

第 4 3 回
トポロジーシンポジウム
講演集

1 9 9 6 年 7 月

於 鳥取大学大学教育センター
鳥取県立県民文化会館

平成 8 年度科学研究費 基盤研究 (A)
課題番号 0 8 3 0 4 0 0 6

第 4 3 回
トポロジーシンポジウム
講演集

1 9 9 6 年 7 月

於 鳥取大学大学教育センター
鳥取県立県民文化会館

平成 8 年度科学研究費 基盤研究 (A)
課題番号 0 8 3 0 4 0 0 6

序

この講演集は1996年7月16日から19日までの4日間、鳥取大学および鳥取県立県民文化会館で開催される第43回トポロジーシンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。

その目的は参加者が講演をよりよく理解して、研究討論を行なうための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は

平成8年度科学研究費 基盤研究(A)
「位相幾何学の総合的研究」 (課題番号 08304006)

により作られたものであることを付記しておく。

1996年7月

基盤研究(A) 08304006
研究代表者 森田茂之

第43回トポロジーシンポジウム

世話人：下村 克巳（鳥取大教育）
河内 明夫（阪市大理）
福田 拓生（東工大理）

プログラム

7月16日（会場：鳥取県立県民文化会館）

15:00 ~ 16:00 内田吉昭（山形大理）
Unknotting operations

16:15 ~ 17:15 鳥巢伊知郎（阪大理）
The determination of the pairs of two-bridge knots or links
with Gordian distance one

7月17日（会場：鳥取県立県民文化会館）

10:00 ~ 11:00 谷川晴美（名大多元数理）
hyperbolic geometry, harmonic maps and CP^1 -structures on surfaces

11:15 ~ 12:15 神山靖彦（琉球大理）
Topology of equilateral polygon linkages

13:45 ~ 14:45 小笠英志（東大数理）
On the intersection of spheres in a sphere

15:00 ~ 16:00 岩本 豊（筑波大数学）
メンガー多様体の座標構造と位相変換群

16:15 ~ 17:15 森下和彦（足利工大共通）
On linear topological classification of certain function spaces

7月18日 (会場：鳥取大学大学教育センター)

10:00 ~ 11:00 大崎隆夫 (阪大理)
Digital Topology について

11:15 ~ 12:15 下村克巳 (鳥取大教育)
Chromatic の視点からみたホモトピー群について

13:45 ~ 14:45 塚田孝治 (北大理)
網状ラグランジアン写像とその安定性について (原稿なし)

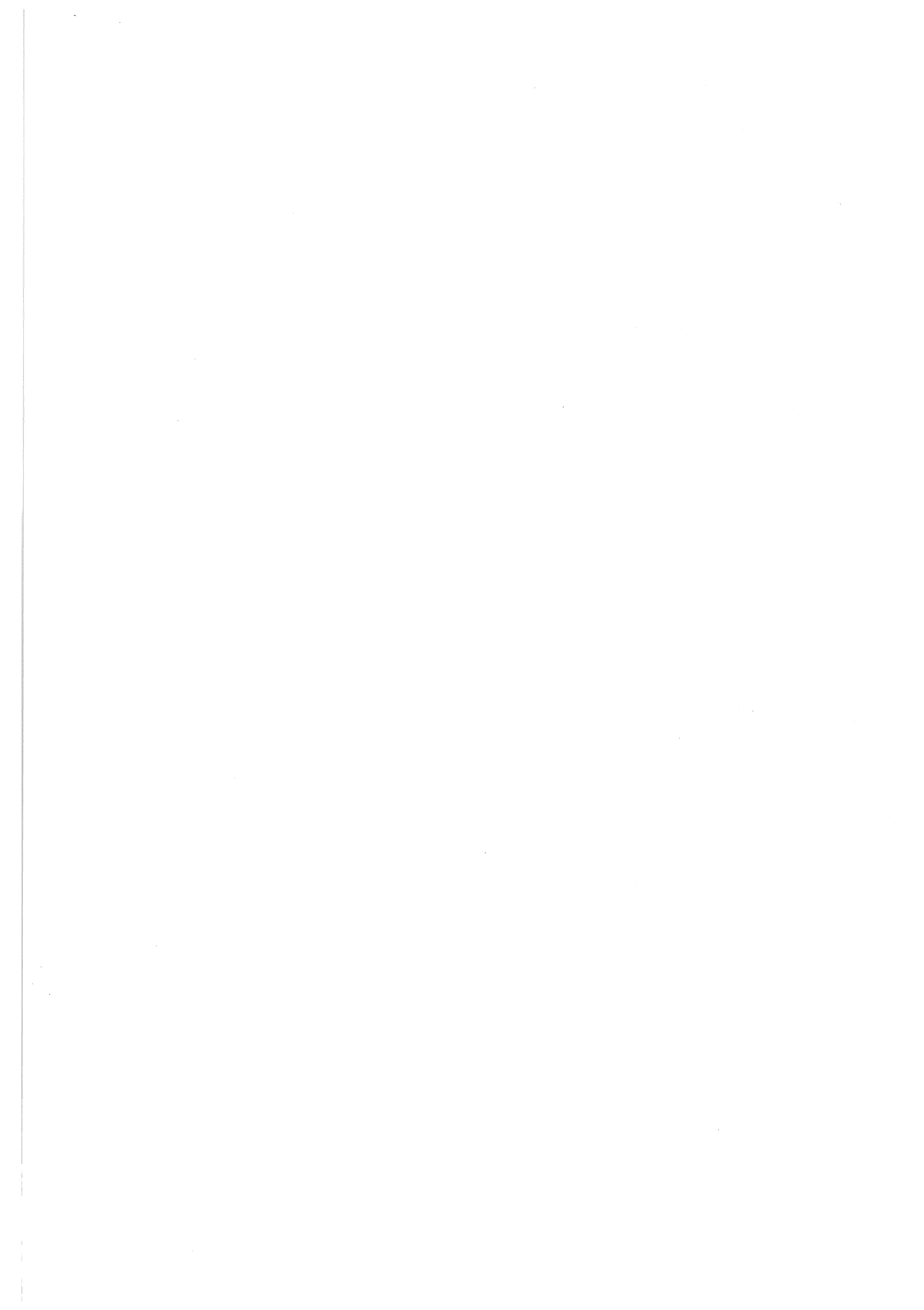
15:00 ~ 16:00 神田雄高 (北大理)
3次元接触多様体の Topology について

16:15 ~ 17:15 深谷賢治 (京大理)
アーノルド予想

7月19日 (会場：鳥取大学大学教育センター)

10:00 ~ 11:00 塩田昌弘 (名大多元数理)
Nash 多様体

11:15 ~ 12:15 吉田朋好 (名大多元数理)
rank 2 のテータ関数の構成



Unknotting operations

—結び目解消操作あれこれ—

内田 吉昭 山形大学 理学部

結び目の正則射影図で、交叉点の上下を入れ換えを有限回施すと結び目がほどけるのは、よく知られている。このように、有限回のある操作で結び目をほどくことができるものを結び目解消操作と呼ぼう。また、結び目をほどくために必要な操作数で、最小となるものを結び目解消数と呼ぶ。ここでは、X-型、 Δ -型、 n -gon move などの結び目解消操作を考える。特に結び目解消操作数について考察する。なお、結び目の一般的な用語は [河内] を参照されたい。

1 結び目解消操作

結び目の正則射影図において、次の操作をそれぞれ、X-型、 Δ -型、 n -gon move、結び目解消操作という。

Figure 1.

2つの結び目 k , k' に対して、 k から k' を得るのに必要な結び目解消操作の最小数を、その結び目解消操作の定める k と k' のゴルディアン距離という。上の各々の場合に対し $d_X(k, k')$, $d_\Delta(k, k')$, $d_n(k, k')$ であらわす。特に k と自明な結び目との距離を k の結び目解消操作数といい $u_X(k)$, $u_\Delta(k)$, $u_n(k)$ であらわす。

上の Figure 1 で結び目 k が S^3 内に埋め込まれているとし、各々の circle を ball とみなす事にする。左(右)側の ball を $B_1(B_2)$ とする。この時の unknotting operation は S^3 内で B_1 を B_2 に入れ換える操作とみなすことができる。今、 k の2つの unknotting operation u , u' を考える。 (B_1, B_2) を u に対応する ball pair, (B'_1, B'_2) を u' に対応する

ball pair としよう。この時, u と u' が同相とは, S^3 の同相写像 h が存在して, $h(k) = k$, $h(B_1) = B_2$, $h(B'_1) = B'_2$, また, おのこのの unknotting operation で得られた結び目も h でうつされること。

また, 上に上げたもの以外にも結び目解消操作となるものが沢山あります。

2 X -型 unknotting operation

通常 unknotting operation といえばこの操作をさす。一番古くから知られた操作の一つであり, 多く研究されてきた。しかし, 10-crossing 以下の結び目に対しても解消数がわかっていないものがある様に, まだまだわかっていないことが多い。

2つの結び目 k, k' について $d_X(k, k') \geq |\sigma(k) - \sigma(k')|/2$ が知られている。ここで, $\sigma(k)$ は k の signature である。

その他の評価では, 結び目解消数は Alexander 行列の最小次数以上であることなどがわかっている。

Torus knot $T(p, q)$ の unknotting number が $(p-1)(q-1)/2$ であることが知られている。(Δ -unknotting number は $(p^2-1)(q^2-1)/24$ であることを我々は示した。3章を参照されたい。) unknotting number が決定されているそれ以外の集合を筆者は残念ながら知らない。ただ, ある集合のうち unknotting number が 1 となるような集合はいくつか知られている。たとえば, two-bridge knot に対して, 金信-村上 [KM] が, また two-bridge link に対して P. Kohn が決定している。彼らの証明の方法は結び目上分岐する 3次元球面の 2重分岐被覆空間を考えて, 結び目解消操作を被覆空間上の Dehn surgery と見なすことで 3次元多様体の方から評価する手法である。さらに, 同様の手法により Montesinos knot の結び目解消数について茂手木 [Mo], 鳥巣が評価を与えている。

また, X -型 unknotting operation を拡張した操作について 4章で解説する。

結び目解消操作の同値類については, 小林 毅 [Kb1], Scharleman-Thompson [ST] が各々独自に non-trivial doubled knot について 1つであることを示した。また, unknotting number one two-bridge knot について谷山 [Ta] が高々 2つであることを示した。また, 任意

の自然数 n に対して同値類が n 以上である結び目の存在を中西が予想し、河内が Imitation Theory [Ka] を使って肯定的に示した。だが、 Δ -unknotting operation ではこの同値類では条件が強すぎて常に無限個出てくる事を見る。

3 Δ -unknotting operation

村上-中西により発見された operation。X-型とはかなり異なる性質を持つ。たとえば、結び目 (成分数が1) に対しては結び目解消操作だが、絡み目 (成分数が2以上) に対しては、解消操作にならない。(しかし、絡み数と同じ絡み目は互いに移すことができる。) 岡田 [O] により Δ -unknotting operation を結び目 (成分数1) のものに施すと Conway 多項式の2次の係数が ± 1 変化することが見つかった。この性質により Δ -unknotting number に対して、下からの評価を与えることができる。すなわち、 $a_2(k)$ を結び目 k の Conway 多項式の2次の係数とすると $u_\Delta(k) \geq |a_2(k)|$ となる。また、 Δ -unknotting operation は必ず knot type を変えることがわかる。(X-型では変えないときもある。) しかし、絡み目に関しては link type を変えないときもある。

Type (p, q) の torus knot $T(p, q)$ の Alexander 多項式は $(t^{pq} - 1)(t - 1) / ((t^p - 1)(t^q - 1))$ なので Conway 多項式の2次の係数は $(p^2 - 1)(q^2 - 1) / 24$ となることがわかる。我々は $(p^2 - 1)(q^2 - 1) / 24$ 回の Δ -unknotting operation でほどけることを示し、torus knot $T(p, q)$ の Δ -unknotting number が $(p^2 - 1)(q^2 - 1) / 24$ となることを示した。

解き方は講演で話す予定です。また、詳しい証明などは [NNU] を見られたい。

また positive 3-braide, positive pretzel knot (knot が positive とは各 crossing が positive となっていること。) に対して Δ -unknotting number は Conway 多項式の2次の係数の絶対値に等しくなることを示した。中村 一路による 10-crossing までの knot の Δ -unknotting number の表を貼付しておく。この表の中で $M = 3$ または 5 , $N = 2$ または 4 である。

X-型 unknotting number one の結び目は prime であることが知られている。しかし、 Δ -unknotting number one の結び目は prime かどうかわかっていない。prime であろうと予想されている。しかし、 Δ -unknotting operation とよく似ている 3-gon move では

prime とならない例が知られている。次は、メキシコ自治大学の Mario Euvave-Muñoz による。また、Figure 2 の中で ζ は上下に耳をつけると trivial tangle になるタングルである。

Figure 2

また、予想として two-bridge knot で Δ -unknotting number one となるものは次の形である。

$$C(a, a_1, a_2, \dots, a_n, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -a_n, \dots, -a_2, -a_1).$$

また、結び目解消操作の同値類では次のことを示した。 Δ -unknotting number one である任意の結び目に対して同値類は、無限個ある。これは、次の Figure からわかるように一つ Δ -unknotting operation を行うところがあれば同相でないものを作り出す事ができるからである。

Figure 3

したがって、上の操作で得られるものは同値だとみなすのが一般的であろう。さらに、強い予想として、 Δ -unknotting number one knot に対してある自然数 n が存在してどのような結び目に対しても同値類の個数は n 以下である。

4 b/a -unknotting operation

3章で Δ -unknotting number one となる two-bridge knot の type を予想した。ここでは、その他の操作に関して unknotting number one となる two-bridge knot を求めてみよう。X-型 unknotting operation を2本の trivial tangle を $1/2$ の Conway tangle に置き換える操作とみなす。これを拡張して、2本の trivial tangle を $\pm b/a$ の Conway tangle と置き換える操作を考える。

Figure 4

これを便宜上 b/a -unknotting operation と呼ぶ。ここで、注意して欲しいのは、どのような b/a のときに unknotting operation になるか解っていないことである。また、時には trivial knot が得られなくて trivial link になることもある。しかし、 $1/2$, $1/3$, $1/4$, $2/5$ は two-bridge knot を trivial knot または trivial link (このときの成分数は2。) にうつすことが解っている。この時、金信-村上 [KM] の議論を詳細に見ることにより次の定理を示すことができた。(ここでの議論も 2 重被覆空間を考えて結び目解消操作を多様体上の Dehn surgery と見なす事で評価を与えている。)

定理 b/a -unknotting number one の two-bridge knot は

1. $b = 1$ であつ two-bridge knot は $C(a, a_1, a_2, \dots, a_k, \pm a, -a_k, \dots, -a_2, -a_1)$ または,
2. two-bridge knot in Figure 5.

Figure 5

Note. P. Kohn は $1/2$ -unknotting number one の two bridge link を決定している。これは、 $C(a_1, \dots, a_n, \pm 2, -a_n, \dots, -a_1)$ で特徴づけられる。

今までの、予想として $1/3$, $1/4$ -unknotting operation はすべての結び目に対して unknotting operation だと考えられてきたが、最近では unknotting operation ではないとの見方がでてきた。中西は Borromean rings の double (parallel), trefoil の untwisted doubled knot は各々 $1/3$, $1/4$ で解けないであろうと予想している。また、 $2/5$ は unknotting operation かもしれない。

参考文献

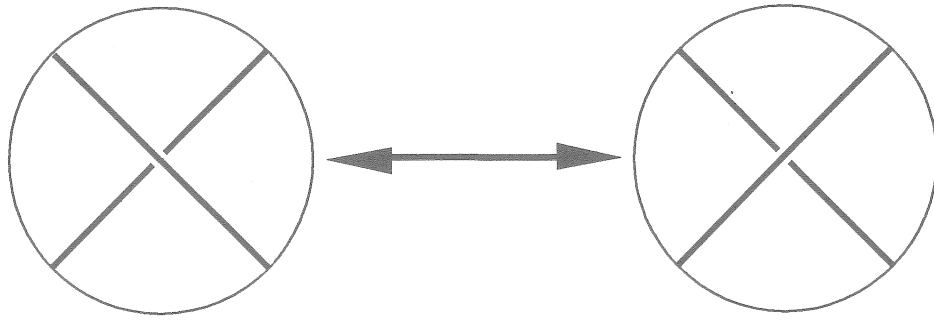
[Ai] H. Aida *Unknotting operations of polygonal type*, Tokyo J. Math., **15** (1992) 111-121.

- [Bl] S. A. Bleiler *A note on unknotting number* Math. Proc. Cambridge Phils. Soc. **96** (1984) 469 – 471
- [FMS] S. Fukuhara, Y. Matsumoto, and O. Saeki *An estimation for the unknotting numbers of torus knots*, Topology and its Appl. **38** (1991) 293 – 299
- [KM] T. Kanenobu and H. Murakami *Two-bridge knots with unknotting number one*, Proc. Amer. Math. Soc. **98** (1986) 499 – 502
- [河内] A. Kawauchi (ed.) *結び目理論* Springer-Tokyo (1990)
- [Ka] A. Kawauchi *A survey of topological invariants of $(3,1)$ -dimensional manifold pairs*, The 3rd Korea-Japan School of knots and links (Taejon, 1994), pp43 – 52, Proc. Applied Math. Workshop, 4, KAIST, Taejon Korea.
- [Kb1] T. Kobayashi *Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots*, Kobe J. Math. **6** (1989) 53 – 62
- [Kb2] T. Kobayashi *Generalized unknotting operations and tangle decompositions*, Proc. Amer. Math. Soc. **105** (1989) 471 – 478
- [Kb3] T. Kobayashi *Fibered links and unknotting operations*, Osaka J. Math. **26** (1989) 699 – 742
- [Kh1] P. Kohn *Two-bridge links with unlinking number one*, Proc. Amer. Math. Soc. **113** (1991) 1135 – 1147
- [Kh2] P. Kohn *Unknotting two component link*, preprint
- [L] W. B. R. Lickorish *The unknotting number of a classical knot*, Contemp. Math. **44** (1985) 117 – 121
- [Mo] K. Motegi *A note on unlinking numbers on Montesinos Links*, preprint

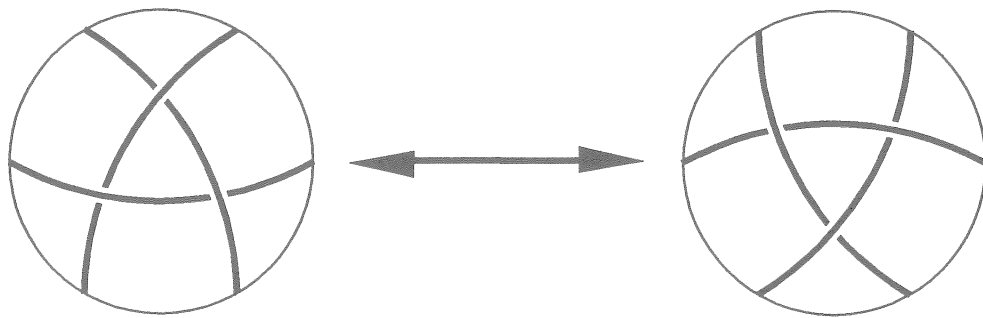
- [Mu] K. Murasugi *On a certain numerical invariant of link types*, Trans. Amer. Math. Soc. **117** (1965) 387 – 422
- [Mr] H. Murakami *Algebraic unknotting operation* Q & A in General Topology **8** (1990) 283 – 292
- [NNU] K. Nakamura. Y. Nakanishi and Y. Uchida *Delta-unknotting number for knot*, preprint
- [N1] Y. Nakanishi *Alexander invariants of links*, Master Thesis (1980)
- [N2] Y. Nakanishi *A note on unknotting number*, Math. Seminar Notes Kobe Univ. **9** (1981) 99 – 108
- [N3] Y. Nakanishi *Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings*, Math. Seminar Notes Kobe Univ. **11** (1983) 257 – 258
- [O] M. Okada *Delta-unknotting operation and the second coefficient of the Conway polynomial*, J. Math. Soc. Japan, **42** (1990) 713 – 717.
- [Sa] T. Sakai *A remark on the Alexander polynomials of knots*, Math. Seminar Notes Kobe Univ. **5** (1977) 451 – 456
- [Sc1] M. Scharlemann *Unknotting number one knots are prime*, Invent. Math. **82** (1985) 37 – 56
- [ST] M. Scharlemann and A. Thompson *Link genus and the Conway moves*, Math. Helv. **64** 527 – 535.
- [Ta] K. Taniyama *On unknotting operations of two-bridge knots*, Math. Ann. **291** (1991) 579 – 589.

K	Δ	K	Δ	K	Δ	K	Δ	K	Δ
3 ₁	1	9 ₁₆	6	10 ₁₇	2	10 ₆₇	2	10 ₁₁₇	2
4 ₁	1	9 ₁₇	2	10 ₁₈	2	10 ₆₈	2	10 ₁₁₈	2
5 ₁	3	9 ₁₈	6	10 ₁₉	1	10 ₆₉	2	10 ₁₁₉	1
5 ₂	2	9 ₁₉	2	10 ₂₀	3	10 ₇₀	3	10 ₁₂₀	6
6 ₁	2	9 ₂₀	2	10 ₂₁	3	10 ₇₁	1	10 ₁₂₁	1
6 ₂	1	9 ₂₁	3	10 ₂₂	4	10 ₇₂	M	10 ₁₂₂	2
6 ₃	1	9 ₂₂	1	10 ₂₃	3	10 ₇₃	1	10 ₁₂₃	2
7 ₁	6	9 ₂₃	5	10 ₂₄	2	10 ₇₄	2	10 ₁₂₄	8
7 ₂	3	9 ₂₄	1	10 ₂₅	2	10 ₇₅	2	10 ₁₂₅	3
7 ₃	5	9 ₂₅	2	10 ₂₆	3	10 ₇₆	M	10 ₁₂₆	5
7 ₄	4	9 ₂₆	2	10 ₂₇	2	10 ₇₇	4	10 ₁₂₇	3
7 ₅	4	9 ₂₇	2	10 ₂₈	3	10 ₇₈	3	10 ₁₂₈	7
7 ₆	1	9 ₂₈	1	10 ₂₉	4	10 ₇₉	5	10 ₁₂₉	2
7 ₇	1	9 ₂₉	1	10 ₃₀	N	10 ₈₀	6	10 ₁₃₀	4
8 ₁	3	9 ₃₀	1	10 ₃₁	2	10 ₈₁	3	10 ₁₃₁	2
8 ₂	2	9 ₃₁	2	10 ₃₂	1	10 ₈₂	2	10 ₁₃₂	3
8 ₃	4	9 ₃₂	1	10 ₃₃	2	10 ₈₃	1	10 ₁₃₃	N
8 ₄	3	9 ₃₃	1	10 ₃₄	3	10 ₈₄	2	10 ₁₃₄	6
8 ₅	3	9 ₃₄	1	10 ₃₅	4	10 ₈₅	2	10 ₁₃₅	3
8 ₆	2	9 ₃₅	7	10 ₃₆	N	10 ₈₆	1	10 ₁₃₆	2
8 ₇	2	9 ₃₆	3	10 ₃₇	3	10 ₈₇	2	10 ₁₃₇	2
8 ₈	2	9 ₃₇	3	10 ₃₈	N	10 ₈₈	1	10 ₁₃₈	3
8 ₉	2	9 ₃₈	6	10 ₃₉	3	10 ₈₉	1	10 ₁₃₉	9
8 ₁₀	3	9 ₃₉	2	10 ₄₀	3	10 ₉₀	3	10 ₁₄₀	2
8 ₁₁	1	9 ₄₀	1	10 ₄₁	2	10 ₉₁	2	10 ₁₄₁	1
8 ₁₂	3	9 ₄₁	2	10 ₄₂	2	10 ₉₂	M	10 ₁₄₂	8
8 ₁₃	1	9 ₄₂	2	10 ₄₃	2	10 ₉₃	N	10 ₁₄₃	3
8 ₁₄	2	9 ₄₃	3	10 ₄₄	2	10 ₉₄	2	10 ₁₄₄	2
8 ₁₅	4	9 ₄₄	2	10 ₄₅	2	10 ₉₅	3	10 ₁₄₅	5
8 ₁₆	1	9 ₄₅	2	10 ₄₆	4	10 ₉₆	3	10 ₁₄₆	2
8 ₁₇	1	9 ₄₆	2	10 ₄₇	6	10 ₉₇	M	10 ₁₄₇	1
8 ₁₈	1	9 ₄₇	1	10 ₄₈	4	10 ₉₈	M	10 ₁₄₈	4
8 ₁₉	5	9 ₄₈	3	10 ₄₉	7	10 ₉₉	4	10 ₁₄₉	M
8 ₂₀	2	9 ₄₉	6	10 ₅₀	3	10 ₁₀₀	4	10 ₁₅₀	3
8 ₂₁	2	10 ₁	4	10 ₅₁	5	10 ₁₀₁	7	10 ₁₅₁	3
9 ₁	10	10 ₂	4	10 ₅₂	3	10 ₁₀₂	2	10 ₁₅₂	7
9 ₂	4	10 ₃	6	10 ₅₃	6	10 ₁₀₃	3	10 ₁₅₃	4
9 ₃	9	10 ₄	5	10 ₅₄	4	10 ₁₀₄	1	10 ₁₅₄	5
9 ₄	7	10 ₅	4	10 ₅₅	5	10 ₁₀₅	1	10 ₁₅₅	2
9 ₅	6	10 ₆	3	10 ₅₆	M	10 ₁₀₆	1	10 ₁₅₆	1
9 ₆	7	10 ₇	1	10 ₅₇	4	10 ₁₀₇	1	10 ₁₅₇	4
9 ₇	5	10 ₈	3	10 ₅₈	4	10 ₁₀₈	2	10 ₁₅₈	3
9 ₈	2	10 ₉	2	10 ₅₉	1	10 ₁₀₉	3	10 ₁₅₉	2
9 ₉	8	10 ₁₀	1	10 ₆₀	1	10 ₁₁₀	3	10 ₁₆₀	3
9 ₁₀	8	10 ₁₁	5	10 ₆₁	4	10 ₁₁₁	3	10 ₁₆₁	7
9 ₁₁	4	10 ₁₂	4	10 ₆₂	5	10 ₁₁₂	2	10 ₁₆₂	7
9 ₁₂	1	10 ₁₃	5	10 ₆₃	6	10 ₁₁₃	2	10 ₁₆₃	3
9 ₁₃	7	10 ₁₄	M	10 ₆₄	3	10 ₁₁₄	1	10 ₁₆₄	1
9 ₁₄	1	10 ₁₅	3	10 ₆₅	4	10 ₁₁₅	1	10 ₁₆₅	1
9 ₁₅	2	10 ₁₆	4	10 ₆₆	7	10 ₁₁₆	2	10 ₁₆₆	M

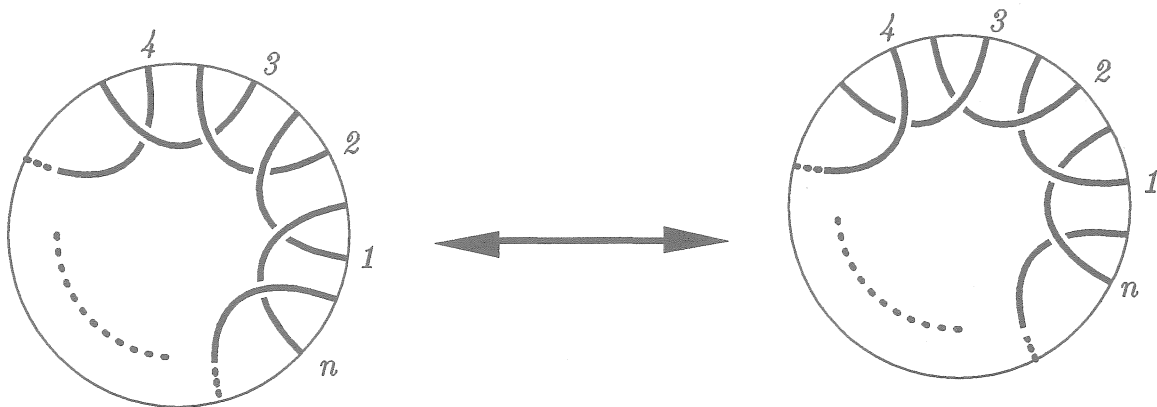
$M = 3$ or 5 , $N = 2$ or 4



X-型

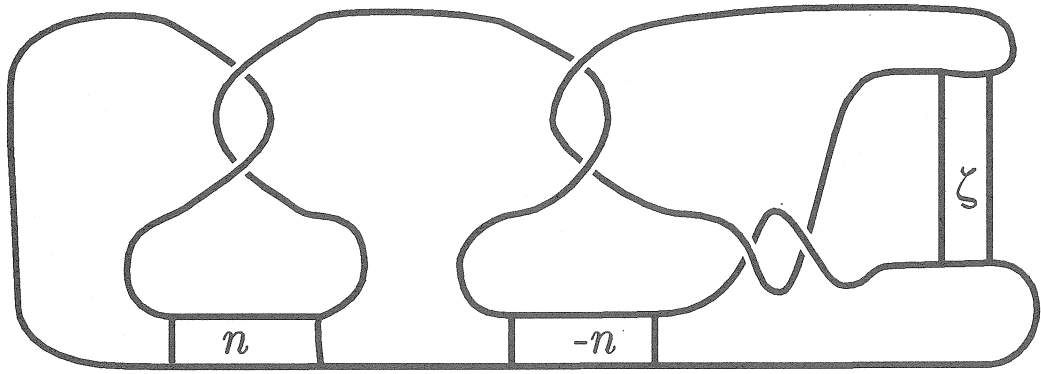


Δ -型



n-gon move

Figure 1



$$\text{I} \begin{array}{c} | \\ n \\ | \end{array} \text{I} = \underbrace{\text{X} \cdots \text{X}}_n$$

Figure 2



Figure 3

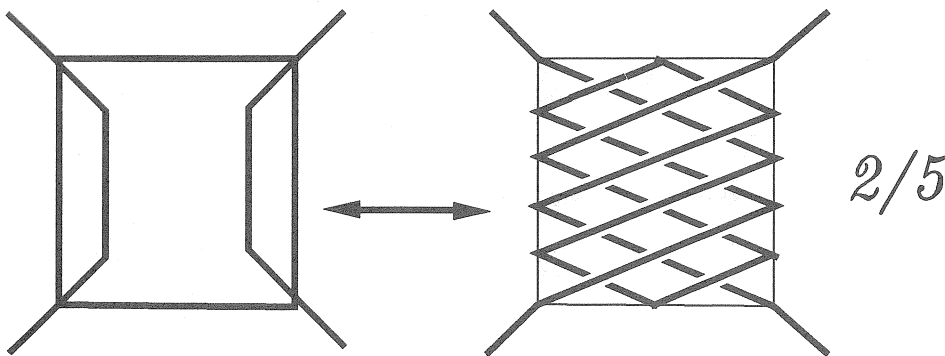


Figure 4

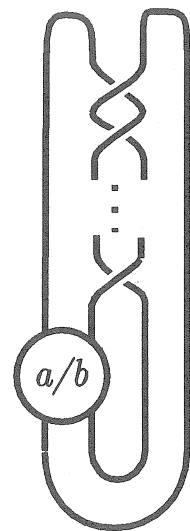


Figure 5

The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one

鳥巢 伊知郎

大阪大 理

E-mail:torisu@math.sci.osaka-u.ac.jp

1 Introduction

本講演では三次元球面内の結び目 (S^3, K) の結び目解消操作について得られた結果を報告する。ここで結び目解消操作とは結び目のある正則射影図のある交差点の上下を入れ換えることである。



一般に全ての結び目は有限回のこの操作で移り合うことが知られている。他方、三葉結び目と8の字結び目は結び目解消操作一回では移り合わないことも知られている ([12])。



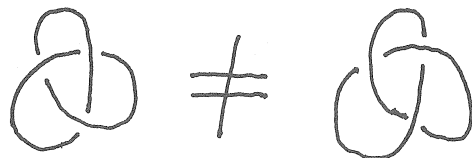
二つの結び目 K と K' の間の **Gordian distance** を一方から他方に移るのに必要な結び目解消操作の最小数で定義し、記号 $d_G(K, K')$ で表す。例えば $d_G(\text{三葉結び目}, \text{8の字結び目}) = 2$ である。



$u(K) = d_G(K, \text{自明な結び目})$ は K の結び目解消数と呼ばれているが、結び目解消数の決定は結び目理論の中心テーマの一つである ([6],[7],[10])。

講演者は Gordian distance が 1 になる 2 橋結び目 (絡み目) の対を完全に決定した。前半でこの主定理について解説する。後半では Montesinos 結び目 (絡み目) の結び目解消数に

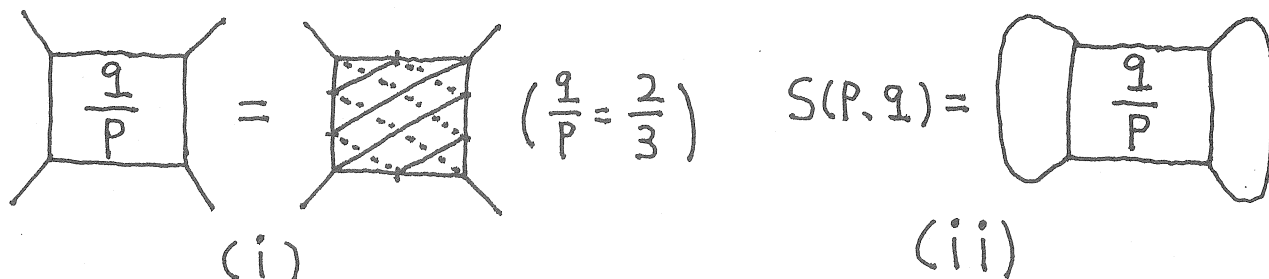
ついて調べる。尚、本講演では2つの結び目 (S^3, K) (S^3, K') が同値であるとは S^3 の向きを保存する同相写像で K を K' に写すものが存在するときとする。



2 Main theorem

定義:(i) r を有理数あるいは $1/0$ とする。その時 slope r の有理タングルとは、裏表のある正方形の上に角の4つの頂点から傾き r の arc を描いていったものから得られるタングルをいう。

(ii) $p, q (p \geq 0)$ を互いに素な整数とする。その時 2 橋結び目 (絡み目) $S(p, q)$ とは、slope q/p の有理タングルに下図のように“橋”を横に2つ架けて得られる結び目をいう。



注意: (i) $S(p, q)$ は p が奇数ならば結び目 (1-component) で偶数ならば絡み目 (2-component) である。

(ii) $S(p, q)$ の 2 重分岐被覆空間はレンズ空間 $L(p, q)$ である。

(iii) $S(p, q)$ と $S(r, s)$ が同値である必要十分条件は、

a) $p = r$ かつ $q \equiv s \pmod{p}$

b) $p = r$ かつ $qs \equiv 1 \pmod{p}$

のどちらかが成り立つことである。

2 橋結び目 (絡み目) に関しては 金信-村上 及び Kohn により次の結果が得られている。

定理 (金信-村上 [5]): $S(p, q)$ を 2 橋結び目とする。そのとき、

$u(S(p, q)) = 1 \Leftrightarrow$ ある 0 でない互いに素な整数 m, n が存在して $S(p, q)$ は $S(2mn \pm 1, 2n^2)$ と同値。

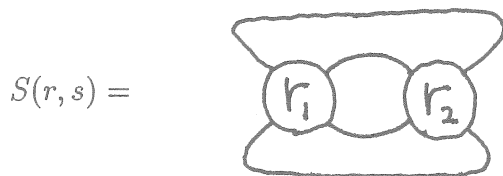
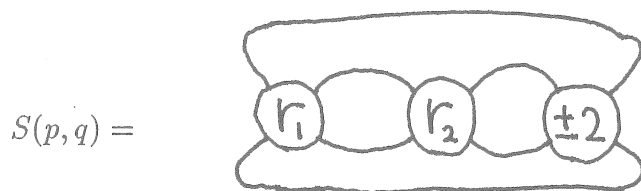
定理 (Kohn [8]): $S(p, q)$ を 2 橋絡み目とする。そのとき、
 $u(S(p, q)) = 1 \Leftrightarrow$ ある 0 でない互いに素な整数 m, n が存在して $S(p, q)$ は $S(2n^2, 2mn \pm 1)$ と同値。

この二つの定理を一般化して次の定理を得た。

主定理: $S(p, q), S(r, s)$ に対して次の 3 つの条件は同値である

(i) $d_G(S(p, q), S(r, s)) = 1$

(ii) ある有理数 r_1, r_2 が存在して、



と書ける。ここで  は slope r_i の有理タンゲル、

特に  =  あるいは  。

(iii) 整数 a, b, m, n が存在して、 a と b は互いに素、 m と n は互いに素、 n と $rm + an$ は 0 でなく $rb - as = 1$, $S(p, q)$ は $S(2an^2 + r(2mn \pm 1), 2bn^2 + s(2mn \pm 1))$ と同値。

実際に与えられた二つの 2 橋結び目 (絡み目) が、結び目解消操作 1 回で移り合うかどうかは上の式に代入すればわかる。

注意: 主定理の (iii) の式は、金信一村上の式 ([5]) と Kohn の式 ([8]) を含んでいる。

例: $d_G(\text{三葉結び目}, 8 \text{ の字結び目}) = 2$ ([12])

(証明) 三葉結び目 $= S(3, 1)$ 、8 の字結び目 $= S(5, 2)$ である。

よって $d_G(\text{三葉結び目}, 8 \text{ の字結び目}) = 1$ と仮定すると (iii) の式から、 $S(3, 1)$ は $S(2an^2 + 5(2mn \pm 1), 2bn^2 + 2(2mn \pm 1))$ と同値になる。しかし a, b, m, n に課せられた条件と初等整数論の議論によりこのようなことは起こりえないことが示される。

よって $d_G(\text{三葉結び目}, 8 \text{ の字結び目}) \geq 2$ である。又、三葉結び目と 8 の字結び目が結び目解消操作 2 回で移り合うことは Introduction で見た。以上で $d_G(\text{三葉結び目}, 8 \text{ の字結び目}) = 2$ が示せた。

3 Proof of Main theorem

このセクションでは主定理の証明の概略を説明する。

定義: M を三次元多様体、 k を M^3 内の結び目、 $N(k)$ を k の M 内の正則近傍、 $E(k) = cl(M^3 - intN(k))$ を k の外部、 γ を $\partial N(k) = T^2$ 上の essential simple closed curve あるいはその isotopy class として、これを slope と呼ぶ。 μ で $N(k)$ の meridian disk の境界を表す slope とする。そして $k(\gamma)$ を k に沿って surgery 係数 γ で Dehn surgery して得られた三次元多様体とする。又 γ, δ を二つの slope としたときに $\Delta(\gamma, \delta)$ で γ と δ の T^2 上での intersection number の絶対値を表し M_k で k で分岐する 2 重分岐被覆空間を表す。

まず補題を三つ用意する。

補題 1 (Cyclic surgery theorem [4]): $E(k)$ は既約かつ Seifert fibred space でないとす
る。もし $\pi_1(k(\gamma_1))$ と $\pi_1(k(\gamma_2))$ が共に cyclic group ならば $\Delta(\gamma_1, \gamma_2) = 1$

補題 2 (Montesinos-Lichorish の trick): K, K' を S^3 内の二つの結び目 (絡み目) とす
る。そのとき $d_G(K, K') = 1 \Rightarrow M_K$ 内のある knot k と slope γ が存在して $M_{K'} = k(\gamma)$
かつ $\Delta(\gamma, \mu) = 2$

補題 3: k を lens space $L(p, q)$ 内の knot とする。そのとき $E(k)$ が Seifert fibred space

ならば、 $L(p, q)$ のある Seifert fibration のある fiber に k は isotopic

さて、主定理の (i) \Rightarrow (ii) or (iii) の証明に入る。

上記の補題から、(i) $\Rightarrow L(r, s)$ のある Seifert fibration が存在して、そのある fiber をある slope γ で Dehn surgery すると $L(p, q)$ になる、ここで $\Delta(\gamma, \mu) = 2$ ということがわかる。あとは Seifert fibred space の fiber の Dehn surgery を計算を実行する。

レンズ空間の Seifert fibration は base space が S^2 と RP^2 のものが考えられるが、ここでは簡単の為 S^2 のときだけを扱う (RP^2 のときもほぼ同様である)。

V_1, V_2 を meridian, longitude が $\mu_i, \lambda_i (i = 1, 2)$ でそれぞれ指定された solid torus とする。そしてレンズ空間 $L(p, q)$ の“標準的分解” $L(r, s) = V_1 \cup_h V_2$ を与える。すなわち $L(p, q)$ は V_1 と V_2 の境界を、向きを逆転する同相写像 $h: \partial V_1 \rightarrow \partial V_2$ で貼り合わせたもの、ここで $h(\mu_1) = s\mu_2 + r\lambda_2$ 。又 $h(\lambda_1) = b\mu_2 + a\lambda_2$ かつ $rb - sa = 1$ を満たしているとする。

V_i の内部内の (m, n) -curve $C_{m, n}$ とは $m\mu_i + n\lambda_i$ に isotopic な curve のこととする。すると $L(r, s)$ の fiber はある V_1 内の $C_{m, n}$ と思える。又、 $C_{m, n} (\subset V_1)$ を isotopy で V_2 内に移してやると $C_{rm+an, sm+bn} (\subset V_2)$ となり、 $C_{m, n}$ で与えられる $L(r, s)$ の Seifert fibration は標準的記法 (II) では $m((n, x), (rm + an))$ の形をしている。ここで x, y はある整数ですぐには決まらないことに注意する (今回の話では x, y を求める必要はない)。

我々が求めたいのは $C_{m, n}$ に沿った Dehn surgery であった。

補題 4: (A) $C_{m, n}(c/d) \cong m((n, x), (rm + an, y), (c - dmn, d))$.

(B) もし $c = dmn \pm 1$ ならば $C_{m, n}(c/d) \cong L(2an^2 + r(2mn \pm 1), 2bn^2 + s(2mn \pm 1))$.

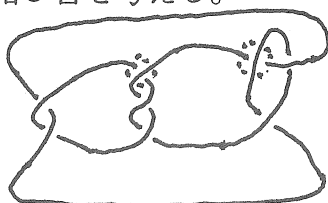
ここで \cong は向きを保つ同相の意味である。

補題 4 において $d = 2$ とおけば、(A) からは Montesinos 結び目 (絡み目) (次のセクションを参照して下さい) としての主定理 (ii) の図、(B) からは主定理 (iii) の式が導かれることになる。大筋は以上である (残りの細かい議論については [15] を御参照下さい)。

4 Montesinos knot (link) with unknotting (unlinking) number one

このセクションでは結び目解消数が1の Montesinos 結び目 (絡み目) について考察する。これについては全て決定できたわけではないが、最近の Dehn surgery の研究の成果からかなり見通しが良くなり、又、一部決定できたということ、を報告する。

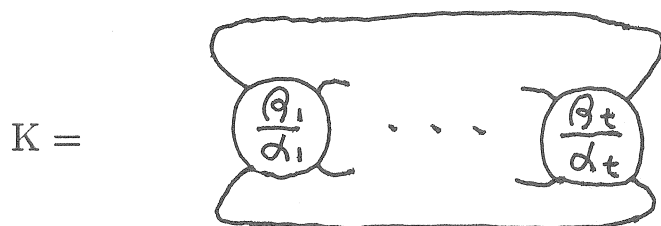
例えば下図の 8_{10} という結び目を考える。



8_{10} は結び目解消数が決定されていない結び目のなかで交点数が最小のものである ([6],[7])。 8_{10} は上の図の2つの circle 内において結び目解消操作を行えば自明な結び目になるので $u(8_{10}) = 1$ あるいは2であり、予想は $u(8_{10}) = 2$ である。 $u(8_{10})$ に対しては代数的不変量を使った議論や、4次元多様体の観点からの議論 (下からの評価) がこれまで無効だった ([3])。

8_{10} は Montesinos 結び目 $M((2,1), (3,1), (3,2))$ である。 Montesinos 結び目で結び目解消数が1のものを決定することは、 $u(8_{10})$ を決定することにもなるのである。

定義: Montesinos 結び目 (絡み目) $K = M((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_t, \beta_t))$ とは次の正則射影図を持つ結び目 (絡み目) のことである。



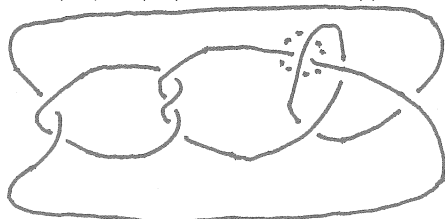
注意: (1) K の2重分岐被覆空間は S^2 上の Seifert fibred space $m((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_t, \beta_t))$ である。

(2) 一般性を失うことなく全ての $\alpha_i \geq 2$ としてよい。

(3) $t \leq 2$ ならば K は2橋結び目 (絡み目) である。

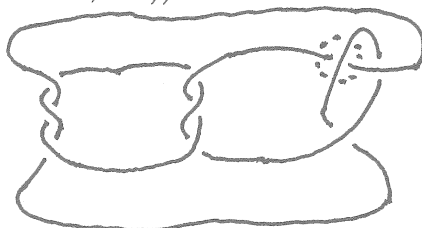
ここでは天下りの私の作った予想を述べる。

予想 K: $K = M((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_t, \beta_t))$: Montesinos 結び目 で $t \geq 3$, $u(K) = 1$
 \iff ある 0 でない整数 p, q, r, s, m, n が存在して、 m, n は互いに素、
 $ps - rq = 1$, $K = M((p, -r), (q, s), (2mn \pm 1, 2n^2))$



$$K = M((2, 1), (3, -2), (3, 2))$$

予想 L: $L = M((\alpha_1, \beta_1), \dots, (\alpha_t, \beta_t))$: Montesinos 絡み目 で $t \geq 3$, $u(L) = 1$
 \iff ある 0 でない整数 p, q, m, n が存在して、 m, n は互いに素、
 $L = M((p, -q), (p, q), (2mn \pm 1, 2n^2))$



$$K = M((3, -1), (3, 1), (3, 2))$$

注意: 予想 K, L において \Leftarrow は既に正しい (全て上の図のような感じではずれる)。

さて予想 K, L を Dehn surgery の手法で証明することを考えよう。金信-村上の定理、Kohn の定理、主定理のどの証明においても決定的役割を果たしたのは Cyclic surgery theorem であった。それでは今の場合にこれに対応するものは何か? それは次の予想である。

予想 (S^3 version) ([2],[9]): 3次元球面内の双曲結び目を Dehn surgery して Seifert fibred space が得られたならばその surgery 係数は整数である。

この予想は exceptional Dehn surgery の研究において現在の中心課題といえる。ここで exceptional Dehn surgery とは双曲結び目を Dehn surgery して非双曲的な多様体になる現象のことをいう。この10年余りの間に非双曲的な結び目の Dehn surgery の研究は、Gordon,

Gabai, Sharlemann, Boyer, Zhang, 宮崎, 茂手木 等によってほぼ完成されたといってよい。残るは双曲結び目の場合である。

命題 1: 予想 (S^3 version) が正しいければ予想 K も正しい。

予想 L に関しては、次の予想が考えられる。

予想 ($S^2 \times S^1$ version): $S^2 \times S^1$ 内の双曲結び目を surgery 係数 γ で Dehn surgery して Seifert fibred space が得られたならば $\Delta(\gamma, \mu) \leq 1$ である。

注意: 予想 ($L(19, 7)$ version) はない。すなわち反例がある。

命題 2: 予想 ($S^2 \times S^1$ version) が正しいければ予想 L も正しい。

これまで予想ばかり述べてきたが、ちゃんと解決した部分がある。

予想 K, L の部分的解決

(1) $t \geq 4 \implies u(K), u(L) \geq 2$ (茂手木 [11])

(2) 定理 2 (i) $L = M((2, \beta_1), (2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$ かつ $u(L) = 1$
 $\implies L$ は予想 L の形に書ける。

(ii) $L = M((2, \beta_1), (3, \beta_2), (4, \beta_3))$

$\implies u(L) \geq 2$

定理 2 の証明について: 実は、Boyer-Zhang はこの場合 (出てくる Seifert fibred space が $m((2, \beta_1), (2, \beta_2), (\alpha_3, \beta_3))$, $m((2, \beta_1), (3, \beta_2), (4, \beta_3))$ のとき) の予想 ($S^2 \times S^1$ version) を解決している ([1])。よって命題 2 により定理 2 は正しい。(命題の証明も含めて、詳しくは [16] を御参照下さい)。

5 Addendum

新しい Kirby の問題集 [7] において X.-S. Lin は次の問題を提出した。

問題 ([, Problem 1.58(X.-S. Lin)]): 結び目解消操作を一回した後に自分自身に戻るの

“自明”な場合に限るか?。ここで“自明”な場合とは操作を行う交差点から出発して自分に戻る arc が二本考えられるが、そのうち (少なくとも) 一本は自明な arc である、ときをいう。



定理 3: 上の予想は 2 橋結び目の場合には正しい。

注意: 上の予想が自明な結び目の場合に正しいことは Sharlemann-Thompson 等によって示されている ([13],[14])。

定理 3 の証明は主定理のそれとほぼ同じである ([17])。

参考文献

- [1] S. Boyer and X. Zhang, *Finite Dehn surgery on knots*, to appear in Journal of AMS.
- [2] S. Boyer and X. Zhang, *The semi-norm and Dehn filling*, preprint.
- [3] T.D. Cochran and W.B.R. Lickorish, *Unknotting information from 4-manifolds*, Trans. AMS. 297 (1986), 125-142.
- [4] M. Culler, C. McA. Gordon, J. Luecke, and P. Shalen, *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. (2) 125 (1987), 237-300.
- [5] T. Kanenobu and H. Murakami, *Two-bridge knots with unknotting number one*, Proc. AMS. 98 (1986), 499-502.
- [6] A. Kawauchi (ed.), *結び目理論*, Springer-Verlag Tokyo, 1990.
- [7] R. Kirby (ed.), *Problems in Low-Dimensional Topology*, (1996). (Mirror in Japan; <http://www2.math.sci.osaka-u.ac.jp/nakagawa/problems.ps.gz>) ここにあります。
- [8] P. Kohn, *Two-bridge links with unlinking number one*, Proc. AMS. 113 (1991), 1135-1147.
- [9] K. Miyazaki and K. Motegi, *Seifert fibred manifolds and Dehn surgery*, to appear in Topology.

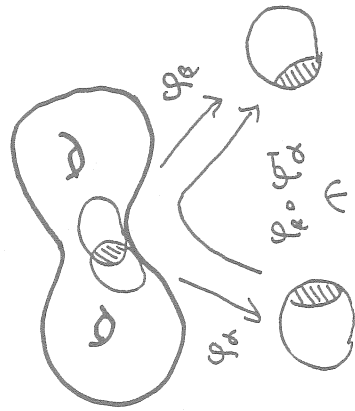
- [10] Y. Miyazawa, *The Jones polynomial of an unknotting number one knot*, 第41回トポロジーシンポジウム講演集 (於 愛媛大学), (1994), 124-129.
- [11] K. Motegi, *A note on unlinking numbers of Montesinos links*, to appear in Rev. Mat. Complut. Madrid.
- [12] H. Murakami, *Some Metrics on Classical Knots*, Math. Ann. 270 (1985), 35-45.
- [13] M.G. Sharlemann and A.A. Thompson, *Link genus the Conway moves*, Comment. Math. Helv. 64 (1989), 527-535.
- [14] K. Taniyama, *On unknotting operations of two-bridge knots*, Math. Ann. 291 (1991), 579-589.
- [15] I. Torisu, *The determination of the pairs of two-bridge knots or links with Gordian distance one*, preprint.
- [16] I. Torisu, *A note on Montesinos links with unlinking number one (conjectures and partial solutions)*, preprint.
- [17] I. Torisu, *On unknotting operations between two-bridge knots or links*, in preparation.

hyperbolic geometry,
 harmonic maps and
 $\mathbb{C}P^1$ -structures on surfaces

$\mathbb{C}P^1$ -structure (or, projective str.) とは
名大、多々教理 谷川晴美

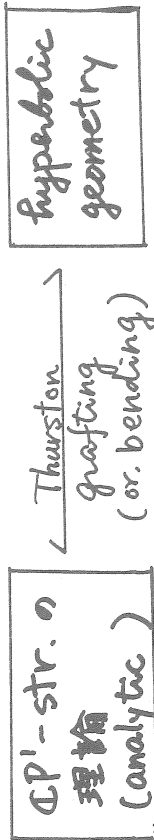
$(\mathbb{C}P^1, \text{Aut } \mathbb{C}P^1)$

ε モデルとす
 構造



$\text{PSL}_2\mathbb{C}$
 (= $\text{Aut } \mathbb{C}P^1$)

Möbius 変換 は正則であるから、
 $\mathbb{C}P^1$ -str \Rightarrow underlying $\mathbb{C}P^1$ -str.



★ $\mathbb{C}P^1$ -mfd を幾何学的に考察しようとす。 $\mathbb{C}P^1$ -str. と
 とらえたい。

この講演の主要理

Σ_g をむきつけられた種数 $g > 1$ の閉曲面とすると、 Σ_g 上のどんな複素構造の上にもホロノミーが Fuchs 群であるような $\mathbb{C}P^1$ -str. が無限に存在する。

§0. $\mathbb{C}P^1$ -structures

例1 (hyperbolic structure)

$$\forall X \in \mathcal{T}_g, \exists \Gamma_X \curvearrowright \mathbb{H}^2 \text{ Fuchs. gr.}$$

$$X \cong_{\text{orb}} \mathbb{H}^2 / \Gamma_X$$

- 節.

$$\mathbb{H}^2 \hookrightarrow \mathbb{C}P^1 \text{ より 自然に } \mathbb{C}P^1\text{-str.}$$

$$\Gamma_X \hookrightarrow \text{PSL}_2\mathbb{C}$$

$\therefore \mathbb{H}^2 / \Gamma_X$ は $\mathbb{C}P^1$ -str. Σ 定義する。

例 2. (flat cylinder)

$\theta > 0, l > 0$ とす。

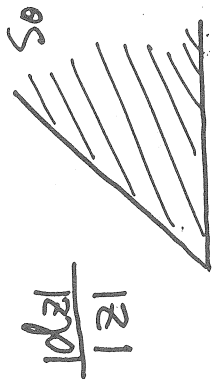
$$S_\theta = \{ r e^{i\theta} \mid r > 0, 0 < \theta < \theta \}$$

$$T_e(z) = e^{\theta} z$$

$$S_\theta \subset \mathbb{C}P^1 \text{ if } \theta < 2\pi$$

$$\langle T_e \rangle \subset \text{PSL}_2 \mathbb{C}$$

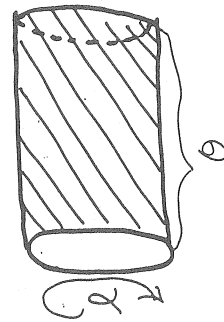
$$A_\theta^l = S_\theta / \langle T_e \rangle$$



$$\frac{|dz|}{|z|}$$

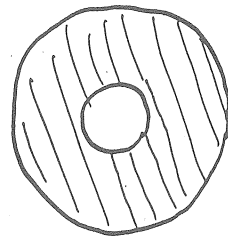


flat metric A_θ^l



holo \cong
 prof $\not\cong$

$B \subset \mathbb{C}P^1$



一般に、一つの complex str. 上に、
 “たくまの” $\mathbb{C}P^1$ -str. が存在する。

§1 $\mathbb{C}P^1$ -structures on Σ_g

$$P_g := \{ \Sigma_g \text{ 上の } \mathbb{C}P^1\text{-str.} \}$$

$$\pi: Q_g \rightarrow T_g; \text{ リーマン面上の}$$

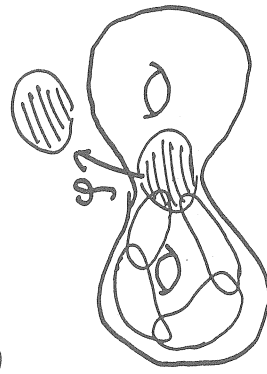
正則 2 次微分の「場」

ハットル束

(各 fiber は、複素 $3g-3$ 次元)

$$\text{Fact } Q_g \cong P_g$$

⇒ 与えられた $\mathbb{C}P^1$ -str. に対し、



local chart φ

Σ 上と固定し、

解析接続する。

⇒ 多価函数 f (developing map)

$$\exists \gamma : \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}_2(\mathbb{C}) \text{ hom.}$$

(holonomy representation)

$$S(f) := (f''/f')' - \frac{1}{2} (f''/f')^2$$

(Schwarzian derivative) $\in \mathbb{Q}_g$

逆に、 $\forall g \in \mathbb{Q}_g$, $\exists \mathbb{C}P^1$ -structure

$$\text{s.t. } S(f) = g$$

(f : developing map)

□

Schwarzian derivative の意味.

$\forall z \in X$, $\exists M_z^f$ osculating Möb. trans.

$$S(f) = d_z M_z^f(\cdot)$$

注). $\pi : \mathbb{C}P^1 \rightarrow T_g$
 $\cong P_g$

は、 $\mathbb{C}P^1$ -str. から
 Σ の underlying
 complex str. への対応
 Σ であらわしている。

とくに、 $\forall X \in T_g$ 上の $\mathbb{C}P^1$ -str. の全体
 は、複素 3g-3 次元のハイッテル空間である

§ 2. Lengths.

$T_g = \{ \text{marked cpx str. on } \Sigma_g \}$

$= \{ \text{ " conformal " } \}$

$= \{ \text{ " hyp. str. " } \}$

$\mathcal{L} := \{ \text{simple closed curves on } \Sigma_g \}$

Def. (Extremal length)

$X \in T_g$, $[c] \in \mathcal{L}$

$$E_X(c) = \sup_p \frac{\inf_{c \simeq \gamma} \int_{\gamma} |p(z)| dz|^2}{\text{Area}_p X}$$

sup of conformal metric 全体について
 とる。

Notation

$X \in Tg, [C] \in \mathcal{L} \quad \text{!} = \# \Gamma C.$

$l_X(C) = [C]$ の geodesic (X の hyp metric 1- \rightarrow "2) の長さ. □

$Y, X \in Tg.$ given

Y	X	mapping $Y \rightarrow X$	
conf.	conf.	extremal g.c.	$K = \sup_{C \in \mathcal{L}} \frac{L_X(C)}{L_Y(C)}$
hyp.	hyp.	extremal Lipschitz map	$L = \sup_{C \in \mathcal{L}} \frac{L_X(C)}{L_Y(C)}$
conf	hyp	harmonic map	$E = \sup_{C \in \mathcal{L}} \frac{L_X(C)^2}{E_Y(C)} + 0(U)$

注) $E = \sup$ と書いた量は、 \mathcal{L} を 3- \subset する compact sp. " $Pm\mathcal{L}$ " を "最大値" 実現させる。

§3. measured lamination and Thurston compactification of Tg .

measured lamination とは weighted simple closed curves の一般化である。

$M\mathcal{L} = \{ \text{measured lamination} \}$

Facts

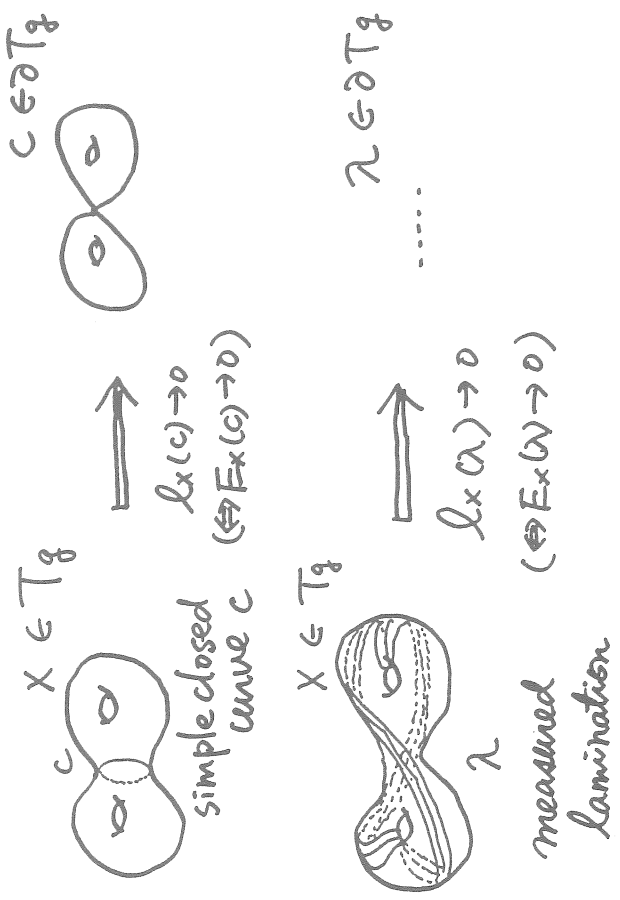
- $\mathbb{R}_+ \mathcal{L}$: weighted simple closed curves
 $\Phi: \mathbb{R}_+ \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathcal{L}}$
 $d.c \mapsto \overline{d \cdot i(c, \cdot)}$
- $M\mathcal{L} = \overline{\Phi(\mathbb{R}_+ \mathcal{L})}$
- $\forall \lambda \in M\mathcal{L}, \forall X$ hyp. \exists geodesic
- $l_X(U), E_X(U)$; continuous on $M\mathcal{L}$
- $l_X(\theta \lambda) = \theta l_X(\lambda), E_X(\theta \lambda) = \theta^2 E_X(\lambda)$
- $Pm\mathcal{L} = M\mathcal{L} - \text{tot} / \mathbb{R}_+ \cong S^{g-7}$
 \mathcal{L} dense

Def. (Thurston compactification)

$$\begin{aligned} \mathbb{F}: Tg &\hookrightarrow \mathbb{P}R^8 \\ X &\longmapsto \{l_x(c)\}_{c \in \mathcal{S}} \end{aligned}$$

$\overline{\mathbb{F}}(Tg):$ Thurston compactification

Fact. $\partial Tg = \mathbb{P}nd.$



§4 realization of m.l. in 3-mfd.

$$\begin{aligned} N &: \text{hyp. 3-mfd} \\ f &: \Sigma_g \rightarrow N \text{ s.t. } f_*: \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \pi_1(N) \\ &\text{injective} \end{aligned}$$

Def. $\lambda \in \text{ml}$ かつ $[f]$ において
 realizable とは $\exists X \in Tg(\text{hyp})$
 $\exists g \sim f, g: X \rightarrow N$ continuous

$\exists \lambda' > \lambda$ geodesic lamination s.t.

- $g|_{X-\lambda'}$ は isometric ($g(X-\lambda')$ は P.W.)
- $g(\lambda')$ は N の geodesic curves からなる集合.
- $g|_{\lambda'}$ は 長さを保つ.

(i.e. $g(X)$ は λ' に沿って おりまわされた N の中の面)

注) $\forall X \in \mathcal{T}_g, \exists! h: X \rightarrow N$ harmonic
 st. $h \sim f$

measured lamination λ の realization

とす. $\lambda \in \partial \mathcal{T}_g$ から N の
"harmonic map の analog"

① $\lambda \in \partial \mathcal{T}_g$ とす. "Ex(λ) \rightarrow 0 なる極限"

② $E(h) = \int \|dh\|^2$

\therefore maximal stretch の方向は.

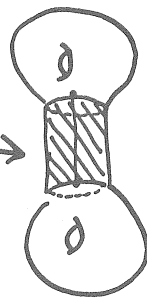
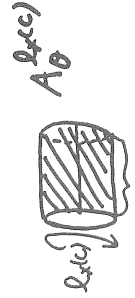
N 上 "ほとんど真っすぐ" になる
 される.

③ $X \in \mathcal{T}_g$ から λ の近傍にあるならば
 λ の方向に多大な stretching

④ $h(X) \subset \text{convex core of } N$

§5 Grafting and bending.

• Grafting



• hyp. str. $X \in \mathcal{T}_g$

Σ とす. simple

• $C \subset \text{closed geod.}$
 Σ とす.

• $\theta > 0$ とす.

• flat cylinder
 $A_\theta^{R(x)}$ とす.

• $X \in C$ に沿って

切り. べじゅらさく

$A_\theta^{R(x)}$ とす. 木すき.

X の C における $\mathbb{C}P^1$ -str. と $A_\theta^{R(x)}$ の 円

における $\mathbb{C}P^1$ -str. から match するのを

新しい面には X の hyp. str. と $A_\theta^{R(x)}$ の

flat str. をつなぐ $\mathbb{C}P^1$ -str. を入る

これ $G_{\theta,C} X$ とかく. この surgery Σ

grafting θ to X とする.

$M: \mathbb{C}P^1 - \text{mf}d \text{ is } \mathbb{H}^2$.

$TM \ni v$.

$$t_M(v) = \inf_{f: \Delta \rightarrow M} \rho_\Delta(f^*v)$$

但し, inf は Δ から f の $\text{projective immersion}$ 全体

ρ_Δ は Δ の Poincaré metric.

$t_M \ni$. Thurston metric という。

cf. $R_M(v) = \inf_{g: \Delta \rightarrow M} \rho_\Delta(g^*v)$

inf \exists $g: \Delta \rightarrow M$ holo. immersion 全体.
 このとき, R_M は Klein metric と呼ばれる

Thurston's geometric parametrization Theorem

grafting

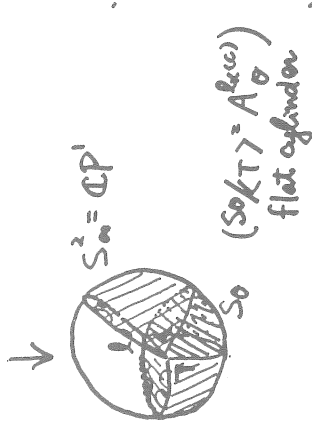
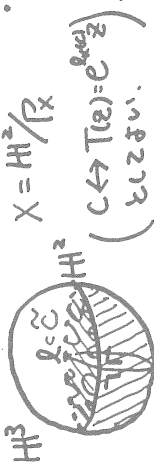
$$\text{Gr}: Tg \times \mathbb{R}_{>0} \mathcal{L} \xrightarrow{\psi} Pg$$

$$X \quad \theta \subset \quad \mapsto \text{Gr}_{\theta, \psi} X$$

は, $Tg \times \text{mf}d$ に連続に拡張され.

$\text{Gr}: Tg \times \text{mf}d \rightarrow Pg$ は homeo. \square

Bending



$H^2 \ni H^3$ の中に, tot. geod. にうめこむ
 \downarrow
 $C \subset X$ の H^2 への lift は互いに交わらない geod. lines からなる. (C)

\downarrow
 まずひとつの成分 S^2 に着目して, S^2 に沿って

H^2 をひとつだけおろす \downarrow

$\mathbb{C}P^1$ 上では, hyp. dioc. に flat sector がつまみ木される。

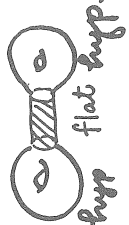
この操作 Σ の各成分に対して順次行う \downarrow

↓

最終的に得られるもの: $\mathbb{C}P^1$ の上にひらけさせた.
 partly hyp., partly flat τ s
 simply closed $\mathbb{C}P^1$ -surface $\tilde{\Omega}$

&

Γ_X は bending に応じた変形
 した群 $\Gamma_{oc} < PSL_2 \mathbb{C}$

Fact: $\tilde{\Omega} / \Gamma_{oc} = Gr X$  flat hyp.

- $\tilde{\Omega}$ は $Gr X$ の projective universal covering.
 Γ_{oc} は $Gr X$ の holonomy representation

注) $\tilde{\Omega} \hookrightarrow \mathbb{C}P^1$ とは $\mathbb{R}P^2$ 上の overlapping
 する部分ばかり sheet にあつものと同様可なり.

以上の操作は g による bending と τ s.

bending は equivariant map

$g: \mathbb{H}^2 \rightarrow \mathbb{H}^3$ w.r.t. Γ_X and Γ_{oc}
 with bending locus \tilde{C}

に τ を得られる。これは pleated map と τ s.

Γ_{oc} の discrete τ s は $\mathcal{G}(\mathbb{H}^2) / \Gamma_{oc}$ は $\mathbb{H}^3 / \Gamma_{oc}$ の
 (通常の意味での) pleated surface

— ここまでくわいの、たこと —

- $\mathbb{C}P^1$ -str. on Σ_g は $\exists g \in \mathcal{G}_g$ である。 (analytic parametrization)
- $\mathbb{C}P^1$ -str. on Σ_g は \exists hyp. str. に flat part を
 つまみ切ることに τ を τ である。 (Thurston parametrization)
- また、 Σ_g は hyp. str. Σ \mathbb{H}^3 の中 τ であり τ は
 " τ " により得られる。 (bending)
 (pleated map)

§6. $\mathbb{C}P^1$ -structures with Fuchsian holonomy

$\forall X \in \mathcal{T}_g$, hyp. str. は Fuchsian holonomy Γ_X
 である。

Q. Σ_g 以外に Fuchsian holonomy がある
 $\mathbb{C}P^1$ -str. は存在するか?

A. (Maskit) Yes. (函数論的に例を構成)

Hejhal > topological or geometric
 Goldman view point

注) Fuchsian holonomy Σ がある $\mathbb{C}P^1$ -str. τ -hyp. τ
 τ の τ は developing map は covering $\mathbb{C}P^1$

Thm (Goldman)

$\mathbb{C}P^1$ -str. $Gr_2 X, (X, \lambda) \in Tg \times Md$
(Thurston coordinate)

- ∴ Fuchsian holonomy $\exists \psi >$ 必要十分条件は、
 $\lambda \in Md$ ∴ integral point \exists あることである。但し
 $\lambda \in Md$ ∴ integral point ならば、 $\exists n_i \in \mathbb{N}, c_i \in \mathbb{R}$,
 $\lambda = \sum_{i=1}^g n_i c_i$. \exists あること。(c_i ≠ 0; if i ≠ j, disjoint)

説明. grafted structure は、pleated map に
 対応させられる ∴ pleated map は、equivariant
 wrt P_x and P_λ (holonomy) である。 P_λ は
 discrete である。通常の意味での pleated surface
 とあるから。 - ∴ P_λ は Fuchs 群である。
 H^3/P_λ の pleated surface は、物理的には唯一つ。
 よし、 \exists 唯一 pleated map の像とみられる。
 いまの $c_i \in \mathbb{R}$ に沿って "何回か回り" てもと
 へど、たまたまと考えるより他ない。 □

注). 一般に、 $\lambda \neq 0, \lambda \in Md$ のとき、 $Gr_2 X$ の
 underlying complex str. は、 $X \in Tg$ とは
 異なり、underlying cpx str. の "計算方法" は
 知られていない

Notation $Gr_2 X, (\lambda, X) \in Md \times Tg$ の
 underlying complex str. $\exists gr_2 X$ とおくことに
 する。

Q. どのような complex str. の上に、cplx. str.
以外の $\mathbb{C}P^1$ -str. \exists Fuchsian holonomy \exists
ものがあるか?

∴ 上の注より、この Q. は自明である。

Main Thm

$\forall \lambda$; integral point of Md ,
 $gr_2(c): Tg \rightarrow Tg$ は real analytic
 homeomorphism である。

Cor. すなわち complex str. \exists 上に Fuchsian
holonomy \exists する $\mathbb{C}P^1$ -str. は無限に存在
する。

- Main Thm を証明するには、次のことを示せばよい
- ∴ $gr_2(c): Tg \rightarrow Tg$ は proper map
 - ∴ $gr_2(c): Tg \rightarrow Tg$ は locally injective
 - ∴ $gr_2(c): Tg \rightarrow Tg$ は real analytic.

§7. Properness of grafting

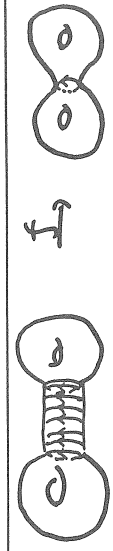
Thm 7.1 $\forall \lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ (not necessarily integer)
 $gr_{\lambda}(c) : T_g \rightarrow T_g$ is proper

これは次の評価式を用いて証明される。

Thm 7.2

$X \in T_g$ (hyperbolic surface), $\lambda \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ に対し。
 $Y = gr_{\lambda} X$ とおくとする。 $h: Y \rightarrow X$ は harmonic map, $f: Y \rightarrow X$ は grafting の逆操作。つまり
 "collapsing-grafted-part"-map とし、 $E(c)$ と
 エネルギーをあらわすことにすれば、

$$\frac{1}{2} l_X(\lambda) \leq \frac{1}{2} \frac{E_Y(\lambda)^2}{E_{rx}} \leq E(h) \leq E(f) = \frac{1}{2} l_X(\lambda) + 4\pi(g-1)$$



Collapsing-grafted-part

○ 上の評価式より、grafted part の面積 $= l_X(\lambda)$ が大きいとす。 f は harmonic map に近いことが言える。

注) f は harmonic map に近い理由。

- ① $Gr_{\lambda} X$ に対し、 X は "一般化された pleated surface" である。 "入る realize するもの" である。(§5)
- ② λ の realization とは、"harmonic map の analog" である。(§4)
- ③ grafted part of $gr_{\lambda} X$ の (flat) 面積は、 $l_X(\lambda)$ に等しく、これが大きいとす。 Y は入る逆像にある。($X \in T_g$ に注意)
- ④ Y から "harmonic map" は入る方向に著しい stretching を行う。(cf §2.)
- ⑤ $l_X(\lambda)$ が大きいとす。 これを "3:1 stretching" である。 f も入る方向に著しい stretching を行う。

以上のことから、 f は harmonic map に近いこととは、自然な現象であるといえる。

注) $\lambda: \pi_1(\Sigma_g) \rightarrow \text{PSL}_2\mathbb{C}$ non-elementary. 注). Thm 7.2 の系として、次の Kapovich の定理の geometric な別証明を与えらる。

Donaldson $\forall f: H^2 \rightarrow H^3$ equivariant w.r.t. $\pi_1(\Sigma_g)$ and $\lambda(\pi_1 \Sigma_g)$, $\exists h \sim f$. harmonic map. \square

Thm 7.2 \Rightarrow Thm 7.1. (Properness of grafting)

$\{X_n\} \subset T_g, X_n \rightarrow \partial T_g$ に対し. $Y_n = g_{\lambda} X_n$ とおくと. $Y_n \rightarrow \partial T_g$ である。

i) $l_{X_n}(\lambda) < C$ for $\exists C \forall n$ or

ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} l_{X_n}(\lambda) = \infty$ としてよい。

ii) の場合. Thm 7.2 より $E_{Y_n}(\lambda) = l_{X_n}(\lambda) + O(1)$ $\therefore E_{Y_n}(\lambda) \rightarrow \infty \therefore Y_n \rightarrow \partial T_g$.

i) の場合. ① $\{Y_n\} \subset K \subset T_g$ 有限 cpt set かつあったとすれば. Energy functional (proper) の $z: E(h_n: Y_n \rightarrow X_n) \rightarrow \infty$ (h_n : harmonic map) $(\otimes) X_n \rightarrow \partial T_g, Y_n \in K$ 一方. Thm 7.2 より. $E(h_n: Y_n \rightarrow X_n) < l_{X_n}(\lambda) + O(1)$ かつ. i) の仮定より. $E(h_n)$ bdd. これは矛盾である。

Thm. $\forall \gamma \in T_g$ fix.

$g_n: Y \subset \mathbb{C}P^1$ -str. として.

$g_n \rightarrow \infty \Leftrightarrow$ holonomy representation の 発散

§8. local injectivity of grafting.

Thm λ の half integral pt of Mod かつ $g_{\lambda}: T_g \rightarrow T_g$ は injective (証明略)

Conjecture $\forall \lambda \in \text{Mod}, g_{\lambda}(\cdot): T_g \rightarrow T_g$ は injective.

注). Thm (McMullen)

Teichmüller 空間 T の 1 次元として.

$(T_{1,1}, T_{0,4}), \forall \lambda \in \text{Mod}$,

$g_{\lambda}(\cdot): T \rightarrow T$

1-1. injective

TOPOLOGY OF EQUILATERAL POLYGON LINKAGES

神山 靖彦 (琉球大 理)

1 Introduction

Havel [4] は次の問題を考察し、解答を得た。

$$X = \{(u_1, \dots, u_5) \in (\mathbf{R}^2)^5 : |u_{i+1} - u_i| = 1 \ (1 \leq i \leq 4), \ |u_1 - u_5| = 1, \\ \text{and } u_1 = (\frac{1}{2}, 0), u_2 = (-\frac{1}{2}, 0)\}.$$

と置く。明らかに X は generic に 2 次元の空間であるが、 X は manifold であるか？もしそうならば、どのような manifold であるか？

Theorem 1.1. X は genus 4 の Riemannian surface Σ_4 と diffeomorphic である。

Havel はこの定理を次のように証明した。各 $(u_1, \dots, u_5) \in X$ に対し、その oriented area を対応させることにより、関数 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ を定義し、それが Morse function であることを示す。(その後、この定理の別証が [3],[5],[10] で与えられた。)

さて、我々はこの定理の一般化を試みたい。一つの一一般化は、pentagon を一般の n -gon にすることであり、もう一つの一一般化は、 \mathbf{R}^2 を一般の \mathbf{R}^p

にすることである。

(1.2)

$$C_n^p = \{(u_1, \dots, u_n) \in (\mathbf{R}^p)^n : |u_{i+1} - u_i| = 1 \ (1 \leq i \leq n-1), |u_1 - u_n| = 1\}$$

と置く。 \mathbf{R}^p の orientation preserving isometry group $\text{Iso}^+(\mathbf{R}^p)$ ($= \mathbf{R}^p$ と $SO(p)$ の半直積) が C_n^p に作用するので、その quotient space を M_n^p と置くことにする：

$$(1.3) \quad M_n^p = C_n^p / \text{Iso}^+(\mathbf{R}^p).$$

Remark 1.4. \tilde{C}_n^p を

$$(1.5) \quad \tilde{C}_n^p = \{(u_1, \dots, u_n) \in C_n^p : u_1 = (\frac{1}{2}, 0), u_2 = (-\frac{1}{2}, 0)\}$$

により定義し、 $SO(p-1)$ を、 x -軸上の各点を不動にする $SO(p)$ の元全体と考えると、 $\tilde{C}_n^p / SO(p-1) = M_n^p$ となる。したがって特に $p=2$ のとき、 M_n^2 は上記の X の一般化になっている。

我々はこの M_n^p の topology を考察したいのだが、 $\text{Iso}^+(\mathbf{R}^p)$ の C_n^p への作用の isotropy の複雑さの問題が有り、現在ある程度満足する結果が得られているのは $p=2, 3$ のときである。そこで本講演でも主に $p=2, 3$ のときを扱う。

なお、[3],[10],[11] 等では symplectic geometry 等の立場から M_n^p を調べているが、本講演では algebraic topology の立場から調べてみたい。

以下、§2 で $p=2$ のとき、§3 で $p=3$ のときの結果を紹介し、§4 では “stable な状況” での M_n^p (すなわち n を固定して p を大きくしていったときの状況) を取り扱う。

しかしこの方法は spectral sequence に起因する複雑さがあるので、ここでは [8] による簡単な証明方法を紹介します。以下簡単のため、 $n = 2m$ のときを考察する。

$z_i = u_{i+2} - u_{i+1}$ ($1 \leq i \leq 2m - 2$), $z_{2m-1} = u_1 - u_{2m}$ と置くことにより、

$$M_{2m}^2 \cong \{(z_1, \dots, z_{2m-1}) \in (S^1)^{2m-1} : z_1 + \dots + z_{2m-1} - 1 = 0\}$$

とみなす。 $i_{2m} : M_{2m}^2 \hookrightarrow (S^1)^{2m-1}$ を inclusion とする。

今、次の 2 つの propositions が証明されたとする。

Proposition 2.4. $(i_{2m})_* : H_q(M_{2m}^2; \mathbf{Z}) \rightarrow H_q((S^1)^{2m-1}; \mathbf{Z})$ は、 $q \leq m - 2$ のとき isomorphism, $q = m - 1$ のとき epimorphism である。

Proposition 2.5. $H_{2m-3}(M_{2m}^2; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}$ であり、その generator を $[M_{2m}^2]$ と書くと Poincaré duality homomorphism $\cap[M_{2m}^2] : H^q(M_{2m}^2; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{2m-3-q}(M_{2m}^2; \mathbf{Z})$ は $q \leq m - 3$ or $q \geq m$ のとき isomorphism, $q = m - 1$ のとき epimorphism, $q = m - 2$ のとき monomorphism である。

Propositions 2.4-2.5 より $H_q(M_{2m}^2; \mathbf{Z})$ ($q \neq m - 1$) は決定され、しかも $H_{m-1}(M_{2m}^2; \mathbf{Z})$ は free \mathbf{Z} -module であることが分かる。そこで、 $H_{m-1}(M_{2m}^2; \mathbf{Z})$ は Euler characteristic $\chi(M_{2m}^2)$ より決まる。

Proposition 2.6. $\chi(M_{2m}^2) = (-1)^{m+1} \binom{2m-1}{m}$.

Proposition 2.4 の証明の概略: Andreotti-Frankel による Lefschetz hyperplane section theorem の証明に習って行う。つまり、 $X_{2m-1} = (S^1)^{2m-1} - M_{2m}^2$ と置く:

$$X_{2m-1} = \{(z_1, \dots, z_{2m-1}) \in (S^1)^{2m-1} : z_1 + \dots + z_{2m-1} - 1 \neq 0\}.$$

(X の添字 $2m - 1$ は torus の次元に合わせた。)

$f_{2m-1} : X_{2m-1} \rightarrow \mathbf{R}$ を

$$f_{2m-1}(z_1, \dots, z_{2m-1}) = -|z_1 + \dots + z_{2m-1} - 1|^2$$

と置く。このとき

Lemma 2.7. (i) $(z_1, \dots, z_{2m-1}) \in X_{2m-1}$ が f_{2m-1} の critical point
 $\Leftrightarrow z_i = \pm 1$ ($1 \leq i \leq 2m-1$).

(ii) $(z_1, \dots, z_{2m-1}) \in X_{2m-1}$ が f_{2m-1} の critical point で、 $+1$ が k 個、 -1 が l 個とする。 $(k+l = 2m-1)$. このとき、そこでの f_{2m-1} の index は、

$$(2.8) \quad \begin{cases} k & \text{if } k \leq l, \\ l+1 & \text{if } k > l. \end{cases}$$

Proposition 2.5 の証明の概略: Proposition 2.2 (ii) に M.Kato の partial Poincaré duality theorem [12] を apply する。

Proposition 2.6 の証明の概略: (2.8) より容易に証明される。

3 M_n^3 について

M_n^3 について、Examples 2.1 および Proposition 2.2 に相当する主張はつぎの通りである。

Examples 3.1. (i) $M_3^3 = \{1 \text{ point}\}$. (ii) $M_4^3 \stackrel{\text{homeo}}{=} S^2$.
 (M_5^3 については §4 で触れる。)

Proposition 3.2. (i) n が odd のとき、 M_n^3 は smooth manifold of dimension $2n-6$ である。

(ii) n が even のとき、 M_n^3 は singular points を持つ、dimension $2n-6$ の manifold である。 $(u_1, \dots, u_n) \in M_n^3 = \tilde{C}_n^p / SO(p-1)$ が singular point であるのは u_1, \dots, u_n が全て x -軸上にあるときで、singular point の近傍

は $C(S^{2m-3} \times_{S^1} S^{2m-3})$ である。ここで $n = 2m$ であり、 S^1 は 2 つの S^{2m-3} に通常の複素数の積により作用する。

ところで、 n が odd のときは $H_*(M_n^3; \mathbf{Z})$ は、symplectic geometry を用いることにより Kirwan によってかなり以前に決定されている [13]. そのあたりの事情は、大まかに言えば次の通りである。

$SU(2)$ を $(S^2)^n$ に diagonal に作用させることにより、 $(S^2)^n$ は $SU(2)$ -作用を持つ Kähler manifold となる。その moment map を μ と書くと、 $\mu: (S^2)^n \rightarrow (\mathfrak{su}(2))^* \cong \mathbf{R}^3$ は、

$$(3.3) \quad \mu(x_1, \dots, x_n) = x_1 + \dots + x_n$$

となる。そこで、 $M_n^3 = \mu^{-1}(0)/SU(2)$ ということになる。

さて、Kirwan [13] は n が odd のときに $H_*(\mu^{-1}(0)/SU(2); \mathbf{Z})$ を決定したわけである。結果は次の通りである。

Theorem 3.4. n が odd のとき、 $H_*(M_n^3; \mathbf{Z})$ は free \mathbf{Z} -module であり、 M_n^3 の Poincaré polynomial $PS(M_n^3)$ は以下で与えられる。

$$PS(M_n^3) = 1 + nt^2 + \dots + \left\{ 1 + (n-1) + \binom{n-1}{2} + \dots + \binom{n-1}{\min(j, n-3-j)} \right\} t^{2j} + \dots + t^{2n-6}.$$

Remark 3.5. Theorem 3.4 は、Theorem 2.3 の証明方法でも証明できる。

他方、 n が even のときの $H_*(M_n^3; \mathbf{Z})$ は $\chi(M_n^3)$ 以外はまだ分かっていない。(困難な理由の一つは、singular points の近傍は $C(S^{2m-3} \times_{S^1} S^{2m-3})$ であるわけだが、この $S^{2m-3} \times_{S^1} S^{2m-3}$ の connectivity が低いために、partial Poincaré duality theorem が余り有効でないことによる。)

最後に、 $\chi(M_{2m}^3)$ を書いておく。(Theorem 3.4 より $\chi(M_{2m+1}^3) = -2^{2m-1} + (2m+1)\binom{2m-1}{m}$ である。)

Proposition 3.6 [6]. $\chi(M_{2m}^3) = -2^{2m-2} + \binom{2m}{m}$.

4 Stable な M_n^p について

まず Schoenberg の結果 [15] を紹介する。§1 で我々は C_n^p を定義し、 $M_n^p = C_n^p / \text{Iso}^+(\mathbf{R}^p)$ と置いたわけだが、実は C_n^p には \mathbf{R}^p の isometry group $\text{Iso}(\mathbf{R}^p)$ ($= \mathbf{R}^p$ と $O(p)$ の半直積) が作用する。そこで、その quotient space を $M_n^{\prime p}$ と置くことにする：

$$M_n^{\prime p} = C_n^p / \text{Iso}(\mathbf{R}^p).$$

明らかに M_n^p には involution $\tau = O(p-1)/SO(p-1)$ が作用して、 $M_n^{\prime p} = M_n^p / \tau$ である。

$M_n^{\prime p}$ について Schoenberg [15] は次の定理を証明した。

Theorem 4.1 [15]. (i) $M_n^{\prime n-2} \underset{=}{\text{homeo}} S^{\frac{n(n-3)}{2}-1}$.

(ii) $p \geq n-1$ のとき、 $M_n^{\prime p}$ は p の取り方に依らず、 $M_n^{\prime p} \underset{=}{\text{homeo}} D^{\frac{n(n-3)}{2}}$.

この定理より次の table が得られる。

Theorem 4.2.

	M_n^p	$M_n^{\prime p}$
$p = n - 2$?	$S^{\frac{n(n-3)}{2}-1}$
$p = n - 1$	$S^{\frac{n(n-3)}{2}}$	$D^{\frac{n(n-3)}{2}}$
$p \geq n$	$D^{\frac{n(n-3)}{2}}$	$D^{\frac{n(n-3)}{2}}$

なお、Theorem 4.1 から Theorem 4.2 を導くためには次のことに注意すれば良い。

- (i) M_n^{n-1} 上の involution τ の fixed point set は $M_n'^{n-2}$ である。
- (ii) M_n^n へ involution τ は trivial に作用する。

一般に、Theorem 4.2 の ? の箇所、すなわち M_n^{n-2} は未解決である。しかし、 $n = 5$ のときは Hausmann & Knutson によりごく最近解決された [3]. 彼等の結果も含めて pentagon の table を完成させると次の様になる。

Theorem 4.3.

	M_5^p	$M_5'^p$
$p = 2$	Σ_4	$\sharp 5\mathbf{R}P^2$
$p = 3$	$\mathbf{C}P^2 \sharp 4\overline{\mathbf{C}P^2}$	S^4
$p = 4$	S^5	D^5
$p \geq 5$	D^5	D^5

なお、 $M_5'^2$ は involution τ が M_5^2 に free に作用することより簡単に分かる。

最後に [3] の結果に関連して、 M_n^3 を $n \geq 6$ で具体的に記述するのは相当に困難なように思われる。しかし、 M_n^3 (n : odd) を oriented cobordism ring Ω_*^{SO} の中で記述することは可能である。以下 $n = 2m + 1$ と置き、 M_{2m+1}^3 には symplectic structure から来る向きを入れておくことにする。すると、

Theorem 4.4 [9]. Ω_*^{SO} の中で、 $M_{2m+1}^3 = (-1)^{m+1} \binom{2m-1}{m} \mathbf{C}P^{2m-2}$ である。

References

- [1] A. Andreotti & T. Frankel, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*, Ann. of Math. **69**, (1959), 713-717.

- [2] J.-C.Hausmann, *Sur la topologie des bras articulés*, (Algebraic Topology, Poznan), Lecture Notes in Math. Vol. 1474, Springer, Berlin, (1989), 146-159.
- [3] J.-C.Hausmann & A.Knutson, *Polygon spaces and Grassmannians*, Preprint, 1995.
- [4] T.-F.Havel, *The use of the distances as coordinates in computer-aided proofs of theorems in Euclidean geometry*, J. Symbolic Compt. **11**, (1991), 579-593.
- [5] Y.Kamiyama, *An elementary proof of a theorem of T.Havel*, Ryukyū Math. J. **5**, (1992), 7-12.
- [6] Y.Kamiyama, *Topology of equilateral polygon linkages*, Top. and its Applications **68**, (1996), 13-31.
- [7] Y.Kamiyama, M.Tezuka & T.Toma, *Homology of the configuration spaces of quasi-equilateral polygon linkages*, Preprint, 1995.
- [8] Y.Kamiyama & M.Tezuka, *Topology and geometry of equilateral polygon linkages in the Euclidean plane*, Preprint, 1995.
- [9] Y.Kamiyama, in preparation.
- [10] M.Kapovich & J.Millson, *On the moduli space of polygons in the Euclidean plane*, Journal of Diff. Geometry **42**, (1995), 133-164.
- [11] M.Kapovich & J.Millson, *The symplectic geometry of polygons in Euclidean space*, Preprint, 1994.
- [12] M.Kato, *Topology of k -regular spaces and algebraic sets*, Manifolds-Tokyo (1973), Univ. of Tokyo Press, (1975), 153-159.

- [13] F.Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Princeton University Press, (1984).
- [14] S.Kojima & Y.Yamashita, *Shapes of stars*, Proc. Amer. Math. Soc. **117**, (1993), 845-851.
- [15] I.Schoenberg, *Linkages and distance geometry, I. Linkages*, Indag. Math. **31**, (1969), 42-52.
- [16] W.Thurston & J.Weeks, *The mathematics of three-dimensional manifolds*, Scientific American **251**, (1984), 94-107.
- [17] K.Walker, *Configuration spaces of linkages*, Undergr. Thesis, Princeton, (1985).

On the intersection of spheres in asphere

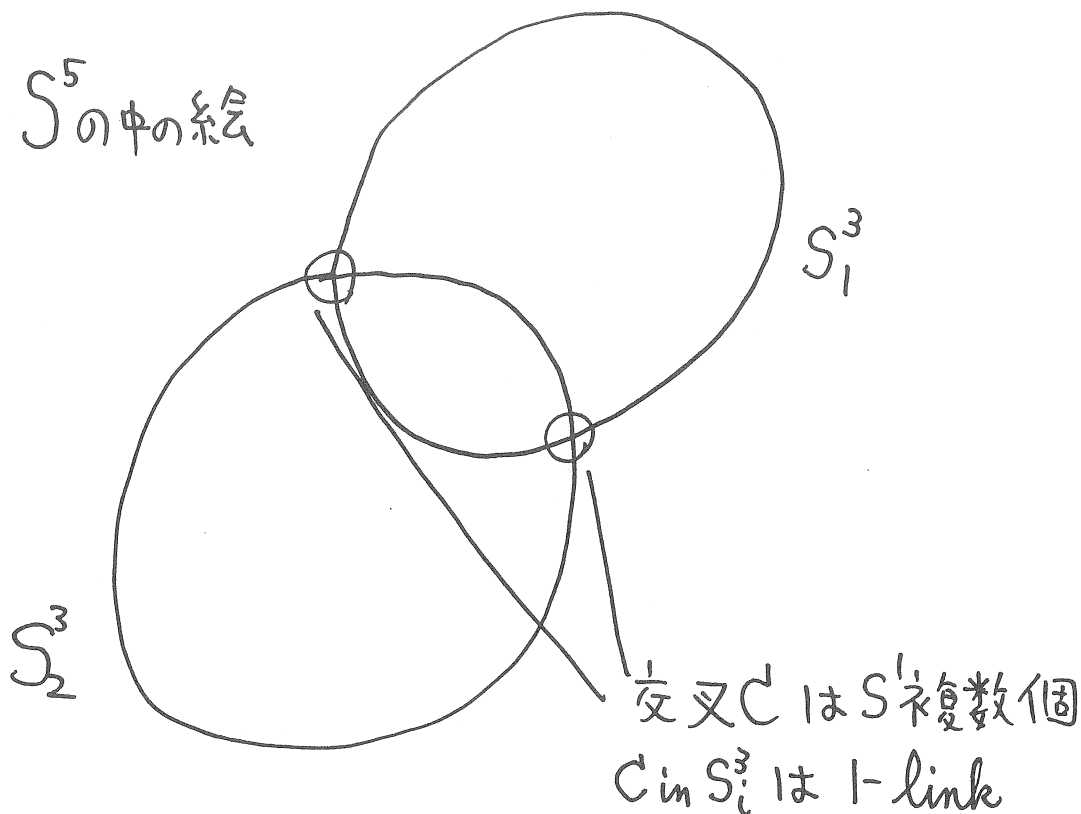
東京大学数理科学研究科

小笠英志

著者は次の【1】 -- 【5】のような一連の仕事をしました。その報告をします。よろしくお願ひします。講演はその中からひとつ選んで話すつもりです。

【1】 ([1], [3] 参照)

5次元球面 S^5 の中で、2つの3次元球面 S_1^3, S_2^3 が、それぞれ埋めこまれていてお互いに transverse に交わっているとす。これを $f : S_1^3 \amalg S_2^3 \rightarrow S^5$ と書く。ここに $f^{-1}(f(S_1^3) \cap f(S_2^3))$ in S_i^3 ($i=1,2$) という2つの1次元絡み目が得られた。また $f(S_i^3)$ in S^5 ($i=1,2$) という2つの3次元結び目が得られた。このようなものとしてどのようなものが得られるかを考える。



定義をする。

定義 (L_1, L_2, X_1, X_2) が 4-tuple of links であるとは、 L_1, L_2 が 1 次元絡み目、 X_1, X_2 が 3 次元結び目であることとする。

定義 4-tuple of links (L_1, L_2, X_1, X_2) が realizable であるとは、つぎのような immersion $f : S_1^3 \amalg S_2^3 \rightarrow S^5$ があるときを言う。(1) $f|S_i^3$ は embedding。(2) $f^{-1}(f(S_1^3) \cap f(S_2^3))$ in S_i^3 ($i = 1, 2$) は 1 次元絡み目 L_i を定義する。(3) $f(S_i^3)$ in S^5 ($i = 1, 2$) は 3 次元結び目 X_i を定義する。

realizable な 4-tuple of links は 次のように Arf invariant と mod2 linking number で特徴付けられる。

『定理 1. 次の (1) と (2) は同値である。』

(1) 2 つの 1 次元絡み目 $L_1 = (K_{11}, \dots, K_{1m}), L_2 = (K_{21}, \dots, K_{2m})$, と 2 つの 3 次元結び目 X_1, X_2 が与えられた時、 (L_1, L_2, X_1, X_2) が realizable である。

(2) 2 つの 1 次元絡み目 L_1, L_2 , と 2 つの 3 次元結び目 X_1, X_2 がつぎの (i), (ii) のうちいずれかを満たす。

(i) L_1 と L_2 がともに proper link であって

$$\text{Arf}(L_1) = \text{Arf}(L_2)$$

(ii) L_1 と L_2 がともに non proper link であって

$$lk(K_{1j}, L_1 - K_{1j}) \equiv lk(K_{2j}, L_2 - K_{2j}) \pmod{2} \quad \text{for all } j$$

この定理の系として、Fox の提出した問題 (26) (in [8]) に対するひとつの答として次の定理が得られた。([7] 参照)

S^2 が $R^3 \times R^1$ に埋め込まれているとせよ。 S^2 と $R^3 \times \{0\}$ が transverse とせよ。ある 1-link がこのような $S^2 \cap R^3 \times \{0\}$ in $R^3 \times \{0\}$ として得られるとき Ordinary sense slice 1-link と言う。

『定理 2. すべての ordinary sense slice 1-link に対して Arf invariant が定義できてその値は 0。』

さらに次のことも調べた。self-transverse immersion $f : S^3 \rightarrow S^5$ で singular point set C in S^5 が connected なものを考える。すると $f^{-1}(C)$ in S^3 は 2 成分 1 次元 link か 1 次元 knot になる。ここで『この $f^{-1}(C)$ in S^3 として、どのようなものが得られるか?』という問題を考える。答えは、次のようになる。

『定理 3. すべての 2 成分 1 次元 link および 1 次元 knot が得られる。』

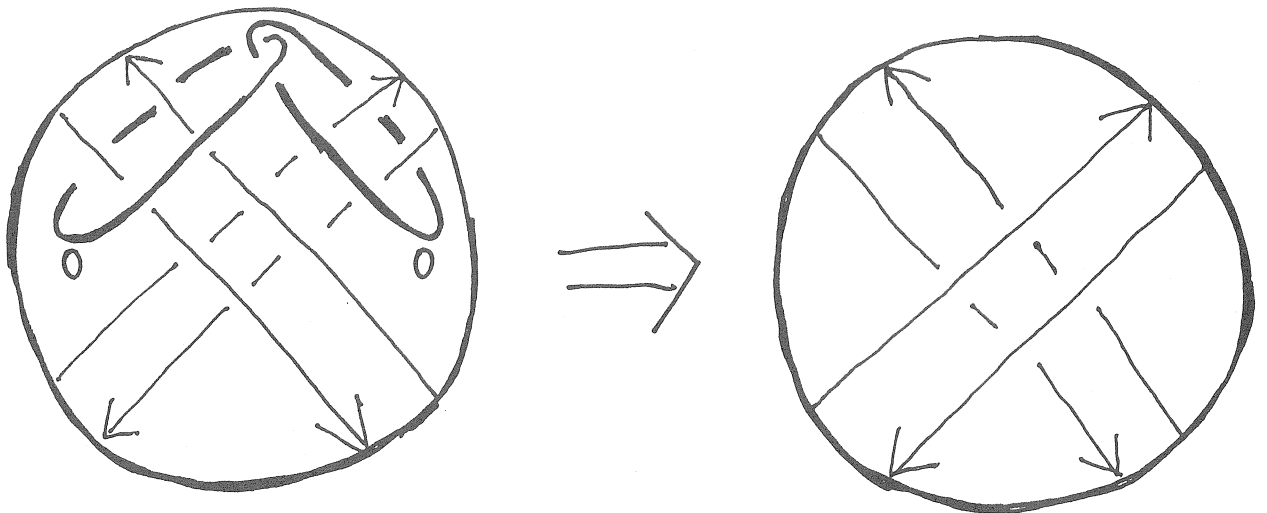
ここで次の事実が興味を魅く。定理 1 では、 $f(S_1^3) \cap f(S_2^3)$ in $f(S_i^3)$ が $i = 1$ の方は自明な knot、 $i = 2$ の方は trefoil knot ということはいかなる f に対しても起こり得ない。しかし定理 2 では、適当な f に対して $f^{-1}(C)$ in S^3 が、2 成分 split link であってその成分が、一方が自明な knot、他方が trefoil knot というものになる。

定理 1 の証明の概略を言う。

(1) \Rightarrow (2). S_i^3 の Seifert surface を V_i とする。 $V_1 \cap V_2$ が K_1, K_2 それぞれの Seifert surface の rel ∂ な framed cobordism を与えることに注目する。Arf invariant と mod2 linking number を Ω_2^{spin} を使ってよみかえて、 Ω_2^{spin} に障害があることを示す。

(2)⇒(1)。まず (L_2, L_2, X_1, X_2) を直接的な方法でうまく構成する。次に S^5 の中で S_1^3 と S_2^3 とを ‘submanifold の surgery’ を使って下記のように変更していく。 S_i^3 の中に下図 I の 3-ball を取る。細線が S_j^3 との交わり。 ($i \neq j$) S_i^3 に 4 次元 2-handle h^2 を太線で 0-surgery が施されるように、absolute に attach する。 S_i^3 は再び 3-sphere \widetilde{S}^3 になる。 \widetilde{S}^3 の中で細線の部分は、 S_i^3 での細線の部分に pass-move を施したものになる。(下図 II) 実は h^2 を S_i^3 に attach するとき、 h^2 を S^5 の中で $\{S_i^3\text{-attach part}\}$ と S_j^3 とも交わらずに attach できることを示す。この操作を繰り返して目的の絡み目を得る。(Pass-move と Arf invariant、linking number の関係は Kauffman の研究がある。[13])

従来 ‘(submanifold の)surgery’ をするとき、その目標は (sub)manifold の diffeomorphism type をいかに簡単にするかという視点だったと思う。しかし本稿では、(交叉による絡み目を)いかに複雑にしていくかという視点である。ここがひとつの工夫した点である。



【2】 ([4], [6] 参照)

【1】の高次元版を考えた。

K が n -次元結び目であるとは K が S^{n+2} の smooth submanifold であって S^n と PL 同相であることとする。

$(n+4)$ -次元球面 S^{n+4} の中で、2つの $(n+2)$ -次元球面 S_1^{n+2} 、 S_2^{n+2} が、それぞれ埋めこまれていてお互いに transverse に交わっているとする。これを $f: S_1^{n+2} \amalg S_2^{n+2} \rightarrow S^{n+4}$ と書く。交叉 $f(S_1^{n+2}) \cap f(S_2^{n+2})$ は、 n 次元球面と PL 同相とする。ここに $f^{-1}(f(S_1^{n+2}) \cap f(S_2^{n+2}))$ in $f(S_i^{n+2})$ という 2つの n 次元結び目が得られた。ここで『2つの n 次元結び目 K_1, K_2 が与えられた時、上のようなある f があって上のような pair として実現されるための条件を求めよ。』

という問題を考える。次の結果を得た。

『定理 1. 次の 2 つは同値である。

- (1) 2 つの n 次元 knot K_1, K_2 が上のような pair として実現される。
- (2) 2 つの n 次元 knot K_1, K_2 が次の条件を満たす。

$$\begin{array}{ll} K_1, K_2 \text{ は任意} & n \text{ 偶数のとき} \\ \text{Arf}(K_1) = \text{Arf}(K_2) & n = 4m + 1 \text{ のとき} \\ \sigma(K_1) = \sigma(K_2) & n = 4m + 3 \text{ のとき} \end{array}$$

knot cobordism theory や surgery theory に現れるものと似た、次元に関する mod4 周期があることに注意されたい。

高次元 knot の Arf invariant、signature の定義は [12] を見よ。

さらに次の結果も得た。先程の immersion $f : S_1^{n+2} \amalg S_2^{n+2} \rightarrow S^{n+4}$ に関して、2 つの n 次元結び目 $f(S_1^{n+2}) \cap f(S_2^{n+2})$ in S^{n+4} が得られることは前に見た。このとき $f(S_i^{n+2})$ in S^{n+4} ($i = 1, 2$) という 2 つの $(n+2)$ -次元結び目も得られる。このとき次が成立する。

『定理 2. n を偶数とする。任意の n 次元 knots K_1, K_2 と任意の $(n+2)$ -次元 knots X_1, X_2 からなる 4 組 (K_1, K_2, X_1, X_2) は、上のようなある f に対して、上のような交叉によって実現される。』

定理 1 の証明の概略を言う。

(1) \Rightarrow (2). 偶数次元は当然。 $4m+3$ 次元は (【4】の場合も考えると) novikov additivity より。 $4m+1$ 次元は一番手間がかかる。(【4】の結果で $4m+1$ 次元と $4m+3$ 次元で違った現象が起こっていることに対応している。) stiefel-whitny class (もしくは Sq-作用素) が障害となることを示す。

(2) \Rightarrow (1). [1] よりも複雑。高次元 pass-move というものを新しく導入した。高次元 pass-move を使って結び目を複雑にしていく。また knot cobordism と、twist-spun knot ([15]) を改良した方法もうまく使う。

高次元 pass-move の定義は次の通り。

定義 $(2k+1)$ -knot K (k は 0 以上) を取れ。smooth embedding $g : \Sigma^{2k+1} \hookrightarrow S^{2k+3}$ は K を定義するとする。 $D_x^{k+1} = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \mid \sum x_i^2 < 1\}$ 、 $D_y^{k+1} = \{(y_1, \dots, y_{k+1}) \mid \sum y_i^2 < 1\}$ とせよ。 $D_x^{k+1}(r) = \{(x_1, \dots, x_{k+1}) \mid \sum x_i^2 \leq r^2\}$ 、 $D_y^{k+1}(r) = \{(y_1, \dots, y_{k+1}) \mid \sum y_i^2 \leq r^2\}$ とせよ。local chart (U, ϕ) of S^{2k+3} が次の条件を満たすとき *pass-move-chart of K* と呼ぶ。

$$(1) \phi(U) \cong R^{2k+3} = (0, 1) \times D_x^{k+1} \times D_y^{k+1}$$

$$(2) \phi(g(\Sigma^{2k+1}) \cap U) = [\{\frac{1}{2}\} \times D_x^{k+1} \times \partial D_y^{k+1}(\frac{1}{3})] \amalg [\{\frac{2}{3}\} \times \partial D_x^{k+1}(\frac{1}{3}) \times D_y^{k+1}]$$

$g_U : \Sigma^{2k+1} \hookrightarrow S^{2k+3}$ をつぎの条件を満たす embedding とせよ。

$$(1) g|_{\{\Sigma^{2k+1} - g^{-1}(U)\}} = g_U|_{\{\Sigma^{2k+1} - g^{-1}(U)\}}, \text{ and}$$

$$(2) \phi(g_U(\Sigma^{2k+1}) \cap U) = [\{\frac{1}{2}\} \times D_x^{k+1} \times \partial D_y^{k+1}(\frac{1}{3})] \amalg$$

$$[\{\frac{2}{3}\} \times \partial D_x^{k+1}(\frac{1}{3}) \times (D_y^{k+1} - D_y^{k+1}(\frac{1}{2}))]$$

$$\cup [[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \times \partial D_x^{k+1}(\frac{1}{3}) \times \partial D_y^{k+1}(\frac{1}{2})]$$

$$\cup [\{\frac{1}{3}\} \times \partial D_x^{k+1}(\frac{1}{3}) \times D_y^{k+1}(\frac{1}{2})]$$

K_U を g_U によって定義される $(2k+1)$ -knot とする。このとき K_U は K から (*high dimensional*) *pass-move in U* によって得られたと言う。

$(2k+1)$ -knot K and K' が (high dimensional) pass-move equivalent とは次のこととする。
 $(2k+1)$ -knots $K=K_1, K_2, \dots, K_q, K_{q+1}=K'$ があって K_{i+1} が K_i から K_i ($i=1, \dots, q$) のあるひとつの pass-move-chart での high dimensional pass-move によって得られる。

高次元 pass-move に関して次の結果が成り立つことを示した。 $(k=0$ の場合は Kauffman [13] による。) この結果は定理 1 の証明と関係があることも示した。

定理 $(2k+1)$ -knots K_1 と K_2 に対して次のふたつは同値。 $(k \geq 0)$

(1) ある $(2k+1)$ -knot K_3 があって、 K_3 と K_1 は pass-move 同値であり、 K_3 と K_2 は cobordant である。

(2) K_1 と K_2 が次の条件を満たす。

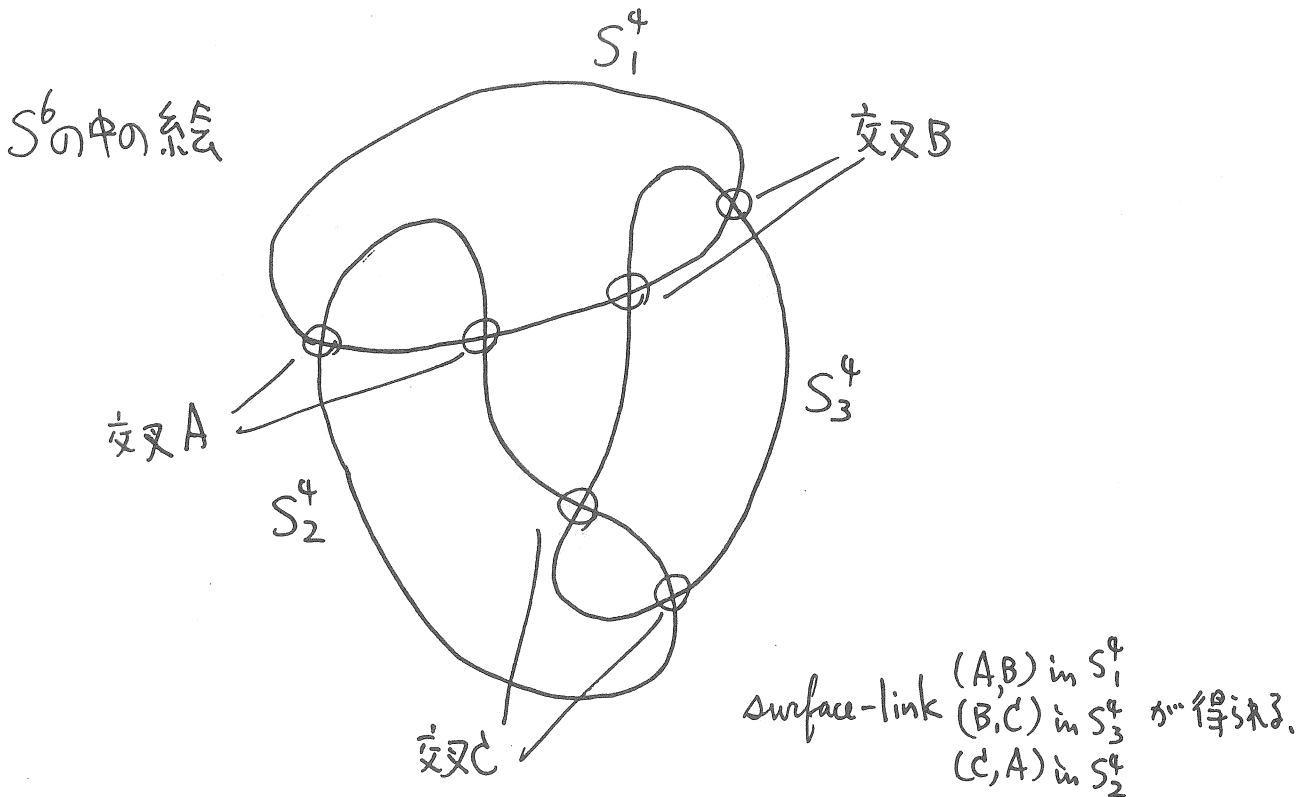
$$\text{Arf}(K_1) = \text{Arf}(K_2) \quad (k \text{ が偶数のとき})$$

$$\sigma(K_1) = \sigma(K_2) \quad (k \text{ が奇数のとき})$$

【3】 ([5] 参照)

【1】【2】の設定をつぎのようにした場合のことも考えた。

3個の 4-sphere S_1^4, S_2^4, S_3^4 が S^6 にそれぞれ埋め込まれていて、お互いに交叉しているとする。 $S_1^4 \cap S_2^4 \cap S_3^4 = \emptyset$ 。 $S_i^4 \cap S_j^4$ は connected とする。すなわち connected oriented surface である。surface による 2-dimensional link $L_i = (S_i^4 \cap S_j^4, S_i^4 \cap S_k^4)$ が得られた。ただし $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 1, 3), (3, 1, 2)$ 。このような (L_1, L_2, L_3) としてどのようなものが得られるかを研究した。



『定理 1. (L_1, L_2, L_3) が上のような交叉として得られるとする。かつ、各 L_i は semi-boundary link とする。このとき

$$\beta(L_1) + \beta(L_2) + \beta(L_3) = 0.$$

ただし $\beta(L_i)$ は L_i の Sato-Levine invariant である。』

さらに上の定理と Sato, Ruberman の結果より 次の 定理. 2 が成り立つ。(Sato-Levine invariant およびこれらの結果は [14] 参照。)

『定理 2. ある (L_1, L_2, L_3) は、上のような交叉として得られない。』

また次のことも示した。

『定理. もし各 L_i が split link ならば (L_1, L_2, L_3) が上のような交叉として得られる。』

『定理. $\beta(L_1)=\beta(L_2)=1$. $\beta(L_3)=0$. というある (L_1, L_2, L_3) が上のような交叉として得られる。』

『定理. 各 L_i が non-semi-boundary な、(resp. non-boundary かつ semi-boundary な、) ある (L_1, L_2, L_3) が上のような交叉として得られる。』

また次のことを指摘した。

『各 L_i の component が sphere とする。もしも (L_1, L_2, L_3) で上のような交叉として得られないものがあれば次の有名な未解決問題 ([9],[10],[11], 参照) に対する答が No となる。“すべての 2-dimensional link は slice か?”』

同様の定理が高次元でも成り立つと思われる。

定理 1 の証明の工夫したところを言う。Sato-Levine invariant はもともとは $\pi_4(S^2)$ に値をとるが、これを Ω_2^{spin} に値をとると読みかえる。

【4】 ([6], 参照)

【1】の論文の交叉 $S_1^{n+2} \cap S_2^{n+2}$ が、ある n 次元 PL connected closed oriented manifold M と diffeomorphic とする。 $S_1^{n+2} \cap S_2^{n+2}$ in S_i^{n+2} は n 次元 M -knots K_i を定義するとする。

$n = 3$ のときには、必要十分条件を得た。

『定理. $n=3$ のとき。 (K_1, K_2) が前述のような交叉として実現されることは、 $\sigma(K_1)=\sigma(K_2)$ と同値。』

他の次元では。

『定理. $n=4m+3$ のとき。 (K_1, K_2) が前述のような交叉として実現されるならば、 $\sigma(K_1)=\sigma(K_2)$ となる。』

『定理. $n=4m+1$ のとき。ある M に対して、かつてな M -knots の pair (K_1, K_2) が前述のような交叉として実現される。』

この定理は M の inertia 群が自明でないことを系として含む。この系は Brown and Steer の結果を含む。

『定理. $n=4m+1$ のとき。ある M_1, M_2 に対して M_i -knots の pair (K_1, K_2) が前述のような交叉として実現されることは同値関係である。同値類は M_1 のとき 2 個。 M_2 のとき 3 個。』

また次も示した。

『定理. n が even のとき。ある M に対して M -knots のある pair (K_1, K_2) が前述のような交叉として実現されない。』(これらの K_1, K_2 は cobordant でもない。)

『定理. $n=4m+1$ (resp. $n=4m+3$) のとき。ある M に対して次のような M -knots のある pair (K_1, K_2) が前述のような交叉として実現されない。 M -knots には、Arf invariant (resp. signature) が定義されて $\text{Arf}K_1 = \text{Arf}K_2$ (resp. $\sigma K_1 = \sigma K_2$)。』(このような (K_1, K_2) には Seifert 行列が matrix cobordant だが cobordant でないものもある。)

交叉が一般の n 次元 manifold M の場合について、現在、考えている。

一般の n 次元 manifold M の埋め込みについて。 $M \times D^2$ への埋め込みは Cappell and Shaneson 等の高度な研究がある。 S^{n+2} への埋め込みはさらに難しく、まだ研究すべきことは多い。上述のものは、ひとつのアプローチである。

【5】 ([2],[6], 参照)

【1】の論文の由来について書く。高次元 link に関する次の結果から下述のように発生した。

(i) 『 m 次元絡み目を link cobordism を同値関係として分類せよ。 (m は、自然数。) 任意の $2n$ -link は slice か? (n は、自然数。) 特に任意の 2-component 2-link は slice か?』
という有名な未解決の難問がある。([9] [10] [11] 参照。)

ここではこれに関して著者の得た結果の 2-component 2-link の場合を書く。(i) を下の (ii) のように解釈し直して下の (iii) の結果を得た。2次元 link $L = (K_1, K_2)$ in $S^4 = \partial B^5$ に対して Kervaire の定理を使うと次の写像 f の存在はすぐわかる。3-disks D_1^3, D_2^3 から the 5-ball B^5 への immersion $f : D_1^3 \amalg D_2^3 \rightarrow B^5$ で $f|_{D_i^3}$ は埋め込み ($i=1,2$) かつ $f(D_i^3) \cap \partial B^5 = f(\partial D_i^3)$ であって $f(\partial D_i^3)$ in ∂B^5 は 2次元結び目 K_i ($i=1,2$) となる。ここで (i) を次の (ii) のように言い換える。

(ii) 『 f をうまく取り直して $f(D_1^3) \cap f(D_2^3) = \emptyset$ とできるか?』

私は次の (iii) を示した。

(iii) 『 f をうまく取ると $f(D_1^3) \cap f(D_2^3)$ を S^1 1個にできてさらに $f(D_1^3) \cap f(D_2^3)$ in $f(D_i^3)$ を $i=1, 2$ 両方とも自明な knot にできる。』 注意:(i) は依然未解決。

また私は (ii) のような type の問題、すなわち部分多様体同士の交叉を調べるという問題は未開拓のテーマであることを提起した。この論文の話聞いて坪井俊氏は次の質問をした。これが【1】のもととなった質問である。

『(iii) において f をいろいろとりなおすと $f(D_1^3) \cap f(D_2^3)$ in $f(D_i^3)$ としてどのような knot の pair が得られるか?』

Reference

- [1] E,Ogasa, On the intersection of spheres in a sphere
東京大学修士論文 I 平成 6 年
- [2] E,Ogasa, Can we remove the intersection of slice discs for 2-links?
東京大学修士論文 I I 平成 6 年
- [3] E,Ogasa, On the intersection of spheres in a sphere I Preprint
- [4] E,Ogasa, On the intersection of spheres in a sphere II:High dimensional case Preprint
- [5] E,Ogasa, The intersection of three spheres in a sphere and a new application of the Sato-Levine invariant, Preprint
- [6] E,Ogasa, On the intersection of spheres in a sphere, 東京大学平成博士論文, 平成 8 年
- [7] E, Ogasa, Some properties of ordinary sense slice 1-links: some answers to the problem (26) of Fox, Preprint
- [8] R.H.Fox, Some problems in knot theory,
Top. 3-manifolds. Proc. 1961 Top. Inst. Georgia, pp.168-176
- [9] Cochran,T and Orr,K, Not all links are concordant to boundary links,
Ann.of Math. 138 pp.519-554 1993
- [10] Levine, Link invariants via the eta-invariant,
Comment.Math.Helv. 69, pp.82-119, 1994
- [11] Gilmer and Livingston, The Casson-Gordon invariant and link concordance,
Topology 31 pp.475-492 1992
- [12] Levine,J, Knot cobordism in codimension two,
Comment. Math. Helv. 44, pp.229-244, 1969 ,
Polynomial invariants of knots of codimension two
Ann.of Math., 84, pp. 537-554 1966
- [13] L. Kauffman, On knots, Ann of math studies115,(1987)
Formal knot theory, Princeton University Press Math. Notes30, (1983)
- [14] K. E. Orr, New link invariants and applications, Commentarii62, pp.542-560(1987)
D. Ruberman, Concrdance of links in S^4 , Contmp.Math. 35, pp. 481-483(1984)
N. Sato, Cobordisms of semi-boundary links, Topology and its applications 18
pp.225-234 (1984)
- [15] Zeeman, E, Twisting spun knots, Trans. Am. Math. Soc.115, pp.471-495 (1965)

メンガー多様体の座標構造と位相変換群

筑波大学 数学研究科 岩本豊 (研究生)

1. 序文

先ず n 次元メンガー立方体の構成法を述べろ。

$(2n+1)$ -次元立方体 I^{2n+1} の cell complex structure K_i を、その $(2n+1)$ -cell が次の形で与えられるものとする:

$$\prod \left\{ \left[\frac{k_t}{3^i}, \frac{k_t+1}{3^i} \right] \mid k_t = 0, 1, \dots, 3^i - 1 \right\}.$$

また、 $M_0^n = I^{2n+1}$ とし、以下帰納的に

$$M_i^n := |st(K_i^{(n)}, K_{i+1})| \cap M_{i-1}^n$$

と定める。このとき

$$\mu^n := \bigcap_{i=1}^{\infty} M_i^n$$

として定められた空間が n 次元メンガー立方体 (Menger cube) である。

n 次元メンガー立方体 μ^n は n 次元以下のコンパクト距離空間に対する万有空間であることが知られており、次元論等で重要な役割を担ってきた。

次元に制約のない万有空間としては ヒルベルト立方体 (Hilbert cube) $Q := \prod_{i=1}^{\infty} [0, 1]_i$ が知られており、これはコンパクト距離空間に

対する万有空間である。

共に万有空間という共通点をもつ μ^n と \mathbb{Q} であるが、後者については、 \mathbb{Q} に局所同相である可分な距離空間は \mathbb{Q} -多様体 (\mathbb{Q} -manifold) と呼ばれ、これまで多くの数学者による活発な研究が行なわれ、様々な面白い性質をもつ空間のクラスであることが知られている (cf [C])。

前者については、 μ^n に局所同相である可分な距離空間は μ^n -多様体 (μ^n -manifold) と呼ばれる。 μ^n -多様体は M. Bestvina の博士論文 [Be] において、その基礎が築かれたのであるが、特に彼は μ^n -多様体に対する次の様な位相的特徴付けを与えた。

以下特に断りのない限り空間は可分な距離空間とする。

定理 (M. Bestvina [Be]) X を n 次元局所コンパクト空間 (resp. n 次元コンパクト空間) とするとき、 X が μ^n -多様体 (resp. μ^n) に同相である必要十分条件は X が LC^{n-1} (resp. $LC^{n-1} \cap C^{n-1}$) かつ $DD^n P$ をもつことである。

ここで空間 X が $DD^k P$ (disjoint k -disks property) ($k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$) をもつとは、任意の写像対 $f, g: I^k \rightarrow X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、適当な写像対 $f', g': I^k \rightarrow X$ が $d(f, f') < \varepsilon$, $d(g, g') < \varepsilon$, $f'(I^k) \cap g'(I^k) = \emptyset$ を満たすように取れることをいう。

上の定理は \mathbb{Q} -多様体に対する H. Toruńczyk による次の特徴

付け定理に対応したものである。

定理 (H. Toruńczyk [T]) X を局所コンパクト空間 (resp. コンパクト空間) とするとき、 X が \mathbb{Q} -多様体 (resp. \mathbb{Q}) に同相である必要十分条件は X が ANR (resp. AR) かつ DD^∞ をもつことである。—

上の2つの定理にみるように μ^n -多様体論と \mathbb{Q} -多様体論は、前者が後者の有限次元版として、多くの類似性がある。一方、 M が n -多様体特有の性質も種々知られているのであるが、本稿の内容と関連したものとして、A.N. Dranishnikov による次の結果がある。

定理 (A.N. Dranishnikov [D]) 任意の(可分な)コンパクト0次元位相アベル群 G 、任意の μ^n -多様体 M に対し、 M 上には free G -action が存在する。—

これに対し、ヒルベルト立方体 Q は fixed point property をもつため、上のような free action は存在しない。

本稿では、 μ^n -多様体上の semifree action に着目し、semifree action の不動点集合に関して得られた結果について述べたいと思います。

2. メンガ-多様体の座標構造

Q-多様体の良い性質の一つに、「任意の Q-多様体 M に対し、
 適当な polyhedron K を取ることで、 $Q \cong K \times Q$ と出来る」という事実がある。
 これは、すべての Q-多様体は無限の座標を持つ形で表現出来ることを意味し、
 この性質により、多くの興味深い結果が導かれてきた。この節では、 μ^2 -多様体
 にこのような無限の座標を導入する方法 [12] について述べる。

K, L を simplicial complex とするとき、 $K \times L$ で cell complex
 $\{\sigma \times \tau \mid \sigma \in K, \tau \in L\}$ の重心細分によって定められる simplicial complex
 を表すものとする。このとき、 $K \times L$ の n -skeleton $(K \times L)^{(n)}$ を $K \times_n L$ と
 表す。次に simplicial complex の列 $\{K_i\}_{i=0}^l$ に対する ∇ -product を
 帰納的に以下のように定める:

$$\nabla_{i=0}^1 K_i := K_0 \times_n K_1, \quad \nabla_{i=0}^l K_i := (\nabla_{i=0}^{l-1} K_i) \times_n K_l.$$

又、 $l = \infty$ のときは、 $\nabla_{i=0}^{\infty} K_i$ を以下の inverse limit として定める:

$$|K_0| \xleftarrow{p_0^1} |\nabla_{i=0}^1 K_i| \xleftarrow{p_1^2} |\nabla_{i=0}^2 K_i| \xleftarrow{p_2^3} \dots,$$

ここで、 $p_j^{j+1}: |\nabla_{i=0}^{j+1} K_i| \rightarrow |\nabla_{i=0}^j K_i|$ は自然な射影

$$|\nabla_{i=0}^j K_i| \times |K_{j+1}| \rightarrow |\nabla_{i=0}^{j+1} K_i|$$

を制限することで得られる写像を表す。

Simplicial complex の無限列 $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ が次の条件 (i), (ii) を満たすとあるとき、 $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ を μ^n -coordinate system と呼ぶ:

- (i) 各 T_i は locally finite な simplicial complex で $\dim |T_i| \leq n$,
- (ii) $i \geq 1$ に対し、 $|T_i|$ はコンパクト C^{n-1} -空間である。

このとき次が成り立つ。

定理 (Triangulation) 各 μ^n -多様体 M に対し、 μ^n -coordinate system $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ で、 $M \cong \bigvee_{i=0}^{\infty} T_i$ となるものが存在する。—

μ^n -多様体 M の閉集合 A が infinite deficiency を持つとは、 M の μ^n -coordinate system $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$, 無限部分集合 $N \subset \mathbb{N}$, として homeomorphism $h: M \xrightarrow{\cong} \bigvee_{i=0}^{\infty} T_i$ で $p_j \circ h|_A: A \rightarrow |T_j|$ が各 $j \in N$ に対して定値写像となるものが存在することという。但し、 $p_j: \bigvee_{i=0}^{\infty} T_i \rightarrow |T_j|$ は自然な射影を表すものとする。

μ^n -多様体 M の閉集合 A が Z-set であるとは、任意の写像 $f: I^n \rightarrow M$ が A と交わらない像を持つ写像で近似されることという。

μ^n -coordinate system による triangulation を用いることで、 μ^n -多様体における Z-set の特徴付け定理が得られる。

定理 μ^n -多様体の閉集合 A が Z -set である必要十分条件は、 A が infinite deficiency を持つことである。—

これにより、R. D. Anderson, W. H. Cutler により、無限次元多様体に対して導入された infinite deficiency の概念 [A], [C] が有限次元の X - n -多様体にも導入出来たことになる。この概念は、後述される pseudo-interior, pseudo-boundary の具体的な構成においても有効なものである。

次に X - n -多様体どうしの積について考えてみる。残念ながら、 X - n -多様体どうしの Cartesian product は X - n -多様体にならない。以下では、Cartesian product の代わりとなるものとして、 Δ_n -product を導入し、product space に対応するものを露骨に構成する方法について述べる。

$\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ を simplicial complex の列とするとき、 $\prod_{i=0}^{\infty} S_i$ と $\prod_{i=0}^{\infty} T_i$ の Δ_n -product $(\prod_{i=0}^{\infty} S_i) \Delta_n (\prod_{i=0}^{\infty} T_i)$ を次の inverse sequence の極限として定める：

$$|S_0 \times_n T_0| \xleftarrow{\alpha_1} |(\prod_{j=0}^n S_j) \times_n (\prod_{j=0}^n T_j)| \xleftarrow{\alpha_2} |(\prod_{j=0}^{n+1} S_j) \times_n (\prod_{j=0}^{n+1} T_j)| \leftarrow \dots$$

尚、各 α_i は自然な射影により得られるものとする。

M, N を μ^n -多様体とするとき、 M, N の μ^n -coordinate system $\{S_i\}_{i=0}^{\infty}$, $\{T_i\}_{i=0}^{\infty}$ により定められる $(\prod_{i=0}^{\infty} S_i) \Delta_n (\prod_{i=0}^{\infty} T_i)$ は位相

不変量であることが分かり、これを $M \Delta_n N$ と表す。

Δ_n -product を導入しようとした理由の一つとして、A. Chigogidze によつて導入された μ^n -多様体 M に対する $(n-1)$ -homotopy kernel $[Ch]$ $Ker(M)$ を具体的な形で捕えたいと考えたことが挙げられる。もう少し詳しく述べる為にいくつかの準備をする。

2つの (proper) maps $f, g: X \rightarrow Y$ が (properly) n -homotopic (それぞれ $f \simeq^n g$, $f \simeq_p^n g$ と表わす) であるとは、任意の n 次元空間 W と (proper) map $\alpha: W \rightarrow X$ に対し、 $f\alpha$ と $g\alpha$ が常に (properly) homotopic になることをいう。

M を μ^n -多様体、 $f: M \rightarrow M$ を $f \simeq_p^{n-1} id_M$ となる Z -embedding ($f(M)$ が M の中で Z -set となる embedding) とする。このとき $M \setminus f(M)$ の位相型を M の $(n-1)$ -homotopy kernel と呼ぶ。 $Ker(M)$ と表す。

さて、A. Chigogidze が導入した $Ker(M)$ であるが、これは Q -多様体論における $[0,1)$ -stable Q -多様体に対応する μ^n -多様体となることを意識して構成されたものである。ここでいう Q -多様体 X が $[0,1)$ -stable であるとは、 $X \times [0,1) \cong X$ となることをいう。

Δ_n -product は X が n -多様体と simplicial complex としての構造を持つ空間との product まで拡張され、次の様な事が分かる。

定理 M を M^n -多様体とするとき、次のことが成り立つ。

1. $M \Delta_n \mu^n \cong M \cong M \Delta_n [0,1]$,
2. $M \Delta_n [0,1) \cong \text{Ker}(M)$.

上の関係式 2 は、 $\text{Ker}(\text{Ker}(M)) \cong \text{Ker}(M)$ となる事実と合わせること、 $\text{Ker}(M) \Delta_n [0,1) \cong \text{Ker}(M)$ という関係式を導き、これにより Δ_n -product を用いて $[0,1)$ -stability が表現されたことになる。

3. X -多様体上の semifree action

この節では、 X -多様体の座標構造の応用として、 X -多様体上の group action について述べる。

G を位相群とする。空間 X 上の G -action が free (semifree) であるとは、各点 $x \in X$ の isotropy group $G_x = \{g \in G \mid gx = x\}$ が trivial (trivial かまたは G 全体) であることをいう。

序文でも述べたが、一般に Hilbert cube 上には free G -action が存在しないのに対し、 X -多様体上には任意のコンパクト n -次元位相アベル群 G による free action が存在する [Dn], [S1]。この事実は X -多様体上の group action の研究を大変興味深いものとしている。この group action に関して、[Sa] では次の問題が提出されていた。

問題1. [S2] 任意の閉集合 $\emptyset \neq X \subset \mu^n$ に対して、 X を不動点集合とあるような μ^n 上の semifree G -action は存在するか？

ここでいう空間 Y 上の semifree G -action の不動点集合とは、集合 $\{y \in Y \mid Gy = G\}$ のことである。

一方、空間 X 上に G -action が存在すれば、各 $g \in G$ は X 上の homeomorphism に対応するから、上の問題1は homeomorphism による不動点集合の取りうる形を問うことにもなっている。[CKT] には、不動点集合論の立場をより強調して、次の問題が提出されていた。

問題2. [CKT] X が n -多様体は complete invariance property with respect to homeomorphism (CIPH) を持つか？

ここで空間 X が CIPH を持つとは、任意の空でない X の閉部分集合が X 上の適当な homeomorphism の不動点集合として実現されることという。

この2つの問題に対する解として次の結果が得られた。

定理 G をコンパクト0次元位相アベル群、 X を μ^n -多様体 M における閉部分集合とする。このとき M 上には X が不動点集合となるような semifree G -action が存在する。—

系 X - μ -多様体はCIPHをもつ。

この言証明は君羊の構造を見ながら μ^n -coordinate systemを用いて X の補集合と Z と与えられる X - μ -多様体 $M \setminus X$ を再構成することで得られるものである。

次に X - μ -多様体の pseudo-interior, pseudo-boundary について触れる。

X を完備距離空間とする。 X の Z -setの単調増大列 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ が次の条件(*)をみたすとき、 $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ を Z -skeleton, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ を Z -skeletoid といふ:

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0, \forall i \in \mathbb{N}, \forall Z\text{-set } K \subset X, \\ \exists j > i, \exists h: X \xrightarrow{\cong} X \text{ (homeomorphism) s.t.} \\ d(h, \text{id}) < \varepsilon, \quad h|_{A_i} = \text{id}, \quad h(K) \subset A_j.$$

X - μ -多様体 M の Z -skeletoidは M の pseudo-boundary と呼ばれ、それを $\Sigma(M)$ で表す。また、 $M \setminus \Sigma(M)$ は M の pseudo-interior と呼ばれ、以後これを $\nu(M)$ で表すことにする。

特に $\nu^n := \nu(\mu^n)$ は n 次元以下の完備距離空間に対する万有空間であり、種々の面白い性質を持つことが知られている [CKT]。

実は infinite deficiencyの考え方をを用いることで、上の定理において構成される semi-free G -actimは G -invariantな pseudo-boundaryを持つように構成することが出来、pseudo-interiorに関する次の

結果を得ることが出来る。

系. G をコンパクト 0 次元位相アベル群, M を μ^n -多様体とする。
このとき 任意の閉部分集合 $X \subset V(M)$ に対し, $V(M)$ 上には X を
不動点集合とするような semifree G -action が存在する。—

更に X が n -多様体の pseudo-interior (boundary) 上の free action
については次の結果が得られる。

定理. G をコンパクト 0 次元位相アベル群, M を μ^n -多様体とする。
このとき M 上には $\Sigma(M)$ を G -invariant set として持つような free G -action
が存在する。—

系. G をコンパクト 0 次元位相アベル群 とするとき, μ^n -多様体 M の
pseudo-interior $V(M)$ (pseudo-boundary $\Sigma(M)$) 上には free G -
action が存在する。—

REFERENCES

- [A] R. D. Anderson, *On the topological infinite deficiency*, Michigan Math. Jour. **14** (1967), 365–383.
- [Be] M. Bestvina, *Characterizing k -dimensional universal Menger compacta*, Mem. Amer. Math. Soc., vol. 71, no. 380 (1988), Amer. Math. Soc., Providence, RI.
- [C] T. A. Chapman, *Lectures on Hilbert Cube Manifolds*, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. **28**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1976.
- [Ch] A. Chigogidze, *Classification theorem for Menger manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **116** (1992), 825–832.
- [Cu] W. H. Cutler, *Deficiency in F -manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **34** (1972), 260–266.
- [CKT] A. Chigogidze, K. Kawamura and E. D. Tymchatyn, *Menger manifolds*, in: H. Cook et al., eds., *Continua with Houston Problem* (Marcel Dekker, New York, 1995), p. 33–88.
- [D] A. N. Dranishnikov, *On free actions of zero-dimensional compact groups*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **52** (1988), 212–228 (Russian); English transl., Math. USSR Izv. **32** (1989), 217–232.
- [I1] Y. Iwamoto, *Menger manifolds homeomorphic to their n -homotopy kernels*, Proc. Amer. Math. Soc. **126** (1995), 945–953.
- [I2] ———, *Infinite deficiency in Menger manifolds*, Glasnik Mat. **30(50)** (1995), 311–322.
- [I3] ———, *Fixed point sets of transformation groups of Menger manifolds, their pseudo-interiors and their pseudo-boundaries*, Topology Appl. **68** (1996), 267–283.
- [S1] K. Sakai, *Free actions of zero-dimensional compact groups on Menger manifolds*, Proc. Amer. Math. Soc. **122** (1994), 647–648.
- [S2] ———, *Semi-free actions of zero-dimensional compact groups on Menger compacta*, preprint.
- [To] H. Toruńczyk, *On CE -images of the Hilbert cube and characterizations of Q -manifolds*, Fund. Math. **106** (1980), 31–40.

On linear topological classification of certain function spaces

足利工業大学 共通課程

森下和彦

1 序

記号 $C_p(X)$ で, Tychonoff 空間 X 上の実数値連続関数全体からなる集合に各点収束位相を導入した空間をあらわすことにする。このとき $C_p(X)$ は局所凸線型位相空間となる。また 2 つの線型位相空間 E と F に対し, $E \sim F$ で E と F が線型位相空間として同型であることをあらわすことにする。更に compactum とは compact 距離空間を意味することとし, D^n によって n -disk, ω によって最小の無限順序数, \mathbb{R} によって実数直線, I によって単位閉区間をあらわすことにする。

(定義) 2 つの空間 X と Y に対し,

$$X \sim_l Y \iff C_p(X) \sim C_p(Y)$$

と定義し, このとき空間 X と Y は l -equivalent であると云う。

この概念に対し, 次の様な問題が考えられる。

分類問題 ある空間族 \mathcal{P} が与えられたとき, \mathcal{P} を l -equivalence により分類せよ。

ここでは, 上記問題と (位相) 次元との関わりについて述べる。ここで次元とは Lebesgue 式の被覆次元を意味することとし, 空間 X の次元を $\dim X$ と表わすことに

する。

1980 年に Pavlovskii は l -equivalence と次元との関係について次の定理を発表した。

定理 1. ([9]) X, Y ; separable complete metrizable spaces, $X \sim_l Y$,
 $\implies \dim X = \dim Y$

Miljutin の結果より, compact-open topology を持つ関数空間について

$$C_k(\{0, 1\}^\omega) \sim C_k(I)$$

(但し, $\{0, 1\}^\omega$ は Cantor set, $C_k(X)$ は, 空間 X 上の実数値連続関数全体からなる集合に compact-open topology を導入した空間をあらわす)

であることが判るので, 定理 1 は興味深く思われる。この定理は Graev [4] による古典的な free abelian topological groups に関する類似の定理を背景にしている。尚, 定理 1 は後に Pestov [10] により一般の Tychonoff 空間にまで拡張された。

更に Pavlovskii は定理 1 に関連して,

$$\exists \text{ compact metric space } X \text{ s.t. } \dim X = 2, X \not\sim_l D^2$$

を注意した。実際, X として Pontryagin の連続体 ($\dim X = 2, \dim X^2 = 3$ を満たす連続体) を考えれば良いことが知られている。

この事実から, 次の様な問題が問われることになる。

(問題)

(問題 1) どの様な空間 X に対して, $X \sim_l D^n$ となるか?

(問題 2) 他の標準的な空間に対して, その空間と l -equivalent になる空間はどの様な空間であるか?

問題 1 に対して, Pavlovskii 自身が 1 つの解答を示している。

定理 2. ([9]) X ; a finite polyhedron, $\dim X = n \geq 1$
 $\implies X \sim_l D^n$

これを契機として, 問題 1, 2 に関して様々な研究が行われた。

(1) Dranishnikov, 1986 [2]

U ; an open subset of $\mathbb{R}^n \implies U \sim_l D^n \oplus D^n \oplus D^n \oplus \dots$ (可算和) $\sim_l \mathbb{R}^n$

(2) Arhangel'skiĭ, 1989 [1]

X ; a compact CW complex, $\dim X = n \geq 1 \implies X \sim_l D^n$

(3) Valov, 1991 [11]

K ; a compact subset of \mathbb{R}^n , $\dim K = n \implies K \sim_l D^n$

(4) Valov, 1991 [11]

$E = \mathbb{R}^n$ or \mathbb{R}^ω or μ^n ($=n$ -dim. universal Menger compactum) or I^ω のいずれか,
 X ; a separable metrizable E -manifold (i.e. X admits an open cover by sets
homeomorphic to open subsets of E) のとき,

(4-1) X ; compact, $E = I^\omega$ or $\mu^n \implies X \sim_l E$

(4-2) X ; non-compact $\implies X \sim_l E \oplus E \oplus E \oplus \dots$ (可算和)

この他にも Koyama & Okada [7] による 1 次元連続体の為すある空間族における l -equivalence に関する興味深い研究がある。

これらの結果から次の問題を考えることが出来る。

(問題)

(問題 3) non-compact な CW complex について l -equivalence による分類はどうなっているのか? 特に, non-compact, locally compact polyhedron についてはどうか?

(問題 4) X ; a compact topological manifold (with or without boundary) に対し, $X \sim_l D^n$ か?

以下, 先ず問題 3, 4 について完全な解答を述べ, 更に問題 1 についての一つの定理を紹介する。尚、問題 3, 4 に対する結果は筑波大学 川村一宏 氏との共同研究により得られたものである。

2 CW 複体上の関数空間 (問題 3 への解答)

Pavlovskii は [9] において,

(5) X ; a metric space,

X_1, X_2 ; closed subsets of X s.t. $X = X_1 \cup X_2$ and $(C_p(X_1 \cap X_2))^2 \sim C_p(X_1 \cap X_2)$

$\implies C_p(X) \sim C_p(X_1) \times C_p(X_2)$

(6) $(C_p(D^n))^2 \sim C_p(D^n)$

(7) $C_p(D^m) \times C_p(D^n) \sim C_p(D^m)$ if $m > n$

を証明している。更に、定理 2 を、先ず (5) と (6) を用いて polyhedron を simplex に分解し、次に (7) を用いて最高次元の simplex と l -equivalent であることを示すことにより得た。この前半の論法を一般化して、次元に関する帰納法により (non-compact) CW complex に対し次の定理を証明した。

定理 3. ([6]) X ; a (non-compact) CW complex, $\dim X = n \geq 1$
 $\implies C_p(X) \sim \prod_{i=1}^n C_p(D^i)^{\tau_i(X)}$

但し,

$\mathcal{P}_i(X) = \{ e \mid e \text{ は他の cell の閉包に含まれない } i\text{-cell} \}$

$$\tau_i(X) = \begin{cases} 1, & |\mathcal{P}_i(X)| \text{ が有限であるとき} \\ |\mathcal{P}_i(X)|, & |\mathcal{P}_i(X)| \text{ が無限であるとき} \end{cases}$$

ここで、 $\prod_{i=1}^n C_p(D^i)^{\tau_i(X)}$ は (7) を用いて簡約し得るが、その簡約化の一意性も [6] において示されている。この定理と簡約化の一意性により locally compact かつ non-compact な polyhedron に対して次の結果を得る。

系 4. X ; a non-compact, locally compact polyhedron, $\dim X = n \geq 1$
 $\implies C_p(X) \sim (C_p(D^{p(X)}))^\omega \times C_p(D^n)$

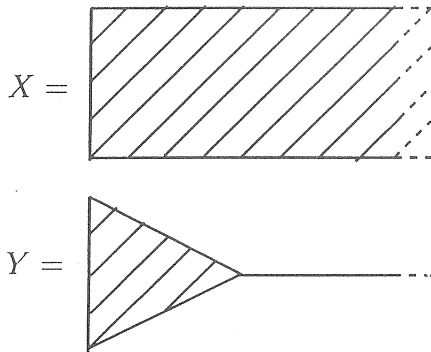
但し,

$$p(X) = \max\{ i \mid \tau_i(X) \text{ が無限} \}$$

系 5. X, Y ; finite dimensional locally compact polyhedra,
 $X \sim_l Y \iff \dim X = \dim Y \ \& \ p(X) = p(Y)$

系 4 により, 2 次元の polyhedra X, Y で l -equivalent でないものとして, 次の様な簡単な例を挙げる事が出来る。(この例において, $C_p(X) \not\sim C_p(Y)$ であることは Valov [11] の結果からも示される。)

例 6. $C_p(X) \sim (C_p(D^2))^\omega \not\sim (C_p(D^1))^\omega \times C_p(D^2) \sim C_p(Y)$ が成立する。但し,



また compact 性は l -equivalence により保たれることが知られているが, Gul'ko & Khmyleva [5] は関数空間 $C_p((0, 1))$ と $C_p(I)$ が同相であることを証明し, 2 つの関数空間が同相であるだけでは, compact 性は保存されるとは限らないことを示した。系 4 の応用として, 更に一般的な次の結果を証明することが出来る。

系 7. K ; a compact polyhedron,
 A ; a closed subset of K s.t. $\cup \{ \sigma \mid \sigma ; n\text{-simplex of } K \} \setminus A \neq \emptyset$
 $\implies C_p(K \setminus A)$ と $C_p(K)$ は同相

更に無限次元の CW complex に対しては, 次の結果を得た。

定理 8. ([6]) X ; a non-compact CW complex, $\dim X = \infty$
 $\implies C_p(X) \sim \prod_{i=1}^{\infty} C_p(D^i)^{\tau_i(X)} \times \prod_{i=1}^{\infty} C_p(D^i)^{\alpha_i(X)}$
 但し,

$$\alpha_i(X) = |\{ e \mid e \text{ は無限に多くの cell の閉包に含まれる } i\text{-cell} \}|$$

系 9. X ; a non-compact, locally compact polyhedron, $\dim X = \infty$
 $\implies C_p(X) \sim \prod_{i=1}^{\infty} C_p(D^i)$

3 Compact 多様体上の関数空間 (問題 4 への解答)

この節に限り, 分類問題を扱う空間族を separable metric に限定する。
 先ず最初に, Valov [11] の議論を振り返る。

- Compact 空間に対して ;

Characterization Theorems

定理 10. ([11]) $X \sim_l I^\omega \iff X$; compact, $I^\omega \hookrightarrow X$

定理 11. ([11]) $X \sim_l \mu^n \iff X$; compact, $\dim X = n$, $\mu^n \hookrightarrow X$

により, $E = I^\omega$ or μ^n であるとき, (4-1) を証明する。

- Non-compact 空間に対して ;

Dranishnikov [2] の議論を拡張して次の命題を証明する。

命題 12. ([11]) $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} U_i$ where $\{U_i\}$; a locally finite open cover of X ,
 s.t. $\overline{U}_i \sim_l E$
 If $\bigoplus_{i=1}^{\infty} F_i \hookrightarrow_{\text{closed}} X$ where $F_i \sim_l E$
 $\implies X \sim_l E \oplus E \oplus E \oplus \dots$ (可算和)

(命題 12 の証明のアウトライン)

仮定を用いて, 線型位相空間 V と W が存在して,

$$C_p(X) \times V \sim (C_p(E))^\omega$$

$$C_p(X) \sim (C_p(E))^\omega \times W$$

が成立することを先ず示す。更にその事実を用いて, Bessaga-Pelczyński による方法で

$$\begin{aligned} C_p(X) &\sim (C_p(E))^\omega \times W \\ &\sim ((C_p(E))^\omega \times (C_p(E))^\omega \times \cdots) \times (C_p(E))^\omega \times W \\ &\sim (C_p(X) \times V)^\omega \times C_p(X) \sim (C_p(X))^\omega \times V^\omega \\ &\sim (C_p(X) \times V)^\omega \sim ((C_p(E))^\omega)^\omega \sim (C_p(E))^\omega \\ &\sim C_p(E \oplus E \oplus E \oplus \cdots) \end{aligned}$$

と計算が出来て, 命題が示される。

この命題 12 により, (4-2) を証明することが出来る。

以上, Valov による議論を振り返ったが, compact 多様体 ($E = D^n$) に対してこれらの論法を直接適用することは出来ないので, 命題 12 の証明法を改良する。

(定義) ノルム $\|\cdot\|_V$ を持つ線型位相空間 V (但し, $\|\cdot\|_V$ と V の位相は無関係でよい) に対し,

$$V_0^\omega = \{ (x_n) \in V^\omega \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_V = 0 \}$$

とする。

命題 12 の証明中の Bessaga-Pelczyński による方法における可算積を上で定義した可算積の部分集合で置き換える (compact 空間上の関数空間に対するノルムとしては, sup-norm を考える) ことにより次の結果を得た。

定理 13. ([6]) E ; S -stable, compact, X ; compact s.t.

$$X = \bigcup_{i=1}^n U_i \text{ where } U_i \text{ ; an open subset of } X, \overline{U_i} \sim_l E \\ \implies X \sim_l E$$

但し, S -stable とは Arhangel'skiĭ によって定義された概念で,

$$E \text{ ; } S\text{-stable} \iff E \sim_l E \times (\text{収束点列})$$

D^n は S -stable であることが知られているから ;

系 14. X ; a compact topological manifold, $\dim X = n$

$$\implies X \sim_l D^n$$

4 問題 1 へのアプローチ

前節の結果より, Arhangel'skiĭ と Valov の結果は補完されたのであるが, 問題 1, 2 は依然として残っていると思われる。特に問題 1 に関して, 定理 10, 11 における I^ω , μ^n の様に, D^n に対しても簡潔な形での同値条件が得られることが最も望ましいのであるが, D^n のある意味での有限性がそれを阻んでいる。例えば, 定理 10, 11 における論法を D^n に対して適用することは出来ない。実際,

$$X \sim_l D^n \implies X \text{ ; compactum, } \dim X = n, D^n \hookrightarrow X$$

は成立する。しかし μ^1 は後半の条件を全て満たすが, 定理 11 より $\mu^1 \not\sim_l D^1$ となるので逆は成立しない。

最近、問題 1 に関して, 1 つの定理を得ることが出来た。

(定義) compactum X に対し,

$$E_n(X) = \overline{\{x \in X \mid \text{ind}_x X = n\}}$$

$\text{ind}_x X$ は云わば各点での次元と云うべきもので, 実際

$$\dim X \leq n \iff \forall x \in X, \text{ind}_x X \leq n$$

が可分距離空間 X に対して成立することが知られている。([3, Problem 1.1.B, page 7] 参照)

上で定義した記号を用いて定理は次のように述べられる。

定理 15. ([8]) Tychonoff 空間 X と $1 \leq n < \omega$ に対して以下の条件 (α) , (β) は同値

$$(\alpha) X \sim_l D^n$$

(β) X は n -dimensional compactum で次の 3 条件を充たす

(i) X は S -stable

(ii) $E_n(X)$ の non empty open subset U が存在して,

$$\forall A \subset U \text{ s.t. } \dim A = n, \text{Int}_{E_n(X)} A \neq \emptyset \ \& \ D^n \hookrightarrow A$$

(iii) \forall open subset V of $E_n(X)$, $\exists Y \subset V$ s.t. $Y \sim_l X$

この定理から次の系を得る。

$$\text{系 16. } X \sim_l D^n \implies E_n(X) \sim_l X$$

参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, *On linear topological classification of spaces of continuous functions in the topology of pointwise convergence*, Math. Sbornik 70 (1991), pp. 129-142.
- [2] A. N. Dranishnikov, *Absolute F -valued retracts and spaces of functions in the topology of pointwise convergence*, Siberian Math. J. 27 (1986), pp. 366-376.
- [3] R. Engelking, *Theory of Dimensions Finite and Infinite*, Heldermann Verlag, 1995.
- [4] M. I. Graev, *Free topological groups*, Amer. Math. Soc. Transl. (1) 8 (1962), pp. 305-364 (English Trans.).
- [5] S. P. Gul'ko and T. E. Khmyleva, *Compactness is not preserved by the t -equivalence relation*, Math. Notes 39 (1986), pp. 484-488.
- [6] K. Kawamura and K. Morishita, *Linear topological classification of certain function spaces on manifolds and CW complexes*, Top. Appl. 69, No. 3 (1996), pp. 265-282.
- [7] A. Koyama and T. Okada, *On compacta which are l -equivalent to I^n* , Tsukuba J. Math. 11 (1987), pp. 147-156.
- [8] K. Morishita, *On spaces which are l -equivalent to the disks*, in preparation.
- [9] D. S. Pavlovskiĭ, *On spaces of continuous functions*, Soviet Math. Dokl. 22 (1980), pp. 34-37.
- [10] V. G. Pestov, *The coincidence of the dimensions \dim of l -equivalent topological spaces*, Soviet Math. Dokl. 26 (1982), pp. 380-383.
- [11] V. M. Valov, *Linear topological classifications of certain function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 327 (1991), pp. 583-600.

Digital Topology について

大阪大学大学院理学研究科数学専攻
博士課程後期1年
大崎隆夫

1. 概要(ほぼ[22]の翻訳です。)

「Digital Topology」という言葉は、大まかにいうと、境界や、単連結といった topology の概念をコンピューターグラフィックスやイメージプロセッシングに使うことをいいます。この問題は1960年代の後半に Rosenfeld[19]によって導入されてから研究されています。digital topology は重要なイメージプロセッシング、例えば対象を数えたり、薄くしたり、境界を見つけたり、塗りつぶしたりといったこと、理論的な基礎を用意します。ごくごく最近まで、digital topology の全ての仕事は連結性などといった topological な事よりもむしろ、グラフ理論的なことの方に基づいていた。今は、一般的な topology を用いたアプローチがある。しかし、大部分はこれからである。1980年代中頃までの対象の概観と、関連する参考文献は[13]を見て下さい。

コンピューターグラフィックスとイメージプロセッシングの基本的な概念はバイナリイメージの概念である。 n -次元のバイナリイメージは Z^n の分割として定義される。さらに一般的にいうならば、ユークリッド n -Spaceの中に規則的に配置された grid の点を1の点と0の点の2つの集合に分けることである。2次元のバイナリイメージにおいて印刷されたページに表現された1の点は典型的に、ページ上のインクの点として表現される。2次元のバイナリイメージに加えて、3次元のバイナリイメージが非常に広くいくつかの分野で用いられている。(例えば、医療画像のような) 4次元のバイナリイメージが、動いている3次元の対象、例えば脈打つ心臓 [4]、を表現するのに用いられている。(4次元のイメージは異なる時間における3次元のイメージの積み重ねからなる。) この issue の Udupa の論文の Section 5 には5次元以上のバイナリイメージの応用の可能性が述べられている。digital topology とはどうすれば topological concept を意味を持ち、役に立つままの状態、バイナリイメージに応用できるかという疑問を扱う学問である。

digital topology は本来応用のある分野なので、この issue に応用についての論文があるということは、我々にとって非常に重要である。ここには2つの論文がある。これらは両方とも数学者以外の人間によってかかっている。一つは Jayaram Udupa という the Medical Image processing Group の Director で3次元のバイナリイメージの中に表現された対象の境界を見つける問題を議論し、また医療画像におけるその応用を考えている。もう一人はピッツバーグ大学の電気工学の助教授で Richard Hall といい与えられた thinning algorithm が1の点と0の点の「連結成分」の数をあらゆる入力に対して変えないかどうかコンピューターによって効率的に判断するためのテストを開発している。Thinning algorithm はイメージプロセッシングで、1の点のバイナリイメージをその骨組みつまり digital deformation retract に制限するような algorithm のことである。

もちろん、コンピューターグラフィックスとイメージプロセッシングのたぐいさんの問題は、digital topologyの外にあります。単純な例は"n"と"u"を区別する問題です。これは、スキャナーのプログラミングに現れます。その他の例として、許容できる thinning algorithm とそうでない thinning algorithm とを区別するのは全く topological ではない。これは次の"6"の"thinning"の結果から明らかである。ここで×は1の点のイメージである。0の点は表示されない。

```

                xxxxxxxx
               xxxxxxxx
              xxxxxxxx
             xxxxxxxx
            xxxxxxxx
           xxxxxx
          xxxxx
         xxxxx
        xxxxx  xxxxxx
       xxxxx  xxxxxxxxxx
      xxxxxxxxxx xxxxxx
     xxxxxxxx  xxxxxx
    xxxxxx    xxxxxx
   xxxxxx    xxxxxxxxxx
  xxxxxxxxxx
 xxxxxxxxxx
xxxxxxx

```

Input

```

                xxxxxx
               xx
              xx
             xx
            xx
           xx
          xx
         xx  xxx
        xx  xxx  xx
       xx  xxx  xx
      xx  xxx  xx
     xx  xxx  xx
    xx  xxx  xx
   xx  xxx  xx
  xx  xxx  xx
 xxxxxxxx

```

Acceptable output

```

                x
               xxxxxx
              xxxxxx
             xxxxxx
            xxxxxx
           xxxxxx
          xxxxxx
         xxxxxx
        xxxxxx
       xxxxxx
      xxxxxx
     xxxxxx
    xxxxxx
   xxxxxx
  xxxxxx
 xxxxxx

```

Unacceptable output

コンピューターグラフィックスとイメージプロセッシングの社会は大部分は digital topology に対して、グラフ理論的なアプローチをしている。バイナリイメージはに近接条件をいれることにより、グラフにされます。例えばこのアプローチは Hall と Udupa の論文に用いられています。2次元のバイナリイメージに対して最も頻繁に用いられる \mathbb{Z}^2 の近接条件は次のようなものです。これを (8, 4) 近接条件とよんでいます。

2つの1の点はそれらが、8-adjacentのとき近接 (adjacent) である。0の点と1の点、または、0の点2つは4-adjacentのとき近接である。

\mathbb{Z}^2 の2つの点 (x, y) と (x', y') が、8-adjacent とは $\max(|x-x'|, |y-y'|) = 1$ であること。4-adjacent であるとは $|x-x'| + |y-y'| = 1$ であること。(同じように2点 $(x, y, z), (x', y', z')$ が 26-adjacent とは $\max(|x-x'|, |y-y'|, |z-z'|) = 1$ であること。6-adjacent とは $|x-x'| + |y-y'| + |z-z'| = 1$ であること。18-adjacent とは 26-adjacent でさらに $|x-x'| + |y-y'| + |z-z'| \leq 2$ であること。)

digital topology へのグラフ理論的なアプローチの問題点の1つは \mathbb{Z}^n のどんな近接条件が、合理的に(8, 4)近接条件の代わりになるのかを決めることである。普通、近接条件をバイナリイメージから得られたグラフに対して \mathbb{R}^n の基本的な位相の性質(例えば the Jordan-Brouwer separation theorem や unicoherence のように)が自然な類似性をもつように扱いたい。それ故、4-または8-adjacency は普通どちらも \mathbb{Z}^2 の近接条件としては用いられない。(例えば、Jordan curve theorem が[19]の結果のグラフに対して成り立たないから。)この本の論文において Kong と Roscoe と Rosenfeld が \mathbb{Z}^2 と \mathbb{Z}^3 に対してよい近接条件を見つける問題について書いている。とりわけ、彼らは望ましい性質を持った離散の場合の基本群を定義できるような近接条件の大きな同値類を識別している。彼らはこれらの近接条件を持つバイナリイメージが \mathbb{R}^2 や \mathbb{R}^3 のその他の重要な性質を持つことを示した。

Khalimsky によって導入された1次元の場合の拡張された記述([5],[6]を見よ)は我々が「topological approach」([11])と呼ぶ異なった digital topology へのアプローチに対する基盤を用意する。これは connected ordered topological space(COTS)の古典的な記述の1つを T_1 から T_0 に拡張する。([6]を見よ)：connected ordered topological space (COTS)とは連結空間で、各3点を含む部分空間は、その内の1点を除くと、残りの2点は2つの異なった連結成分に分かれる様なものこと。通常順序をつけられた \mathbb{Z} 上には唯一のCOTS topology が存在する。この topology の subbase は $\{\{2n-1, 2n, 2n+1\} | n \in \mathbb{Z}\}$ によって表される。この空間の2つの直積空間として定義される空間を digital plane と呼ぶ。より一般的に、digital n -space を COTS topology の入った \mathbb{Z} の n 個の直積空間として定義する。

digital n -space の異なった構成法があります。それは \mathbb{R}^n に同値関係 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \sim (y_1, y_2, \dots, y_n)$ を各 i について $\lfloor x_i \rfloor = \lfloor y_i \rfloor$ と $\lceil x_i \rceil = \lceil y_i \rceil$ が成り立つこと、として定義する。(ただし、 $\lfloor z \rfloor$ と $\lceil z \rceil$ はそれぞれ $\leq z$ を満たす最も大きい整数と $\geq z$ を満たす最も小さい整数である。)このとき、digital n -space とは商空間 \mathbb{R}^n / \sim の事である。この商写像は開写像である。

digital n -space は均質ではない。：無限に多い点が開で、無限に多い点が開である。 $n > 2$ のときはそのどちらでもない点も無限にあります。我々は、通常バイナリイメージの点を、digital n -space の開点によって識別します。開でない点のことは「目に見えない境界元」として扱います。([7],[11]を見よ)次の理由から、開の点を「可視」、そうでない点を「不可視」と見なすことにします。開の点の商写像による逆像は n 次元の単位開立方体になります。しかし開でない点の逆像はそのような立方体の r 次元の面になりその測度は \mathbb{R}^n で0になります。

大変よく似た定理が、Kovalevsky [15]によって発展させられてきました。彼は Khalimsky と独立して digital n -space を発見した。Kovalevsky はこの定理に基づいた多くのアルゴリズムを開発し、学術的用途や商業

的用途に適用した。

digital n -space とは Alexandroff space である。(i.e. 全ての点が最小の近傍を持つような空間。または、任意の開集合の共通部分が開集合であり、任意の閉集合の和集合が閉集合である様な空間。) Alexandroff space では $d(S) = \cup\{d(\{y\}) \mid y \in S\}$ が成り立つ。なぜなら、後ろの部分の集合が閉集合だから。

Alexandroff space に対して $x \in d(\{y\})$ のときに $x \leq_s y$ で定義されるような Alexandroff specialization [1] \leq_s が大変役に立つ。この関係は疑似順序である。(i.e. 反射律と推移律を満たす。)しかし、対称ではない。それ故、空間が T_0 であれば部分順序である。Alexandroff space の集合 S が閉集合であることと、 $S = d(S)$ であることが等しく、また $y \in S$ かつ $x \leq_s y$ であれば、 $x \in S$ が成り立つ事とも等しいので、Alexandroff space は specialization order によって完全に決定される。さらに、すべての疑似順序は Alexandroff space の specialization order である。

Alexandroff space の集合 S が連結であるとは、 S の点の任意の対 p, q に対して、 S の有限点列 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ で $x_0 = p, x_n = q$ で各 i について $x_i \leq_s x_{i+1}$ か $x_{i+1} \leq_s x_i$ のいずれかが成り立つようなものが存在すること。連結 Alexandroff space の鍵となる性質は、弧状連結の形と考えることができる。これは、連結性や連結成分を、グラフ理論的に考えることができるので重要である。[8]

digital n -space は T_0 である。しかし、ではなく、正規でも、正則でもない。Alexandroff space は離散で \leq_s が等号であるときのみ、 T_1 になる。

Alexandroff space は全ての閉集合が、開集合であるとき、つまり \leq_s が同値関係のときに正規になる。(それ故、正規 Alexandroff space の任意の連結集合の閉包は境界を持たない空間の成分である。) Alexandroff space はどの連結成分も、空でない互いに交わらない2つの部分集合を含まないとき、つまり同じ連結成分に含まれる全ての2点 x, y に対してある点 z が存在して $z \leq_s x$ と $z \leq_s y$ が成り立つとき、正則になる。(それ故、正則 Alexandroff space の全ての有限連結成分は含まれるある点の最小の近傍でなければならない。) これは T_1 で正規または正則な Alexandroff space のみを使って全てのバイナリイメージのモデルを望むわけには行かないことを示唆している。

T_0 Alexandroff space の重要な性質は、そのような全ての空間は metric analog を持つことである。[8,9] metric analog とは与えられた空間が、開で商空間であるような距離空間で、2つの空間のホモトピー性質が密接に結びついているものである。 T_0 空間 X が Alexandroff space であるだけでなく、全ての点が有限の閉包と有限の近傍を持つようなときには、(digital n -space の場合のように。) X の1つの metric analog が次のようにして得られる。抽象的な単体が X の pairwise connected な部分集合になるような、単体複体と見なせばよい。(pairwise connected な空間とは全ての2点部分集合が、連結であること。) この構成を使うことにより、digital n -space についての多くの結果を、 n 次元ユークリッド空間の類似の結果から得ることができる。例えば、Alexander Duality

Theorem から Jordan separation theorem が $n > 1$ の digital n -space でも成り立つことを推測できる。この証明は [14] で与えられた、digital 3-space における Jordan surface theorem の証明の簡単な一般化である。

実際、同様の手法がグラフ理論に基づいたアプローチにおいても用いられ得る。例えば、[12] をみれば、より直感的な digital 3-space のための別証を与えるために "continuous analog" が用いられている。そして、その定理が (6, 18), (18, 6) のみならず、(6, 26), (26, 6) にたいしても同様に成り立つことを示した。

全ての T_0 Alexandroff space に対して metric analog が存在するということは、我々に、その topology が可算個の Alexandroff space の topology の合併であるような全ての T_0 space にたいして metric analog が存在することを推測させる。これの大変特別な場合として、全ての第 2 可算 T_0 space は metric analog をもつ。しかし、我々は、metric analog を持つような空間の自明でない特徴付けを見つけることはできなかった。

digital n -space に対する Jordan separation theorem の 2次元の場合は、ユークリッド空間の Jordan separation theorem を用いいることなしに、直接示せる。[6] これは、digital topology への topological なアプローチの最初の結果の一つである。Neimann-Lara と Willson の論文は digital plane の specialization order から派生するグラフを含む平面のグラフの同値類に対して、Jordan curve theorem を示すために、ユークリッド空間の Jordan curve theorem とグラフ理論の議論を用いた。この結果は digital plane における Jordan curve theorem をほのめかしている。

Kronheimer は彼の 2本の論文で、大変興味深い digital n -space の一般化を行った。彼は、空間の窓割り (fenestration) なるものを定めた。これは、Window とよばれる互いに交わらない開集合の族で、その和集合が稠密であるものである。彼は X の任意の窓割りについて、 X の開商空間として最も小さい空間で、各 Window が 1 点に、そして 2 つの異なった Window が異なる 2 点に写されるようなものが存在することを示した。彼はこの商空間のことを、minimal grid of fenestration と呼んだ。digital n -space とはちょうど \mathbb{R}^n の明らかな fenestration の minimal grid である。彼は、その最初の論文で、グラフ理論的なアプローチを自分の論文にどのようにして結びつけるかを説明し、2つめの論文で、彼の定理から生じる空間の topology についてと、それらを Wallman-type のコンパクトかにおける埋め込みのように扱うテクニック調べた。

Kronheimer の論文に見られるように、digital topology の topological なアプローチはいくらかの興味深い数学の問題を生じさせる。しかし、その実際的な世界における最終的な成功は、グラフ理論的なアプローチによるアルゴリズムと同じぐらい効果的かつ有用にコンピューターグラフィックスや、イメージプロセッシングのためのアルゴリズムに利用できる範囲に依存するだろう。

2. 私の仕事

前章の最後で触れた、Kronheimer の論文 [23] の最後に、ある条件を満たす minimal grid の商写像が digital image の商写像による逆像と、digital image との間の弱ホモトピー同値写像になることが書いてある。しかし、digital image の商写像による逆像は必ずしも digital image をつ

くる元となった集合と、弱ホモトピー同値ではない。そこで、私は digital image をつくる元となった集合と digital image の商写像による逆像との間にホモトピー同値が成り立つような fenestration の条件を求めた。この fenestration は普通の n -cube の形だが、対象の集合によってその大きさに条件がつく。

私は、この定理を任意の微分可能多様体について証明した。この定理は、微分可能多様体が、 \mathbb{R}^n に埋め込まれていて、その管状近傍の半径の最小値がわかっていたら、必要とされる fenestration の小ささは自動的に計算でき、それにより digital image も自動的に求められる。digital image からホモロジー群を計算できるので、後わずかに残っている自動化できていない部分をなくせば、多様体のホモロジー群の計算を機械的に行えるアルゴリズムが手にはいる。これは三角形分割や、CW複体分割のように人間の直感に頼らなくて済むアルゴリズムが作れることを意味している。

参考文献

- [1] P.Alexandroff, Diskrete Räume, Mat. Sb. 2(1937) 501-518
- [2] D. Cohen and A. Kaufman, Fundamentals of the voxelization of surfaces, Texh. Rept. 91.08.26., Department of Computer Science, SUNY at Stony Brook.
- [3] G.T. Herman, On topology as applied to image analysis, Comput. Vision Graphics Image Process. 52(1990)409-415.
- [4] G.T. Herman and H.K.Liu, Dynamic boundary surface detection, Comput. Vision Graphics Image Process. 7(1978)130-138.
- [5] E.D. Khalimsky, On topologies of generalized segments, Soviet Math. Dokl.10(1969)1508-1511.
- [6] E.D. Khalimsky, R. Kopperman and P.R. Meyer, Computer graphics and connected topologies on finite ordered sets, Topology Appl. 36 (1990)1-17.
- [7] E.D. Khalimsky, R. Kopperman and P.R. Meyer, Boundaries in digital planes, J. Appl. Math. Stochast. Anal. 3(1990) 25-55.
- [8] T.Y. Kong and E.D. Khalimsky, Polyhedral analogs of locally finite topological spaces, in: R.M. Shortt, ed., General Topology and Applications: Proceedings of the 1988 Northeast Conference (Marcel Dekker, New York, 1991) 153-164.
- [9] T.Y. Kong, R. Kopperman and P.R. Meyer, Which spaces have metric analogs?, in: S.J. Andima et al., eds., General Topology and Applications: Proceedings of the Fifth Northeast Conference (Marcel Dekker, New York, 1991) 209-215.
- [10] T.Y. Kong, R. Kopperman and P.R. Meyer, Using general topology in image processing, Research in Informatics (Akademie Verlag, Berlin, 1991) 66-71. (There is a page missing from the published version of this paper. A correct copy can be obtained from any of the authors.)
- [11] T.Y. Kong, R. Kopperman and P.R. Meyer, A topological approach to

- digital topology, Amer. Math. Monthly 98 (1991) 901-917.
- [12] T.Y. Kong and A.W. Roscoe, Continuous analogs of axiomatized digital surfaces, Comput. Vision Graphics Image Process. 29 (1985) 60-86.
- [13] T.Y. Kong and A. Rosenfeld, Digital topology, introduction and survey, Comput. Vision Graphics Image Process. 48 (1989) 357-393.
- [14] R. Kopperman, P.R. Meyer and R.G. Wilson, A Jordan Surface theorem for three-dimensional digital spaces, Discrete Comput. Geom. 6 (1991) 155-161.
- [15] V.A. Kovalevsky, Finite topology as applied to image analysis, Comput. Vision Graphics Image Process. 46 (1989) 141-161.
- [16] D.G. Morgenthaler and A. Rosenfeld, Surfaces in three-dimensional digital images, Inform. and Control 51 (1981) 227-247.
- [17] G.M. Reed, On the characterization of simple closed surfaces in three-dimensional digital images, Comput. Vision Graphics Image Process. 25 (1984) 226-235.
- [18] G.M. Reed and A. Rosenfeld, Recognition of surfaces in three-dimensional digital images, Inform. and Control 53 (1982) 108-120.
- [19] A. Rosenfeld, Connectivity in digital pictures, J. ACM 17 (1970) 146-160.
- [20] A. Rosenfeld, Arcs and curves in digital pictures, J. ACM 20 (1973) 81-87.
- [21] A. Rosenfeld, Three-dimensional digital topology, Inform and Control 50 (1981) 119-127.
- [22] T. Yung Kong, Ralph Kopperman and Paul R. Meyer, Guest Editors' Preface to Special Issue on Digital Topology, Topology and its Applications 46 (1972) 173-179.
- [23] E.H. Kronheimer, The topology of digital images, Topology and its Applications 46 (1972) 279-303.

Chromatic の視点からみたホモトピー群 について

下村克己

鳥取大学教育学部

ホモトピー論に chromatic 的観点を導入したのは、Miller, Ravenel, Wilson の論文 [11] によってであった。物理で光を研究するのに、一つの光をプリズムで分解してそれぞれの波長での性質を調べるように、ホモトピー群を光に見立て、波長に対応するものとしてある種の周期とし、それにより、ホモトピー群を分解して調べるということを chromatic 的観点から調べるということにする。これを純代数的な観点からみて、その幾何学的な応用への有効性について述べたのが [11] であった。実際その時点でかなりの話題であった球面のホモトピー群の元 $\gamma_1 \in \pi_{2(p-1)(p^2-1)-3}(S^0)$ がゼロかどうかという問題に明確な解答を与えさらにその一般化まで証明している。代数的な計算結果を幾何学的結果に応用するのは、Adams-Novikov スペクトル系列である。BP を Brown-Peterson スペクトラムとすると、BP_{*}-ホモロジー論が $BP_*(-) = \pi_*(BP \wedge -)$ で与えられ、 $BP_* = BP_*(S^0) = \mathbb{Z}_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$, $BP_*(BP_*) = BP_*[t_1, t_2, \dots]$ であることが Quillen により与えられている (cf. [1])。ただし、 S^0 は球面スペクトラムを表す。このとき、Adams-Novikov スペクトル系列は

$$E_2^{s,t}(X) = \text{Ext}_{BP_*(BP)}^{s,t}(BP_*, BP_*(X)) \implies \pi_{t-s}(X).$$

ここ以下で、素数 p を一つ定め、スペクトラム X は p で局所化しているものとする。論文 [11] では $E_2^{*,*}(S^0)$ に Hazewinkel の生成元 v_n に関する周期を導入した。それは、そこで導入した chromatic スペクトル系列

$${}^c E_1^{n,s,*} = \text{Ext}_{BP_*(BP)}^{s,*}(BP_*, M^n) \implies E_2^{n+s,*}(S^0)$$

の n に関するものである。周期 v_0, v_1 に関する部分は、既に、Novikov 等により与えられていたが、[11] では周期 v_2 に関しては $p > 2$ の場合に完全に決定している。 $(p = 2$ は [20]) さらに周期 v_3 に関する部分は γ -元に関するところまでも調べている。この意味で、 E_1 -項 ${}^c E_1^{*,*}$ 自身何かありそうである。これらに関しては次の §1 で解説する。

次にこの考え方をそのままスペクトラムに応用できないかということについて、Ravenel が論文 [15] で Bousfield [2] の局所化を用いて、考察した。そこで使われるホモロジー論は Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)_*(-)$ であった。それに関する Bousfield 局所化関手を $L_n: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ と書く。ここに \mathcal{S} は p -局所化されたスペクトラムのホモトピー圏を表す。それを用いて、論文 [15] でその後の安定ホモトピー論の方向を示す 6 つの予想を立てている。当時は、Ravenel 自身を含めて誰も、今世紀中にそれらがすべて解かれるとは思っていなかったが、Hopkins, Devinatz, J. Smith や Ravenel 自身により望遠鏡予想を除きすべて肯定的に解かれた ([5], [8], [9], [18])。また望遠鏡予想は、周期 v_n ($n < 2$) に関しては肯定的に解かれてるが、 v_2 に関して Ravenel 自身により反例があげられた ([19])。これから $n > 2$ の場合も多分正しくないであろうと考えられている。さらに Ravenel は chromatic スペクトル系列の幾何学的実現にも成功している (cf. [17])。

Johnson-Wilson ホモロジー $E(n)_*$ に基づく Adams-Novikov スペクトル系列

$$E_2^{s,t}(L_n X) = \text{Ext}_{E(n)_*(E(n))}^{s,t}(E(n)_*, E(n)_*(X)) \implies \pi_{t-s}(L_n X)$$

($X \in \mathcal{S}$, $E(n)$ はホモロジー論 $E(n)_*(-)$ を実現するスペクトラム。) は、 X が有限で、素数 p が n と比べて、ずっと大きいときはつぶれて、

$$\sum_{k=t-s} E_2^{s,t}(L_n X) = \pi_k(L_n X)$$

となっている。このことから、有限スペクトラムの圏 \mathcal{F} を考えるときは p が十分大きいときはまったく代数的に考えていいことになる。この考えから、Hopkins 等は代数幾何学的方面からこれを調べている。この方面からの分析は、Morava に端を発するものであるが、Hopkins, Devinatz 等はそれらをもっと精密にし、さらに広げている (cf. [6], [4], [26])。さらに、Hopkins-Ravenel により、 $X \simeq \text{holim}_{\mathcal{I}_n} L_n X$ が有限複体に対して示された (cf. [18])。 L_n は $K(0) \vee \cdots \vee K(n)$ に関する局所化関手でもあることに注意すれば、 $L_{K(n)} X$ が $L_n X$ と $L_{n-1} X$ の差を計るのに使われることが分かる。よって、 $L_{K(n)} X$ が全部分かれれば、 X が (現実には大変難しいが) 分かるという具合である。これを調べるのに形式群を調べることにより、Morava stabilizer algebra S_n が E_n に作用することが分かり、 $L_{K(n)} S^0 = E_n^{hS_n}$ (homotopy fixed point spectrum) が Hopkins-Miller(-Ravenel?) により示された (cf. [10])。ここに、 E_n は $E(n)$ に関連したス

ペクトラムである。従って、homotopy fixed point set スペクトル系列

$$E_2 = H^{*,*}(S_n; E_{n*})^{Gal} \implies \pi_*(L_{K(n)}S^0)$$

がある。ここで、 $Gal = Gal(W(F_{p^n})/Z_p) = Z/n$ 。ここでは Morava stabilizer algebra が自然に表れるので、これが本質のように思われる。これについては §2 でもう少し詳しく述べる。

ここまでは素数 p が n に比べて十分大きい場合であったが、 p が小さいときも同様な性質が成り立ちそうである。しかしながら、そこでは $\pi_*(L_n X) \neq E_2^{*,*}(L_n X)$ なので、上のような理論が使えない。(他の代数的なもの、たとえば、V. Smirnov の $A_{\infty-}$, $E_{\infty-}$ 構造に依るとか、を使える可能性はあるが、...) 今のところ、Adams-Novikov スペクトル系列を計算している。その結果、今のところ $p \gg 0$ で成り立つ性質で、小さい p では成り立たないという例らしきものは出ていない。これらの具体的な結果に関しては、§3 で述べる。

§1. Chromatic spectral sequence

$A = Z_{(p)}[v_1, v_2, \dots]$, $\Gamma = A[t_1, t_2, \dots]$ を Brown-Peterson 環スペクトラムから得られる Hopf algebroid とする。このとき、 A 自身は Γ -comodule になっている。そこで、 $N^0 = A$ と置き、帰納的に短完全列

$$0 \longrightarrow N^n \longrightarrow v_n^{-1}N^n \longrightarrow N^{n+1} \longrightarrow 0$$

により、 Γ -comodule N^n を定義する。 Γ -comodule M に対し、 $H^*M = \text{Ext}_{\Gamma}^*(A, M)$ を考えると、 H^*- は $\text{Hom}_{\Gamma}(A, -)$ の右導来関手であるから、上の短完全列から、長完全列が得られ、それは完全対を与えるので、スペクトル系列

$$\mathcal{O}E_1^{n,*} = H^*M^n \implies H^{*+n}A \quad (M^n = v_n^{-1}N^n)$$

ができる。これを chromatic spectral sequence という。この収束先は球面のホモトピー群に収束する Adams-Novikov スペクトル系列の E_2 -項である。さらに、この E_1 -項は、 $H^*K(n)_*$ から、Bockstein スペクトル系列により得られる。ここに、 $K(n)_* = F_p[v_n, v_n^{-1}]$ は Morava K -理論である。これにより周期性が得られる。即ち、Adams-Novikov の E_2 -項を、 $K(n)_*$ に関連した H^*M^n に分解して調べると E_2 -項では見えなかった周期性が見えてくるというわけである。さらに、 $H^*K(n)_*$ は Morava の change of

rings theorem により、Morava stabilizer algebra S_n のコホモロジーから得られる。Morava stabilizer algebra は形式群の理論から出てくるので、ここで、代数幾何学と結びつくのである。その理論により、

Morava の定理： $(p-1) \nmid n$ のとき、 $s > n^2$ に対し $H^s S_n = 0$ であり、 $0 \leq s \leq n^2$ に対し、 $H^s S_n = H^{n^2-s} S_n$ 。

この前半部を言いかえれば、 p が n より十分大きければ、 $s > n^2$ のとき、 $H^s S_n = 0$ 、よって、 $H^s M^n = 0$ 。これに関して次の予想がある。

予想： $n < p-1$ のとき、 $s > n^2 - n + 1$ ならば、 $H^s M^n = 0$ で、 $H^{n^2-n+1} M^n = \mathbf{Q}/\mathbf{Z}_{(p)}$ 。

Morava の定理の後半に関して、Hopkins-Gross により、より一般的な双対性が示されている。即ち、

Hopkins-Gross の定理： $n < p-1$ のとき、 Γ -comodule $M = v_n^{-1} A/(p, v_1^{e_1}, \dots, v_{n-1}^{e_{n-1}})$ に対して、 $u \in \mathbf{Z}$ が存在し

$$H^s M \cong H^{u-s} M.$$

特に Morava の定理は $e_1 = \dots = e_n = 1$ としたもので、 $u = n^2$ となっている。

§2. Bousfield localization functor

スペクトラム E に対してスペクトラムのホモトピー圏 \mathcal{S} 上の関手 $L_E : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ と自然変換 $\eta : 1 \rightarrow L_E$ が「(i) $E_*(\eta_X) : E_*(X) \rightarrow E_*(L_E X)$ は同型であり、(ii) $E_*(f) : E_*(X) \cong E_*(Y)$ を満たす $f : X \rightarrow Y$ に対して、 $rf = \eta_Y$ となる $r : Y \rightarrow L_E X$ がただ一つ存在する」を満たすとき、 L_E を E に関する Bousfield 局所化関手という。各スペクトラム E に関して、Bousfield 局所化関手の存在が示されている ([2])。 $L_n : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ で Johnson-Wilson スペクトラム $E(n)$ に関する Bousfield 局所化関手を表す。これは、Morava の K -理論 $K(0) \vee \dots \vee K(n)$ に関する局所化関手でもある。さらに、 $L_n L_{n+1} = L_n$ であることから、 $\eta_{L_{n+1} X}$ により射影系

$$L_0 X \longleftarrow L_1 X \longleftarrow \dots \longleftarrow L_n X \longleftarrow L_{n+1} X \longleftarrow \dots$$

が得られ、 X が有限のとき Hopkins-Ravenel により、 $X \simeq \varinjlim_n L_n X$ が示された。従って、 $\eta_{L_{n+1}X} : L_{n+1}X \rightarrow L_n X$ を調べることができればいいことが分かる。残念ながら、このファイバーは、 $L_{K(n+1)}X$ ではないが、 $L_{K(n+1)}$ を調べることは意味がありそうである。実際このファイバーは関数スペクトラム $F(L_{K(n+1)}S^0, L_{n+1}X)$ である (cf. [10])。

そこで、 $L_{K(n)}S^0$ を考える。ホモトピー群 $\pi_*(L_{K(n)}S^0)$ を計算する方法として、次の2つの方法がある。

方法 1 Hopkins-Smith [9] により、任意の $BP_* = A$ の不変正則イデアル J' に対し、 $J \subset J'$ なる不変正則イデアル J で、 $BP_*(X(J)) = BP_*/J$ となるスペクトラム $X(J)$ が存在する。さらに、 $J'_1 \subset J'_2$ のとき $X(J_1) \rightarrow X(J_2)$ が誘導される。このとき、不変正則イデアルの減少列 $J'_1 \supset J'_2 \supset \dots$ に対して射影系 $X(J_1) \leftarrow X(J_2) \leftarrow \dots$ が得られ各 $J_i = (a_0, \dots, a_{n-1})$ のとき、 $K(n)_*(\varinjlim_i X(J_i)) = K(n)_*(S^0)$ だから $L_{K(n)}\varinjlim_i X(J_i) = L_{K(n)}S^0$ であり、 $L_{K(n)}\varinjlim_i X(J_i) = L_n\varinjlim_i X(J_i)$ であるから、Johnson-Wilson スペクトラムに基づく Adams-Novikov スペクトル系列

$$E_2^{s,t}(L_n X) = \text{Ext}_{E(n)_*(E(n))}^{s,t}(E(n)_*, E(n)_*(X)) \implies \pi_*(L_n X)$$

により計算可能である。実際 $n = 2$ で $p > 3$ のときは [25] の計算から得られる。

方法 2 Γ_n で F_p 上の p -series が x^{p^n} である formal group law とする。 n 番目の Morava stabilizer group S_n を Γ_n の自己準同型群として定義する。環 E_{n*}^\wedge を Γ_n の lift の $*$ -同型の moduli space 上の関数の成す環とすると、 S_n が自然に作用する。さらに、 $E_{n*}^\wedge = WF_{p^n}[[u_1, \dots, u_{n-1}]]\langle u, u^{-1} \rangle$ が分かっているので、 $E_{n*}(X) = E_{n*}^\wedge \otimes_{E(n)_*} E(n)_*(X)$ とするとホモロジー論となり、それを実現するスペクトラムを E_n と書くと、 S_n は E_n にも作用する。このとき、Hopkins-Miller により、 $L_{K(n)}S^0 = E_n^{hS_n}$ が示されている。よって、homotopy fixed point set スペクトル系列 $E_2 = H^{*,*}(S_n; E_{n*})^{Z/n} \implies \pi_*(L_{K(n)}S^0)$ が得られる。この方法により、 $\pi_*(L_{K(n)}S^0)$ の情報がいくらか得られているようである。

§3. Homotopy groups

この節では $\pi_*(L_n S^0)$ について述べる。 $\pi_*(L_0 S^0) = \mathbb{Q}$ はよく知られている。 $n=1$ のときは K -理論に関係しているのでいろいろな人により考察されているが、 $\pi_*(L_1 S^0)$ に関しては Adams, Ravenel 等により得られている。そこで、 $n=2$ の場合を考える。 $p > 3$ のときは [25] で決定できた。このときの図をかくと、

s		s		s	
			*	2	
					generalized α -elements
	$t-s$				
	-2				

定理： β_t は $t \equiv 4, 7, 8 \pmod{9}$ でなければ、 $\pi_*(S^0)$ に存在しない。

がえられる。今までは、 β_t は $t = 1, 2, 3, 5, 6$ のとき存在、 $t = 4, 7, 8$ のとき非存在が示されていた。さらに

定理： $\beta_{3^i s / 3^i}$ は $3 \nmid s$ のとき $\pi_*(S^0)$ には存在しない。

これは Ravenel の奇素数の Kervaire 不変量元の非存在の結果 ([14]) (定理の $s = 1$ の場合) を含んでいる。

この方針で $p = 2$ のときも考えたいが、 $V(1)$ が存在しない。それに代わるものとして、 $X(1)$ の 7 骨格 V を用いて作る V_1 を考える。ここに、 $X(1)$ は非自明な写像 $\Omega S^2 \rightarrow BO$ の Thom スペクトラムであり V_1 は 7 骨格の上の自己写像 $v_1: \Sigma^2 V \rightarrow V$ のコファイバーである。これに関しては無限複体に対しては $X(1)$ が環スペクトラムであることが使えるので、[12], [21] で決定されている。そこで得られた微分の公式を用いて、 $\pi_*(L_2 V_1)$ 、よって、 $\pi_*(L_2 V)$ について、少し元を見つかることができた [23]。 V は Davis-Mahowald ([3]) のスペクトラム A_1 を用いると、 $A_1 = V_1 \cup_\nu \Sigma^3 C V_1$ ($\nu \in \pi_3(S^0)$) であり、 $H^*(A_1; \mathbb{Z}/2) = A(1) = [Sq^1, Sq^2]$ であるから、このホモトピー群は応用がいろいろありそうである。

有限スペクトラム X が n 型をもつとは、 $0 \leq i < n$ のとき $K(i)_*(X) = 0$ で、 $K(n)_*(X) \neq 0$ のときをいう。 n 型のスペクトラム X の $L_n X$ のホモトピー群は案外簡単であるがその分情報は少ない。 $p > 3$ のときは [25] で 0 型有限スペクトラム S^0 の $L_2 S^0$ のホモトピー群を決定していることになる。そこで $p \leq 3$ のとき考えてみる。 1 型の有限スペクトラム X の $L_2 X$ を $p = 3$ のとき調べたものが、[13] であり、 $p = 2$ のときが、[24] で与えられている。これらの場合は、微分が消えるような有限複体を調べているので、微分に関する情報はないが、 $p > 3$ のときにいっている双対性が、 $p = 3$ のときもいっている例を与えている。さらに、 $p = 2$ のときは、その双対性は条件 $2\pi_*(X) = 0$ が必要であることを示している。

これらの計算結果から $L_{K(2)}$ 局所化されたスペクトラムのホモトピー群も前節の方法 1 により得られることに注意しておく。

References

- [1] J. F. Adams, *Stable homotopy and generalised homology*, University of Chicago Press, Chicago, 1974.

- [2] A. K. Bousfield, The localization of spectra with respect to homology, *Topology* 18(1979), 257–281.
- [3] D. M. Davis and M. E. Mahowald, v_1 and v_2 periodicity in stable homotopy theory, *Amer. J. of Math.* 103 (1981), 615–659.
- [4] E. S. Devinatz, Morava’s change of rings theorem, *Contemporary Math.* 181 (1995), 83–118.
- [5] E. S. Devinatz, M. J. Hopkins and J. H. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory I, *Ann. of Math.* 128(1988), 207–241.
- [6] M. J. Hopkins and B. H. Gross, The rigid analytic period mapping, Lubin-Tate space, and stable homotopy theory, *Bull. Amer. Math. Soc.* 30 (1994), 76–86.
- [7] M. Hopkins and M. Mahowald, The Hurewicz image of EO_2 , preprint.
- [8] M. J. Hopkins and D. C. Ravenel, Suspension spectra are harmonic, *Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana* 37(1992), 271–279.
- [9] M. Hopkins and J. Smith, Nilpotence and stable homotopy theory II, to appear in *Ann. of Math.*
- [10] M. Hovey, Bousfield localization functors and Hopkins’ splitting conjecture, *Contemporary Math.* 181 (1995), 225–250.
- [11] H. R. Miller, D. C. Ravenel, and W. S. Wilson, Periodic phenomena in Adams-Novikov spectral sequence, *Ann. of Math.* 106 (1977), 469–516.
- [12] M. Mahowald and K. Shimomura, The Adams-Novikov spectral sequence for the L_2 -localization of a v_2 -spectrum, *Contemporary Math.* 146 (1993), 237–250.
- [13] Y. Nakazawa and K. Shimomura, The homotopy groups of the L_2 -localization of a type one finite complex at the prime 3, preprint.
- [14] D. C. Ravenel, The nonexistence of odd primary Arf invariant elements in stable homotopy, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 83(1978), 429–443.
- [15] D. C. Ravenel, Localization with respect to certain periodic homology theories, *Amer. J. Math.* 106 (1984), 351–414.
- [16] D. C. Ravenel, *Complex cobordism and stable homotopy groups of spheres*, Academic Press, 1986.
- [17] D. C. Ravenel, The geometric realization of the chromatic resolution, *Ann. of Math. Studies* 113 (1987), 168–179.
- [18] D. C. Ravenel, *Nilpotence and periodicity in stable homotopy theory*, *Ann. of Math. Studies* 128, Princeton Univ. press, Princeton, 1992.
- [19] D. C. Ravenel, Progress report on the telescope conjecture, *London Math. Soc. Lecture Note Ser.* 176, Cambridge Univ. Press, 1–21.

- [20] K. Shimomura, Novikov's Ext^2 at the prime 2, *Hiroshima Math. J.* 11(1981), 499–513.
- [21] K. Shimomura, The homotopy groups of the L_2 -localized Mahowald spectrum $X\langle 1 \rangle$, *Forum Math.* 7 (1995), 685–707.
- [22] K. Shimomura, The homotopy groups of the L_2 -localized Toda-Smith spectrum $V(1)$ at the prime 3, to appear in *Trans. Amer. Math. Soc.*
- [23] K. Shimomura, A note on the 7-skeleton of the Mahowald spectrum $X\langle 1 \rangle$, preprint.
- [24] K. Shimomura, The homotopy groups of an L_2 -localized type one finite spectrum at the prime 2, preprint.
- [25] K. Shimomura and A. Yabe, The homotopy groups $\pi_*(L_2S^0)$, *Topology* 34, 261–289.
- [26] N. P. Strickland, Functorial philosophy for formal phenomena, preprint.

3次元接触多様体のトポロジーについて (北大) 神田 雄高

§0 Intro

一般に接触構造とは $2n+1$ ($n \geq 1$) 次元多様体上に定義される構造である。

Def 0.1 M^{2n+1} 上の超平面場 ζ が completely non integrable なとき, ζ を接触構造という。

ζ が completely non integrable とは, M 上局所的に定義された非特異な 1-形式 α であって, $\alpha|_{\zeta} \equiv 0$ であるものを取ったとき, $d\alpha|_{\zeta}$ が非退化になることである。

このとき $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ は (局所的に) M の volume form を定める。特に n が奇数ならば $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ の定める向きは α の取り方によらないので M に自然に向きが入る。

接触構造は次の意味で "soft" な対象である。

Thm 0.2 M が閉であるとする。 $\{\zeta_t\}_{0 \leq t \leq 1}$ を smooth な接触構造の 1-parameter family とすると, ζ_0 と ζ_1 は isotopic である。
(Moser)

この定理の証明法を応用すると次がわかる。

Thm 0.3 接触多様体 (M, ζ) の任意の1点に対し (Darboux) 十分小さな近傍 U を取ると, $(U, \zeta|_U)$ は $(\mathbb{R}^{2n+1}, dz + x_1 dy_1 + \dots + x_n dy_n)$ の原点の近傍と接触構造もこめて同型である。

この定理から 接触多様体を分類することは 純粹に大域的な問題である。

§1 Over-twisted vs Tight

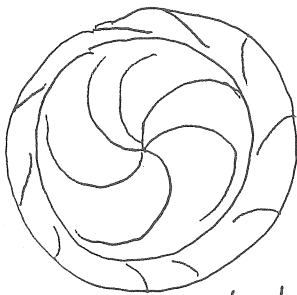
以下 接触多様体は おべて 3次元であるとする。

M^3 上の 接触構造はその性質によって 2つの class に分けられる。

Def 1.1 (M, ζ) が over-twisted であるとは, M に埋めこまれたある 2次元 disc D があり, D 上に導びかれた特性葉層が limit cycle をもつことである。

特性葉層とは ラフにいうと, 今の場合 D 上の 1-線分場 $T(D)$ の ζ を積分して得られる D 上の 1次元特異葉層のことである。

Def 1.2 (M, ζ) が over-twisted でないとき tight であるという。



a overtwisted disc

さて overtwisted な接触構造の分類は M が 閉の場合 完全にわかっている。

Thm 1.3 M が 閉であるとする。このとき M 上の overtwisted (Eliashberg) な接触構造の isotopy class と 2-平面場の homotopy class は 1対1に対応する。

tight な接触構造で分類ができているものには S^3 , $S^2 \times S^1$, \mathbb{R}^3 , T^3 などがある。

Thm 1.4 S^3 の positive な tight 接触構造は (Eliashberg) up to isotopy で一意である。

ここで "positive" とは 接触構造の定め方向きと、もともと その多様体に与えられていた向きが一致することをいう。

§2, tight な接触構造の存在と構成

任意の有向 3次元多様体が tight な接触構造を持つかは 未解決な問題である。

(しかし、かなり沢山の class の 3次元多様体が tight な接触構造をもつこともわかっている。

Prop 2.0 2つの tight 接触多様体を "connected sum" (したものは、やはり tight である。

次の定理は与えられた接触構造の tight 性を判定する強力な手段である。

Thm 2.1 (M, ζ) が symplectically fillable ならば, (Eliashberg) (M, ζ) は tight である。

(M, ζ) が symplectically fillable であるとは 次の条件が満たされることである。

ある compact な symplectic 多様体 (W, ω) が存在し,

① $\partial W = M$

② $\omega|_{\zeta}$ は非退化

③ $i_X \omega \wedge \omega|_M \sim \alpha \wedge \alpha$

を満たす。ここで X は ∂W における外向き法線ベクトル場, α は ζ の defining 1-form, " \sim " は 3 form の向きが一致する意味である。

例の1

\mathbb{C}^2 において, 原点を中心とする単位球面 $S^3_{(1)}$ を考える。

$\zeta := TS^3_{(1)} \cap J(TS^3_{(1)})$ とおく。 \mathbb{C}^2 の自然な symplectic

form ω を $\omega(X, Y) := \langle X, JY \rangle$ で定める。このとき,

$(S^3_{(1)}, \zeta)$ と (\mathbb{C}^2, ω) が上の条件 ① ② を満たすことは

明らかである。 ζ が contact であることと, ③ の成立をみるため

には, ラタイルなベクトル場 $X = \frac{\partial}{\partial t}$ を取ると,

◦ $L_X \omega = \omega$ ($\Leftrightarrow d i_X \omega = \omega$)

◦ $\text{Ker}(i_X \omega|_{TS^3_{(1)}}) = \zeta$

となることに注意すれば

よい。

例 2. Brieskorn 3-manifold $B(p, q, r) :=$

$$S^5_{(1)} \cap \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = 0\} \subset \mathbb{C}^3$$

に対し, $\zeta := TB(p, q, r) \cap J(TB(p, q, r))$ とおくと,

ζ は tight な contact 構造である。

$$\left(\begin{array}{l} W = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 \mid x^p + y^q + z^r = \varepsilon(r)\} \\ \varepsilon(0) = \varepsilon > 0 \quad \varepsilon \equiv 0 \text{ on } \mathbb{C}^3 \setminus B^6_{(\frac{1}{2})} \quad \text{とすればよい。} \\ \varepsilon(r), \varepsilon'(r) \text{ は十分小} \end{array} \right)$$

§3 taut な foliation と tight な 接触構造

M を 有向, 閉な 3次元多様体とする。

このとき $A \in H_2(M, \mathbb{Z})$ に対し $\|A\|$ を次のように定める。

$$\|A\| := \min_{\substack{S: \text{s.t. } [S] = A \\ S \text{ is embedded}}} \chi_-(S)$$

ここで S の connected component を S_i $i=1, \dots, k$

とかくと $\chi_-(S) := \sum_{i=1}^k \max(0, -\chi(S_i))$ で定義される。

$\|\cdot\|$ は 次を満たす。

$$\textcircled{1} \|A\| \geq 0$$

$$\textcircled{2} \|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$$

$$\textcircled{3} \|aA\| = |a| \cdot \|A\| \quad \text{where } a \in \mathbb{Z}$$

これを Thurston Norm といい。

$\|\cdot\|$ から自然に $H^2(M, \mathbb{Z})$ 上の双対 "norm" $\|\cdot\|^\wedge$ が定まる。

Lemma 3.1 $\#\{e \in H^2(M, \mathbb{Z}) \mid \|e\|^\wedge \leq C\} < \infty$

Prop 3.2 ζ を coorientable な tight contact 構造とする。このとき ζ のオリ一類 $e(\zeta)$ は $\|e(\zeta)\|^\wedge \leq 1$ を満たす。

Cor 3.3 tight な接触構造のオリ一類になりうる $H^2(M, \mathbb{Z})$ の元は有限個

M^3 上の葉層 \mathcal{F} が taut であるとは、ある単純閉曲線 ℓ があって、 ℓ が \mathcal{F} かつ \mathcal{F} の leaf は ℓ と交わることである。taut な葉層と tight な接触構造は、その性質に色々似ているところがある。例えば \mathcal{F} が taut かつ C^∞ ならば $\|e(\mathcal{F})\|^\wedge \leq 1$ となることが知られている。一般に、 M が閉、既約、有向かつ $M \neq S^2 \times S^1$ であって、 $H_2(M, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ のとき、 M は taut な葉層をもつ。このことを利用して、 M に tight な接触構造がつくられることを Thurston と Giroux は announce している。基本的な考え方は、taut な葉層 \mathcal{F} を少し動かして contact にすることである。そして、このようにしてついた contact 構造が fillable であることを示すのである。

Thm 3.5 M は有向, 閉, 既約であり, かつ $M \neq S^2 \times S^1$ (Gabai), $H_2(M, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ であるとする。

今, 任意の元 $A \in H_2(M, \mathbb{Z}) - \{0\}$ に対して, M に埋めこまれた曲面 S で, $[S] = A$, $\chi_-(S) = \|A\|$ となるものを取ると, 次のような葉層 \mathcal{F} が存在する。

- ① \mathcal{F} は coorientable
- ② \mathcal{F} の compact leaf は S からなる。
- ③ $M \setminus S$ において \mathcal{F} は C^∞ である。
- ④ 任意の leaf L について L の閉包は少なくとも S の1つの成分を含む。
- ⑤ ある単純閉曲線 $\ell \subset M$ があり, ℓ が \mathcal{F} かつ \mathcal{F} のすべての leaf は ℓ と少なくとも1回交わる。

証明は M の sutured manifold 分解という, 分解を使って行われる。(むしろは [Ga] 参照のこと。)

このときの \mathcal{F} の構成をよく見ておくと, \mathcal{F} はさらに次の性質を持つことがわかる。

- ⑥ M のある体積要素 V を保存する flow ψ が存在し, ψ が \mathcal{F} を満たす。

すると, $\psi := \psi|_V$ は \mathcal{F} の各 leaf 上で非退化な閉 2-形式になる。

まず \mathcal{F} を変型して contact にするわけであるが, それには次のようなうまい定理がある。(Thurston が Altschuler にこの定理を証明するおに 勧めたらしい。)

Thm 3.6 α を M 上の非退化な C^∞ 級の 1-形式であって、
(Altschuler) 次の満たすものとする。

① $\alpha \wedge d\alpha \geq 0$

② $N := \{x \in M \mid (\alpha \wedge d\alpha)_x > 0\}$ とおくと, $N \neq \emptyset$ 。

③ $\forall y \in M$ に対して, 曲線 $\ell: [0, 1] \rightarrow M$ が存在し,
 $\ell(0) = y, \ell(1) \in N, \ell^* \alpha \equiv 0$ を満たす。

このとき 非退化な 1-形式の 1-径数族 $\{\alpha_t\}_{[0, \varepsilon]}$ が
存在し, $\alpha_0 = \alpha, \alpha_t \wedge d\alpha_t > 0 \text{ for } t > 0$ を
満たす。

この定理は、ある種の M 上の放物型方程式を使って証明
される。③の意味するところは、 α の非可積分性が α の定め
る 2平面場に沿って伝播していくということである。

Thm 3.6 を先に得た \mathcal{F} に適用するために, \mathcal{F} の compact
leaf の近傍において \mathcal{F} を変型し, そこでは \mathcal{F} の defining
1-form が ① を満たすようにする。こうして, 我々は \mathcal{F} に
 C^∞ close な正負 2つの contact 構造 β^+, β^- を得る。

4-多様体 $M \times [-\delta, \delta]$ に 2-形式 ω を次式で定義する。

$$\omega := d(S\beta) + \psi$$

ここで β は \mathcal{F} の定義 1-形式とする。

$d\omega = 0$ は明らか。また, $\frac{1}{2}\omega \wedge \omega = dS \wedge \beta \wedge \psi + (\text{Sの1次以}$
 $\text{上の項})$
となるので $\delta > 0$ が十分小なら ω は symplectic form である。

このとき、2つの接触多様体 $(M \times \{\delta\}, \beta^+)$, $(M \times \{-\delta\}, \beta^-)$ は symplectic 多様体 $(M \times [-\delta, \delta], \omega)$ によって "fill" されていることが容易にわかる。

以上をまとめると、

Thm 3.7 M が有向、既約、閉かつ $H_2(M, \mathbb{Z}) \neq \{0\}$ ならば M は正と負の tight な接触構造をもつ。

§4. 曲面上の S^1 束に入る fibre に横断的な接触構造

$P(g, n)$ を種数 g の曲面上の n 行 n の S^1 束とする。

次の定理は有名である。

Thm 4.1 \mathcal{F} を $P(g, n)$ 上の C^2 級葉層とする。

(Thurston) $g \geq 1$ かつ \mathcal{F} が compact leaf をもたないならば

\mathcal{F} を isotopy で動かして、 $P(g, n)$ の fibre たちと横断的にできる。

Thm 4.2 \mathcal{F} が $P(g, n)$ 上の fibre に横断的な (Miknor-Wood) 葉層とする。このとき次の不等式が成り立つ。

$$2 - 2g \leq n \leq 2g - 2 \quad (g \geq 1)$$

$$n = 0 \quad (g = 0)$$

これの contact 構造版として、次がある。

Thm 4.3 Σ を $P(g, n)$ ($g \geq 1$) 上の有向な contact (Giroux) 構造とする。 Σ が fibre に横断的に isotopy で動かせること、次のような Legendrian 曲線 l が存在しないことは同値である。

l は fibre に isotopic であり、 $\Sigma|_l$ が l の法束 $N(l)$ に与える自明化と、 $N(l)$ の canonical な自明化が homotopic。

Thm 4.4 Σ を $P(g, n)$ の fibre に横断的な (Giroux, Sato-Tsuboi) positive な contact 構造とする。

このとき、 $\begin{cases} n \geq 2-2g & (g \geq 1) \\ n \geq 1 & (g = 0) \end{cases}$ が成立する。

又、これらの不等式は best possible である。

Thm 4.4 で等号を成立させるような例は次のようにして作れる。まず $g=0$ のときは、§2 の例 1 がそうである。つまり、 $U(1)$ の $S^3_{(1)}$ の自然な作用によって、Hopf 束ができるが、このとき $U(1)$ の作用と Σ は横断的である。

$g \geq 0$ のときは $P(g, 2-2g) \subseteq UT^*\Sigma_g$ (種数 g の曲面の単位余接束) となっていることに注意する。 $UT^*\Sigma_g$ は次で定まる contact form α を持つ。

$$\alpha_{(p, x)}(W) := P(\pi_x(W))$$

ここで $x \in \Sigma_g$, $P \in (UT^*\Sigma_g)_x$, $\pi: UT^*\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$ は自然な射影である。

α の定める contact 2 平面場 ξ_α は各 fibre に接している。
 そこで、 α の代わりに $\alpha + \varepsilon \theta$ (θ は fibre に横断的な 1-形式) を取ると、 ε が十分小なら、やはり contact 形式になり、
 これの定める contact 構造 ξ'_α が求めていたものとなる。
 Thm 0.2 より、 ξ_α と ξ'_α は isotopic であることに注意せよ。

§5. tight contact 構造の不変量

M は有向, $\partial M = \emptyset$ とする。 S^1 の M への C^∞ 埋めこみの isotopy 類全体を $\text{Emb}(S^1, M)/\sim$ と書く。

1 つの元 $A \in \text{Emb}(S^1, M)/\sim$ を取り、 A の法線に対し、その自明化のホトホー類を 1 つ決め、 T_A と書く。

このとき M 上の coorientable な contact 構造全体 $\text{Cont}(M)$ から \mathbb{Z} への写像 $\text{tw}_{(A, T_A)}$ が次のようにして

定まる。 $\text{tw}_{(A, T_A)}(\xi) := \max_{\ell: [\ell] = A} \text{deg}(\xi|_\ell, T_A)$
かつ ℓ は ξ に関して Legendrian

tw は明らかに $\pi_0(\text{Cont}(M))$ で決まる不変量である。

Lemma 5.1 M が closed かつ ξ が overtwisted ならば $\text{tw}_{(A, T_A)}(\xi) = \infty$

Lemma 5.2 A が自明な結び目、 T_A は A の Seifert 膜から決まる自明化、 ξ が tight とすると、

$$\text{tw}_{(A, T_A)}(\xi) = -1$$

Lemma 5.1 と Thm 4.3 から $P(\mathbb{C}^n)$ ($n \geq 1$) の fibre に横断的な接触構造は tight である。

tw を使うと、例えば T^3 に可算無限個の互いに同型でない tight な contact 構造が存在することが証明できる。

今、 $T^3 = \mathbb{R}^3 / \mathbb{Z}^3$ と見て、 $n \in \mathbb{N}$ に対し ξ_n を

$\xi_n := \text{Ker}(\cos 2\pi n z \cdot dx + \sin 2\pi n z \cdot dy)$ で定義する。

Thm 5.3 $f: (T^3, \xi_n) \rightarrow (T^3, \xi_m)$ が contact (Giroux, Kanda) 同型な写像とする。このとき $n = m$ かつ $f^*[dz] = [dz]$ 。

ここでは $n \neq m$ のとき ξ_n と ξ_m が isotopic でないことを示す。今 B を z 軸で代表される単純閉曲線の isotopy 類、 T_B を Canonical な自明化 (つまり z 軸で考えれば $\frac{\partial}{\partial z}$ で決まる自明化) とする。このとき、

$tw_{(B, T_B)}(\xi_n) = -n$ であることを示そう。自然な

被覆写像 $g: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow T^3$ を考える。
 $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$

(M, \mathcal{S}) を tight な contact 多様体、 $\ell \subset M$ を

自明な結び目型の単純閉曲線として \mathcal{S} に関して

Legendrian かつ $\deg(\mathcal{S}|_{\ell}, T_A) = -1$ であることをとする。

ここで T_A は ℓ の Seifert disc から来る ℓ の法束の

自明化とする。 ℓ の適当な管状近傍 $N(\ell)$ をとり、

contact 同型写像 $h_m: (\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \{0\} \times \mathbb{R}/\mathbb{Z}, g^{-1}(\xi_m))$

$\mapsto (N(\ell), \ell, \mathcal{S})$ が存在し、 $\deg(h(g^{-1}(T_B)), T_A)$

$= n - 1$ となる。よって Lemma 5.2 より: $tw_{(B, T_B)}(\xi_n) = -n$ 。

さて, tw を用いると Thm 4.4 が以下のように精密化される。
 まず A として, fibre と isotopic な simple closed curve
 の isotopy 類, T_A として, Canonical なものを取る。

Thm 5.4 ζ を $P(g, n)$ ($g \geq 1$) 上の fibre に横断的な
positive な contact 構造とする。 $P := -tw_{(A, T_A)}(\zeta)$ と
 おくと次が成立。

① $P > 0$

② $n \geq \frac{2-2g}{P}$

③ $n = \frac{2-2g}{P}$ のとき, $(P(g, n), \zeta)$ は
 $(UT^2 \Sigma_g, \zeta_g)$ の fibre 方向への P 回被覆と contact
 同型になる。被覆の取り方に任意性があることに
 対応して, ζ の同型類は複数个あり, isotopy 類
 は可算無限個ある。

④ $n > \frac{2-2g}{P}$ のとき $P=1$ であり, ζ の同型類は
 只1個である。

①は Thm 4.3 の後の方の条件の1111がえである。

④で ζ の isotopy 類がいくつかはよく分らない。

注意 fibre に横断的な接触構造が $P(g, n)$ 上に存在すれば
 $P(g, m)$ ($m \geq n$) 上にもつねに存在する。
 (fibre に沿った手術を接触構造こみですればよい。)

References

- [A] S. Altschuler, A linear contact flow for 3-dimensional manifolds, preprint
- [E1] Ya. Eliashberg, Contact 3-manifolds 20 years since J. Martinet's work
Ann. Inst. Fourier 42 (1992) 513-520
- [E2] = Filling by holomorphic discs and its applications. London Math. Soc. Lect. Note. ser. 151 (1991) 45-67
- [Ga] D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds. J. Diff. Geom 18 (1983) 445-503
- [Gi1] E. Giroux, Convexité en topologie de contact, Comment. Math. Helv. 66 (1991) 637-677
- [Gi2] = Topologie de contact en dimension 3, Séminaire BOURBAKI 45^{ème} année 1992-93, n° 760.
- [K] Y. Kanda, The classification of tight contact structures on the 3-torus, to appear in Communication in Geometry and Analysis.

[S-T] A. Sato, T. Tsuboi, Contact structures
of closed 3-manifolds fibred by the circle.
preprint.

3次元接触多様体について概観するのは [G12] が
適していると思われる。そこにのっている文献表も充実している。

Thm 4.3 については出版されたものはないようである。

どんな手法を使って分類を行うかについては [E1], [G1], [K]
を参照していただきたい。

Arnold予想 と Gromov-Witten不変量

深谷賢治
京都大学理学部数学教室

この講演ではお茶の水大学の小野薫氏との共同研究[F02]の報告をしたいと思います。

§1 アーノルド予想

(M, ω) をコンパクトなシンプレクティック多様体とする。すなわち、 M は $2n$ 次元多様体、 ω は M 上の 2 形式で $d\omega = 0$ 、 ω^* は何処でも消えないとする。

定義1.1 $H: M \rightarrow \mathbb{R}$ に対して、その生成するハミルトンベクトル場 X_H とは $i_{X_H}\omega = dH$ を満たすベクトル場を指す。

定義1.2 $\phi: M \rightarrow M$ が exact シンプレクティック可微分同相とは、 $H_t: M \rightarrow \mathbb{R}$ なる関数の族と、 $\phi_t: M \rightarrow M$ なる写像の族があって、

$$\begin{aligned}\phi_0(p) &= p \\ \frac{d}{dt}\phi_t(p) &= X_{H_t}(\phi_t(p))\end{aligned}$$

が満たされることを指す。

注意1.3 $\phi: M \rightarrow M$ が exact シンプレクティック可微分同相ならば、 $\phi: M \rightarrow M$ はシンプレクティック可微分同相である。つまり、 $\phi^*\omega = \omega$ 。また、 $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$ ならば、exact シンプレクティック可微分同相全体はシンプレクティック可微分同相全体の作る群の連結成分である。

1950年代にアーノルドは今日 symplectic topology と呼ばれる分野を作るもととなる一連の予想をした。そのひとつが次の予想である。

予想1.4 (アーノルド[A]) M の exact シンプレクティック可微分同相は、 M の上の関数の臨界点の数の最小値と少なくとも同じだけの不動点を持つ。

注意1.5 定義1.2で $H_t: M \rightarrow \mathbb{R}$ が t によらない場合を考えると、 $dH(p) = 0$ ならば、 p は $\phi: M \rightarrow M$ の不動点である。従って、この場合は予想1.4は明らか。

注意1.6 定義1.2の $H_t: M \rightarrow \mathbb{R}$ は周期的つまり、 $H_{t+1} = H_t$ と仮定して良い。その場合、 $\phi: M \rightarrow M$ の不動点とは、次の方程式を満たす $\ell: S^1 \rightarrow M$ (周期ハミルトン系の周期解) のことである。

$$(1.1) \quad \frac{d\ell}{dt} = X_{H_t}(\ell(t)).$$

予想1.4では、exact シンプレクティック可微分同相に条件を付けなかったが、不

動点が全て非退化とした場合の予想がここで取り上げるものである。ここで $\phi: M \rightarrow M$ の不動点が全て非退化とは、 ϕ のグラフ $\subseteq M \times M$ が対角線 $\subseteq M \times M$ と横断的に交わることを指す。

定理1.7 (FO2) $\phi: M \rightarrow M$ を exact シンプレクティック可微分同相とし不動点が全て非退化とする。このとき、 $\phi: M \rightarrow M$ の不動点の数は、ベッチ数の和 $\sum \text{rank } H_k(M; \mathbb{Q})$ 以上である。

定理1.7はアーノルドが50年代に予想して以来、幾つかの部分解答が知られていた。例えば、 $M = T^{2n}$ ([CZ]), $M =$ 曲面 ([F1], [S]), M が monotone ([F2]), M が semi positive あるいは (大体同じだが) weakly monotone ([HS], [O1])。 (monotone とか semi positive の定義は省略する。)

また、[FO2] の概略を述べた論文 [FO1] をあちこちに送ったところ、リウとティアンが同様なことをやっている最中 (arædoing) であると、いう電子メールをもらった。また、ルアンから同じ事を証明した (have just proved) という電子メールをもらった。また、ホファーとサラモンが同じ事をやっている最中であると、サラモンから口頭で聞いた。(いずれもそれ以上のことはその後聞いていない。)

§2 アーノルド予想と概正則曲線

上に上げた部分解答のうち [F2] は現在フレアーホモロジーと呼ばれる無限次元ホモロジー論を生んだ画期的なものであった。それ以後の結果はほとんどこのフレアーのアイデアから始まる。ここでそれをごく簡単に振り返る。

注意1.5に従って $H_{i+1} = H_i$ と仮定し、(1.1) の周期解を探す。そのためには、(おそらくハミルトンにさかのぼる) 変分法を考える。

ループ空間 $\Omega M = \{ \ell \mid \ell: S^1 \rightarrow M, \ell \sim 0 \text{ (homotopic)} \}$ を考える。 $\ell \in \Omega M$ に対して、 $u: D^2 \rightarrow M$ を $u|_{S^1} = \ell$ となるように取り、

$$(2.1) \quad A_H(\ell) = - \int_{D^2} u^* \omega + \int_{S^1} H_i(\ell(t)) dt$$

とおく。この書き方は不正確で、(2.1) は $u: D^2 \rightarrow M$ によってしまう。従って、 A_H は多価関数あるいは ΩM のある被覆空間 $\tilde{\Omega} M$ 上の関数とみなすべきである。しかしいずれにしても、 A_H の微分 dA_H は ΩM 上で意味がある。

補題2.1 $\ell \in \Omega M$ に対して、 ℓ が (1.1) の周期解であることと、 $dA_H(\ell) = 0$ は同値である。

従って定理を証明するには、 A_H の臨界点を探せばよい。一般に汎関数の臨界点を探すには、定義域の位相 (例えばホモロジー) に引っかけて探すというのが、変分法の一般原理である。

ここで問題になるのは、 A_H の臨界点がいつもモース指数が無限大であることである。従って、 A_H の臨界点は実は ΩM あるいは $\tilde{\Omega} M$ の普通のホモロジーには直接は引かからない。

フレアーのこれに対する解決策は、すでに有名であるが、 $\infty/2$ + 有限次のホモロジー (フレアーホモロジー) の創始であった。

これを詳しく説明していると、それだけで終わってしまうので、ここではごく簡単にだけ触れる。([O2] など参照。) 暫く、 $\pi_2(M) = 0$ とする。(A_H の多価性を避けるため。)

要点は、次のことである。

モース指数が無限大で従って普通のセル分解とモース関数の関係を使ってモース

不等式を示せない場合でも、次のことが正しければ、ホモロジー論を構成できる。

- (A) $l_1, l_2 \in \Omega M$ を A_H の臨界点とし、 $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ を l_1 と l_2 を結ぶ $\text{grad } A_H$ の積分曲線全体とする。
- (B) $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ は有限次元の多様体になる。
- (C) $\tilde{P}H = \{l \in \tilde{\Omega}M \mid dA_H l = 0\}$ とする。写像 $\mu: \tilde{P}H \rightarrow \mathbb{Z}$ が存在して、 $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ の次元は $\mu(l_1) - \mu(l_2)$ である。
- (D) $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ にはしかるべきコンパクト化が存在する。

このようにして構成されたホモロジーをフレアーホモロジーと呼び、 $HF((M, \omega), H_1)$ とかく。定義（説明していないが）より、 $HF((M, \omega), H_1)$ のランクは (1.1) の周期解の数より多い。

最後に、 $HF((M, \omega), H_1)$ が M の普通のホモロジーと同型であることを証明する。

これで、定理 1.7 が $\pi_2(M) = 0$ の場合に証明される。この証明を少し一般化したのが、フレアーによるモノトーンの場合の証明である。さらに、ノビコフ環という構成を使って、 A_H の多価性を取り扱い、weakly monotone の場合に証明したのが、Hofer-Salamon と小野薫である。

上の 4 つのステップの中で、一番デリケートなのが (D) である。この点を解決すれば、定理 1.7 が一般に証明できることは、(フレアー、ホファー・サラモン、小野以後は) 専門家の中で広く知られていた。この問題は (B) とも関わる。(あらくいうと、コンパクト化の問題は無限遠での横断正則性の問題に帰着するというのが一般論である。) この問題は、negative multiple cover の問題と呼ばれる。

これを解決したのが、[FO2] の主要結果である。

フレアーによって見いだされたことであるが、空間 $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ はグロモフによる、概複素曲線とほぼ同じである。もう少し正確に述べると、次のようになる。 $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ はの元はループ空間 ΩM の上の道である。従って、 $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ はの元は写像 $h: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ を定める。このとき、

補題 2.2 $h: S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow M$ が $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ の元に対応することと、 h が次の方程式を満たすこととは同値である。

$$(2.2) \quad \frac{\partial h}{\partial \tau}(\tau, t) + J \frac{\partial h}{\partial t}(\tau, t) + \nabla H_t(h(\tau, t)) = 0.$$

(τ, t はそれぞれ \mathbb{R}, S^1 の座標。) ここで、 J はシンプレクティック構造と整合的な概複素構造である。突然こんなものがでてきたが、実は、 $\mathcal{M}(l_1, l_2)$ は勾配ベクトル場の積分曲線全体であるから、これを定義するにはリーマン計量を取らなければならない。シンプレクティック多様体に計量を入れるには、概複素構造 J を使って $g(V, W) = \omega(V, JW)$ と入れるのがよい。この右辺が計量を決めるという条件が、概複素構造がシンプレクティック構造と整合的ということになる。

さて、補題 2.2 の方程式 (2.2) をみると、 ∇H_t という 0 次の項を除いてこの方程式は、 h が holomorphic (概複素構造の時はグロモフにならって、概正則 (pseudo holomorphic) という) という方程式に一致する。したがって、(2.2) の解のモジュライの理論は概複素曲線のモジュライの理論に大体一致する。

以上で、アーノルド予想がなぜ、概複素曲線のモジュライの理論から導かれるかの説明を終わる。

§3 グロモフ・ウィッテン不変量

概複素曲線のモジュライの理論のもう一つの大事な応用はグロモフ・ウィッテン

不変量である。これについて述べる。

(M, ω, J) をシンプレクティック多様体とその上のシンプレクティック構造と整合的な概複素構造の組とする。 $\beta \in H_2(M; \mathbb{Z})$

種数 g のリーマン面とその上の m の互いに異なる点の組 (Σ, \bar{z}) を考える。 (\bar{z} の方は場合によっては省略する。) (Σ, \bar{z}) と Σ から (M, ω, J) への概複素写像 h の組 $((\Sigma, \bar{z}), h)$ で $h([\Sigma]) = \beta$ なるもの全体を考え、次の同値関係を入れる。

$$((\Sigma, \bar{z}), h) \sim ((\Sigma', \bar{z}'), h') \Leftrightarrow \exists \varphi : (\Sigma', \bar{z}') \cong (\Sigma, \bar{z}) \text{ (biholomorphic)} \\ h \circ \varphi = h'$$

この同値類全体の集合を $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ と表す。

m 個の点付きのリーマン面全体の集合に双正則で同値関係を入れたものを $\mathcal{M}_{g,m}$ とかく。これにはデリーニュとマムフォードによるコンパクト化が知られていて、それはオーピフォールド (V-manifold) になる。これを $C\mathcal{M}_{g,m}$ とかく。 $[(\Sigma, \bar{z}), h] \mapsto [\Sigma, \bar{z}]$ で写像 $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta) \rightarrow \mathcal{M}_{g,m}$ が定まる。

一方、 $[(\Sigma, \bar{z}), h] \mapsto (h(z_1), \dots, h(z_m))$ で写像 $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta) \rightarrow M^m$ が定まる。これをあわせて

$$\pi : \mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta) \rightarrow C\mathcal{M}_{g,m} \times M^m$$

を考える。グロモフ・ウィッテン不変量とは、おおよそ、この写像による $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ の基本ホモロジー類の像のことである。(たとえば [Fk] 参照。)

ここで、問題になるのは、 $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ が一般にはコンパクトではなく、また、smooth でもないことである。

従って、これを適当にコンパクト化した基本ホモロジー類を定義するというのは、自明でない問題である。この問題は前の節で少し説明したように、アーノルド予想で残された部分と同質の問題なのである。

定理 3.1 $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ の \mathbb{Q} 上のサイクルとしての摂動とコンパクト化があり、 $\pi_*([\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)]) \in H_{2m+2\beta_1+2(3-n)(g-1)}(C\mathcal{M}_{g,m} \times M^m; \mathbb{Q})$ がシンプレクティック多様体 (M, ω, J) の不変量として定まる。

さらに、 $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ がコンパクトで smooth であるとおおらかに考えて証明できるこの不変量の諸性質は、 \mathbb{Q} 上のコホモロジーに関わる限り、全て成り立つ。

曖昧な書き方をしたが、 $\pi_*([\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)])$ が満たすべき性質については、いろいろな研究があり、特にコンセピッチとマニン [KM] によって公理としてまとめられている。コンセピッチとマニン [KM] は彼らの公理を $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ がコンパクトで smooth であるとおおらかに考えれば、証明できることを注意している。従って、コンセピッチ・マニンの公理は定理 3.1 から証明できる。

定理 3.1 そのものだと、 $2g+m \geq 3$ としないといけない。(さもないと $C\mathcal{M}_{g,m}$ がうまく定義できない。) しかし、 $\mathcal{M}_{g,m}((M, \omega, J), \beta)$ のコンパクト化とその \mathbb{Q} ホモロジー類そのものは、 $2g+m < 3$ でも定義できる。これは、カラビ・ヤウ多様体上の有理曲線の数え上げ ($g=m=0$) を含む。

定理 3.1 は M が semi positive の場合はルアン・ティアンによって示されている。 ($2g+m \geq 3$)。また、Convex とか ample という仮定を付けて、コンセピッチ・マニン [KM]、ベーレンド・マニン [BM] によって示されていた。(ここまでの結果は我々より早い。)

さらに、 M が代数多様体の場合には、リー・ティアン [LT] によっても独立に示されている。またスタックの理論を用いて、ベーレンド・ファンテッキ ([BF], [B]) によ

でも示されている。

シンプレクティックの場合の定理3.1について、ティアンとルアンから、アーノルド予想のところで述べたのと同様の電子メールをもらった。

§4 非線形方程式のモジュライと倉西理論

定理1.7と定理3.1の証明のアイデアの一部を述べる。概複素曲線の方程式の特徴を幾つか用いるが、それを除けば、非線形方程式（自己同型群付き）の解のモジュライ空間に対して、一般的に使える議論である。

一般的に非線形方程式

$$(4.1) \quad P(h) = 0,$$

を考えよう。ただしある無限次元の群 G が存在して、これが、未知関数 h の空間に作用し、 $P(gh) = P(h)$ となっているとしよう。我々が調べたいのは、モジュライ空間

$$(4.2) \quad \mathcal{M} = \frac{\{h \mid P(h) = 0\}}{G},$$

である。3節までの問題では、 G は曲面全体の可微分同相の作る群で、 $P(h) = \bar{\partial}h$ である。

多くの問題では、方程式(4.1)の線形化方程式から、楕円型複体を構成することが出来る。すなわち

$$(4.3) \quad \frac{L_1}{\text{Lie}(G)} \xrightarrow{D_h P} L_2 \xrightarrow{P_2} L_3 \longrightarrow \dots$$

なる楕円型複体が存在する。ここで、 L_1 は h の属する関数空間の接空間、 L_2 は $P(h)$ の属する関数空間の接空間である。

この種の事は、小平・スペンサーによる、複素構造の変形理論で最初に現れた。そのとき、(4.3)に当たるのは、接ベクトル束を係数としたドルボー複体である。

また、ゲージ理論（自己共役方程式）では、(4.3)はアティヤー・ヒッチン・ジンガー複体である。

概複素曲線の場合は、(4.3)は、 M の接束の引き戻しを係数とする、リーマン面のドルボー複体である。

小平・スペンサーによる、複素構造の変形理論の主要定理の一つは、(4.3)の第二コホモロジー $H^2 = \frac{\ker P_2}{\text{im } D_h P}$ が0であれば、(4.2)のモジュライ空間の $[h]$ の近傍は $\frac{H^1}{I_h}$ に一致する、というものである。ここで、 $H^1 = \ker D_h P$ で $I_h = \{g \in G \mid gh = h\}$ 。

これは、複素構造の変形の場合でなくても成り立つ一般原理である。ドナルドソンらによる自己共役方程式の解のモジュライの理論でも、グロモフらによる概複素曲線の理論でも、このことが使われた。

さらに、倉西は進んで次のことを（複素構造の変形の場合に）示した。 H^2 が0とは限らない場合に、 I_h 不変な写像 $s: H^1 \rightarrow H^2$ が存在し、(4.2)のモジュライ空間の $[h]$ の近傍は $\frac{s^{-1}(0)}{I_h}$ と表せる。 $s: H^1 \rightarrow H^2$ を倉西写像という。

この描像も一般原理である。自己共役方程式の解のモジュライの理論でも、倉西理論はドナルドソン・タウベスらによって有効に用いられた。また古田によって、サ

イバーク・ウィッテン理論の場合に、 $\frac{10}{8}$ 定理の証明に用いられたことも記憶に新しい。

§5 スキームと倉西理論

次のことを最初に注意したのが誰かしらない。複素構造のモジュライの場合には、おそらくより古いであろうが、ドナルドソンが4次元h同境定理の反例を出した有名な論文[D2]で、有効に用いている。

倉西の描像はモジュライ空間を点集合として記述するだけでなく、それをスキーム (Scheme) として与えている。

このことを説明する。ドナルドソンらによるゲージ理論でもそうであったし、ここで問題にしている概複素曲線の理論の場合でもそうであるが、我々が構成したいのはモジュライ空間 $\mathcal{M} = \frac{\{h \mid P(h)=0\}}{G}$ の基本ホモロジー類である。もし、 H^2 がいつも0で $I_h = \{g \in G \mid gh=h\}$ がいつも自明であれば、この空間は多様体である。従ってその基本ホモロジー類は単に普通に取ればよい。(コンパクト化の問題が残るが、同じ事を無限遠ですればよい。)

そうでないとする。 I_h に関わる問題は後で触れるので、ここではとりあえずいつも自明とする。 H^2 が0でないときはどうすればよいであろうか。一般には方程式を摂動して、 H^2 を0にするというのがストーリーであるが、上のドナルドソンの注意は、摂動したあとなにが起こるかは、倉西写像を見れば分かるということである。

たとえば、 $\mathcal{M} = \frac{\{h \mid P(h)=0\}}{G}$ が点集合としては1点だったとする。このとき、基本ホモロジー類 (あるいは不変量) は ± 1 として良いだろうか。もし H^2 がその点で0なら勿論良い。しかし、 H^2 がその点で0でない、これではいけない。例えば、その点で $H^1 = H^2 = \mathbb{R}$ で倉西写像が、 $t \mapsto t^2$ としよう。勿論 $t^2=0$ は一点だから、 \mathcal{M} は点集合としては1点である。しかし、容易に想像がつくように、これを摂動して H^2 を0にすると、 \mathcal{M} は2点になる。

これはスキームを使って考えるとうまくいく。つまり、この場合のモジュライ空間は $\text{spec} \frac{\mathbb{C}[t]}{(t^2)}$ である。これは、 $\text{spec} \frac{\mathbb{C}[t]}{(t)} = \text{spec} \mathbb{C}$ とは、点集合としては同じだが、スキームとしては異なる。

肝心な点は、倉西写像さえ覚えておけば、摂動の取り方を考えなくても、基本ホモロジー類が分かる点である。

我々の状況では、方程式を摂動して H^2 を0にすることが困難である。しかし、倉西写像さえ分かれば、方程式を摂動する必要はないというのが、ここでの教訓であった。

ただし、もう一つ注意が必要である。それは、倉西描像は、局所的な描像である、ということである。すなわち、局所的に倉西描像があるだけでは、モジュライ空間を「スキーム」として復元できない。すなわち、倉西描像を張り合わせなければならない。これが倉西構造という概念である。

これに対応することも、スキームの定義には入っている。つまり、スキームとは、局所的に、 $P_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = P_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ (P_i は多項式) と書けるもので、それが、しかるべく張り合っているものであった。(繰り返すが、ただ、点集合としての $P_1(x_1, \dots, x_n) = \dots = P_k(x_1, \dots, x_n) = 0$ を考えるのではなく、それを表す方程式の形まで覚

えておく。)

我々の状況では、全てが実で C^{∞} である。従って、うえで P_i は多項式としたのは、 P_i は微分可能写像としないといけない。(実は連続写像まで広げる必要がある。)そこでそれが張り合うというのを、スキームの定義と同じように、局所環付き空間であって、と始めるとうまくいかない。定義を書いてもいいのだが、多様体の定義をやっているようなもので、書いても退屈であると思われるのでかかない。

あらくいえば、 \mathcal{M} はその各点 $\sigma \in \mathcal{M}$ の近傍で $s_{\sigma}: R^{\ell_{\sigma}} \rightarrow R^{k_{\sigma}}$ 成る写像を使って、 $s_{\sigma}^{-1}(0)$ と表せ、そのような表し方は張り合う。というのが定義である。

注意 5.1 \mathcal{M} そのものは、代数幾何の場合と違って、一般にはひどく汚い集合になりうる。(自己共役方程式のモジュライの場合には、方程式が2次式なので、実解析集合になる。しかし概複素曲線の場合には、なにになるか見当がつかない。例えばカントール集合がでてきても不思議はない。)

注意 5.2 ここでスキームなどを持ち出すのは、大きさに見えるがそうでもない。スキーム論の一つの発端は、代数幾何学の基礎付けで、その由来の一つは、数え上げ幾何学の正当化あるいは交叉理論である。交叉理論では、 $\text{spec} \frac{C[t]}{(t^2)}$ すなわち、non reducedなスキームを考えることが自然である。定理3.1 (グロモフウィッテン不変量の構成) は数え上げ幾何学の一つである。

さて、倉西構造が構成できたとして、倉西構造を持つ空間の基本ホモロジー類をどうやって定義すればよいであろうか。これは、ドナルドソンが、ゲージ理論をトポロジーに初めて応用した記念すべき論文[D1]のやり方をまねればよい。すなわち、各点の近傍で倉西写像 $s_{\sigma}: R^{\ell_{\sigma}} \rightarrow R^{k_{\sigma}}$ をかんがえ、それを、摂動して0と横断的にする。これを帰納的に行い、倉西構造の張り合わせと整合的になるようにするのである。ただし次のことが必要になる。

$\ell_{\sigma} - k_{\sigma}$ は σ によらず一定である。

これは、摂動した後の空間が、至る所同じ次元であるということの言い替えである。もとの倉西描像に帰ると次のことを意味する。

$\dim H^1 - \dim H^2$ は一定である。

この仮定は、概複素曲線の場合には常に成り立つ。なぜなら、その場合は、 H^3 以下は存在せず、従って、 $\dim H^1 - \dim H^2$ はねじれ係数ドルボ-複体の指数だからである。

複素構造の変形理論の場合にはこれは成立するかどうか分からない。その場合には H^1 が変形のパラメータ、 H^2 がobstructionというだけでは十分な理解ではない。 H^3 以下の意味も考えなければならない。これはどうしたらいいのか筆者には分からない。(名古屋大学の藤原一宏氏にこの仮定が、代数幾何でのcomplete intersectionに対応するというを教えてもらった。)

いままで、 \mathcal{M} だけを考えてきた。本当はそれをコンパクト化しないとイケない。というよりコンパクト化が主要問題である。それは、次のようにして解決する。

まずとにかくコンパクト化して $C\mathcal{M}$ をつくる。すると、一般には、 $C\mathcal{M}$ はやはり悪い空間になる。例えば、典型的に起こりうるのは、 $C\mathcal{M} - \mathcal{M}$ の次元が、 \mathcal{M} の次元より大きくなるという事態である。普通に考えるとこのコンパクト化は余り役にたたない。しかし、それでも、次のようにする。 $C\mathcal{M} - \mathcal{M}$ の各点の回りでも、 $C\mathcal{M}$ が倉西写像を使って表せることを証明する。(そのためにはコンパクト化をうまく選ばなければならない。)そうすれば、やはり、倉西写像を帰納的に摂動する事で、 $C\mathcal{M}$ の基本

ホモロジー類が定義できるのである。

無限遠での倉西理論は、おそらく代数幾何では余り多くはされていなかったであろう。ゲージ理論では、タウベスとドナルドソンによってすでに行われている。すなわち、obstruction 付きのタウベスgluingである。

概複素曲線の場合の正しいコンパクト化は、stable mapと呼ばれるものを用いるもので、コンセピッチによって導入された。

§6 多価摂動

いままで I_h の存在（自己同型の存在）を不問にしてきた。実はこの点こそ主要問題なのである。次の仮定が本質的である。

I_h はいつも有限群である。

これは、強い仮定で、複素構造のモジュライでも、自己共役方程式のモジュライでも成立しない。しかし概複素曲線のモジュライでは成立する。これがコンセピッチによるstable mapの定義の要点である。

自己共役方程式のモジュライでこの仮定が成立しないのは自然である。ドナルドソン不変量の場合は、全てのモジュライ空間がsmoothであるかのごとく考え、おおらかに議論すると間違える事が知られている。その典型例がwall crossingと呼ばれ、 $b_2^+ = 1$ である場合に、4次元多様体のドナルドソン不変量が計量や摂動によってしまふことの根拠である。従って、定理3.1のようなことは、自己共役方程式のモジュライでは、成立しない。その理由が上の仮定の不成立なのである。

さてこの仮定をどう使うのであろうか。

倉西描像を考える。局所的には、モジュライ空間は $\frac{s^{-1}(0)}{I_h}$ と表せ、 $s: H^1 \rightarrow H^2$ は I_h 同変写像であった。前の節で述べた事によれば、 s を摂動して0と横断的にしたい。 I_h がある場合には、これは、 I_h 同変に行わなければならない。

群作用の理論ではよく知られているように、また容易に反例がつくれるが、これは一般には出来ない。すなわち、写像を、群作用を保ったまま、横断的にすることは出来ない。この点が実は、negative multiple cover problemの核心であり、このことから、方程式をどういじっても、横断的に出来ないことが分かる。

これに対する解決策は、多価の摂動をすることである。すなわち、次のようにする。 $S^l(H^2)$ でベクトル空間 H^2 の l 次対称積を表す。すなわち、 $(H^2)^l$ の l 次対称群による商である。 $s: H^1 \rightarrow H^2$ を $s: H^1 \rightarrow (H^2)^l$ なる写像にしてそれを摂動して0と横断的にするのである。これは、次のようにすればよい。まず、 $s: H^1 \rightarrow H^2$ を I_h 同変でなくてもいいから、0と横断的に摂動して、 s_0 をえる。それから、 $l = \#I_h$ として、 s_0 を I_h の元で動かした l 個を並べたものを $s: H^1 \rightarrow (H^2)^l$ とするのである。

このようにして、多価写像として、倉西写像を0と横断的に摂動出来た。すると、その多価写像の0点はどうなっているだろうか。（0点とはどこかの成分が0である点全体。）ここで注意すべきなのは、多価摂動が何価かは、点によって変わることである。従って、この0点集合は、多様体がいろいろに枝分かれした形をしている。しかし、そのそれぞれの枝に、その付近で摂動した倉西写像が何価かに応じた重みを付けると、 \mathbb{Q} 係数のサイクルが出来る。これが求めるものなのである。

文献

[A]. Arnold, V, *Sur une propriétés des application globalement canoniques de la mécanique classique*. C.R.Acad. Paris, 1965. 261: p. 3719 - 3722.

- [B] Behrend.K, *Gromov-Witten invariants in Algebraic geometry*. preprint.
- [BF] Behrend.K and Fantechi.B, *The Intrinsic Normal Cone*. preprint.
- [BM] Behrend.K and Manin.Y, *Stacks of stable maps and Gromov-Witten invariants*. Duke Math. J., to appear.
- [CZ] Conley.C and Zehnder.E, *The Birkhoff-Lewis fixed point theorem and a conjecture of V.I.Arnold*. Invent. Math., 1983. 73: p. 33 - 49.
- [D1] Donaldson.S, *An application of gauge theory to the topology of 4-manifolds*. J. Differential Geom., 1983. 18: p. 269 - 316.
- [D2] Donaldson.S, *Irrationality and h-cobordism conjecture*. J. Differential Geom., 1987. 26: p. 397 - 428.
- [F1] Floer.A, *Proof of Arnold conjecture for surfaces and generalizations to certain Kähler manifolds*. Duke Math. J., 1986. 53: p. 1 - 32.
- [F2] Floer.A, *Symplectic fixed point and holomorphic spheres*. Commun. Math. Phys., 1989. 120: p. 575 - 611.
- [Fk] 深谷賢治, 量子コホモロジー, in 「Surveys in geometry, Symplectic 幾何」, 1995.
- [FO1] Fukaya.K and Ono.K, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant for general symplectic manifolds*. preprint.
- [FO2] Fukaya.K and Ono.K, *Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant*. preprint.
- [Fu] Furuta.M, *Monopole equation and 11/8 conjecture*. preprint.
- [G] Gromov.M, *Pseudo holomorphic curves in symplectic manifolds*. Invent. Math., 1985. 82: p. 307 - 347.
- [HS] Hofer.H and Salamon.D, *Floer homology and Novikov ring*, in *The Floer Memorial volume*, Hofer.H, et al., Editors. 1995, Birkhäuser: Basel. p. 483 - 524.
- [KNS] Kodaira.K, Nirenberg.L, and Spencer.D, *On the Existence of Deformations of Complex Analytic Structures*. Ann. of Math., 1958. 67: p. 450 - 459.
- [Ko] Kontsevich.M, *Enumeration of Rational curve by Torus action*, in *Moduli space of surface*, Dijkgraaf.H, Faber.C, and v.d. Geer.G, Editors. 1995, Birkhäuser: Boston. p. 335 - 368.
- [KM] Kontsevich.M and Mannin.Y, *Gromov-Witten Classes, Quantum Cohomology, and Enumerative Geometry*. Commun. Math. Physics, 1994. 164: p. 525 - 562.
- [Ku] Kuranishi. *New proof for the existence of locally free complete families of complex structures*. in *Conference on Complex Analysis*. 1964. Minneapolis: Springer - Verlag.
- [LT] Li.J and Tian.G, *Virtual Moduli cycles and GW invariant*. preprint.
- [O1] Ono.K, *On the Arnold conjecture for weakly monotone symplectic manifolds*. Invent. Math, 1995. 119: p. 519 - 537.
- [O2] 小野薫, Symplectic Floer theory, in 「Surveys in geometry, Symplectic 幾何」, 1995.
- [R1] Ruan.Y, *Topological sigma model and Donaldson type invariant in Gromov theory* Duke Math. J., to appear..
- [R2] Ruan.Y, *Virtual neighborhood and monopole equations*. preprint.
- [RT1] Ruan.Y and Tian.G, *A mathematical theory of quantum cohomology*. Journal Differential Geom., 1995. 42: p. 259 - 367.
- [RT2] Ruan.Y and Tian.G, *Higher genus symplectic invariants and sigma model coupled with gravity*. preprint.
- [S] Sikorav.J, *Points fixes d'une application symplectique holomorphe à l'identité*. J. Differential Geom., 1985. 22: p. 49 - 79.

ナッシュ多様体

塩田昌弘

序

以下の話しはすべて実数上で行われる。例えば、代数的集合とはユークリッド空間で定義された実多項式関数の零点集合である。多項式写像と代数的集合の研究は複素数上のそれより歴史的には古い。しかし系統立った研究は Whitney と Thom と Lojasiewicz 以外にはあまりなかった。それが 10 年強前から行われるようになった。その 1 部を紹介したい。

代数的集合と多項式写像のカテゴリーを系統立って考えるのは今でも無理だと思われる。位相的理由は 2 つある。まず、代数的集合の連結成分が代数的とは限らないということ。例えば、 $\{xy = 1\}$ 。もう 1 つは、多項式写像による代数的集合の像は閉集合でも必ずしも代数的でないということ。例えば、 $\{y = x^2\}$ の y -軸への射影。これらはまさに複素数上で代数的集合の問題を考えるようになった位相的理由である。そこで代数的集合の概念を半代数的集合という次の概念に拡張する。半代数的集合とは多項式写像による代数的集合の像。すると、半代数的集合の連結成分は半代数的になることが証明できる。(容易ではないが、Tarski-Seidenberg。) 又これは次のように定義すると同値である。 \mathbf{R}^n 中の半代数的集合とは \mathbf{R}^n 上の多項式関数 $f_i, g_{i1}, \dots, g_{ik}, i = 1, \dots, k'$, が存在して

$$\bigcup_{i=1}^{k'} \{x \in \mathbf{R}^n \mid f_i(x) = 0, g_{i1}(x) > 0, \dots, g_{ik}(x) > 0\}$$

と書き表せる集合 (Tarski-Seidenberg)。

C^∞ (実は自動的に C^ω になるのであるが、Malgrange) 滑らかな半代数的集合をナッシュ多様体と呼ぶ。ナッシュ多様体の同値な定義はたくさんある。(証明は多項式環の正規化定理を使う。) 1 つは上の代数的カテゴリーを含み陰関数の定理が成り立つ最小のカテゴリーの対象で滑らかなもの。別のは、ユークリッド空間の中で閉じたナッシュ多様体は M. Artin の意味の滑らかなアファイン algebraic space の実係数の場合。又 1 つは、ユークリッド空間の中で閉じた連結なナッシュ多様体とは代数的集合の解析的既約成分で滑らかなもの。(ナッシュ多様体はユークリッド空間にそれを埋め直して、そこで閉集合となる様にできる。)

ナッシュ多様体とはどういうものであるか、主としてトポロジーの観点から解説したい。参考文献は [2] に書かれている。この解説自身、[2] の 1 部抜粋である。

ナッシュ多様体間の $C^\infty (= C^\omega)$ 写像でグラフが半代数的となるのをナッシュ写像と呼ぶ。ナッシュ多様体上のナッシュ関数の零点集合をナッシュ集合と呼ぶ。

§1. 近似定理と自明定理

r を非負整数とする。 C^r 滑らかな半代数的集合を C^r ナッシュ多様体, C^r ナッシュ多様体間の C^r 写像でグラフが半代数的なのを C^r ナッシュ写像と呼ぶ。 $N^r(M, M')$

で C^r ナッシュ多様体 M から M' への C^r ナッシュ写像全体とする。 $N(M, M')$ は ナッシュ写像全体をあらわす。 $M' = \mathbf{R}$ のとき、それぞれを $N^r(M)$, $N(M)$ と書く。

何らかの性質を持つナッシュ写像を構成するとき、それは局所的には容易でも大域的にはむずかしいことが多い。ナッシュ級の 1 の分割は存在しないからである。しかし C^r ナッシュ級の 1 の分割は存在する。だから求める性質をもつ C^r ナッシュ写像は構成できることが多い。そこで次に述べる近似定理が重要になる。実際、ほとんどすべてと言っていいぐらいナッシュ多様体と写像に関する知られた定理はこの定理を使って証明されている。そんな中心的な定理である。

$N^0(\mathbf{R}^n)$ に位相を次のように定義する。 f を $N^0(\mathbf{R}^n)$ の元とする。 $\{V\}$ で f のグラフを含む $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の開半代数的集合のすべてとする。

$$\{g \in N^0(\mathbf{R}^n) \mid \text{graph } g \subset V\}, \quad V \in \{V\}$$

が f の $N^0(\mathbf{R}^n)$ の中での近傍系である。 $N^1(\mathbf{R}^n)$ の位相は写像

$$N^1(\mathbf{R}^n) \ni f \rightarrow (f, \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}) \in N^0(\mathbf{R}^n) \times \dots \times N^0(\mathbf{R}^n)$$

による $N^0(\mathbf{R}^n)$ の位相の引き戻しで定義する。同様に $N^r(M, M')$ と $N(M, M')$ の位相を定義する。 M がコンパクトの場合これらは C^r 位相及び C^∞ 位相にすぎない。非コンパクトの場合 Whitney 位相と似ているが、それより分かりやすい。例えば、この位相は第 2 可算公理をみたす。その他、この位相は自然な当然期待される性質をすべて満たす。さらに次の定理が成り立つ。

近似定理. ナッシュ多様体間の C^r ナッシュ写像はナッシュ写像で近似できる。

系. どんな C^r ナッシュ多様体も何らかのナッシュ多様体に C^r ナッシュ同相である。

$r = 0$ のとき、近似定理は Efroymsen と Pecker によるが、それはあまり役に立たない。 $r > 0$ のとき、証明はたいへん長い。

重要な定理がもう 1 つある。微分位相幾何と同じ議論をナッシュ多様体で行おうとして、うまく行かないのは、ナッシュベクトル場の積分曲線が必ずしも半代数的にならないということである。例えば、 $y' = 2y/x^3$ の積分曲線の 1 つは $y = \exp -1/x^2$ 。多くの場合、次の定理によってベクトル場の積分を考える必要はなくなる。

自明定理. M をナッシュ多様体とし、 $f: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ をナッシュ固有サブマーションとする。するとナッシュ同相写像 $\phi: \mathbf{R}^n \times f^{-1}(0) \rightarrow M$ が存在して $f \circ \phi: \mathbf{R}^n \times f^{-1}(0) \rightarrow \mathbf{R}^n$ は射影となる。

C^∞ 写像の場合、これは明らかであるが、ナッシュ写像の場合、証明は容易でない。

§2. ナッシュ多様体

定理 2.1(コンパクト化). コンパクトでないナッシュ多様体 M に対して境界付きコンパクトナッシュ多様体 L が存在して、 M は L の内部にナッシュ同相である。

ここで L はナッシュ同相を除いて一意的に決まる。さらに次のことが言える。

定理 2.2. ナッシュ多様体 M_1, M_2 に対して、もしそれらがコンパクトなら $L_1 = M_1, L_2 = M_2$ とおく。コンパクトでないなら、 L_1, L_2 を上の定理でのコンパクト化とする。すると次の条件は同値である。

(i) M_1 と M_2 はナッシュ同相である。

- (ii) L_1 と L_2 はナッシュ同相である。
- (iii) L_1 と L_2 は C^∞ 同相である。

ナッシュ多様体は C^∞ 多様体と比べて、シンプルであることを、これらの定理は示している。実際、コンパクトでない C^∞ 多様体は必ずしもコンパクト化できない。又できて、一意的とは言えないことはよく知られている。

ナッシュ多様体に関する問題は非コンパクトの場合、これらの定理によって、境界付きのコンパクトナッシュ多様体の場合に帰着できることがかなりある。

定理 2.3. C^∞ 多様体 M がナッシュ多様体と C^∞ 同相であるための必要十分条件は M がコンパクトか又は何らかの境界付きのコンパクト C^∞ 多様体の内部と C^∞ 同相。

定理 2.4(代数モデル). どんなナッシュ多様体も何らかの滑らかなアファイン代数的集合とナッシュ同相である。

多様体がコンパクトの場合この定理は本質的に Tognoli に拠る。非コンパクトの場合 Akbulut-King は C^∞ 同相であるというところまで証明した。

定理より、ナッシュ多様体とナッシュ写像のカテゴリーは滑らかな代数的カテゴリーと対象は同じと見なせて、違いは、ただ射のみである。射が豊かだから(例えば、陰関数の定理が成り立つ) 良い理論が期待できる。

次の定理はナッシュ多様体は代数的にも滑らかであることを言っている。

定理 2.5. $M_1 \subset M_2$ をナッシュ多様体とし、 M_1 は M_2 で閉じているとする。すると $f_1, \dots, f_k \in N(M_2)$ が存在して、それらの共通零点が M_1 で、さらに $(\text{grad } f_1)|_{M_1}, \dots, (\text{grad } f_k)|_{M_1}$ は M_1 の M_2 における法束を張る。

§3. ナッシュ関数芽の層

$M \subset \mathbb{R}^n$ をナッシュ多様体、 \mathcal{N} を M 上のナッシュ関数芽の層とする。解析的関数の層の性質をほとんど、この層は持っている。例えば \mathcal{N} は \mathcal{N} -加群の層として連接である。しかし重要な当然期待されるであろう性質 $H^i(M, \mathcal{N}) = 0$ (Stein 多様体の基本定理 B のナッシュ版) は成り立たない。 $H^1(S^1, \mathcal{N}) \neq 0$ は Hubbard によって証明された。さらに M の次元が 0 でないなら常に $H^1(M, \mathcal{N}) \neq 0$ となる。 $H^1(M, \mathcal{N})$ は埋込み不可能な抽象的ナッシュ多様体 (§4 を見よ) の構造と関係していて重要と思える。しかし層理論を作り上げるのにこれはやっかいである。この問題は次の予想が正しければ、かなり解決される。 \mathcal{I} を連接 \mathcal{N} -イデアルとする。もし自明でない連接 \mathcal{N} -イデアル $\mathcal{I}_i, i = 1, 2, \dots$ が存在して $\mathcal{I} = \bigcap_{i=1}^{\infty} \mathcal{I}_i$ となるということがないなら、 \mathcal{I} を有限と呼ぶ。(M がコンパクトのとき、 \mathcal{I} は常に有限である。)

予想 3.1. \mathcal{I} を有限連接 \mathcal{N} -イデアルとする。すると自然な写像

$$H^0(M, \mathcal{N}) \rightarrow H^0(M, \mathcal{N}/\mathcal{I})$$

は全射。

Stein 多様体の基本定理 A のナッシュ版は次の予想。

予想 3.2. 有限連接 \mathcal{N} -イデアル \mathcal{I} は M 上のナッシュ関数によって生成される。言い替えれば

$$\mathcal{I} = H^0(M, \mathcal{I})\mathcal{N}.$$

定理 3.3. もし M がコンパクトならば両予想は正しい。

勿論、これらの予想と定理は有限連接 \mathcal{M} -加群に拡張できる。

予想 3.2 が正しいければ次のことが言える。 M の半代数的部分集合がナッシュ集合になるための必要十分条件はそれが解析関数の零点集合となること。(注意。解析集合となることではない。なぜなら、解析集合とは局所的に解析関数の零点集合となる集合。)

§4. 抽象的ナッシュ群

ナッシュ多様体をナッシュ同相写像を使って張合せた多様体を抽象的ナッシュ多様体と呼ぶ。ユークリッド空間にナッシュ埋込めない抽象的ナッシュ多様体が存在する (Mazur)。それを埋込み不可能なナッシュ多様体と呼ぶ。(抽象的) ナッシュ群 G とは (抽象的) ナッシュ多様体で群演算

$$G \times G \times \ni (x, y) \rightarrow xy \in G, \quad G \ni x \rightarrow x^{-1} \in G$$

がナッシュ写像になるそんな群。ナッシュ群だけではなく抽象的ナッシュ群も考える理由は以下の定理より明らかになる。(抽象的ナッシュ多様体に関する結果はあまりない。) 2つの抽象的ナッシュ群が同型とは群としての同型写像が存在して、それが同時にナッシュ多様体としてのナッシュ同相写像となること。

群 G が単に半代数的で群演算が半代数的写像のとき、 G を半代数的群と呼ぶ。抽象的半代数的集合と抽象的半代数的群も定義できるが、それらは常に埋込み可能である。よって、それらを定義する必要はない。半代数的群の同型は抽象的ナッシュ群のそれと同じように定義する。

リー群に解析的構造が常に備わっているという定理のナッシュ版は次の定理。

定理 4.1 (Pillay). どんな半代数的群もなんらかの抽象的ナッシュ群に半代数的群として同型。

注意。どんな抽象的ナッシュ群構造をいれても、それはいつも埋込み不可能となる、そんな半代数的群が存在する。

1次元抽象的ナッシュ群の完全な分類は可能である。それを示す。

加法群 \mathbf{R} に抽象的ナッシュ多様体構造を入れたい。 $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^n$ を C^ω はめ込みで像がナッシュ多様体で、小さな区間 $I = (-a, a)$ に対して、演算

$$\begin{aligned} \phi(I) \times \phi(I) \ni (x, y) &\rightarrow \phi(\phi^{-1}(x) + \phi^{-1}(y)) \in \mathbf{R}^n \\ \phi(I) \ni x &\rightarrow \phi(-\phi^{-1}(x)) \in \mathbf{R}^n \end{aligned}$$

がナッシュ写像になったとする。そのとき ϕ による引き戻しで \mathbf{R} に抽象的ナッシュ多様体構造をいれる。その抽象的ナッシュ群を (\mathbf{R}, ϕ) と書く。代表的な抽象的ナッシュ群は 4種類ある。

(1) (\mathbf{R}, id) 。

(2) (\mathbf{R}, \exp) 。これは $(0, \infty)$ で乗法群構造を考えるのと同じである。

(3) $(\mathbf{R}, (\sin, \cos))$ 。簡単のため (\mathbf{R}, \sin) と書く。 \mathbf{C} の中の原点を中心とし半径 1 の円周を S^1 とし、それに \mathbf{C} の乗法群構造の制限を考えたとき、 (\mathbf{R}, \sin) は S^1 の普遍被覆群となる。

(4) α を正数、 p_α を基本周期 1 と $i\alpha$ を持つ Weierstrass の p -関数とする。但し、

$$p_\alpha(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{\omega \neq 0 \in \mathbf{Z} + i\alpha\mathbf{Z}} \left(\frac{1}{(x - \omega)^2} - \frac{1}{\omega^2} \right).$$

$\phi: \mathbf{R} \rightarrow P^2(\mathbf{R}) \subset \mathbf{R}^3$ を写像 $(p'_\alpha, p_\alpha): \mathbf{C} \rightarrow P^3(\mathbf{C})$ の \mathbf{R} への制限とする。簡単の為 (\mathbf{R}, ϕ) を (\mathbf{R}, p_α) と書く。 ϕ の像は滑らかな射影楕円型 3 次曲線

$$\{(x_0, x_1, x_2) \in P^2(\mathbf{R}) \mid x_1^2 x_0 = 4x_2^3 - g_2 x_2 x_0^2 - g_3 x_0^3\},$$

$$g_2 = 60 \sum_{\omega \neq 0 \in \mathbf{Z} + i\alpha\mathbf{Z}} \frac{1}{\omega^4}, \quad g_3 = 140 \sum_{\omega \neq 0 \in \mathbf{Z} + i\alpha\mathbf{Z}} \frac{1}{\omega^6},$$

となり、 \mathbf{R} はその曲線の普遍被覆空間である。

定理 4.2 (Madden-Stanton). (1)(a) \mathbf{R} と同相な抽象的ナッシュ群は (\mathbf{R}, id) か (\mathbf{R}, exp) か (\mathbf{R}, sin) か (\mathbf{R}, p_α) に同型。

(b) これら 4 つの抽象的ナッシュ群は互いに同型でない。

(c) (\mathbf{R}, p_α) と $(\mathbf{R}, p_{\alpha'})$ が同型になる為の必要十分条件は α/α' が有理数。

(d) (\mathbf{R}, id) と (\mathbf{R}, exp) は埋込み可能。 (\mathbf{R}, sin) と (\mathbf{R}, p_α) は不可能。

(2)(a) S^1 と同相な抽象的ナッシュ群は $(\mathbf{R}, \text{id})/\mathbf{Z}$ か $(\mathbf{R}, \text{exp})/\beta\mathbf{Z}$ か $(\mathbf{R}, \text{sin})/\beta\mathbf{Z}$ か $(\mathbf{R}, p_\alpha)/\beta\mathbf{Z}$, $\beta > 0$, に同型

(b) これら 4 つの抽象的ナッシュ群は互いに同型でない。

(c) $(\mathbf{R}, \text{exp})/\beta\mathbf{Z}$ と $(\mathbf{R}, \text{exp})/\beta'\mathbf{Z}$, 又 $(\mathbf{R}, \text{sin})/\beta\mathbf{Z}$ と $(\mathbf{R}, \text{sin})/\beta'\mathbf{Z}$ が同型になる為の必要十分条件は β/β' が有理数。

(d) $(\mathbf{R}, p_\alpha)/\beta\mathbf{Z}$ と $(\mathbf{R}, p_{\alpha'})/\beta'\mathbf{Z}$ がそうである為の必要十分条件は α/α' と β/β' が両方とも有理数。

(e) $(\mathbf{R}, \text{id})/\mathbf{Z}$ も $(\mathbf{R}, \text{exp})/\beta\mathbf{Z}$ も埋込み不可能。

(f) $(\mathbf{R}, \text{sin})/\beta\mathbf{Z}$ と $(\mathbf{R}, p_\alpha)/\beta\mathbf{Z}$ が埋込み可能である為の必要十分条件はそれぞれ β が π と有理数との積、 β が有理数。

参考文献

[1] M. Shiota, Nash manifolds, Lecture Notes in Math., 1269, Springer, 1987.

[2] -----, Nash functions and manifolds, in: Lectures in real geometry, Walter de Gruyter, 1996, 71-114, to appear.

1. 序

3次元多様体のウィッテン不変量は、量子群の表現論と組み合わせ位相幾何学の方法により多くの人々の手で様々な仕方で定義されている。本稿ではウィッテンのもともとのアイデアである、非アーベルテータ関数の内積をもちいるウィッテン不変量の定義を、階数2の場合におこなう。階数2の場合に限定するのは、より高い階数の場合はいまだ考えたこともないという単純な理由以外に何もない。

種数 g が2より大きいリーマン面 C 上の、階数2で行列式1の $semi-stable$ ベクトルバンドルの正則同型類の集合、つまりモジュライの空間 $M(g)$ は次元 $3g-3$ の正規射影代数多様体になり、その上に豊富な直線束 L で $Pic(M(g)) = \mathbb{Z}$ の生成元になるものがあることが知られている。正整数 k に対し L の k 乗の正則切断をレベル k の階数2テータ関数とよぶ。

向きづけられた実3次元多様体 W を内部の曲面 C で二つの部分 $W(1)$ と $W(2)$ に分け、 C に (任意に) 複素構造をいれると、各正整数 k に対し $W(1)$ と $W(2)$ に対応するレベル k の階数2テータ関数がきまり、これらの内積をとるとこれは曲面 C およびその上の複素構造の取り方によらない W の位相不変量になるというのがウィッテンの (物理的な立場からの) 主張である。これらはすべて経路積分のことばをもちいてなされているので、いまだ数学にはなっていない。

われわれは階数2テータ関数の具体的な構成をすることからはじめる。そのための手ごかりは共形場理論である。代数幾何の人々により階数2のテータ関数の空間は $SU(2)$ 共形場理論のコンフォーマルブロックと呼ばれるベクトル空間と同一視されることが分かっている。このベクトル空間の次元の計算、また基底の構成などは、物理学者が最初に予言したものを土屋、蟹江、上野、山田氏等が、数学的に厳密な方法で証明を与えた。土屋氏らによる、与えられたリーマン面に対するコンフォーマルブロックの基底の構成は

アフィンリー環の表現論と点つきリーマン面の代数幾何学によるものである。そこではコンフォーマル ブロックは、アフィンリー環の表現論からくるある不変部分空間として提示されており、その基底はテータ関数として構成されているわけではない。コンフォーマル ブロックが階数2のテータ関数の空間と同一視されるとはいえ、このままでは抽象的な対応にとどまったままなので、ウイッテン不変量の定義をテータ関数を持ちいて行い、その幾何学的性質を調べたいという立場からすればこの点は大変困るところで、ここをなんとかすることからことから始めなければならない。というわけで、われわれは次の様な手順でことを運ぶことにする。

- (1) 共形場理論の定式化を少し幾何学的に見やすい仕方でやりなおす。
- (2) それを用いて階数2のテータ関数の空間の基底の具体的な構成を行う。
- (3) 構成したテータ関数の関数としての性質がよく見える座標系を $M(g)$ につくる。
。これは $SU(2)$ 共形場理論のアーベル化に対応する。
- (4) アーベル化の方法により階数2のテータ関数に対する熱方程式と不変内積をつくる。

以下 (1) から (4) のあらましを述べる。

2. 共形場理論の幾何学的定式化

共形場理論を少しだけ見直すとは具体的には次のこと意味する。われわれは共形場理論を、リーマン面上のベクトル束の切断に作用するコーシーリーマン作用素の $Quillen$ 行列式を中心に据えて考える。境界をもつリーマン面 C の各境界にスピンにより区別される粒子が指定され、リーマン面 C はこれらの粒子の相互作用を表わすものとして、その確率振幅を求める方法を与えるものが共形場理論であると考えよう。そしてこれらの物理的な概念を次の様に数学の言葉に翻訳する；

スピンにより区別される粒子の型	コーシーリーマン作用素の境界条件の族
相互作用の確率振幅	$Quillen$ 行列式

ただし、ここでの境界条件の族とは一般化された $Atiyah-Patodi-Singer$ タイプの境界条件の族であり、リーマン面 C 上のコーシーリーマン作用素を、指数0のフレドホルム作用素にするものを選ぶ。このような作用素に対してはそのラプラシアンをとって解析的トーションをかんがえることができる。さらに解析的トーションの $Quillen$ 分解をへてコーシーリーマン作用素の $Quillen$ 行列式が得られる。こうして得た $Quillen$ 行列式を相互作用の確率振幅とみなすわけである。この対応づけにもとづいて、3粒子相互作用を表わす頂点作用素を $Quillen$ 行列式の言葉で与える。

3. 階数2のテータ関数の空間の基底の構成

頂点作用素を $Quillen$ 行列式の言葉で与えると、リーマン面 C をパンツ分解してカットすることにより、各パンツ上で $Quillen$ 行列式が得られる。これらの $Quillen$ 行列式の内積をとることにより、階数2のテータ関数の空間の次元と同じ数の階数2テータ関数が構成できる。このとき、頂点作用素からくる $Quillen$ 行列式のノルムが有限であることが本質的になるが、これはラプラシアンの熱核をもちいて示される。これらが一次独立であり、従って基底になることは次の4.でのべる方法で証明される。

4. $M(g)$ の座標系の選択

$M(g)$ の座標系の選択とは、アーベル多様体から $M(g)$ への支配的な代数的写像の族をつくることを意味する。これは階数2のベクトル束を直線束からつくることに対応しており、このような写像の構成は以前から代数幾何学者によってなされていた。とくに $Hitchin$ はヒッグス場をつかってこのような写像の族の構成を行った。具体的にはリーマン面 C の2:1の分岐被覆リーマン面 C' の上の直線束の $direct\ image$ をとる操作により C' に付随するアーベル多様体によってパラメトライズされた C 上の階数2のベクトル束の族ができ、これがアーベル多様体から $M(g)$ への

支配的な代数的写像をあたえることになる。われわれはある意味で、この代数幾何学的手法のトポロジカルなアナロジーを考える。いうなれば、精緻なもののあらっぽい模造品をこしらえるわけであるが、あらっぽいが故に写像が分かりやすいという利点をもったものをつくるわけである。 $M(g)$ 上のテータ関数をアーベル多様体に引き戻してやれば、それはリーマン テータ関数であらわせるはずである。われわれは、3。において $M(g)$ 上のテータ関数を Quillen 行列式のことばで構成している。これをもちいると、リーマン テータ関数としての表示がある程度明確にわかる。

階数2のテータ関数をアーベル多様体上のリーマン テータ関数として表示すると、リーマン テータ関数の熱方程式から階数2のテータ関数の熱方程式をみちびくことができる。

網状ラグランジアン写像とその安定性について

塚田 孝治

北大・理(院)

0. はじめに

関数芽の特異点論の応用のひとつにラグランジアン特異点 [1] があり、これは実多様体内の特異点を持たない曲面から発生する局所的に安定した光の焦点を記述している。曲面に特異点があったらどうだろうか。ここで紹介する結果は特に"角"のある曲面から発生する局所的に安定した光の焦点を関数芽の特異点論の言葉を用いて分類する理論である (C 上では [3] による同様の理論が存在するが、これを C^∞ 上で成立するように訂正し、 C^∞ 特有な安定性の特徴づけと分類を行なったものである)。1. で網状ラグランジアン写像の理論について述べ、それに必要な関数芽の特異点論については 2. にまわす。

1. 網状ラグランジアン写像について

$\pi : (T^*\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ ($(q, p) \mapsto q$) を余接束とする。ここで (q, p) は $(T^*\mathbb{R}^n, 0)$ の標準座標である。 $(T^*\mathbb{R}^n, 0)$ のシンプレクティック構造を $\omega = dp \wedge dq$ とする。各 $\sigma \subset I_r$ に対し $L_\sigma^0 = \{(q, p) \in (T^*\mathbb{R}^n, 0) \mid q_\sigma = p_{I_r - \sigma} = q_{r+1} = \dots = q_n = 0, q_{I_r - \sigma} \geq 0\}$ とし、 $L^0 = \{(q, p) \in T^*\mathbb{R}^n \mid q_1 p_1 = \dots = q_r p_r = q_{r+1} = \dots = q_n = 0, q_{I_r} \geq 0\}$ とおく。写像芽

$$(L^0, 0) \xrightarrow{i} (T^*\mathbb{R}^n, 0) \xrightarrow{\pi} (\mathbb{R}^n, 0)$$

が網状ラグランジアン写像であるとは、 $(T^*\mathbb{R}^n, 0)$ 上の正準変換 S が存在し、 $i = S|_{L^0}$ が成立するときをいう。

2つの網状ラグランジアン写像 $\pi \circ i_1, \pi \circ i_2$ が網状ラグランジアン同値であるとは、 π のラグランジアン同値 (すなわち $(T^*\mathbb{R}^n, 0)$ 上の正準変換であり π のファイバーを保存するもの) Θ と $(T^*\mathbb{R}^n, 0)$ 上の各 L_σ^0 を保存する微分同相写像 Φ が存在し、 $\phi = \Phi|_{L^0}$ とするとき

$$\begin{array}{ccccc} (L^0, 0) & \xrightarrow{i_1} & (T^*\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^n, 0) \\ \phi \downarrow & & \Theta \downarrow & \searrow & \downarrow g \\ (L^0, 0) & \xrightarrow{i_2} & (T^*\mathbb{R}^n, 0) & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^n, 0) \end{array}$$

が可換となるときをいう。ここで g は Θ によって誘導される π の底空間の微分同相である。

関数芽 $F(x, y, u) \in m(r; k+n)^2$ が網状ラグランジアン写像 $\pi \circ i$ の生成族

であるとは、 F が非退化という条件を満たし、各 $\sigma \in I_r$ に対して

$$i(L_\sigma^0) = \{(u, \frac{\partial F}{\partial u})|_{x_\sigma} = \frac{\partial F}{\partial x_{I_r - \sigma}} = \frac{\partial F}{\partial y} = 0\}.$$

が成立するときをいう。

- 定理 (1) 任意の網状ラグランジアン写像に対してその生成族が存在する。
 (2) 任意の非退化な関数芽に対してそれを生成族とする網状ラグランジアン写像が存在する。
 (3) 2つの網状ラグランジアン写像が網状ラグランジアン同値である為の必要十分条件はそれらの生成族が安定網状右同値となることである。

この定理により、網状ラグランジアン写像を分類することと非退化な関数芽を分類することは同値であることが分かる。

次に安定性に対して得た結果を述べる。

$T^*\mathbf{R}^n$ の各開集合 U に対し $S(U, T^*\mathbf{R}^n)$ を U から $T^*\mathbf{R}^n$ への ω を保存する埋め込み全体からなる集合に C^∞ -位相を入れた空間とする。網状ラグランジアン写像 $\pi \circ i$ が安定であるとは次の条件を満たすときをいう： $i = S|_{L^0}$ なる任意の $(T^*\mathbf{R}^n, 0)$ 上の正準変換 S と S の任意の代表元 $\tilde{S} \in S(U, T^*\mathbf{R}^n)$ に対して $S(U, T^*\mathbf{R}^n)$ の \tilde{S} の近傍 N が存在し、任意の $\tilde{T} \in N$ に対して $\pi \circ i$ と $\pi \circ \tilde{T}|_{L^0 \text{ at } x_0}$ がある $x_0 = (0, \dots, 0; 0, \dots, 0, p_{r+1}^0, \dots, p_n^0) \in U$ に対し網状ラグランジアン同値となるときをいう。

定理 $\pi \circ i$ を生成族 $F(x, y, u)$ を持つ網状ラグランジアン写像とする。このとき $\pi \circ i$ が安定である必要十分条件は F が $f = F|_{u=0}$ の網状右安定開折であることである。

以上の2つの定理により、安定した網状ラグランジアン写像を分類するためには網状右同値のもとで安定した開折を分類すればよいことが分かる。

2. 関数芽の特異点論について

$\mathcal{E}(r; l)$ で $\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^l$ の 0 で定義された C^∞ 関数芽全体を表し、 $m(l) = \{f \in \mathcal{E}(l) | f(0) = 0\}$ とする。 $B(l)$ で $(\mathbf{R}^l, 0)$ 上の C^∞ 級微分同相芽全体からなる群を表し、 $B(r; k) = \{\phi \in B(r+k) | \phi(X_\sigma) \subset X_\sigma \text{ for } \sigma \in I_r, \phi(Y) \subset Y\}$ とする。ここで $I_r = \{1, \dots, r\}$ であり、ある固定された \mathbf{R}^{r+k} の座標 $(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_k)$ に対し $\mathbf{H}^r = \{(x_1, \dots, x_r) \in \mathbf{R}^r | x_1 \geq 0, \dots, x_r \geq 0\}$, $X_\sigma = \{(x, y) \in \mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^k, 0 | x_\sigma = 0\}$ で定義される。

$f, g \in m(r; k)$ が網状右同値であるとは、 $\phi \in B(r; k)$ が存在し、 $g = f \circ \phi$ を満たすときをいう。 $f \in m(r; k)$ が網状右 l -確定であるとは、 $j^l f(0) = j^l g(0)$ なる任意の $g \in m(r; k)$ が f と網状右同値となるときをいう。ある l に対して $f \in m(r; k)$ が網状右 l -確定であるとき、 f を網状右有限確定であるという。

命題 $f(x, y) \in \mathfrak{m}(r; k)$ とする。もし

$$\begin{aligned} \mathfrak{m}(r; k)^{l+1} \subset \mathfrak{m}(r; k) \left(\left\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \right\rangle \right. \\ \left. + \mathfrak{m}(r; k) \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k} \right\rangle \right) + \mathfrak{m}(r; k)^{l+2} \end{aligned}$$

ならば f は網状右 l -確定であり、逆に f が網状右 l -確定ならば

$$\mathfrak{m}(r; k)^{l+1} \subset \left\langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial f}{\partial x_r} \right\rangle \mathfrak{E}(r; k) + \mathfrak{m}(r; k) \left\langle \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k} \right\rangle$$

である。

$F(x, y, u) \in \mathfrak{m}(r; k+n)$, $G(x, y, v) \in \mathfrak{m}(r; k+m)$ を $f(x, y) \in \mathfrak{m}(r; k)$ の開折 (すなわち $F|_{u=0} = G|_{v=0} = f$) とする。このとき、 G から F への網状 f -開折圏射とは次を満たす組 (H, g, α) である：

(1) H は $\text{id}|_{\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^k} : (\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^k, 0) \rightarrow (\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^k, 0)$ の開折 $H : (\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^{k+m}, 0) \rightarrow \mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^k, (0)$ であり、各 $\sigma \subset I_r$ に対して $H(X_\sigma \times \mathbf{R}^m) \subset X_\sigma$ を満たす。

(2) g は C^∞ 写像芽 $g : (\mathbf{R}^m, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ であり、 $\alpha \in \mathfrak{m}(m)$ である。

(3) 次の等式が成り立つ。

$$G(x, y, v) = F(H(x, y, v), g(v)) + \alpha(v) \quad , \quad x \in \mathbf{H}^r, y \in \mathbf{R}^k, v \in \mathbf{R}^m$$

$F(x, y, u), G(x, y, v) \in \mathfrak{m}(r; k+n)$ が網状右同値であるとは、次を満たす組 (H, g, α) が存在するときをいう。

(1) H は C^∞ 写像芽 $H : (\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^{k+n}, 0) \rightarrow (\mathbf{H}^r \times \mathbf{R}^k, 0)$ 、 g は C^∞ 写像芽 $g : (\mathbf{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbf{R}^n, 0)$ であり、 $\alpha \in \mathfrak{m}(n)$ である。

(2) $(H, g) \in \mathcal{B}(r; k+n)$ である。

(3) 次の等式が成り立つ。

$$G(x, y, u) = F(H(x, y, u), g(u)) + \alpha(u) \quad , \quad x \in \mathbf{H}^r, y \in \mathbf{R}^k, u \in \mathbf{R}^n$$

F を $f \in \mathfrak{m}(r; k)$ の開折とする。 F が f の網状右普遍開折であるとは、任意の f の開折 G に対して G から F への網状 f -開折圏射が存在するときをいう。 F が f の網状右安定開折であるとは、 F の任意の代表元 $\tilde{F} \in C^\infty(U, \mathbf{R})$ に対して、 \tilde{F} の C^∞ -位相における近傍 $N_{\tilde{F}}$ が存在し、次の条件を満たすときをいう：任意の $\tilde{G} \in N_{\tilde{F}}$ に対して、点 $(0, y, u) \in U$ が存在して、 \tilde{G} の $(0, y, u)$ における関数芽が F と網状右同値となる。

定理 1 $f \in \mathfrak{m}(r; k)$ の開折 F に対して次は同値である。

(1) F は f の網状右普遍開折である。

(2) F は f の網状右安定開折である。

(3) $Q_f = L_{\mathbf{R}}\langle 1, \frac{\partial F}{\partial u_1}|_{u=0}, \dots, \frac{\partial F}{\partial u_n}|_{u=0} \rangle$

ここで

$$Q_f = \mathcal{E}(r; k) / \langle x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, x_r \frac{\partial f}{\partial x_r}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_k} \rangle_{\mathcal{E}(r; k)}$$

定理 2 (1) $f \in \mathfrak{m}(r; k)$ が網状右安定開折をもつための必要十分条件は f が網状右有限確定であることである。

(2) $f \in \mathfrak{m}(r; k)$ の n 次元網状右安定開折はすべて網状右同値である。

定理 1, 定理 2 によって、網状右安定開折を分類するためには網状右有限確定な関数芽を分類すればよいことが分かる。以下に $r \geq 1$, modality ≤ 1 の関数芽を分類した結果を記す。すなわち modality ≤ 1 である任意の $f(x, y) \in \mathfrak{m}(r; l)$ ($r \geq 1$) は分類表の関数芽のひとつに $\pm y_{k+1}^2 \pm \dots \pm y_l^2$ を加えたものと網状右同値となる。 $r = 1$ の分類表は V.I. Arnold の表 [1, p.281] に多少の手を加えたものである。 $r \geq 3$ のときは modality ≥ 2 となってしまうので、結果的にこの分類表は $r = 1, 2$ のみである。又、これは $r \geq 1$ かつ網状右余次元 ($= \dim_{\mathbf{R}} Q_f - 1$) ≤ 6 なる関数芽の分類も含んでいる。

r	k	Normal form	r - R^+ -codim	Conditions	Notat.
1	0	$\pm x^n$	$n - 1$	$n \geq 2$	B_n
1	1	$xy \pm y^n$	$n - 1$	$n \geq 3$	C_n
		$\pm x^2 + y^3$	3		F_4
		$\pm x^3 + ax^2y + y^3$	5	$4a^2 + 9 \neq 0$	$F_{1,0}$
		$ax^{n+3} \pm xy^2 + y^3$	$n + 5$	$n \geq 1, a \neq 0$	$F_{1,n}$
		$\pm x^4 + y^3 + ax^3y$	7		F_8
		$\pm x^3y + y^3 + ax^2y^2$	8		F_9
		$\pm x^5 + y^3 + ax^4y$	9		F_{10}
		$\pm y^4 + axy^2 \pm x^2$	5	$a^2 \neq \pm \pm 4$	$K_{4,2}$
		$\pm y^4 \pm xy^2 + ax^n$	$n + 3$	$n > 2, a \neq 0$	$K_{4,n}$
		$\varepsilon y^n \pm xy^2 + ax^m$	$n + m - 1$	$n > 4, m \geq 2,$ $\varepsilon^n = 1, a \neq 0$	$K_{n,m}$
		$\pm(x \pm y^2)^2 + ax^ny$	$2n + 2$	$n > 1, a > 0$	$K_{1,2n-3}^\#$
		$\pm(x \pm y^2)^2 + ax^n$	$2n + 1$	$n > 2, a \neq 0$	$K_{1,2n-4}^\#$
		$\pm y^4 + x^2y + ax^3$	7		K_8^*
		$\pm y^4 \pm x^3 + ax^2y^2$	8		K_9^*
		$y^5 \pm x^2 + axy^3$	7		K_8^{**}
1	2	$y_1^2y_2 \pm y_2^3 + xy_1 + axy_2$	5		L_6
		$y_1^2y_2 \pm y_2^{n-1} + axy_1^m \pm xy_2n + m$		$a^m > 0$	$D_{n,m}$
		$y_1^3 \pm y_2^4 + axy_1 + xy_2$	7		$E_{6,0}$
		$y_1^3 + y_1y_2^3 + axy_1 \pm xy_2$	8		$E_{7,0}$
		$y_1^3 + y_2^5 + axy_1 \pm xy_2$	9		$E_{8,0}$
		$y_1^2y_2 \pm y^4 + xy_1 + axy_2^2$	7		D_5^1
		$y_1^3 \pm y_2^4 \pm xy_1 + axy_2^2$	8		$E_{6,1}$
		$y_1^2y_2 \pm y_2^3 \pm x^2 + axy_1^2$	7		D_4^2
2	0	$\pm x_1^2 + ax_1x_2 \pm x_2^2$	3	$a^2 \neq \pm \pm 4$	12
		$\pm(x_1 \pm x_2)^2 + ax_2^n$	$n + 1$	$n \geq 3, a \neq 0$	13 _n
		$\pm x_1^n \pm x_1x_2 + ax_2^m$	$n + m - 1$	$n \geq 2, m \geq 3,$ $a \neq 0$	14 _{n,m}}
		$\pm x_1^2 + ax_1x_2^2 \pm x_2^3$	5		14'_{2,3}
2	1	$\pm y^n + x_1y \pm x_2y + ax_2^m$	$n + m - 1$	$n \geq 3, m \geq 2,$ $a \neq 0$	36 _{n,m}}
		$\pm y^3 + x_1y + ax_2y^2 \pm x_2^2$	5		36'_{3,2}

In the case L_6 $a^2 \pm 1 \neq 0$, while in the case $D_{n,m}$ $a \neq 0, n \geq 4, m \geq 1, n + m > 5$.

参考文献

- [1] V.I. Arnold, S.M. Gusein-Zade & A.N. Varchenko, *Singularities of differential maps*, Vol.I, Birkhäuser, Basel, 1986.
- [2] N.H.Duc & N.T.Dai & F.Phham, *Singularités non-dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés*, Memoire de la S. M. F., Nouvelle serie n.6, 1981.
- [3] N.H.Duc, *Involutive singularities*, Kodai Math. J., 17(1994), p 627-635
- [4] G.Wassermann, *Stability of unfolding*, Lecture note in mathematics, 393