_B)$ は微分形式として 0、ということを使い、あとは定理 2.4 とまったく同様に行う。つまり、 v_i には第 i Chern 類 $v_i(\mathcal{F})$ を対応させ、 \tilde{u}_i には第 i Chern 類が real であることをあらわす微分形式 $\tilde{u}_i(\mathcal{F})$ を対応させることにする。このとき Chern 類を表す微分形式は (複素の) Bott 接続を用い、 $u_i(\mathcal{F})$ の構成にはその Bott 接続と、その複素共役を用いる。

$Q(\mathcal{F})$ が自明な場合には、Chern 類はすべて自明になるから、定理 2.4 での Riemann 接続の代わりに Hermite 接続を用いて $du_i(\mathcal{F}) = v_i(\mathcal{F})$ となる微分形式を構成し、 $\hat{\varphi}_C(u_i) = u_i(\mathcal{F})$, $\hat{\varphi}_C(\bar{u}_i) = \overline{u_i(\mathcal{F})}$ と定める。

定義 4.3. $H^*(W_q^C)$ の元 $u_1 v_1^q$ もしくはその $\hat{\varphi}_C$ による像を Bott 類と呼ぶ。

注意 4.4. 歴史的には Godbillon-Vey 類よりも Bott 類のほうが先に知られていた。また、定義からわかるように Bott 類は一般の (第 1 Chern 類が非自明な) 横断的に複素解析的な葉層に対しては定義できない。

$H^*(WU_q)$ のベクトル空間としての基底は筆者の知る限り具体的には知られていない。しかし、定義 2.7 を真似て次のように定義する。

定義 4.5. $H^*(WU_q)$ や $H^*(W_q^C)$ の元で、 \tilde{u}_i や u_i, \bar{u}_i を含むものを (複素な) 2 次特性類という。

横断的に複素解析的な葉層の複素な特性類をまとめて扱った論文としては [12] や [21] などがあり、主に特性類の連続的な変形について扱っている。すでに [4] に見られるように複素な特性類の変形は比較的容易であり、早い段階から Bott 類をはじめとする $H^{2q+1}(W_q^C)$ の元や、一部の $H^{4q+1}(WU_q)$ の元は非自明で、なおかつ連続的に変形することが知られていた。

定理 3.6 の後で述べたように、葉層の特性類のもっとも基本的なものは $H^*(WO_q)$ から定まるものであり、葉層に構造がいろいろ入って行くにつれてその他の特性類が定義されていくと考えることにすると、横断的に複素解析的な葉層構造の特性類としてもっとも基本的な部分は $H^*(WO_{2q})$ から定まるものであると考えることが出来る。これはすなわち、葉層の横断的な複素構造を忘れるということで、分類空間の言葉で言えば写像

$$B\Gamma_q^C \rightarrow B\Gamma_{2q}$$

を考えるとということである。ここで、 $B\Gamma_q^C$ は複素余次元 q の葉層構造の分類空間である。するとコホモロジーでは

$$H^*(B\Gamma_{2q}) \rightarrow H^*(B\Gamma_q^C)$$

という写像が存在するが、これは大変難しいことが予想されるので、ここでは 2 次特性類に話を絞る。つまり、写像

$$\lambda : H^*(WO_{2q}) \rightarrow H^*(WU_q)$$

とその像を考えることにするが、この写像の存在は (一応) 自明ではない。しかしやはりこの写像は存在する ([2]、特別な場合には [21])。

定理 4.6. 横断的な複素構造を忘れることに対応する写像

$$\lambda : H^*(WO_{2q}) \rightarrow H^*(WU_q)$$

が存在し、コチェインレベルで記述できる。具体的には

$$\lambda(c_k) = (\sqrt{-1})^k \sum_{j=0}^k (-1)^j v_{k-j} \bar{v}_j,$$

$$\lambda(h_{2k+1}) = \frac{(-1)^k}{2} \sqrt{-1} \sum_{j=0}^{2k+1} (-1)^j \tilde{u}_{2k-j+1} (v_j + \bar{v}_j)$$

と定義すると、これは $H^*(\text{WO}_{2q}) \rightarrow H^*(\text{WU}_q)$ を誘導し、次を満たす。

任意に横断的に複素解析的な葉層構造 (M, \mathcal{F}) が与えられた時、定理 2.4、定理 4.2 により 2 次特性類を与える写像 φ, φ^C が存在するが、この時図式

$$\begin{array}{ccc} H^*(\text{WO}_{2q}) & \xrightarrow{\lambda} & H^*(\text{WU}_q) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \varphi^C \\ H^*(M; \mathbf{R}) & \longrightarrow & H^*(M; \mathbf{C}) \end{array}$$

が可換になる。

リーマン葉層の場合に著しかったように、葉層が横断的な構造を持つ場合には $H^*(\text{WO}_q)$ (今の場合 $H^*(\text{WO}_{2q})$) から定まる 2 次特性類は一般の場合よりは簡単になることが予想される。葉層の 2 次特性類では Godbillon-Vey 類が基本的であったから、まずその像を見てみると、

$$\lambda(h_1 c_1^{2q}) = C \tilde{u}_1 v_1^q \bar{v}_1^{-q}$$

となる (C は定数)。この時次が知られている ([21],[2])。

定理 4.7. Godbillon-Vey 類 $\tilde{u}_1 v_1^q \bar{v}_1^{-q}$ が非自明な葉層構造が任意の複素余次元 q に対して存在する。

これは複素余次元が 1 の場合には、例えば閉双曲多様体上の単位球面束上の Anosov 流と呼ばれるもので実現される。

しかし一方で λ の像を見てやると次がわかる[2]。

定理 4.8. 複素余次元が 1 の葉層に対して、

$$\lambda(h_1 c_1^2) = 2\lambda(h_1 c_2)$$

が常に成り立つ。

これは定理 3.1 とは対照的である。また、一般に複素余次元が高い場合にはある線型関係が定理 2.6 に示した $H^*(\text{WO}_{2q})$ の基底に生じる。現時点では $q = 2, 3$ の時にはこの関係は決定されている。また、次のようなことも成り立つ[2]。

定理 4.9. V を $h_1, \dots, h_{[q]}$ や c_1, \dots, c_q だけで書けるような WO_{2q} の元から生成される $H^*(WO_{2q})$ の部分空間とする。このとき任意の横断的に複素解析的な葉層構造 (M, \mathcal{F}) に対して、 φ による $H^*(WO_{2q})$ の $H^*(M)$ への像は V の φ による像と一致する。つまり、2次特性類は「半分」になる。

すると、3. でも触れたように、横断的に複素解析的な葉層に対していくつか新しい特性類を定義することが出来る。例えば、 $k > q$ の時に第 k Pontrjagin 指標 \tilde{p}_k の φ による像が微分形式として消えることが上の定理からわかる。そこで $\varphi(h_i)$ を定義したのと同じ方法で Bott 接続と Riemann 接続から $d\eta_k(\mathcal{F}) = \varphi(\tilde{p}_k)$ となる微分形式を構成すると、今の場合 $\eta_k(\mathcal{F})$ は $H^*(M)$ の元を定める。さらに、実は η_k は $H^*(WU_q)$ のある元の φ_C による像として書けることがわかる。このことは、 WU_q がある意味で WO_{2q} の拡張になっているともいえる。

最後に Bott 類と Godbillon-Vey 類の関係について述べる。注意 4.4 でも述べたように、Bott 類は常に定義できる訳ではない。しかし Bott 類の虚部に当たるものは常に定義でき、横断的に複素解析的な葉層構造において基本的であろうと思われる。

定義 4.10. $H^*(WU_q)$ の元 ξ を

$$\xi = \sqrt{-1}\tilde{u}_1(v_1^q + v_1^{q-1} + \dots + \bar{v}_1^q)$$

で定める。

すると簡単な計算により次がわかる[2]。

定理 4.11. Godbillon-Vey 類は ξ と第 1 Chern 類に分解する。つまり、ある定数 C' が存在して

$$\lambda(h_1 c_1^{2q}) = C' \xi v_1^q$$

が成り立つ。また、第 1 Chern 類が自明であれば Bott 類が定義できるが、この時は ξ は Bott 類の虚部になる。さらに、このクラス ξ は連続に変形する。

系 4.12. 第 1 Chern 類が自明であるような複素多様体上の横断的に複素解析的な葉層構造の Godbillon-Vey 類は自明である。ここで、横断的な複素構造は多様体の複素構造から入るものとする。

REFERENCES

1. T. Asume, *Invariance of the Godbillon-Vey Class by C^1 -Diffeomorphisms for higher codimensional foliations*, preprint.
2. ———, *On the real secondary classes of transversely holomorphic foliations*, preprint.
3. R. Bott, *On the Lefschetz Formula and Exotic Characteristic Classes*, Symposia Math. **10** (1972), 95–105.
4. R. Bott, S. Gilter, I. M. James, *Lectures on Algebraic and Differential Topology*, Lecture Notes in Mathematics, No. 279, Springer-Verlag, 1972.
5. M. Brunella and E. Ghys, *On transversely Holomorphic flows I,II*, Invent. Math. **126** (1996), 265–270, 281–286.

6. G. Duminy, *L'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage se localise dans les feuilles ressort* (1982), preprint.
7. E. Ghys and T. Tsuboi, *Différentiabilité des conjugaisons entre systèmes dynamiques de dimension 1*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 215–244.
8. C. Godbillon, *Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels*, Séminaire BOURBAKI, 25e année, 1972/73, n° 421, pp. 421-01–421-19.
9. A. Haefliger, *Groupoïdes d'holonomie et classifiants*, Structure Transverse des Feuilletages, Toulouse 1982, Astérisque, vol. 116, 1984, pp. 70–97.
10. J. Heitsch, *Deformations of secondary characteristic classes*, Topology **12** (1973), 381–388.
11. ———, *Independent variation of secondary classes*, Annals of Math. **108** (1978), 421–460.
12. ———, *A residue formula for holomorphic foliations*, Michigan Math. J. **27** (1980), 181–194.
13. S. Hurder and A. Katok, *Ergodic theory and Weil measures for foliations*, Annals of Math. **126** (1987), 221–275.
14. F. W. Kamber and P. Tondeur, *Foliated Bundles and Characteristic Classes*, Lecture Notes in Mathematics, No. 493, Springer-Verlag, 1975.
15. C. Lazarov and J. Pasternack, *Secondary characteristic classes for Riemannian foliations*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 365–385.
16. S. Morita, *On characteristic classes of Riemannian foliations*, Osaka J. Math. **16** (1976), 161–172.
17. S. Morita, S. Nishikawa, H. Sato, Γ -葉層構造の特性類について, 数学 **31** (1979), 110–128.
18. H. Moriyoshi, talk given at seminar on foliations at Atami, October 1996.
19. G. Raby, *Invariance des classes de Godbillon-Vey par C^1 -difféomorphismes*, Ann. Inst. Fourier **38** (1988), 205–208.
20. O. Rassmussen, *Continuous variation of foliations in codimension two*, Topology **19** (1980), 335–349.
21. ———, *Exotic Characteristic Classes for Holomorphic Foliations*, Invent. Math. **46** (1978), 153–171.
22. W. Thurston, *Noncobordant foliations of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc. **78** (1972), 511–514.
23. ———, *The theory of foliations of codimension greater than one*, Comment. Math. Helv. **49** (1974), 214–231.
24. T. Tsuboi, *On the foliated products of class C^1* , Annals of Math. **130** (1989), 227–271.
25. ———, *Godbillon-Vey 類の特徴付け*, 数学 **45** (1993), 128–140.

1-3-1 KAGAMIYAMA, HIGASHI-HIROSHIMA-SHI, HIROSHIMA 739, JAPAN
E-mail address: asuke@math.sci.hiroshima-u.ac.jp

超曲面の補集合の基本群

北大・理 島田 伊知朗

1 Introduction

Theorem 1 ([14]) 連結なコンパクト複素射影多様体 $F \subset \mathbf{P}^n$ が非特異であるとする. F とアフィン空間 \mathbf{C}^N の直積 $F \times \mathbf{C}^N$ のなかの超曲面 W を考える. \mathbf{C}^N の点 a が与えられた時, $F \times \{a\}$ と W の交叉として得られる F の部分多様体を W_a と書く. \exists を W_a が被約な超曲面でなくなる $a \in \mathbf{C}^N$ 全体のなす部分多様体とする. もし \exists が \mathbf{C}^N の中で余次元 2 以上をもてば $(F \times \mathbf{C}^N) \setminus W$ の基本群と a を *general* に選んだ時の $F \setminus W_a$ の基本群は同型になる.

講演では, この定理のいくつかの応用について述べたい.

2 Zariski の超平面切断定理の一般化

Zariski の超平面切断定理とは, \mathbf{P}^n ($n \geq 3$) のなかの超曲面 D が与えられた時, 2 次元線形部分空間 $\mathbf{P}^2 \subset \mathbf{P}^n$ を D に対して一般の位置にとれば, $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus (\mathbf{P}^2 \cap D))$ と $\pi_1(\mathbf{P}^n \setminus D)$ は同型になるというものである. この定理は, [22] において初めて提出されたが, 証明は不完全であった. 厳密な証明は [6] で与えられた.

2.1 重み付きの同次多項式の場合への拡張

x_0, \dots, x_n を次数が d_0, \dots, d_n で与えられる変数とし, $F(x_0, \dots, x_n)$ をこの重みによる次数について同次である多項式とする. S を \mathbf{C}^{n+1} の中で $F = 0$ によって定義された超曲面とする. $\mathbf{C}^{n+1} \setminus S$ には群 \mathbf{C}^\times が

$$(x_0, \dots, x_n) \mapsto (\lambda^{d_0} x_0, \dots, \lambda^{d_n} x_n)$$

で作用している. したがって自然な準同型 $\pi_1(\mathbf{C}^\times) \rightarrow \pi_1(\mathbf{C}^{n+1} \setminus S)$ が存在する. f_0, \dots, f_n を, (U, V, W) についての次数が d_0, \dots, d_n である同次多項式とする. F に f_0, \dots, f_n を代入して得られる多項式は (U, V, W) について同次になる. この同次多項式 $F(f_0, \dots, f_n)$ によって定義される \mathbf{P}^2 上の曲線を C とする.

Theorem 2 ([18]) f_0, \dots, f_n を一般に選べば $\pi_1(\mathbf{P}^2 \setminus C)$ は $\pi_1(\mathbf{C}^\times) \rightarrow \pi_1(\mathbf{C}^{n+1} \setminus S)$ の *cokernel* と同型になる.

$d_0 = \dots = d_n = 1$ のとき, 古典的な Zariski の定理に他ならない.

Example 1 f, g を次数がそれぞれ p, q の (U, V, W) についての *general* な同次多項式とする。 $f^q + g^p = 0$ で定義された次数 pq の曲線の補集合の基本群は、 $\mathbb{Z}/(p)$ と $\mathbb{Z}/(q)$ の自由積と同型である。

この結果は [10] および [8] でそれぞれ全く異なる方法で証明されていた。

上の定理を用いると、 F として特別なものを選んでやることにより、 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ が非可換有限群となる平面曲線 C の新しい例がたくさん構成できる。このような曲線の例は比較的わずかしかなかった ([3], [7])。

2.2 相対的な場合、および他の等質空間への拡張

\mathbb{P}^n 上に超曲面 D が与えられているとする。 \mathbb{P}^n には $G := PGL(n+1, \mathbb{C})$ が作用している。 $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow \mathbb{P}^n$ を非特異射影多様体 \bar{X} からの射とし、 $B \subset \bar{X}$ を超曲面とする。 $X := \bar{X} \setminus B$ とおき $f: X \rightarrow \mathbb{P}^n$ を \bar{f} の X への制限とする。

Theorem 3 ([15][20]) \bar{f} が次の三つの条件を満たすとする。(a) $\dim \bar{f}(\bar{X}) \geq 2$. (b) B_j を B の任意の既約成分とすると $\dim \bar{f}(B_j) \geq 1$. (c) X の中で $f_{*,x}: T_{x,X} \rightarrow T_{f(x), \mathbb{P}^n}$ の rank が 0 となる点 x からなる部分多様体は X のなかで余次元 2 以上である。このとき、 $\gamma \in G$ を *general* に選べば自然な準同型 $\pi_1(X \setminus (\gamma \circ f)^{-1}(D)) \rightarrow \pi_1(X) \times \pi_1(\mathbb{P}^n \setminus D)$ は全射となり、その *kernel* は $\pi_2(X) \rightarrow \pi_2(\mathbb{P}^n)$ の *cokernel* に等しい。

$\bar{X} = \mathbb{P}^2, B = \emptyset$ で \bar{f} が *linear embedding* のときは、Zariski の古典的な定理に他ならない。

同様に次の定理も示せる。 $U := \mathbb{C}^n$ を、アフィン空間とし、 G を \mathbb{C}^n のアフィン自己同型全体のなす群とする。 D および $\bar{f}: \bar{X} \rightarrow U, f: X \rightarrow U$ は上と同様に与えられているものとする。

Theorem 4 ([20]) \bar{f} が上の三つの条件 (a), (b), (c) を満たすとする。このとき、 $\gamma \in G$ を *general* に選べば $\pi_1(X \setminus (\gamma \circ f)^{-1}(D))$ は $\pi_1(X) \times \pi_1(U \setminus D)$ と同型になる。

3 平面曲線の補集合の基本群はいつ可換になるか?

上記の Zariski の超平面切断定理によれば $\mathbb{P}^n \setminus D$ の基本群を求めるには、 D を一般の位置にある 2 次元線形部分空間で切って得られる射影平面曲線の補集合の基本群を求めればよい。多くの状況において (たとえば discriminant locus, branchi locus, etc.) この平面曲線は通常 2 重点と通常劣点のみを特異点にもつ。そこで次の問題が考えられる。

Problem 1 曲線の次数 d 、および通常 2 重点と通常劣点の個数 n と k が与えられているとする。 C を n 個の通常 2 重点と k 個の通常劣点のみを特異点としてもつ次数 d の既約な射影平面曲線とする。 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ が常に可換であるための条件を求めよ。

たとえば、 $k = 0$ なら、つまり C が通常 2 重点のみを特異点にもつなら、 $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ は可換である。これは、Fulton と Deligne によって証明された Zariski 予想に他ならない。([2],[4], [5]) 現在までのところ知られている最良の結果は、次の定理である。

Theorem 5 (Nori) $2n + 6k < d^2$ なら $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ は可換である.

さて, Theorem 1 を用いることにより, 次の定理が証明される.

Theorem 6 ([19]) $C \subset \mathbb{P}^3$ を既約な空間曲線とする. C は \mathbb{P}^3 のどの 2 次元線形部分空間にも含まれていないとする. このとき C の *general* な射影の像として得られる平面曲線の補集合の基本群は可換になる.

この結果を使うと Nori の定理をわずかな改良できる. 注意していただきたいのは, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ の可換性が, d, n および k によって定まるとは限らないということである. つぎの様な例が知られている. ([21], [23], [12])

Example 2 6 個の通常劣点のみを特異点として持つ 6 次曲線の族は少なくとも 2 つの連結成分をもつ. ひとつの族に属する曲線は 6 個の通常劣点がある 2 次曲線の上に乗っていて, $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ は $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ と $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ の自由積と同型になる. もう一つの族に属する曲線の $\pi_1(\mathbb{P}^2 \setminus C)$ は $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ と同型.

このように, 特異点の形はまったく同じでも, 射影平面への埋め込み方が位相同型でない曲線のペアを Zariski pair という ([1]). [17] において, この Zariski pair の例が無限個構成されている.

参考文献

- [1] E. Artal Bartolo: Sur les couples de Zariski, J. Algebraic Geom. **3** (1994), 223 - 247.
- [2] P. Deligne: Le groupe fondamental du complément d'une courbe plane n'ayant que des points doubles ordinaires est abélien, Sémin. Bourbaki, no.543, 1979/80, Lecture Notes in Math. **842**, Springer, Berlin, 1981, 1 - 10.
- [3] A. Dimca: Singularities and Topology of Hypersurfaces, Springer - Verlag, Berlin, 1992.
- [4] W. Fulton: On the fundamental group of the complement of a node curve, Ann. Math. **111** (1980), 407 - 409.
- [5] W. Fulton and R. Lazarsfeld: Connectivity and its applications in algebraic geometry, Lecture Notes in Math. **862**, Springer, Berlin, 1981, pp. 26 - 92.
- [6] H. A. Hamm and D. T. Lê: Un théorème de Zariski du type de Lefschetz, Ann. Sci. École Norm. Sup. **6** (1973), 317 - 366.
- [7] B. Moishezon: On cuspidal branch curves, J. Algebraic Geom. **2** (1993), 309 - 348.
- [8] A. Némethi: On the fundamental group of the complement of certain singular plane curves, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **102** (1987), 453 - 457.
- [9] M. Nori: Zariski's conjecture and related problems, Ann. Sci. École. Norm. Sup. (4) **16** (1983), 305 - 344.

- [10] M. Oka: Some plane curves whose complements have non-abelian fundamental groups, *Math. Ann* **218** (1975), 55 - 65.
- [11] M. Oka: On the fundamental group of the complement of certain plane curves, *J. Math. Soc. Japan* **30** (1978), 579 - 597.
- [12] M. Oka: Symmetric plane curves with nodes and cusps, *J. Math. Soc. Japan* **44** (1992), 375 - 414.
- [13] M. Oka: Two transformations of plane curves and their fundamental groups, *J. Math. Sci. Univ. Tokyo* **3** (1996), 299 - 443.
- [14] I. Shimada: Fundamental groups of open algebraic varieties, *Topology* **34** (1995), 509 - 532.
- [15] I. Shimada: A generalization of Lefschetz - Zariski theorem on fundamental groups of algebraic varieties, *International J. Math.* **6** (1995), 921 - 932.
- [16] I. Shimada: On the fundamental group of the complement of a divisor in a homogeneous space, *Math. Z.* **220** (1995), 445 - 448.
- [17] I. Shimada: A note on Zariski pairs, *Compositio Math.* **104** (1996), 125 - 133.
- [18] I. Shimada: Fundamental group of complements to singular plane curves, *Amer. J. Math.* **119** (1997), 127 - 157.
- [19] I. Shimada: On the commutativity of fundamental groups of complements to plane curves, to appear in *Math. Proc. Cambridge Philosophical Soc.*
- [20] I. Shimada: On Zariski's hyperplane section theorem on the fundamental groups of complements to hypersurfaces, in preparation.
- [21] O. Zariski. On the problem of existence of algebraic functions of two variables possessing a given branch curve. *Amer. J. Math.* **51** (1929) 305 - 328.
- [22] O. Zariski: A theorem on the Poincaré group of an algebraic hypersurface, *Ann. Math.* **38** (1937), 131 - 141.
- [23] O. Zariski: The topological discriminant group of a Riemann surface of genus p , *Amer. J. Math.* **59** (1937), 335 - 358.

CLASPERS AND THE VASSILIEV INVARIANTS

KAZUO HABIRO

In this note we redefine the Vassiliev modules of knots to make clear topological structures behind the combinatorics of trivalent graphs.

1. USUAL DEFINITION OF THE VASSILIEV FILTRATION

In this section, we will recall the definition of the Vassiliev filtration on the module of knots and the Vassiliev invariants. For detail, see [V,B,BL,BN].

Let \mathcal{L} be the set of ambient isotopy classes of oriented ordered knots in S^3 .

A *singular knot* is an immersion of an oriented circle S^1 into S^3 having only finitely many singular points all of which are transverse double points. By $\bar{\mathcal{L}}$ we denote the set of ambient isotopy classes of singular knots and by $\bar{\mathcal{L}}_k$ the subset of $\bar{\mathcal{L}}$ consisting of the classes of singular knot with exactly k double points. We associate to every singular knot γ an element $e(\gamma)$ in the module $\mathbb{Z}\mathcal{L}$ as follows. Let p_1, \dots, p_k be the set of double points of γ and let $\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}$. Let $\gamma_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k}$ be the knot obtained from γ by replacing each double point p_i with a crossing of sign ϵ_i . We then set

$$e(\gamma) = \sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k \in \{\pm 1\}} (-1)^{\epsilon_1 \dots \epsilon_k} [\gamma_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_k}]$$

where $[\cdot]$ denotes equivalence class. This defines a linear map $e: \mathbb{Z}\bar{\mathcal{L}} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{L}$. By J_k we denote the image of $\mathbb{Z}\bar{\mathcal{L}}_k$ under the map e .

We have a descending filtration

$$\mathbb{Z}\mathcal{L} = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$$

We call this the *Vassiliev filtration* of $\mathbb{Z}\mathcal{L}$. A \mathbb{Z} -linear map $f: \mathbb{Z}\mathcal{L} \rightarrow A$ of $\mathbb{Z}\mathcal{L}$ into an abelian group A is an *invariant of type k* if f vanishes on the submodule J_{k+1} . Invariants of finite type are also called *Vassiliev invariants*. The module of A -valued invariants of type k is canonically isomorphic to $\text{Hom}(\mathbb{Z}\mathcal{L}/J_{k+1}, A)$.

2. ANOTHER DEFINITION OF THE VASSILIEV FILTRATION

2.1. Claspers and graph claspers. A *clasper* $C = (A_1, A_2, B)$ in a compact connected oriented 3-manifold M is a triple of two disjoint nonoriented annuli A_1 and A_2 embedded in $\text{int } M$ and a band B also embedded in $\text{int } M$ which connects A_1 and A_2 . We call the two annuli A_1 and A_2 the *leaves* of C , and the band B the *edge* of C .

We obtain from a clasper C an *associated framed knot* L_C in M in the way depicted in Figure 1. Here we use the orientation of M , but we do not need the orientations of A_1, A_2 nor B .

Surgery on a clasper C will mean surgery on the associated framed knot L_C . We denote by M^C the result of surgery M^{L_C} .

That surgery on the clasper C depicted in Figure 2(a) transforms the knot γ into the knot γ^C depicted in Figure 2(b) explain the name ‘clasper’.

A *graph clasper* G for a knot γ consists of the following data:

- disjoint disks V_1, \dots, V_p ($p \geq 0$) in $S^3 \setminus \gamma$,
- disjoint disks D_1, \dots, D_q ($q \geq 0$) in $S^3 \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_p)$ such that each D_i intersects transversely once with γ in the interior of D_i ,
- disjoint bands B_1, \dots, B_r ($r \geq 0$) in $S^3 \setminus \gamma$ such that each B_i connects two of the disks $V_1, \dots, V_p, D_1, \dots, D_q$, here B_i may connect one disk with itself,

satisfying

- (1) each V_i is incident to exactly three bands,
- (2) each D_i is incident to exactly one band.

We call the disks V_1, \dots, V_p the *vertices* of G , the disks D_1, \dots, D_q the *disk-leaves* of G and the bands B_1, \dots, B_r the *edges* of G . The *total space* of G is the union $V_1 \cup \dots \cup V_p \cup D_1 \cup \dots \cup D_q \cup B_1 \cup \dots \cup B_r$, which we often simply denote by G .

A graph clasper G is *admissible* if each (connected) component of G contains at least one disk-leaf. We can verify that surgery on an admissible graph clasper G for a knot γ in M yields a 3-manifold M^G homeomorphic to M and a knot γ^G in M^G . We can naturally identify M^G with M , so we can think of this surgery as a transformation of a knot γ in M into another knot γ^G in M .

The *degree*, $\text{deg } G$, of a graph clasper G is half the sum of the number of vertices of G and the number of disk leaves of G .

2.2. Definition of the Vassiliev filtration using admissible graph claspers. By \mathcal{G} we denote the set of all ambient isotopy classes $[\gamma, G]$ of pairs (γ, G) of knots γ

and graph claspers G for γ . By \mathcal{G}_k we denote the subset of \mathcal{G} consisting of the classes $[\gamma, G]$ with $\deg G = k$. Let $e : \mathbb{Z}\mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Z}\mathcal{K}$ be the \mathbb{Z} -linear map given by

$$e([\gamma, G]) = (-1)^{v(G)} \sum_{G' \subset G} (-1)^{\#G - \#G'} [\gamma^{G'}],$$

Here $v(G)$ denotes the number of vertices in G , $\#G$ denotes the number of components of G , and the sum is over all sub-graph clasper G' of G .

Let J_k denote the image of $\mathbb{Z}\mathcal{G}_k$ under the map e . We have a decending filtration on $\mathbb{Z}\mathcal{K}$:

$$\mathbb{Z}\mathcal{K} = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \dots$$

Proposition 1. *We have $J_k = e(\mathbb{Z}\mathcal{G}_k)$ for $k \geq 0$.*

Let $N_k = J_k/J_{k+1}$. Let $e_k : \mathbb{Z}\mathcal{G}_k \rightarrow N_k$ be the surjection $e|_{\mathcal{G}_k} : \mathbb{Z}\mathcal{G}_k \rightarrow J_k$ followed by the projection $p : J_k \rightarrow J_k/J_{k+1} = N_k$.

In the following, by ‘chord diagram’ we mean Bar-Natan’s Chinese character diagram (see [BN]). That is, a *chord diagram* D is the following data:

- a graph D with every vertex of D either univalent or trivalent, here we allow double edges and loop edges,
- a cyclic ordering for the set of three edges incident to each trivalent vertex of D ,
- a cyclic ordering on the set of univalent vertices of D .

Two chord diagrams D and D' are equivalent if there is a structure-preserving isomorphism of the graph D onto the graph D' . Two equivalent chord diagrams are regarded as the same in what follows.

Usually a chord diagrams is depicted as in Figure 3.

By \mathcal{D}_k we denote the set of chord diagrams of degree k . Let A_k denote the quotient \mathbb{Z} -module $\mathbb{Z}\mathcal{D}_k/R_k$, where R_k is the submodule generated by the elements depicted in Figure 4.

We define the map $\tau_k : \mathbb{Z}\mathcal{G}_k \rightarrow A_k$ as in Figure 5. To define the sign, we first choose an orientation of each vertex of G . We also orient disk-leaves of G in such a way that the intersection of disk-leaves and the knot γ are all positive. Then the required sign is $(-1)^n$, where n is the number of edges of G such that the two incident vertices or disk-leaves are not consistently oriented.

We have the following result.

Theorem 2. *The map $e_k: \mathbb{Z}\mathcal{G}_k \rightarrow N_k$ factors through $\tau_k: \mathbb{Z}\mathcal{G}_k \rightarrow A_k$.*

Remark 1. Theorem 2 is, in a sense, a generalization of Ng's result [Ng], where it was shown that for a connected chord diagram which has exactly one 'internal cycle' we can construct a corresponding (ribbon) knot.

Remark 2. As is well known, we can interpret the IHX relation as a kind of the Jacobi identity. Using claspers, we can re-interpret it as a consequence of some 'topological Witt identity' in a category of cobordisms of surfaces.

Remark 3. By loosening the definition of graph claspers, we can generalize the notion of Vassiliev invariant in several ways. Especially we can generalize the notion of the Ohtsuki finite type invariants of integral homology 3-sphere [O] to compact connected oriented 3-manifolds. These generalizations will appear in forthcoming papers.

REFERENCES

- [BN] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants*, Topology 34 (1995), no.2, 423-472
- [B] J. S. Birman, *New points of view in knot theory*, Bull. Amer. Math. Soc. 28 (1993) 253-287.
- [BL] J. S. Birman and X-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev invariants*, Invent. Math. 111 (1993) 225-270.
- [Ng] K. Y. Ng, *Groups of ribbon knots*, q-alg/9502017 and Columbia University preprint, February 1995.
- [O] T. Ohtsuki, *Finite type invariants of integral homology 3-spheres*, Jour. of Knot Theory and its Ramifications 5(1) (1996) 101-115.
- [V] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of Singularities and its Applications (Providence) (V. I. Arnold, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO

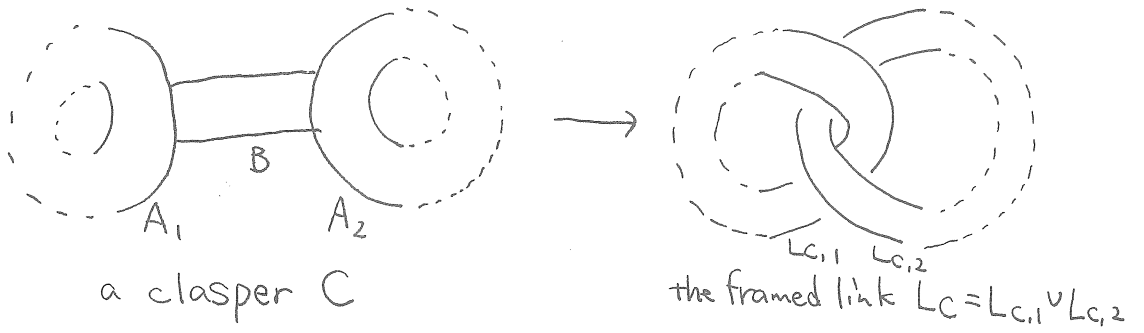


Figure 1

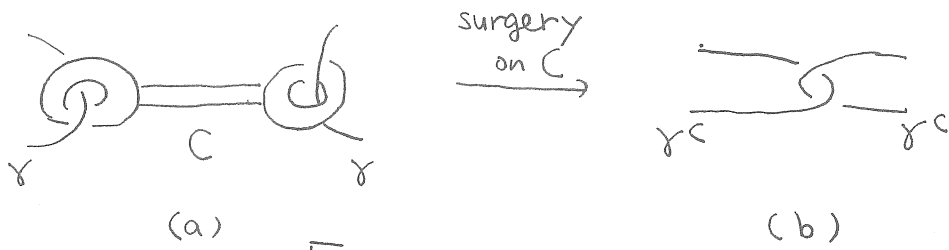


Figure 2

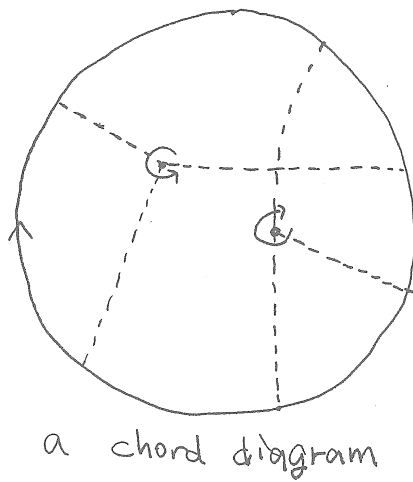


Figure 3

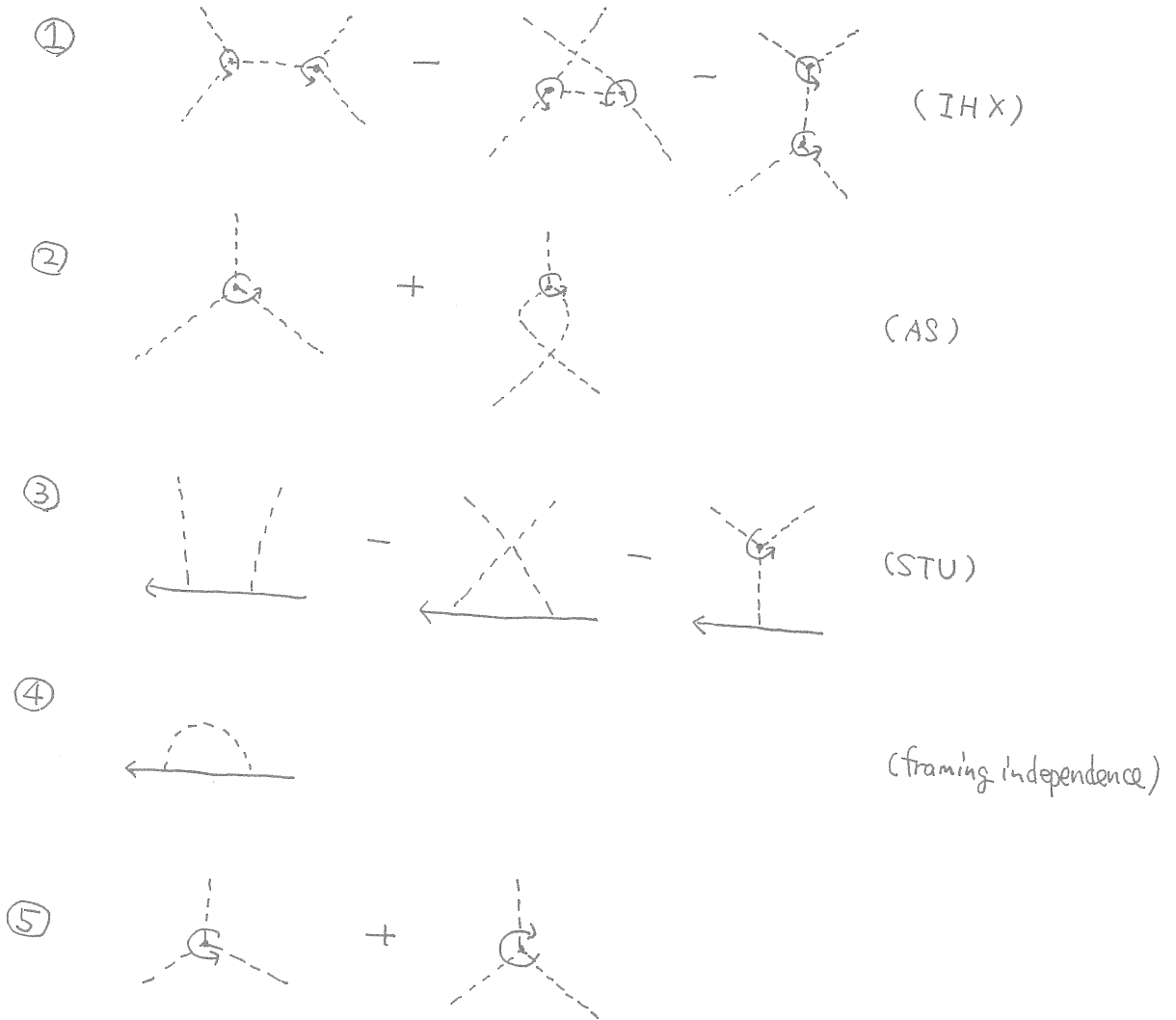


Figure 4

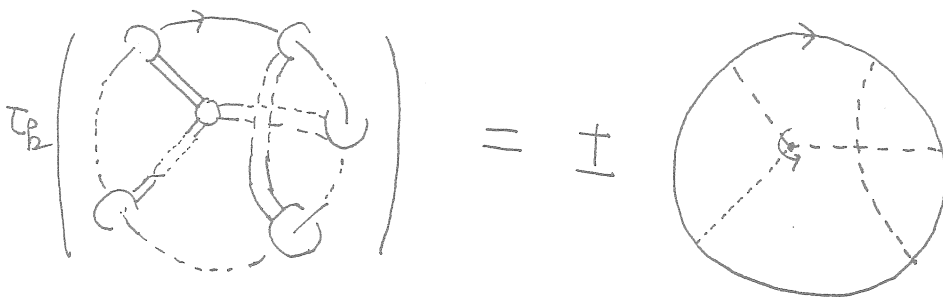


Figure 5

カオス同相写像とそれを許容する空間について

加藤久男
筑波大学数学系

位相力学系において現在いろいろなカオス写像が考えられている。例えば、transitive, sensitive (= sensitive dependence on initial conditions), chaos in the sense of Li-Yorke and Devaney, expansive, continuum-wise expansive (= expansive とパイこね変換の一般化) などが代表的なものである。ここでは次のような、多様体・smooth を仮定しない一般的な問題を考える。

問題：どのような空間（主に、コンパクト距離空間）にどのようなカオス同相写像が存在するか？

1 多面体及びメンガー多様体上のカオス

まず、transitive, sensitive な同相写像について考えよう。この問題については、Besicovitch [7] が 1937 年に平面上の同相写像で transitive なものを構成した。また、同じ年に Oxtoby [40] は、多様体上の保測同相写像の中で transitive なものは G_δ -dense だけ存在することを示した。この結果は、測度論とトポロジーのカテゴリー論との興味深い結びつきを示すものである。以後、彼はこの思想の下に注目すべき多くの結果を得ている。この方面については彼の著書「Measure and categories, GTM 2, Springer」を参照されたい。1941 年 Oxtoby - Ulam [41] は regularly connected polyhedron M においては nonatomic locally positive Lebesgue-Stieltjes measure (= LS-measure) は位相的に唯一つであり、LS-measure μ の保測同相写像全体 $H(M, \mu)$ の中で、ergodic な集合 $E(M, \mu)$ は G_δ -dense となっていることを証明した、但し $\dim M \geq 2$ の場合。彼らの証明方法を詳しく調べてみると、それらは多様体よりもむしろメンガー多様体により適切に応用できる方法であることがわかる。つまり、細かな分割と同相写像の極限をとる方法である。n 次元メンガー多様体は homogeneous であり、n-dimensional compacta に対して universal space であり、フラクタル的構造を持っている空間である。メンガー多様体の特徴付け及び基本的性質は Anderson, Bestvina により得られている。メンガー多様体論の最近までのサーベイについては、Chigogidze-Kawamura-Tymchatyn [10] を参照されたい。

次に述べる結果は、川村-Tuncali-Tymchatyn 氏との共同研究 [31] で得られたものである。

Theorem 1.1 (Kato, Kawamura, Tuncali and Tymchatyn [31]) For any nonatomic locally positive LS measures μ_1, μ_2 on a compact Menger manifold M with $\mu_1(M) = \mu_2(M)$, there is a homeomorphism $h : M \rightarrow M$ such that $\mu_2 = \mu_1 h$.

Theorem 1.2 (K-K-T-T [31]) Let M be a compact Menger manifold and let μ be a nonatomic locally positive LS measure on M . Then the set $E(M, \mu)$ is dense G_δ in $H(M, \mu)$.

特に、この定理は transitive homeomorphisms の存在を意味する。Li – Yorke, Devaney のカオスに関しては、次を得た。

Theorem 1.3 (K-K-T-T [31]) Let M be a compact connected Menger manifold or a compact regularly connected n -dimensional polyhedron ($n \geq 2$) and let μ be a nonatomic locally positive LS measure on M . Then

1. there is a dense G_δ -subset L in $H(M, \mu)$ such that each $f \in L$ has a dense scrambled set S which is a countable union of Cantor sets, and moreover,
2. there is a dense set L' in L such that each $f \in L'$ is chaotic in the sense of Devaney.

メンガー多様体に関して面白そうな問題として、

問題: メンガー多様体上の同相写像で、topologically mixing, minimal, or (continuum-wise) expansive なものは存在するか?

問題: 他の homogeneous 空間について、上の定理が成立するか? 特に、the pseudo-arc についてはどうか? Kennedy [34], Minc-Tansue [39] によって、Devaney, Li-Yorke カオス同相写像の存在することは知られている。

Li-Yorke のカオスに関して、観測可能なカオスが問題にされることがある。例えば、テント写像 $T : I = [0, 1] \rightarrow I$ はこのカオスをもつが、その scrambled set で可測なものは測度ゼロである = 観測不可能。しかしながら、任意の多様体上の観測不可能な Li-Yorke カオス写像に対し、いくらでも近くにそれと同じ力学系をもちかつ観測可能な Li-Yorke カオス写像が存在する事が分かる。実際、観測可能な scrambled set として 十分大きなカントール集合の可算和をとることができる [28]。

2 連続体上のカオス同相写像

前のセクションで、Oxtoby の思想の下に測度を利用して多様体やメンガー多様体上にカオス同相写像の構成を考えてきたが、他にカオス同相写像を生み出すものとしてストレンジ・アトラクターを利用する方法がある。保測同相写像ではアトラクターを生じないことに注意。こうしたストレンジ・アトラクター上では、更に強い

カオスである hyperbolic, expansive, またパイこね変換と expansive の一般化である continuum-wise expansive な現象が起きていることが多い。この場合、アトラクターとしては複雑な連続体を考えるのが自然である。実際、ストレンジ・アトラクターは連続体論でいう indecomposable continuum [35] になる例が多い。この方面の研究は、主に平面の場合に Brouwer, Birkhoff, Caratheodory, Cartwright-Littlewood, Charpentier によって始められたが、近年アメリカを中心に再び活発に研究され始めている [5]。実際、平面内の力学系、あるいは平面内の連続体論に限ってみても依然として解決されていない多くの問題がある。たとえば、最も重要な問題の一つとして、平面を分割しない連続体は不動点、または周期点をもつか？、などの問題がある。次にここで扱う expansive homeomorphisms の一般的性質及び多様体上の性質については現在まで多くの注目すべき結果が得られている。例えば、青木-白岩 [3]、青木 [2]、青木-平出 [4] などに詳しい。

ここで次の問題を考える。

問題：どのような連続体に (continuum-wise) expansive な同相写像が存在するか？特に、平面や曲面の連続体についてはどうか？

特に、Williams の問題が重要である：

問題：平面を分割しない連続体は expansive homeomorphism を許容するか？

これらの問題については、現在まで要約すると次の様な結果が示されている。

結果：(continuum-wise) expansive homeomorphism は ”カオス連続体” と呼ばれる複雑な連続体を存在させ、種々のカオスがある上で生じている。さらに positively continuum-wise expansive homeomorphism (=パイこね変換) の最小のカオス連続体は indecomposable な連続体であり、連結な stable (or unstable) sets が、その composants と一致している。一般の continuum-wise expansive homeomorphism の存在は、平面や曲面上の連続体では positively continuum-wise expansive homeomorphism の存在を意味し、したがって indecomposable なカオス連続体を含むことになる。つまり、平面や曲面のストレンジ・アトラクターは indecomposable continuum をカオス連続体として含む事がわかる。また、continuum-wise expansive のトポロジカル・エントロピーは正である (expansive homeomorphism の場合には A. Fathi に依る)。Williams の問題については、chainable continuum 及び decomposable continuum については expansive なものは存在しないことがわかった。

詳しく定理の形で述べると以下のようなになる。

Theorem 2.1 ([17]) *If $f : X \rightarrow X$ is a (continuum-wise) expansive homeomorphism of a compactum X with $\dim X > 0$, then there exists a σ -chaotic continuum of f . In this case, if Z is a σ -chaotic continuum of f , then the decomposition*

$\{V^\sigma(z; Z) \mid z \in Z\}$ of Z is an uncountable family of mutually disjoint, connected F_σ -sets in Z .

上の定理の仮定の下で、ある f -invariant closed set Y , $\dim Y > 0$ が存在して、 Y 上で f は transitive, chaotic in the sense of Li-Yorke であることがわかる。しかも scrambled set として countable union of Cantor sets でかつ Y で稠密となるものが取れる [20,28]。

次の定理は、例えばパイこね変換が indecomposable continuum を生み出すことを保証している。

Theorem 2.2 ([24]) *Suppose that $f : X \rightarrow X$ is a positively continuum-wise expansive (= expanding-folding) homeomorphism of a compactum X with $\dim X > 0$. Then the followings hold.*

1. *There is a u -chaotic continuum Z of f such that Z is indecomposable, and for each $z \in Z$ the composant $c(z)$ of Z containing the point z coincides with the continuum-wise u -stable set $V^u(z; Z)$ of Z .*
2. *Z is an indecomposable subcontinuum of X such that for each $z \in Z$, the composant $c(z)$ of Z containing z coincides with $V^u(z; Z)$ if and only if Z is a minimal element of the set of all u -chaotic continua of f .*

次の結果は、曲面内のストレンジ・アトラクターが、indecomposable continuum を含むということを意味し、複雑な幾何学的構造を持っていることを保証している。複雑な力学系は複雑なトポロジーを導く。

Theorem 2.3 ([24,30]) *Let X be a compactum in surface M with $\dim X > 0$. If $f : X \rightarrow X$ is a continuum-wise expansive homeomorphism, then there is an f -invariant subcompactum Y of X such that $\dim Y > 0$ and either $f|_Y : Y \rightarrow Y$ or $(f|_Y)^{-1}$ is positively continuum-wise expansive. Hence for some $\sigma = u$ or s there is a σ -chaotic continuum Z of f such that Z is indecomposable, and for each $z \in Z$ the composant $c(z)$ of Z containing z coincides with $V^\sigma(z; Z)$. In particular, X contains an indecomposable chaotic continuum of f .*

Theorem 2.4 ([21]) *In the plane R^2 , there is no (nondegenerate) locally connected continuum (= Peano continuum) admitting continuum-wise expansive homeomorphism.*

1次元の局所連結空間については、川村-Tuncali-Tymchatyn により、次の結果が得られている。従って、もし expansive homeomorphism が存在するとすれば、それはメンガーカーブを含むことになるだろう。

Theorem 2.5 (*[K-T-T [33]*) *If X is a 1-dimensional locally connected continuum admitting an expansive homeomorphism, then X is nowhere planar.*

Theorem 2.6 (*[14]*) *Let F be a finite family of graphs and let X be an F -like continuum. If $f : X \rightarrow X$ is a continuum-wise expansive homeomorphism, then there is a σ -chaotic continuum Z of f such that Z is indecomposable, and for each $z \in Z$ the component $c(z)$ of Z containing z coincides with $V^\sigma(z; Z)$.*

Theorem 2.7 (*[15]*) *If X is a tree-like continuum admitting a continuum-wise expansive homeomorphism, it must contain an indecomposable subcontinuum.*

次の定理は、Williams の2つ予想のうち易しい方の解答である。難しい方は、先にあげた問題。定理にある pseudo-arc は、Bing, Moise 等によって研究された非常に面白い連続体であり、Bing [8] によりその特徴化が得られている。定理の証明には、Mioduszewski の Mountain Climer's Theorem と Bing の crookedness の方法を使用する。

Theorem 2.8 (*[18]*). *If $f : X \rightarrow X$ is a homeomorphism of a continuum X and f can be lifted to an onto map $h : P \rightarrow P$ of the pseudo-arc, then f is not expansive. In particular, chainable continua admit no expansive homeomorphisms. In other words, if X is any chainable continuum and $f : X \rightarrow X$ is any homeomorphism of X , then for any $\epsilon > 0$ there exist two different points $x, y \in X$ such that $d(f^n(x), f^n(y)) < \epsilon$ for all $n \in \mathbb{Z}$.*

p -adic solenoid は expansive homeomorphism を持つことを Williams [44] が証明したが、それらは全て indecomposable で平面に埋め込めない。decomposable circle-like は全て平面に埋め込めることに注意。これについて、

Theorem 2.9 (*[27]*) *If X is a decomposable circle-like continuum, then X admits no expansive homeomorphism.*

1次元のグラフ、特に arc から tree の力学系、特にエントロピーの評価などがごく最近活発に研究されてきているが、sensitive 写像の場合に次の結果を得た。それは、グラフという特殊な空間上では、Smale – Bowen の spectral decomposition theorem と同様の定理が sensitive という弱い条件で成立することを意味している。

Theorem 2.10 (*[19]*) *Let $f : G \rightarrow G$ be a map of a graph G which has sensitive dependence on initial conditions. Then $M^+(f) \neq \emptyset$ and $M^+(f) = \{G_i \mid 1 \leq i \leq N\}$ is a finite family of subgraphs G_i of G satisfying the following properties:*

1. *If $i \neq j$, then $G_i \cap G_j$ is empty or a finite set.*

2. For each i , f is chaotic on G_i in the sense of Devaney, and there is a connected subgraph H_i of G_i and a natural number $n(i) \geq 1$ such that H_i is $f^{n(i)}$ -invariant, $f^{n(i)}|_{f^k(H_i)} : f^k(H_i) \rightarrow f^k(H_i)$ is topologically mixing for each $0 \leq k \leq n(i) - 1$, $G_i = \bigcup_{k=0}^{n(i)-1} f^k(H_i)$, and $f^k(H_i) \cap f^{k'}(H_i)$ is empty or a finite set.
3. If $L = \text{Cl}(G - \bigcup_{i=1}^N G_i)$ and $F(f) = \{x \in L \mid f^n(x) \in L \text{ for each } n \geq 1\}$, then $F(f)$ is a closed set of L with $f(F(f)) \subset F(f)$ and $\dim F(f) \leq 0$. In particular, if $x \in L - F(f)$, then there is a neighborhood U of x in G and a natural number $n(x) \geq 1$ such that $f^n(U) \subset \bigcup_{i=1}^N G_i$ for each $n \geq n(x)$.

逆極限をとると、

Corollary 2.11 *Suppose that a map $f : G \rightarrow G$ of a graph G has sensitive dependence on initial conditions. Let $\tilde{f} : (G, f) \rightarrow (G, f)$ be the shift map of f . Then $\mathcal{M}^+(\tilde{f}) = \{Y_1, \dots, Y_N\}$ is nonempty and a finite set and the following conditions are satisfied:*

1. $Y_i \cap Y_j (i \neq j)$ is empty or a finite set of periodic points of \tilde{f} .
2. Both \tilde{f} and \tilde{f}^{-1} are chaotic on each Y_i in the sense of Devaney, there is a continuum Z_i in Y_i and a natural number $n(i) \geq 1$ such that Z_i is $\tilde{f}^{n(i)}$ -invariant, $\bigcup_{k=0}^{n(i)-1} \tilde{f}^k(Z_i) = Y_i$, $\tilde{f}^k(Z_i) \cap \tilde{f}^{k'}(Z_i) (0 \leq k \neq k' \leq n(i) - 1)$ is empty or a finite set of periodic points of \tilde{f} for each i , and $\tilde{f}^{n(i)}|_{\tilde{f}^k(Z_i)}$ is topologically mixing. In particular, Z_i is a u -chaotic continuum of \tilde{f} which is an indecomposable continuum.
3. There is an \tilde{f} -invariant closed subset $F(\tilde{f})$ in $\text{Cl}((G, f) - \bigcup_{i=1}^N Y_i)$ such that $\dim F(\tilde{f}) \leq 0$, and if $x \in [(G, f) - (\bigcup_{i=1}^N Y_i \cup F(\tilde{f}))]$ and any $\epsilon > 0$, there is a neighborhood U of x in (G, f) and a natural number $n(\epsilon) \geq 1$ such that $\tilde{f}^n(U)$ is contained in the ϵ -neighborhood of $\bigcup_{i=1}^N Y_i$ in (G, f) for each $n \geq n(\epsilon)$.

一般に、連続体上の同相写像がアトラクターとして実現される必要十分条件は、それが多面体のシフト写像として表せることである。Plykin attractors [42] は平面内の hyperbolic attractors であり、グラフのシフト写像で表せることが知られている。その連続体は”和田の湖” [47] として知られる連続体である ([47] の論文は日本で最初のトポロジーの論文)。したがって、和田の湖、ただし湖の個数が3つ以上、つまり平面を4つ以上に分ける連続体上には、expansive homeomorphism が存在することがわかる。グラフのシフト写像と expansive については、次の必要十分条件がある。

Theorem 2.12 ([15]) *Let $f : G \rightarrow G$ be an onto map of a graph G . Then the shift map $\tilde{f} : (G, f) \rightarrow (G, f)$ of f is expansive if and only if f is a positively pseudo-expansive map with respect to $K^{(1)}$, where $K^{(1)}$ is the set of edges of some simplicial complex K with $|K| = G$.*

次の定理は、グラフのシフト写像による方法では、平面を3つ以下にわけると連続体上に expansive homeomorphism を構成できないことを示している。

Theorem 2.13 ([23]) *Let $f : G \rightarrow G$ be an onto map of a graph G . Then the following hold.*

1. *If f is null-homotopic, then \tilde{f} is not expansive. In particular, if G is a tree, then every shift map \tilde{f} is not expansive.*
2. *If a graph G contains a simple closed curve, then there is a map $f : G \rightarrow G$ whose shift map \tilde{f} is expansive.*
3. *If $\text{rank}(H_1(G)) \leq 2$ and \tilde{f} is expansive, then (G, f) can not be embedded into the plane \mathbb{R}^2 . For each $k \geq 3$, there is a map $f : G_k \rightarrow G_k$ such that $\text{rank}(H_1(G_k)) = k$, \tilde{f} is expansive and (G_k, f) is a plane continuum. In fact, if $k \geq 3$, there is a Lakes of Wada with k lakes admitting an expansive homeomorphism. This result implies that an expansive homeomorphism on a plane continuum which separates the plane into n domains ($n \leq 3$) can not be obtained from any shift map of a graph.*
4. *If \tilde{f} is expansive, then $W^u(x) = V^u(x; X)$ is the arc-component of $X = (G, f)$ containing x , $W^s(x) \neq V^s(x; X)$, and they are 0-dimensional, respectively, where*

$$W^u(x) = \{y \in X \mid \lim_{n \rightarrow \infty} d(f^{-n}(x), f^{-n}(y)) = 0\}.$$

曲面の expansive homeomorphism の存在については平出 [12]、Lewowicz [37] の注目すべき研究がある。コンパクトでない多様体の場合には、河野 [36] が多様体 M について $M \times (0, 1)$ 上に expansive homeomorphism が存在することを示している。特に open n -ball ($n \geq 2$) 上には expansive homeomorphism が存在する。これと関連して、シフト写像と河野の写像 [36] とシフト写像のアトラクターへの埋め込みを利用すると、次を示すことができる。

Theorem 2.14 ([26]) *Let M be a surface and let $M(n)$ be the surface obtained by deleting from M n disjoint 2 cells. Then*

1. *if $M \neq S^2, P^2, K^2$, $M(n)$ ($n \geq 1$) admits an expansive homeomorphism,*
2. *$M = P^2, K^2$ and $n \neq 1, 2$, then $M(n)$ admits an expansive homeomorphism,*
3. *if $M = S^2$ and $n \neq 3$, $M(n)$ admits an expansive homeomorphism.*

上の定理の1、2、3以外の場合には存在するかどうかわかっていない。

3 問題

問題： 平面を3つ以下に分ける連続体で expansive homeomorphism を許容するものは存在するか？ 2つに分ける indecomposable plane circle-like continuum はどうか？特に、the pseudo-circle はどうか？

問題： hereditarily indecomposable continuum で expansive homeomorphism を許容するものがあるか？

問題： tree-like 更には trivial shape, or $\text{pro-}\pi_1(X) = 0$ な連続体で expansive homeomorphism を持つものがあるか？ weakly chainable tree-like continuum ではどうか？

問題： 平面内の連続体で minimal 同相写像を許容するものを分類せよ。

問題： chainable な連続体が topological entropy $h(f) > 0$ を満たす同相写像 f を許容するならば、horseshoe または indecomposable continuum を含むか？一般に、 $h(f) > 0$ はどの程度連続体の複雑度を意味するのか？例えば、non-Suslinean 性を意味するか？

問題： 3次元以上のユークリッド空間上に minimal homeomorphism は存在するか？(2次元の場合は、Brouwer により存在しないことが知られている)

問題： 写像のバーコフ・センターの depth を決定する良い方法はないか？特に、グラフの場合は何か？ arc, tree の場合は2以下、3以下であることが知られている。また、dendrite、円盤上では全ての可算 ordinal numbers をとり得ることがわかる [29]。

References

- [1] L. Alseda, S. Baldwin, J. Llibre and M. Misiurewicz, Entropy of transitive tree maps, *Topology*, 36 (1996), 519-533.
- [2] N. Aoki, Topological dynamics, in: K. Morita and J. Nagata, eds., *Topics in General Topology*, 1989, 625-740.
- [3] 青木統夫—白岩謙一、力学系とエントロピー、共立出版 1985.
- [4] N. Aoki and K. Hiraide, *Topological Theory of Dynamical Systems*, North-Holland Math. Library, 1994.

- [5] M. Barge and M. Brown, Problems in Dynamics on Continua, *Contemporary Math.* 117 (1991), 177-182.
- [6] M. Barge and B. Diamond, The dynamics of continuous maps of finite graphs through inverse limits, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 334 (1994), 773-790.
- [7] A. S. Besicovitch, A problem on topological transformations of the plane, *Fund. Math.*, 28 (1937), 61-65.
- [8] R. H. Bing, A homogeneous indecomposable plane continuum, *Duke Math. J.*, 15 (1948), 729-742.
- [9] L. S. Block and W. A. Coppel, Dynamics in one dimension, *Lecture Notes in Math.* Springer-Verlag, 1513.
- [10] A. Chigogidze, K. Kawamura and E. D. Tymchatyn, Menger Manifolds, *Lect. Notes in Pure and applied Math.* 170 (1995), 37-88.
- [11] M. Handel, A pathological area preserving C^∞ diffeomorphism of the plane, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 86 (1982), 163-168.
- [12] K. Hiraide, Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov, *Osaka J. Math.*, 27 (1990), 117-162.
- [13] H. Hosaka and H. Kato, Continuous maps of trees and nonwandering sets, *Topology Appl.*, to appear.
- [14] H. Kato, Expansive homeomorphisms and indecomposability, *Fund. Math.*, 139 (1991), 49-57.
- [15] H. Kato, Expansive homeomorphisms in continuum theory, *Topology Appl.*, 45 (1992), 223-243.
- [16] H. Kato, Continuum-wise expansive homeomorphisms, *Canad. J. Math.*, 45 (1993), 576-598.
- [17] H. Kato, Chaotic continua of (continuum-wise) expansive homeomorphisms and chaos in the sense of Li and Yorke, *Fund. Math.*, 145 (1994), 261-279.
- [18] H. Kato, The nonexistence of expansive homeomorphisms of chainable continua, *Fund. Math.*, 149 (1996), 119-126.
- [19] H. Kato, Chaos of continuum-wise expansive homeomorphisms and dynamical properties of sensitive maps of graphs, *Pacific J. Math.*, 175 (1996), 93-116.
- [20] H. Kato, Minimal sets and chaos in the sense of Devaney on continuum-wise expansive homeomorphisms, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 170 (1995), 265-274.

- [21] H. Kato, The nonexistence of expansive homeomorphisms of Peano continua in the plane, *Topology Appl.*, 34 (1990), 161-165.
- [22] H. Kato, On expansiveness of shift homeomorphisms of inverse limits of graphs, *Fund. Math.*, 137 (1991), 201-210.
- [23] H. Kato, Embeddability into the plane and movability on inverse limits of graphs whose shift maps are expansive, *Topology Appl.*, 43 (1992), 141-156.
- [24] H. Kato, On indecomposability and composants of chaotic continua, *Fund. Math.*, 150 (1996), 245-253.
- [25] H. Kato, Everywhere chaotic homeomorphisms on manifolds and k -dimensional Menger manifolds, *Topology Appl.*, 72 (1996), 1-17.
- [26] H. Kato, A note on expansive homeomorphisms on surfaces with holes, *Topology Appl.*, to appear.
- [27] H. Kato, The nonexistence of expansive homeomorphisms of a class of continua which contains all decomposable circle-like continua, *Trans. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [28] H. Kato, On scrambled sets and a theorem of Kuratowski on independent sets, *Proc. Amer. Math. Soc.*, to appear.
- [29] H. Kato, The depth of centers of maps of dendrites, *J. Australian Math. Soc.*, to appear.
- [30] H. Kato, Indecomposability of chaotic continua on surfaces, preprint.
- [31] H. Kato, K. Kawamura, H. M. Tuncali and E. D. Tymchatyn, Measures and topological dynamics on Menger manifolds, preprint.
- [32] H. Kato and J. Park, Expansive homeomorphisms of countable compacta, preprint.
- [33] K. Kawamura, H. M. Tuncali and E. D. Tymchatyn, Expansive homeomorphisms on Peano curves, *Houston J. Math.*, 21 (1995), 573-583.
- [34] J. Kennedy, The construction of chaotic homeomorphisms on chainable continua, *Topology Appl.*, 43 (1992), 91-116.
- [35] J. Kennedy, A brief history of indecomposable continua, *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 170 (1995), 103-126.
- [36] M. Kouno, On expansive homeomorphisms on manifolds, *J. Math. Soc. Japan*, 33 (1981), 533-538.

- [37] J. Lewowics, Expansive homeomorphisms of surfaces, *Bol. Soc. Brasil. Math.*, 20 (1989), 113-133.
- [38] R. Mañé, Expansive homeomorphisms and topological dimension, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 252 (1979), 313-319.
- [39] P. Minc and W. R. R. Transue, A transitive map on $[0,1]$ whose inverse limit is the pseudo-arc, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 111 (1991), 1165-1170,
- [40] J. C. Oxtoby, Note on Transitive transformations, *Proc. Nat. Acad. USA*, 23 (1937), 443-446.
- [41] J. C. Oxtoby and S. M. Ulam, Measure preserving homeomorphisms and metric transitivity, *Ann. Math.*, 42 (1941), 874-920.
- [42] R. V. Plykin, On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades, *Russian Math. Surveys*, 39 (1984), 85-131.
- [43] W. Utz, Unstable homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1 (1950), 769-774.
- [44] R. F. Williams, A note on unstable homeomorphisms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 6 (1955), 308-309.
- [45] R. F. Williams, One-dimensional non-wandering sets, *Topology*, 6 (1967), 473-488.
- [46] R. F. Williams, Expanding Attractors, *IHES Publ. Math.* 43 (1973), 133-147.
- [47] K. Yoneyama, Theory of continuous sets of points, *Tohoku Math. J.* 11-12 (1917), 43-158.

Free topological group and the inductive limit topology

山田 耕三 (静岡大学教育学部)

1. 序論

位相空間 X から生成された free group を $F(X)$ 、free abelian group を $A(X)$ で表すことにします。つまり、

$$F(X) = \{g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} : x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}\},$$

$$A(X) = \{g = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n : x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1, n \in \mathbb{N}\}$$

で表される群だとします。そこで、空間 X の topology を反映させる group topology \mathcal{T} を $F(X)$ ($A(X)$) 上に導入するのですが、次のような性質を満たすとき、同じ記号を使って $F(X)$ を free topological group on X 、 $A(X)$ を free abelian topological group on X と呼ぶことにします ([3], [7])。

(1) \mathcal{T} を X で制限すると元の X の topology と等しくなる。つまり、 X は $F(X)$ 、($A(X)$) の部分空間として含まれている。

(2) X から任意の (abelian) topological group G への連続写像 f に対し、 \bar{f} を $F(X)$ 、($A(X)$) 上へ f を拡張した準同型写像としたとき、つまり

$$\bar{f}(g) = f(x_1)^{\varepsilon_1} f(x_2)^{\varepsilon_2} \cdots f(x_n)^{\varepsilon_n}$$

$$(\bar{f}(g) = \varepsilon_1 f(x_1) + \varepsilon_2 f(x_2) + \cdots + \varepsilon_n f(x_n))$$

for each $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \in F(X)$, ($g = \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n$) と定義したとき、 \bar{f} が常に連続となる。

ここで、(2) の性質は、次のように言い換えることができます。

(2') \mathcal{T} は (1) を満たすような $F(X)$ ($A(X)$) 上のもっとも強い group topology である。

さて、 $F(X)$ 、 $A(X)$ の位相的構造はその代数的構造と比べると非常に複雑になっています。それは、上で述べた定義からは何ともいえないのですが、単位元 $e, (0)$ の近傍

系をみてみるとその複雑さが分かると思います。今回の結果を得るためにもその近傍系を使うので、ここでその定義を紹介しておきます。

$A(X)$ の場合

[12] での定義は長くなるのでここでは [16] で定義されたものを紹介します。

まず、空間 X 上の極大一様系を \mathcal{U}_X とする。そこで

$$\mathcal{P} = \{P \subset \mathcal{U}_X : P = \{U_1, U_2, \dots\}\} \text{ とし、}$$

$\forall P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ に対して、

$$W(P) = \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_k - y_k \\ : (x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}, \text{ そして}$$

$$\mathcal{W} = \{W(P) : P \in \mathcal{P}\}$$

とおきます。すると、この \mathcal{W} が 0 の近傍系となります。

$F(X)$ の場合 [14]

$P(X)$ を X 上で定義されたすべての連続な pseudometric を集めた集合とします。

$\forall \rho = \{\rho_g : g \in F(X)\} \subset P(X)^{F(X)}$ に対し

$$p_\rho(v) = \inf\{\sum_{i=1}^n \rho_{g_i}(x_i, y_i) : v = \prod_{i=1}^n g_i x_i^{\varepsilon_i} y_i^{-\varepsilon_i} g_i^{-1}\} \text{ for each } v \in F_0,$$

但し、 $F_0 = \{v = \prod_{i=1}^n x_i^{\varepsilon_i} \in F(X) : \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0, n \in \mathbb{N}\}$ 、とすると p_ρ は F_0 上の連続な seminorm となることが証明できます。するとこのとき、

$$\{\{v \in F_0 : p_\rho(v) < 1\} : \rho \in P(X)^{F(X)}\}$$

が e の近傍系となります。

さて、free topological group に関する研究は、それが定義された 1940 年頃から、多くの数学者によってされてきました。日本でも同じ 1940 年代に Nakayama [8], Kakutani [5] の論文があります。以後、現在に至るまでの簡単な歴史や今まで得られてきた基本的な事実については、1993 年のトポロジー・シンポジウムの講演集に書きましたのでそれを参考にして下さい。([1] にも $F(X), A(X)$ の survey がふくまれています。) そこで、今回はそれ以後に得られてた新しい結果を中心に述べたいと思います。

2. INDUCTIVE LIMIT TOPOLOGY

以後、しばらくの間 $F(X)$ に関して定義等を書きますが、 $A(X)$ の場合も同様です。必要以外は特に断らないことにします。

さて前章で述べたように、 $F(X)$ の位相的構造はその代数的構造とはうらはらに結構複雑になっています。しかし一方、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$F_n(X) = \{g \in F(X) : g \text{ の規約表現の長さが } n \text{ 以下}\}$$

とおけば、各 $F_n(X)$ は $(X \oplus X^{-1} \oplus \{e\})^n$ からの自然な連続写像 i_n の像になっていますし、さらに $F_{n+1}(X) \setminus F_n(X)$ は、 i_{n+1} による逆像と同相、つまり $(X \oplus X^{-1} \oplus \{e\})^{n+1}$ の部分空間と考えられるのでその位相的構造は扱いやすいものとなっています。そこで、 $F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X)$ となっていることに注目して、 $F(X)$ の topology が $\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ でうまく表現できないかという問題が考えられてきました。この問題を正確に述べるためにはまず、次の定義が必要となります。

Definition 2.1. $F(X)$ が $\{F_n(X) : n \in \mathbb{N}\}$ の *inductive limit* であるとは、(以後 $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ と書くことにします。) 次が成立するときとします。

$F(X)$ の部分集合 U において、 $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し $U \cap F_n(X)$ が open in $F_n(X)$ ならば U は open in $F(X)$ である。

この定義を用いると問題は次のように述べられます。

Question 2.1. $F(X)$ はいつ、つまり X がどういう条件を満たすとき、 $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となるか。さらには、 $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となるための X の同値条件はなにか。

簡単なことですが、inclusion map $i : X \rightarrow A(X)$ を拡張した連続な準同型写像 $\bar{i} : F(X) \rightarrow A(X)$ を用いると、 $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ ならば $A(X) = \varinjlim A_n(X)$ なることがわかります。この事実は以後いちいち断らないで使います。

さて、この問題に対する最初の結果は Graev [3] によって得られました。つまり、 X が compact であれば $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ になることが証明されたのですが、この結果は、Mack, Morris and Ordman [6] によって一般化され、彼らは X が k_ω -space であれば $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ なることを示しました。(これらの事実は $A(X)$ についても成立します。) 以後、長い間必要十分条件は得られなかったのですが、1994 年になって Tkačenko [13] が次の結果を得ました。

Theorem 2.1. X を pseudocompact space とすると、次が成立する。

$$F(X) = \varinjlim F_n(X) \iff \forall n \in \mathbb{N} \text{ に対し } X^n \text{ が normal countably compact となる。}$$

Free topological group に関する多くの結果は、まず free abelian topological group の場合が得られ、後になって non-abelian の場合について考えられるのですが、こ

の定理はすこし変わっていて、 $A(X)$ の場合は未だに分かっていません。またこの同値条件は、pseudocompact space のクラスに限ったものなので、たとえば身近な空間 real line \mathbb{R} に対してさえもこの定理からは判断することができません。

さらに最近になって、Sipacheva [11] が countable space における次のような同値条件を得ました。

Theorem 2.2. X を countable space で non-isolated point がただ一点だけ存在するとし、それを x とする。このとき $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となる必要十分条件は、 X が次の条件を満たすことである。

\forall collection $\{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ of open nbds of x に対し \exists nbd of V of x s.t. $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、 $V \cap (U_n \setminus U_{n+1})$ が finite set となることである。

このことは $A(X)$ についても同様に成立する。

この定理の条件は少しわかりにくいので、この条件を満たす典型的な例をひとつ紹介します。いわゆる sequential fan と呼ばれている空間ですが、特に針の数が可算のもの $V(\omega)$ がこの条件を満たします。

$V(\omega)$ の定義:

$V(\omega) = \cup \{S_n = \{x_{i,n} : i \in \mathbb{N}\} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$, 各 $x_{i,n}$ は isolated point で、 $U_f = \{x_{i,n} : i > f(n), n \in \mathbb{N}\}$ が x の基本近傍となります。但し、 $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : \text{map}$ とします。

$V(\omega)$ は上の定理より $F(V(\omega)) = \varinjlim F_n(V(\omega))$ よって $A(V(\omega)) = \varinjlim A_n(V(\omega))$ になります。もちろん、 $V(\omega)$ は pseudocompact ではないので、Tkačenko の定理からは判断できない新しいタイプとなります。この定理により、compact space のクラスの周辺でしか分かっていなかったのが、新しい展開をみせることになります。ただ、やはり \mathbb{R} はこの結果からはまだ判断できません。そこで今回の仕事は、 $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{P}$ 等の metric space における $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となるための必要十分条件を求めることにあります。

3. CHARACTERIZATION

この章の結果は Pestov 氏との共同研究 [9] で得られたものです。まず最初に、同値条件を見つけるきっかけとなったいくつかの事実を紹介します。

Proposition 3.1. $F(X)$ が k -space となるための必要十分条件は、各 $F_n(X)$ が k -space で且つ $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となることである。 $A(X)$ についても同じ。

この事実は古くからよく知られているもので、実際 $F(X)$ の compact subset は常にある $F_n(X)$ に含まれると言う事実を使えばすぐに証明できます。さて、この事実とあわせて考えることによって重要な意味を持つてくるのが、Arhangel'skiĭ, Okunev and Pestov [2] によって得られた次の定理です。

Theorem 3.1. Metric space X において次は同値となる。

- (a) $A(X)$ は k -space となる。
- (b) $A(X)$ はある k_ω -space と discrete space との積空間と同相になる。
- (c) X は locally compact で且つ X の non-isolated point 全体からなる部分空間が separable となる。

Theorem 3.2. Metric space X において次は同値となる。

- (a) $F(X)$ は k -space となる。
- (b) $F(X)$ は k_ω -space または discrete space となる。
- (c) X は locally compact separable space または discrete space となる。

この同値条件に $A(X) = \varinjlim A_n(X)$ そして $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ が入るのではないかという予想をたてたのですが、Proposition 3.1 より、 $A(X)$ が k -space ならば $A(X) = \varinjlim A_n(X)$, $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となりますので、 $A(X) = \varinjlim A_n(X)$ または $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ となっているときに、 X が Theorem 3.1 と Theorem 3.2 のそれぞれ (c) の条件を満たすかどうかを調べてやればよいことになります。そこで、まず Theorem 3.1, 3.2 の (c) の条件を満たさないとすると、どういう事がいえるかを調べると次のことが分かります。

X が locally compact でないとすると、hedgehog space $J(\aleph_0)$ が closed set として埋蔵されている。

X の non-isolated point 全体からなる部分空間が separable でないとすると収束点列の非可算個の topological sum $S = \bigoplus_{\alpha \in \omega_1} S_\alpha$, 但し $S_\alpha = \{x_{\alpha,n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x_\alpha\}$ は収束点列、が closed set として埋蔵されている。

X が separable でも discrete でもないとすると、収束点列 $C = \{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ と非可算個の discrete space $D = \{d_\alpha : \alpha \in \omega_1\}$ との topological sum $T = C \oplus D$ が closed set として埋蔵されている。

さて、metric space X とその closed subset Y において、 Y から生成される $F(X)$ の topological closed subgroup は free topological group $F(Y)$ と topological isomorphic ([10]) ですし、 $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ であれば $F(Y) = \varinjlim F_n(Y)$ となります。これは、 $A(X)$ についてもいえますので、上の 3 つの空間について調べるのが重要になりますが、次が今回得られた結果です。

1. $J(\kappa)$ について

$J(\kappa) = \{S_\alpha = \{x_{\alpha,i} : i \in \mathbb{N}\} : \alpha \in \kappa\} \cup \{x\}$ は形としては sequential fan と同じですが、 x の基本近傍が次で与えられます。

各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $U_n = \{x_{\alpha,i} : i \geq n\} \cup \{x\}$ が x の基本近傍。

Theorem 3.1 より $A(J(\kappa))$ は k -space とはなりません。またこれについては以前に調べたことですが、([15], [16] を参照) 各 $A_n(J(\kappa))$ は k -space となることが分かっています。よって、Proposition 3.1 より $A(J(\kappa)) \neq \varinjlim A_n(J(\kappa))$ となることが分かります。よって、 $F(J(\kappa)) \neq \varinjlim F_n(J(\kappa))$ となります。

2. S について

S については $A(S) \neq \varinjlim A_n(S)$ となる事を直接証明します。つまり、 $A(S)$ の部分集合 E で、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $E \cap A_n(S)$ は $A_n(S)$ で closed となるが $0 \in \overline{E} \setminus E$ となるものを作ればよいのですが、実際次のように作ります。

$\forall \alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ に対し $\{\beta : \beta \in \alpha\} = \{\alpha_i : i \in \omega\}$ と番号を付けなおしておきます。そこで、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$E_n = \{x_{\alpha,n} - x_\alpha + n(x_{\alpha_i,m} - x_{\alpha_i}) \in A(S) : n < m < i, \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$$

とし、 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおくとこれが求めるものとなります。よって、 $A(S) \neq \varinjlim A_n(S)$ 且つ $F(S) \neq \varinjlim F_n(S)$ となることが分かります。

3. T について

T は Theorem 3.1 の (c) は満たしていますので、 $A(T) = \varinjlim A_n(T)$ となることが分かります。今必要なのは、 $F(T) \neq \varinjlim F_n(T)$ ですのでこれまでの例のようには簡単にはできないような予感があったのですが、案の定これを示すのに多くの時間がかかってしまいました。結果的には証明できたのですが、この例は現在の所 inductive limit に関して abelian の場合とそうでないときの場合で異なる結果になる唯一の例となっています。

さて、その証明方法ですが非常にテクニカルな方法で、よい条件を満たす連続な準

同型写像 $f: F(T) \rightarrow A(S)$ を構成し、 $A(S) \neq \varinjlim A_n(S)$ であるという 2 の結果に帰着させるのです。一方この方法では、実際に $\overline{F(T)}$ の部分集合 E で各 $E \cap F_n(T)$ は closed in $F_n(T)$ だけれども E が not closed in $F(T)$ となる具体的な例がよく分からないので、次にその例を紹介します。但し、次の集合 E がこの条件を満たすことを示すには、やはり先ほどの連続な準同型写像 f の助けを必要とします。

2 と同じようにまず、 $\forall \alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ に対し $\{\beta: \beta \in \alpha\} = \{\alpha_i: i \in \omega\}$ と番号を付けなおしておきます。そこで、各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$E_n = \{d_\alpha x_n x^{-1} d_\alpha^{-1} (d_{\alpha_i} x_m x^{-1} d_{\alpha_i}^{-1})^n : n < m < i, \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$$

とし、 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおくとこれが求めるものとなります。結局 $F(T) \neq \varinjlim F_n(T)$ が証明されるのです。

以上の結果により、めでたく Theorem 3.1 と 3.2 の条件の項目として $A(X) = \varinjlim A_n(X)$ と $F(X) = \varinjlim F_n(X)$ が付け加わることが証明できるのです。改めて書き直すと次のようになります。

Theorem 3.3. *Metric space X において次は同値となる。*

- (a) $A(X)$ は k -space となる。
- (b) $A(X)$ はある k_ω -space と *discrete space* との積空間と同相になる。
- (c) $A(X) = \varinjlim A_n(X)$,
- (d) X は *locally compact* で且つ X の *non-isolated point* 全体からなる部分空間が *separable* となる。

Theorem 3.4. *Metric space X において次は同値となる。*

- (a) $F(X)$ は k -space となる。
- (b) $F(X)$ は k_ω -space または *discrete space* となる。
- (c) $F(X) = \varinjlim F_n(X)$,
- (d) X は *locally compact separable space* または *discrete space* となる。

結果として、 $F(\mathbb{R}) = \varinjlim F_n(\mathbb{R})$, $A(\mathbb{Q}) \neq \varinjlim A_n(\mathbb{Q})$ そして $A(\mathbb{P}) \neq \varinjlim A_n(\mathbb{P})$ となることなどが分かるのです。

4. APPENDIX

Theorem 3.3 と 3.4 をみて metric space X が *isolated point* をいくらたくさん含んでいても、 $A(X)$ に関しては影響はないが、 $F(X)$ の場合は影響が出ることに気が付かれると思います。当初、このことはなにも metric space に限ったことではなくいつでもそんなものだと思っていたのですが、少し状況が変わってきました。Theorem 2.2 の

後に出てきた sequential fan $V(\alpha)$ がその状況を変えた例です。 $V(\alpha)$ はもはや metric space ではないので、 Theorem 3.3, 3.4 を適用する事はできません。しかしながら、 Sipacheva の結果 Theorem 2.2 より、 α が可算の場合は、 $F(V(\omega)) = \varinjlim F_n(V(\omega))$ 且つ $A(V(\omega)) = \varinjlim A_n(V(\omega))$ となることが分かります。一方、 α が非可算としますと、例えば $\alpha = \omega_1$ のとき $V(\omega_1)$ の中には closed set として前章の 3 の T が埋め込まれています。よって $F(V(\omega_1)) \neq \varinjlim F_n(V(\omega_1))$ となります。この事実は $F(X)$ に関しては isolated point が多いと状況が変わるということの典型的な結果なので納得がいくところです。さて、 $A(V(\omega_1))$ に関しては判断する材料がいままでなかったのですが、先程述べた理由により何となく $A(V(\omega_1)) = \varinjlim A_n(V_{\omega_1})$ となると思っていたのです。ところが、つい最近前章の 2 で使った手法を $A(V(\omega_1))$ に適用してみたところ $A(V(\omega_1)) \neq \varinjlim A_n(V(\omega_1))$ となることが分かりました。つまり $A(V(\omega_1))$ の部分集合 E を次のように定義します。

まず、 $V(\omega_1) = \{x_{\alpha,i} : i \in \mathbb{N}, \alpha \in \omega_1\} \cup \{x\}$ と表しておきます。そこで、 $\forall \alpha \in \omega_1 \setminus \omega$ に対し $\{\beta : \beta \in \alpha\} = \{\alpha_i : i \in \omega\}$ と番号を付けなおしておきます。各 $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$E_n = \{x_{\alpha,n} - x_{\alpha,i} + n(x_{\alpha_i,m} - x_{\alpha_i,i}) \in A(S) : n < m < i, \alpha \in \omega_1 \setminus \omega\}$$

とし、 $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ とおくと、各 $E \cap A_n(V(\omega_1))$ は $A_n(V(\omega_1))$ で closed となるが $0 \in \overline{E} \setminus E$ となることが証明されます。

このように、 metric space でないクラスではまだ新たな展開があるのかもしれない。

REFERENCES

1. A. V. Arhangel'skiĭ, *Algebraic objects generated by topological structure*, J. Soviet Math. 45 (1989) 956-978.
2. A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, *Free topological groups over metrizable spaces*, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.
3. M. I. Graev, *Free topological groups*, Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.
4. E. Hewitt and K. Ross, *Abstract harmonic analysis I*, Academic Press, New York, (1963).
5. S. Kakutani, *Free topological groups and infinite direct product topological groups*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 595-598.
6. J. Mack, S. A. Morris and E. T. Ordman, *Free topological groups and projective dimension of locally compact abelian groups*, Proc. Amer. Math. Soc. 40 (1973) 303-308.
7. A. A. Markov, *On free topological groups*, Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.
8. T. Nakayama, *Note on free topological groups*, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 471-475.
9. V. Pestov and K. Yamada, *Free topological groups on metrizable spaces and inductive limits*, Preprint
10. O. V. Sipacheva, *Free topological groups of spaces and their subspaces*, Preprint.
11. O. V. Sipacheva, *On free topological groups with the inductive limit topologies*, Annals NY Acad. Sci. 788 (1996) 188-196.

12. M. B. Tkačenko, *On completeness of free abelian topological groups*, Soviet Math. Dokl. **27** (1983) 341-345.
13. M. G. Tkačenko, *Free topological groups and inductive limits*, Topology Appl. **60** (1994) 1-12.
14. V. V. Uspenskii, *Free topological groups of metrizable spaces*, Math. USSR Izvestiya **37** (1991) 657-680.
15. K. Yamada, *Free abelian topological groups and k -spaces*, Glasnik Mat. **31** (1996) 8-91.
16. K. Yamada, *Characterizations of a metrizable space X such that every $A_n(X)$ is a k -space*, Topology Appl. **49** (1994) 75-94.

*Department of Mathematics, Faculty of Education, Shizuoka University, Shizuoka,
422 Japan*
e-mail:k-yamada@ed.shizuoka.ac.jp

BRAID MONODROMY OF ARRANGEMENT OF COMPLEX LINES

Nguyen Viet Dung

The purpose of this paper is to give a method to compute the braid monodromy (in the sense of B. Moishezon) for an arrangement \mathcal{A} of complex lines in \mathfrak{k}^2 . This braid monodromy has been determined before by M. Salvetti for the case when \mathcal{A} is an arrangement of *real* lines in \mathfrak{k}^2 using his complex. Our computation here is based on the so-called labyrinth of an arrangement of complex lines.

VASSILIEV TYPE INVARIANTS OF ORDER ONE OF GENERIC MAPPINGS

TORU OHMOTO

Department of Mathematics,
Kagoshima University

ABSTRACT. This is a short expository note on Vassiliev type invariants for generic mappings. As well known, it is V.A.Vassiliev that firstly introduced graded knot invariants (knot invariants of finite type) by using appropriate stratifications of the mapping space from S^1 to \mathbb{R}^3 ([30], [28]). Later, his method was used to produce numerical invariants for immersed plane curves (Arnold's J^\pm and St invariants [3], [4]) and for generic mappings from a closed oriented surface into \mathbb{R}^3 (Goryunov [10]). In this note we shall quickly review these works and describe in a formal way *Vassiliev type invariants of order one* for isotopy classes of generic mappings (especially, C^∞ stable mappings). Such an invariant corresponds to a 1-cocycle of the "Vassiliev complex" for \mathcal{A} -classes of multi-germs. As one more concrete example, we will discuss on Vassiliev type invariants for C^∞ stable mappings from a closed surface to the plane (cf. [21]). Throughout this note, we assume that all manifolds and mappings are of class C^∞ .

§1 INTRODUCTION

Let N be a closed C^∞ manifold of dimension n and P a C^∞ manifold of dimension p . Recall that f is C^∞ -stable (simply called *stable*) if there is a neighborhood \mathcal{U} of f in the W^∞ topology on $C^\infty(N, P)$ such that $g \in \mathcal{U}$ implies that there is $h \in \text{Diff}(N)$ and $h' \in \text{Diff}(P)$ such that $g = h' \circ f \circ h$ (i.e., g is \mathcal{A} -equivalent to f). In other words, the \mathcal{A} -orbit of f is open in $C^\infty(N, P)$. We shall say that two C^∞ stable maps f and g from N to P are C^∞ stably isotopic (or simply, *isotopic*) if there exist a C^∞ mapping $F : N \times [0, 1] \rightarrow P$ such that

- (1) for each $0 \leq t \leq 1$, the map $F_t : N \rightarrow P$ sending x to $F(x, t)$ is C^∞ stable ;
- (2) $F_0 = f$ and $F_1 = g$.

It can be shown that the isotopic relation is an equivalence relation among all C^∞ stable mappings in $C^\infty(N, P)$, and also that any two isotopic C^∞ stable maps are \mathcal{A} -equivalent to each other. We shall often write by $[f]$ the isotopy equivalent class of a C^∞ stable mapping f .

Let \mathcal{M} denote the mapping space $C^\infty(N, P)$ and Γ the subset of \mathcal{M} consisting of all C^∞ maps which are not C^∞ stable. The complement $\mathcal{M} - \Gamma$ consists of all

C^∞ stable mappings. When the pair (n, p) satisfies some suitable condition, Γ has "codimension one in \mathcal{M} ": for instance, $p \leq 2n + 1$ and the codimension of moduli spaces of \mathcal{A} -orbits is greater than $n + 1$ (cf. Mather V, [17]), the regular part Γ_{Reg} of Γ consists of all C^∞ mappings which have only a (multi-)singularity with codimension one except for C^∞ stable singularities (namely, there is a finite set S of N such that the germ at S , $f : N, S \rightarrow P, f(S)$ has \mathcal{A}_ϵ -codimension one, and also that $f|_{N-S}$ is C^∞ stable).

We are interested in numerical invariants of C^∞ stable mappings. Let R be a commutative ring with unit. A locally constant function $V : \mathcal{M} - \Gamma \rightarrow R$ is said a R valued *isotopy invariant of C^∞ stable mappings* : for any $f, g \in \mathcal{M} - \Gamma$ stably isotopic each other, $V(f) = V(g)$. It may be worthy to note that the 0-th cohomology group $H^0(\mathcal{M} - \Gamma; R)$ can be regarded as the module consisting of all R valued isotopy invariants. Let a C^∞ stable map $f_0 \in \mathcal{M} - \Gamma$ be fixed such as it defines an argumentation $\epsilon : S_0(\mathcal{M} - \Gamma) \rightarrow R$ of the singular chain complex $S_*(\mathcal{M} - \Gamma; R)$, and then each element of the reduced 0-th cohomology group $\bar{H}^0(\mathcal{M} - \Gamma; R)$ corresponds to an isotopy invariant which vanishes on the isotopy class of f_0 .

Definition 1.1. Assume that R has no elements of order 2. An isotopy invariant $V : \mathcal{M} - \Gamma \rightarrow R$ is called *Vassiliev type of order one* if V can be extended to a function $\mathcal{M} \rightarrow R$ satisfying the following condition : there is a locally finite partition \mathcal{G} of Γ_{Reg} consisting of some cooriented strata $\{\Xi_i\}$ and non-coorientable strata such that

- (i) V is constant on each stratum of \mathcal{G} , and especially, constantly zero over non-coorientable strata ;
- (ii) V is constantly zero over $\Gamma - \Gamma_{Reg}$;
- (iii) (the difference equation) for each cooriented stratum Ξ_i and for any family of C^∞ maps $\phi = \phi_t : (-a, a) \rightarrow \mathcal{M}$, $\phi_0 \in \Xi_i$, which is transversal to Ξ_i compatibly to the coorientation of the stratum, it holds that

$$V(\Xi_i) = V([\phi_{+\epsilon}]) - V([\phi_{-\epsilon}]), \quad (\epsilon > 0)$$

- (iv) (normalization condition) V is constantly zero on the isotopy class of the distinguished map f_0 .

In particular, according to Goryunov's terminology [10], we state one more definition :

Definition 1.2. A Vassiliev type invariant V of order one is called *local* if each stratum of the partition of Γ_{Reg} corresponds to a singularity type with codimension one, and

the coorientation of a stratum depends only on the coorientation of the corresponding singularity type. (that is the coorientation of the parameter space of its versal deformation).

Remark 1.3. (1) We can also define \mathbb{Z}_2 valued invariants of order one, by ignoring the coorientability of strata in the above definition. (2) Given any Vassiliev type invariants V and V' of order one, by taking a refinement of both of associated partitions of Γ_{Reg} , any linear combination $aV + bV'$ ($a, b \in \mathbb{R}$) also becomes an invariant of order one. Thus all Vassiliev type invariants of order one form a submodule of $\bar{H}^0(\mathcal{M} - \Gamma; \mathbb{R})$. (3) As in [3], [4], [30], there may be several way to coorient strata by using the data of configurations of singular point sets of maps in N .

Remark 1.4. In the above setting, as the mapping space \mathcal{M} , we consider the space of all C^∞ mappings. Of course it is possible to consider the space of C^∞ mappings with constraint as \mathcal{M} , for example, the space of immersions $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ with a fixed winding number (Arnold [3], [4]), the space of plane aimed fronts (i.e., Legendre immersions $S^1 \rightarrow ST^*\mathbb{R}^2$) with a fixed Maslov index (Arnold [5], Hill [13]), the space of algebraic projective plane curves (Viro [31]), the space of Fourier curves (trigonometric curves) in the plane (Ishikawa [14]), and so on. As to the topology of the space \mathcal{M} of mappings without prescribed singularities (e.g., Smale-Hirsch's immersion theorem and various generalizations — so-called *h-principle*), see Ando [1] and its reference.

Embeddings of a circle into 3-space.

Let \mathcal{M} be the mapping space $C^\infty(S^1\mathbb{R}^3)$, Γ the subset of all C^∞ -unstable mappings. The element of $\mathcal{M} - \Gamma$ is a embedding and the singularity type with codimension one of maps is only the self-intersection double points whose tangent vectors are linearly independent. Through a finite dimensional approximation of \mathcal{M} , Vassiliev investigated the homology of Γ using simplicial resolution of Γ and spectral sequence techniques. Presumably, after Birman-Lin's paper [7], Vassiliev knot invariants are formulated as follows : V_i is an *Vassiliev knot invariants of order less than or equal to i* if V_i can be extended to invariants of smooth knotted graphs (i.e., immersions with self-intersection points whose tangent vectors are linearly independent) satisfying that

- (1) the difference equation (skein relation)

$$v_i(\times) = v_i(\times) - v_i(\times)$$

(2) the value on any knotted graphs with more than $i + 1$ double points vanishes
:

$$V_i(\overbrace{\times \times \cdots \times}^i) = 0 \quad \text{for } j > i$$

It is easily checked that Vassiliev knot invariant of order one is trivial.

Immersion of a circle into the plane.

Let \mathcal{M}_d be the space of immersions from S^1 to the plane with winding number d , Γ the complement to the set of immersions with transversal double points. Note that using Smale-Hirsch theorem of immersions, it can be seen that \mathcal{M}_d is contractible. Arnold introduced three order one isotopy invariants, the strangeness invariant St , the direct-tangency J^+ and the opposite-tangency J^- , whose difference equations are expressed as follows :

$$J^+(\times) = J^+(\times) - J^+(\times) \quad J^-(\times) = J^-(\times) - J^-(\times)$$

$$St(\times) = St(\times) - St(\times)$$

St is not *local* in Goryunov's sense, since its coorientation depends on global data — configurations of triple points on the circle.

Generic maps of a surface into 3-space : Goryunov's invariants [10].

Let N be an oriented closed surface and let P be \mathbb{R}^3 , then C^∞ stable (generic) singularities are of type normal crossings and the so-called Whitney umbrella, or say, Cross Cap (cf. Whitney [33]) There are three generators of *local* Vassiliev type invariants, say *Goryunov invariants*, which we will see in §4.

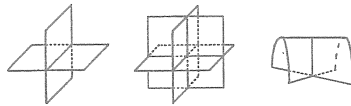


Figure 1

Generic maps of a surface to the plane.

Let N be a closed surface and let P be the plane \mathbb{R}^2 , then C^∞ stable (generic) singularities are of type fold, cusp and double folds, that is, bi-germ of fold types whose contours are transverse to each other (cf. Whitney [34]). There are three generators of *local* Vassiliev type invariants, which we will see in the last section.



Figure 2

§2 VASSILIEV CYCLES OF ORDER ONE FOR \mathcal{A} -CLASSES

In this section, we describe a part of Vassiliev complex for \mathcal{A} -equivalent classes of multi-germs of C^∞ mappings, which will be used to produce order one invariants. As to general reference of singularity theory, see, e.g., [32], [6], [8], [9].

We consider the classifications of "generic" bifurcations of multi-germs with 1 and 2 parameters : For coorientable \mathcal{A} -equivalent classes of multi-germs with \mathcal{A}_e -codimension 1 and for \mathcal{A} -classes of multi-germs with \mathcal{A}_e -codimension 2, we take miniversal deformations of multi-germs representing these classes, denoted by

$$F_i : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}, S_i \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^p, 0, \quad (i = 1, \dots, l).$$

$$G_j : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2, S'_j \times \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^p, 0, \quad (j = 1, \dots, l').$$

(There may be \mathcal{A} -classes with \mathcal{A}_e -codimension greater than s ($s = 1, 2$) which however admit topologically versal s -parameter deformations. We add these classes to F_i 's and G_j 's under our consideration.)

We can assume that every F_i (resp. G_j) is presented at each point of S_i (resp. S'_j) as a polynomial map-germ. We fix the orientation of the parameter space \mathbb{R} of each germ F_i , by which the corresponding class are cooriented. We also fix the orientation of the parameter space \mathbb{R}^2 of each germ $G_{j(k)}$, although the corresponding class is not necessarily coorientable. We simply write $(F_i)_t(x) = F_i(x, t)$ and $(G_j)_p(x) = G_j(x, p)$.

Then we set as a formal way

$$C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori}) := \text{the free } R\text{-module generated by } \{F_1, \dots, F_l\},$$

$$C^2(\mathcal{A}_{n,p}) := \text{the free } R\text{-module generated by } \{G_1, \dots, G_{l'}\},$$

We should remark that for each F_i the \mathcal{A} -class of the induced deformation $\iota^* F_i$, where $\iota : \mathbb{R}, 0 \rightarrow \mathbb{R}, 0$ is a germ of an orientation-reversing diffeomorphism, is identified with $-F_i$ as an element in $C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori})$.

Next we shall define an operator $\delta : C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori}) \rightarrow C^2(\mathcal{A}_{n,p})$. To do this, for every pairs of F_i and G_j we define an integer $[F_i : G_j]$ as follows. Simply, we write F and

G instead of F_i and G_j . Let $\tilde{G} : U \times W \rightarrow \mathbb{R}^p$ be a representative of the germ G , U an open neighborhood of the source points $S \subset \mathbb{R}^n$ and W an open neighborhood of the origin in \mathbb{R}^2 . We let $W_F(\tilde{G})$ denote the set consisting of $p \in W$ satisfying that there is a point $y \in \mathbb{R}^p$ near 0 and a subset $S_p \subset \tilde{G}_p^{-1}(y)$ such that the multi-germ $\tilde{G}_p : U, S_p \rightarrow \mathbb{R}^p, y$ is equivalent to F . If $W_F(\tilde{G})$ is empty, define $[F : G]$ to be zero. Otherwise, by the multi-transversality theorem, taking U and W sufficiently small if necessary, the closure of $W_F(\tilde{G})$ is one dimensional semialgebraic set in W whose closure contains the origin (since the closure of a \mathcal{A} -finite orbit in a multi-jet space becomes a semi-algebraic set). In particular, it turns out that there is $\epsilon > 0$ such that for any $0 < \epsilon' \leq \epsilon$, the circle $S_{\epsilon'}^1$ centered at the origin with radius ϵ' is transverse to $W_F(\tilde{G})$. According to the fixed orientation of the parameter space of G , we let the circles be anti-clockwise oriented. Since the class equivalent to F_i is oriented, the stratum $W_F(\tilde{G})$ has cooriented. Thus an intersection index of $S_{\epsilon'}^1$ and $W_F(\tilde{G})$ is well-defined, and we denote it by $[F : G]$. Obviously the integer is independent of the choice of the representative \tilde{G} , and if we take another orientation of the parameter space of G , the index has opposite sign.

Now we can define a R -homomorphism

$$\delta : C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori}; R) \rightarrow C^2(\mathcal{A}_{n,p}; R), \quad \text{by} \quad \delta F_i := \sum_{j=1}^{l'} [F_i : G_j] G_j.$$

Definition 2.1. Let c be a non-trivial element of $C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori})$ such that $\delta c = 0$, then we call c a *Vassiliev cycle of order one for \mathcal{A} -equivalent classes of multi-germs with the pair of dimensions (n, p)* .

Remark 2.2. Vassiliev complex¹ was introduced in [29] (and [27]) in the study on the

¹The complex has various topological information of the formation of singularity sets of maps : For example, consider \mathcal{A} -equivalence of map-germ $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$. Let \mathcal{G} be a certain \mathcal{A} -invariant stratifications of the jet space $J^l(n, p)$, l being sufficiently large. We set for non-negative integer s

$$C^s(\mathcal{G}) := \text{the free } R\text{-module generated by cooriented strata of } \mathcal{G} \text{ with codimension } s.$$

We can define the index $[F : G]$ for each stratum F of codimension s and G of codimension $s + 1$, in the same way as just described for our case of multi-germs of codimension 1 and 2. Hence the coboundary operator $\delta : C^s(\mathcal{G}) \rightarrow C^{s+1}(\mathcal{G})$ is defined. Each cycle of the complex corresponds to an \mathcal{A} -invariant geometric cycle in $J^l(n, p)$, and then we can also define a geometric cycle in the total space of the jet bundle $J^l(N, P)$ of any n -manifold N and any p -manifold P . It turns out that for each cycle c and for any mappings $f : N \rightarrow P$ whose jet extension is transverse to the corresponding cycle in $J^l(N, P)$, there is a polynomial of Stiefel-Whitney classes of TN and f^*TP equal to the dual to the homology class represented by the singular set of f of type c . The polynomial is called *Thom polynomial* for the singularity type c , (cf. [26], [11], [20]). In particular, for a cycle c with codimension n , it is possible to count the number of singular points of f of type c in terms of topological information of TN and f^*TP . It can be regarded as a generalization of Morse's equality or Poincare-Hopf theorem.

combinatorics among equivalent classes of singularities of map (or function)-germs under various equivalence relations, e.g. \mathcal{A} , \mathcal{R} , \mathcal{K} etc (see also Chapter IV of [6], and [20]). As to related topics and further developments, see [27]. and e.g., [19], [16], [12].

§3 INVARIANTS OF ISOTOPY CLASSES OF C^∞
STABLE MAPPINGS TO EUCLIDEAN SPACE

In this section we treat with the case that $P = \mathbb{R}^p$. As in §1, we let \mathcal{M} denote the mapping space $C^\infty(N, \mathbb{R}^p)$, Γ the subset of all non-generic (C^∞ unstable) mappings, and f_0 a fixed generic mapping in $\mathcal{M} - \Gamma$.

First, since the target space is a linear space \mathbb{R}^p , it is easily seen that the mapping space $\mathcal{M}(= C^\infty(N, \mathbb{R}^p))$ is contractible. In particular, any generic mapping f can be joined to f_0 by a smooth homotopy $\tau : N \times I \rightarrow \mathbb{R}^p$, $I = [0, 1]$, with $\tau(x, 0) = f_0(x)$, $\tau(x, 1) = f(x)$, for instance, which can be achieved by $f_0 + t(f - f_0)$. For $t \in I$ we simply set $\tau_t : N \rightarrow \mathbb{R}^p$ to be the map sending x to $\tau(x, t)$. It is convenient to regard a smooth homotopy as a continuous path in the mapping space \mathcal{M} with Whitney C^∞ topology, and when we distinguish them, we will often write $\bar{\tau} : I \rightarrow \mathcal{M}$ (i.e., $\bar{\tau}(t) := \tau_t$).

By using the parametrized transversality theorem, we can assume τ to satisfy that there is a finite subset A of I such that

- (1) at each point t outside A the map τ_t is a C^∞ stable mpping ;
- (2) at each point t of A there is a point y of \mathbb{R}^p and a finite set $S \subset \tau_t^{-1}(y)$ so that the germ $\tau_t : N, S \rightarrow \mathbb{R}^p, y$ is \mathcal{A} -equivalent to an oriented class in $C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori})$ and the germ at each point of $\tau_t^{-1}(y) - S$ is non-singular.

For a smooth homotopy τ satisfying the property, we say roughly that the path $\bar{\tau}$ is *transverse to the discriminant* Γ . For such a path τ , we define an integer $\epsilon_i(\tau)$ to be the number (taking accounts of sign) of events of local bifurcations of type F_i moving along the path $\bar{\tau}$. Namely, if the germ τ at $S \times \{t\}$ is equivalent to the normal form of the class F_i compatibly on the orientation of parameter lines, we count $+1$, and otherwise -1 . Summing up the signs at all events, we obtain just $\epsilon_i(\tau)$. We regard $\epsilon_i(\tau)$ as the intersection index of the strata of type F_i in Γ and the path $\bar{\tau}$.

Let $c \in \ker \delta$, a Vassiliev cycle of order one, and assume that c is written as a linear form $\sum_{i=1}^s \lambda_i F_i$ where F_i are generators of $C^1(\mathcal{A}_{n,p}^{ori})$ and $\lambda_i \in R$. For c, f and

τ , we define an integer $I_c(f; \tau)$ by

$$I_c(f; \tau) := \sum_{i=1}^8 \lambda_i \epsilon_i(\tau).$$

Lemma 3.1. *The value $I_c(f; \tau)$ depends only on the isotopy classes of f and f_0 (does not depend on the choice of τ).*

We shall write it by $I_c(f; f_0)$ or simply $I_c(f)$. This defines a homomorphism $I : \ker \delta \rightarrow \bar{H}^0(\mathcal{M} - \Gamma; \mathbb{R})$, and the image is the set of isotopy invariants of local Vassiliev type of order one as described in §1.

§4 GENERIC MAPPINGS FROM A CLOSED SURFACE TO THE 3-SPACE AND GORYUNOV'S INVARIANTS

Let us consider a C^∞ mappings from a closed *oriented* surface N into \mathbb{R}^3 . \mathcal{A}_e -finite germs $\mathbb{R}^2, 0 \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$ (up to codimension less than 6) was classified by David Mond [18], and all \mathcal{A} -equivalent classes of uni-germs with \mathcal{A}_e -codimension less than or equal to 2 are listed in Table 1 below.

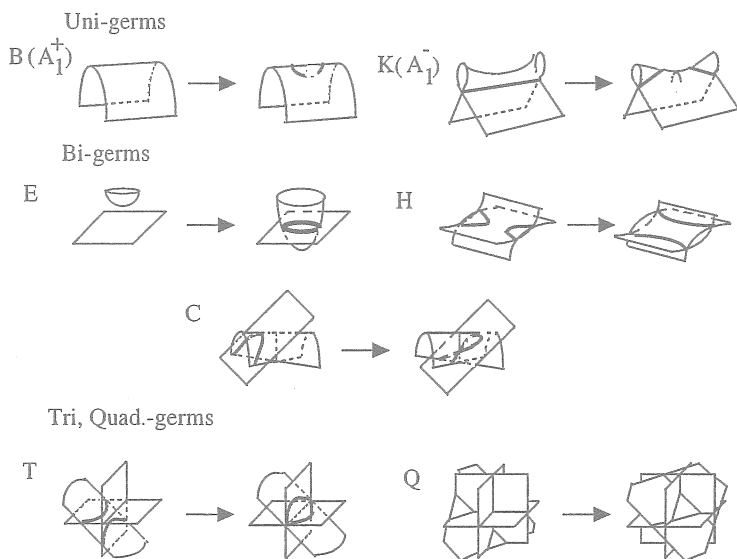


Figure 3

Generic 1-parameter bifurcations of $\mathbb{R}^2, S \rightarrow \mathbb{R}^3, 0$

Table 1

\mathcal{A}_ϵ -codim.	Type	normal form
0	<i>regular</i>	$(x, y, 0)$
0	A_0 (WhitneyUmbrella)	(x, y^2, xy)
1	A_1^\pm	$(x, y^2, y^3 \pm x^2y + ay)$
2	A_2^\pm	$(x, y^2, y^3 \pm x^3y + axy + by)$
2	B_2^\pm	$(x, y^2, x^2y \pm y^5 + ay^3 + by)$
2	H_2	$(x, xy + y^5 + ay^3 + by^2, y^3 + ay)$

Goryunov determined Vassiliev type invariants by careful studies on the partition of Γ_{Reg} :

Theorem 4.1 [10]. *Let M be an oriented closed surface. Then the \mathbb{Z} -module consisting of local order one invariants of generic smooth mappings $M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ is freely generated by the following three basic invariants :*

$$(1) \quad I_t = 2T + C; \quad (2) \quad I_p = B + K;$$

$$(3) \quad I_3 = E^2 - E^0 + H^- + T + C^{++} + C^{+-} + B^+ + K^+$$

Remark 4.2. (1) Taking any embedding $N \rightarrow \mathbb{R}^3$ as the distinguished map f_0 , then for any generic map f , $I_t(f)$ (resp. $I_p(f)$) is the number of triple points (resp. the pair of Whitney umbrellas) of Image of f . I_3 measures a modification of the number of opposite self-tangency (i.e., tangent points, two sheets at which have opposite orientations) occurring during a generic homotopy between mappings. (2) The Euler characteristic of the image $f(N)$ of a generic map f is a local invariant, because Izumiya-Marar formula [15] implies that $\chi(f(N)) = \chi(N) + I_t(f) + I_p(f)$.

There is an interesting application for bifurcations during arbitrary sphere eversion.

Corollary 4.3. [10] *The number $N(*)$ of bifurcations during a generic sphere eversion are subject to the following relations :*

$$(1) \quad N(T) = 0;$$

$$(2) \quad N(E^2) - N(E^0) + N(H^-) = -1 \quad (\text{the number of opposite self tangency})$$

§5 GENERIC MAPPINGS FROM A CLOSED SURFACE TO THE PLANE

Now let us consider the case where N is a connected closed surface and P is the 2-plane \mathbb{R}^2 . The lists at the end of this section show all \mathcal{A} -equivalent classes of multi-germs from the plane to the plane with \mathcal{A}_e -codimension less than or equal to 2. The classification of uni-germs was carried out by Rieger [22] and Rieger-Ruas [23] (see also Arnold [2]), and we use their notation for uni-germs (for multi-germs, see [21]). For 1-parameter deformations, we consider \mathcal{A} -equivalent classes of oriented deformations. In the list, every multi-germ $N, S \rightarrow P, y, S = \{p_k\}_k$, is described as the set consisting of k germs $\mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^p, 0$ taking local coordinate systems of N centered at p_k and a local coordinate system of P centered at y .

As to the coorientation, we define the orientation of the parameter line as the direction such that the number of cusp points and double fold points increase for uni-germs and bi-germs, and the number of sheets covering the “vanishing triangle” increases for triple fold points, T_0 and T_1 . Figure 4 depicts local bifurcations of apparent contours and shadows (the image) of the map in these direction.

This proposition follows from direct computation :

Proposition 5.1. *The coboundary operation $\delta : C^1(\mathcal{A}_{2,2}^{ori}; \mathbb{Z}) \rightarrow C^2(\mathcal{A}_{2,2}; \mathbb{Z})$ is determined as follows :*

$$\begin{aligned} \delta C_+ &= [4_3], & \delta C_- &= -[4_3] - 2[11_5], & \delta S &= 2[11_5], \\ \delta FF^+ &= -[11_5] + FC, & \delta FF_0^- &= -Q_-, & \delta FF_1^- &= Q_- + FC, \\ \delta CF^+ &= \tilde{C}_+ + \tilde{C}_- + \tilde{S} - FC, & \delta CF^- &= -\tilde{C}_+ - \tilde{C}_- - \tilde{S} - FC, \\ \delta T_+ &= -\tilde{F}\tilde{F}_0^- - \tilde{F}\tilde{F}_1^- + \tilde{C}\tilde{F}_2 + \tilde{C}\tilde{F}_3, \\ \delta T_- &= -\tilde{S} + \tilde{F}\tilde{F}_0^- + \tilde{F}\tilde{F}_1^- + \tilde{C}\tilde{F}_2 + \tilde{C}\tilde{F}_3. \end{aligned}$$

In the case of coefficients in \mathbb{Z}_2 , the above equalities hold modulo 2. Solving the equation $\delta c = 0$, we can determine order one invariants [21]. Here we set $C = C^+ + C^-$, $CF = CF^+ + CF^-$, and $FF^- = FF_0^- + FF_1^-$:

Theorem 5.2. *The submodule of $\bar{H}^0(\mathcal{M} - \Gamma, \mathbb{Z})$ consisting of local Vassiliev type invariants of order one are freely generated by the following three invariants :*

$$\begin{aligned} I_C &:= C + S, \\ I_D &:= S + 2CF + 2FF^+ + 2FF^-, \\ I_F &:= 2FF^- + CF. \end{aligned}$$

Theorem 5.3. *The submodule of $\bar{H}^0(\mathcal{M} - \Gamma, \mathbb{Z}_2)$ consisting of local Vassiliev type invariants of order one are freely generated by the following three invariants :*

$$I_{C;2} := C, I_{D;2} := S, I_{F;2} := CF.$$

Remark 5.4. (1) The choice of f_0 is of course not unique, and there is no standard way to choose it. (2) There is a parallel argument to Goryunov's invariants : The value of the invariant I_C is equal to the difference between the number of pair of cusps of f and one of the distinguished map f_0 . Also the value of the invariant I_S is equal to the difference between the number of transverse double fold points of f and one of f_0 . I_F measures a modification of the number of opposite self-tangency of apparent contours occurring during a generic homotopy between mappings.

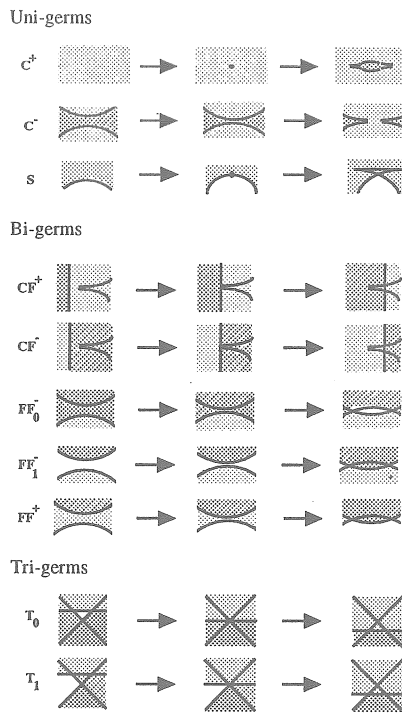


Figure 4

Generic 1-parameter bifurcations of $\mathbb{R}^2, S \rightarrow \mathbb{R}^2, 0$

Table 2

Stable-germs

Type	normal form $f(x, y)$
<i>regular</i>	(x, y)
<i>fold</i>	(x, y^2)
<i>cusp</i>	$(x, y^3 + xy)$
<i>double fold</i>	$(x, y^2), (x'^2, y')$
1-parameter deformations	
Type	versal deformation $F(x, y, a)$
$C^\pm(4_2)$	$(x, y^3 \pm y(x^2 - a))$
$S, (5)$	$(x, y^4 + xy - ay^2)$
CF^\pm	$(x, y^3 + xy), (\pm y'^2 - a, x')$
FF^+	$(x, y^2 + a), (x', x'^2 + y'^2)$
FF_0^-, FF_1^-	$(x, \mp y^2 + a), (x', x'^2 \pm y'^2)$
T_0, T_1	$(x + y^2, x - y^2 + a), (x', y'^2), (\mp x''^2, y'')$
2-parameter deformations	
Type	versal deformation $G(x, y, a, b)$
4_3	$(x, y^3 + x^3y + ax^2y + bxy)$
$6^\pm(7)$	$(x, xy + y^5 + (\pm y^7) + ay^3 + by^2)$
11_5	$(x, xy^3 + y^4 + y^5 + axy + by)$
$I_{2,2}^{1,1}$	$(x^2 + y^3 + ay, y^2 + x^3 + bx)$
$II_{2,2}^{1,1}$	$(x^2 - y^2 + x^3 + ay, xy + bx)$
\tilde{C}^\pm	C^\pm and $(x'^2 + b, y')$
\tilde{S}	S and $(x'^2 + b, y')$
Q_\pm	$(x, x^3 - ax + y^2), (x', \pm y'^2 + b)$
$\tilde{F}\tilde{F}^+$	$(x, x^2 + y^2), (x', y'^2 + a), (x''^2 + b, y'')$
$\tilde{F}\tilde{F}_0^-, \tilde{F}\tilde{F}_1^-$	$(x, x^2 \pm y^2), (x', \mp y'^2 + a), (x''^2 + b, y'')$
CC	$(x + a, y^3 + xy), (y'^3 + x'y', x' + b)$
FC	$(x + a, y^3 + xy), (x', y'^2 + ax + b)$
$\tilde{C}\tilde{F}_{\epsilon_1, \epsilon_2}$	$(x, y^3 + xy), (x' + \epsilon_1 y'^2, x' - \epsilon_1 y'^2 + a),$
$(\epsilon_1, \epsilon_2 = \pm 1)$	$(x'' + \epsilon_2 y''^2, -x'' + \epsilon_2 y''^2 + b)$
$\tilde{T}_0, \tilde{T}_1^*$	$T_{0,1}$ and $(x''' + y'''^2, -x''' + y'''^2 + b)$

* $\tilde{T}_{0,1}$ are topologically versal deformations.

参考文献

- [1] 安藤良文 ある型の *Thom-Boardman* 特異点集合を持たない微分可能写像について, 数学, no. 30, 1978, pp.230-242
- [2] Arnol'd V. I. *Singularities of systems of rays*, Russian Math. Surveys, vol. 38, 1983, pp.87-176
- [3] Arnol'd V. I. *Plane curves, their invariants, prestroikas and classifications*, Adv. Soviet. Math., 21, AMS, Providence, RI., 1994, pp. 33-91
- [4] Arnol'd V. I. *Topological invariants of plane curves and caustics*, University Lecture Series, 5, AMS, Providence, RI., 1994
- [5] Arnol'd V. I. *Invariants and Perestroikas of Plane Fronts*, Proc. the Steklov Inst. Math., 209, 1995, pp. 11-56
- [6] Arnol'd V. I., Vasil'ev V. A., Goryunov V. V. and Lyashko O. P. *Dynamical Systems VI: Singularity Theory I*, Encyclopaedia of Math. Sci., vol.6, Springer-Verlag, 1993
- [7] Birman J. and Lin X-S. *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math., vol. 111, 1993, pp. 225-270
- [8] 福田拓生 微分可能写像の特異点論, 数学, vol. 34, 1982, pp. 116-139
- [9] Golubitsky M. and Guillemin V. *Stable mappings and their singularities*, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1973
- [10] Goryunov V. V. *Local invariants of mappings of surfaces into three-space*, preprint, 1994
- [11] Haefliger A. and Kosinski A. *Un théorème de Thom sur les singularités des applications différentiables* Séminaire H. Cartan 1956/57, Expno8
- [12] Hill J. W. *Vassiliev-type invariants of planar fronts without dangerous self-tangencies*, C. R. Acad. Sci. Paris, t. 324, Série I, 1997, pp. 537-542
- [13] Houston K. *An Introduction to the Image Computing Spectral Sequence*, preprint (Liverpool University), 1996
- [14] Ishikawa G. *Topology of plane trigonometric curves and a duality for strangeness of plane curves derived from real pseudo-line arrangements*, Preprint Series no. 355 (Hokkaido University), 京都大学数理解析研究所講究録 952, 1996, pp. 131-146
- [15] Izumiya S. and Marar W. L. *On Topologically Stable Singular Surfaces in a 3-Manifold*, Jour. of Geometry vol. 52, 1995, pp. 108-119
- [16] Kazarian M. E. *Characteristic classes of Singularity Theory*, preprint, Ceremade (URA CNRS 749), no. 9516, 1995
- [17] Mather J. N. *Stability of C^∞ mappings V: Transversality*, Adv. Math., vol. 4, 1970, pp. 301-335
- [18] Mond D. *On the classification of germs of maps from \mathbb{R}^2 to \mathbb{R}^3* , Proc. London Math. Soc., no 2 vol. 50, 1985, pp. 333-369
- [19] Nakai I. *Characteristic Class and Fiber product of Smooth Mappings* preprint (Hokkaido University), 1994
- [20] Ohmoto T. *Vassiliev complex for contact classes of real smooth map-germs*, Reports of the Fac. Sci., Kagoshima University, vol. 27, 1994, pp. 1-12
- [21] Ohmoto T. *Vassiliev type invariants of order one for generic mappings from a surface to the plane*, preprint, 1997
- [22] Rieger J. H. *Families of maps from the plane to the plane*, Jour. London Math. Soc., vol. 36, 1987, pp. 351-369
- [23] Rieger J. H. and Ruas M. A. S. *Classification of A -simple germs from k^n to k^2* , Compositio Math., vol. 79, 1991, pp.99-108
- [24] 佐伯 修 微分可能写像の大域的特異点理論の現状と展望, 数学, vol. 48, 1996, pp. 385-399
- [25] Sun W. Z. *Shadows of Moving Surfaces*, preprint series, Hokkaido University, no. 318, 1995
- [26] Thom R. *Les singularités des applications différentiables*, Ann. Inst. Fourier, pp. 6, 1955-56, pp. 43-87
- [27] Vassiliev V. A. *Lagrange and Legendre characteristic classes*, Gordon and Breach, 1988
- [28] Vassiliev V. A. *Complements of Discriminants of Smooth Maps : Topology and Applications*, Transl. Math. Monographs, vol. 98, AMS, Providence, RI., 1994
- [29] Vassiliev V. A. *Characteristic classes of Lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts*, Functional Analysis and its Application, vol.16, 1981, pp. 164-173
- [30] Vassiliev V. A. *Cohomology of knot spaces*, Adv. Soviet. Math., vol. 21, AMS, Providence, RI., 1990, pp. 23-69

- [31] Viro O. Y. *Generic Immersions of the Circle to Surfaces and the Complex Topology of Real Algebraic Curves*, Transl. Adv. Math. Sci., Ser. 2, vol. 173, AMS, Providence, RI., 1996, pp. 231–252
- [32] Wall C. T. C. *Finite Determinacy of Smooth Map-Germs*, Bull. London Math. Soc., vol. 13, 1981, pp. 481–539
- [33] Whitney H. *The general type of singularity of a set of $2n - 1$ smooth functions of n variables*, Duke Math. Jour., vol. 10, 1943, pp. 161–172
- [34] Whitney H. *On singularities of mappings of euclidean spaces I, Mappings of the plane into the plane*, Ann. of Math., vol. 66, 1955, pp. 374–410

Kagoshima University, Koorimoto 1-21-35, Kagoshima 890, Japan

Email : ohmoto@sci.kagoshima-u.ac.jp

Normal Surfaces Immersed in the Figure-8 Knot Complement

Saburo Matsumoto

June 16, 1997

1 Normal surface theory for the figure 8 knot complement

We begin by describing normal surface theory as applied to the figure 8 knot complement. We refer the reader to [He] or [JT] for the theory in its full generality.

Although the theory was developed mainly in the context of embedded surfaces, we consider immersed surfaces in general. These surfaces are not necessarily connected or orientable.

We begin with a short exposition of the theory of embedded normal surfaces, along the line of [He], included for completeness. The theory was first developed by Haken in the 1960's (see [Ha]) and used by him to prove several important results in the theory of 3-manifolds.

Let M be a compact 3-manifold with or without boundary, and suppose T is a fixed triangulation of M ; here T may or may not be ideal. Let τ be a tetrahedron forming part of T . A *normal arc* in τ is an embedded arc on some face of $\partial\tau$ which has endpoints on different edges of the face. A *normal disk* in τ is a disk properly embedded in τ which intersects each face of τ in at most one normal arc. There are exactly seven normal disks for each tetrahedron in T . Normal disks may have only three or four sides; those with three sides are called *T-disks*, while those with four sides are called *Q-disks*.

Definition 1 *A surface F properly embedded in M_8 is a normal surface with respect to the triangulation T if F meets each tetrahedron of T in a collection*

of normal disks, such that the normal disks within any single tetrahedron of T are disjoint.

Suppose there are δ different normal disks in T ; order them in an arbitrary manner. We can now construct the *normal solution space* for the pair (M, T) , as the vector space with one dimension for each normal disk in T . A normal surface F in M with σ_i normal disks of type i corresponds to a vector $V_F = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_m)$. A convenient abuse of notation lets us write F for V_F and *vice versa*.

We may determine the set of possible vectors corresponding to surfaces in the following way. Choose a tetrahedron from T , a face from that tetrahedron, and a normal arc type ν from that face. For any normal surface F in M_8 , the number of normal disks on one side of the face which contain ν as an edge must be equal to the number of normal disks on the other side with the same property. This gives a set of linear equations, one for each normal arc type, called the *matching equations*. The solution to the matching equations is a subspace of the normal solution space. The vectors which may correspond to normal surfaces are the vectors in this subspace which have non-negative integer co-ordinates. Vectors with other co-ordinates have no geometrical interpretation and are discarded.

A further criterion is necessary in that case that the normal surface F is embedded. If any tetrahedron of T contains two Q -disks of different types, then these must intersect and the surface F is not embedded. Hence, we eliminate vectors with this property from our set of solutions. This criterion does not apply in the case of immersed normal surfaces. In the case of embedded surfaces, there is a one-to-one correspondence between vectors satisfying the above properties, and normal surfaces in M_8 . This correspondence breaks down in the case of immersed surfaces.

Now, let M_8 be the figure 8 knot complement, and T be the canonical ideal triangulation of M_8 given in [Th]. We can form T by taking two tetrahedra \mathcal{T}_1 and \mathcal{T}_2 and identifying the faces so as to match the edges appropriately, and then deleting the single vertex.

We know that T has two edges and four faces. We may view M_8 as a hyperbolic manifold with a single cusp. The link of the deleted vertex of T is a torus.

It is a well-known theorem that any incompressible surface in M_8 may be isotoped to meet T in a set of *normal disks*.

As there are 7 such disks in each tetrahedron, making 14 in total in this case. To each normal surface, we associate the vector

$$(t_1, t_2, t_3, t_4, q_1, q_2, q_3, t'_1, t'_2, t'_3, t'_4, q'_1, q'_2, q'_3) \in \mathcal{Z}^{14}$$

where $t_i(q_i)$ is the number of normal disks of type $T_i(Q_i)$. The first seven belong to \mathcal{T}_1 , and the last seven to \mathcal{T}_2 . Each 14-tuple with non-negative integer entries is called a *class*.

Suppose we try to reverse this operation, and ask what classes can correspond to surfaces in M_8 . The class must satisfy some equations, called the *matching equations*: for each normal arc on each face of T , the number of normal disks meeting the face in that arc must be equal on each side of the face. These define a cone of \mathcal{Z}^{14} called the *solution space*. For M_8 , this is the intersection of the positive co-ordinate half-planes and the subspace spanned by the vectors

$$\begin{aligned} A &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), \\ B &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), \\ C &= (0, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 2), \\ D &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1). \end{aligned}$$

Given a vector $v = (v_1, \dots, v_{14})$ in the solution space, we define the *projectivization* of v to be the vector $[v] = \frac{1}{\sum_{i=1}^{14} v_i} (v_1, \dots, v_{14})$. Geometrically, this corresponds to projecting the vector v onto codimension 1 hyperplane defined by the equation

$$x_1 + \dots + x_{14} = 1$$

The set of all vectors which project to the same projectivized vector is called a *projective class*. The set of all projective classes is called the *projective solution space* and denoted \mathcal{P} . We can visualize \mathcal{P} as the intersection of the normal solution space with the codimension 1 hyperplane $x_1 + \dots + x_{14} = 1$.

Each point $[P] \in \mathcal{P}$ is the projection of a sequence of points $mP^i, m = 1, 2, \dots$ in the normal solution space. Clearly the projective solution space has dimension one less than the normal solution space; in this case it has dimension 3. Jaco and Rubinstein showed in [Ja] that, for immersed surfaces in M_8 , \mathcal{P} is the three-dimensional solid octahedron with vertices the classes $[A], [B], [C], [C'], [D], [D']$, where C' and D' are defined below.

$[C]$ and $[C']$, the other flipping $[D]$ and $[D']$.

A *vertex solution* is a vector V in the solution space which projects to a vertex of \mathcal{P} . The following result from [JT] gives an algebraic characterization of vertex solutions.

Lemma 2 *If a vector V is a vertex solution, then the only solutions A, B to the equation $mV = A + B$ are such that A and B are themselves multiples of V .*

The vertices of \mathcal{P} are the projectivizations of the classes

$$\begin{aligned} A &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0), \\ B &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), \\ C &= (0, 0, 1, 1, 1, 0, 2, 0, 0, 1, 1, 1, 0, 2), \\ C' &= (1, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 2, 0), \\ D &= (1, 1, 1, 1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1), \\ D' &= (0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

These may be interpreted geometrically as follows:

- A consists of one each of all the T -disks. It is the link of the vertex, the torus neighborhood of the figure-8 knot.
- B consists of one each of all the Q -disks.
- C and C' are related by an involution σ_1 of M_8 which respects the triangulation.
- D consists of one each of the T -disks in the first tetrahedron together with one each of the Q -disks in the second tetrahedron. D and D' are related by a second involution σ_2 of M_8 which respects T

The projective solution space has been extensively studied; see, for instance, Jaco and Oertel [JO], Tollefson and Wang [TW], and Jaco and Tollefson [JT]. These papers suggest the importance of the vertices of \mathcal{P} in normal surface theory.

2 The regular projective solution space

Every vector in the solution space may be represented as a collection of normal disks glued together, but this 2-dimensional structure is not necessarily an immersed surface. If a vector represents the set of normal disks produced when an immersed surface meets the tetrahedra of M_8 , then it is called *regular*. Irregular vectors correspond to collections of normal disks which cannot be glued together to give a surface.

An example of an irregular vector is D , consisting of four T-disks of different types in one tetrahedron and three Q-disks of different types in the other. There is a unique way to glue the normal disks together, which forces the disks to meet each edge of M_8 at a single point. The link of this point is a circle which goes around the edge twice. Hence the surface is not immersed at this point. Such points are called *branch points*. The *order* of a branch point is the number of times the link winds around the edge. If the order is 1 then we call the star an *edge disk*. Clearly a 2-complex is regular if and only if it meets the 1-skeleton only in edge disks.

Definition 3 *A projective class $[V]$ is regular if there is some regular class which projects to $[V]$. Otherwise, it is said to be irregular. The regular projective solution space \mathcal{R} is the set of all regular projective classes in \mathcal{P} .*

The regular projective solution space \mathcal{R} is a convex sub-polytope of the projective solution space \mathcal{P} , since any linear combination of two regular classes represents a set of disconnected immersed surfaces. Note that points on the boundary of \mathcal{R} need not *a priori* be in \mathcal{R} itself.

Section 4 deals with finding the shape of \mathcal{R} . Because of the two symmetries mentioned in Section 1, we need to consider only the subpolytope enclosed in the tetrahedron with vertices A , B , C and D . The vertices A , B and C are all regular (see [Ra]), but as noted above, D projects to an irregular point. Since \mathcal{R} is convex there will be “critical points” on the edges connecting $[D]$ with the other three vertices of \mathcal{P} marking the closest point a vector can be to $[D]$ without losing regularity. It is this question of “truncation” around $[D]$ (and $[D']$) which is central to determining the shape of \mathcal{R} for immersed surfaces in M_8 . In the following sections, we will introduce various techniques in search of the solution to this problem.

3 Dual normal surface theory

Since a regular surface meets the 1-skeleton of M_8 only in edge disks, it is natural to reverse the process and try to construct normal surfaces out of edge disks, instead of normal disks. We call this approach *dual normal surface theory* and develop it analogously to the standard normal surface theory.

First, we construct all the possible edge disks. There are 128 of these for M_8 , 64 about each edge. A handy way of describing the edge disks is by listing the sequence of normal disks encountered when proceeding around the edge in a fixed direction. Since we are not concerned about where we start, the list is only defined up to reflection and cyclic permutation. Such a list is called the *label* of the edge disk.

For each such pair of normal disks, the number of edge disks coming from one side must equal the number coming from the other. We obtain a set of equations, the *dual matching equations*, as a necessary condition for the surface to exist. Each pair of adjacent normal disks (normal disks which share a common edge) produces a dual matching equation, analogously to the way each normal arc gives rise to a matching equation in standard normal surface theory.

As in the standard normal surface theory, we identify each type of edge disk with a co-ordinate of a vector space over \mathcal{R} , so the dual matching equations define a subspace. The set of vectors in this subspace with all coordinates non-negative is the *dual solution space*. Note that not every vector in the dual solution space need correspond to a regular surface.

4 Determining the regular projective solution space \mathcal{R} for the figure 8 knot complement

To determine \mathcal{R} , we first find a set of points which we know are regular, and then show that all points outside the convex hull of this set are irregular. We make great use of the fact that \mathcal{R} is convex.

The first step is accomplished by referring to the results in [Ra], the results of a computer search for regular surfaces. From this we know that the classes $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[A + 2D]$, $[B + 2D]$ and $[C + 2D]$ are regular. The

classes $[C']$, $[A + 2D']$, $[B + 2D']$, $[C + 2D']$, $[C' + 2D]$, and $[C' + 2D']$ are then regular by symmetry.

To show points outside the convex hull are irregular, we use the fact that regular surfaces must be the image of points in the dual solution space under the canonical linear map to the standard solution space. We know that the dual solution space is a cone, so its image must likewise be a cone. We proceed by looking at particular vectors and converting the question into a linear programming problem and use *Mathematica* to solve it.

The results are given in the following

Theorem 4 *The regular projective solution space \mathcal{R} is the convex hull of the points $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[C']$, $[A + 2D]$, $[B + 2D]$, $[A + 2D']$, $[B + 2D']$, $[C + 2D]$, $[C + 2D']$, $[C' + 2D]$, and $[C' + 2D']$.*

References

- [AMR] I. R. Aitchison, S. Matsumoto, and J. H. Rubinstein, Surfaces in the figure-8 knot complement, preprint, 1996.
- [Ha] W. Haken, Theorie der Normal Flächen, Acta Math. 105 (1961), 245-375.
- [He] G. Hemion, The classification of knots and 3-dimensional spaces, Oxford University Press, 1992.
- [Ja] W. Jaco, personal notes, unpublished.
- [JO] W. Jaco and U. Oertel, An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold, Topology 23 (1984), 195-209.
- [JT] W. Jaco and J. Tollefson, Algorithm for the complete decomposition of a closed 3-manifold, to appear in Illinois J. Math.
- [Ma] MAGMA symbolic computation system, University of Sydney Computational Algebra Group.
- [Ra] R. Rannard, Computational enumeration of immersed normal surfaces in the figure 8 knot complement, preprint, 1996.

- [TW] J. Tollefson and N. Wang, Taut normal surfaces, *Topology* **35** (1995), 55-75.
- [Th] W. Thurston, *Topology and Geometry of 3-Manifolds*, Lecture Notes, Princeton University.

ゲージ群とその分類空間のホモトピー型

佃 修一 (京大理 学振)

G をコンパクト連結リー群、 \mathfrak{g} をそのリー環、 $\pi: P \rightarrow X$ を連結閉 C^∞ 多様体 X 上の主 G 束とします。 P の自己同型群 \mathcal{G} をゲージ群といいます。 \mathcal{G} は P の adjoint bundle AdP の切断の空間 $\Gamma(AdP)$ と同一視され $\Gamma(adP)$ をリー環とする無限次元リー群となります。 \mathcal{G}^0 を基点上 1 で作用する \mathcal{G} の部分群とします。

\mathcal{G} と \mathcal{G}^0 の分類空間 $B\mathcal{G}$ 、 $B\mathcal{G}^0$ は

$$B\mathcal{G} \simeq \text{Map}_P(X, BG)$$

$$B\mathcal{G}^0 \simeq \text{Map}_P^*(X, BG)$$

となることが知られています ([1])。ここで $\text{Map}_P(X, BG)$ は P を誘導する写像を含む連結成分。

これらの空間のトポロジーを調べる動機は 4 次元多様体の幾何 (Yang-Mills モジュライ空間のトポロジーとの関係) にあるのですがここではその話はしません (というよりはできません)。

ここではつぎのような観点から見てみようと思います。コンパクト連結リー群 G 、 G' は BG と BG' がホモトピー同値ならば同型となることが知られています ([6] を参照)。さらにシンプルであれば G と G' がホモトピー同値ならば $G \cong G'$ となります。ゲージ群の場合にはどの程度のことがいえるだろうか？

1 群

$P' \rightarrow X$ も主 G 束、 \mathcal{G}' をそのゲージ群とします。

底空間の微分同相を誘導する fibrewise な同型 $f: AdP \rightarrow AdP'$ があるとき AdP と AdP' は同型であるということにします。このとき次が成り立ちます。

定理 1 ([3][9]). G がセミスピノル群以外のコンパクト連結シンプルリー群かユニタリー群であれば $G \cong G'$ となる必要十分条件は AdP と AdP' が同型となることである。

(注) G がセミスピノル群のときは反例があります。

とくに P_k をコンパクト単連結 4 次元閉多様体 X 上の $c_2(P_k) = k$ の主 $SU(2)$ 束とし \mathcal{G}_k をそのゲージ群とすると

$$\mathcal{G}_k \cong \mathcal{G}_{k'} \Leftrightarrow \begin{cases} k = k' & X \text{ が向きを変える微分同相写像を持たない時} \\ k = |k'| & \text{その他} \end{cases}$$

となります。

上の定理は Pressley-Segal が "Loop Groups" でループ群の自己同型群を調べるために用いた手法を使って示される下の補題を用いて証明されます。

点 $p \in P$ 、 $\pi(p) = x$ が与えられると、 $AdP_x = P_x \times_{Ad} G$ は自然に G と同一視され準同型

$$ev_p: \mathcal{G} \rightarrow G$$

が定まります。 \mathcal{G}_0 を単位元を含む連結成分、 $Sur(\mathcal{G}_0, G)$ を全射準同型の全体とすると ev_p により $AutG$ 同変写像

$$ev: P \times_G AutG \rightarrow Sur(\mathcal{G}_0, G)$$

が定義されます。

補題 1. $ev: P \times_G AutG \rightarrow Sur(\mathcal{G}_0, G)$ は同変同相写像であり、同相 $X \rightarrow Sur(\mathcal{G}_0, G)/AutG$ を誘導する。

2 群のホモトピー型

ここでは単連結 4 次元閉多様体上の主 $SU(2)$ 束の場合を考えます。ファイブレーション

$$Map_k^*(X, BSU(2)) \rightarrow Map_k(X, BSU(2)) \rightarrow BSU(2) \quad (1)$$

のホモトピー完全列を調べることにより次のことが分かります。

定理 2 ([4][5]). \mathcal{G}_k が $\mathcal{G}_{k'}$ とホモトピー同値であるのは、 $(k, 12/d(X)) = (k', 12/d(X))$ となるとき、かつそのときに限る。ただし $(k, 12/d(X))$ は k と $12/d(X)$ の最大公約数であり ($k = 0$ のときは $12/d(X)$)、 $d(X)$ は X の交叉形式が *even* のとき 1、*odd* のとき 2 である。

同様なことがリーマン面上の主束の場合にも調べられています ([7])。

3 分類空間のホモトピー型

ここでも単連結 4 次元閉多様体上の主 $SU(2)$ 束の場合を考えます。

$BSU(2) = \mathbb{H}P^\infty$ ですがファイブレーション (1) を $\mathbb{H}P^n \subset \mathbb{H}P^\infty$ に制限したときにセクションをもつかどうかを調べることで次のことが分かります。

定理 3 ([8]). $B\mathcal{G}_k$ が $B\mathcal{G}_{k'}$ とホモトピー同値であるならば、任意の素数 p に対して $(k, p) = (k', p)$ となる。

このセクションをもう少し詳しく調べると底空間 X が S^4 の場合に $B\mathcal{G}_k$ が $B\mathcal{G}_{k'}$ とホモトピー同値であるための必要十分条件が $|k| = |k'|$ であることが分かります。

定理 4 ([11]). S^4 上の主 $SU(2)$ 束のゲージ群について次が成り立つ。

$$|k| = |k'| \Leftrightarrow \mathcal{G}_k \cong \mathcal{G}_{k'} \Leftrightarrow B\mathcal{G}_k \simeq B\mathcal{G}_{k'}$$

証明の概略

素数 p を 1 つ固定する。

$$M_k = \text{Map}_k(S^4, \mathbb{H}P_{(p)}^\infty)$$

とすると $B\mathcal{G}_{k(p)} \simeq M_k$ となる。次のファイブレーションがある。

$$\Omega^4 \mathbb{H}P_{(p)}^\infty \rightarrow M_k \rightarrow \mathbb{H}P_{(p)}^\infty \quad (2)$$

$M_k \simeq M_l$ ならば任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して $(k, p^r) = (l, p^r)$ となることを証明すればよい。

$d_p(k)$ を $(ev_k \circ f)^*: H^4(\mathbb{H}P_{(p)}^\infty; \mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrow H^4(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}_{(p)})$ が同型になるような写像 $f: \mathbb{H}P^n \rightarrow M_k$ が存在する最大の n とする ($n = \infty$ もゆるす)。 $p = 2, 3$ のときは少し注意が必要だが well defined であることがわかる。

このような写像 f は存在すればファイブレーション (2) のセクションとしてとれることがわかる。

補題 2. $(ev_k \circ f)^*: H^4(\mathbb{H}P_{(p)}^\infty; \mathbb{Z}_{(p)}) \rightarrow H^4(\mathbb{H}P^n; \mathbb{Z}_{(p)})$ が同型になるような写像 $f: \mathbb{H}P^n \rightarrow M_k$ が存在すれば $ev_k \circ g$ が $\mathbb{H}P^n \xrightarrow{l} \mathbb{H}P_{(p)}^n \xrightarrow{i} \mathbb{H}P_{(p)}^\infty$ とホモトピックになる写像 $g: \mathbb{H}P^n \rightarrow M_k$ が存在する。ここで l は localization で i は inclusion。

Chern 指標を計算すると次がわかる。

補題 3. $k \neq 0$ ならば $d_p(k) < \infty$ 。

また $d_p(k)$ がホモトピー不変量になっていることも比較的容易に示される。

補題 4. $M_k \simeq M_l$ ならば $d_p(k) = d_p(l)$ 。

$d_p(k) = n < \infty$ とすると定義から次の可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}P^n \times S^4 & \xrightarrow{\Phi} & \mathbb{H}P_{(p)}^\infty \\ \uparrow & & \uparrow \nabla \\ \mathbb{H}P^n \vee S^4 & \xrightarrow{(iol)\vee k} & \mathbb{H}P_{(p)}^\infty \vee \mathbb{H}P_{(p)}^\infty. \end{array}$$

$p \geq 3$ 、 $i > 3$ ならば $\pi_i(S_{(p)}^3)$ の元の位数が p であることを使うと、

$$\mathbb{H}P^n \vee S^4 \xrightarrow{(iol)\vee pk} \mathbb{H}P_{(p)}^\infty \vee \mathbb{H}P_{(p)}^\infty \longrightarrow \mathbb{H}P_{(p)}^\infty$$

を $\mathbb{H}P^n \times S^4$ に拡張するための障害が消えることがわかる。すなわち

補題 5. $k \neq 0$ 、 $p \geq 3$ ならば $d_p(k) < d_p(pk)$ 。

次の補題は容易に示せる。

補題 6. $(p, q) = 1$ ならば $M_k \underset{pk}{\simeq} M_{qk}$ 。

以上のことを使うと p が奇素数のときに $M_k \simeq M_l$ ならば任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して $(k, p^r) = (l, p^r)$ となることがわかる。

$k \neq 0$ ならば $M_0 \not\simeq M_k$ となることに注意する。 $M_k \simeq M_l$ だとする。 s, t を p と互いに素な整数で $sk = p^ntl$ となるものとする。 $n \geq 0$ としてよい。補題 6 により $M_{sk} \simeq M_{tl}$ 。補題 4 より $d_p(p^ntl) = d_p(sk) = d_p(tl)$ となり、補題 5 から $n = 0$ となる。したがって任意の $r \in \mathbb{N}$ に対して $(k, p^r) = (sk, p^r) = (tl, p^r) = (l, p^r)$ 。

$p = 2$ の場合はすこし工夫が必要だが同様な方法で示すことができる。
証明終

また X が CP^2 のときには BG_k が $BG_{k'}$ とホモトピー同値であるならば、 $k = k'$ または $4k'$ (ただし $k \geq k'$) となります。(この場合は $p = 2$ のときにうまくいかない。)

分類空間はゲージ群の部分群についての情報もある程度含んでいます。
 P の構造群が $SU(2)$ の部分群 S^1 に reduce すると

$$AdP = P \times_{Ad} SU(2) = P_{S^1} \times_{Ad} SU(2)$$

となり G は S^1 を部分群として含みます。逆に G が S^1 を部分群として含めば P の構造群が S^1 に reduce することが比較的容易に示せます。

このことは分類空間のレベルでも成立します。

定理 5 ([10][12]). X が 4次元単連結閉多様体の時 X 上の主 $SU(2)$ 束 P について次は同値。

1. BS^1 から BG へホモトピー的に自明でない写像が存在する。
2. G が S^1 を部分群として含む。
3. P の構造群が S^1 に reduce する。

このようにゲージ群の分類空間はゲージ群の群としての性質をわりとよく反映しているように思われます。

附記 分類空間のコホモロジーについて少し

単連結 4次元閉多様体上の主 $SU(2)$ 束のゲージ群の分類空間のコホモロジーを計算しようとするときコファイブレーション

$$\bigvee_b S^2 \rightarrow X \rightarrow S^4$$

から得られるファイブレーション

$$\Omega_0^3 S^3 \rightarrow \text{Map}_k^*(X, BSU(2)) \rightarrow \prod_b \Omega S^3. \quad (3)$$

とファイブレーション (1) の Serre スペクトル系列を使うのがまず思い付く方法だと思えます。

p を奇素数とします。いまのところ (3) の \mathbb{Z}/p 係数 Serre スペクトル系列のトータルディグリーが $4p-7$ 以下の differential は決定できています。例えばトータルディグリーが $2p-3$ 以下の differential で非自明になる可能性のある最初のものは

$$d_{2p-2}: E_{2p-2}^{0,2p-3} = H^{2p-3}(\Omega^3 S^3; \mathbb{Z}/p) \rightarrow H^{2p-2}(\Omega S^3; \mathbb{Z}/p) = E_{2p-2}^{2p-2,0}$$

ですが、これは $p=3$ のときは非自明で $p \geq 5$ のときは 0 になることがわかります。

また X が spin 多様体のときは (3) の $\mathbb{Z}/2$ 係数 Serre スペクトル系列の differential は全て消えることが知られています ([2])。

参考文献

- [1] M. F. Atiyah and R. Bott, *The Yang-Mills equations over Riemann surfaces*, Proc. Royal Soc. London **A308** (1982), 523–615.
- [2] R. L. Cohen and R. J. Milgram, *The homotopy type of gauge theoretic moduli spaces in Algebraic Topology and Its Applications* (G. E. Carlsson, R. L. Cohen, W. C. Hsiang, J. D. S. Jones, ed.), MSRI Publ 27, Springer-Verlag, 1994, 15–55.
- [3] W. D. Curtis and F. R. Miller, *Gauge groups and classification of bundles with simple structural group*, Pacific J. Math. **68** (1977), 331–338.
- [4] A. Kono, *A note on the homotopy type of certain gauge groups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **117A** (1991), 295–297.
- [5] A. Kono and S. Tsukuda, *A remark on the homotopy type of certain gauge groups*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 115–121.
- [6] D. Notbohm, *Classifying spaces of compact Lie groups and finite loop spaces in Handbook of Algebraic Topology* (I. M. James, ed.), North-Holland, 1995, 1049–1094.
- [7] W. A. Sutherland, *Function spaces related to gauge groups*, Proc. Royal Soc. Edinburgh **121A** (1992), 185–190.

- [8] S. Tsukuda, *A remark on the homotopy type of the classifying space of certain gauge groups*, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 123-128.
- [9] S. Tsukuda, *On isomorphism classes of gauge groups*, to appear in Topology and Its Appl.
- [10] S. Tsukuda *On maps from BS^1 to classifying spaces of certain gauge groups*, to appear in J. Math. Kyoto Univ.
- [11] S. Tsukuda *Homotopy type of $\text{Map}(S^4, BSU(2))$ and classifying spaces of gauge groups*, preprint
- [12] S. Tsukuda *On maps from BS^1 to classifying spaces of certain gauge groups II*, to appear in J. Math. Kyoto Univ.

無限次元とコンパクト化

木村 孝(埼玉大・教育)

次元関数は超限的なものを分けて数えれば、少なくとも6種類(ind, trInd, Ind, trInd, dim, trdim)はあり、コンパクト化定理も、考える空間のクラス、あるいは、特別なコンパクト化を考えることで、何通りものコンパクト化定理が考えられる。前半では、可分距離空間のクラス、weight が一定の空間のクラス、Stone Čech コンパクト化という、3種類のコンパクト化定理を考える。後半では、可分距離空間のみを考える。可分距離空間をヒルベルト立方体へ埋め込み、そこで閉包をとれば、それは元の空間のコンパクト化になる。このとき、ヒルベルト立方体への連続写像全体の集合に一様収束位相を入れた空間において、閉包をとったコンパクト化の次元が元の空間の次元と等しくなるような埋め込み全体の residuality を考える。

1. 次元の定義

6種類の次元の定義を述べる。

1.1. 定義 正則空間 X に対し、小さい(超限的)帰納的次元 ind(trind) を次のように定義する。但し、 α は順序数とする。

$$\begin{aligned} \text{ind } X = 1 &\iff X = \phi \\ (\text{trind } X = 1) \\ \text{ind } X \leq n &\iff \forall x \in X, \forall F: \text{closed in } X \text{ with } x \in X - F \\ (\text{trind } X \leq \alpha) & \\ &\exists U: \text{open in } X \\ &\text{s.t. } x \in U \subset X - F, \text{ind Bd } U < n \\ &\hspace{10em} (\text{trind Bd } U < \alpha) \\ \text{ind } X = n &\iff \text{ind } X \leq n \text{ かつ } \text{ind } X \not\leq n-1 \\ (\text{trind } X = \alpha &\iff \text{trind } X \leq \alpha \text{ かつ } \text{trind } X \not\leq \alpha-1) \\ \text{ind } X = \infty &\iff \text{ind } X \not\leq n \text{ for } \forall n \\ (\text{trind } X = \infty &\iff \text{trind } X \not\leq \alpha \text{ for } \forall \alpha) \\ X: \text{trind をもつ} &\iff \text{trind } X \leq \alpha \text{ for some } \alpha \end{aligned}$$

1.2. 定義 正規空間 X に対し、大きい(超限的)帰納的次元 Ind(trInd) を次のように定義する。但し、 α は順序数とする。

$$\begin{aligned} \text{Ind } X = 1 &\iff X = \phi \\ (\text{trInd } X = 1) \\ \text{Ind } X \leq n &\iff \forall E, F: \text{closed in } X \text{ with } E \subset X - F \\ (\text{trInd } X \leq \alpha) & \\ &\exists U: \text{open in } X \\ &\text{s.t. } E \subset U \subset X - F, \text{Ind Bd } U < n \\ &\hspace{10em} (\text{trInd Bd } U < \alpha) \\ \text{Ind } X = n &\iff \text{Ind } X \leq n \text{ かつ } \text{Ind } X \not\leq n-1 \\ (\text{trInd } X = \alpha &\iff \text{trInd } X \leq \alpha \text{ かつ } \text{trInd } X \not\leq \alpha-1) \\ \text{Ind } X = \infty &\iff \text{Ind } X \not\leq n \text{ for } \forall n \\ (\text{trInd } X = \infty &\iff \text{trInd } X \not\leq \alpha \text{ for } \forall \alpha) \\ X: \text{trInd をもつ} &\iff \text{trInd } X \leq \alpha \text{ for some } \alpha \end{aligned}$$

被覆次元 \dim は、標準的には、有限コゼロ被覆に対する細分の order で定義するが、ここでは、超限被覆次元との関連から被覆次元の定義と同値な分離集合による定義を述べる。但し、この同値命題は正規空間に対してのみ成り立つ性質のものである。以下述べる定理の一部はチコノフ空間に対しても成立するが、それらに関しては、チコノフ空間に対しての定理は標準的な定義によるものとする。

正規空間 X の交わらない2つの閉集合 E, F と X の閉集合 L に対し、

$$X - L = U \cup V, E \subset U, F \subset V$$

となる交わらない2つの開集合 U, V が存在するとき、 L は X において E と F を分離するという。

$A = \{(A_i, B_i) : 0 \leq i \leq n\}$ を正規空間 X の交わらない2つの閉集合の対から成る列とする。任意の $i (i=0, 1, 2, \dots, n)$ に対し

$$\cap \{L_i : 0 \leq i \leq n\} = \phi$$

となる A_i と B_i の分離集合 L_i が存在するとき、 A は inessential in X であるという。また、inessential in X でないとき essential in X であるという。

1. 3. 定義 正規空間 X に対し、被覆次元 \dim を次のように定義する。

$$\dim X = 1 \iff X = \phi$$

$$\dim X \leq n \iff \forall A = \{(A_i, B_i) : 0 \leq i \leq n\} : \text{a coll. of pairs of disjoint closed sets in } X$$

$$\implies A : \text{inessential in } X$$

$$\dim X = n \iff \dim X \leq n \text{ かつ } \dim X \not\leq n-1$$

$$\dim X = \infty \iff \dim X \not\leq n \text{ for } \forall n$$

この定義の n は基数であり、また被覆次元の標準的定義はコゼロ被覆の細分の order で定義するが、これも基数なので帰納的次元のように直接的に任意の順序数に拡張することはできない。Borst[B]は、上の被覆次元の定義をうまく拡張し、被覆次元を順序数にまで拡張した。次に、Borst[B] による超限被覆次元 trdim を定義するためのいくつかの準備をする。

集合 L に対し

$\text{Fin } L$: the collection of all non-empty finite subsets of L

とおく。

$$M \subset \text{Fin } L, \sigma \in \text{Fin } L \cup \{\phi\}$$

に対し

$$M^\sigma = \{\tau : \tau \cup \sigma \in M \text{ and } \tau \cap \sigma = \phi\}$$

とおく。但し、 $a \in L$ に対して、

$$M^{a \cup \phi} = M^a$$

とかく。

1. 4. 定義 上記の L, M に対し、 M の order, $\text{Ord } M$, を次で定義する。

$$\text{Ord } M = 0 \iff M = \phi$$

$$\text{Ord } M \leq \alpha \iff \text{Ord } M^a < \alpha \text{ for } \forall a \in L$$

$$\text{Ord } M = \alpha \iff \text{Ord } M \leq \alpha \text{ かつ } \text{Ord } M \not\leq \alpha-1$$

$$\text{Ord } M = \infty \iff \text{Ord } M \not\leq \alpha \text{ for } \forall \alpha$$

正規空間 X に対し

$$L(X) = \{(A, B) : A \text{ and } B \text{ are disjoint closed in } X\}$$

とおき、 $L \subset L(X)$ に対し

$$M_L = \{\sigma \in \text{Fin } L : \sigma \text{ is essential}\}$$

とおく。

1.5. 定義 正規空間 X に対し、超限的被覆次元 trdim を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \text{trdim } X &= 1 \text{ if } X = \phi \\ \text{trdim } X &= \text{Ord } M_{\omega}(X) \text{ if } X \neq \phi \end{aligned}$$

と定義する。また

$$\begin{aligned} X: \text{trdim} \text{ をもつ} &\iff \text{trdim } X \leq \alpha \text{ for some } \alpha \\ &(\iff \text{trdim } X \neq \infty) \end{aligned}$$

と定義する。

trdim と書くからには、有限次元の場合は当然 dim と一致して欲しいが、実際、Borst [B] によって、正規空間 X に対し $\text{dim } X \neq \infty$ あるいは $\text{trdim } X < \omega$ ならば $\text{dim } X = \text{trdim } X$ となることが知られている。また、同じく Borst [B] により、正規空間 X が trdim をもつことと X が S. w. i. d. であることが同値であることが示されている。

2. 可分距離空間のクラス

可分距離空間に対し、次元を保存する距離化可能なコンパクト化の存在について考察する。

(a) ind , Ind , dim について

可分距離空間 X においては、常に、 $\text{ind } X = \text{Ind } X = \text{dim}$ が成り立つので、可分距離空間のクラスにおける有限次元のコンパクト化定理では、 ind , Ind , dim の内どの次元で考えてもよい。また、このとき、コンパクト化定理が成立することも古典的な結果としてよく知られている。

2.1. 定理 $\forall X$: 可分距離空間

$\exists \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化

s. t. $\text{dim } \alpha X = \text{dim } X$

($\text{ind } \alpha X = \text{ind } X$, $\text{Ind } \alpha X = \text{Ind } X$)

(b) trind , trInd , trdim について

trind , trInd , trdim の値は、一般には、可分距離空間のクラスにおいても異なるので、それぞれに関して個別に考えなければならない。 trInd に関して成立することは、Luxemburg [L] によって証明されている。

2.2. 定理 [L] $\forall X$: 可分距離空間

$\exists \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化 s. t. $\text{trInd } \alpha X = \text{trInd } X$

trdim に関して成立することは、著者 [K2]、Chatyrko [C]、Yokoi [Y] によって証明されている。

2.3. 定理 ([K2], [C], [Y]) $\forall X$: 可分距離空間

$\exists \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化 s. t. $\text{trdim } \alpha X \leq \text{trdim } X$

上記のように、可分距離空間のクラスでは trInd , trdim に関するコンパクト化定理が成立するが、残念ながら、 trind に対しては成立しないことが、Luxemburg [L] によって

示されている。

2.4. 例 [L] $\exists X$: 可分距離空間 s. t.

$\forall \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化に対し $\text{trind } \alpha X > \text{trind } X$ となる。

一般には成立しないが、特別な場合は成立する。実際、Luxemburg [L] の次の結果より、 trInd をもつことは trind を保存するコンパクト化をもつための十分条件であることがわかる。

2.5. 定理 [L] 可分距離空間 X に対し

X : trInd をもつ $\iff \exists \alpha X$: 距離化可能な X のコンパクト化
s. t. $\text{trind } \alpha X = \text{trind } X$

上の例 2.4 より、値を上から押さえるという強い形のコンパクト化定理の成立は望めないが、弱い形のコンパクト化定理は成立する。すなわち、 trind の値を考慮しなければ、任意の可分距離空間 X に対し、 X が trind をもてば、 trind をもつ距離化可能な X のコンパクト化 αX が存在する。この結果より、可分距離空間 X に対し、 trind の値が最小な距離化可能なコンパクト化の trind の値に興味がある。この問題に関して、Luxemburg [L] の次の予想がある。

2.6. 予想 [L] $\text{trind } X = \lambda + n$ (但し、 λ は極限順序数、 n は 0 以上の整数) となる可分距離空間 X に対し

$$\text{trind } \alpha X \leq \lambda + 2n + 1$$

となる距離化可能なコンパクト化 αX が存在するであろう。

3. weight 一定のクラス

weight を保存するコンパクト化の存在について考察する。

(a) $\text{ind}, \text{Ind}, \text{dim}$ について

3.1. 定理 $\forall X$: 正規空間

$\exists \alpha X$: X のコンパクト化 s. t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\text{Ind } \alpha X = \text{Ind } X$

3.2. 定理 $\forall X$: チコノフ空間

$\exists \alpha X$: X のコンパクト化 s. t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\text{dim } \alpha X = \text{dim } X$

上記のように、 Ind , dim に関しては、 weight を保存するコンパクト化定理が成立する。また、 ind に関しても 0 次元の場合は成立する。実際、 $\text{ind } X = 0$ と仮定すれば、 X は D^m の部分空間とみなすことができる。但し、

$$D = \{0, 1\}, \quad m = w(X)$$

とする。ここで、 αX を X の D^m における閉包とすれば、明らかに αX は X のコンパクト化で、 $w(\alpha X) = w(X)$, $\text{ind } \alpha X = 0$ を満たす。

上の結果より、0 次元空間に対しては、 ind に関しても weight を保存するコンパクト化定理が成立する。しかし、van Mill and Przymusiński [vMP] によって、 ind に関しては、一般には成立しないことが知られている。

3.3. 例 [vMP] $\exists X$: 正規空間

s. t. $\text{ind } X = 1$ かつ $\forall \alpha X$: X のコンパクト化 $\iff \text{ind } \alpha X = \infty$

上の空間のコンパクト化 αX に対して、 $\text{ind } \alpha X = \infty$ より、 $\text{trind } \alpha X \geq \omega$ であることはわかるが、 $\text{trind } \alpha X = \infty$ であるか否かは(すなわち、 trind をもつか否かは)わからない。

(b) trind , trInd , trdim について

超限次元のときも、 trInd , trdim に関しては weight を保つコンパクト化定理が成立する。

3. 4. 定理 [P] $\forall X$: 正規空間

$\exists \alpha X: X$ のコンパクト化 s. t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\text{trInd } \alpha X \leq \text{trInd } X$

3. 5. 定理 ([K2], [C], [Y]) $\forall X$: 正規空間

$\exists \alpha X: X$ のコンパクト化 s. t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\text{trdim } \alpha X \leq \text{trdim } X$

ind に対して、すでに weight を保存するコンパクト化定理は成立しないので trind に対してもこのタイプのコンパクト化定理は成立しない。しかし、可分距離空間のクラスでは、2つの肯定的な結果が得られているので、同様なことが weight を保存するコンパクト化に関しても考えられる。

1つ目の問題としては、「可分距離空間のクラスでは、 trind をもてば、 trind をもつコンパクト化をもつ」ので、同様なことが一般の空間に関しても成り立つか否かが問題となる。

3. 6. 問題 trind をもつ空間は、 trind をもつコンパクト化をもつか？

先に述べたように van Mill and Przymusiński [vMP] の例 X は、任意のコンパクト化 αX に対し、 $\text{ind } \alpha X = \infty$ だが、 $\text{trind } \alpha X = \infty$ であるか否かはわからないので、この空間が上の問題の反例になっているか否かは、直ちにはわからない。上記の問題に関しては、著者 [K1] は以前次の反例を与えた。

3. 7. 例 [K1] $\exists X$: チコノフ空間

s. t. $\text{trind } X = 1$ かつ $\forall \alpha X: X$ のコンパクト化 $\Leftrightarrow \text{trind } \alpha X = \infty$

2つ目の問題としては、「可分距離空間のクラスでは、 trInd をもてば、 trind の値が等しいコンパクト化をもつ」ので、同様なことが一般の空間に関しても成り立つか否かが問題となる。

3. 8. 問題 trInd をもつ空間は、 trind を保存するコンパクト化をもつか？

この問題に関しては、距離空間を含む特別な空間のクラスでは条件つきで成立することがわかる [K1]。

3. 9. 定理 [K1] X : metacompact, strongly hereditarily normal, trInd をもつ $\text{trind } X \geq \omega^2$

$\Leftrightarrow \exists \alpha X: X$ のコンパクト化

s. t. $w(\alpha X) = w(X)$, $\text{trind } \alpha X = \text{trind } X$

4. Stone-Čech コンパクト化

Stone Čech コンパクト化の次元が元の空間の次元と等しいか否かについて考察する。

(a) ind , Ind , dim について

Ind , dim に関して、Stone Čech コンパクト化に関するコンパクト化定理が成立することはよく知られている。

4. 1. 定理 X : 正規空間 $\Leftrightarrow \text{Ind } \beta X = \text{Ind } X$

4. 2. 定理 X : チコノフ空間 $\Leftrightarrow \text{dim } \beta X = \text{dim } X$

しかし、 trind に関しては成立しない。実際、空間 X を $\text{ind } X = 0$, $\text{Ind } X \neq 0$ となる空間とする。ここで、 $\text{ind } \beta X = 0$ と仮定すれば、「コンパクト空間 Y では、 $\text{ind } Y = 0$ であることと $\text{Ind } Y = 0$ であることは同値」なので、 $\text{Ind } \beta X = 0$ となり、 $\text{Ind } X = \text{Ind } \beta X$ より、 $\text{Ind } X = 0$ となり矛盾。

上記の条件を満たす空間は距離空間のクラスで存在することは $\text{Roy}[R]$ の例としてよく知られている。よって、 trind に関しては、Stone Čech コンパクト化に関するコンパクト化定理は距離空間のクラスでも成立しないことがわかる。しかし、次の命題より可分距離空間のクラスでは成立する。

4. 3. 命題 X : 可分距離空間 $\Leftrightarrow \text{ind } \beta X = \text{ind } X$
(証明)

$$\text{ind } X = \text{Ind } X = \text{Ind } \beta X \geq \text{ind } \beta X$$

より、

$$\text{trind } \beta X = \text{trind } X$$

となる。

(b) trind , trInd , trdim について

Stone Čech コンパクト化に関するコンパクト化定理は、 trInd , trdim に関しても成立する

4. 4. 定理 [P] X : 正規空間 $\Leftrightarrow \text{trInd } \beta X = \text{trInd } X$

4. 5. 定理 ([K2], [C], [Y]) X : 正規空間 $\Leftrightarrow \text{trdim } \beta X = \text{trdim } X$

trind に関して成立しないことは、 ind ですでに成立しないことより明らかであるが、より精密に次が成り立つ。

4. 6. 定理 βX : trind をもつ $\Leftrightarrow X$: trInd をもつ
(証明)

βX が trind をもてば、「コンパクト空間のクラスでは、 trind をもつことと trInd をもつことは同値」なので、 βX は trInd ももつ。よって、 X は trInd をもつ。

先に見たように、任意の可分距離空間 X に対し、 $\text{jnd } \beta X = \text{ind } X$ が成立するが、 trind に関しては、可分距離空間の範囲でも、Stone Čech のコンパクト化に関するコンパクト化定理は成立しない。実際、 X を n 次元立方体の位相和とすれば、 $\text{ind } X = \omega$ であるが、 X は trInd をもたないので上の定理より βX は trind をもたない。

定理 4.6 より、Stone Čech コンパクト化の trind を考える場合は、 X が trInd をもつときのみが意味をもつので、 trInd をもつ可分距離空間に対して Stone Čech コンパクト化に関するコンパクト化定理を考える。このとき、次が成り立つ。

4.7. 定理 [K1] $X : \text{trInd}$ をもつ可分距離空間 $\iff \text{trind } \beta X = \text{trind } X$

Roy の例より一般には成立しないことはわかるが、 trInd をもつ空間に対して、 $\text{trind } \beta X$ と $\text{trind } X$ がどのような関係にあるのか興味をもたれる。この問題に関しては、次の部分解を得ることができた。

4.8. 定理 [K1] $X : \text{metacompact, strongly hereditarily normal, trInd}$ をもつ $\text{trind } X \geq \omega^2$
 $\iff \text{trind } \beta X = \text{trind } X$

5. Hilbert cube への次元を保つ埋め込みの residuality について

次元を保つ埋め込みの residuality に関して考察する。

可分距離空間 X に対し

$C(X, I^\omega) : X$ から I^ω への連続写像全体
 とおき(但し、 I^ω は Hilbert cube とする)
 $\exists f, g \in C(X, I^\omega)$

に対し

$$d(f, g) = \sup\{\sigma(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

とおく。但し、 σ は I^ω の距離とする。以下、 $C(X, I^\omega)$ は、上の距離をもつ距離空間とする。

空間 Y の部分集合 A が residual in Y であるとは A が dense G_δ set を含むことである。

I^ω はコンパクトなので、 $C(X, I^\omega)$ は完備距離空間となり、ベール空間である。よって、稠密な開集合の可算個の共通部分を含む部分集合は residual である。

この節では、次元関数 d に対し、 $\{h \in C(X, I^\omega) : d(\text{Cl } h(X)) = d(X)\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であるか否かを考察する。任意の可分距離空間 X に対し $\{h \in C(X, I^\omega) : h: \text{embedding}\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることはよく知られているので $\{h \in C(X, I^\omega) : d(\text{Cl } h(X)) = d(X)\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることを示せば、 $\{h \in C(X, I^\omega) : d(\text{Cl } h(X)) = d(X) \text{ and } h \text{ is an embedding}\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることがわかる。

\dim に関しては、次の定理が成立することはよく知られている。

5.1. 定理 $X : \text{可分距離空間}$

$$\iff \{h \in C(X, I^\omega) : \dim \text{Cl } h(X) = \dim X\} : \text{residual in } C(X, I^\omega)$$

可分距離空間 X に対しては $\text{ind } X = \text{Ind } X = \dim X$ なので、同様なことが、 ind , Ind に関しても成立する。しかし、 trind , trInd , trdim の値は一般には異なるので、それぞれに対して考察しなければならない。Luxemburg [L] は、 trInd に関して、像の閉包をとっても次元を保存する埋め込みが residual であることを示した。すなわち、次が成立する。

5. 2. 定理 [L] X : 可分距離空間

$\Rightarrow \{h \in C(X, I^\omega) : \text{trInd Cl } h(X) = \text{trInd } X\} : \text{residual in } C(X, I^\omega)$

trInd に関しては、任意のコンパクト化 αX に対して、 $\text{trInd } \alpha X > \text{trInd } X$ となる可分距離空間 X が存在するので、この X に対しては次が成立する。

5. 3. 例 [L] X : 可分距離空間

s. t. $\{h \in C(X, I^\omega) : \text{trInd Cl } h(X) = \text{trInd } X\} = \emptyset$
(よって、特に $\text{residual in } C(X, I^\omega)$ ではない)

すなわち、一般には trInd に関しては、埋め込みの residuality は成立しない。しかし、Luxemburg [L] による次の定理より trInd をもつ可分距離空間に対しては、 residuality が成立する。

5. 4. 定理 [L] X : 可分距離空間, trInd をもつ

$\Rightarrow \{h \in C(X, I^\omega) : \text{trInd Cl } h(X) = \text{trInd } X\} : \text{residual in } C(X, I^\omega)$

上の結果より trInd をもつことは十分条件であることがわかるが、E. Pol [P] の結果を合わせて考えるとこれは必要条件であることもわかる。すなわち、次が成立する。

5. 5. 定理 X : 可分距離空間に対し

$X : \text{trInd}$ をもつ

$\Leftrightarrow \{h \in C(X, I^\omega) : \text{trInd Cl } h(X) = \text{trInd } X\} : \text{residual in } C(X, I^\omega)$

trDim に関しては著者 [K2] が以前から問題にしてきたが、一般の形で成立することがわかった。

5. 6. 定理 [K3] X : 可分距離空間

$\Rightarrow \{h \in C(X, I^\omega) : \text{trDim Cl } h(X) = \text{trDim } X\} : \text{residual in } C(X, I^\omega)$

上記のいくつかの定理より trInd をもつ可分距離空間に対しては、次が成り立つ。

5. 7. 定理 可分距離空間 X に対し

$\{h \in C(X, I^\omega) : h \text{ は } X \text{ から } I^\omega \text{ への埋め込み, } \text{trInd Cl } h(X) = \text{trInd } X, \text{trInd Cl } h(X) = \text{trInd } X, \text{trDim Cl } h(X) = \text{trDim } X\}$ は $\text{residual in } C(X, I^\omega)$

著者は以前、 trInd をもつ可分距離空間 X に対し trInd , trInd , trDim をすべて保存する距離化可能なコンパクト化の存在を示したが、定理 5.7 を用いれば、これは明らかである。

5. 8. 系 X : 可分距離空間に対し

$X : \text{trInd}$ をもつ

$\Rightarrow \exists \alpha X : \text{距離化可能なコンパクト化}$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \text{trInd } \alpha X = \text{trInd } X, \\ \text{trInd } \alpha X = \text{trInd } X, \\ \text{trDim } \alpha X = \text{trDim } X \end{cases}$$

(定理 5.6 の証明の概略)

ここでは、 $\{h \in C(X, I^\omega) : \text{trDim Cl } h(X) \leq \text{trDim } X\}$ が $\text{residual in } C(X, I^\omega)$ となることの概略を示す。

τ : finite coll. of pairs of disjoint closed sets in X , $f \in C(X, I^\omega)$ に対し
 $f(\tau) = \{Cl f(A), Cl f(B) : (A, B) \in \tau\}$
 $U(\tau) = \text{Int}\{g \in C(X, I^\omega) : g(\tau) \text{ is inessential in } Cl g(X)\}$
 とおく。このとき、
 τ : inessential in $X \iff U(\tau)$: open, dense in $C(X, I^\omega)$
 となる。

B : countable base for I^ω s.t. $\forall B \in \mathcal{B}$
 となるものを取り

$$S = \{Cl B : B \in \mathcal{B}\}$$

とおき

$$\begin{aligned} & \{\tau : \tau \text{ is a finite coll. of pairs of disjoint sets from } S\} \\ & = \{\tau_i : i < \omega\} \end{aligned}$$

と並べる。次に

$$\tau f \in C(X, I^\omega), \forall n < \omega$$

に対し

$$U(f, n) = \bigcap \{U(f^{-1}(\tau_i)) : i \leq n \text{ and } f^{-1}(\tau_i) \text{ is inessential in } X\}$$

とおけば、

$$U(f, n) \text{ : open, dense in } C(X, I^\omega)$$

となる。これを用い帰納的に、次をみたく G_n, f_n をとる。

G_n : pairwise disjoint open coll. in $C(X, I^\omega)$, $\exists f_n \in U(\tau \cup G_n)$

$$\text{s.t. } \begin{cases} \cup G_n \text{ : dense in } C(X, I^\omega) \\ \text{mesh } G_n < 1/n \\ G_{n+1} < G_n \\ \cup \{V \in G_{n+1} : V \subset U\} \subset U(f_n, n) (\forall U \in G_n) \end{cases}$$

ここで

$$\begin{aligned} H_n &= \cup G_n \\ H &= \bigcap \{H_n : n < \omega\} \end{aligned}$$

とおけば、明らかに

$$H \text{ : residual in } C(X, I^\omega)$$

となる。また(多少計算することで)

$$\tau f \in H \implies \text{trdim } Cl f(X) \leq \text{trdim } X$$

となることも示すことができ、 $\{h \in C(X, I^\omega) : \text{trdim } Cl h(X) \leq \text{trdim } X\}$ が residual in $C(X, I^\omega)$ であることがわかる。

参考文献

- [B] P. Borst, Classification of weakly infinite dimensional spaces. Part I: A transfinite extension of the covering dimension, Fund. Math. 130(1988), 1-25.
- [C] V.A. Chatyrko, On the transfinite dimension $\dim, Q \& A$ in General Topology, 9(1991), 177-193.
- [K1] T. Kimura, A space X with $\text{trind } X = 1$ every compactification of which has no trind , Top. Proc. 17(1992), 173-180.
- [K2] T. Kimura, Compactification and product theorems for Borst's transfinite dimension, preprint
- [K3] T. Kimura, A note on compactification theorem for trdim , Top. Proc. 20(1995), 145-159.
- [K4] T. Kimura, Compactification theorems for trind , in preparation.

- 72
- [L] L. Luxemburg, On compactifications of metric spaces with transfinite dimensions, Pacific J. Math. 101(1982), 399-450.
 - [vMP] J. van Mill and T.C. Przymusiński, There is no compactification theorem for small inductive dimension, Top. Appl. 13(1982), 133-136.
 - [P1] B.A. Pasynkov, On the dimension of normal spaces, Soviet. Math Dokl. 12(1971), 1784-1787.
 - [P2] E. Pol, The Baire category method in some compact extension problems, Pacific J. Math. 122(1986), 197-210.
 - [R] P. Roy, Nonequality of dimensions for metric spaces, Trans. Amer. Math. Soc. 134(1968), 117-132.
 - [S] E.G. Sklyarenko, On dimensional properties of infinite dimensional spaces, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 21(1962), 35-50.
 - [Y] K. Yokoi, Compactification and factorization theorems for transfinite covering dimension, Tsukuba J. Math. 15(1991), 389-395.

曲面結び目の3次元空間への射影について

東京大学数理科学研究科

志摩 亜希子

\mathbb{R}^4 内の knotted surface を \mathbb{R}^3 に射影する事により研究する方法がある。本稿では 1 つ目として筆者の興味のある knotted surface の問題を述べ、2 つ目として knotted surface について射影を使い研究する方法で知られている事を述べ、最後にある条件を付けた knotted surface についての筆者の結果を述べる。

1. UNKNOTTING PROBLEM

F を \mathbb{R}^4 内の oriented knotted surface とする。 $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ が \mathbb{Z} に同型ならば F は trivial であるか? という問題がある。この問題の答えは topological category については正しい事が示されている。球面の場合は Freedman 氏により、一般の向き付け可能な曲面の場合は河内氏と Hillman 氏により示された。PL category または smooth category においては一般には解かれていない。丸本氏により 1-fusion ribbon 2-knot の場合に、寺垣内氏により symmetry-spun torus の場合に、Scharlemann 氏により 2-sphere で critical points が 4 つの場合に正しいことが示されている。今回の 1 つの目標としてある条件を満たす torus と Klein bottle に対しては上の問題が正しい事を紹介する (Corollary 4)。

2. RIBBON 2-KNOTS

射影したときに表れる surface の交わりが 2 重点のみのときは簡単であり研究がよく行なわれている。ribbon 2-knot と呼ばれる knotted surface の研究について知られている結果を述べる。 $I = [0, 1]$ とおく。 G を \mathbb{R}^4 内の knotted surface とする。 \mathbb{R}^4 内の knotted surface F が G から m -fusion して得られた surface とは ある embedding $h_j : B^2 \times I \rightarrow \mathbb{R}^4$ が存在し ($j = 1, 2, \dots, m$) 次の 3 つの条件を満たす

日本学術振興会 特別研究員

- (1) $h_i(B^2 \times I) \cap h_j(B^2 \times I) = \phi \ (i \neq j)$
- (2) 全ての j に対し $h_j(B^2 \times I) \cap \overset{G}{\mathbb{R}^4} = h_j(B^2 \times \{0, 1\})$
- (3) $F = (G \setminus \cup h_j(B^2 \times \{0, 1\})) \cup (\cup h_j(\partial B^2 \times I))$

特に G が trivial 2-link (いくつかの S^2 からなり ambient isotopy で $\mathbb{R}^3 \times \{0\}$ 内の交わらない S^2 達に出来る) の時、 F を ribbon surface という。さらに ribbon surface F が S^2 の時、 F を ribbon 2-knot という。

$p : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を $p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$ で得られる projection、 F を \mathbb{R}^4 内の knotted surface、 $p|F$ が general position にあるとする (局所的に $p|F$ の像が Figure 1 のようになっている)。 $p^{-1}(x) \cap F$ がちょうど 2 点の時、 x を 2重点 (double point) という。 $p^{-1}(x) \cap F$ がちょうど 3 点の時、 x を 3重点 (triple point) という。 $\Gamma(F^*) = \{x \in p(F); p^{-1}(x) \cap F \text{ が 2 点以上}\}$ 、 $\Gamma(F) = p^{-1}(\Gamma(F^*)) \cap F$ 。

Figure 1

Theorem ([Yajima 2]). F を knotted 2-sphere で $p|F$ が general position にあり $\Gamma(F^*)$ が 2 重点のみからなるとする。このとき F はある ribbon 2-knot に ambient isotopic である。

Theorem ([Marumoto 1]). F を 1-fusion して得られた ribbon 2-knot とする。もし $\pi_1(\mathbb{R}^4 \setminus F)$ が \mathbb{Z} と同型ならば F は trivial である。

相曾氏により 2 重点のみもつ 2-sphere で singular set の成分数が高々 5 以下のものについて分類がされた。(このうち singular set の成分数が高々 2 以下のときは その 2-knot は trivial である事も示した)

3. KNOTTED TORUS と KNOTTED KLEIN BOTTLE

ribbon 2-knot はよく研究されているが genus がある場合で射影したときに表れる surface の交わりが 2 重点のみについて知られている事を述べる。まず 寺垣内氏により定義された symmetry-spun torus を紹介する。 $r_\theta : B^3 \rightarrow B^3$ を Z 軸を中心に θ 回転する map、 $S^4 = \partial B^5 = \partial B^3 \times B^2 \cup B^3 \times \partial B^2$ とする。 S^4 内の knotted torus F が symmetry-spun torus とは 整数 a と b と B^3 内の link K_b が存在し 次の 3 つの条件を満たす。

- (1) K_b と Z 軸は交わらない

$$(2) r_{\frac{2\pi}{b}}(K_b) = K_b$$

$$(3) F = \{(r_{\frac{a}{b}\theta}(x), \theta); x \in K_b, \theta \in \partial B^2\} \subset B^3 \times \partial B^2$$

但し $a \neq 0$ かつ ∂B^2 は $[0, 2\pi]/0 \sim 2\pi$ と同一視する。この F を $T^a(K_b)$ で表す。同様にし
て spun Klein bottle も定義出来る。 S^4 内の knotted Klein bottle F が spun Klein bottle
とは B^3 内の knot K と 整数 a が存在し 次の3つの条件を満たす。

(1) K と Z 軸は2点で交わる

$$(2) r_\pi(K) = K$$

$$(3) F = \{(r_{(a+\frac{1}{2})\theta}(x), \theta); x \in K, \theta \in \partial B^2\} \subset B^3 \times \partial B^2$$

この F を $Kl^a(K)$ で表す。 symmetry-spun torus と trivial 2-link の split union から m-fusion して得られた torus を単に symmetry-spun torus から m-fusion して得られた torus という。同様に spun Klein bottle と trivial 2-link の split union から m-fusion して得られた Klein bottle を単に spun Klein bottle から m-fusion して得られた Klein bottle という。

Theorem ([Teragaito]). $T^a(K_b)$ を *symmetry-spun torus*、 a と b は互いに素とする。

(1) $T^a(K_b)$ は $T^0(K_1)$ または $T^1(K_1)$ に *ambient isotopic* である

(2) $\pi_1(S^4 \setminus T^a(K_b))$ が \mathbb{Z} と同型ならば、 $T^a(K_b)$ は *trivial* である

ここで K_1 は $K_b/r_{\frac{2\pi}{b}}(x) \sim x$ で得られる *knot* とする。

細川氏と河内氏により oriented closed knotted surface が \mathbb{R}^4 内の handlebody の境界ならばその surface は *trivial* である事が示されている。ゆえに knotted surface が *trivial* であることを示すには surface がある handlebody の境界になることを示せば十分である。

Theorem 1 ([S3]). F を S^4 内の *knotted torus* で $p|F$ が *general position* にあり $\Gamma(F^*)$ が2重点のみからなるとする。もし $\Gamma(F^*)$ の成分数が高々3以下のとき F は次の4つの *torus* どれか1つに *ambient isotopic* である。

(1) *standard torus* (ある *solid torus* の境界となる)

(2) *trefoil knot* から得られた *spun torus*

(3) *trefoil knot* から得られた *twist spun torus*

(4) *trefoil knot* の *spun 2-sphere* に *1-handle* をつけて得られた *torus*

しかも上の4つの *torus* は互いに *ambient isotopic* ではない。

Remark. $\Gamma(F^*)$ の成分数が高々2以下のときはその *torus* は *trivial* である。

Note ([S8]). F を S^4 内の knotted Klein bottle で $p|F$ が general position にあり $\Gamma(F^*)$ が 2 重点のみからなるとする。もし $\Gamma(F^*)$ の成分数が高々 3 以下のとき F は standard Klein bottle に ambient isotopic である。(standard Klein bottle とは \mathbb{R}^3 に射影したとき Figure 2 のようになっている)

Figure 2

Theorem 2 ([S4]). F を knotted torus で $p|F$ が general position にあり $\Gamma(F^*)$ が 2 重点のみからなるとする。このとき F は ribbon torus または symmetry-spun torus から m -fusion して得られた torus に ambient isotopic である。

Theorem 3 ([S7]). F を knotted Klein bottle で $p|F$ が general position にあり $\Gamma(F^*)$ が 2 重点のみからなるとする。このとき F は ribbon Klein bottle または spun Klein bottle から m -fusion して得られた Klein bottle に ambient isotopic である。

Corollary 4 ([S4] and [S7]). F を S^4 内の knotted torus または knotted Klein bottle とする。 $p|F$ が general position にあり singular set $\Gamma(F^*)$ が 2 重点のみからなるとする。 F の上の singular set $\Gamma(F)$ のすべての成分は F 内で homotopic zero でないとする (つまり F 内で disk の境界とならない simple closed curve である)。もし $\pi_1(S^4 \setminus F)$ が \mathbb{Z} または \mathbb{Z}_2 に同型ならば F は trivial である。

Proof. Theorem 2 と 3 より F は symmetry-spun torus または spun Klein bottle に ambient isotopic である。symmetry-spun torus ならば 寺垣内氏の Theorem より示せる。spun Klein bottle $Kl^a(K)$ に ambient isotopic ならば B^3 内の knot K はある knot l があり $K = l\#l$ としてもよい。つまり $\pi_1(S^4 \setminus F) \cong \pi_1(S^3 \setminus l) / \langle m^2 = 1 \rangle$ となる。ここで m は l の meridian curve。 $\pi_1(S^3 \setminus l) / \langle m^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}$ ならば l は trivial knot である。ゆえに F は singular set が 1 本からなる Klein bottle に ambient isotopic である。Note より F は trivial である。□

4. S^3 への S^2 の IMMERSION

immersion を研究することは 3 重点をもつ knotted surface を研究することともつながる。Banchoff 氏により次のことが示された。 F を closed surface、 f を F から S^3 への immersion とする。このとき f の 3 重点の数は F の Euler 標数と modulo 2 で等しい。つ

まり immersed 2-sphere の中で 3 重点をもつもの内で 1 番簡単なものは 3 重点を 2 コもつものである。また山形氏により singular surface で 3 重点が 1 コのものについて調べられている。以下では immersed 2-sphere で 3 重点をちょうど 2 コもつものについて調べた結果である。

Theorem 5 ([S6]). f を S^2 から S^3 への immersion とする。 C を $S(f)$ の成分で 3 重点を高々 2 コもつもの、 N を S^3 における C の regular neighborhood とする。このとき $(N, N \cap f(S^2))$ は $(N_i, N_i \cap f_i(S^2))$ に homeomorphic である ($i = 1, 2, 3, 4, 5$ または 6)。ここで f_i は次で紹介する例 i の immersion、 N_i は S^3 における singular set $S(f_i)$ の regular neighborhood とする。

Example 1. immersed disk でちょうど 3 重点を 1 コもつものを 2 つとる (この immersed disk は [CS1] にある例である)。これらを貼り合わせて得られた immersed 2-sphere が例 1 である。Figure 3 を見よ。

Figure 3

Example 2. 例 1 と似ているが immersed disk でちょうど 3 重点を 1 コもつものを 2 つとる。これらを貼り合わせて得られた immersed 2-sphere が例 2 である。Figure 4 を見よ。

Figure 4

Example 3. 3 つの 2-sphere の immersion で各 2-sphere は embedding でどの 2 つの 2-sphere をとっても singularity が 1 本の simple closed curve で 3 つの immersed 2-sphere はちょうど 2 コの 3 重点をもつとする。この immersed surface に 1-handle をつけて得られた immersed 2-sphere が例 3 である。Figure 5 を見よ。

Figure 5

Example 4. 2 つの 2-sphere の immersion で 1 つ目の 2-sphere は embedding で 2 つ目の 2-sphere は singularity が 1 本の simple closed curve もち その 2 つの 2-sphere からの immersed surface はちょうど 2 コの 3 重点をもつとする。この immersed surface に 1-handle をつけて得られた immersed 2-sphere が例 4 である。Figure 6 を見よ。

Figure 6

immersed surface の上の singular set を結ぶ arc をここでは Figure 7 のように arc に
 そってつけた 1-handle と同一視する。

Figure 7

Example 5. Example 3 で使った 3つの 2-sphere の immersion を使う。この immersed
 surface に arc にそって 1-handle をつけて得られた immersed 2-sphere が例 5 である。
 Figure 8 を見よ。

Figure 8

Example 6. Example 3 で使った 3つの 2-sphere の immersion を使う。singular set の
 2点とる。その 2点の regular neighborhood を除くと Figure 9 の絵を得る。その regular
 neighborhood の境界と immersion の共通部分は Hopf link の射影になる。そこで immersion
 に (Hopf link の射影) $\times I$ を Figure 9 のように張り付けて得られた immersed 2-sphere が例
 6 である。

Figure 9

immersion がいつも knotted surface の射影で得られるとは限らない。そこで次の定義
 がある。closed surface F から \mathbb{R}^3 への immersion が \mathbb{R}^4 への embedding に lift 出来ると
 は embedding $\tilde{f} : F \rightarrow \mathbb{R}^4$ が存在し $p \circ \tilde{f} = f$ を満たす。Carter 氏と Saito 氏によ
 り immersion が \mathbb{R}^4 への embedding に lift 出来るための必要十分条件が求められた。そ
 して embedding に lift しない例をたくさん構成した。上の例 1 から例 6 は全て \mathbb{R}^4 への
 embedding に lift 出来る。

Conjecture. F を S^4 内の knotted 2-sphere とする。 $p|_F$ は immersion、 $\Gamma(F^*)$ は 3 重点を
 高々 2 コもち、 $\Gamma(F^*)$ の全ての成分は 3 重点を含むとする。(Theorem 5 より $\Gamma(F^*)$ はちよ
 うど 3 重点を 2 コもち 連結になる) このとき F は trivial か？

REFERENCES

- [A] H. Aiso, *Crossing circle が 5 本以下である simply knotted sphere の分類について*, Master
 thesis, The University of Tokyo, 昭和 59 年度.
- [Ba] T. Banchoff, *Triple points and singularities of projections of smoothly immersed surfaces*, Proc.
 Amer. Math. Soc. **46** (1974), 402–406.
- [Bo] J. Boyle, *The turned torus knot in S^4* , J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), 239–249.

- [C] S. Carter, *How surfaces intersect in space*, Series on Knots and Everything, vol. 2, World Scientific Publishing Co., Inc. River Edge, NJ, 1995.
- [CS1] S. Carter and M. Saito, *Canceling branch points on projections of surfaces in 4-space*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 229–237.
- [CS2] ———, *Reidemeister Moves for Surface Isotopies and Their Interpretation As Moves to Movies*, J. Knot Theory Ramifications **2** (1993), 251–284.
- [CS3] ———, *A Seifert Algorithm for Knotted Surfaces*, preprint.
- [CS4] ———, *Surfaces in 3-Space That Do Not Lift to Embeddings in 4-Space*, preprint.
- [CS5] ———, *A diagrammatic theory of knotted surfaces*, Quantum topology, 91–115.
- [CS6] ———, *Normal Euler classes of knotted surfaces and triple points on projections*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 617–623.
- [Fu] T. Fujii, *Ribbon 2-knots \mathcal{O} branched cyclic covers \wr generalized braid*, Master thesis, The University of Tokyo, 昭和59年度.
- [Fr] Freedman, M. H., *The topology of four-dimensional manifolds*, J. Differential Geom. **17** (1982), 357–435.
- [G] C. A. Giller, *Towards a classical knots theory for surfaces in \mathbb{R}^4* , Illinois J. of Math. no. 4 **26** (1982), 591–631.
- [HN] T. Homma and T. Nagase, *On elementary deformation of maps of surfaces into 3-manifolds I*, Yokohama Math. J. **33** (1985), 103–119.
- [HK] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, Osaka J. Math. **16** (1979), 233–248.
- [K] A. Kawauchi, 結び目理論.
- [M1] Y. Marumoto, *On ribbon 2-knots of 1-Fusion*, Math. Sem. Notes, Kobe Univ.5 (1977), 59–68.
- [M2] ———, *Stable equivalence of ribbon presentations*, J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 241–251.
- [M3] ———, *Ribbon knots and invariants of theta-curves*, J. Knot Theory Ramifications **4** (1995), 481–491.
- [MU] Y. Marumoto, Y. Uchida and T. Yasuda, *Motions of trivial links and ribbon knots*, Michigan Math. J. **42** (1995), 463–477.
- [R1] D. Roseman, *Reidemeister-Type Moves for Surfaces in Four Dimensional Space*, preprint.
- [R2] ———, *Spinning knots about submanifolds; spinning knots about projections of knots*, Topology Appl. **31** (1995), 225–241.
- [Sc] M. Scharemann, *Smooth spheres in \mathbb{R}^4 with four critical points are standard*, Invent. Math. **79** (1985), 125–141.
- [S1] A. Shima, *An unknotting theorem for tori in S^4* , preprint.
- [S2] ———, *An unknotting theorem for tori in S^4 II*, Kobe J. Math. **13** (1996), 9–25.
- [S3] ———, *On simply knotted tori in S^4* , to appear in J. Math. Sci. Univ. Tokyo.
- [S4] ———, *On simply knotted tori in S^4 II*, Proceedings of Knots 96, 551–568.
- [S5] ———, *On singular sets of immersions of closed surfaces into 3-manifolds*, preprint.
- [S6] ———, *Immersions from the 2-sphere to the 3-sphere with only two triple points*, preprint.
- [S7] ———, *Knotted Klein bottles with only double points*, in preparation.
- [S8] ———, *Klein bottles in the 4-sphere whose singular set consists of disjoint three simple closed curves*, in preparation.
- [Su] S. Suzuki, *Knotting problems of 2-spheres in the 4-sphere*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **4**, 241–371.
- [T] M. Teragaito, *Symmetry-spun tori in the four-sphere*, Knots **90**, 163–171.
- [Y1] T. Yajima, *On the fundamental groups of knotted 2-manifolds in the 4-space*, Osaka Math. J. **13** (1962), 63–71.
- [Y2] ———, *On simply knotted spheres in \mathbb{R}^4* , Osaka J. Math. **1** (1964), 133–152.
- [Y3] T. Yamagawa, *On ribbon 2-knots. I. The 3-manifold bounded by the 2-knots*, Osaka J. Math. **6** (1969), 447–464.
- [Y4] ———, *On ribbon 2-knots. II. The second homotopy group of the complementary domain*, Osaka J. Math. **6** (1969), 45–474.

[Y5] S. Yamagata, 2次元結び目の射影になる写像に対する条件と例, *Master thesis, Hiroshima University* (1996).

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, 3-8-1 KOMABA MEGURO-KU TOKYO, 153, JAPAN

e-mail address: shima@ms513red.ms.u-tokyo.ac.jp

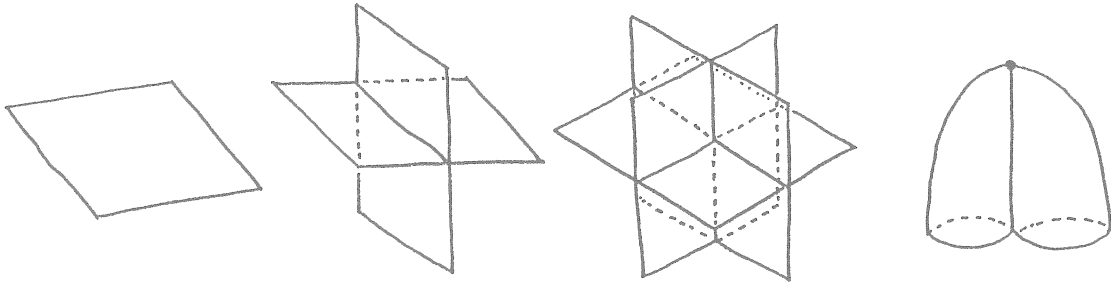


Figure 1

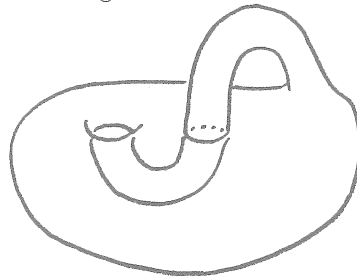


Figure 2

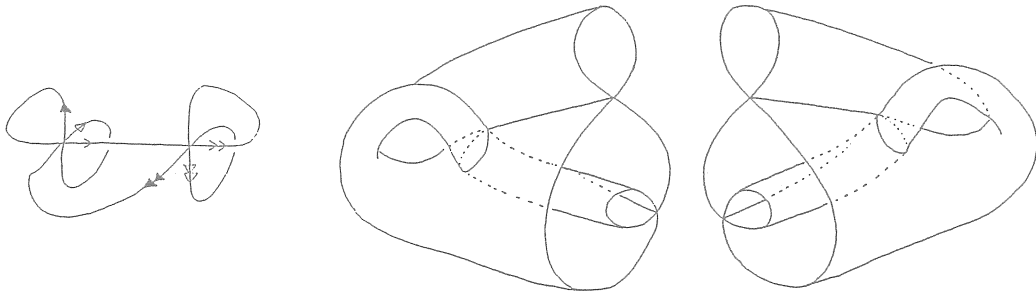
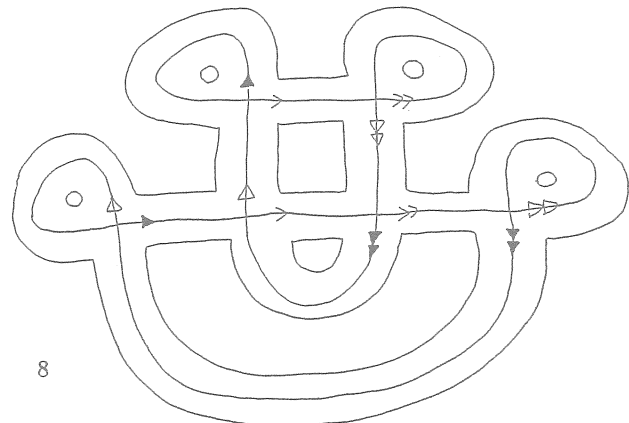


Figure 3



8

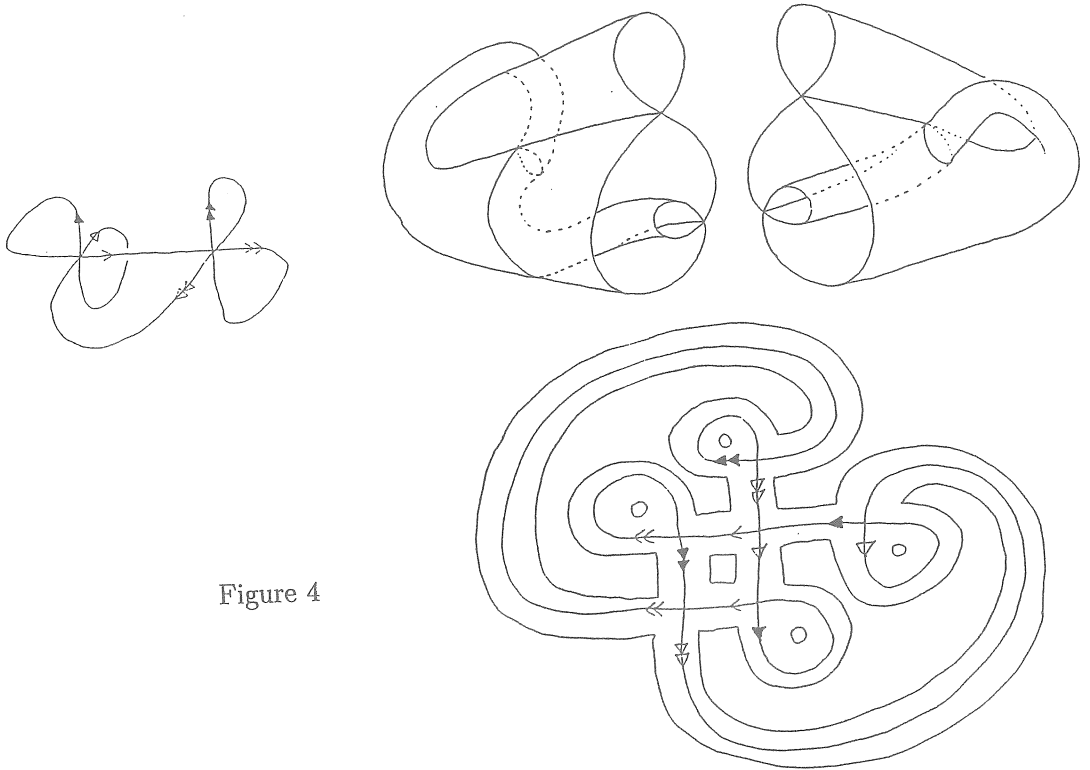


Figure 4

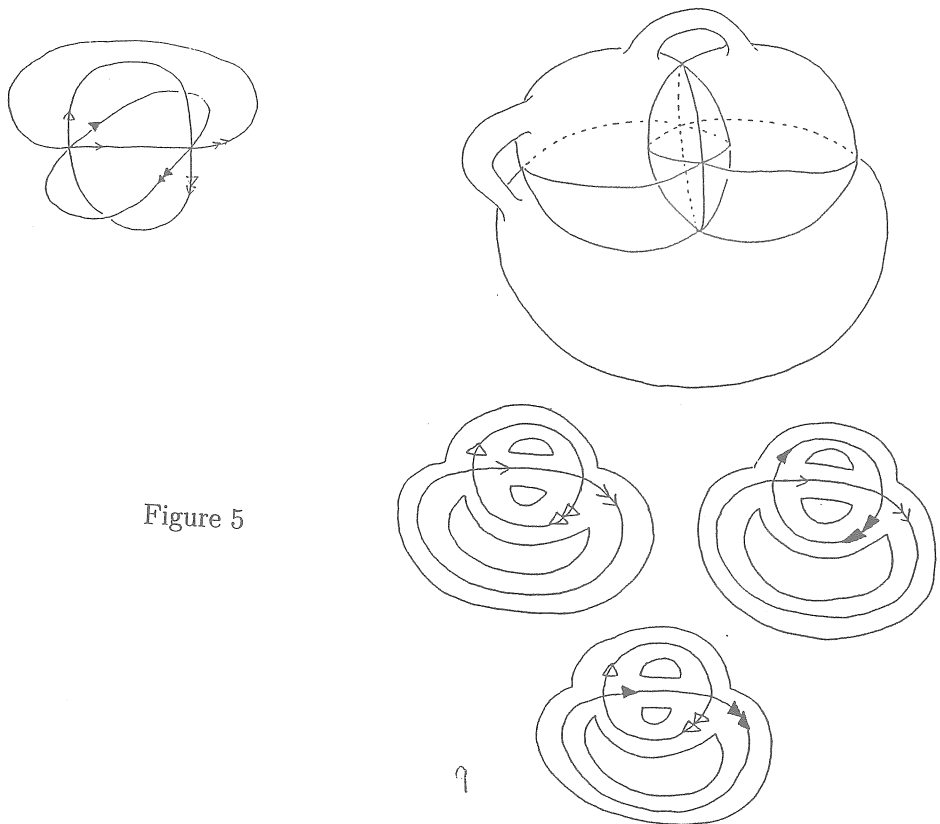


Figure 5

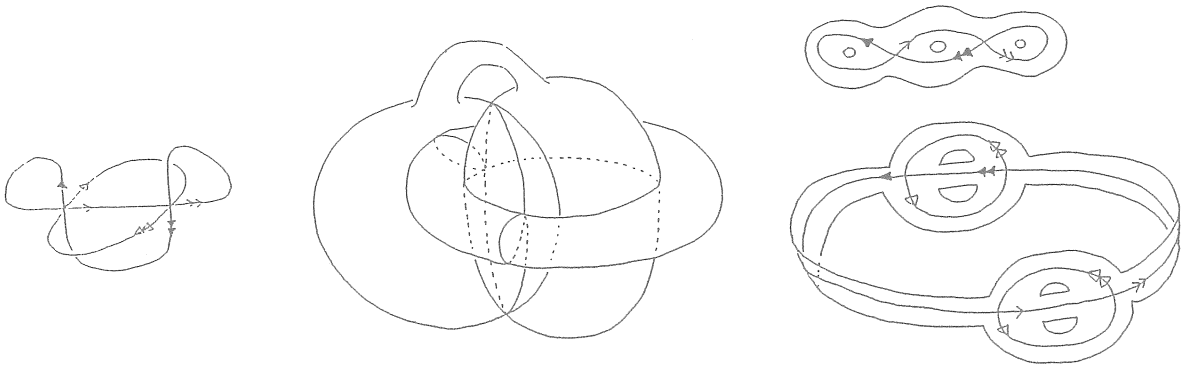


Figure 6

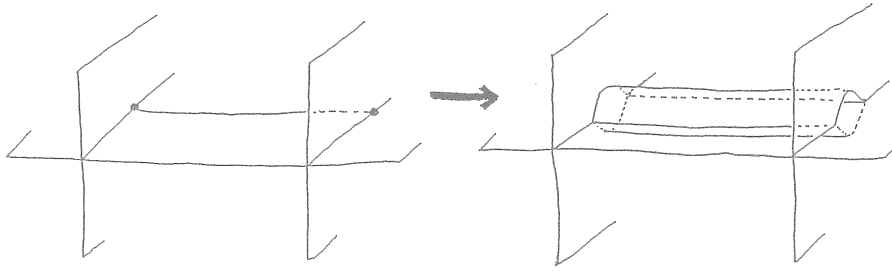


Figure 7

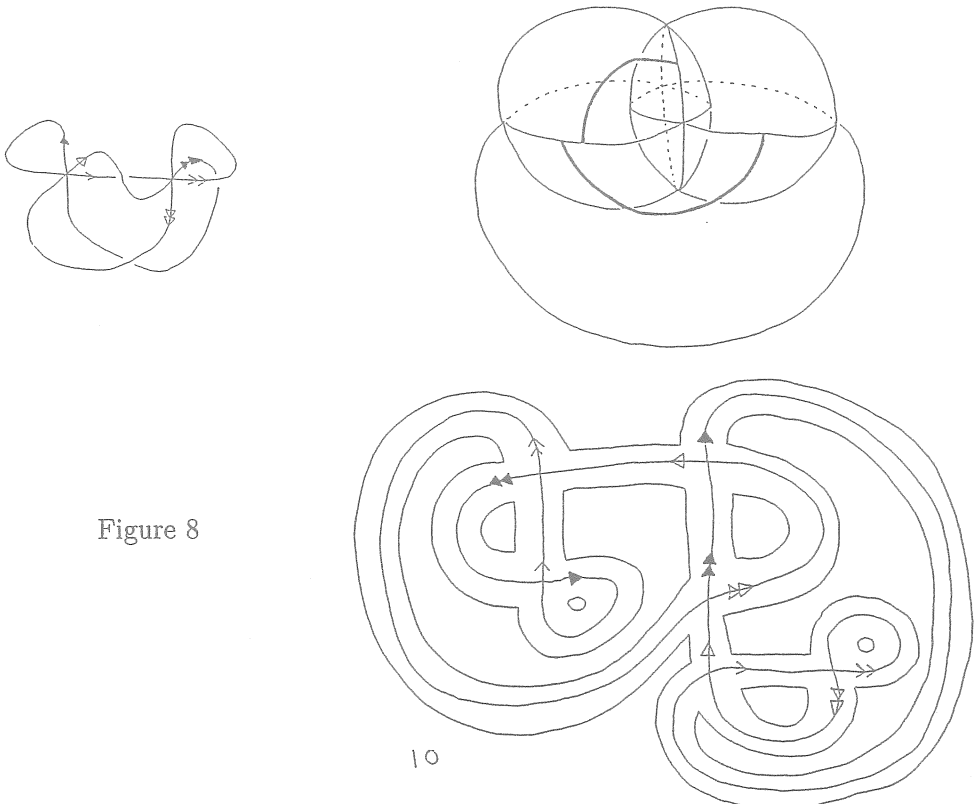


Figure 8

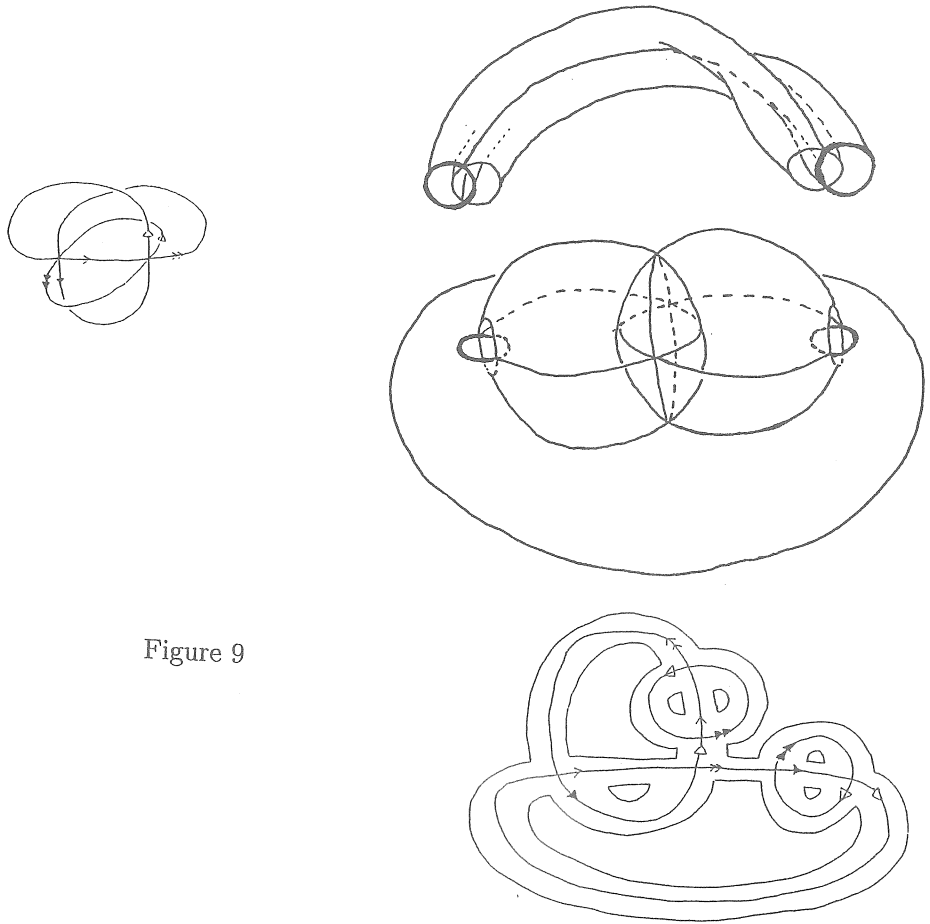


Figure 9

Vassiliev Invariants of Knots

金信泰造

大阪市立大学理学部

1997年6月10日

有理数に値をとる向きの付いた結び目の位相不変量を v とする。特異点が 2 重点だけで、特異点のは flat vertex graph として扱う特異結び目 (singular knot) の不変量を v を拡張して次のように定義する：

$$v(L_x) = v(L_+) - v(L_-) \quad (1)$$

ただし, L_x, L_+, L_- は 1 つの交点のまわりだけが Fig. 1 のように違う 3 つの結び目である。すべての $n+1$ 個の 2 重点をもつ特異結び目 K^n に対して,

$$v(K^{n+1}) = 0$$

となるとき, v を位数 n 以下の Vassiliev 不変量という。向きの付いた絡み目についても同様に定義できる。位数 n 以下の結び目の Vassiliev 不変量からなるベクトル空間を V_n とあらわす。 n 個の 2 重点をもつ特異結び目 K^n を S^1 の immersion とみると、一致する点をコードで結んだ図を位数 n のコード図という。 v が位数 n の Vassiliev 不変量ならば, $v(K^n)$ は, K^n のコード図にのみ依存する。ここでは, 結び目の多項式不変量から得られる Vassiliev 不変量を考察する。 §§1-3 については [1, 3, 4] を参照。

1. HOMFLY 多項式

絡み目 L の HOMFLY 多項式 $P(L; v, z) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ を次のように定義する。

$$\begin{aligned} v^{-1}P(L_+) - vP(L_-) &= zP(L_0) \\ P(U) &= 1 \end{aligned} \quad (2)$$

ただし, L_+, L_-, L_0 は一部分だけが Fig. 1 のように違う 3 つの絡み目, U は自明な結び目である。 (L_+, L_-, L_0) をスケイン 3 つ組とよぶ。

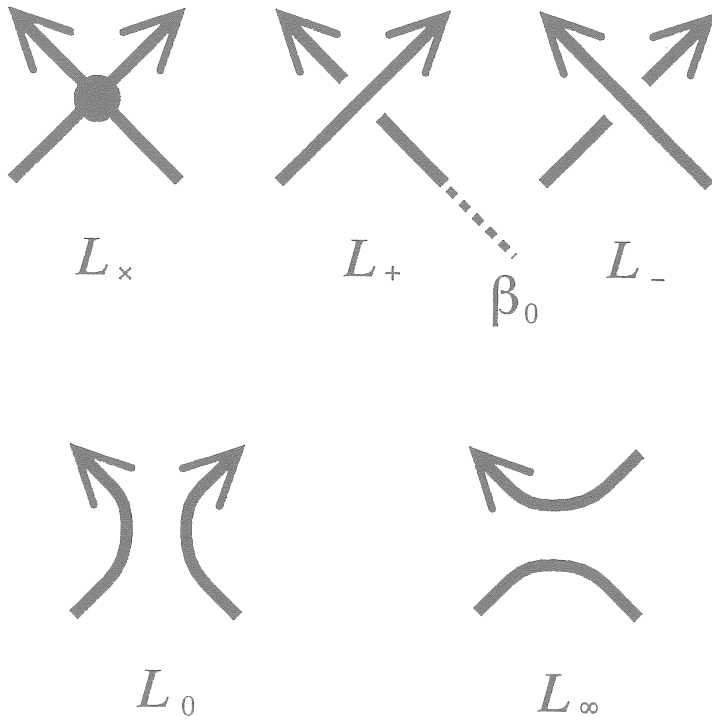


Fig. 1

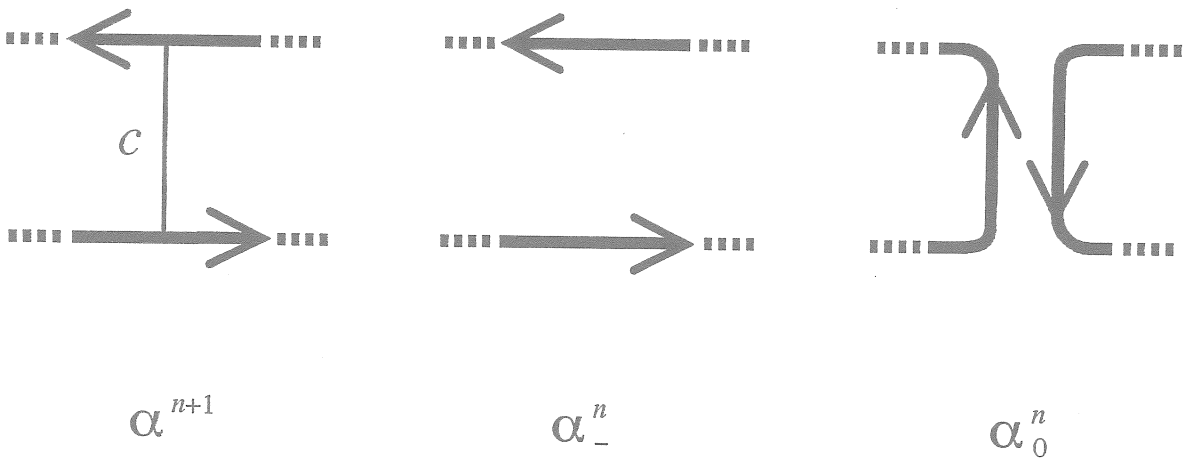


Fig. 2

結び目 K の HOMFLY 多項式 $P(K; v, z)$ は

$$P(K; t, z) = \sum_{i \geq 0} P_{2i}(K; t) z^{2i} \quad (3)$$

とかける。ただし, $P_{2i}(K; t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$.

Birman-Lin は, 適当に変数を変換した結び目の HOMFLY 多項式の Taylor 展開にあらわれる係数が Vassiliev 不変量になることを示している。上の定義では, $P_{2i}^{(k)}(K; 1)$ を $P_{2i}(K; t)$ の第 k 階導関数における $t = 1$ での値とすると

命題 1 $P_{2i}^{(k)}(K; 1)$ は位数 $2i + k$ 以下の Vassiliev 不変量である。

したがって, 各 n について $[n/2] + 1$ 個の位数 n 以下の Vassiliev 不変量がある。この集合を H_n とする:

$$H_n = \{P_{2i}^{(n-2i)}(K; 1) \mid i = 0, 1, \dots, [n/2]\} \subset V_n$$

$k + l = n + 1$ のときに, α^{n+1} , α_-^n , α_0^n を Fig. 2 のコード図とすると, (2) から

$$P_k^{(\ell)}(\alpha^{n+1}) = 2\ell P_k^{(\ell-1)}(\alpha_-^n) + P_{k-1}^{(\ell)}(\alpha_0^n) \quad (4)$$

したがって, HOMFLY 多項式からの Vassiliev 不変量の値は, つぎのコードのない r 個の円周 U^r の値に帰着される。

$$P_{2i-1-r}^{(r+1-2i)}(U^r; 1) = \begin{cases} (r-1)!(-2)^{r-1} & i = 1 \text{ のとき;} \\ 0 & i > 1 \text{ のとき.} \end{cases}$$

A_i^n , B_i^n ($n \geq 1$, $1 \leq i \leq n$) を, それぞれ, 1 個の円周, および, 2 個の円周の Fig. 3 の位数 n のコード図とする。

補題 1 $n = k + l$ とする。

(i)

$$P_k^{(\ell)}(A_i^n) = \begin{cases} (i-1)!2^{i-1} & \ell = i-1 \text{ のとき;} \\ -(i+1)!2^{i+1} & \ell = i+1 \text{ のとき;} \\ 0 & \text{上の場合以外.} \end{cases}$$

ただし, $k = 0, 2, \dots, 2[n/2]$.

(ii)

$$P_k^{(\ell)}(B_i^n) = \begin{cases} (i-1)!2^{i-1} & \ell = i-1 \text{ のとき;} \\ -(i+1)!2^{i+1} & \ell = i+1 \text{ のとき;} \\ 0 & \text{上の場合以外.} \end{cases}$$

ただし, $k = -1, 1, \dots, 2[(n+1)/2] - 1$.

また, H_n において次のような関係がある.

定理 1

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{1}{(n-2i)!2^{n-2i}} P_{2i}^{(n-2i)}(K; 1) \in V_{n-1}$$

以上から, 次がわかる.

定理 2 V_n/V_{n-1} において H_n のどの $\lfloor n/2 \rfloor$ 個も一次独立である.

絡み目 L の Conway 多項式 $\nabla_L(z) \in \mathbf{Z}[z]$ は

$$\nabla_L(z) = P(L; 1, z)$$

で与えられて,

$$\nabla_L(z) = \sum_{i=0}^N a_{r+2i-1}(L) z^{r+2i-1}$$

のかたちとなる. ただし, $a_{r+2i-1}(L) \in \mathbf{Z}$. 特に, $P_{r+2i-1}(L; 1) = a_{r+2i-1}(L)$ である.

命題 2 K を結び目とすると, $a_{2k}(K; 1)$ は位数 $2k$ の *Vassiliev* 不変量である.

絡み目 L の Jones 多項式 $V(L; t) \in \mathbf{Z}[t^{\pm 1/2}]$ は

$$V(L; t) = P(L; t, t^{1/2} - t^{-1/2})$$

で与えられる. Fig. 3 のコード図 $A_i^?$ を使うと次がわかる.

命題 3 K を結び目とすると, $V^{(k)}(K; 1)$ は位数 k の *Vassiliev* 不変量である.

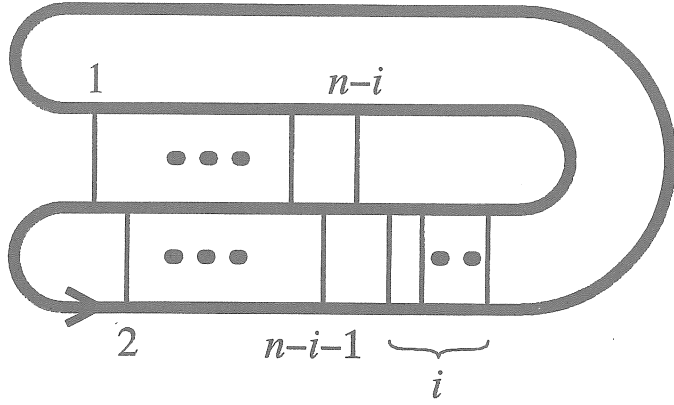
2. Kauffman 多項式

絡み目 L の Kauffman 多項式 $F(L; a, z) \in \mathbf{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ を次のように定義する.

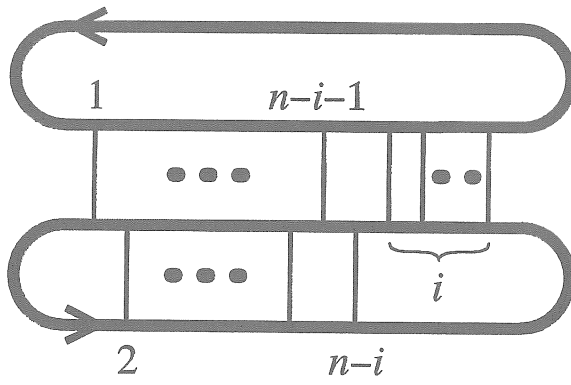
$$\begin{aligned} aF(L_+) + a^{-1}F(L_-) &= z[F(L_0) + a^{-2\nu}F(L_\infty)] \\ F(U) &= 1 \end{aligned} \tag{5}$$

ただし, L_+ , L_- , L_0 , L_∞ は, 1つの交点において Fig. 1 のように違う4つの絡み目, ν は弧 β とそれ以外の部分との間の代数的交点数.

結び目 K の Kauffman 多項式は $F(K; a, z) = \sum_{m \geq 0} F_m(K; a) z^m$ とかける. ただし, $F_m(K; a) \in \mathbf{Z}[a^{\pm 1}]$. HOMFLY 多項式のときと同様に, Birman-Lin は, 適当に変数を変換した結び目の Kauffman 多項式の Taylor 展開にあらわれる係数が *Vassiliev* 不変量になることを示している. 上の定義では, $F_m^{(k)}(K; i)$ を $F_m(K; a)$ の第 k 階導関数における $a = i = \sqrt{-1}$ での値とすると,



$$A_i^n$$



$$B_i^n$$

Fig. 3

命題 4 K を結び目とすると、 $i^{m+k} F_m^{(k)}(K; i)$ ($k > 0$) は位数 $m+k$ 以下の Vassiliev 不変量である。

また、0 次の係数多項式では $P_0(K; t) = F_0(K; it^{-1})$ という関係がある。さらに、位数 n の Vassiliev 不変量 $\{F_k^{(n-k)}(K; i) \mid k = 0, 1, 2, \dots, n-1\}$ において次のような関係がある。

定理 3

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-2)^k}{(n-k)!} F_k^{(n-k)}(K; \sqrt{-1}) \in V_{n-1}$$

3. 低い位数の結び目の Vassiliev 不変量

Bar-Natan は、次のような計算結果を得ている。

$$\begin{array}{c|cccccccc} n & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \dim V_n/V_{n-1} & 0 & 1 & 1 & 3 & 4 & 9 & 14 \end{array}$$

命題 1-4 をつかって、 V_{n+1}/V_n の基底を多項式不変量であらわす。

- $V_0 = V_1$ の基底は定値写像。
- V_2/V_1 の基底として $a_2(K)$ がとれる。これより、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} P_0^{(2)}(K; 1) &= -8a_2(K) \\ V_K^{(2)}(1) &= -6a_2(K) \quad (\text{村上斉}) \end{aligned}$$

- V_3/V_2 の基底として $P_0^{(3)}(K; 1)$ 、または $P_2^{(1)}(K; 1)$ がとれる。これより、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} P_2^{(1)}(K; 1) &= a_2(K) - \frac{1}{24} P_0^{(3)}(K; 1) \quad (\text{宮澤}) \\ V_K^{(3)}(1) &= \frac{3}{4} P_0^{(3)}(K; 1) \quad (\text{宮澤}) \end{aligned}$$

- V_4/V_3 の基底として $P_0^{(4)}(K; 1)$ 、 $P_2^{(2)}(K; 1)$ 、 $a_4(K)$ のうちの 2 つと $a_2(K)^2$ ；または、 $\{F_m^{(4-m)}(K; i) \mid m = 0, 1, 2, 3\}$ のうちの 3 つがとれる。これより、次の関係式が得られる。

$$\begin{aligned} P_2^{(2)}(K; 1) &= -\frac{1}{2} a_2(K) - \frac{1}{12} P_0^{(3)}(K; 1) - 8a_4(K) - \frac{1}{48} P_0^{(4)}(K; 1); \\ V_K^{(4)}(1) &= -6a_2(K) - 72a_4(K) + 18P_0^{(4)}(K; 1). \end{aligned}$$

- V_5/V_4 の基底として $\{F_m^{(5-m)}(K; i) \mid m = 0, 1, 2, 3, 4\}$ のうちの 4 つまたは、

$\{P_{2m}^{(5-2m)}(K;1) \mid m=0,1,2\}$ のうちの2つと $a_2(K)P_0^{(3)}(K;1)$,
 $\{F_m^{(5-m)}(K;i)/i \mid m=0,1,2,3,4\}$ のうちの1つが^sとれる。

例1 位数3以下の Vassiliev 不変量は Jones 多項式だけで決まるが^s, 位数4の Vassiliev 不変量は Jones 多項式だけでは決まらない。

10 交点の2本橋結び目 $S(49, -15)$ ($=10_{22}$) と $S(49, 27)$ ($=10_{35}$) は同じ Jones 多項式をもつが^s, $a_4(K)$, $P_2^{(2)}(K;1)$, $P_0^{(4)}(K;1)$ の値はすべて異なる。

例2 位数4以下の Vassiliev 不変量は Conway 多項式と Jones 多項式で決まるが^s, 位数5の Vassiliev 不変量は Conway 多項式と Jones 多項式だけでは決まらない。

K を [7, Example 19], の結び目とすると, K とその鏡像 $K!$ は同じ Jones 多項式をもつ (もちろん, Conway 多項式は同じ) が^s, $P_m^{(5-m)}(K;1)$ ($m=0,2,4$) の値はすべて異なる。

例3 位数5以下の Vassiliev 不変量は Kauffman 多項式だけで決まるが^s, HOMFLY 多項式だけでは決まらない。

14 交点の2本橋結び目 $S(297, 215)$ と $S(297, 233)$ は同じ HOMFLY 多項式をもつが^s, $F_m^{(5-m)}(K;i)$ ($m=1,2,3,4$) の値はすべて異なる。

例4 位数6の Vassiliev 不変量は Kauffman 多項式だけでは決まらない。

13 交点の2本橋結び目 $S(245, -103)$ と $S(245, 137)$ は同じ Kauffman 多項式をもつ (位数5以下の Vassiliev 不変量は同じ) が^s, $a_6(K)$ の値は異なる。

4. C 多項式と2次元リボン結び目

r 成分の絡み目 L の HOMFLY 多項式の係数多項式 $P_{2i-1-r}(L;t) \in \mathbb{Z}[v^{\pm 1}]$ にあらわれる t の次数は, r が奇数のときは偶数, r が偶数のときは奇数なので, $C(L;x) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$ を

$$C(L;t^{-2}) = t^{1-r} P_{1-r}(L;t)$$

で定義する。これを L の C 多項式とよぶ。スケイン3つ組 (L_+, L_-, L_0) に対して, L_+ , L_- が結び目, L_0 が2成分の絡み目のとき, (2) より

$$xC(L_+) - C(L_-) = C(L_0) \quad (6)$$

また, 2成分の絡み目 $K_1 \cup K_2$ に対して, $\lambda = \text{lk}(K_1, K_2)$ とおくと

$$C(K_1 \cup K_2) = (x-1)x^{-\lambda} C(K_1)C(K_2) \quad (7)$$

結び目 K について, $C(K;1) = 1$, $C'(K;1) = 0$ であるが^s, 逆に, 河内 [5] が次を示している。

命題 5 $f(x) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$ が $f(1) = 1$ と $f'(1) = 0$ をみたすとき, C 多項式が $f(x)$ の結び目解消数 1 の結び目 K が存在する: $C(K; x) = f(x)$.

藤井浩純は, 次のように改良した.

命題 6 $f(x) \in \mathbb{Z}[x^{\pm 1}]$ が $f(1) = 1$ と $f'(1) = 0$ をみたすとき, (i) C 多項式が $f(x)$, (ii) 結び目解消数が 1 の無限個の 2 本橋結び目が存在する.

σ, τ を Fig. 4 の 3 本組紐の生成元, α を 3 本組紐 $\tau^{2a_1}\sigma^{-2b_1}\tau^{2a_2}\sigma^{-2b_2} \dots \tau^{2a_n}\sigma^{-2b_n}$ とするとき, Fig. 4 の 2 本橋結び目を $D(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ であらわす. 例えば, Fig. 5 は $D(1, 2, -2, -1)$ である. さらに, 藤井は, 次の公式を与えた.

命題 7 2 本橋結び目 $D(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ の C 多項式 $C(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n; x)$ はつぎのようになる.

$$x^{-b_1-b_2-\dots-b_n}(1-x^{a_1}+x^{a_1+b_1}-x^{a_1+b_1+a_2}+x^{a_1+b_1+a_2+b_2}-\dots-x^{a_1+b_1+\dots+a_n}+x^{a_1+b_1+\dots+a_n+b_n})$$

自明な絡み目に 2 次元 1 ハンドルを m 本貼りつけて得られる 2 次元結び目を m -fusion の 2 次元リボン結び目という. Fig. 6 のリボン結び目を自然な切り口にもつ 1-fusion の 2 次元リボン結び目を $R(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ であらわす. ここで, S_k, T_k を Fig. 6 のタングル. 例えば, Fig. 7 は $R(1, 2, -2, -1)$ である. 命題 7 をみると, 1-fusion の 2 次元リボン結び目の Alexander 多項式に関する次の公式が思い出される.

命題 8 (cf. [8]) $R(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ の Alexander 多項式 $\Delta(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n; t)$ は次のようになる.

$$t^{-b_1-b_2-\dots-b_n}(1-t^{a_1}+t^{a_1+b_1}-t^{a_1+b_1+a_2}+t^{a_1+b_1+a_2+b_2}-\dots-t^{a_1+b_1+\dots+a_n}+t^{a_1+b_1+\dots+a_n+b_n})$$

2 本橋結び目から 1-fusion の 2 次元リボン結び目への対応:

$$D(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n) \mapsto R(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$$

は, 単射ではない ([10]) が, 多項式については,

$$C(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n; x) \doteq \Delta(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n; x)$$

と奇妙に一致する.

樹下 [6] は次のことを証明した.

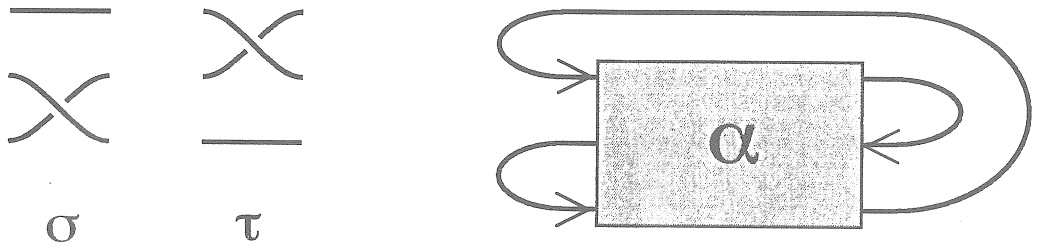


Fig. 4

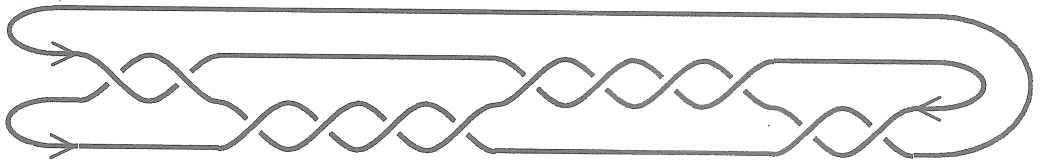


Fig. 5: $D(1, 2, -2, -1)$

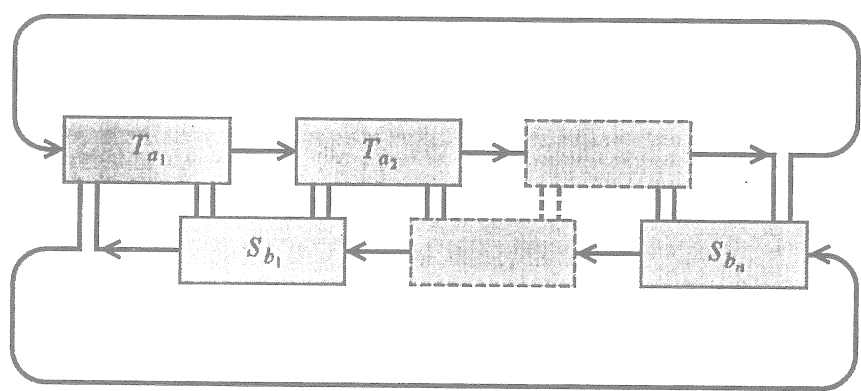
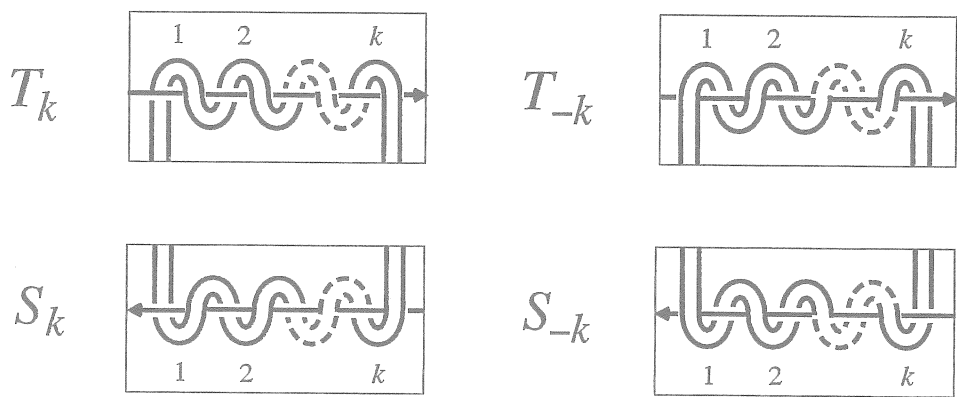


Fig. 6

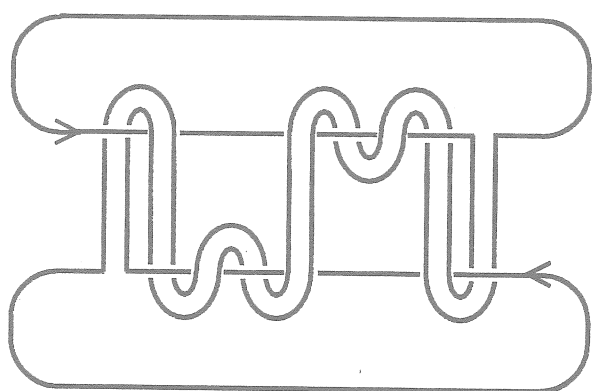


Fig. 7: $R(1, 2, -2, -1)$

命題 9 $f(1) = \pm 1$ を満たすローラン多項式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対して, $f(t)$ を Alexander 多項式にもつ 1-fusion の 2次元リボン結び目が存在する.

2次元リボン結び目の Alexander 多項式 $\Delta(t)$ は $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ の unit の $\pm t^k$ を除いて決まるが, $\Delta(1) = 1$ と $\Delta'(1) = 1$ という条件を付け加えると一意的に決まる. つまり, \mathbb{C} 多項式を 2本橋結び目で特徴付けた命題 6 は結び目解消数が 1 という条件を除くと, 命題 7 と 9 からすぐに導かれる.

$p(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3)$ で定義される射影 $p: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を考える. 2次元結び目 K に対し, $p(K)$ は \mathbb{R}^3 への immersion になるが, その特異点集合, すなわち, $\#\{x \in p(K) | p^{-1}(x) \cap K\} > 1$ を満たす点の集合が重複度 2 の有限個の円周からなるときに, K は simply knotted であるという. 2次元結び目 K がリボン結び目であるためには, K が simply knotted であることが必要十分である ([9]). そこで, 2次元リボン結び目を simply knotted sphere とみて, 1次元結び目のように, 射影図を使って考察する.

交差円周の第 4 座標 (高さ) の上下を適当に入れ替えると, 自明な結び目の射影図になる. 2次元リボン結び目の射影図において, このような結び目解消操作の最小数を, その射影図のリボン結び目解消数という. さらに, 2次元リボン結び目 R のすべての射影図を考えて, それらのリボン結び目解消数の最小数を R の結び目解消数といい, $u_r(R)$ であらわす. すると, 命題 6 の証明をみると次がわかる.

命題 10 $f(1) = \pm 1$ を満たすローラン多項式 $f(t) \in \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ に対して, $f(t)$ を Alexander 多項式にもつ リボン結び目解消数が 1 の 1-fusion の 2次元リボン結び目が存在する.

つまり, 2次元リボン結び目のリボン結び目解消数は Alexander 多項式では評価できない. また, 4次元球面内の 2次元結び目 K に 2次元 1 ハンドルをいくつか貼りつけると 4次元球面でハンドル体の境界となる自明な曲面になる. このような 1 ハンドルの個数の最小数を K の結び目解消数といい $u(K)$ であらわす (cf. [2]). 一般に, 2次元リボン結び目 K については $u(K) \leq u_r(K)$ がなりたつ.

2次元リボン結び目の Vassiliev 型不変量 (有限型不変量) を 1次元の結び目にならって定義する: v を有理数に値をとる 2次元リボン結び目の位相不変量とする. 2次元リボン結び目の k 個より多い交差円周をもつ射影図 D において $k+1$ 個の異なる交差円周からなる集合 C を選んだとき, C の部分集合 X に対して D_X を D の交差円周の上下を入れ替えて得られる射影図とする. このとき, v が

$$\sum_{X \subset C} (-1)^{\#X} v(D_X) = 0$$

をみたすとき，位数 k 以下の Vassiliev 型不変量（有限型不変量）と定義する。

命題 1 から， C 多項式についても $C^{(n)}(L; 1)$ は位数 n の Vassiliev 不変量である。

上の 2 本橋結び目と 1-fusion の 2 次元リボン結び目の対応をみると，2 次元リボン結び目の Alexander 多項式 $\Delta(t)$ を $\Delta(1) = 1$ ， $\Delta'(1) = 0$ をみたすように正規化すると $\Delta^{(n)}(1)$ は $R(a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n)$ のような射影図では，位数 n の Vassiliev 型不変量の条件をみたしているので，一般にも，Vassiliev 型不変量であろうと推測できるが，実際，正しい。

定理 4 2 次元リボン結び目の Alexander 多項式 $\Delta(t)$ を $\Delta(1) = 1$ ， $\Delta'(1) = 0$ をみたすように正規化すると $\Delta^{(n)}(1)$ は位数 n 以下の Vassiliev 型不変量になる。

参考文献

- [1] T. Kanenobu, *Kauffman polynomial as Vassiliev link invariants*. In Proc. of Knots 96 (S. Suzuki, ed.), World Sci. Pub. Co. (1997), pp. 411–431.
- [2] T. Kanenobu and Y. Marumoto, *Unknotting and fusion numbers of ribbon 2-knots*. To appear.
- [3] T. Kanenobu and Y. Miyazawa, *HOMFLY polynomial as Vassiliev link invariants*. To appear.
- [4] T. Kanenobu, Y. Miyazawa, and A. Tani, *Vassiliev link invariants of order three*. Preprint.
- [5] A. Kawauchi, *On coefficient polynomials of the skein polynomial of an oriented link*. Kobe J. Math. **11** (1994), 49–68.
- [6] S. Kinoshita, *On the Alexander polynomials of 2-spheres in a 4-sphere*. Ann. of Math. **74** (1961), 518–531.
- [7] W. B. R. Lickorish, and K. C. Millett, *A polynomial invariant of oriented links*. Topology **26** (1987), 107–141.
- [8] Y. Marumoto, *On ribbon 2-knots of 1-fusion*. Math. Sem. Notes, Kobe Univ. **5** (1977), 59–68.
- [9] T. Yajima, *On simply knotted spheres in \mathbb{R}^4* . Osaka J. Math. **1** (1964), 133–152.
- [10] T. Yasuda, *Ribbon knots with two ribbon types*. J. Knot Theory Ramifications **1** (1992), 477–482.

