第４２回

トポロジー シンポジウム

講　演　集

１９９５年7月

於　弘前大学

平成７年度科学研究費補助金・総合研究（Ａ）
課題番号　０６３０２００４

序

この講演集は１９９５年７月２４日から２７日の間，弘前大学で開催される第４２回トポロジーシンポジウムに際し，あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである．

その目的は参加者が講演をよりよく理解して，研究討論を行うための一助とするとともに，記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある．

この講演集は，

平成７年度科学研究費補助金　総合研究（Ａ）

「トポロジーの総合的研究」（課題番号　０６３０２００４）

により作られたものであることを付記しておく．

１９９５年７月

総合研究（Ａ）０６３０２００４

研究代表者　　西　田　吾　郎

第４２回トポロジーシンポジウム

世話人　菊地茂樹（弘前大理）
福田拓生（東工大理）
小宮克弘（山口大理）

プ　ロ　グ　ラ　ム

７月２４日（月）

09:30 ~ 10:30　柏原拓志（京大）1-5
On generalized cohomology of infinite loop spaces

10:45 ~ 11:45　石黒賢士（福岡大）6-15
コンパクト Lie 群の分類空間と有限ループ空間

13:15 ~ 14:15　皆川宏之（北大）16-28
S^1 のＰＬ同相群について

14:30 ~ 15:30　辻井正人（東工大）29-38
一次元力学系における単調性について

15:45 ~ 16:45　中居　功（北大）39-55
Moduli of first order PDE and web geometry of their solutions

７月２５日（火）

09:30 ~ 10:30　　藤井敏純（阪市大） 56-71

結び目多項式の実現問題について

10:45 ~ 11:45　　北野晃朗（東工大） 72-82

３次元多様体および結び目の Reidemeister torsion について

13:15 ~ 14:15　　石川剛郎（北大） 83-98

シンプレクティック幾何における特異点論

14:30 ~ 15:30　　太田啓史（名大） 99-108

Monopole equation on 4-manifold

15:45 ~ 16:45　　古田幹雄（京大） 109-116

11/8 予想とモノポール方程式

７月２６日（水）

09:30 ~ 10:30　　加藤　毅（京大） 117-126

Asymptotic method in higher signature problem

10:45 ~ 11:45　　Alexandre D. Mednykh（Novosibirsk State Univ., 東工大） 127-141

The geometry and topology of the Fibonacci manifolds

13:15 ~ 14:15　　家本宣幸（大分大） 142-148

積空間の正規性とその周辺

14:30 ~ 15:30　　川上智博（大阪府立工業高専） 149-158

コンパクト C^∞ G 多様体の Nash G 多様体構造について

15:45 ~ 16:45　　吉田敏男（広島大） 159-169

$H^*(BO;Z_2)$ の自己準同形写像と普遍 Wu 類

７月２７日（木）

09:30 ~ 10:30　　酒井克郎（筑波大） 170-176

無限次元多様体における帰納的極限の位相と距離位相

10:45 ~ 11:45　　三好重明（駒沢大） 177-186

２、３次元多様体上の葉層 S^1 束について

On generalized cohomology of infinite loop spaces

柏原 拓志 （京大）

Ordinary homology of infinite loop spaces of the form QX (here $Q = \Omega^\infty\Sigma^\infty = colim\Omega^k\Sigma^k$ has been know for a long time. ([3], [1]). Roughtly speaking they are free objects on which certain family of operations arising from the structure of infinite loop spaces act. There have been various attempts to extend this to the case of generalized homology theory. The first result is due to Hodgkin, dating back to 1970.

Theorem 1 ([4]) $K_*(QS^0; Z/p) \cong Z/p[\iota, Q\iota, Q^2\iota, \ldots][\iota^{-1}]$

Here Q^i denotes the i-th iteration of Q, which is a certain analogue of the classical Dyer-Lashof-Kudo-Araki operation, defined up to some indeterminacy. Later in the begining of 1980's, Miller and Snaith determined $K_*(QS^n; Z/2)$ as well as $K_*(QRP^n; Z/2)$. Finally, McClure succeded to define a well-defined operation from $K_*(Y, Z/p^r)$ to $K_*(Y, Z/p^{r-1})$ $(r \geq 2)$, for infinite loop spaces Y and described $K_*(QX; Z/p^r)$ $(r \geq 1)$ in terms of the Bockstein spectral sequence for $K_*(X)$ ([13]) (that is, the knowledge of $K_*(X, Z/p^r)$ for all $r \geq 1$). Naturally the next cases to study would be the higher Morava K-theory. The computation by Hodgkin depended on the theorem of Atiyah on the K-theory of the classifying space of finite groups $K^*(BG) \cong R(G)^\wedge$ and the intimate relationship between the classifying spaces of the symmetric groups and QS^0. Unfortunately, in the case of Morava K-theories, we only know that dimension of $K(n)^*(BG)$ is equal to the number of the n-tuples of commuting elements of order power of p [5], provided that it is concentrated in even degrees (which is the case for symmetric groups ([5],[6])) and we don't have their functorial description. However, it turned out to be that these formulas were sufficicent to recover the results of [4], (see [7]). Furthermore, by doing quite involved calculations of characteristic classes, $K(2)_*(QS^{2n})$ has been computed ([9]). Unfortunately, computation for arbitrary Morava K-theory by this method seems to be too complicated to carry out. Thus we are lead to consider some other aspects of the classical computation. Namely, results by Lannes and Zarati relate, implicitly, at least when the space X is a suspension, the cohomology of QX with the derived functors of the destabilization. Our result in [11] identifies $BP^*(\Omega^\infty Y)$ with $\mathcal{D}BP^*(Y)$ where BP is the p-complete Brown-Peterson cohomology (with coefficient $BP^* \cong Z_p^\wedge[v_1, v_2, \ldots])$, $\mathcal{D}$ denotes the destablilization functor for BP, Ω^∞ the infinite loopspace associated to a spectrum, when Y is a spectrum with cells only in even non negative dimensions. What is meant by the destabilization is as follows. BP-cohomology of a space has a structure called BP-unstable algebra[2], whereas BP-cohomology of a spectrum is just a module over $BP^*(BP)$ (the algebra of stable operations). There is a forgetful functor from the category of BP-unstable algebras to that of $BP^*(BP)$-modules, which is compatible to Σ^∞. Its left adjoint is the destabilization. Thus it is a sort of algebraic model for Ω^∞, and our result says that this model is perfect in the situation considered. More concretely, for example, in the case of sphere spectrum, we know

Theorem 2 ([11]) *$BP^*(QS^{2n})$ is the cokernel of the map*

$$\otimes BP^*(\Omega^\infty\Sigma^{2(n+j)}BP) \overset{\otimes r_j^*}{\to} BP^*(\Omega^\infty\Sigma^{2n}BP)$$

(in the category of the algebras augmented over BP^*).

For Morava K-theories,

Theorem 3 ([11]) *1. $K(r)_*(QS^{2n})$'s are polynomial algebras ($n > 0$).*

2. $K(r)_*(QS^{2n})$ ($n \geq 0$) is the kernel (in the category of Hopf algebras) of the map

$$K(r)_*(\Omega^\infty\Sigma^{2n}BP) \overset{\otimes r_{j*}}{\to} K(r)_*(\Omega^\infty\Sigma^{2(n+j)}BP)$$

The objects that appear in the statement of the Theorems have been computed in [14]. In [16], a method of evaluating the maps is shown. Results in [8] imply that this evaluation can be reduced to that of the stable

BP-operations on BP-cohomology of products of CP^∞'s. This is a purely algebraic problem, but seems to be difficult to handle. In the case of Mod p K-theory, however, results in [12] show partially how to handle this. Namely, we have,

Theorem 4 *Let A be the set of the sequence $(a_1, a_2, \ldots,), a_i \in K_{-*}(BP; Z/p)$ such that $a_N = a_{N+1} = \cdots \in Im(BP_* \to K_*(BP))$, with the obvious ring structure. Then we have an isomorphism of graded rings*

$$Ind(K_0(\Omega^\infty \Sigma^{2*} BP)) \cong A$$

given by

$$x \to (\sigma^\infty(x), \sigma^\infty(V(x)), \sigma^\infty(V^2(x)), \ldots)$$

here σ^∞ denotes the homology suspension, V the Verscheibung, andInd denotes the module of indecomposables, which inherits the product structure from the so-called Hopf ring $\circ$ product, i.e., that induced by the pairing between infinite loop spaces for BP corresponding to the multiplication in BP-cohomology.

This result reduces the evaluation of r_{j*} on $K_*(\Omega^\infty \Sigma^{2*} BP; Z/p)$ to that on $K_*(BP, Z/p)$, which is dramatically easier. For example, one can conclude

Theorem 5 *The image of $IndK_0(QS^{2n}; Z/p)$ $(n > 0)$ in $K_0(\Omega^\infty \Sigma^{2n} BP; Z/p)$ corresponds to the set of sequences $(a_1, a_2, \ldots,)$, $a_N = 0$ for N large enough, $a_i \in K_{-2n}(S^0; Z/p) \cong Z/p$.*

One can also show that the K-theory version of Dyer-Lashof operation sends $(a_1, a_2, \ldots,)$ to $(0, a_1, a_2, \ldots,)$. Thus one sees that $K_*(QS^{2n}; Z/p)$ is a polynomial algebra whose generators are ι_{2n}, $Q\iota_{2n}$, $Q^2\iota^{2n}$ and so on, which agrees with the results obtained by McClure and Miller-Snaith. With a little bit of care on the connected components, one can recover the result of Hodgkin as well.

To conclude, we remark that the above result has been obtained by the consideration of so-called Hopf ring structure (ring object in the category of coalgebras. Hopf algebras are group objects in the category of coalgebras.) The Hopf ring structure of mod 2 ordinary of homology of QS^0, described in [15], [10], is in a sharp contarst to that of mod 2 K-theory of QS^0.

References

[1] S. Araki and T. Kudo, *Topology of H_n-spaces and H-squaring operations,* Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ. Ser. A, 1956, 85-120.

[2] J. M. Boardman, D. C. Johnson, and W. S. Wilson, *On BP-unstable algebras,* preprint, 1991.

[3] E. Dyer, and R. K. Lashof, *Homology of iterated loop spaces,* Amer. J. of Math. **84** (1962), 35-88.

[4] L. Hodgkin, *The K-theory of some well known spaces. I. QS^0,* Topology **11**, (1972), 371-375.

[5] M. J. Hopkins, N. J. Kuhn, and D. C. Ravenel, *Generalized characters and complex oriented cohomology theories,* preprint.

[6] J. Hunton, *Morava K-theory of wreath products,* Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **107** (1990), 309-318.

[7] T. Kashiwabara *Mod p K-theory of $\Omega^\infty\Sigma^\infty X$ revisited,* Math. Proc. Camb. Philos. Soc. **114** (1993) pp.219-221.

[8] T. Kashiwabara, *Hopf rings and unstable operations,* Journal of Pure and Appl. Algebra, **94** (1994), 183-193.

[9] T. Kashiwabara, *K(2)-homology of some infinite loop spaces,* Math. Z., **218** (1995) pp.503-518

[10] T. Kashiwabara, *Sur l'anneau de Hopf $H_*(QS^0; Z/2)$,* Comptes Rendues de l'Aca. Sci., **320** (1995), 1119-1122.

[11] T. Kashiwabara, *Brown-Peterson cohomology of QS^{2n},* preprint

[12] T. Kashiwabara, N. Strickland, and P. Turner, *Morava K-theory Hopf ring for BP,* to appear in the conference proceedings of BCAT 94 (Homotopy theory, Barcelona, 1994).

[13] J. E. McClure, Mod p K-theory of QX, in *H_∞ ring spectra and their applications,* Lecture Notes in Math. 1176, (Springer-Verlag, 1986).

[14] D. C. Ravenel, and W. S. Wilson, *The Hopf ring for complex cobordism,* Journal of Pure and Applied Algebra **9**, (1977), 241-280.

[15] P. Turner, *Dickson coinvariants and the homology of* QS^0 to appear in Math. Z.

[16] W. S. Wilson, *BP-homology, an introduction and sampler.* Regional Conference Series 48, (American Mathematical Society, Providence 1982.)

コンパクト Lie 群の分類空間と有限ループ空間

石黒賢士　福岡大学 理学部

分類空間 BG のホモトピー論の研究は８０年代より飛躍的に発展している分野である。コホモロジーによる特徴付けなど、７０年代は主に代数的であったその分野の研究が、８０年代に入り H. Miller [M] が Sullivan Conjecture を証明して以来、Lannes の結果等 [L], [S] を合わせて幾何学的方面での重要な結果が数多く得られた。その中で、Dwyer–Miller–Wilkerson の結果、及び Jackowski–McClure–Oliver の結果は代表的である。そして９０年代に入り p-compact 群という概念が導入され代数的手法と幾何学的手法の融合が為されてきている。すなわち、ホモトピー論的手法による Lie 群論の一般化である。尚、分類空間についてのガイドブックとしては [N3] を読むことをお勧めします。

定理 1 *[M]*　局所有限群πと有限 CW–複体 Xに対し、次の写像 (evaluation map) $map(B\pi, X) \longrightarrow X$ は weak equivalence である。

空間 Xに群πが作用しているとする。このとき homotopy fixed point set$X^{h\pi}$は $E\pi$(free contractible π–space) から Xへのπ–写像の全体として定義される。すなわち $X^{h\pi} = map_\pi(E\pi, X)$ であり、特にπが自明に作用するときは $X^{h\pi} = map(B\pi, X)$ となる。不動点集合 X^πから $X^{h\pi}$への自然な写像が与えられる。空間 Xの p–completion [B–K] を $X^\wedge_p$で表わすと、特にπが有限 p–群の時、次の結果が得られる。

定理 2 *[M]*　有限 CW–複体 Xが π–space でπが有限 p–群ならば写像 $(X^\pi)^\wedge_p \longrightarrow (X^\wedge_p)^{h\pi}$ はホモトピー同値である。

Steenrod 代数を A_pで表わすと、elementary p–abelian group Vに対し Lannes' T–functor T_Vは次のような adjoint functor として定義される。

$$Hom_{A_p}(M, H^*(BV; \mathbf{F}_p) \otimes N) = Hom_{A_p}(T_V(M), N)$$

ここで Mと N は A_p上の module 又は algebra とする。

定理 3　*[L]*

1. 空間 X は nilpotent で $H^*(X;\mathbf{F}_p)$ が finite type かつ $\pi_1(X)$ が有限とする。このとき自然な写像
$$[BV,X]\longrightarrow Hom_{A_p}(H^*(X;\mathbf{F}_p),H^*(BV;\mathbf{F}_p))$$
は bijection である。

2. もし $T_V(H^*(X;\mathbf{F}_p))$ が finite type で 1 次元において自明ならば
$$T_V(H^*(X;\mathbf{F}_p))\cong H^*(map(BV,X_p^\wedge);\mathbf{F}_p)$$

尚 BG は定理 2 の X の性質をみたすので、X に BG を代入して得られる結果が成り立つ。

1　分類空間の分解

分類空間の研究は部分群などによる分解あるいは近似が基本となる。特に p–toral 部分群によるものと elementary p–abelian subgroup の centralizer によるものの 2 つの方法が代表的であるが、まず局所有限群による近似について述べる。

定理 4　*[F–M]*　G がコンパクト Lie 群の時、素数 q は $\pi_0(G)$ の位数を割らないとする。この時 q と異なる素数 p に対し局所有限群 γ が存在して mod p 同値写像 $B\gamma\longrightarrow BG$ が得られる。

ここで γ の部分群は G の部分群とは限らない。たとえば $G=U(n)$ そして $(p,q)=1$ のとき $BGL(n,\overline{\mathbf{F}_q})\longrightarrow BU(n)$ が p–近似を与える。ただし $\overline{\mathbf{F}_q}$ は $\mathbf{F}_q$ の algebraic closure のことである。

次は G の部分群による BG の分解である。まずは p–toral 部分群によるものを挙げる。コンパクト Lie 群 P の連結成分 P_0 がトーラスであり、かつ商群 P/P_0 が有限 p–群のとき **p-toral 群**と言う。　G の p–toral 部分群 P で商群 NP/P が有限であり、かつ自明でない正規 p–部分群を持たないものを **p-stubborn** と呼ぶ。ただし NP は P の G における normalizer である。

ここで G の orbit category の full subcategory で p–stubborn から成るものを $R_p(G)$ で表わす。$I: R_p(G)\longrightarrow Top$ を inclusion functor とすると Borel construction により次の functor
$$EG\times_G I: R_p(G)\longrightarrow Top$$
が定義される。

定理 5 *[J-M-O 1]* コンパクト Lie 群 G に対し、次の写像 $holim_{R_p(G)} EG \times_G I \longrightarrow BG$ は p 局所同値である。

次は elementary p–abelian subgroup の centralizer による分解である。$A_p(G)$ を G の自明でない elementary p–abelian subgroup の centralizer から成る Quillen category とする。$A_p^o(G)$ をその opposite category とすれば、$C(-)$ により centralizer を表わすことにより、次の functor

$$EG \times_G (G/C(-)) : A_p^o(G) \longrightarrow Top$$

が定義される。

定理 6 *[J-M-O 3], [D-W 1]* コンパクト Lie 群 G に対し、次の写像 $holim_{A_p^o(G)} EG \times_G (G/C(-)) \longrightarrow BG$ は mod p 同値である。

2 分類空間上の写像

準同型$\rho : K \longrightarrow G$ は分類空間上の写像 $B\rho : BK \longrightarrow BG$ を誘導する。しかし全ての写像が準同型によって誘導されるとは限らない。unstable Adams operation はその例である。また、たとえば、ホモトピー集合 $[BD_{2p}, BS^3]$ は $p+1$ 個の元から成る。

写像 $BK \longrightarrow BG$ のコホモロジー論的研究は７０年代に確立された。Adams–Mahmud は Q–コホモロジーを用いて admissible map という概念を導入して特徴付けを行った。

定理 7 *[A-M]* K と G をコンパクト連結 Lie 群とし、それぞれの極大トーラスを T_K そして T_Gとする。任意の写像 $BK \longrightarrow BG$ に対し、トーラス間の準同型$\alpha : T_K \longrightarrow T_G$が存在し、次のホモトピー可換図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} BT_K & \xrightarrow[B\alpha]{} & BT_G \\ \downarrow & & \downarrow \\ BK & \longrightarrow & BG \end{array}$$

更に、$\beta : T_K \longrightarrow T_G$もまたそのような準同型ならば G の Weyl 群のある元 w に対し $\beta = w \cdot \alpha$となる。

ここで $R = \mathbf{Q}$ または $\mathbf{F}_p$ に対し $H^*(BK;R) = H^*(BT_K;R)^{W(K)}$ 及び $H^*(BG;R) = H^*(BT_G;R)^{W(G)}$ とする。$\phi = (B\alpha)^*$ とおくと任意の $w \in W(K)$ に対し $w' \in W(G)$ が存在して $w\phi = \phi w'$ となる。このような準同型を admissible map と言う。

$$\begin{array}{ccc} H^*(BT_G;R) & \xrightarrow[\phi=(B\alpha)^*]{} & H^*(BT_K;R) \\ \uparrow & & \uparrow \\ H^*(BG;R) & \longrightarrow & H^*(BK;R) \end{array}$$

$H^*(BT^n;R) = R[t_1,\cdots,t_n]$ $(degt_i = 2)$ だから ϕ は2次元の値によって決定される。従って ϕ は正方行列とみなすことができる。たとえば $G = K = U(n)$ の場合は $H^*(BU(n);R) = H^*(BT^n;R)^{W(U(n))}$ であり $W(U(n))$ は対称群だから、ϕ は次の2つのタイプのいずれかである。$(n=3)$

$$\begin{bmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{bmatrix} \quad \text{または} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}$$

80年代中頃、Miller の定理の応用として特に p–toral 群 P については全ての写像 $BP \longrightarrow BG$ は準同型によって誘導されることが示され、また写像空間 $map(BP,BG)$ の計算もなされた。

定理 8　*[D-Z][Z 2][N 1]*　P を p-toral 群そして G をコンパクト Lie 群とすると、自然な写像 $Rep(P,G) \longrightarrow [BP,BG]$ は bijection である。また $\rho \in Rep(P,G)$ に対し、次はホモトピー同値である。

$$BC_G(\rho(P))^\wedge_p \simeq (map(BP,BG)_{B\rho})^\wedge_p \simeq map(BP,BG^\wedge_p)_{B\rho^\wedge_p}$$

Adams operation $\{\psi^k\}$ は BU の self map で $\mathbf{Q}$–係数コホモロジー $H^{2n}(BU;\mathbf{Q})$ 上において $(\psi^k)^* = k^n \cdot Id$ となる。　この性質をもつ写像が BG に対して定義されるとき、それを unstable Adams operation と言う。$\psi^k : BG \longrightarrow BG$ が存在するための必要十分条件は k が Weyl 群 $W(G)$ の order と素になることである。また ψ^k の一意性も知られている。

特に単純コンパクト Lie 群 G に対しては、次の定理が示すように、BG の self map は unstable Adams operation と Lie 群 G の自己同型から誘導された写像で表わされる。

定理 9　*[J-M-O 1]*　単純コンパクト Lie 群 G に対し、次のような bijection がある：

$$[BG,BG] \longrightarrow (\{0\} \coprod Out(G)) \bigwedge \{k \geq 0 : k = 0 \text{ or } (\mathrm{k}, |\mathrm{W}|) = 1\}$$

また、2つの self map $f, g : BG \longrightarrow BG$ について次の3つの条件は同値である。
(1) 2つの写像 f と g はホモトピー同値である。
(2) 2つの制限 $f|_{BT_G}$ と $g|_{BT_G}$ はホモトピー同値である。
(3) $\mathbb{Q}$–係数コホモロジー上の誘導された準同型 f^* と g^* は等しい。

次に分類空間の fibration について述べる。Lie 群の short exact sequence $H \longrightarrow G \longrightarrow K$ は分類空間の fibration $BH \longrightarrow BG \longrightarrow BK$ を誘導する。ここでもし fiber space, total space そして base space の3つの空間のうち2つが分類空間であるとき残りの空間もまた分類空間かどうかという問題を考える。次の3つの場合である。

1. $BH \longrightarrow BG \longrightarrow X$

2. $BH \longrightarrow Y \longrightarrow BK$

3. $Z \longrightarrow BG \longrightarrow BK$

いずれの場合も一般に X, Y, Z は分類空間とはならない。(1) と (3) については容易に反例が得られるが、(2) については分類空間の genus 問題の計算を要する。コンパクト連結 Lie 群の分類空間 BG の genus 集合 $Genus(BG)$ とは、すべての素数 p に対して $(X)^\wedge_p \simeq (BG)^\wedge_p$ となる CW–complex X の全体からなる集合である。集合 $Genus(BG)$ は G が non-abelian ならば uncountable であることが知られている。次の3つの定理ではそれぞれの場合を論ずるが、特に (1) と (3) に対しては X 及び Z に finiteness condition を与えることによって分類空間となる場合を示す。

定理 10 *[[I-N]* H と G をコンパクト連結 Lie 群とする。

1. $(BH)^\wedge_p \longrightarrow (BG)^\wedge_p \longrightarrow X$ が fibration で $H^*(\Omega X; \mathbf{F}_p)$ が finite ならば、コンパクト連結 Lie 群 K が存在して $X \simeq (BK)^\wedge_p$ である。 特に写像 $(BH)^\wedge_p \longrightarrow (BG)^\wedge_p$ が monomorphism によって誘導されているなら H は G の正規部分群である。

2. $BH \longrightarrow BG \longrightarrow X$ が fibration でループ空間 ΩX が有限 CW–複体とホモトピー同値ならば、コンパクト連結 Lie 群 K が存在して $X \simeq BK$ である。

定理 11 *[[I-N]* H と K をコンパクト連結 Lie 群とする。

1. $(BH)^\wedge_p \longrightarrow Y \longrightarrow (BK)^\wedge_p$ が fibration ならば、コンパクト連結 Lie 群 G が存在して $X \simeq (BG)^\wedge_p$ である。

2. $BH \longrightarrow Y \longrightarrow BK$ が fibration ならば、コンパクト連結 Lie 群 G が存在して $X \in Genus(BG)$ である。

単連結な単純コンパクト Lie 群 G に対し、unstable Adams operation $\psi^k : BG \longrightarrow BG$ または $(\psi^k)^\wedge_p : (BG)^\wedge_p \longrightarrow (BG)^\wedge_p$ のホモトピーファイバーを special Adams fiber または p–type の special Adams fiber と呼ぶ。

定理 12 *[[I-N]]* G と Kをコンパクト連結 Lie 群とする。

1. $Z \longrightarrow (BG)^\wedge_p \longrightarrow (BK)^\wedge_p$ が fibration で $H^*(\Omega Z; \mathbf{Z}^\wedge_p) \otimes \mathbf{Q}$ が $\mathbf{Q}^\wedge_p$ 上の有限次元ベクトル空間であるならば、コンパクト Lie 群Γ及び p–type の special Adams fiber $F_1, \cdots, F_r$ が存在して $Z \simeq (B\Gamma)^\wedge_p \times \prod F_i$である。更に $H^*(\Omega Z; \mathbf{F}_p)$ が finite ならば、$Z \simeq (B\Gamma)^\wedge_p$である。また $(BG)^\wedge_p \longrightarrow (BK)^\wedge_p$ が準同型によって誘導されているなら、それは epimorphism である。

2. $Z \longrightarrow BG \longrightarrow BK$が fibration で $H^*(\Omega Z; \mathbf{Q})$ が $\mathbf{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間であるならば、コンパクト Lie 群Γ及び special Adams fiber $F_1, \cdots, F_r$ が存在して $Z \simeq B\Gamma \times \prod F_i$である。更に$\Omega Z$が有限 CW–複体とホモトピー同値ならば、$Z \simeq B\Gamma$である。

3 分類空間のコホモロジー

G をコンパクト連結 Lie 群とすると $H^*(BG; \mathbf{Q})$ は $H^*(BT; \mathbf{Q})^{W(G)}$ と同型な多項式環である。また $\mathbf{F}_p$–係数コホモロジー $H^*(BG; \mathbf{F}_p)$ もほとんどすべての p に対して多項式環となる。Steenrod はどんな多項式環 H^*がある空間 Xに対し $H^* \cong H^*(X; \mathbf{F}_p)$ となるかという問題を提起した。

定理 13 *[A–W][D–M–W 2]* Steenrod 代数上の多項式環 H^*がある空間の mod p コホモロジー（p は奇素数）として実現されるならば、$H^* \cong H^*(BT^n; \mathbf{F}_p)^W$となるような pseudo reflection 群 $W \hookrightarrow GL(n, \mathbf{Z}^\wedge_p)$ が存在する。

定理 14 *[D–M–W 2]* Steenrod 代数上の多項式環 H^*の生成元の次元が p と素であるとする。このとき $H^* \cong H^*(X; \mathbf{F}_p)$ となるような p–complete な空間がホモトピー一意的に存在する。

定理 15 *[D–M–W 2]* G をコンパクト連結 Lie 群そして $(p, |W(G)|) = 1$ とする。もし p–complete な空間 Xに対し $H^*(X; \mathbf{F}_p) \cong H^*(BG; \mathbf{F}_p)$ ならば $X \simeq (BG)^\wedge_p$である。

ここで $G = S^3$の時 [D–M–W 1]、すなわち $H^*(X;\mathbf{F}_p) \cong H^*(BS^3;\mathbf{F}_p)$ そして p が奇素数ならば $X \simeq (BS^3)^\wedge_p$であることの証明の概略を示す。一般に $p \not| |W(G)|$ ならば $(BNT)^\wedge_p \simeq (BG)^\wedge_p$だから $X \simeq (BNS^1)^\wedge_p$を示せばよい。Lannes の結果より

$$[B\mathbf{Z}/p, X] = Hom_{A_p}(H^*(X;\mathbf{F}_p), H^*(B\mathbf{Z}/p;\mathbf{F}_p))$$

$$= Hom_{A_p}(H^*(BS^3;\mathbf{F}_p), H^*(B\mathbf{Z}/p;\mathbf{F}_p)) = [B\mathbf{Z}/p, BS^3]$$

従って単射 $i : \mathbf{Z}/p \hookrightarrow S^3$より誘導された写像 $Bi : B\mathbf{Z}/p \longrightarrow BS^3$に対応する写像 $f : B\mathbf{Z}/p \longrightarrow X$がえられる。この写像は $B\mathbf{Z}/p \longrightarrow map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \longrightarrow X$と分解される。mapping space のコホモロジーを計算すると、

$$H^*(map(B\mathbf{Z}/p, X)_f;\mathbf{F}_p) = T(H^*(X;\mathbf{F}_p))_f$$

$$= T(H^*(BS^3;\mathbf{F}_p))_{Bi} = H^*(BS^1;\mathbf{F}_p)$$

よって $map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \simeq (BS^1)^\wedge_p$である。ここで $\mathbf{Z}/2$ が $\mathbf{Z}/p$ には (-1) 倍としてまた X には自明に作用するとき

$$E\mathbf{Z}/2 \times_{\mathbf{Z}/2} map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \longrightarrow E\mathbf{Z}/2 \times_{\mathbf{Z}/2} X \longrightarrow X$$

を得る。以上より $X \simeq E\mathbf{Z}/2 \times_{\mathbf{Z}/2} map(B\mathbf{Z}/p, X)_f \simeq (BNS^1)^\wedge_p \simeq (BS^3)^\wedge_p$ となる。

定理 16 *[N 2]* 奇素数 p とコンパクト連結 Lie 群 G に対し BG は p–torsion free とする。空間 Xが p–complete のとき、次が成り立つ。

1. $H^*(X;\mathbf{F}_p) \cong H^*(BG;\mathbf{F}_p)$ ならばコンパクト連結 Lie 群 Hが存在して $X \simeq (BH)^\wedge_p$ となる。

2. もし G が単連結またはユニタリ群の積あるいは $(p, |W(G)|) = 1$ ならば $H^*(X;\mathbf{F}_p) \cong H^*(BG;\mathbf{F}_p)$ であることと $X \simeq (BG)^\wedge_p$は必要十分である。

Wとして特に $GL(n,\mathbf{F}_p)$ を取ったとき、すなわち $H^*(BT^n;\mathbf{F}_p)^{GL(n,\mathbf{F}_p)}$ または $H^*(B(\mathbf{Z}/2)^n;\mathbf{F}_2)^{GL(n,\mathbf{F}_2)}$で表わされる多項式環を Dickson algebra と言う。[S–S] により、ほとんどの場合実現不可能であるので、次は特異な例となる。

定理 17 *[D–W 2]* 次を満たす空間 Xが存在する。

$$H^*(X;\mathbf{F}_2) \cong H^*(B(\mathbf{Z}/2)^4;\mathbf{F}_2)^{GL(4,\mathbf{F}_2)}$$

この結果を用いると $H^*(B(\mathbf{Z}/2)^n;\mathbf{F}_2)^{GL(n,\mathbf{F}_2)}$が実現可能であるための必要十分条件は $n \leq 4$ であることが示される。

4　有限ループ空間と p-compact group

Lie 群 G の群論的構造を分類空間 BG のホモトピー論的構造で表わす有効な方法として p-compact 群という概念が Dwyer–Wilkerson によって導入された。ループ空間 X が **p-compact 群**とは X が $\mathbf{F}_p$–finite であり、かつ BX が $\mathbf{F}_p$-complete であるときを言う。もちろんコンパクト Lie 群 G が連結なら p-compact 群であるが、一般に $\pi_0(G)$ が有限 p–群でなければ p-compact 群であるとは限らない。

ここで p-compact 群と Lie 群論の基本的な対応を示す。

1. 準同型 $f : X \longrightarrow Y$ は写像 $Bf : BX \longrightarrow BY$ のことである。
2. 2つの準同型 $f, g : X \longrightarrow Y$ が共役とは写像 Bf と Bg がホモトピー同値であること。
3. 準同型 $f : X \longrightarrow Y$ が単射（すなわち X は Y の部分 p-compact 群）とは写像 Bf のホモトピーファイバー X/Y が $\mathbf{F}_p$–finite であること。

さらに p–compact 群は極大トーラスと Weyl 群 W_X をもち Lie 群の場合と似た性質をもつ。p–compact 群 T が p–compact トーラスであるとは T が Eilenberg–MacLane 空間 $K((\mathbf{Z}_p^\wedge)^n, 1)$ とホモトピー同値であることを言う。また p–compact 群 X が toral とは X_0 が p–compact トーラスであることを言う。単射 $f : T \longrightarrow X$ が極大トーラスであるとは $C_X(T) := map(BT, BX)_{Bf}$ が p–compact toral 群でかつ $C_X(T)/T$ が homotopically discrete となることを言う。

定理 18　*[D–W 3]*　p–compact 群 X は極大トーラスと Weyl 群 W_X をもち、2つの極大トーラスは共役である。

定理 19　*[D–W 3]*　$T_X \longrightarrow X$ を階数 n の極大トーラスとすると次は同値である。

1. Weyl 群 W_X の位数は X/T_X の Euler characteristic に等しい。
2. BT_X 上の W_X–action は faithful な表現
$$W_X \longrightarrow GL(H^*(BT_X; \mathbf{Z}_p^\wedge) \otimes \mathbf{Q}) \cong GL(n, \mathbf{Z}_p^\wedge)$$
を誘導する。このとき W_X は pseudo reflection group として表現される。
3. $H^*(BX; \mathbf{Z}_p^\wedge) \otimes \mathbf{Q} \quad \longrightarrow \quad (H^*(BT_X; \mathbf{Z}_p^\wedge) \otimes \mathbf{Q})^{W_X}$ は同型である。

参考文献

[A] J.F. ADAMS, “ Maps between classifying spaces II”, Inventiones Math. , 49 , 1978, 1–65

[A–M] J.F. ADAMS and Z.MAHMUD, “ Maps between classifying spaces ”, Inventiones Math., 35 , 1976, 1–41

[A–W] J.F. ADAMS and C.W. WILKERSON, “ Finite H-spaces and algebras over the Steenrod algebra”, Ann. of Math. , 111 , 1980, 95–143

[B–K] A. BOUSFIELD and D. KAN, “ Homotopy limits, completion and localizations ”, L.N.M. , 304 , 1972

[D–M–W1] W.G. DWYER, H.R. MILLER and C.W. WILKERSON, “ The homotopy uniqueness of BS^3 ”, L.N.M. , 1298 , 1987, 90–105

[D–M–W2] W.G. DWYER, H.R. MILLER and C.W. WILKERSON, “ The homotopical uniqueness of classifying spaces ”, Topology , 31 , 1992, 29–45

[D–W1] W.G. DWYER and C.W. WILKERSON, “ A cohomology decomposition theorem ”, Topology , 31 , 1992, 433–443

[D–W2] W.G. DWYER and C.W. WILKERSON, “ A new finite loop sace at the prime two ”, J. of AMS , 6 , 1993, 37–63

[D–W3] W.G. DWYER and C.W. WILKERSON, “ Homotopy fixed–point methods for Lie groups and finite loop spaces ”, Ann. of Math. , 139 (2) , 1994, 395–442

[D–Z] W.G. DWYER and A. ZABRODSKY, “ Maps between classifying spaces”, L.N.M. , 1298 , 1987, 106–119

[F–M 1] E.M. FRIEDLANDER and G. MISLIN, “ Locally finite approximation of Lie groups I ”, Inventiones Math., 83, 1986, 425–436

[F–M 2] E.M. FRIEDLANDER and G. MISLIN, “ Locally finite approximation of Lie groups II ”, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 100, 1986, 505–517

[H] 逸見 豊, “ 分類空間のホモトピー論 （最近の話題から）”, 数理解析研究所講究録 ７８１、1992, 117–128

[I–N] K. ISHIGURO and D. NOTBOHM, “Fibrations of classifying spaces”, *Transaction of AMS,* vol.343(1), 1994, pp391–415

[Iw] 岩瀬 則夫, “ Miller の定理とその展開 ”, 研究集会「幾何学的なホモトピー論」（岡山大学）、1992, 19–33

[J-M-O 1] S. JACKOWSKI, J.E. McCLURE and B. OLIVER, "Homotopy classification of self-maps of BG via G-actions Part I and Part II", *Ann. of Math.* 135 , 1992 , 183–226, 227–270

[J-M-O 2] S. JACKOWSKI, J.E. McCLURE and B. OLIVER, "Maps between classifying spaces revisited", Contemporary Math., 181, 1995, 263–298

[J-M-O3] S. JACKOWSKI, J.E. McCLURE and B. OLIVER, "Homotopy theory of classifying spaces of compact Lie groups", preprint

[L] J. LANNES, "Sur la cohomologie modulo p des p-groupes Abeliens elementaires", in "Homotopy Theory, Proc. Durham Symp. 1985, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1987, 97–116

[M] H.R. MILLER, "The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces", Ann. of Math. , 120, 1984, 39–87

[N1] D. NOTBOHM, "Maps between classifying spaces", Math. Z. , 207, 1991, 153–168

[N2] D. NOTBOHM, "Homotopy uniqueness of classifying spaces of compact connected Lie groups at primes dividing the order of the Weyl group", Topology , 33 , 1994, 271–330

[N3] D. NOTBOHM, "Classifying spaces of compact Lie groups and finite loop spaces", preprint

[S] L. SCHWARTZ, "Unstable modules over the Steenrod algebra and Sullivan's fixed point set conjecture", Chicago Univ. Press, 1994

[S-S] L. SMITH and R.M. SWITZER"Realizability and nonrealizability of Dickson algebras as cohomology rings", Proc. of AMS , 89, 1983, 303–313

[Z1] A. ZABRODSKY, " Maps between classifying spaces", Annals of Math. Studies 113, Princeton Univ. Press, 1987, 228–246

[Z2] A. ZABRODSKY, " On the space of functions between classifying spaces", Israel J. Math, 76, 1991, 1–26

S^1 の PL 同相群について
（エキゾティックな S^1 の存在）

北大理　皆川 宏之

§1. Introduction

$S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ の向きを保つ同相写像全体のなす群を G で表す。G には C^0 位相を与えておく。このとき G は位相群となる。G の普遍被覆群 $\tilde{G}$ 次の群と自然に同一視される。

$$\tilde{G} = \{ \tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x) + 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \}$$

$p : \tilde{G} \to G$ を普遍被覆写像とする。$f \in G$ に対して、$p(\tilde{f}) = f$ となる $\tilde{f} \in \tilde{G}$ を f のリフトという。$\tilde{f}$ を f のリフトとすると、$p^{-1}(f) = \{ T_n \circ \tilde{f} \}_{n \in \mathbb{Z}}$ とかける。ここで $T_b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は b 平行移動する写像 $x \mapsto x + b$ である。

回転数 $\rho : G \to S^1$ とは、

$$\rho(f) = p\left(\lim_{n\to\infty} \frac{\tilde{f}^n(\tilde{x}) - \tilde{x}}{n}\right)$$

により定義される量であり、これは $x \in S^1$ および各リフト $\tilde{x}, \tilde{f}$ のとり方によらない。ただし、写像 $t \mapsto T_t$ により $\mathbb{R}$ と平行移動全体のなす群を同一視する。従って $S^1 = p(\mathbb{R})$ となり、$p|\mathbb{R}$ は S^1 の普遍被覆写像を与える。

$f \in G$ が無理回転数をもつとは、$\rho(f) \in S^1 - \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ であるときをいう。そのような $f \in G$ は、f の微分可能性が十分高ければ（位相）共役をとることにより線型化可能であることが知られている。

定理 1.1（[2], [3], [5]）

$f \in G$ が区分的 $C^{1+b.v.}$ 級であり、$\rho(f) \notin \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ とする。このとき、$h \in G$ が存在して、$hfh^{-1} = R_{\rho(f)}$ が成り立つ。ただし、$R_a\ (a \in S^1)$ は S^1 の a 回転写像 $x \mapsto x + a$ とする。

ここで、f が区分的 $C^{1+b.v.}$ 級であるとは、S^1 の有限個の点 $x_0 < x_1 < \cdots x_n < x_{n+1} = x_0$ を適当にとると $f|[x_i, x_{i+1}]$ $(i=0, \cdots, n)$ が C^1 級でかつその微分 $(f|[x_i, x_{i+1}])'$ が有界変動関数であるときをいう。

この状況において、h の微分可能性は、f と同じにとれるだろうか？ しかしながら、これは一般には成り立たない。

<u>定理 1.2.</u> ([1])

ある無理回転数をもつ $f \in G^{\omega}$ (実解析的) が存在して、$hfh^{-1} = R_{\rho(f)}$ を満たす任意の $h \in G$ は絶対連続性をもたない。

この現象は f の中心化群 $C(f) = \{ g \in G \mid fg = gf \}$ がそれほど大きくないという事に深く関係していると思われる。これとは対照的に、Montgomery と Zippin により次の定理が証明されている。S^1 の C^r 級同相写像全体のなす群を G^r で表すことにする。

定理1.3.（[4]）

$r \geq 1$ とする。$h \in G$ に対して、

$$h \cdot S^1 \cdot h^{-1} = \{hR_a h^{-1} \mid a \in S^1\} \subset G^r$$

ならば $h \in G^r$ が成り立つ。

この定理は、S^1と同相な閉部分群はG^rの中で滑らかなものであることを示しており、その意味では、G^rが Lie 群に近い構造をもっている事を表すものであるといえる。この定理は区分的微分可能のカテゴリーでも成り立つだろうか？ この問題をPL同相写像全体のなす群 G^{PL} について調べたところ、G^r $(r \geq 1)$ の場合とは全く異なる現象が見つかったので報告する。

定理1.3.

G^{PL} にはエキゾティックなS^1が存在する。

即ち、G^{PL} にはS^1と位相共役であるが、PL共役ではない閉部分群が存在する。

§2. エキゾティックな S^1 の例.

$A>0$ とする。$\mathbb{R}^2$ の $(-A,-A)$ を通る直線全体の族を $\mathcal{L}$、そのうち傾きが正であるもの全体の族を $\mathcal{L}_+$ とする。

$$\mathcal{L} = \{\, y+A = \lambda(x+A) \mid \lambda \in \mathbb{R} \,\}$$

$$\mathcal{L}_+ = \{\, y+A = \lambda(x+A) \mid \lambda > 0 \,\}$$

<u>補題 2.1</u>

$\mathcal{L}|_{[0,1]\times[0,1]} = \mathcal{L}_+|_{[0,1]\times[0,1]}$ は $[0,1]/_{0\sim 1}$ 従って S^1 上の PL 同相写像の族 S_A を導く。

<u>証明</u>

$(0,k)$ を通る直線 $L_{(0,k)} \in \mathcal{L}$ と直線 $y=1$ との交点を $(f(k),1)$ とし、$(c,0)$ を通る直線 $L_{(c,0)} \in \mathcal{L}$ と直線 $x=1$ との交点を $(1, g(c))$ とする。このとき、f, g はともに1次分数変換であることがわかる。補題の証明のためには、gf が恒等写像であることを示せばよい(図2.2参照)。

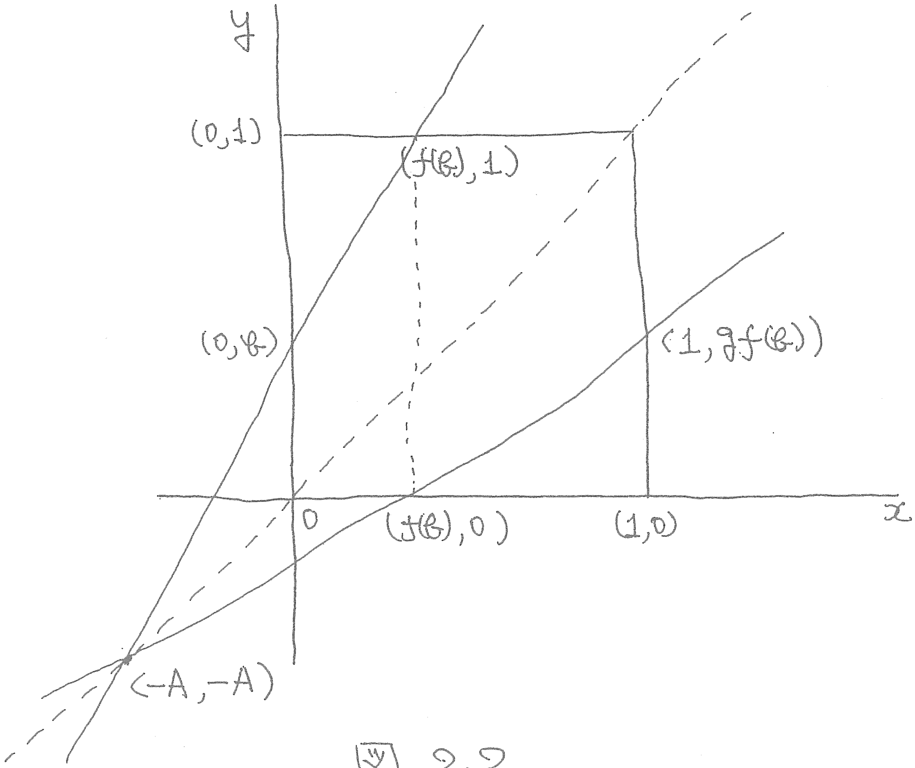


図 2.2

ところが、

$$f(0)=1\ ,\quad f(1)=0\ ,\quad f(\infty)=-A$$

$$g(0)=1\ ,\quad g(1)=0\ ,\quad g(-A)=\infty$$

であるから、gf は 3点 $0, 1, \infty$ を固定する。$PSL(2,\mathbb{R})$ の元を定める。従って $gf = id$。 $\square$

さて、$\mathcal{L}_+$ の直線 $y+A=\lambda(x+A)$ とアフィン群の元 $f_\lambda(x)=\lambda(x+A)-A$ とを同一視することにより、$\mathcal{L}_+$ には自然にリー群の構造が入る。$\mathcal{L}_+$ の $(-A,\infty)$ への作用を $\langle f_{\frac{1+A}{A}} \rangle$ で割ったものは、

S^1 の S^1 への作用を引きおこす。この作用を $[0,1]$ 上のグラフを用いて表したものが S_A であることがわかる。すなわち、次の定理が示された。

$$F_A(x) = \frac{\log \frac{x+A}{A}}{\log \frac{1+A}{A}}$$

とする。

定理 2.3

$F_A|_{[0,1]} : [0,1] \to [0,1]$ が誘導する S^1 の同相写像を h_A とする。このとき

$S_A = h_A^{-1} \circ S^1 \circ h_A \subset G^{PL}$ が成り立つ。

各 $A>0$ に対して、$h_A \notin G^{PL}$ であることより、S_A はエキゾティックであることがいえる。また同様の計算により、$A \neq B$ ならば、S_A と S_B は PL 共役でないことも示される。

§3. エキゾティックな S^1 の分類

§2で、G^{PL} にはエキゾティックな S^1 が存在することを見たが、この章では、エキゾティックな S^1 は PL共役のもとで §2で構成したものに限ることを示す。

$G^{PL} \ni f$ に対し、

$$\Delta_x f = \log d_R f(x) - \log d_L f(x)$$

$$d_R f(x) = x \text{での右微分}$$

$$d_L f(x) = x \text{での左微分}$$

とおき、f の x における総微分を

$$\Delta f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \Delta_{f^n(x)} f$$

で定める。右辺は有限個の n を除いて 0 であるから well-defined である。次のいくつかの補題は基本的なものである。

補題 3.1

$$\Delta_x(fg) = \Delta_{g(x)} f + \Delta_x g$$

補題3.2 $n \cdot 0$

$$\Delta(f^n)(x) = \begin{cases} \Delta f(x) & \text{if } \# O_f(x) = \infty \\ \dfrac{mn}{l} \Delta f(x) & \text{if } \# O_f(x) < \infty \end{cases}$$

ただし、$O_f(x) = \{ f^n(x) \mid n \in \mathbb{Z} \}$, $l = \# O_f(x)$,

$m = \# O_{f^n}(x)$ とする。

補題3.3（PL不変性）

$f, h \in G^{PL}$ に対して

$$\Delta(hfh^{-1})(h(x)) = \Delta f(x)$$

次の命題が基本的かつ重要である。

命題3.4

$f, g \in G^{PL}$ に対し、$\langle f, g \rangle \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ かつ

$\langle f, g \rangle$ が $\langle f, g \rangle(x)$ に自由に作用する。

$\Longrightarrow \quad \Delta f(x) = 0$

証明

作用が自由であることと、f の微分不可能な点が有限個であることより、十分大きな n をとると、$O_f(g^n(x))$ 上の各点で f は微分可能である。従って、

補題3.3より

$$\Delta f(x) = \Delta(h^n f h^{-n})(h^n(x))$$

$$= \Delta f(h^n(x)) = 0 \qquad \square$$

また、fが有限位数ならば 補題3.2より $\Delta f \equiv 0$ が示される。従って以上より次の命題が成り立つ。

命題3.5

$G^{PL} \supset S$ を S^1と位相共役な部分群とする。このとき、$\Delta f \equiv 0$ ($\forall f \in S$) が成り立つ。

さて、各軌道上で総微分が0ならば、以下に述べるPL共役をくり返しとることにより、折れ点をへらすことができる。

まず、$O_f(x) \neq O_f(y)$ なる2点 $x, y \in S^1$をとる。$\lambda \in \mathbb{R}$ に対して、$\Delta_x h = \lambda$, $\Delta_y h = -\lambda$ となる $h \in G^{PL}$ で微分不可能な点が x と y だけであるような h が存在する。(図3.6参照)

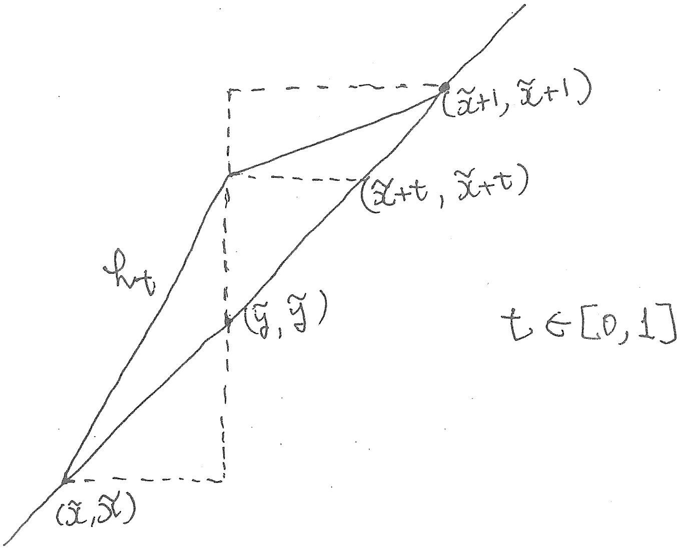


図 3.6

$g = hfh^{-1}$ とするとき,

$$\Delta_z g = \begin{cases} \Delta_{f^{-1}(x)} f + \Delta_x h & \text{if } z = g^{-1}(h(x)) \\ \Delta_x f - \Delta_x h & \text{if } z = h(x) \\ \Delta_{f^{-1}(y)} f + \Delta_y h & \text{if } z = g^{-1}(h(y)) \\ \Delta_y f - \Delta_y h & \text{if } z = h(y) \\ \Delta_{h^{-1}(z)} f & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。従って、たとえば、xでの折れ点を消すためには、そのデータが $f^{-1}(x)$ にうつり、さらに他の2点、y, $f^{-1}(y)$ に影響が出ることになる。ところが、

もし、ある x での総微分が 0 ならば、$O_f(x)$ 上の f の折れ点を端から順に消していくと、有限回の操作で折れ点を全て解消することができる。その影響は h を各ステップでうまくとると唯2点にしか出て来ない。すなわち、次の補題が示される。

<u>補題 3.7</u>

$f \in G^{PL}$ に対して、$\Delta f \equiv 0$ ならば

ある $h \in G^{PL}$ が存在して、$hfh^{-1} \in \bigcup_{0<\lambda\leq\infty} S_\lambda$

とできる。ただし $S_\infty = S^1$ とする。

以上の準備のもとで目標である次の定理を示そう。

<u>定理 3.8</u>

$S \subset G^{PL}$ をエキゾティックな S^1 とする。このとき、

S はある S_λ $(\lambda>0)$ に PL 共役である。

<u>証明</u>

S の無理回転数をもつ元 f を1つとり固定する。

命題 3.5 より $\Delta f \equiv 0$ であるから、補題 3.7 より、

$hfh^{-1} \in S_\lambda$ $(\lambda>0)$ となる $h \in G^{PL}$ が存在する。

このとき、$S=\overline{\langle f\rangle}$ であることと、S_λ が閉部分群であることより $hSh^{-1}=S_\lambda$ が得られる。□

参考文献

[1] Arnold, V.I., Small denominators I, Transl. Amer. Math. Soc. 46, 213−284 (1965)

[2] Denjoy, A., Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore, J. de Math 9 (11), 333−375 (1932)

[3] Herman, M.R., Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle à des rotations, Publ. Math. I.H.E.S. 49, 5−234 (1979)

[4] Montgomery, D and Zippin, L., Topological transformation groups, Interscience Tracts in Pure and Applied Math. no. 1

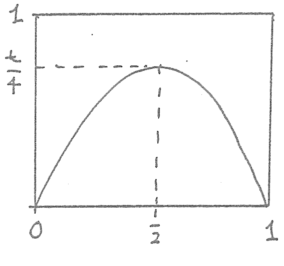
[5] Siegel, C.L., Notes on differential equations on the torus, Ann. of Math 46, 423−428 (1945)

一次元力学系における単調性について

東工大・理　　辻井正人

0 はじめに

この講演では一次元力学系と呼ばれる簡単な力学系におけるエントロピー（組み合せ論的複雑さ）の単調性と呼ばれる定理とそれに関係する問題についての話をしたいと思っています。一次元力学系というのはある区間からそれ自身への（連続）写像の反復合成を力学系とみなしたもので、特によく扱われる例は次の2次写像族と呼ばれるものです。 $Q_t(x) = tx(1-x) : [0,1] \circlearrowleft$ $t \in [0,4]$。



このような力学系はカオス的な振る舞いを持ちさらにそれが分岐するような最も単純な力学系の族であると言えます。

一次元力学系の研究は（散発的なものを除けば）Milnorと Thurstonのプレプリント"On iterated maps of the interval (1977)"によって始まりました。その論文の中で彼らは数値計算の結果等をもとにして、2次写像族について3つの予想を提出しています。そして、今回の話しはその1つについてです。その予想というのは（後で正確に述べますが）簡単に言うと、族 Q_t においてその値が大きくなると Q_t の組み合せ論的複雑さが、単調に増大するということです。

実はこの予想はもう10年以上前にSullivan、MilnorやDouady-Hubbardといった人達によって肯定的に解決され、今では定理（単調性定理）になっています。しかし、その"解決"というのは（いくつかの証明がありますがその何れもが）Q_t を複素力学系 $Q_t^{\mathbb{C}} : \mathbb{P}^1 \to \mathbb{P}^1$ に拡張して、その組み合せ論的なデーターに関する剛性をTeichmuller理論に帰着して示すというものです。証明自体は単純なのですが、その証明は

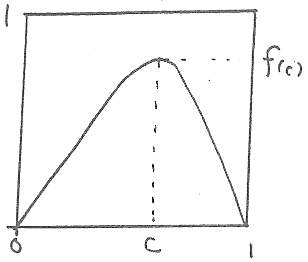
明らかに2次多項式族（または"良い"複素解析的拡張を持つ系の族）にしか適用できません。また、Qtのどのような性質が単調性を保証しているのかも、よく分かっていません。つまり、予想自体は解けたものの、そのまわりにはよく分かっていないことが多いのです。

私はこれらを解明したいと思い、この2.3年研究を続けてきました。未だ道半ば（道$\frac{1}{10}$？）といった感じなのですが今回、機会を与えていただいたので、講演では、これまで分かったこと、特に上の予想の証明とtransfer作用素の関係と、さらにそれと、単調性に関する松元（重則）氏の仕事との関係について述べたいと思っています。以下では定理を定式化し、Sullivan等による証明の概略を記しておきます。

§1. Kneading不変量と単調性。

連続写像$f: [0,1] \to [0,1]$が単峰（unimodal）であるとはある点$c \in (0,1)$が存在して、fが$[0,c]$上狭義単調増加

$[c,1]$ 上狭義単調減少であり，$f(0)=f(1)=0$ をみたすこととします。



もちろん Q_t はその一例です。

単峰写像 $f:[0,1]\to[0,1]$ が与えられたとき $x\in[0,1]$ の不変座標 $I_f(x)$ は記号 L, C, R の無限列で

$$I_f(x)=X_0X_1X_2\cdots \qquad X_i=\begin{cases} L & \text{if } f^i(x)<c \\ C & \text{if } f^i(x)=c \\ R & \text{if } f^i(x)>c \end{cases}$$

で定義されるものです。L, C, R の無限列の全体を A と書き $\sigma:A\to A$ はずらし写像，即ち，$X=X_0X_1\cdots$ に対して $\sigma(X)=X_1X_2X_3\cdots$ なる写像をあらわすことにします。また A に次のようにして付号付き辞書式順序という順序が定まります

A の元，$X_L=X_0X_1\cdots X_{p-1}\,L\,X_{p+1}X_{p+2}\cdots$ について

$$X_C=X_0X_1\cdots X_{p-1}\,C\,X'_{p+1}X'_{p+2}\cdots$$
$$X_R=X_0X_1\cdots X_{p-1}\,R\,X''_{p+1}X''_{p+2}\cdots$$

(i) もし $X_0, X_1, \cdot, X_p$ の中に R が偶数個ならば

$$X_L < X_C < X_R$$

(ii) そうでないときは $X_L > X_C > X_R$ 。

(一般の2つの元 $X, Y \in \mathcal{A}$ についても適当に $p \geqq 0$ をとれば上の状況になるから順序が定義される。)

のとき、次がわかります:

1) I_f は $(f, [0,1])$ から $(\sigma, \mathcal{A})$ への(力学系としての)準同型

即ち、$I_f \circ f = \sigma \circ I_f$ 。

$$\begin{tikzcd} {[0,1]} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "I_f"] & {[0,1]} \arrow[d, "I_f"] \\ \mathcal{A} \arrow[r, "\sigma"] & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

2) $X \in \mathcal{A}$ が I_f の像に入る $\Rightarrow \sigma^n(X) \leqq I_f(f(c))\ \forall n \geqq 0$

$\sigma^n(X) \lneqq I_f(f(c))\ \forall n \geqq 0 \Rightarrow X \in \mathcal{A}$ が I_f の像に入る。

れらから2つの単峰写像 f, g が $I_f(f(c)) < I_g(g(c))$ を

みたすとき I_f の像は I_g の像に含まれることになります。I_f,

g の像の上での σ の作用は(1)より、f, g の組み合せ論的

な意味でのモデルですから、このことは g のダイナミクスが f のそれに比べて組み合せ論的に複雑であることを意味します。 $I_f(f(c))$ は f の kneading 不変量と呼ばれ $K(f)$ と書きます。問題の予想(定理)は次のようなものです。

単調性予想(定理)：$K(Q_t)$ は t について広義単調増加。

注] ここでは位相的エントロピー $h_{top}(Q_t)$ は定義しませんが、力学系の位相不変量で、単峰写像の場合には $K(f)$ から計算され $K(f) \leq K(g) \Rightarrow h_{top}(f) \leq h_{top}(g)$ なので上の定理は位相的エントロピーの単調性も意味します。

この予想を素直に考えると、$K(Q_t)$ は $c=\frac{1}{2}$ の軌道によって定義される記号列ですから、$Q_t^p(c)$ が t の変化に対してどのように変化するかを、特に $Q_t^p(c)=c$ なる場合に見ればよいことなります。しかし、例えば $Q_t^p(c)$ を t で微分すると

$$\partial_t Q_t^p(c) = \sum_{i=0}^{p-1} Q_t(Q^i(c))\, DQ^{p-i-1}(Q^{i+1}(c)) \quad (D\text{は}x\text{微分}) \quad \cdots\cdots (*)$$

となり，右辺は正，負の項が入り混った多項式で、それをそのまま評価するということは非常に難しいことになります。

実はこのような困難は力学系理論のいたる所でみられる困難と本質的には同じなのです。例えばclosing問題というのは、力学系 $f: M \to M$ （M：多様体，f：C^r写像）において、$x \in M$ が $\{f^i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ の集積点になっているとき f の摂動で x を周期点とするものが存在するか？といった問題です。x の十分近くに $f^i(x)$ がとれますから、上の問題は易しそうですが，f を変化させたときの $f^i(x)$ の変化は結局(＊)のような量になり、これは難しい問題になります。従って、単調性の問題は力学系に関するより一般的な問題の最も易しい(?)場合とも考えられます。

単調性予想に興味をもつ人はかなりいたと思われますが上に述べた困難から、論文の数は限られています。私の知る限り

1. Milnor : The monotonicity theorem for real quadratic maps. (Mathematische Arbeitstagung Bonn, 1983)

2. 松元重則 : Bifurcation of periodic points of maps of the interval (Bull. Sci. Math (2) 107 (1983))

やHofbauerの仕事，小森氏（阪市大）による3次多項式についての結果位です。1. は§0でも述べた予想の証明が述べられています。一方，2は写像の族についてずっと緩い仮定のもとで，より弱い結果を得ています。その結果の1つというのは次のようなものです。

<u>定理（松元）</u>「fは単峰写像で $f''<0$ をみたすとする。

$f_t(x)=t\cdot f(x):[0,1]\to[0,1]$ としたとき，f_s がk周期点（k:奇数）をもてば f_t $(t\geq s)$ はやはりk周期点をもつ。」

この結果は一見，単調性定理とは異なりますが，実は特別な組み合せ論的条件のもとで㊟を評価して得られています。またその㊟の評価には難しい道具は一切使わないのですが，非常に技巧的です。つまり，1と2の結果と証明は全く対称的で同じ方向の結果でも一見したところ似ても似つかぬものなのです。

しかし、最近になって、私はこれらの結果がある意味では同じ原理によって証明されていることに気付きました。それがこの講演のテーマです。

§2、Sullivan等による単調性定理の証明の概略。

ここではSullivan等による証明のポイントを書いておきます。この証明自体、興味深いものです。簡単な議論で定理は次のような命題に帰着されます。

<u>命題</u>　$K(Q_t)=K(Q_s)$ でその記号列が C を含む（つまり C が $\frac{1}{2}$ 周期点である）とき　実は $t=s$。

命題の証明は次のように進められます。まず Q_t, Q_s を $\mathbb{P}^1$ からそれ自身への写像と考えます。C の周期を p とし

$$x_i = Q_t^i(c) \qquad y_i = Q_s^i(c)$$

とします。（特に $x_p=x_0$, $y_p=y_0$）。このとき $\varphi:\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ を $\varphi(x_i)=y_i\ (\forall i)$ をみたす凝等角写像であって、dilatation が最小になるもの（Teichmuller写像）にとります。そして

条件 $K(Q_t)=K(Q_s)$ より 次をみたす $\varphi':\mathbb{P}^1\to\mathbb{P}^1$ が存在する

ことがわかります:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{P}^1; x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}, \infty) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{P}^1; x_0, x_1, \cdots, x_{p-1}, \infty) \\ \downarrow \varphi' & \circlearrowleft & \downarrow \varphi \\ (\mathbb{P}^1; y_0, y_1, \cdots, y_{p-1}, \infty) & \xrightarrow{f} & (\mathbb{P}^1; y_0, \cdots\cdots, y_{p-1}, \infty)\end{array}$$

このとき φ と φ' の dilatation は同じですから、Teichmuller の

一意性定理から ($p\geqq 3$ のとき) $\varphi=\varphi'$ となるのですが、$t\neq s$

で $\varphi\neq id$ の場合には Teichmuller 写像の性質から (例えば

対応する正則2次微分の零点の数を比べて) このようなことは

起り得ないことが証明され、従って $t=s$ となります。//

MODULI OF FIRST ORDER PDE WEB GEOMETRY OF THEIR SOLUTIONS

ISAO NAKAI

Department of Mathematics
Hokkaido University

Web is a classial name of configuration of foliations. Web Geometry goes back to Lie, Poincare, Blaschke. One of the intrinsic web structure is seen on the canonical divisor of Riemannian surfaces R of genus $g \geq 3$. Let $\omega_1, \ldots, \omega_g$ be generator of holomorphic 1-forms on R and let

$$\int \omega = (\int \omega_1, \cdots \int \omega_g) : R \longrightarrow \mathbb{C}^g$$

be the integral. The canonical divisor is the $g-1$-fold translation hypersurface

$$C + \cdots + C$$

of the image C of the integral, which is foliated in $g-1$-ways to give a $g-1$-web structure by the leaves

$$C + \cdots + * + \cdots + C$$

$* \in$ i-th$C$, $i = 1, \ldots, g-1$. By Abel's theorem

$$(\int^{p_1} \omega + \cdots + \int^{p_{g-1}} \omega) + (\int^{p_g} \omega + \cdots + \int^{g_{2g-2}} \omega) = 0$$

for canonical divisors

$$(d_1 + \cdots + d_{g-1}) + (d_g + \cdots + d_{2g-2}).$$

This shows canonical divisors split into to union of two degree-$g-1$ divisors (which are in one-to -one crresponcense), either of which defines the $g-1$-web structure. Therefore the canonical divisor admits $2g-2$-web structure. As well known Gauss map maps the divisor to projective $g-1$ space and each leaf to hyper plane, which is projective dual of a point on the canonical curve R of degree $2g-2$.

More generally given a projective space curve $R \subset \mathbb{P}^n$ of arbitrary degree d, projective duals of points on R form a d-web structure.

A germ of 3-web of $\mathbb{C}^2$ is hexagonal if it is isomorphic to the 3-web defined by parallel lines in three independent directions. A d-web of $\mathbb{C}^n$ is hexagonal if on every intersections (dimension 2) of $n-2$ leaves, any other 3 foliations cut hexagonal 3-webs.

The speaker proved

Theorem[32]. *Let W, W' be germs of non-hexagonal d-web structures of codimension 1 of $\mathbb{C}^n$, $n \leq d-1$. Let $f : \mathbb{C}^n, 0 \to \mathbb{C}^n, 0$ be a germ of homeomorphism. Assume $h(W) = W'$. Then h is $\pm$-holomorphic.*

By this theorem

Theorem [32]. *Let C, C' be Riemann surfaces of genus ≥ 2 and E, E' be linear systems of positive divisors of degree d such that C, C' embed to the projective duals of E, E' in the canonical way. Let $h : C \to C'$ be an orientation preserving homeomorphism. Assume $h(E) = E'$. Then h is holomorphic.*

These theorems tell the topology of web structure contains complete information of the analytic webs. Later on in this talk I will introduce the differential geometry of web structure, which gives an intrinsic invariant the so-called web curvature, and apply it to classify webs defined by certain partial differential equations with complete integrals.

Before introducing our PDE, recall the definition of wave front from a view point of deformation theory of functions The study of the oscillatory integral

$$I_\lambda(q) = \int \exp \frac{i\ s(p,q)}{\lambda}\ dp, \qquad p \in \mathbb{R}^{n+k},\ q \in \mathbb{R}^n$$

is one of the main subjects in the quantum physics. The stationary phase method suggests that the principal term of the asymptotic expantion is determined by the geometry of the family of the wave front $D_d \subset \mathbb{R}^n$ in the configuration space parametrized by $d \in \mathbb{R}$ defined as follows: $q \in D_d$ if and only if d is one of the critical values of the function $s(*, q)$. For example the Airy-Fock function

$$Ai_\lambda(q) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{i(p^3/3 + pq)}{\lambda}\ dp$$

$(Ai_1 = Ai)$ has the asymptotic expantion

$$Ai_\lambda(q) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda^{1/2}}{|q|^{1/4}} \sin\left(\frac{2}{3}\frac{q^{3/2}}{\lambda} + \frac{\pi}{4}\right) + C\ \lambda^{3/2} + \cdots & (q < 0) \\ \frac{1}{3^{3/2}\sqrt{\pi}} \Gamma(\frac{1}{3}) \sin(\frac{2}{3}\pi) \lambda^{1/3} & (q = 0) \\ \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\lambda^{1/2}}{q^{1/4}} \frac{1}{\exp \frac{2}{3}\frac{q^{3/2}}{\lambda}} + C'\ \lambda^{3/2} + \cdots & (q > 0) \end{cases}$$

as $\lambda \to 0$, where $\frac{2}{3}\frac{q^{3/2}}{\lambda}$ is the critical value of the potential function $\frac{(p^3/3+pq)}{\lambda}$ [18]. The asymptotics of the integral

$$I_\lambda(q, r) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp \frac{i(p^4 + qp^2 + rp)}{\lambda}\ dp$$

was studied by Pearcey [25]. The wave front associated to this is modeled on the spherical optics and the integral approximates the intensity nearby the cusp of the caustics. We call the family $\{D_d\}$ the web since the wave fronts form configuration of foliations at generic points. In this talk some differential geometric properties of the webs are investigated and the various problems from the web geometrical view point are proposed.

From a view point in the singularity theory of functions we study the generalized oscillatory integrals

$$I_\lambda(q) = \int_{V_q} \exp \frac{i\, s(p,q)}{\lambda}\, dp, \qquad q \in \mathbb{R}^n,$$

where V_q is a variety parametrized by $q \in \mathbb{R}^n$ and $s(*,q)$ is a function on V_q. All first order PDE are realized as the webs of the generalized oscillatory integrals. We apply the singularity theory to our web and prove the existence of the (uni)versal model for almost all webs. In the complex analytic case a result due to Goryunov [14] tells the complement of the singular locus (= caustics) of the generalized versal webs are Eilenberg-Maclane $K(\pi,1)$-space: the fundamental groups π are finite index subgroups of the symmetric groups $S(m)$. The order m is given by Milnor number of $s(*,q)$ and the index is the local intersection number of m solutions. Secondly we apply the web geometry to define the affine connection on the configuration space $\mathbb{R}^n$ and show that in some cases the structure of the webs are determined by their curvature forms. In analyzing the moduli of the normal forms of the webs a certain residue of dynamics acting on the phase space (d-line) $\mathbb{R}$ turns out to give a formal invariant,

The webs are defined in another way by first order partial differential equations with the complete integral s (PDE). A *first order partial differential equation* (PDE) on $\mathbb{R}^n$ is a subvariety V of the projective cotangent space $PT^*\mathbb{R}^n$ (or $PT^*\mathbb{C}_n$) furnished with the canonical contact structure [6]. Our subject is the local topological structure of the PDE at the singular points of the projection of the variety to the base space $\mathbb{R}^n$. So $PT^*\mathbb{R}^n$ may be replaced by the 1-jet bundle $J^1(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$ with the contact form $\omega = p\,dx \ - \ dy$, where x, y are respectively the coordinates of $\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}$ and p is the coordinate of $\mathbb{R}^{n-1*}$, the fibre of the projection $ev : J^1(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$. Assume $V = \mathbb{R}^n$, $ev \circ \mathcal{I}(0) = 0 \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$ and $\mathcal{I} : \mathbb{R}^n \to J^1(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R})$ is an immersion. The direct image of the pull back $\mathcal{I}^*\omega$ under the projection $ev \circ \mathcal{I}$ defines a multi valued 1-form (implicit differential equation) on the *configuration space* : the base space $\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. A *complete integral* is a germ of non singular smooth function $s : \mathbb{R}^n, 0 \to \mathbb{R}, 0$ such that $ds \wedge \mathcal{I}^*\omega$ vanishes identically on a neighbourhood of 0 (from now on we assume the existence of the complete integrals). Then the images $D_d = ev \circ \mathcal{I}(s^{-1}(d)), d \in \mathbb{R}$, constitute the integral submanifolds (possibly singular) of the equation on a neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}^n$. We call D_d a *solution* of the equation and call the family $\mathcal{W}_\mathcal{I} = \{D_d, d \in \mathbb{R}\}$ the *solution web* of the equation $\mathcal{I}$. Web geometry [3,9,13] applies to the solution web and defines the various affine connections on the confuguration space $\mathbb{R}^n$. In some cases, this gives a one-to-one correspondence of the moduli space (function moduli) of PDE and the curvature forms of their affine connections.

Two webs $\mathcal{W}_\mathcal{I} = \{D_d\}, \mathcal{W}_\mathcal{J} = \{D'_d\}$ of PDE's $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ are C^∞ *equivalent* if there exists a germ of diffeomorphisms $\psi : (\mathbb{R}^n, 0) \to (\mathbb{R}^n, 0)$ and $k : (\mathbb{R}, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ such that $\psi(D_d) = D'_{k(d)}$ for d in a neighbourhood of $0 \in \mathbb{R}$. In other words $\mathcal{W}_\mathcal{I}, \mathcal{W}_\mathcal{J}$ are C^∞ equivalent if there exists a germ of a contact diffeomorphism $d\psi$ of the Legendre fibration $J^1(\mathbb{R}^{n-1},\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ sending the image of $\mathcal{I}$ to that of $\mathcal{J}$: $\mathcal{I}, \mathcal{J}$ are *strictly* C^∞ *equivalent* if k is the identity. We discuss some classification problem of PDE in terms of the geometry of the solution webs. We say that the solution web $\mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ is a *non singular m-web at* $q \in \mathbb{R}^n$ if the number of d for which D_d passes through q is m, those solutions $D_{d_i}, i = 1, ..., m$, are smooth and meet in general position at q and D_d forms a non-singular foliation at q as d varies nearby d_i for each $i = 1, ..., m$. We call the maximum of such d for q nearby $0 \in \mathbb{R}^n$ the *web number*. The web number is the topological multiplicity of $ev \circ \mathcal{I}$ for generic $\mathcal{I}$. The *singular locus* $\mathrm{Sing}(\mathcal{W}_{\mathcal{I}})$ of $\mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ is the set of those q where $\mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ is not a nonsingular m-web, m being the web number. By an easy calculation we see that the C^∞ equivalence classes of m-webs, $n+1 \leq m$, form subsets of infinite codimension in the jet space of m-tuples of level functions defined at $q \in \mathbb{R}^n$. So C^∞-classification of the solution webs fails in the ordinary sense. In fact Arnol'd [2], Carneiro [7], Dufour [12] and Hayakawa-Ishikawa-Izumiya-Yamaguchi [16] showed that C^∞ classes of some PDE have moduli of infinite dimension called the *function moduli*, which are parametrized by the space of smooth functions defined on the configuration space $\mathbb{R}^n$ at 0.

A "*versal* PDE" $\mathcal{I}'$ (versal unfolding) of a PDE $\mathcal{I}$ defined on $\mathbb{R}^{n+r}$ has the following properties.

(1) The solution web $\mathcal{W}_{\mathcal{I}}$ is induced from $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$ by the natural imbedding $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+r}$ "transverse" to the solutions of $\mathcal{I}'$,

(2) For a deformation $\mathcal{I}_t$ of $\mathcal{I}$, there exists a family of imbeddings $i_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+r}$ transverse to the solutions of $\mathcal{I}'$ by which the solution web $\mathcal{W}_{\mathcal{I}_t}$ is induced from $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$,

(3) $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$ has the web number $\leq n+r$ and any deformation is trivial

(The imbedding of $\mathbb{R}^n$ is not transversal to the $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$ in general in the ordinary sense.) The property (2) suggests that $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$ possesses a certain universality. The classification problem falls into the following two problems.

(A) Classification of versal PDE's $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$.

(B) Geometry of sections of $\mathcal{W}_{\mathcal{I}'}$.

Problem A is reduced to the singularity theory of functions $s(*, q)$ on varieties V_q (see c.f. [4,14,15, 21,22]). Problem B is closely related to the web geometry of the solution webs, which is mentioned in the later part this note.

Hayakawa-Ishikawa-Izumiya-Yamaguchi explained in Master thesis [16] a link of the first order PDE's with complete integral and the singularity theory of the so-called generating functions of legendrian submanifolds using, and classified generic PDE with complete integral on the plane as follows. First recall a well known result due to Hörmander and Zakalyukin [17,24]. Let $h : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^{n+1}, 0$ a germ of smooth map of corank 1: we may assume $h(z, x) = (x, h_x(z)), z \in \mathbb{R}^k, x \in \mathbb{R}^n$. Assume that $(\partial h_x/\partial z_1, \ldots, \partial h_x/\partial z_k)|\mathbb{R}^n \times 0$ is non singular. Then $\Sigma(h)$ is a smooth submanifold of dimension n, on which h restricts to a finite-to-one and generically immersive mapping to the discriminant set $D(h)$ assuming a certain generic condition. The Legendre submanifold associated to h is the image of the map

$$(x,\ h_x(z),\ \partial h_x/\partial x_1(z), \ldots, \partial h_x/\partial x_n(z))$$

of $\Sigma(h)$ into $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, which is nothing but the Nash blow up of the discriminant set $D(h)$. The family of functions h_x is called the *generating function*. It is known that all germs of Legendre submanifolds of $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ are obtained in this way (see e.g. [17,24]).

Next we recall an idea from the paper [16]. Let $\mathcal{I} = (\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_p) : \mathbb{R}^n \to J^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1*}$ be a germ of imbedding at $0 \in \mathbb{R}^n$ transverse to the contact elements and assume it admits a complete integral s. Define the germ of Legendre imbedding

$$\tilde{\mathcal{I}} = (\mathcal{I}_x, s, \mathcal{I}_y, \mathcal{I}_p, \alpha) : \mathbb{R}^n \to J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n*}$$

with a function α in $\mathbb{R}^n$ satisfying $\tilde{\mathcal{I}}^*_{\tilde{\omega}} = \mathcal{I}^*\omega + \alpha\ ds = 0$, where $\omega, \tilde{\omega}$ are respectively the canonical contact forms of the jet spaces $J^1(\mathbb{R}^{n-1}, \mathbb{R}), J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Then by the above construction of Legendre submanifolds, the image of the $\tilde{\mathcal{I}}$ is identified with the image of a map

$$(x_1, \dots, x_n, h_x, \partial h_x/\partial x_1, \dots, \partial h_x/\partial x_n) : \Sigma(x, h_x) \to J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}).$$

We identify the divergent diagram

$$\mathbb{R} \xleftarrow{\ s\ } \mathbb{R}^n \xrightarrow{ev \circ \mathcal{I} = (\mathcal{I}_x, \mathcal{I}_y)} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$$

with the restriction of the divergent diagram

$$(*) \qquad \mathbb{R} \xleftarrow{\ x_n\ } \Sigma(x, h_x) \xrightarrow{f = (x_1, \dots, x_{n-1}, h_x)} \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Then the integral curve $s^{-1}(d) \subset \Sigma(x, h_x)$ is the critical point set of the restriction of $f = (x_1, \dots, x_{n-1}, h_x) : \mathbb{R}^{n-1} \times t \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}$. The solution D_d is the discriminant (critical value) set of the restriction, which is the intersection of the discriminant $D(x, h_x)$ with $\mathbb{R}^{n-1} \times d \times \mathbb{R}$.

In this way we are led to the study of the divergent diagrams (**) with corank $(f, x_n) = 1$,

$$(**) \qquad \mathbb{R} \xleftarrow{\ s = x_n\ } \mathbb{R}^{n+k} \xrightarrow{\ f\ } \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}.$$

Define the *solution* by $D_d = D(f, s) \cap \mathbb{R}^n \times d$: the discriminant set of the restriction $f_d : s^{-1}(d) \to \mathbb{R}^n$. We denote the family of the solutions $D_d, d \in \mathbb{R}$ by $\mathcal{W}_{f,s}$ and call the *solution web* of (f, s). On the one hand the diagram (**) can be regarded as a family of the restrictions of s to the fibres of f,

$$s_q : f^{-1}(q) \longrightarrow \mathbb{R}$$

with the parameter space $\mathbb{R}^n$. By definition of the solution web, for $q \in \mathbb{R}^n - D(f)$, $q \in D_d$ if and only if s_q has the critical value d.

Let $\epsilon(n)$ denote the local ring of the function germs on $\mathbb{R}^n$ at 0 and $m(n)$ the maximal ideal which consists of the function germs vanishing at 0. Similarly to the contact equivalence relation for map germs, we say divergent diagrams $(f, s), (g, t)$ are *algebraically S-equivalent* if there exist an $\mathbb{R}$-algebra isomorphism $\phi^* : Q(g) \to Q(f)$ and a germ of diffeomorphism $\chi : \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}, 0$ such that $\phi^*(t) = \chi \circ s$, and we say *strictly algebraically S-equivalent* if χ is the identity, where $Q(f) = \epsilon(n+k)/f * m(n)$. Roughly stating $(f, s), (g, t)$ are algebraically S-equivalent if the restrictions s_o, t_o are equivalent.

Two diagrams $(f, s), (g, t)$ are *equivalent* if there exist germs of diffeomorphisms $\phi, \bar{\psi}, \psi$ such that the following diagram commutes

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^1 & \xleftarrow{s} & \mathbb{R}^{n+k} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}^n \\ \chi\downarrow & & \bar{\psi}\downarrow & & \psi\downarrow \\ \mathbb{R}^1 & \xleftarrow[t]{} & \mathbb{R}^{n+k} & \xrightarrow[g]{} & \mathbb{R}^n. \end{array}$$

We denote this diagram by $(\chi, \bar{\psi}, \psi) : (f, s) \to (g, t)$ and call the triple an *equivalence.* By definition, $\psi(\mathcal{W}_{f,s}) = \mathcal{W}_{g,t}$ holds: $\phi(D_d) = D'_{\chi(d)}$ for $d \in \mathbb{R}$, where D'_d denotes the solution of (g, t). We say $(f, s), (g, t)$ are *strictly equivalent* if χ is the identity. An *unfolding of a diagram* (f, s) *of dimension* s is a pair of a diagram (F, S) and a triple of imbeddings $i = (i_1, i_2, i_3)$ such that i_3 is transverse to $F = \pi \circ (F, S)$ and (f, s) is given by the following commutative diagram of fiber product

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^1 & \xleftarrow{S} & \mathbb{R}^{n+r+k} & \xrightarrow{F} & \mathbb{R}^{n+r} \\ \| & & i_2\uparrow & & i_3\uparrow \\ \mathbb{R}^1 & \xleftarrow[s]{} & \mathbb{R}^{n+k} & \xrightarrow[f]{} & \mathbb{R}^n. \end{array}$$

We denote $i : (f, s) \to (F, S)$ and call i a *morphism.*

In the manner of Thom-Mather theory we say diagrams $(f, s), (g, t)$ are (strictly) S-*equivalent* if they admit unfoldings, which are (strictly) equivalent.

Let $\theta(n)$ denote the $\epsilon(n)$-module of germs of smooth vector fields on $\mathbb{R}^n$ at 0. For a map germ $f : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$, let $\theta(f)$ denote the $\epsilon(n)$-module of germs of sections of the pull back $f^*T\mathbb{R}^n$. We say (f, s) is *(infinitesimally)* stable if the morphism

$$T(f, s) : \theta(n + k) \oplus \theta(n) \to \theta(s) \oplus \theta(f)$$

defined by

$$T(f, s)(\chi, \xi) = (ts(\chi),\ tf(\chi) - \omega f(\xi))$$

is surjective, where tf, ts denote the diferentials of f, s and ωf the pull back by df. The following is an easy consequence of the deformation theory of singularities of functions.

Theorem 1. *Let* $\{(f_i, s_i), i = 1, \ldots, r\}$ *be a generator over* $\mathbb{R}$ *of the module*

$$\frac{\theta(s) \oplus \theta(f)}{Im\, T(f, s) + f^*m(n)(\theta(s) \oplus \theta(f))}.$$

Then (f, s) *admits the strictly stable unfolding* $(F, S) : \mathbb{R}^{n+s+k}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+r+1}, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+r}, 0$ *defined by*

$$F(z, u) = (f(z) + \sum_{i=1}^{r} u_i f_i,\ u), \quad S(z, u) = s(z) + \sum_{i=1}^{r} u_i s_i\ ,\ z \in \mathbb{R}^{n+k},\ u \in \mathbb{R}^r\ .$$

Stable diagrams possess the following properties.

(1) s is non singular,

(2) f is stable as a map germ, i.e. for any deformation g of f a germ of g at an (z', u') nearby the origin is equivalent to the germ f,

(3) $(f, s) : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^{n+1}, 0$ is stable as a map germ,

(4) the rectriction $f_0 : s^{-1}(0), 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ is stable as a map germ. In particular a solution web of a strictly stable divergent diagram is a one parameter family of discriminant sets of stable map germs f_d. The restriction s_q has at most n critical values and the following conditions are equivalent.

(i) The web $\mathcal{W}_{f,s}$ is a non singular m-web at a q,

(ii) The first projection $\pi : D(f, s) \to \mathbb{R}^n$ is a non singular m-sheet covering over q,

(iii) $s_q : f^{-1}(q) \to \mathbb{R}$ is a Morse function with m distinct critical values.

The next theorem is fundamental in the singularity theory of composite map germs

Theorem 2. *Let $(f, s), (g, t) : \mathbb{R}^{n+k}, 0 \to \mathbb{R}^{n+1}, 0 \to \mathbb{R}^n, 0$ be strictly stable divergent diagrams. Then*
(1) $(f, s), (g, t)$ are strictly equivalent if and only if strictly algebraically S-equivalent.
(2) $(f, s), (g, t)$ are equivalent if and only if algebraically S-equivalent.

This reduces Problem (A) to the classification of germs of functions on varieties. In the complex analytic case the tuples of the critical values of s_q defines a mapping of the configuration space $\mathbb{C}^n$ onto the quotient space $\mathbb{C}^m/S(m)$ of $\mathbb{C}^m$ by the permutation group $S(m)$, m being the web number.

Define the $\mathbb{R}^+$-equivalence relation of functions germs of varieties to be generted by the S-equivalence and the relation $s_o \sim s_o + c, c \in \mathbb{R}$. A result due to Gryunov [14] is interpreted as follows.

Theorem 3. *Let $(f, s) : \mathbb{C}^{n+k}, 0 \to \mathbb{C}^{n+1}, 0 \to \mathbb{C}^n$ be a strictly stable divergent diagram. Then the singular locus $\mathrm{Sing}(\mathcal{W}_{f,s})$ of the solution web of the PDE associated to the diagram is a germ of a hypersurface. If the diagram is simple, i.e. s_0 is simple in the sense of the singularity of functions, the complement of $\mathrm{Sing}(\mathcal{W}_{f,s})$ is a $K(\pi, 1)$ space. Here π is a finite index subgroup of the braid group $S(m)$, m being the web number, and the index of π is the intersection number of $D_{d_1} \cdots D_{d_m}$ for generic distinct $d_1, \ldots, d_m$ close to 0.*

This suggests a relation to the ADE problem. Now we explain the relation of the function moduli and versal PDE. Let $i : (f, s) \to (F, S), (F, S) : \mathbb{R}^{n+r+k} \to \mathbb{R}^{n+r+1} \to \mathbb{R}^{n+r}$ a morphism into a strictly stable unfolding of dimension s given in Theorem 1. Given a deformation $(f_v, s_v), v \in \mathbb{R}^r$ of $(f, s) = (f_o, s_o)$, define the unfolding (F', S') of (F, S) with the parameter v by $F' = (F + (f_v - f\ ,\ o)\ ,\ v), S' = S + (s_v - s)$. Then by Theorem 1, (F', S') is stable and by Theorem 2 strictly equivalent to the trivial unfolding of (F, S) of dimension r. The composition of the trivialization of (F', S') and the projection of the trivial family to (F, S) restricts to the subfamily (f_v, s_v) to give a morphism into (F, S). By this idea we obtain

Theorem 4 (Function moduli). *Let $(f_v, s_v), v \in \mathbb{R}^{r'}$ be a smooth family of divergent diagrams. Then (f_v, s_v) is strictly equivalent to a germ of (f, s'_v) at an $z_v \in \mathbb{R}^{n+k}$ nearby*

0, *where* s'_v *is of the form*

$$s'_v(z) = S \circ i_{1v}(z) = s_0(z) + \sum_{j=1}^{r'} \alpha_{v,j}(z) \cdot s_j(z)$$
$$= s_0(z) + \sum_{j=1}^{r'} \beta_{v,j}(f(z)) \cdot s_j(z).$$

The second term in the theorem is called *function moduli.*

Theorem 5 (Versality theorem). *Let* (g,t) *be strictly algebraically S-equivalent to an* (f,s) *and assume* f,g *are stable and* f *is minimal:* f *is not equivalent to a trivial unfolding of an* f'*. Then* (g,t) *is strictly equivalent to a diagram* $(f,s'), s' \in M$*, where* M *is the* $\epsilon(n)$*-module generated by* $s_i, i = 1,\dots,r$*.*

Example (Verslity and function moduli).

Consider the following (non versal) differential equation in the x_1y-plane

$$y = x_1 y' + (y')^3. \tag{1}$$

This defines a nonsingular variety $V = \{y = x_1p+p^3\} \subset J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on which the projection ev to the base space restricts to the Whitney cusp mapping. The variety V is not transverse to the contact elements at the singular locus. This equation admits the family of algebraic solutions $y = x_1x_2 + x_2^3$, with the parameter $x_2 \in \mathbb{R}$. The variety V is the image of the imbedding $\mathcal{I}(x_1,x_2) = (x_1, x_1x_2 + x_2^3, x_2)$ and the complete integral is given by $s = x_2$. This admits the Legendre imbedding into $J^1(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ defined by $\tilde{\mathcal{I}}(x_1,x_2) = (x_1,x_2,x_1x_2 + x_2^3, x_2, x_1 + 3x_2^2)$, which is given by the generating function $h_x(z) = z^2 + x_1x_2 + x_2^3$.

Now we will construct the versal unfolding of (1). The divergent diagram

$$\mathbb{R} \xleftarrow{s=x_2} \mathbb{R}^3 \xrightarrow{f=(x_1,h_x)} \mathbb{R}^2$$

is not strictly stable i.e. a deformation is not strictly equivalent to the trivial unfolding. By Theorem 5.1, this admits the stable unfolding with one parameter

$$\mathbb{R} \xleftarrow{S=x_2} \mathbb{R}^4 \xrightarrow{F=(x_1,u,h_{x,u})} \mathbb{R}^3,$$

where $h_{x,u}(z) = z^2 + x_1(x_2 - u) + (x_2 - u)^3$. The singular locus $\Sigma(F,S)$ of the map $(F,S) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ is the x_1x_2u-space defined by $z = 0$, on which the above divergent diagram restricts to the integral diagram

$$\mathbb{R} \xleftarrow{S=x_2} \Sigma(F,S) = \mathbb{R}^3 \xrightarrow{F} \mathbb{R}^3,$$

and the restriction of F is given by $F(x_1,x_2,u) = (x_1,u,x_1(x_2-u)+(x_2-u)^3)$. The level surfaces of the complete integral $s = x_2$ in $\mathbb{R}^3$ pjoject by F to the solutions in the x_1yu-space $\mathbb{R}^3$, which satisfy the following versal PDE

$$\left\{ \begin{aligned} y &= x_1 y_{x_1} + (y_{x_1})^3, \\ y_u &= -x_1 - 3(y_{x_1})^2 \end{aligned} \right\} \tag{2}$$

By definition $F^{-1}(x_1, u, y) \subset \mathbb{R} \times u \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ is the parallel translation of $f^{-1}(x_1, y) \subset \mathbb{R}^2$ by $(u, 0) \in \mathbb{R}^2$. Identifying $F^{-1}(x_1, u, y)$ with $f^{-1}(x_1, y)$ naturally, the restrictions $s_{x_1,y}, S_{x_1,u,y}$ of the complete integral x_2 satisfy $s_{x_1,y} + u = S_{x_1,u,y}$. Let i be the imbedding of x_1y-space into x_1uy-space defined by $i(x_1, y) = (x_1, \phi(x_1, y), y)$ and j the imbedding of x_1x_2z-space into x_1x_2uz-space defined by $j(x_1, x_2, z) = (x_1, x_2, \ \phi(x_1, h_x(z)), z)$. These imbeddings define the divergent diagram (g, t) by $F \circ j = i \circ g$ and $t = S \circ j$. Clearly $f = g$. By definition $S_{x_1,\phi(x_1,y),y} = s_{x_1,y} + \phi(x_1, y) : f^{-1}(x_1, y) \to \mathbb{R}$. This shows that t restricts to $s + \phi(f)$ on $\Sigma(g, t)$. The second term $\phi(f)$ is the *function moduli*. The solutions of the equation (1) are the transverse intersections of the solutions of this equation (2) with the x_1y-plane naturally imbedded in x_1yu-space, and any deformation of (1) is obtained by a suitable deformation of the natural imbedding.

Generic PDE's with complete integrals are classified in [16] as follows.

Theorem 6 [16]. *The diagrams $(*)$ $(f, s) : \mathbb{R} \leftarrow \Sigma(f, s) \to \mathbb{R}^2$ associated to generic differential equation in xy-plane are equivalent to one of the following five forms as divergent diagrams.*
(0) $f(z, x) = (z, x), \quad s(z, x) = z,$
(1) $f(z, x) = (z^2, x), \quad s(z, x) = z + x,$
(2) $f(z, x) = (z^2, x), \quad s(z, x) = z^3 + x,$
(3) $f(z, x) = (z^3 + xz, x), \quad s(z, x) = z + \phi(f),$
(4) $f(z, x) = (z^3 + xz, x), \quad s(z, x) = \frac{3}{4}z^4 + \frac{1}{2}xz^2 + \phi(f),$
(5) $f(z, x) = (z^3 + xz^2, x), \quad s(z, x) = z^2 + \phi(f),$
where ϕ is an arbitrary smooth function defined on a neighbourhood of the origin in the xy-plane.

In the above list the normal forms has at most "one" function moduli. This is explined as follows. Let $\mathcal{I}$ be a PDE on $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{I}'$ its (mini) versal PDE on $\mathbb{R}^{n+s}$ with smallest s, and let $(f, s), (F, S)$ be their associated divergent diagrams. Define the partition $\mathcal{S}$ of the configuration space $\mathbb{R}^{n+s}$ by the $\mathbb{R}^+$-equivalence class of the singular points of the restrictions $S_{(q,u)}, (q, u) \in \mathbb{R}^{n+s}$. If $s_o = S_o$ is $\mathbb{R}^+$-simple, then by the definition of simplicity, $\mathcal{S}$ is locally finite stratification by submanifolds and generic perturbations of the natural imbedding of $\mathbb{R}^n$ into $\mathbb{R}^{n+s}$ are transversal to $\mathcal{S}$. This transversality means that the extended family $s_{q,c} = s_q + c, (q \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R})$ is a versal family and the unfolding (f', s'), $(f' = (f, c), s' = s + c)$, of dimension 1 is stable by the criterion in Theorem 1. By the property of stable diagrams, this has the web number at most $n + 1$ hence (f, s) has the web number at most $n + 1$ and by the argument of versality of stable diagrams (f, s) has at most one function moduli of type $\phi(f)$. Therefore it would be important to estimate the codimension c of the union of non $\mathbb{R}^+$-simple functions of varieties. Theorem 6 assirts that $c \geq 3$.

Theorem 7. *For $n < c$, generic PDE's have the web number less than or equal to $n + 1$ and at most one function moduli of type $\phi(f)$.*

The function moduli of type $\phi(f)$ has two meanings. The first one is seen by the obvious calculation

$$
\begin{aligned}
I_\lambda(q) &= \int_{V_q} \exp \frac{i\,(s(p,q)\ +\ \phi\circ f(q))}{\lambda}\,dp \\
&= \exp i\frac{\phi\circ f(q)}{\lambda} \times \int_{V_q} \exp \frac{i\ s(p,q)}{\lambda}\,dp.
\end{aligned}
$$

The function moduli changes only the phase of the oscillatory integral. In particula the zero of the integral does not change. On the other hand the web structure of the wave fronts D_d changes topologically [11,12] and futhermore the contour of the phase function d (multi valued) on $\mathbb{R}^n$ form a quasi periodic (Penrose) tiling [30], which changes vigorously. The structure of those fine structure seems not yet well understood. Here we propose the approach from the web geometry.

$n+1$-webs of codimension 1 on $\mathbb{R}^n$ is one of the well-deveropped parts of the web geometry historically studied by Lie Darboux, Blashke, Chern, ... [3,9,13]. To give a brief introduction we assume $n=2$. Assume that a germ of 3-web $\mathcal{W} = (\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3)$ of $\mathbb{R}^2$ is given by nonsingular 1-forms $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ in general position. Since ω_i are linearly dependent we may assume $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$ by multiplying units to those 1-forms. It is easy to see that there exists the unique 1-form θ such that $d\omega_i = \theta \wedge \omega_i$ for $i = 1,2,3$. The affine connection on $\mathbb{R}^2$ associated to $\mathcal{W}$ is defined by the connection form $\begin{pmatrix} \theta & 0 \\ 0 & \theta \end{pmatrix}$. The derivative $K(\mathcal{W}) = d\theta$ is independent of the choice of ω_i and called the *web curvature form*. If the curvature form vanishes identically, $\mathcal{W}$ is diffeomorphic to the (hexagonal) web defined by parallel lines with three distinct directions. (The affine connections and web curvatures are defined also for $n+1$-webs of $\mathbb{R}^n$. See the book [3,13] for the details.)

Assume that a solution web $\mathcal{W}_\mathcal{I}$ of a PDE $\mathcal{I}$ on $\mathbb{R}^2$ has the web number 3 and has function moduli $\phi(f)$. On the nonsingular locus of $\mathcal{W}_\mathcal{I}$ the web curvature form $K(\mathcal{W}_\mathcal{I})$ is defined. Clearly the web curvature form is independent of the right equivalence $s \longrightarrow \chi\circ s$ with a germ of diffeomorphism χ of $\mathbb{R}$. Therefore we obtain the morphism

$$
K:\ \text{Function moduli}/\sim^{\text{right}}\ \longrightarrow \text{Web curvature}.
$$

Proposition 8. *Let (f,s) be the normal forms in Theorem 6 (3) - (5). Then there exists a germ of analytic (respectively formal) diffeomorphism χ in case (3) (resp. in cases (4), (5)) such that, respectively,*

(3) $\chi\circ\phi$ vanishes identically on the discriminant locus $D(f) = \{27u^2 + 4v^3 = 0\}$,

(4) $\chi\circ\phi = \pm v + av^2$ on the double point locus $=$ v-axis, $a\in\mathbb{R}$,

(5) $\chi\circ\phi = \pm v + av^2$ on the cusp point locus $=$ v-axis, $a\in\mathbb{R}$.

The proposition is proved by normalizing the dynamics on the range $\mathbb{R}$ of s, which sends a critical value of the function s_q to the other critical value for those q, respectively, in $D(f)$ and v-axis. The potential function s_q in Case (3) for $q=(0,a)$ is of the form

$$
s_q(p)\ = q^4\ +\ aq^2\ +\ \phi(a),
$$

which has the critical values $\phi(a)$ and $\phi(a)+\frac{1}{4}a^2$. Assume that ϕ is nonsingular. Then the dynamics which sends the first to the later is smoothly conjugate to the diffeomorphism

$$a \;+\; \frac{1}{4}(\phi^{-1}(a))^2.$$

It is known [28] that germs of diffeomorphism h of $\mathbb{R}, 0$ (as well as $\mathbb{C}$) are formally classified by their residue. Here we introduce the (reduced) *residue* $\mathrm{Res}(f) = \mathrm{res}(f) + \frac{k+1}{2}$ (where f is k-flat), which is defined by

$$f^{\circlearrowleft^k} = f^{(2\pi\sqrt{-1}\ \mathrm{Res}(f))},$$

in other words, writing formally as $f = \exp\chi$ with a formal vector field χ on $\mathbb{R}$,

$$\exp\ \circlearrowleft^k\ \chi = \exp\ (2\pi\sqrt{-1}\ \mathrm{res}(\chi))\ \chi.$$

Here $\circlearrowleft^k$ stands for the "analytic" continuation of the iteration f^t of t-times, t being a complex number, along the k-fold anti clockwise cycle from 0 to a nearby point in the time space $\mathbb{C}$. The residue of our dynamics $a + \frac{1}{4}(\phi^{-1}(a))^2$ is a formal invariant under the right equivalence. (It is proved in [20] that the formal conjugacy is realized by C^∞-conjugacy by a result due to Takens.) Introducing in this way the residue seems an adhoc invariant, although, the following Proposition 9 suggests there might be an "intrinsic" definition in terms of the web curvature form as well as the affine connection of the solutions.

Proposition 9. *For the webs of the normal form in (3),*

(1) *Function moduli/* $\sim^{\text{right}} \;= \{\phi \mid \phi \equiv 0 \text{ on } D(f)\}$,

(2) *the web curvature form* $K(\mathcal{W}_{\mathcal{I}})$ *extends analytically to* $\mathbb{R}^2$,

(3) K *is a bijection of the reduced function moduli and the set of germs of analytic 2-forms.*

The statement in (1) follows from Proposition 8 (3). The statement (2) follows from the theory of invariant forms. The statement (3) is shown by a direct calculation and remains valid for some other cases. This work is in progress involving the Gauss map of the webs determined by the frame of the tangent space by the differential of the phase function s.

Finally I would propose the following questions.

(1) Is K injective?

(2) Study the singularities of $K(\mathcal{W}_{\mathcal{I}})$.

References

1. ———, *Contact geometry and wave propagation*, L'enseignement Math. Supplement (1989).
2. V.I. Arnold, A.N. Varchenko, A.B. Givental, A.G. Hovansky, *Singularities of functions, wave fronts, caustics and multidimensional integrals*, Math. Phys. Rev. 4 (1984), 1–92.
3. W.Blaschke, G.Bol, *Geometrie der Gewebe*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Springer, 1938.
4. J.B. Bruce, *A note on first order differential equations of degree greater than one and wave front evolutions*, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), 139–144.

5. J. Bruce, M. Robert, *Critical points of functions on analytic varieties*, Topology **27** (1988), 57–90.
6. R.L. Bryant, S.S. Chern, R.B. Gardner, H.L. Goldschmidt, P.A. Griffiths, *Exterior Differential Systems*, Mathematical Science Reserch Institute Publications, vol. 18, Springer-Verlag, 1991.
7. M.J.D. Carneiro, *Singularities of envelopes of families of subvarieties in* $\mathbb{R}^n$., Ann. Scient. Ec. Norm. Sup **16** (1983), 173–192.
8. D.Cerveau, *Equations differentielles Algebraiques: Remarques et problemes*, Preprint.
9. S.S. Chern, *Web geometry*, Bull A.M.S. **6** (1982), 1–8.
10. J.P. Dufour, *Triplets de fonctions et stabilité des enveloppes*, C.R. Acad. Sci. Paris **10** (1977), 509–512.
11. ———, *Families de courbes planes différentiables*, Topology **22** (1983), 449–474.
12. ———, *Modules Pour les familles de courbes planes*, Ann. Inst. Fourier Grenoble **39.1** (1989), 225–238.
13. V.V.Goldberg, *Theory of multicodimensional* $(n+1)$*-webs*, Mathematics and its applications (44), Kluwer Academic, 1988.
14. V.V. Goryunov, *Geometry of bifurcation diagram of simple projections onto the line*, Functs. Anal. Prilozhen **14, No.2** (1981), 1-8.
15. ———, *Projection and vector fields, tangent to the discriminant of a complete intersection*, Functs. Anal. Prilozhen **22, No.2** (1988), 26-37.
16. A. Hayakawa, G. Ishikawa, S. Izumiya, K. Yamaguchi, *Classification of integral diagrams of Whitney type and first order differential equations*, Preprint in Hokkaido University (1991).
17. L. Hörmander, *Fourier Integral Operators.I*, Acta Mathematica **127** (1971), 79–183.
30. M.V. Fedoryuk, *Asymptotic analysis*, Springer, 1991.
19. M. Kossowski, *First order partial differential equations with singular solution*, Indiana Univ. Math. Jour. **35** (1986), 209–22.
20. Y. Krokawa, *On function moduli for first oeder oedinary differential equationa*, C.R.Acad. Sci.Paris (1993).
21. S. Matsuoka, *An algebraic criterion for right-left equivalence of holomofphic functions on Analytic varieties*, Bull. London Math. Soc. **21** (1989), 164–170.
22. D. Mond, J. Montaldi, *Deformations of maps on complete intersections, Damon's* $\mathcal{K}_v$*-equi valence and bifurcations*, Warwick University Preprints: 21 (1991).
23. I.Nakai, *Notes on Versal deformation of first order PDE and Web structure*, To appear in J. Diff. Equations.
24. V.M. Zakalyukin, *Lagrangian and Legendrian singularities*, Funct. Anal. Appl. **10** (1976), 37–45.
25. T. Pearcey, *The structure of an electoromagnetic field in the neighbourhood of a cusp of a caustic* (1945).
26. J. Ecalle, *Théorie itérative. Introduction à la théorie des invariants holomorphes,*, J. Math. pures et appl. **54** (1975), 183–258.
27. J. Martinet, J.P. Ramis, *Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre*, Publ. IHES **55** (1982), 63–164.
28. B. Malgrange, *Travaux d'Ecalle et de Martinet-Ramis sur les systémes dynamiques*, Séminaire Bourbaki exposé **582** (1981).
29. I.N. Bernstein, Funct Anal. Appl. **5, No.2** (1971), 1–16.
30. V.I. Arnol'd, *Huygens and Barrow, Newton and Hooke*, Birkhäuser, 1990.
31. R. Penrose.
32. I. Nakai, *Complex web and geometry of projective space curves* (1984), Topoloty.

SAPPORO 060 JAPAN
E-mail address: nakai@math.hokudai.ac.jp

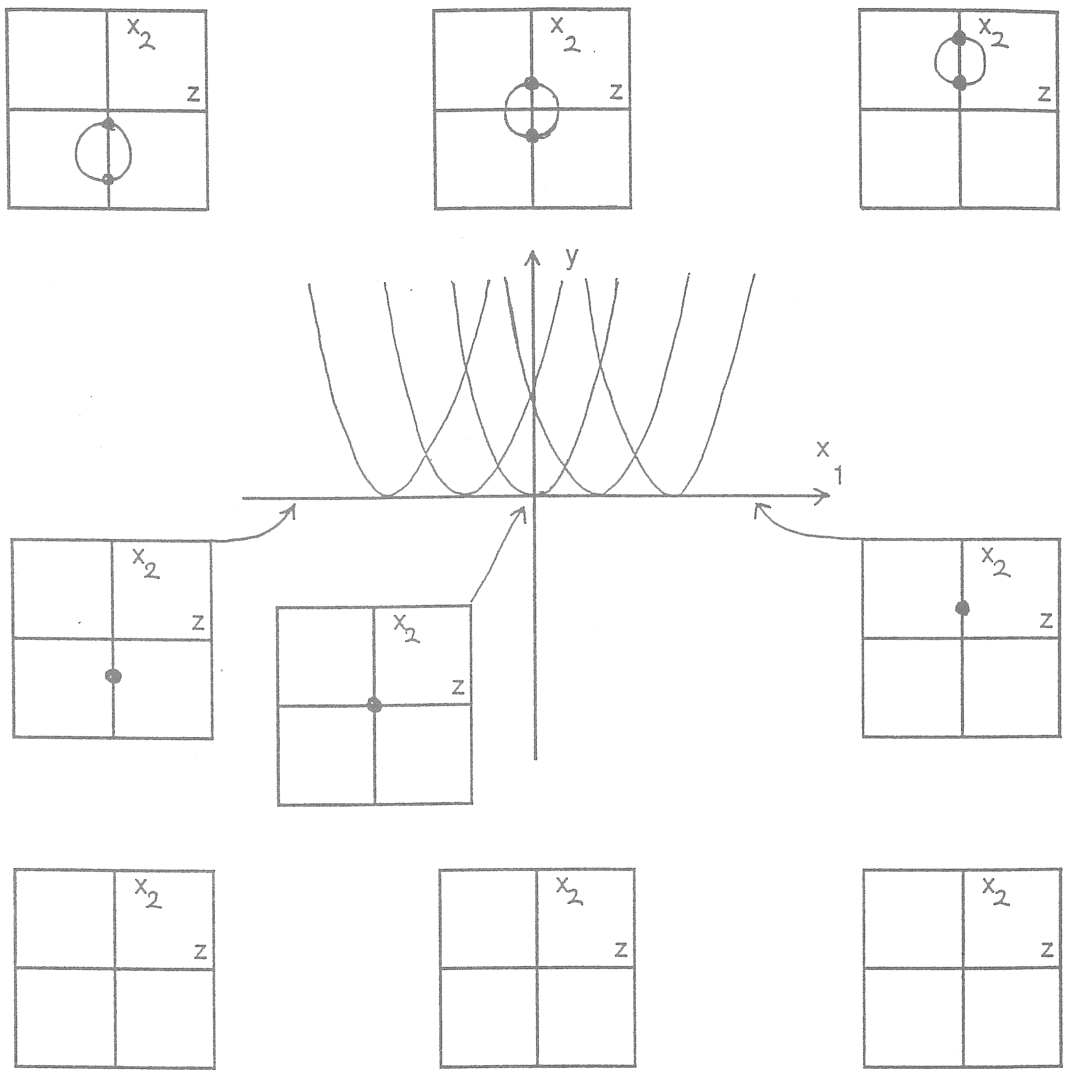


Fig.1a,ε=1

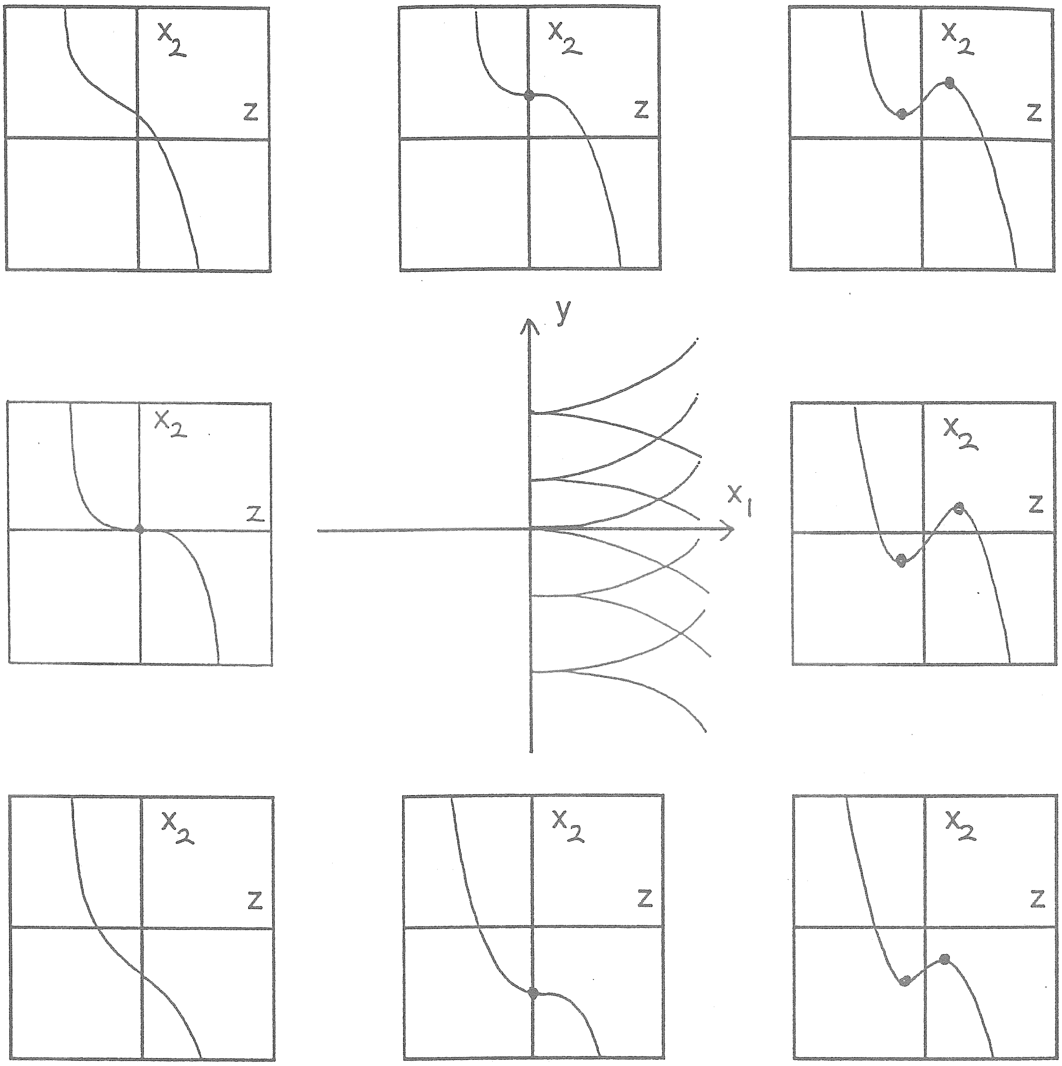


Fig. 2

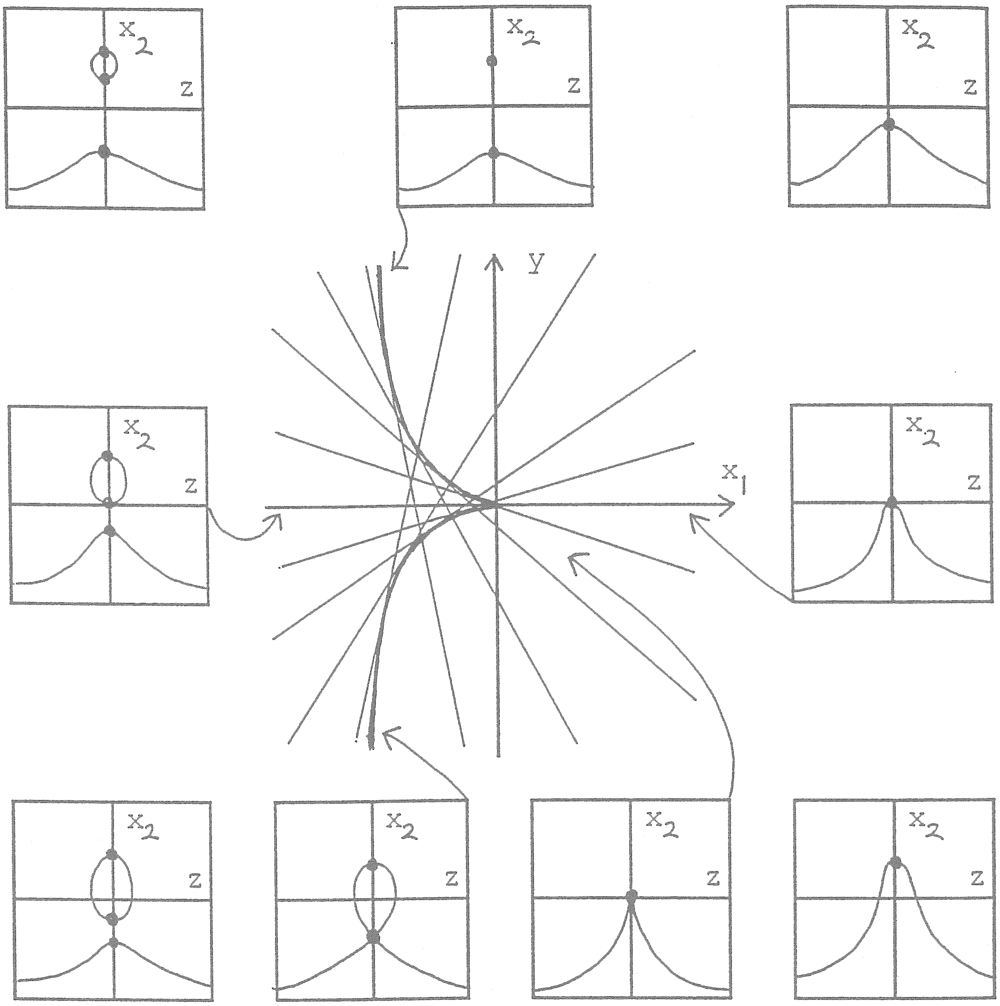


Fig. 3

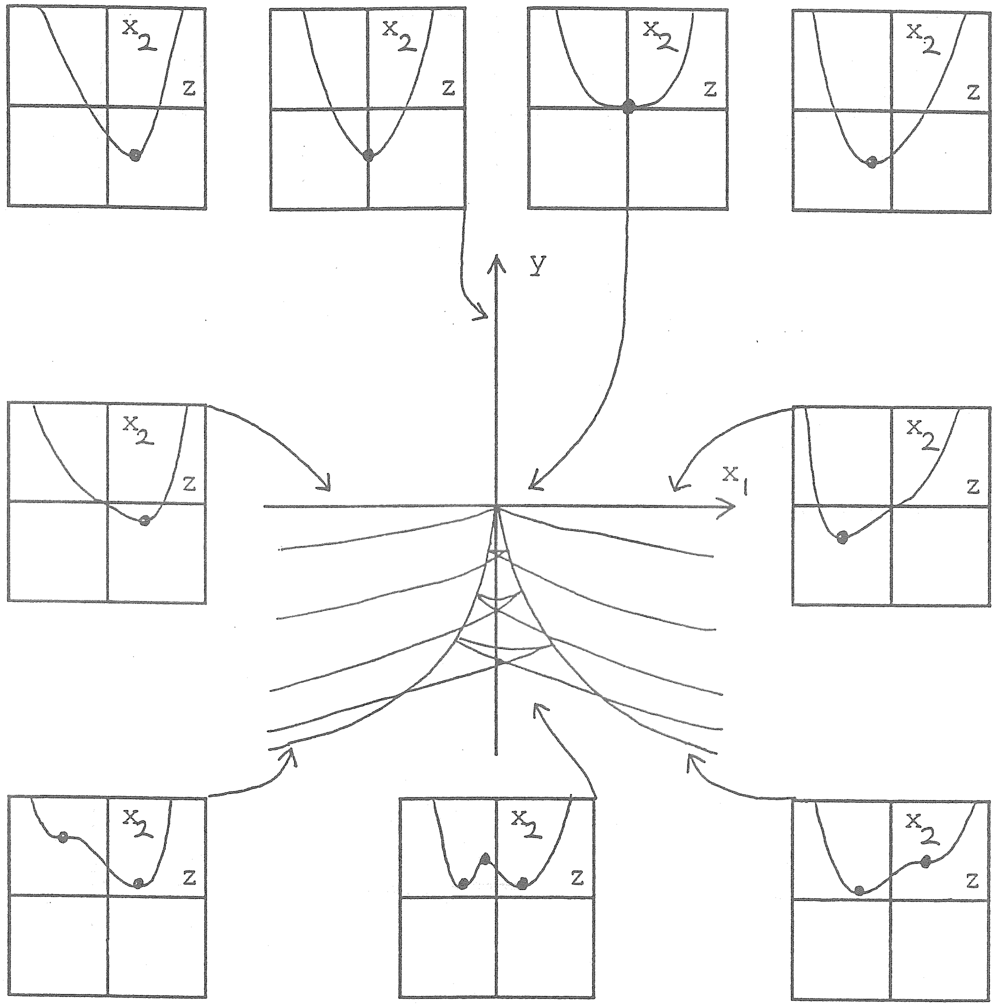


Fig. 4

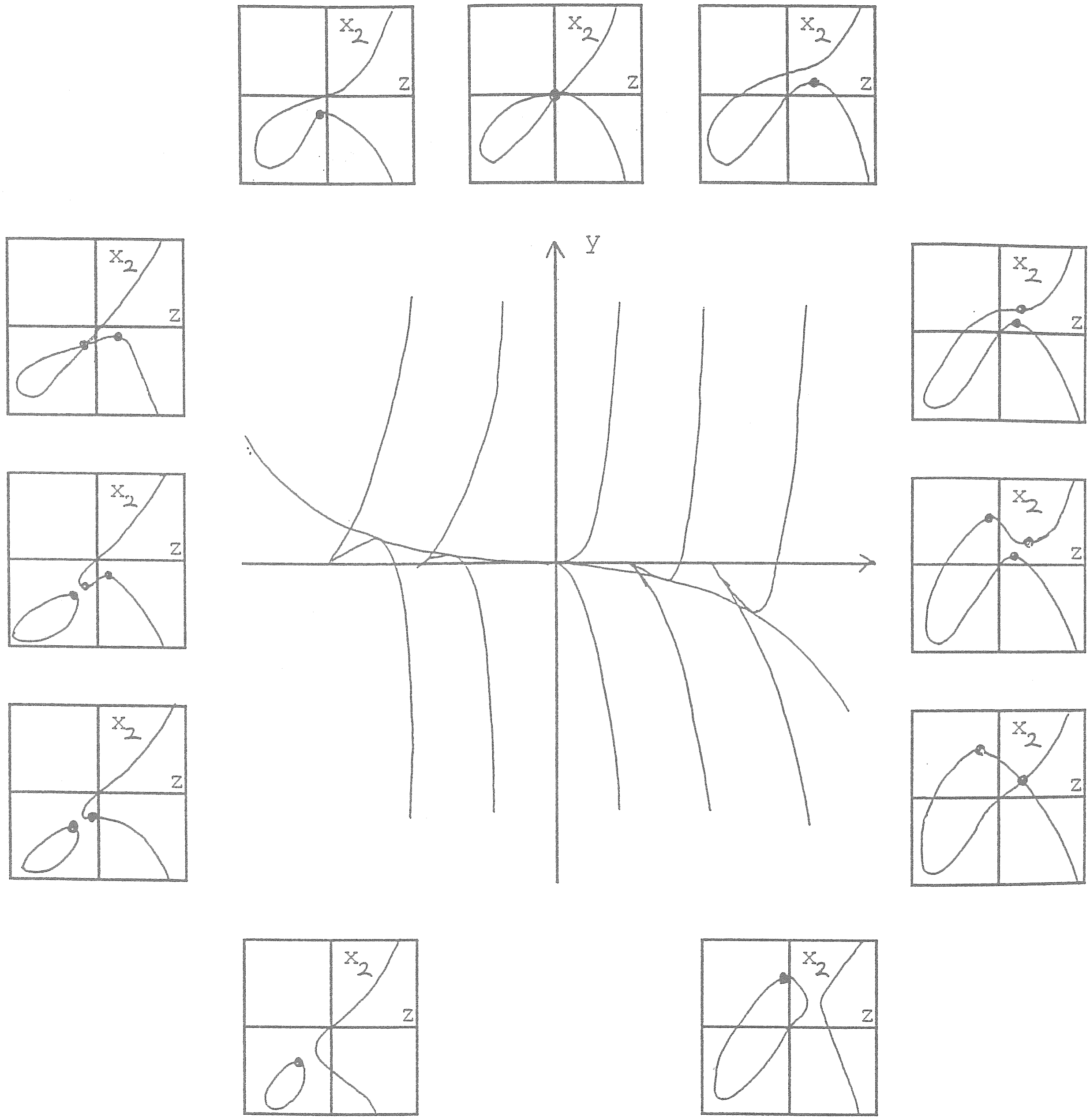


Fig. 5

結び目多項式の実現問題について

藤井 浩純

大阪市立大学博士課程2回生

1 序文

ここでは、結び目多項式として、アレキサンダー多項式, $\Delta_L(t)$, と2変数スケイン多項式, $P(L; v, z)$, を z の多項式とみた時の z の0次の係数多項式, $P_0(K; v)$, の2つを考える。$c_0(K; x) \in Z[x^{\pm}]$ を $c_0(K; v^{-2}) = P_0(K; v)$ となるようなローラン多項式とする。河内は [8] 結び目解消数1の結び目は $c_0(K; x)$ をすべて実現できることを示した (命題 1)。また、$c_0(K; x)$ とアレキサンダー多項式との関係についても調べている。

結び目解消数1であるような2橋結び目と3橋結び目のある族について $c_0(K; x)$ とアレキサンダー多項式にどんな制限がつくか調べてみる。またこの事を次数4のヴァシリエフ不変量に応用することができる。

次の記号を導入する。

$\nabla_K(z)$	:	結び目 K のコンウェイ多項式
$u(K)$	:	結び目 K の結び目解消数
$b(K)$	:	結び目 K 橋指数

ここで、結び目はその交点を何回か入れかえる事によって自明な結び目になる。すべてのダイアグラムに対してその回数の最小数のことを結び目 K の結び目解消数と呼ぶ。3次元球体, B^3, と適切に埋めこまれた1次元多様体, t, との対 (B^3, t) をタ

ングルという。また K のタングル分解 $(S^3,K)=(B^3_1,t_1)\cup(B^3_2,t_2)$ で、各 (B^3_i,t_i) が自明な n 本のタングル, $i=1,2$ となるようなものが存在する。その様な n の最小数のことを結び目 K の結び目の橋指数と呼ぶ。

河内は、任意の結び目 K は $c_0(K;1)=1$ と $c_0'(K;1)=0$ を満たすことを示しその条件が, best possible であることを結び目解消数 1 の結び目を使って示した。

命題 1 ([8]) 任意のローラン多項式 $f(x)\in Z[x,x^{-1}]$ $s.t.$ $f(1)=1$, $f'(1)=0$ に対し, ある結び目解消数 1 の結び目 K $s.t.$ $c_0(K;x)=f(x)$ が存在する。

この証明法を使って橋指数 2 の条件を加えても満たすことを示せた。

定理 1 任意のローラン多項式 $f(x)\in Z[x,x^{-1}]$ $s.t.$ $f(1)=1$, $f'(1)=0$ に対し, ある無限個互いに異なる結び目解消数 1 の 2 橋結び目 $\{K_\alpha\}_{\alpha\in N}$ $s.t.$ $c_0(K_\alpha;x)=f(x)$ が存在する。

アレキサンダー多項式については 2 橋結び目ではすべて実現はしないことが知られている。しかし著者は、3 橋結び目ではアレキサンダー多項式はすべて実現できることを示した。河内は [8] 任意のアレキサンダー多項式が 1 の結び目は $c_0''(K;1)=0$ と $c_0(K;-1)\overset{16}{\equiv}1$ を満たすことを示した。また宮澤は [12] $c_0(K;1)=1$ を満たす任意の結び目は $a_2(K)=0$ と $a_4(K)\overset{2}{\equiv}0$ を満たすことを示した。ここで、 $a_i(K)$ は結び目 K のコンウェイ多項式の i 次の係数である。

その時二人の結果が, best possible であることを結び目解消数 1 の 3 橋結び目を使って示せた。

定理 2 任意のローラン多項式 $f(x)$ $s.t.$ $f(1)=1$ と $f'(1)=f''(1)=0$, $f(-1)\overset{16}{\equiv}1$ に対し, 次の条件を同時に満たす結び目 K が存在する : (i) $c_0(K;x)=f(x)$, (ii) $\Delta_K(t)=1$, (iii) $b(K)=3$, (iv) $u(K)=1$.

定理 3 任意のローラン多項式$C(z^2) \in Z[z^2]$ $s.t.$ $C(0)=1$ と$a_2=0$, $a_4 \overset{2}{\equiv} 0$ に対し, 次の条件を同時に満たす結び目が存在する：(i) $c_0(K;x)=1$, (ii) $\nabla_K(z)=C(z^2)$, (iii) $b(K) \leq 3$, (iv) $u(K)=1$.

2 定理の証明

$C(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$, $\alpha_i \in Z$：下の図の様に示した2橋結び目

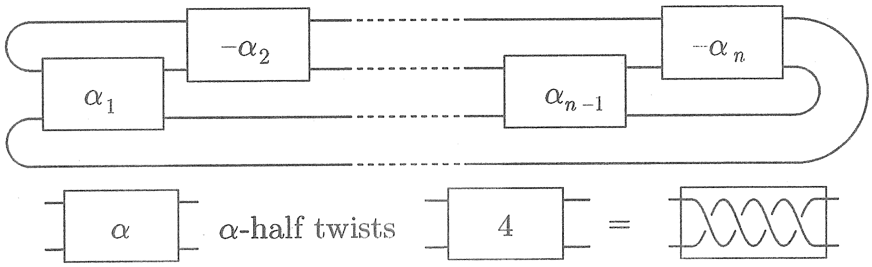


図 1:

スケイン多項式は $P(L;v,z) \in Z[v^{\pm},z]$ 向きづけられた結び目または絡み目 L のアイソトピー変形に対する不変量であり次の関係式から帰納的に導かれる。

$$P(O;v,z)=1;$$

$$v^{-1}P(L_+;v,z)-vP(L_-;v,z)=zP(L_0;v,z),$$

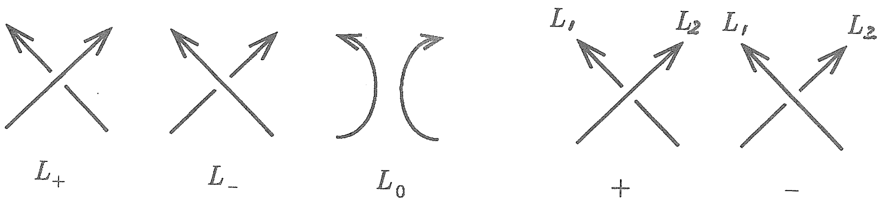


図 2:

$$P(L) = \sum_{i=1}^{n} P_{2i-1-r}(L;v) z^{2i-1-r}$$

ここで、 L : r 成分の絡み目。

またLのコンウェイ多項式は、$\nabla_L(z) = P(L;1,z)$ と表される。

河内は $P_0(K;v)$ を次のように表現しなおした。結び目多項式 ([8] 定理 1.1), $c_0(K;x)$, は次の関係から帰納的に導かれる。

(i) $c_0(O;x) = 1$

(ii) $xc_0(L_+;x) - c_0(L_-;x) = c_0(L_0;x)$,

ただし、O : 自明な結び目, L_+, L_- : 結び目, L_0 : 2成分の絡み目.

(iii) $L = L_1 \cup L_2$: 絡み目数 λ の2成分の絡み目とする。

$$c_0(L;x) = (x-1)x^{-\lambda} c_0(L_1;x) c_0(L_2;x).$$

ここで、L の絡み目数 λ とは、 L_1 と L_2 の交点だけの図2に示した符号の和の 1/2 のことである。

命題 2 ([6]) 2橋結び目の変形は次の通り。

$$\begin{aligned} & C(x_1, \cdots, x_n, a, y, y_1, \cdots, y_m) \\ \cong\ & C(x_1, \cdots, x_n + \epsilon, ||a||, (-1)^a(y+\epsilon), (-1)^a y_1, \cdots, (-1)^a y_m), \end{aligned}$$

$$C(x_1, \cdots, x_n, a) \cong C(x_1, \cdots, x_n + \epsilon, ||a||),$$

ここで、 $\epsilon = a/|a|$, $||a|| = (\underbrace{-2\epsilon, 2\epsilon, \cdots, (-1)^{|a|-1} 2\epsilon}_{|a|-1})$.

以下 $\boldsymbol{a} := 2a_1, \cdots, 2a_{2n}$

$\boldsymbol{b} := 2b_1, \cdots, 2b_{2m}$ $(a_i, b_j \in Z)$ と表す。

補題 1 任意の2橋結び目または自明な結び目 J, J' と任意の整数 d に対し，ある2橋結び目または自明な結び目 C *s.t. a skein triple,* $(L_+, L_-, L_0) = (J, C, O \cup J')$, $lk(O, J') = d$ が存在する。

証明. 仮定から2橋結び目 $J \cong C(\boldsymbol{a})$, $J' \cong C(\boldsymbol{b})$ とする。

その時、次のような2橋結び目をとる。$C \cong C(\boldsymbol{b}, e, \bar{\boldsymbol{a}}, 2, \boldsymbol{a})$,

ただし、 $d = 2e + 2\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} - 2\sum_{j=1}^{m} b_{2j-1}$, $\bar{\boldsymbol{a}} = -2a_{2n}, \cdots, -2a_1$.

図 3で示した点 $*$ で skein triple を考えると $(L_+, L_-, L_0) = (J, C, O \cup J')$ であり $lk(O, J') = d$ であることが容易にわかる。 □

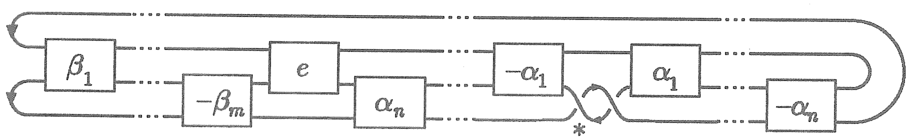


図 3:

結び目 K のザイフェルト曲面 F とは、$F \subset S^3$ 連結有向曲面 s.t. $\partial F = K$

連結有向曲面 F の種数を $g(F)$ と表す。

結び目 K の種数, $g(K) := \min\{g(F) | F$はKのザイフェルト曲面$\}$

補題 2 任意の2橋結び目 C に対して、ある2橋結び目 C' *s.t.* $c_0(C; x) = c_0(C'; x)$ かつ $g(C) + 3 = g(C')$.

証明. 仮定から2橋結び目 $C \cong C(\boldsymbol{a})$ とする。その時、2橋結び目 C' を次の様にとる。$C' \cong C(\boldsymbol{a}, e^+_\alpha, 2-4, 2, 2, -4)$. ここで $e^+_\alpha \neq 0$ とする, その時、$g(C) + 3 = g(C')$ であることが容易にわかる。図に示したところで skein triple を考えると次の通り

である。

$$\begin{aligned} x^2c_0(C_2;x)-c_0(C';x) &= (x^2-1)x^{b-1} \quad (1),\\ xc_0(C_2;x)-c_0(C_1;x) &= (x-1)x^{b-2} \quad (2),\\ xc_0(C_1;x)-c_0(C;x) &= (x-1)x^{b} \quad (3),\end{aligned}$$

ここで、$C_1 \cong C(\boldsymbol{a},2,2)$, $C_2 \cong C(\boldsymbol{a},2,2,2,-4)$ と $b=1+\sum_{i=i}^{n} a_{2i-1}$. $(1)-x\times(2)-(3)$ を計算すると、$c_0(C;x)-c_0(C';x)=0$ を得る。 □

$f(x)\in Z[x,x^{-1}]$ に対して、

$d(f) := -f''(1)/2$

$deg(f)$: $f(x)$ の最高次数 − 最低次数　　と表す。

事実 1 ([8]) $f(x), g(x) \in Z[x,x^{-1}]$ *s.t.*

$$f(x)=xg(x)-(x-1)x^d h(x)$$

とする。その時次の 3 つの等式は同値：

(i) $f(1)=g(1)=1$ と $f'(1)=g'(1)=0$, $d=d(f)-d(g)$,

(ii) $g(1)=h(1)=1$ と $g'(1)=h'(1)=0$,

(iii) $f(1)=h(1)=1$ と $f'(1)=h'(1)=0$.

定理 1 の証明　始めに $f(x)$ に対して、ある 2 橋結び目 C with $u(C)\geq 1$ が存在することを $deg(f)$ の帰納法で示す.

$f(x)=1$ のとき、$C\cong C(2,1,1,2,2)\cong 8_{14}$ を取ればよい.

$deg(f)=1$ のとき、$f(x)=(1+b)x^b-bx^{b+1}$ $(b\in Z)$ である。C_b としてトーラス結び目 $t(2,-2b-1)$ を取れば, $c_0(C_b;x)=f(x)$ である。

もし $deg(f) = n \geq 2$ とする, その時、

$$\begin{aligned} f(x) &= b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_s x^s. \\ &= xg(x) - (x-1)x^{n-b_n-2}((1+b_n)x^{b_n} - b_n x^{b_n+1}) \end{aligned}$$

を満たすようなローラン多項式 $g(x)$ を考えると、式から $deg(g) \leq deg(f) - 1$ である。また事実 1 から, $g(x)$ は $g(1) = 1$ と $g'(1) = 0$ を満たす。$deg(f)$ に関する帰納法から, ある 2 橋結び目 J s.t. $c_0(J; x) = g(x)$ が存在する。補題 1 から, ある 2 橋結び目 C s.t. a skein triple of C, $(L_+, L_-, L_0) \cong (J, C, O \cup C_b)$ かつ $lk(O, C_b) = b_n - n + 1$ が存在する。その時、$c_0(C; x) = f(x)$.

次に補題 2 を使うと, 互いに異なる無限個の 2 橋結び目 $\{J_m\}_{m \in N}$ with $u(J_m) \geq 1$, $c_0(J_m; x) = f(x)$ が存在することがわかる。(なぜなら $|g(J_m) - g(J_n)| \geq 3$ $(n \neq m)$)

最後に互いに異なる無限個の結び目解消数が 1 の 2 橋結び目 $\{C_m\}_{m \in N}$ s.t. $c_0(C; x) = f(x)$ が存在することを示す。

$h(x)$: ローラン多項式 s.t. $f(x) = x - (x-1)x^{-d}h(x)$. 事実 1 から, $h(x)$ は $h(1) = 1$ と $h'(1) = 0$ を満たす。よって、互いに異なる無限個の 2 橋結び目 J_m, s.t. $c_0(J_m; x) = h(x)$ が存在する。補題 1 を使うと、2 橋結び目 C_m s.t. skein triple, $(L_+, L_-, L_0) = (O, C_m, O \cup J_m)$ であり $lk(O, J_m) = d$ が存在する。だから C_m は結び目解消数が 1 の 2 橋結び目であり $c_0(C_m; x) = f(x)$ を満たす。互いに異なることは $g(C_m) = 2g(J_m) \pm 1$ $(m \in N)$ から容易にわかる。 □

定理 2,3 を示すためにある 3 橋結び目の族を 2 橋結び目から構成する。任意の 2 橋結び目 $C \cong C(2a_1, \cdots, 2a_{2n})$ に対して、図 4 に示した弧 τ を取り θ-カーブを作る。θ-カーブの 3 本の弧から 2 本選べば 1 つの結び目ができる。よって、θ-カーブから 3 つの結び目ができる。θ-カーブ, $C \cup \tau$, については、自明な結び目が 2 つと 2 橋結び目 C 1 つである。この θ-カーブから結び目 K を次のように構成する。$N(\gamma)$ 内の H-グラフ の代わりに $n_i/2$-タングルに置き換える。ただし n_i は $*$ での skein triple が、$(L_+, L_-, L_0) = (O, K, O \cup C)$, $lk(O, C) = i$ となるような整数 (参照 [8], 図 4)。一般に弧 τ は2橋結び目 C の lower tunnel と呼ばれている [1] この K を $K(2a_1, \cdots, 2a_{2n}; i)$ と表記する。

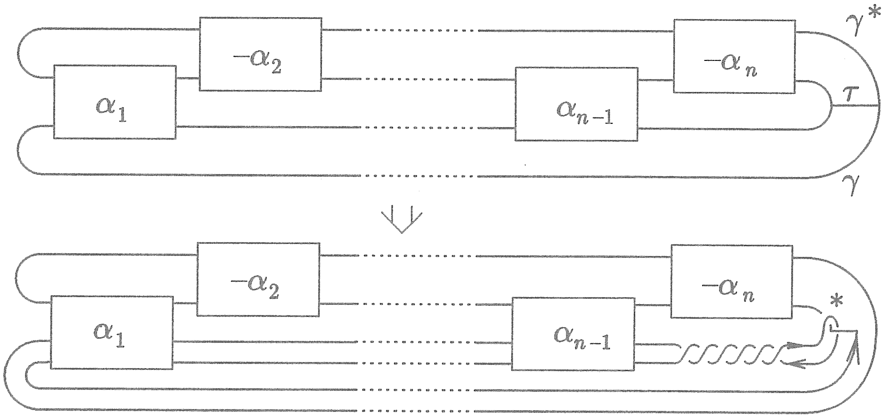


図 4:

$\mathcal{K} := \{K(2a_1, \cdots, 2a_{2n}; 0) | a_i \in Z\}$, $\quad \mathcal{K}_* := \{K(2a_1, \cdots, 2a_{2n}; i) | a_j, i \in Z\}$

結び目の族 $\mathcal{K}_*$ について次のことがわかる。定理 1 と $K \in \mathcal{K}_*$ の構成法から

命題 3 任意のローラン多項式 $f(x) \in Z[x, x^{-1}]$ *s.t.* $f(1) = 1$, $f'(1) = 0$ に対し，ある結び目 $K \in \mathcal{K}_*$ *s.t.* $c_0(K; x) = f(x)$ が存在する。

著者は次のことを示した。

命題 4 ([5]) $A(1) = 1$ と $A(t) \doteq A(t^{-1})$ を満たす，任意のローラン多項式 $A(t) \in Z[t, t^{-1}]$ に対して、アレキサンダー多項式が $A(t)$ となるような，3橋結び目 $K \in K_*$ が存在する。ここで、 $f(x) \doteq g(x) \iff f(x) = \pm t^n g(x)$, $n \in Z$.

定理 2 と 3 を証明するために次の結果を用いる。

命題 5 ([13]) K : 結び目, $\Sigma_2(K)$: S^3 の K を分岐集合とする二重被覆空間

もし K の結び目解消数が 1 ならば、$\Sigma_2(K) \cong K'(p)$ を満たすようなある強もろて型結び目 K' と奇数 p が存在する。

命題 6 (*Cyclic Surgery Theorem* [3]) K : トーラス結び目でない結び目

r : 有理数, $K(r)$: K 上 r-Dehn surgery して得られた 3 次元多様体

もし $K(r)$ の基本群 $\pi_1(K(r))$ が巡回群ならば、r は整数である。

命題 7 ([8]) K を結び目とする。その時、$-c_0^{(2)}(K;1)/2 = a_2(K)$.

命題 8 ([12]) K を結び目とする。その時、

$$P_0^{(3)}(K) \equiv 3(-2)^4 a_4(K) + 3(-2)^3 a_2(K)^2 \quad \mathrm{mod}(3 \cdot 2^5).$$

上の二つの結果から、

系 1 $c_0(K;x) = 1$ を満たす任意の結び目 K とする。その時 K のコンウェイ多項式は次の条件を満たす。$a_2(K) = 0,\ a_4(K) \overset{2}{\equiv} 0$.

命題 9 ([8]) 任意のアレキサンダー多項式が 1 の結び目 K は $c_0(K;1) = 1,\ c_0'(K;1) = c_0''(K;1) = 0$ と $c_0(K;-1) \overset{16}{\equiv} 1$ を満たす。

事実 2 (i) ローラン多項式 $C(z) \in Z(z^2)$ が $a_2 = 0$ と $a_4 \overset{2}{\equiv} 1$ を満たす

$\iff C(t^{1/2} - t^{-1/2}) = 1 + \sum_{i=0}^{n} \alpha_i (t^{1/2} - t^{-1/2})^4 (t^i + t^{-1}), (\alpha_i \in Z)$

(ii) ローラン多項式 $f(x)$ が $f(1) = 1,\ f'(1) = f''(1) = 0,\ f(-1) \overset{16}{\equiv} 1$ を満たす

$\iff f(x) = 1 + 2a(x-1)^3 + \sum_{i \in Z} b_i (x-1)^4 x^i, (a, b_i \in Z)$

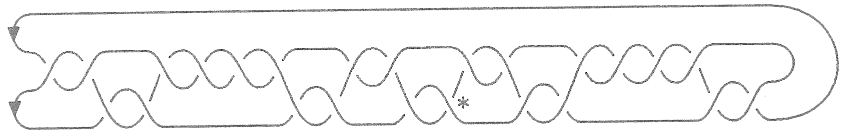
次の 2 つの補題から定理 2, 3 を得る。

補題 3 $c_0(K;x) = \Delta_K(t) = 1$ であるが、自明でない結び目 $K \in \mathcal{K}$ が存在する。

証明. 結び目として $K \cong K(2,-2,-2,4,-2,-2,2,2,-4,2;0)$ をとってくる。定理 1 の証明法から, $c_0(8_{14};x)=1$ がわかる, ここで、$8_{14}\cong C(2,2,-4,2)$. 2 橋結び目 $C \cong C(2,-2,-2,4,-2,-2,2,2,-4,2)$ の $c_0(C;x)$ を計算する。その時、C の $*$ での skein triple は $(8_{14}, C, 8_{14}\cup O)$, $lk(8_{14},O)=0$ である。よって、 $c_0(C;x)=1$ である. 故に $c_0(K;x)=1$ である。$K\in\mathcal{K}$ のアレキサンダー多項式は次の式で表すことができる。

$$\Delta_K(t)=1-\sum_{i=1}^{n}a_{2i}(t^{1/2}-t^{-1/2})^2(t^{\Sigma_{k=1}^{i}a_{2k-1}}+t^{-\Sigma_{k=1}^{i}a_{2k-1}})$$

よって、$\Delta_K(t)=1$ である。最後に、K が自明でない結び目 であることを示す。命題 5 と [13] から, $\Sigma_2(K)$ はある 2 橋結び目 K_2 上 $p/2$-Dehn surgery して得られる多様体である。ここで、 p : 奇数, $K_2\cong C(1,-4,2,-4,-1,-4,1,4,-2,4)$. 命題 2 を用いて K_2 を変形すると、$K_2\cong C(-2,4,2,\ldots)\not\cong \pm C(2,-2,\cdots,-2)$. 命題 6 を使って、$K_2$ はトーラス結び目でないことから$\pi_1(\Sigma_2(K))$ が巡回群でない。よって、K は自明でない結び目である。 □



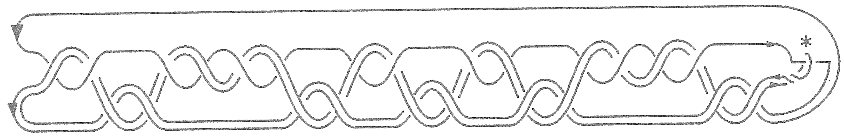
K≅ 

図 5:

補題 4 任意の結び目 $K\in\mathcal{K}$ に対し, 次のような結び目が存在する。$K_\alpha^\pm$, $K_\beta^\pm$, $K_\epsilon^\pm\in\mathcal{K}$ $\alpha\geq 0$, $\beta\in Z$ $s.t.$

$$\begin{cases} c_0(K_\alpha^\pm;x)=c_0(K;x), \\ \Delta_{K_\alpha^\pm}(t)-\Delta_K(t)=\pm(t^{1/2}-t^{-1/2})^4(x^\alpha+x^{-\alpha}), \quad \alpha\geq 0, \end{cases}$$

3 次数 4 のヴァシリエフ不変量

命題 10 ([6]) v_4 : 次数 4 のヴァシリエフ不変量は次の様に定まる。

$$v_4(K) = A_4 + B_4 a_2(K) + C_4 V_K^{(3)}(1) + D_4 a_2(K)^2 + E_4 a_4(K) + F_4 V_K^{(4)}(1),$$

ここで

$$\begin{bmatrix} A_4 \\ B_4 \\ C_4 \\ D_4 \\ E_4 \\ F_4 \end{bmatrix} = M_4 \begin{bmatrix} v_4(O) \\ v_4(3_1) \\ v_4(3_1!) \\ v_4(4_1) \\ v_4(5_1!) \\ v_4(5_2) \end{bmatrix}$$

with

$$M_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5/8 & 5/8 & 1/2 & -7/24 & 0 & -5/24 \\ 1/16 & 11/144 & -1/72 & 1/48 & 0 & -1/48 \\ 7/4 & 1 & 1/4 & 3/4 & 0 & -1/4 \\ -11/4 & 19/4 & -11/2 & -5/4 & 1 & -7/4 \\ 1/96 & 1/96 & 0 & -1/288 & 0 & -1/288 \end{bmatrix}$$

ここで、

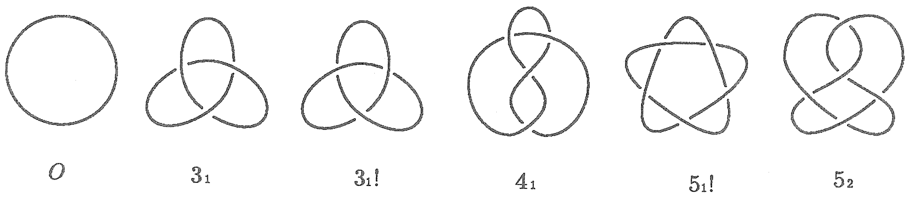


図 6:

$$\begin{cases} c_0(K^{\pm}_{\beta};x) - c_0(K;x) = \pm(x-1)^4 x^{\beta}, \\ \Delta_{K^{\pm}_{\beta}}(t) = \Delta_K(t), \qquad\qquad \beta \in Z \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_0(K^{\pm}_{\epsilon};x) - c_0(K;x) = 2(x-1)^3, \\ \Delta_{K^{\pm}_{\epsilon}}(t) = \Delta_K(t), \qquad\qquad \textit{respectively.} \end{cases}$$

証明. 結び目 $K \cong K(\boldsymbol{a};0)$ と仮定する, 結び目 $C^+_\alpha \cong C(\boldsymbol{a}, e_\alpha, 2, -4, 2, 2, -4)$ ととる, ここで、 $e_\alpha = -2\alpha - 2\sum_{i=1}^n a_{2i}$, $\alpha \geq 0$. 補題 2 から, $c_0(C^+_\alpha;x) = c_0(C;x)$ である. 2 橋結び目 C^+_α から associate された結び目 K^+_α を考える。

$$\begin{aligned} c_0(K^+_\alpha;x) &= 1-(x-1)x^0 c_0(C^+_\alpha;x) \\ c_0(K;x) &= 1-(x-1)x^0 c_0(C;x) \end{aligned}$$

故に $c_0(K^+_\alpha;x) - c_0(K;x) = 0$.

次にアレキサンダー多項式を計算すると (補題 3の証明参照)

$$\begin{aligned} \Delta_{K^+_\alpha}(t) - \Delta_K(t) &= (t^{1/2}-t^{-1/2})^2(t^{\alpha+1} - 2t^{\alpha-1} + t^{\alpha} + t^{-\alpha-1} - 2t^{-\alpha} + t^{-\alpha+1}) \\ &= (t^{1/2}-t^{-1/2})^4(t^{\alpha}+t^{-\alpha}). \end{aligned}$$

$K^{-1}_\alpha, K^{\pm}_\beta, K^{\pm}_\epsilon$ についても同様に示すことができる。 □

次のことが知られている。

$$P_0^{(2)}(K;1) = -8a_2(K)$$
$$P_0^{(3)}(K;1) = \frac{4}{3}V_K^{(3)} \ ([12]). \tag{1}$$
$$P_0^{(4)}(K;1) = 8a_2(K) + 96a_4(K) + \frac{4}{3}V_K^{(4)}.$$

$P_0(K;v)$ と $c_0(K;x)$ は次の関係にある。$P_0(K;v) = c_0(K;v^{-2})$.

$v = 1$ での微分をとると次の関係式を得る。

$$P_0^{(2)}(K;1) = 4c_0^{(2)}(K;1),$$
$$P_0^{(3)}(K;1) = -36c_0^{(2)}(K;1) - 8c_0^{(3)}(K;1), \tag{2}$$
$$P_0^{(4)}(K;1) = 300c_0^{(2)}(K;1) + 144c_0^{(3)}(K;1) + 16c_0^{(4)}(K;1).$$

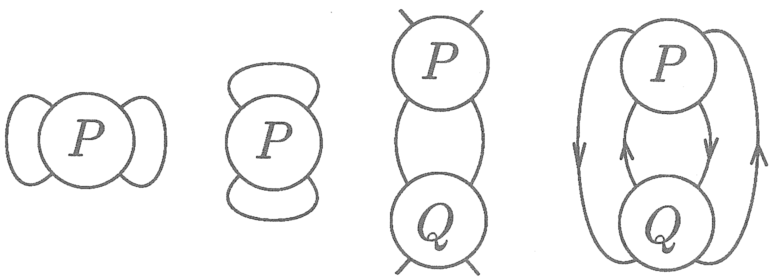
(1),(2) から

$$\begin{aligned} a_2(K) &= -c_0^{(2)}(K;1)/2, \\ V_K^{(3)} &= -27c_0^{(3)}(K;1) - 6c_0^{(2)}(K;1), \\ V_K^{(4)} &= 12c_0^{(4)}(K;1) + 108c_0^{(3)}(K;1) + 225c_0^{(2)}(K;1) - 6a_2(K) - 72a_4(K). \end{aligned}$$

を得る。以上のことから、次数 4 のヴァシリエフ不変量は、$c_0(K;x), a_4(K)$ から定まる不変量であることがわかる。また命題 1 から、

系 2 K, K' : 結び目 s.t. $P_0(K;v) = P_0(K';v)$. その時 $a_4(K) \overset{2}{\equiv} a_4(K')$.

P, Q タングルとする。$P+Q, P_N, P_D$ を次の図で定義する。



P_N　　P_D　　$P+Q$　　$(P+Q)_N$

命題 11 ([2]) P, Q をタングルとする。

$$\nabla_N(P+Q) = \nabla_N(P)\nabla_N(Q) + \nabla_D(P)\nabla_D(Q)$$

補題 5 任意の 2 橋結び目 $K \cong C(\boldsymbol{a})$ と 任意の整数 d に対して, ある 2 橋結び目 K' $s.t.$ $c_0(K; x) = c_0(K'; x)$ と $a_4(K) - a_4(K') = 2d$ が存在する。

証明. 結び目を次の様にとる。$C' \cong C(\boldsymbol{a}, 2\boldsymbol{e}_d, 2, -4, 2, 2, -4)$ $(d \in Z)$. その時、補題 ??から, $c_0(C; x) = c_0(C'; x)$ である。この事と $-c_0^{(2)}(C; 1)/2 = a_2(C)$ から, $a_2(C') = a_2(C)$ であることがわかる。a_4 については 命題 11 を用いると、

$$\begin{aligned}
\nabla_{C'}(z) &= \nabla_C(z)\nabla_{C(2\boldsymbol{e}_d,2,-4,2,2,-4)}(z) + \nabla_L(z)\nabla_{C(2,-4,2,2,-4)}(z) \\
&= \nabla_C(z)(1 + (4 - 2\boldsymbol{e}_d)z^4 + 4dz^6) + \nabla_L(z)(2z^3 + 4z^5 \\
&= (1 + a_2(C) + a_4(C) + \cdots)(1 + (4 - 2\boldsymbol{e}_d)z^4 + 4dz^6) \\
&\quad +(a_1(L)z + a_3(L)z^3 + \cdots)(2z^3 + 4z^5)
\end{aligned}$$

ここで、$L \cong C(2a_1, \cdots, 2a_{2n-1})$: 絡み目。

よって、$a_4(C') = a_4(C) + 4 - 2\boldsymbol{e}_d + 2a_1(L)$ を得る。 □

命題 3 と 補題 4,5 を用いると次の結果を得る。

定理 4 任意の結び目 K に対して, ある 2 橋結び目 J, 結び目解消数 1 の結び目 J' $s.t.$ $v_4(K) = v_4(J) = v_4(J')$ が存在する。

Concluding remark. 各 $K \in \mathcal{K}$ は次の条件を同時に満たす : (i) 橋指数 3 以下, (ii) (1, 1)-結び目 (よって K はトンネル数 1 の結び目), (iii) 結び目解消数 1 。[9,15,16] の結果を用いると次のことがわかる。結び目解消数 1 かつ橋指数 3 以下のの結び目 K は双曲的結び目または三葉結び目, 3_1 である。この事実と$\Delta_K(-1) = 1$ $(K \in \mathcal{K})$ から, 各 $K \in \mathcal{K}$ は双曲的結び目.

1.51

参考文献

[1] Bleiler, A., Moriah, Y.: *Heegaard splittings and branched coverings of B^3*, Math. Ann. **281** (1988), 531–543.

[2] Conway, J.: *An enumeratin of knots and links and some of their related properties.* In : Computational problems in Abstract Algebra (Oxford 1967). Pergamon Press (1970), pp 329–358.

[3] Culler, M., Gordon, C., Luecke, J., Shalen, P.: *Dehn surgery on knots*, Ann. of Math. **125** (1987), 237-300.

[4] Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lichorish, W. B. R., Millett, K. C., Ocneanu, A.: *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 239–246.

[5] Fujii, H.: *Geometric indices and Alexander polynomial of a knot, preprint*

[6] Kanenobu, T.: *Genus and Kauffman polynomial of a 2-bridge knot*, Osaka J. Math. **29** (1992), 635–651.

[7] Kanenobu, T., Miyazawa, Y.: *Link polynomials as Vassiliev-type invariants, preprint*

[8] Kawauchi, A.: *On coefficient polynomials of the skein polynomial of an oriented link*, Kobe J. Math. **11** (1994), 49–68.

[9] Kronheimer, F. B., Mrowka, T. S.: *Gauge theory for embedded surfaces, I*, Topology. **32** (1993), 773-826.

[10] Lickorish, W. B. R.: *The unknotting number of a classical knot*, Comtemp. Math. **44** (1985), pp. 117–121.

[11] Lickorish, W. B. R., Millett, K. C.: *A polynomial invariant of oriented links*, Topology. **26** (1987), pp. 107–141.

[12] Miyazawa, Y.: *The third derivative of the Jones polynomial, preprint*

[13] Montesinos, J. M.: *Surgery on links and double branched covers of S^3*, Ann. Math. Studies. **84** (1975), pp. 227–259.

[14] Przytycki, J. H., Traczyk, P.: *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1987), 115–189.

[15] Scharlemann, M.,Thompson, A.: *Unknotting number, genus, and companion tori*, Math. Ann. **280** (1988), 191-205.

[16] Schubert, H.: *Über eine numerische Knoteninvariante*, Math. Z. **61** (1954), 245-288.

3次元多様体及び結び目の Reidemeister torsion について

北野 晃朗

東京工業大学理学部 数学教室

July, 1995

0. 序。

Reidemeister torsion は、同じ次元のホモトピー同値な多様体をいかにして区別するかという問題に対して答えるために１９３０年代に、Reidemeister, Franz, de Rham らによって導入された古典的な PL 不変量です。Lens 空間の分類や PL トポロジーの基本予想、単純ホモトピー理論、S 同境理論に重要な役割を果たしてきました。

この不変量は多様体の基本群から然るべき群への表現を１つ指定した時定義されるので、Reidemeister torsion を多様体の不変量として考えるためには表現する群を指定したとき基本群の表現すべてを考える必要があります。すなわち Reidemeister torsion は、表現全体の空間の上の関数（または表現全体の空間上のあるベクトル束の切断）となります。もともと Reidemeister torsion は多様体の単体分割、あるいは胞体分割を使って定義されました。

その後、１９７０年代になってから Ray-Singer[R-S] によって、リーマン多様体のラプラシアンのゼーター関数を使って解析的な torsion 不変量が (analytic torsion) 定義されました。この二つが一致することが Cheeger[Ch], Muller[Mu1,2] らによって証明されています。この解析的な表示によって Reidemeister torsion は数理物理、大域解析学、力学系 ([S]、[W1,2]、[Fri]) と結びつき様々な立場で研究されています。この解析的な表示 analytic torsion は思想的には大変重要ですが、具体的な計算はほとんどできません。Gauss-Bonnet の定理が有るからと言ってオイラー数の計算をするのに曲率の積分を計算する人がほとんどいないのと同様です。torsion を具体的に計算をしよう、その値を考えようとすると組み合わせ的に Reidemeister torsion を考えることになります。

この講演では、考える対象を３次元多様体, 及び、３次元球面の中の結び目の外部に話を限り話を進めます。また特に基本群の $SL(2;\mathbb{C})$-表現に付随した Reidemeister torsion について報告したいと思います。

1. Reidemeister torsion。

この節では Reidemeister torsion の定義を述べます。以下、V を $\mathbf{F}$ 上の n 次元線形空間とします。2 つの Vの基底

$$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n),$$

$$\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$$

をとります。このとき、$c_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_j$ とおくことによって行列 $A = (a_{ij})$ が定まります。この行列 A の行列式を $[\mathbf{b}/\mathbf{c}]$ と書くことにします。

まず鎖複体の torsion 不変量を定義しましょう。

$$C_* : 0 \longrightarrow C_m \xrightarrow{\partial_m} C_{m-1} \xrightarrow{\partial_{m-1}} \cdots \longrightarrow C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \longrightarrow 0$$

を $\mathbf{F}$ 上有限次元線形空間の非輪状鎖複体とします。

ここで各 $C_q(C_*)$ において 基底 $\mathbf{c}_q$ が与えられているとします。さらに、$B_q(C_*)$ 上の基底 $\mathbf{b}_q$ とその $C_{q+1}(C_*)$ への持ち上げ$\tilde{\mathbf{b}}_q$ をとります。

非輪状性より $B_q(C_*) \to Z_q(C_*)$ は同型なので、最初にとった基底 $\mathbf{b}_q$ はそのまま $Z_q(C_*)$ の基底を与えます。同様にして完全系列

$$0 \to Z_q(C_*) \to C_q(C_*) \to B_{q-1}(C_*) \to 0$$

によって、$(\mathbf{b}_q, \tilde{\mathbf{b}}_{q-1})$ は、$C_q(C_*)$ の基底を与えます。このときこれらの基底の変換行列の行列式 $[\mathbf{b}_q, \tilde{\mathbf{b}}_{q-1}/\mathbf{c}_q]$ が持ち上げ$\tilde{\mathbf{b}}_{q-1}$ の取り方によらないことは容易に示されるので、単に $[\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]$ と書くことにします。

定義 1.1. 非輪状鎖複体 C_* の *torsion* $\tau(C_*)$ を

$$\prod_{q=0}^{m} [\mathbf{b}_q, \mathbf{b}_{q-1}/\mathbf{c}_q]^{(-1)^{q+1}}$$

と定義する。

注. $\tau(C_*)$ は、基底 $\mathbf{b}_0, \ldots, \mathbf{b}_m$ の取り方によりません。

続いて、有限胞体複体の torsion を以下のように定義します。まず、

$$X: \text{ 有限胞体複体、 } \tilde{X} : X \text{ の普遍被覆空間}$$

とします。そのとき、基本群$\pi_1 X$ が、被覆変換として作用します。胞体近似定理によってこの作用は胞体的とします。それによって、胞体分割から決まる鎖複体 $C_*(\tilde{X}; \mathbf{Z})$ には $\mathbf{Z}[\pi_1 X]$-加群の鎖複体の構造が入ります。

$$\rho : \pi_1 X \to SL(n; \mathbf{F})$$

を表現とします。このρ によって、Vには $\pi_1 X$-加群の構造が入り、この構造は、ρ に依存しているので特に V_ρと書くことにします。ここで V_ρ-係数の鎖複体 $C_*(X;V_\rho)$ を $C_*(\tilde{X};\mathbf{Z})\otimes_{\mathbf{Z}[\pi_1 X]} V_\rho$ と定義します。さらに、$C_q(X;V_\rho)$ の基底を次のように定めます。

$$\{\sigma_1\otimes e_1, \sigma_1\otimes e_2, \ldots, \sigma_1\otimes e_n, \ldots, \sigma_{k_q}\otimes e_1, \ldots, \sigma_{k_q}\otimes e_n\}$$

但し、$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ は V の基底。そして、$\sigma_1, \ldots, \sigma_{k_q}$ は $C_q(\tilde{X};\mathbf{Z})$ の $\mathbf{Z}[\pi_1 X]$-加群としての基底を与える q-次元胞体。

ここで、次のような状況を考えます。鎖複体 $C_*(X;V_\rho)$ は、非輪状だとします。すなわち、全ての次元のホモロジー群 $H_*(X;V_\rho)$ は消えている。この時、表現　ρを非輪状表現と呼びます。

定義 1.2. $\rho:\pi_1 X\to SL(n;\mathbf{F})$ を非輪状表現 とします。この時、Xの V_ρ-係数の *Reidemeister torsion* $\tau(X;V_\rho)$ を、鎖複体 $C_*(X;V_\rho)$ の *torsion* として定義します。以下単に$\tau_\rho(X)$ と書くことにします。

注. *Reidemeister torsion* は、*up to* ± 1 で *PL* 不変量であることが良く知られています。特に考えている基本群の表現が偶数次元表現の時 *Reidemeister torsion* は符号を込めて *well-defined* になります。したがって以下偶数次元表現を主に考えます。

記号. 以下、基本群の表現　ρが与えられた時、任意の元 x のρによる像$\rho(x)$ のことを簡単のため、大文字の Xで書くことにします。

2. 具体例。

いくつか具体例について見てみましょう。

例 1．ソリッドトーラス $S=S^1\times D^2$。
基本群　$\pi_1(S)$ は整数全体 $\mathbf{Z}$ と同一視し、その生成元を x とします。表現

$$\rho:\pi_1(S)\to SL(2n;\mathbf{C})$$

が、非輪状であるための必要十分条件は $det(X-I)\neq 0$ で、その時 *Reidemeister torsion* は

$$\tau_\rho(S)=det(X-I).$$

例 2．2次元トーラス T^2。
表現　$\rho:\pi_1(T^2)\to SL(2n;\mathbf{C})$ にたいして、ρが非輪状であるための必要十分条件は $det(X-I)\neq 0$ となる $x\in\pi_1(T^2)$ が存在すること。特に、この時 *Reidemeister torsion* は

$$\tau_\rho(T^2)=1.$$

例 3．3次元レンズ空間 $L(p,q)$。
$p>q$を互いに素な正の整数とします。そして、$\pi=<t|t^p>$ を t で生成される位数 p の巡回群とします。ここで3次元球面を

$$S^3=\{(z_1,z_2)\in\mathbf{C}^2 \mid |z_1|^2+|z_2|^2=1\}$$

と考えて標準的な向きを入れておきます。$\omega = exp(\frac{2\pi\sqrt{-1}}{p})$ とします。群 π は S^3 の上に以下のように自由に作用します。

$$t \cdot (z_1, z_2) = (\omega z_1, \omega^q z_2).$$

この商多様体 S^3/π をレンズ空間と呼び $L(p,q)$ と書きます。$L(p,q)$ には S^3 から自然な向きと計量が入ります。また基本群は π と同一視でき生成元は t と見なすことができます。また $L(p,q)$ には 4 つのセル

$$\bar{u}_0, \ldots, \bar{u}_4$$

で CW-複体の構造が入ります。これら 4 つのセルは S^3 の上で以下のように u_0, u_1, u_2, u_3 を定義しそれらの像として定義します。

(0) $u_0 = (1, 0)$.

(1) $u_1 = \{(exp(\theta\sqrt{-1}), 0) \mid 0 < \theta < \frac{2\pi}{p}\}$.

(2) $u_2 = \{(z_1, \sqrt{1 - |z_1|^2}) \mid |z_1| < 1\}$.

(3) $u_3 = \{(z_1, exp(\theta\sqrt{-1})\sqrt{1 - |z_1|^2} \mid |z_1| < 1, 0 < \theta < \frac{2\pi}{p}\}$.

　これにより $L(p,q)$ に胞体分割を与え、$C_*(\tilde{L}(p,q); \mathbf{Z})$ に自由 $\mathbf{Z}[\pi]$-加群の構造が入ります。境界作用素は

$$\begin{aligned}
\partial_1 \bar{u}_1 &= (t-1)\bar{u}_0. \\
\partial_2 \bar{u}_2 &= (1 + t + \cdots + t^{p-1})\bar{u}_1. \\
\partial_3 \bar{u}_3 &= (t^r - 1)\bar{u}_2.
\end{aligned}$$

です。但し、r は $q \cdot r \equiv 1 \ mod\, p$ を満たす整数です。

$$\rho : \pi \to SL(2; \mathbf{C})$$

を$\rho(t) = \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} \end{pmatrix}$ で定まる表現とします。但し、t はπの生成元です。$1 + \omega + \cdots + \omega^{p-1} = 0$ により、$C_*(L(p,q); V_\rho)$ に於ける境界作用素は任意の Vのベクトル v に対して、

$$\begin{aligned}
\partial_1(v \otimes \bar{u}_1) &= \begin{pmatrix} \omega & 0 \\ 0 & \bar{\omega} - 1 \end{pmatrix} v \otimes \bar{u}_2 \\
\partial_2(v \otimes \bar{u}_2) &= 0 \\
\partial_3(v \otimes \bar{u}_3) &= \begin{pmatrix} \omega^{r-1} & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^r - 1 \end{pmatrix} v \otimes \bar{u}_2
\end{aligned}$$

となります。以上により、$C_*(L(p,q); V_\rho)$ は非輪状鎖複体となり、*Reidemeister torsion* $\tau_\rho(L(p,q))$ は自明ではありません。鎖複体の基底 $\mathbf{c}_m (m = 0, \ldots, 3)$ を以下の様にとり

ます。

$$\begin{aligned}
\mathbf{c}_3 &= \{e_1 \otimes \bar{u}_3, e_2 \otimes \bar{u}_3\} \\
\mathbf{c}_2 &= \{e_1 \otimes \bar{u}_2, e_2 \otimes \bar{u}_2\} \\
\mathbf{c}_1 &= \{e_1 \otimes \bar{u}_1, e_1 \otimes \bar{u}_1\} \\
\mathbf{c}_0 &= \{e_1 \otimes \bar{u}_0, e_2 \otimes \bar{u}_0\}
\end{aligned}$$

但し $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ は V の標準的な基底。さらに、

$$\begin{aligned}
\mathbf{b}_2 &= \{(\omega^r - 1)e_1 \otimes \bar{u}_2, (\bar{\omega}^r - 1)e_2 \otimes \bar{u}_2\}. \\
\mathbf{b}_1 &= \{0\}. \\
\mathbf{b}_0 &= \{(\omega - 1)e_1 \otimes \bar{u}_0, (\bar{\omega} - 1)e_2 \otimes \bar{u}_0\}
\end{aligned}$$

とおきます。これによりレンズ空間 $L(p,q)$ の *Reidemeister torsion* は

$$\begin{aligned}
\tau_\rho L(p,q)) &= [\mathbf{b}_2/\mathbf{c}_3]^{-1} \cdot [\mathbf{b}_2/\mathbf{c}_2] \cdot [\mathbf{b}_1/\mathbf{c}_1]^{-1} \cdot [\mathbf{b}_0/\mathbf{c}_0] \\
&= det\begin{pmatrix} \omega^r - 1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega}^r - 1 \end{pmatrix} \cdot det\begin{pmatrix} \omega - 1 & 0 \\ 0 & \bar{\omega} - 1 \end{pmatrix} \\
&= (\omega^r - 1)(\bar{\omega}^r - 1)(\omega - 1)(\bar{\omega} - 1) \\
&= (2 - (\omega^r + \bar{\omega}^r))(2 - (\omega + \bar{\omega})) \\
&= 4(1 - \cos\frac{2\pi}{p})(1 - \cos\frac{2\pi r}{p})
\end{aligned}$$

となります。この結果を $L(7,1)$ と $L(7,2)$ に当てはめてみましょう。ここで、$L(7,1)$ と $L(7,2)$ はホモトピー同値であることが知られています。これらの *Reidemesiter torsion* は

$$\begin{aligned}
\tau(L(7,1)) &= 4(1 - \cos\frac{2\pi}{7})^2, \\
\tau(L(7,2)) &= 4(1 - \cos\frac{2\pi}{7})(1 + \cos\frac{\pi}{7})
\end{aligned}$$

となり、*Reidemeister torsion* は $L(7,1)$ と $L(7,2)$ を区別します。したがって $L(7,1)$ と $L(7,2)$ は *PL* 同型ではないことがわかりました。(よって位相同型でない。)

3. Seifert fibered space の Reidemeister torsion。

以下、M^3を向き付け可能な Seifert fibered space で、その Seifert index は

$$\{b,(o,g);(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_m,\beta_m)\}$$

とする。Seifert index により、Mの基本群は以下で与えられます。

$$\begin{aligned}\pi_1 M = \langle a_1,b_1,\ldots,a_g,b_g,q_1,\ldots,q_m,h \mid &[a_i,h]=[b_i,h]=[q_j,h]=1,\\ &q_j^{\alpha_j}h^{\beta_j}=1, q_1\ldots q_m[a_1,b_1]\ldots[a_g,b_g]=h^b\rangle.\end{aligned}$$

Johnson[J] は、Reidemeister torsion を SL(2;**C**)-既約表現に対して考えてその計算を Brieskorn ホモロジー球面の場合に実行しています。

この結果をさらに拡張して、次の定理が得られました。

定理 3.1[北野 1]. $\rho:\pi_1 M\to SL(2;\mathbf{C})$ を既約表現とします。その時、*Reidemeister torsion* $\tau_\rho(M)$ は、以下で与えられる。

$$\tau_\rho(M)=\begin{cases}0 & H=I\text{の時、}\\ 2^{4-m-4g}\prod_{i=1}^{m}(1-(-1)^{\nu_i}\cos\frac{\rho_i k_i(\rho)\pi}{\alpha_i}) & H\neq I\text{の時、}\end{cases}$$

但し

(1) $H=\rho(h)$,
(2) ρ_i,ν_iは整数で　$\alpha_i\nu_i-\beta_i\rho_i=-1$ かつ $0<\rho_i<\alpha_i$,
(3) $k_i(\rho)$ は整数で $0\le k_i\le\alpha_i$かつ $k_i(\rho)\equiv\beta_i \quad mod2$。

特に、注意すべき結果として一般的には SL(2;**C**)-表現全体の空間の次元は正となるが、連続的に表現を動かしたとしても Reidemeister torsion の取り得る値は有限個でしかもすべて実数になることがわかりました。(一般に定義からは複素数となる。)

この結果はさらに Seifert fibered space のなかで、特に S^1-作用の orbit として得られる曲面の種数が 1 以上の場合に一般の $SL(n;\mathbf{C})$-既約表現に対して拡張できました。$\rho:\pi_1 M\to SL(n;\mathbf{C})$ を既約表現とします。この時表現　ρの既約性から、1 の n 乗根λが存在して

$$H=\rho(h)=\lambda I$$

と書けます。さらに、$Q_j=\rho(q_j)$ の固有値を

$$e_{j,1},\ldots,e_{j,n}$$

と書きます。その時以下の結果が得られました。

定理 3.2[北野 4]. *Reidemeister torsion* $\tau_\rho(M)$ は、以下で与えられる。

$$\tau_\rho(M) = (\lambda - 1)^{n(2-2g-m)} \prod_{j=1}^{m} (\lambda^{\nu_j} e_{j,1} - 1) \ldots (\lambda^{\nu_j} e_{j,n} - 1)$$

但しμ_j, ν_jは整数で$\alpha_j \nu_j - \beta_j \mu_j = -1$ かつ $0 < \mu_j < \alpha_j$.

注.

(1) 奇数次元表現$\rho : \pi_1 M \to SL(2n+1; \mathbf{C})$ に対して、*Reidemeister torsion* は± 1 倍を除いて *well defined* になります。ですから、上の式はその任意性を除いて成立します。

(2) $\tau_\rho(M)$ の値は $\{\rho(a_1) = A_1, \rho(b_1) = B_1, \ldots, \rho(a_g) = A_g, \rho(b_g) = B_g\}$ に依りません。

これらの結果は Mを特異ファイバーの環状近傍とその補空間に分解してそれぞれの部分で Reidemeister torsion を計算して最後にそれらから全体を計算することにより得られます。これを代数的に保証しているのが以下の補題です。

補題 3.3. 基底 $\{\mathbf{c}'_i\}, \{\mathbf{c}_i\}, \{\mathbf{c}''_i\}$ の与えられている n 次元鎖複体の完全系列

$$0 \to C'_* \to C_* \to C''_* \to 0$$

において今すべての i に対して、$[\mathbf{c}'_i, \mathbf{c}''_i / \mathbf{c}_i] = 1$ を満たすとします。この時、もし 3 つのうちの 2 つの鎖複体が非輪状であるならば、残りの複体も非輪状で *torsion* は *well-defined* で以下を満たします。

$$\tau(C_*) = (-1)^{\sum_{i=0}^{n} \beta'_{i-1} \beta''_i} \tau(C'_*) \tau(C''_*)$$

但し、$\beta'_i = dim \partial C'_{i+1}, \quad \beta''_i = dim \partial C''_{i+1}$.

一般に Seifert fibered space の基本群の $SL(n; \mathbf{C})$-既約表現の共役類全体の空間の次元はゼロではありません。従って、既約表現の共役類は無限個存在します。しかしながら、上記の定理により Reidemeister torsion は、表現の共役類のなす空間の各連結成分上定数関数になります。この結果より次のことが問題となる。

問題. 連続的に基本群の $SL(n; \mathbf{C})$-表現を動かした時に、*Reidemeister torsion* が連続的に変化する 3 次元多様体は存在するか？また、複素数値を取るものは存在するか？

これに対して、3 次元球面の中の 8 の字結び目の Reidemeister torsion を実際に計算することにより次のような具体例を構成しました。

定理 3.4[北野 2]. 8 の字結び目の外部のダブルを考えると、$SL(2; \mathbf{C})$-表現に対する *Reidemeister torsion* は複素数全体を連続的に変化する。

この具体例は Riley の手法 [R] を使って 8 の次結び目の $SL(2; \mathbf{C})$-既約表現全体の空間のパラメーター表示を与えてそれを使って計算することにより得られました。

4. S^1 上の曲面束の Reidemeister torsion。

Σ_gを種数 gの向き付けられた閉曲面とします。前節の最後で述べた Reidemeister torsion が複素平面全体を動く例として挙げた多様体は S^1上のΣ_2束の構造を持っています。そこで、一般に曲面束の構造を持った3次元多様体の Reidemeister torsion について考察してみましょう。一般に全ての曲面束は曲面の微分同相写像により以下のようにして得られます。

$$f : \Sigma_g \to \Sigma_g$$

を向きを保つ微分同相写像とします。その時、3次元多様体 M_fを次のように定義します。

$$M_f = \Sigma_g \times [0,1]/ \sim$$

但し、$\sim$は任意の $x \in \Sigma_g$ に対して、$(x,1)$ と $(f(x),0)$ を同一視することを意味します。そして自然な射影を

$$\pi : M_f \to S^1 = [0,1]/ \sim$$

とします。容易に M_fの基本群は次の表示を持つことがわかります。

$$\pi_1 M_f =< a_1, b_1, \ldots, a_g, b_g, t \ |ta_i t^{-1} = f_*(a_i), tb_i t^{-1} = f_*(b_i) \ >$$

ただし、$f_* : \pi_1\Sigma_g \to \pi_1\Sigma_g$ は fの誘導する基本群上の準同型です。この表示の下で

$$T =< t > \subset \pi_1 M_f$$

を $\pi_1 S^1$と同一視します。自然な射影$\pi : M_f \to S^1$ から表現

$$\alpha : \pi_1 M_f \to T$$

を得ます。ここで Tを $\mathbf{Q}$ の1変数有理関数体 $\mathbf{Q}(t) - \{0\}$ の部分集合と考えて

$$\alpha : \pi_1 M_f \to T$$

を $\mathbf{Q}(t)$ 上の表現とみなします。この表現に対する Reidemeister torsion を考えてみましょう。この場合鎖複体 $C_*(M_f; \mathbf{Q}(t)_\alpha)$ は非輪状で、その Reidemaister torsion

$$\tau_\alpha(M_f) \in \mathbf{Q}(t) - \{0\}$$

は M_fの Alexander 多項式 [河内] と本質的には一致し fの $Sp(2g;\mathbf{Z})$ における像の特性多項式になります。

より一般の非可換表現に対する Reidemeister torsion に関してはこれからの研究課題の一つです。特に3次元多様体の幾何構造との関連は重要なです。例えば、双曲的多様体の $SL(2;\mathbf{C})$-表現の Reidemeister torsion やあるいは双曲構造が S^1上のトーラス束の余次元2の双曲的葉層構造に退化したときの Reidemeister torsion の振る舞いはどのようになっているかなどは興味深い問題です。

5. 結び目の Reidemeister torsion と Twisted Alexander 多項式。

1992 年に和田氏（奈良女大）[和田] によって、任意の有限表示群に対して Twisted Alexander 多項式が定義されました。この節では結び目群に対してこれを考えます。以下、

$$K \subset S^3 : \text{ 結び目、 } E : \text{ その外部}$$

$$\Gamma = \pi_1 E : K \text{ の結び目群}$$

$$\alpha : \Gamma \to T =< t >: \text{ 自然なアーベル化}$$

とします。さらに、簡単のためにΓの実数体 $\mathbf{R}$ 上の $SL(n;\mathbf{R})$-表現のみを考えることとします。この不変量は、Γ の $SL(n;\mathbf{R})$-表現　ρ が与えられた時 $\mathbf{R}$-係数の Laurent 多項式$\Delta_{K,\rho}(t)$ として定義されます。そして、この Twisted Alexander 多項式は次の意味で古典的な Alexander 多項式$\Delta_K(t)$ の一般化となります。

$$\Delta_K(t) = (1-t)\Delta_{K,\mathbf{1}}(t)$$

但し $\mathbf{1} : \Gamma \to \mathbf{R} - \{0\}$ は 1 次元の自明な表現です。

古典的な Alexander 多項式に関して 1962 年に, Milnor [M i2] は次の定理を証明しました。

定理 5.1. *K の Alexander 多項式$\Delta_K(t)$ は E の αに対する Reidemeister torsion $\tau_\alpha(E)$ である。但し、結び目群のアーベル化$\alpha : \Gamma \to T$ を 1 変数有理関数体 $\mathbf{R}(t)$ 上の表現とみなす。*

ここで、次の自然な問いが考えられます。

問題. *K の Twisted Alexander 多項式は、K の外部 E の Reidemeister torsion として解釈できるか？*

ここで表現 $\rho : \Gamma \to SL(n;\mathbf{R})$ に対して、次のようなテンソル表現

$$\rho \otimes \alpha : \Gamma \to GL(n;\mathbf{R}(t))$$

を

$$(\rho \otimes \alpha)(x) = \rho(x)\alpha(x)$$

として定義します。この時、次の定理が成り立ちます。

定理 5.2[北野 3].

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \tau_{\rho\otimes\alpha}E.$$

この定理の応用として、SO(n)-表現の場合の Twisted Alexander 多項式の係数の対称性が示されます。これは古典的な Alexander 多項式において

$$\Delta_K(t) = \Delta_K(t^{-1})$$

が$\pm t^m$倍を除いて成立することの拡張です。

定理 5.3[北野 3]. もし、ρ が $SO(n)$-表現と共役ならば、そのとき

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \Delta_{K,\rho}(t^{-1})$$

が、$\pm t^{nk}$ 倍を除いて成り立つ。

古典的な Alexander 多項式は結び目群の不変量ですが、それを結び目の外部の位相不変量である Reidemeister torsion と同一視することにより様々な性質が得られました。例えば Alexander 多項式はそのままでは cut & paste の議論にはのりませんが、Reidemeister torsion と思えば cut & paste の議論にはのります。また逆に Reidemeister torsion を Alexander 多項式と思えば基本群だけから計算することができます。Twisted Alexander 多項式の場合においても Reidemeister torsion とうまく使い分けることにより様々な性質が得られることが期待されています。[T] に述べられていることがどこまで Twisted Alexander 多項式の場合に成り立つかこれからの課題です。

参考文献。

[Ch] J. Cheeger, Analytic torsion and the heat equation. Ann. of Math. **109** (1979), 259–322.

[Co] M. M. Cohen, A course in simple homotopy theory, GTM **10**, Springer-Verlag (1973).

[Fre] D. Freed, Reidemeister torsion, spectral sequence, and Brieskorn spheres, J. reine angrew. Math. **429** (1992), 75–89.

[Fri] D. Fried, Counting Circles, Lect. Notes in Math. 1342, Springer (1988), 196–215.

[J] D. Johnson, A geometric form of Casson invariant and its connection to Reidemeister torsion, unpublished lecture notes.

[河内] A. Kawauchi, On Quadratic Forms of 3-manifolds, Inv. Math. **43** (1977), 177–198.

[北野 1] T. Kitano, Reidemeister torsion of Seifert fibered spaces for SL(2;**C**) representations, Tokyo J. of Math. **17** (1994), 59–74.

[北野 2] T. Kitano, Reidemeister torsion of the figure-eight knot exterior for $SL(2;\mathbf{C})$-representations, Osaka J. of Math. **31** (1994), 523–532.

[北野 3] T. Kitano, Twisted Alexander polynomial and Reidemeister torsion. To appear in Pacific J. Math.

[北野 4] T. Kitano, On the Reidemeister torsion of Seifert fibered spaces for $SL(n;\mathbf{C})$-representations. Preprint.(1994).

[Mi1] J. Milnor, Two complexes which are homeomorphic but combinatorially distinct. Ann. of Math. **74** (1961), 575–590.

[Mi2] J. Milnor, A duality theorem for Reidemeister torsion. Ann. of Math. **76** (1962), 137–147.

[Mi3] J. Milnor, Whitehead torsion. Bull. Amer. Math. Soc. **72** (1966), 348–426.

[Mu1] W. Muller, Analytic torsion and R-torsion of Riemannian manifolds. Adv. in Math. **28** (1978), 233–305.

[Mu2] W. Muller, Analytic torsion and R-torsion for unimodular representations. J. AMS. **6** (1993), 721–753.

[P] J. Pori, Torsion de Reidemeister pour les varietes hyperboliques. These, L'universite Paul Sabatier de Toulouse (1994).

[R-S] D. B. Ray and I. M. Singer, R-torsion and the Laplacian on Riemannian manifolds, Adv. in Math. **7** (1971), 145–210.

[R] R. Riley, Nonabelian representations of 2-bride knot groups. Quar. J. Oxford (2). **35** (1984), 191–208.

[S] A. Schwartz, The partition function of degenerate quadrtic functional and Ray-Singer invariants. Lett. Math. Phys. **2** (1978), 247–252.

[T] V. G. Turaev, Reidemeister torsion in knot theory. Russian Math. Surveys **41** (1986), 119–182.

[和田] M. Wada, Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups. Topology **33** (1994), 241–256.

[W1] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial. Commun. Math. Phys. **121** (1989), 351–400.

[W2] E, Witten, On Quantum gauge theories in two dimensions. Commun. Math. Phys. **141** (1991), 153–209.

Department of Mathematics,
Tokyo Institute of Technology,
Oh-okayama, Meguro, Tokyo 152,
e-mail:kitano@math.titech.ac.jp

シンプレクティック幾何における特異点論

石川 剛郎　（いしかわ　ごうお、北大・理）

１９９５年5月１６日

1　イントロダクション

正則性の概念のあるところには必ず特異点論があります。

通常の多様体の微分トポロジーでは陰関数の定理が基本的な正則性定理です (§2)。それがなければ、可微分写像の特異点論は生まれませんでした。

シンプレクティック幾何にも正則性定理があります。比較的最近ギヴェンタリによって見つけられた相対ダルブーの定理がそれにあたります (§3)。相対ダルブーの定理によれば、シンプレクティック多様体の部分多様体は、そこへのシンプレクティック形式の引き戻しによって局所的には決まってしまうという柔らかな性質をもちます。この意味でシンプレクティック幾何は特異点論とよくなじみ、シンプレクティック幾何における特異点論が生育する余地があります。

実際、これからお話しようとしているのは、シンプレクティック幾何における一般化された局所部分多様体論です。ただし、話を非特異なものに限るというのは、特異点論的に見るともちろん不自然なので、特異点をもった部分多様体、あるいはそのパラメトリゼーションをあつかいます。

さて、シンプレクティック幾何における特異点論を作るとき、ひな型になるのは、やはりホイットニー・トム・マザーたちによる可微分写像の特異点論ということになります。その可微分写像の特異点論において基本的なテーマに構造安定性がありました。シンプレクティック幾何においても、相対ダルブーの定理にもとづいて、安定性すなわちシンプレクティック安定性が自然に定義できます (§4)。

マザーは、写像の安定性をヴェクトル場に関する線形条件、すなわち、無限小安定性に帰着しました。同じことをシンプレクティック安定性に対し試みてみます (§5)。このときまず問題になるのは、考えている写像空間が非特異かどうかです。非特異でないと問題を線形化するのは無理筋です。調べてみると、それには、写像のコランクの条件が必要なことがわかってきました。

シンプレクティック多様体への写像がアイソトロピックとはシンプレクティック形式の引き戻しが零になるときにいいます。今回のはなしの主人公はアイソトロピック写像です。アイソトロピック写像はここでは2役を演じます。時には考察する対象として、そして時には証明の基本的道具として。アイソトロピック写像はラグランジュ部分多様体の拡張概念ですが、特異点論的にも無限小安定性と関連して自然な対象であることがわかってきました。そして、アイソトロピック写像のシンプレクティック安定性やラグランジュ安定性にたいしてマザー型の特徴づけを得ました (§6)。

マザー理論では、マザーの代数機械が威力を発揮したわけですが、そのためには、写像空間の接空間に、ある種の代数構造、すなわち、関数空間上の加群構造が必要でした。それは、シンプレクティック安定性についてやラグランジュ安定性についてはクリアできました (§7)。これには、分岐加群という概念 [11, 12] が必要だったのですが、実はこれは、筆者の修士論文 [10] で全く異なる文脈であつかっていたものでした。

ところで、特異点論とは何でしょうか。特異点論は、様々な対象の特異性の構造、および、対象全体の空間内の特異なもののなす部分空間すなわち分岐集合の構造を調べます。

分岐集合の例 : (1) 1変数多項式の空間 $P_k = \{x^{k+1} + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k\}$ を考えます。P_k の中で、$F(x) = 0$ が少なくとも $\ell + 1$ 重根を持つもの全体を Σ_ℓ と表します。すると、フィルトレーション $P_k \supset \Sigma_1 \supset \Sigma_2 \supset \cdots$ が得られます。特異性にも深い浅いがあるわけです。とくに Σ_1 を k 次元スワローテイル（燕尾）と呼びます。また、P_{2k} 内の Σ_k つまり 少なくとも $k+1$ 重根をもつものの全体を k 次元オープン・スワローテイル（開燕尾）とよびます。(2) 同じことを2変数多項式の空間で考えます。分岐集合は、対応する実代数曲線が特異点を持つもの全体になります。分岐集合は空間を分割し、実代数曲線のトポロジーは分岐集合を通過するときに変化します。したがって、分岐集合の構造と実代数曲線自身のトポロジーは密接に関係します。（この哲学は、生産的でもあり、いろいろな対象、たとえば、結び目や平面曲線などに対し、具体的成果をあげつつあります。）(3) 趣の異なる次のような例もあります。3次元アフィ

ン空間内に曲線をとると空間が変容し、空間の点が、そこから曲線に接線を引けるか引けないかで差別化されます。このばあい分岐集合は、曲線の接線の織りなす曲面すなわちデベロッパブル（可展開面）ということになります。

さて、対象としてのアイソトロピック写像は具体的にはつぎのようなものです：k 次元オープン・スワローテイルのコノーマル・バンドルを $2k$ 次元オープン・ホイットニー・アンブレラあるいはオープン・ケーレー・ホイットニー・モラン・ギヴェンタリ・アンブレラあるいは単にオープン・アンブレラとよびます [6, 7]。これは余次元 2 の特異性をもったラグランジュ部分多様体です。いい日本語訳がありませんが、ここでは笠とよびましょう。さしがさの傘と違ってはじめから開いているので。私たちのあつかうものは、一般にはこの笠と非特異ラグランジュ部分多様体の直積のパラメトリゼイションとしてのアイソトロピック写像です (§9)。これは、数あるアイソトロピック写像の中でシンプレクティック安定性により特徴づけられることがわかりました。

さらにこのホイットニーの笠のラグランジュ安定性を考察することにより、アーノルドによるラグランジュ部分多様体のラグランジュ安定性の特徴づけ (§8) を一般化することができました (§10)。

また、一方、アイソトロピック写像はシンプレクティック幾何における特異点論での基本的道具としては、アイソトロピック・ヴェクトル場、すなわち、シンプレクティック・ヴェクトル場の拡張概念として登場します (§5)。実は、これはアイソトロピック微分 1 形式とかんがえたほうがより自然で、この概念は、特異点論におけるシンプレクティック幾何というテーマ、あるいは、特異点論のシンプレクティック化という方向でも将来重要になると思われます。

私たちのラグランジュ特異点論のとりあつかいは、単なる一般化ではなく、アーノルド理論と違って、大域的定式化が可能であるという利点もあります。容易に想像できるように、大域的な無限小シンプレクティック安定性や無限小ラグランジュ安定性が定式化でき、それぞれ本当の安定性との同値性が期待できます。現在研究中ですが、もう証明になにも障害はないと思われます。

分類結果については §11 で少し触れました。

最後に相対ダルブーの定理の双対としてのワインシュタインの一意性定理にも言及しました (§12)。相対ダルブーの定理がシンプレクティック幾何のサブマニフォールドの話なら、ワインシュタインの一意性定理はスーパーマニフォールドの話です。

また、今回はふれませんが接触幾何においても相対ダルブーの定理はなりたちますから、接触幾何における特異点論も存在します。

それから、特異点論での言葉使いについて説明しておきます。

安定性は個々の対象の性質です。ジェネリシティーは個々の対象の性質ではありません。退化していないといった程度の意味です。だから厳密には、ジェネリックな対象というのは曖昧な表現です。通常は、近似定理と関連して語られているはずで、煩雑な定義を避けているだけです。また、ヴァーサリティーの概念がありますが、これは関数空間をその有限次元モデルを通して調べられるということです。これらは互いに関係しますが、注意して区別する必要があります。

写像の芽とは、写像の局所的なふるまいを捕らえる概念で、写像のある点、あるいはある部分空間の近傍への制限のインダクティブ・リミットです。

最後になりましたが、この原稿はいろいろな方からの助言にもとづいています。名前をいちいちあげませんが、この場を借りてあつく感謝いたします。

2　正則性定理—陰関数の定理

ふたつの写像（の芽）が同値とは、定義域と値域の微分同相（の芽）すなわち座標変換により互いに移りあうときに言います。この言葉を使うとよく知られた陰関数の定理はつぎのように表せます：

陰関数の定理： 写像芽 $f : (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ をサブマーション (または イマーション) とすると、f は、スタンダードな $f_0 = (x_1, \ldots, x_p)$ (または $(x_1, \ldots, x_n, 0, \ldots, 0)$) と同値である。

証明： ステップ 1．適当な線形変換を使って、$f_t = tf + (1-t)f_0$ が、各 $t \in [0,1]$ でサブマーション (または イマーション) と仮定してよい。これは簡単な線形代数。

ステップ 2．f_t の同値類は $[0,1]$ で 開集合、つまり、各 t_0 について、t_0 に近い t をとれば、f_t は f_{t_0} に同値になることを示す。そのためには $f_t \circ \sigma_t = f_{t_0}$ (または$\tau \circ f_t = f_{t_0}$) となる微分同相の芽$\sigma_t, \sigma(0) = 0$ (または $\tau_t, \tau(0) = 0$) を構成すればよいが、それには、まず、パラメーター付きの線形代数により、その無限小版の変分方程式 $df_t/dt + (f_t)_* \xi_t = 0, \xi_t(0) = 0$ (または $df_t/dt + \eta_t \circ f_t = 0, \eta_t(0) = 0$) を満たすヴェクトル場 ξ_t (resp. η_t) を見つける。つぎにそれを積分して、微分同相を作る。ここで常微分方程式の解の存在と一意性を使っている。

ステップ 3． 区間 $[0,1]$ は連結だから、単一の同値類からなり、従って、$f = f_1$ と f_0 は同値。（証明おわり）

陰関数の定理の証明にはいろいろありますが、上の証明は、一般性があるという点ですぐれています。たとえば、モースの補題の証明、シンプレクティック幾何におけるモーザーやワインシュタインの方法、次にのべる相対ダルブーの定理の証明や、あるいは一方でこれから述べていくように特異点論におけるトム・マザーの構造安定性につながっていきます。

3　正則性定理—相対ダルブーの定理

多様体 M 上にシンプレクティック形式すなわち非退化閉微分 2 形式 $\omega : TM \times TM \to \mathbf{R}$ があたえられたとき、M をシンプレクティック多様体とよびます。典型的な例は、多様体 Y 上のコタンジェント・バンドル T^*Y です。T^*Y 上にはリュービル 1 形式 θ_Y があります。それは、Y 上の任意の微分 1 形式 $\alpha : Y \to T^*Y$ に対し$\alpha^*\theta_Y = \alpha$ がなりたつということで特徴づけられます。Y の局所座標 $q_1, \dots, q_m$ と対応する T^*Y のカノニカル座標 (q, p) にかんし、$\theta_Y = \sum p_i dq_i$ です。T^*Y のシンプレクティック構造は $\omega = d\theta_Y$ であたえられます。

シンプレクティック多様体 (M, ω) では ω により TM と T^*M との同型が与えられているので、ヴェクトル場と微分 1 形式が自然に対応します。M 上の関数 a の外微分 da に対応するヴェクトル場を a をハミルトニアンとするハミルトニアン・ヴェクトル場といいます。これは、M のシンプレクティック微分同相を生成します。

シンプレクティック多様体へのふたつの写像（の芽）がシンプレクティック同値とは定義域の微分同相（の芽）と行き先のシンプレクティック微分同相（の芽）により互いに移りあうときに言います。このとき、シンプレクティック幾何における陰関数定理の対応物に次の結果があります。

相対ダルブーの定理（ギヴェンタリ [3]）：(M, ω) をシンプレクティック多様体とし、$f_0, f_1 : (\mathbf{R}^n, 0) \to M$ をイマーションとする。もし $f_0^*\omega = f_1^*\omega$ ならば f_0 と f_1 はシンプレクティック同値。

ノート：　この定理はよく知られているダルブー・ワインシュタインの定理（たとえば [16] や [8, 4 章 定理 1.1]）より強い結果です。シンプレクティック幾何では内在幾何が外在幾何を決めるというわけで、リーマン幾何などとはまったく様相がちがいます。下の証明はギベンタリによるもの [3] と異なり、上の陰関数の定理の証明にそくした、より一般性のあるものです。また、サブ

マーションの場合の同様な命題は当たり前になりたちます。

証明: $X = (\mathbf{R}^n, 0)$ とおく。シンプレクティック線形代数により f_0 と f_1 を $f_t : X \to M$ がイマーションで $f_t(0) = p$ コンスタント、$f^*\omega$ コンスタントなものでむすぶ。それに対し、各 t_0 の近くの t について $df_t/dt + \eta_t \circ f_t = 0, \eta_t(p) = 0$ となるハミルトン・ヴェクトル場η_t を見つける。この η_t を積分すればシンプレクティック微分同相 τ_t で、$\tau_t \circ f_t = f_{t_0}$ となるものが得られる。いま、f_t に沿ったヴェクトル場 $v_t = df_t/dt : X \to TM$ はシンプレクティック構造からきまる同型 $TM \cong T^*M$ により f_t に沿った1形式と思えるが、あとでのべるように、$f_t^*\omega$ がコンスタントということから v_t はアイソトロピックすなわち $v_t^* d\theta_M = 0$ となる。ここで、θ_M は先に述べた T^*M 上のリュービル形式。$v_t^*\theta_M$ はクローズドだからポアンカレの補題からエグザクト。よって $v^*\theta_M = d(a_t \circ f_t)$ となる M 上の関数 a_t がある。$v_t - da_t \circ f_t$ に相対ポアンカレの補題 [16] をあてはめると、$v_t - da_t \circ f_t = db_t \circ f_t, b_t \circ f_t = 0$ となる M 上の関数 b_t がある。η_t を $a_t + b_t$ をハミルトニアンとするハミルトン・ヴェクトル場ととればよい。(証明おわり)

4　自明性と安定性

さきに見た正則性定理の証明での重要なステップは写像芽の変形の自明性です。これは安定性の概念と密接に関係します。

定義 : (1) シンプレクティック多様体 (M, ω) への(かならずしもサブマーションやイマーションとは限らない)写像芽 $f : X \to M$ がシンプレクティック安定とは、条件 $f_t^*\omega = f^*\omega$ をみたす f の任意の変形 $f_t : X \to M, f_0 = f,$ がシンプレクティック同値で自明なときに言います。つまり $\tau_t \circ f_t \circ \sigma_t = f$ をみたす微分同相芽の族 σ_t とシンプレクティック微分同相芽 τ_t の族が0にちかい任意の t について見つかるときです。ただしσ_t や τ_t は t が動くとき基点を動かしてもいいとします。

(2) M が特にコタンジェント・バンドル T^*Y のとき $f : X \to T^*Y$ がラグランジュ安定とは、(1) で、τ_t をラグランジュ微分同相にとれる、つまり、ファイブレーション $T^*Y \to Y$ について Y の微分同相をカバーするようにとれるときに言います。

あきらかに、ラグランジュ安定ならばシンプレクティック安定です。

注意: 通常の写像芽の (C^∞) 安定性は上の (1) の定義で条件 $f_t^*\omega = f^*\omega$ と、τ_t がシンプレクティックということを除けば同様に定義できます。

相対ダルブー定理の証明から、イマーションやサブマーションはあきらかにシンプレクティック安定ですが、特異点をもつ場合はどうでしょうか。

例：写像芽 f がフォールドとは、モース関数と微分同相の直積と同値のときに言います。

系：$f : X \to M$ がフォールドならばシンプレクティック安定である。

証明は C^∞-ノーマリゼイションの理論 [5] に相対ダルブーの定理をあてはめれば容易にできます。一般に、C^∞ 安定ならばシンプレクティック安定か、という問題提起ができますが、これは未解決です。

5　無限小安定性

ここでは主にアイソトロピック写像にたいしてシンプレクティック安定性やラグランジュ安定性を考えます。シンプレクティック多様体への写像がアイソトロピックとはシンプレクティック形式の引き戻しがゼロのときに言います。どうしてアイソトロピック写像をあつかうのかということも説明します。が、とりあえず、一般にシンプレクティック安定性の無限小版を考えてみることにしましょう。

X を n 次元多様体、(M,ω) を $2m$ 次元シンプレクティック多様体とし、簡単のため $n \leq m$ とします。写像 $f : X \to M$ にたいし、一階非線形偏微分方程式 $f^*\omega = \rho$ を考えます。ただし ρ は X 上のあたえられた閉微分 2 形式です。その解空間を Sol_ρ と書きます。$\rho = 0$ のときは、アイソトロピック写像全体になります：

オブザヴェーション：Sol_ρ の特異性は $\{f \in \mathrm{Sol}_\rho \mid \mathrm{corank} f \geq 2\}$ 上にある。つまり $\mathrm{Sol}_\rho \cap \{\mathrm{corank} f \leq 1\}$ は特異性を持たない。

コランクはこの場合、微分写像のカーネルの次元を意味します。実際, 関数空間 $C^\infty(X,M)$ から X 上の閉 2 形式全体の空間への写像 Φ が$\Phi(f) = f^*\omega$ で定義できますが、Φ は $\mathrm{corank} f \leq 1$ の範囲でサブマーション、すなわち、$f^*\omega$ の任意の 1 パラメーター変形$\rho_t, \rho_0 = f^*\omega$ が必ず $f_t, f_0 = f, \Phi(f_t) = f_t^*\omega = \rho_t$ とリフトできます。そして、このことは一般にコランクが 2 以上のときは成立しません。

では、コランクが 1 以下の範囲内で $\mathrm{Sol}_\rho = \Phi^{-1}(\rho)$ のタンジェント・スペー

スはどう記述されるでしょうか。

いま f_t を f の 1 パラメーター変形で $f_t^*\omega = f^*\omega = \rho$ であるものを取ります。一般に、写像の族 $f_t : X \to M$ に対し、f_t に沿ったヴェクトル場 $df_t/dt : X \to TM$ を X の各点 x と M 上の関数 a について

$$\frac{df_t}{dt}(x)(a) = \lim_{h\to 0}\frac{a(f_{t+h}(x)) - a(f_t(x))}{h}$$

で定義します。今の場合 M にシンプレクティック構造がありますから、$v_t = df_t/dt : X \to TM \cong T^*M$ と思えます。そして、T^*M には M の構造とは関係なく、リュービル形式の外微分 $d\theta_M$ により、シンプレクティック構造を持ちます。

オブザヴェーション： $f_t^*\omega$ がコンスタントのとき $v_t = df_t/dt : X \to T^*M$ は各 t についてアイソトロピック、すなわち、$v_t^* d\theta_M = 0$ となる。

とくに、$v = df_t/dt|_{t=0}$ は $f = f_0$ に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場となります。逆に f に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場 v に対し、Sol_ρ 内での f の 1 パラメーター変形 f_t で $v = df_t/dt|_{t=0}$ となるものを見つけることができます。すなわち、コランク 1 以下の範囲で $T_f\mathrm{Sol}_\rho = VI_f, (\rho = f^*\omega)$ と記述されます。ただし、VI_f は f に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場全体をあらわします。

さて、f がたとえばシンプレクティック安定であるためには、$\tau_t \circ f_t \circ \sigma_t = f$ をみたす微分同相芽 σ_t とシンプレクティック微分同相芽 τ_t を持たなければなりません。したがって、必要条件として、任意にあたえられた $v \in VI_f$ にたいして、マザー型方程式 $v = f_*\xi + \eta \circ f,$ をみたす、X 上のヴェクトル場の芽 ξ と M 上のハミルトン・ヴェクトル場の芽η が存在するはずです。

(1) この必要条件をみたす写像芽 f は無限小シンプレクティック安定であるといいます。

(2) $M = T^*Y$ のとき、f が無限小ラグランジュ安定とは、上の条件で、η がラグランジュ・ヴェクトル場にとれるとき、すなわち、ラグランジュ微分同相を生成するとき、すなわち、ハミルトニアンが、ファイバー座標に関して、非斉次リニアであるときに言います。

ところで、f 自身がアイソトロピックというのは、この文脈でどう捕らえられるでしょうか。

オブザヴェーション：X 上の任意のヴェクトル場 ξ に対し 押し出し $f_*\xi$ がア

イソトロピック・ヴェクトル場である必要十分条件は f がアイソトロピック写像なことである。

このことが、アイソトロピック写像をあつかう理論的な動機になります。

6 マザー型定理

定理 ([14]): コランク1以下のアイソトロピック写像芽 $f: X^n \to M^{2m}, n \leq m,$ に対し f がシンプレクティック安定（またはラグランジュ安定）であるための必要十分条件は、無限小シンプレクティック安定（または、無限小ラグランジュ安定）なことである。

マザー [15] は写像芽 $f: X = (\mathbf{R}^n, 0) \to Y = (\mathbf{R}^p, 0)$ の安定性と無限小安定性すなわち条件 $V_f = tf(V_X) + wf(V_Y)$ が同値なことを示しました。ここで、V_f は f に沿ったヴェクトル場全体、V_X と V_Y をそれぞれ X と Y 上のヴェクトル場全体とし、$tf: V_X \to V_f$ を $tf(\xi) = f_*\xi$ で $wf: V_Y \to V_f$ を $wf(\eta) = \eta \circ f$ で定義します。

このとき重要だったのは、これらのある種の代数構造でした。いま、E_X で X 上の関数の X の基点での芽全体をあらわしましょう。E_X は自然に可換環の構造をもちます。V_f と V_X はポイント・ワイズの積により E_X 加群になります。また V_Y は E_Y 加群になります。さらに、$tf: V_X \to V_f$ は E_X 準同型になるし、$wf: V_Y \to V_f$ は f^* を経由して E_Y 加群になります。ここで、$f^*: E_Y \to E_X$ は f の引き戻しによる準同型です。このような代数的データを、いわゆるマルグランジュ・マザーの準備定理をもとにした組織的な処理方法、すなはち代数機械によって無限小安定性から安定性を示したわけです。

さて、無限小シンプレクティック安定性（または、無限小ラグランジュ安定性）からシンプレクティック安定性（または、ラグランジュ安定性）を導きたいわけですが、マザーの理論 [15] や、さらにはデーモンの理論 [4] と比較したとき、最大のネックとなるのは、$VI_f \subset V_f$ が E_X 部分加群ではない、f^* を通して E_M 部分加群でさえないということです。部分ヴェクトル空間ではありますが。そこで、マザーの代数機械を作動させるには、アイソトロピック・ヴェクトル場全体の空間 VI_f になにか自然な加群構造を入れる必要が生じます。

7　分岐加群

さて $v: X \to TM$ をアイソトロピック・ヴェクトル場とします。この意味は、 M のシンプレクティック構造により TM を T^*M を同一視したとき、$v: X \to T^*M$ がシンプレクティック多様体への写像としてアイソトロピック、すなわち、$v^*d\theta_M = 0$ ということでした。すると、$v^*\theta_M$ は X 上の閉微分 1 形式ですから、ローカルには完全です。つまり、X 上の関数芽 $e \in E_X$ があって、$v^*\theta_M = de$ となります。この場合、関数 e を v の母関数とよびますが、母関数は定数をのぞいて一意的にきまります。X の基点を x_0 としたとき、$e(x_0) = 0$ とできます。ある写像芽に沿ったアイソトロピック・ヴェクトル場の母関数全体は特別な関数族を形成します。

一般に写像芽 $f: X \to M$ にたいし

$$R_f = \{eE_X \mid a_i \in E_X \text{ があって } de = \sum_i a_i df_i\}$$

とおきます。ここで、f_i たちは f の成分です。R_f は座標系のとりかたによらず f のみにより定まります。これを f の分岐加群とよぶことにしましょう。分岐加群の性質 : (1) 居場所は $f^*E_M \subset R_f \subset E_X$ である。(2) $R_f = E_X$ であるのは f がイマーションの時にかぎる。(3) R_f は E_X の f^*E_M-部分加群であると同時に、$\mathbf{R}$-部分代数である。より強く、R_f は C^∞ 演算に関し閉じている。つまり $h_1, \ldots, h_r \in R_f$ と $\mathbf{R}^r$ 上の C^∞ 関数 a にたいし $a \circ h \in R_f$ となる。ただし、$h = (h_1, \ldots, h_r): X \to \mathbf{R}^r$ とおいた。(4) とくに R_f は極大イデアル $m(R_f) = \{e \in R_f \mid e(x_0) = 0\}$ をもつローカル代数となる。

さて母関数をとる写像はヴェクトル空間としてのリニア写像 $e: VI_f \to m(R_f)$ を導きます。これは全射です。このカーネルは $VI'_f = \{v \in VI_f \mid v^*\theta_M = 0\}$ で、これはある種の関係式の全体なのであきらかに V_f の E_X 部分加群、したがって、f^* を通して E_M 加群の構造をもちます。

目標の VI_f の加群構造ですが、ヴェクトル空間の完全列

$$0 \longrightarrow VI'_f \longrightarrow VI_f \xrightarrow{e} m(R_f) \longrightarrow 0$$

が E_M エグザクトになるように E_M 加群の構造を入れることができます。すなはち、$v \in VI_f$ と $a \in E_M$ に対し、

$$a * v = a \circ f \cdot v + e(v) \cdot (da) \circ f$$

と定義するわけです。ここで、$\cdot$ は通常のポイント・ワイズの積です。また、da は M 上の 1 形式ですが、ハミルトン・ヴェクトル場と思っています。

これが論文 [14] の最大のアイディアです。また、これからのべるアーノルド型特徴づけにも本質的役割をはたします。

8　ラグランジュ部分多様体とラグランジュ特異点論

ラグランジュ部分多様体はシンプレクティック幾何において重要な対象です。(M,ω) をシンプレクティック多様体とし、L を M の部分多様体としたとき、L が M のラグランジュ部分多様体であるとは、L が 微分方程式 $\omega=0$ の最大次元積分多様体になっているときにいいます。このとき、L の次元は M の次元の半分になっていることがわかります。

ラグランジュ部分多様体の典型的な例は、$M=T^*Y$ のときの、Y 上の微分閉 1 形式のグラフと Y の部分多様体のコノーマル・バンドルです。

ラグランジュ部分多様体をパラメーターづけるイマーションをラグランジュ・イマーションといいます。いいかえれば、アイソトロピック・イマーション $f:X\to M$ で $\mathrm{dim}X=(1/2)\mathrm{dim}M$ のときです。

ヘルマンダーはラグランジュ・イマーションが局所的には関数族から構成できることを最初に指摘しました [9]。アーノルドは、その関数族すなわち母関数族によって、ラグランジュ・イマーションのラグランジュ安定性を特徴づけました [2]。それを復習してみましょう。

$Y=\mathbf{R}^n$ とし、$\mathbf{R}^k\times Y$ 上の $(0,0)$ における関数の芽 $F(u,y),(u,x)\in\mathbf{R}^k\times Y$ を考えます。F の 各 u 偏微分が消えるところ $X\subset\mathbf{R}^k\times Y$ が強い意味で非特異とします。すると、ラグランジュ・イマーション $f:X\to T^*Y$ が $f(u,y)=(\partial F/\partial y,y),(u,x)\in X$ で定義できます。いま、F を $\phi=F|_{y=0}$ の変形と思ったとき、f がラグランジュ安定であるための必要十分条件は、$1,\partial F/\partial y_1|_{y=0},\dots,\partial F/\partial y_n|_{y=0}$ が実ヴェクトル空間 $E_k/\langle\partial\phi/\partial u_1,\dots,\partial\phi/\partial u_k\rangle E_k$ を生成することです。これがアーノルドの特徴づけです。

9　ホイットニーの笠

正の整数 n と非負整数 k で $0\le k\le[n/2]$ をみたすものに対し、写像芽 $f=f_{n,k}:(\mathbf{R}^n,0)\to(T^*\mathbf{R}^n,0)$ を $q_1\circ f=x_1,\dots,q_{n-1}\circ f=x_{n-1}$ かつ

$$q_n\circ f=u=\frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!}+x_1\frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!}+\cdots+x_{k-1}x_n,$$

$$p_n \circ f = v = x_k \frac{x_n^k}{k!} + \cdots + x_{2k-1}x_n,$$

$$p_i \circ f = \int_0^t \partial(v,u)/\partial(x_i,x_n)dx_n, \qquad 1 \leq i \leq n-1,$$

で定義します。ただし、$\partial(v,u)/\partial(x_i,x_n)$ はヤコビアンです。

定義：$f : X \to M$ が次元 n タイプ k のホイットニーの笠、$0 \leq k \leq [n/2]$、とは、$f_{n,k}$ とシンプレクティック同値のときに言います。

$k=0$、すなわち、コランク 0 のときがラグランジュ・イマーションのローカル・モデルです。コランク 1 のときは、ローカル・モデルの種類が次元の半分ぐらいあります。ちなみに、k が異なると $f_{n,k}$ たちは同値でないので、シンプレクティック同値でもありません。次の性質はエッセンシャルです：

基本的性質：ホイットニーの笠 $f : X \to M$ は、たかだか余次元 2 の特異性をもち、また分岐加群について $R_f = f^*E_M$ をみたす。

イントロダクションでのべた k 次元オープン・スワローテイルのコノーマル・バンドルは、次元 $2k$ タイプ k のホイットニーの笠に相当します。

さらに次の結果は、ホイットニーの笠のシンプレクティック安定性による特徴づけであると同時に、シンプレクティック安定なものの具体的な標準形をあたえます。

命題：$f : X^n \to M^{2n}$ をコランク 1 以下のアイソトロピック写像芽とする。このとき、f がシンプレクティック安定であるための必要十分条件は f がホイットニーの笠であることである。

したがって、つぎはホイットニーの笠のラグランジュ同値による分類が問題となります。

10　アーノルド型定理

定理 ([14])：コランク 1 以下のアイソトロピック写像芽 $f : X^n \to M^{2n} = T^*Y$ に対し、次は同値：

(1) f はラグランジュ安定。

(2) f は ホイットニーの笠で、かつ、1 とファイバー成分 $p_1 \circ f, \ldots, p_n \circ f$ が $Q(f) = f^*E_{T^*Y}/\langle q_1 \circ f, \ldots, q_n \circ f\rangle f^*E_{T^*Y}$ を実ヴェクトル空間として生成。

(3) f は無限小ラグランジュ安定、すなわち、$VI_f = tf(V_X) + wf(VL_{T^*Y})$ が成立。

ここで、VL_{T^*Y} は T^*Y 上のラグランジュ・ヴェクトル場全体です。§5 を参照ください。

この定理は、アーノルドによるラグランジュ安定なラグランジュ・イマーション、すなわち、コランク 0 のケースの特徴づけの一般化をあたえています。

実際、§8 にのべた構成において、プロジェクション $X \subset \mathbf{R}^k \times Y \to \mathbf{R}^k$ はヴェクトル空間 $E_k/\langle \partial\phi/\partial u_1, \ldots, \partial\phi/\partial u_k \rangle E_k$ と $E_X/\langle q_1 \circ f, \ldots, q_n \circ f \rangle E_X$ を誘導します。そして、f がイマーションなら $f^*E_{T^*Y} = E_X$ です。生成元たちはそれぞれ対応するので、定理の条件 (2) は、アーノルドの条件に一致します。

証明にはホイットニーの笠の基本的性質と、VI_f の代数構造、分岐加群 R_f、をからめて行います。

11　横断性とジェネリシティー

先にみたように、シンプレクティック安定なものは具体的な標準形（ホイットニーの笠）をもっていました。ではラグランジュ安定なものの分類はできるでしょうか。ラグランジュ部分多様体のときには、まさにヘルマンダー・アーノルド理論により、関数の変形（母関数族）の話に帰着され、すでに膨大な分類表が得られています。しかし、一般のアイソトロピック写像は、マスロフ指数の存在から、母関数族を持ちません。また、通常の C^∞安定写像はマザー理論により代数的にあざやかに分類できますが、しかし、このとき重要なK同値（コンタクト同値）に対応する概念は、シンプレクティック特異点論ではまだ発見されていません。これが現状です。現在のところ、ジェネリシティーと関連した分類結果を若干得ています。

まず、ジェネリシティーの議論でキーポイントになるのが横断性定理です。

定理 ([13])： コランク 1 以下のアイソトロピック写像に対し横断性定理がなりたつ。

さらに、一般に写像空間 Sol_ρ に対しても同様の横断性定理がなりたちます。

具体的な分類結果をのべるために、写像芽 $f : X \to T^*Y$ の L-コランクを $\pi \circ f$ のランクとして定義します。ただし、π はコタンジェント・バンドルの自然なプロジェクションです。X と Y をともに n 次元とします。

定理 ([12]) : ジェネリックな L-コランク 1 以下のアイソトロピック写像芽 $X \to T^*Y$ は $f = f_{n,k,\ell} : (\mathbf{R}^n, 0) \to (T^*\mathbf{R}^n, 0), 0 \le \ell \le k \le n, k + \ell \le n,$ のいづれかとラグランジュ同値。ただし、$f = f_{n,k,\ell}$ は、次で定義されるアイソトロピック写像芽である : $q_1 \circ f = x_1, \ldots, q_{n-1} \circ f = x_{n-1}$ かつ

$$q_n \circ f = u = \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!} + x_1 \frac{x_n^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + x_{k-1} x_n,$$

$$p_n \circ f = v = \pm \frac{x_n^{\ell+1}}{(\ell+1)!} + x_k \frac{x_n^{\ell}}{\ell!} + \cdots + x_{k+\ell-1} x_n,$$

$$p_i \circ f = \int_0^t \partial(v, u)/\partial(x_i, x_n) dx_n, \qquad 1 \le i \le n-1,$$

さらに、これらがラグランジュ安定であることが、マザー型定理からわかります。ただし、$n \ge 4$ のときは、コランク 1 で、L-コランク 2 のジェネリックなアイソトロピック写像芽が存在することもわかっています [13]。

12 相対ダルブーの定理の双対

相対ダルブーの定理の双対はいったい何でしょう。それは、ワインシュタインによるシンプレクティック実現の一意性定理です [17]。いまシンプレクティック多様体からの写像芽 $f : (M, \omega) \to Y$ を考えてみましょう。このとき、これらにはシンプレクティック同値の概念が自然に定義できます。一方、シンプレクティック構造にはポワッソン構造が付随し、それをも ω と書くと、Y 上にポワッソン構造 $f_*\omega$ が誘導されます : $\{a, b\}_{f_*\omega} = \{a \circ f, b \circ f\}_\omega$、ただし a, b は Y 上の関数。

定理（ワインシュタイン）: ふたつの写像芽 $f : M \to Y$ をそれぞれサブマーションとする。もし誘導されたポワッソン構造 $(Y, f_*\omega)$ と $(Y, f'_*\omega)$ が同型ならば、f と f' はシンプレクティック同値である。

特異点をもつ f にたいする安定性や標準形の議論は、たとえば、f がコアイソトロピックの時、特異な積分可能力学系の研究と結びつきますが、この方向からの一般的研究は残念ながらまだないようです。

References

1. R. Abraham, J.E. Marsden, *Foundations of Mechanics,* 2nd. ed., Benjamin, 1978.

2. V.I. Arnol'd, *Normal forms for functions near degenerate critical points, the Weyl groups of A_k, D_k, E_k, and Lagrangian singularities,* Funktsional Anal. i Prilozhen., **6** (1972), 3–25.

3. V.I. Arnol'd, A.B. Givental', *Symplectic geometry* in Dynamical Systems IV, ed. by V.I. Arnol'd, S.P. Novikov, Encyclopaedia of Math., Springer-Verlag, 1990, pp. 1–136.

4. J. Damon, *The unfolding and determinacy theorems for subgroups of A and K*, Memoirs Amer. Math. Soc., vol. **50**, No. **306**, Amer. Math. Soc., 1984.

5. T. Gaffney, L. Wilson, *Equivalence of generic mappings and C^∞ normalization*, Comp. Math. **49** (1983), 291–308.

6. A.B. Givental', *Lagrangian imbeddings of surfaces and unfolded Whitney umbrella,* Funksional Anal. i Prilozhen., **20–3** (1986), 35–41.

7. A.B. Givental', *Singular Lagrangian varieties and their Lagrangian mappings*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Prob. Mat. (Contemporary Problems of Mathematics) 33, VITINI, 1988, pp. 55–112.

8. V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric Asymptotics*, Math. Surveys, no. 14, AMS, 1977.

9. L. Hörmander, *Fourier integral operators I*, Acta Math., **127** (1971), 71–183.

10. G. Ishikawa, *Families of functions dominated by distributions of C-classes of mappings*, Ann. Inst. Fourier **33–2** (1983), 199–217.

11. G. Ishikawa, *The local model of an isotropic map-germ arising from one-dimensional symplectic reduction*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **111** (1992), 103–112.

12. G. Ishikawa, *Parametrized Legendre and Lagrange varieties*, Kodai Math. J., **17–3** (1994), 442–451.

13. G. Ishikawa, *Transversalities for Lagrange singularities of isotropic mapping of corank one*, Proc. Banach Center Symp. on Singularities and Differential Equations, 1995, to appear.

14. G. Ishikawa, *Symplectic and Lagrange stabilities of open Whitney umbrellas*, Preprint.

15. J.N. Mather, *Stability of C^∞ mappings II, Infinitesimal stability implies stability*, Ann. of Math., **89** (1969), 254–291.

16. A. Weinstein, *Symplectic manifolds and their Lagrangian submanifolds*, Adv. in Math. **6** (1971), 329–346.

17. A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifold*, J. Diff. Geom., **18** (1983), 523–557.

e-mail: ishikawa@math.hokudai.ac.jp

MONOPOLE EQUATION ON 4-MANIFOLD

太田 啓史

名古屋大学 多元数理科学研究科

（ お断り： このノートは今年５月１日２日に明治大学でおこなわれた研究集会「 Seiberg-Witten 理論とシンプレクティク幾何学」における講演の際に用いたトランスパレンシーの一部を簡略化したものの要約にすこし手を加えたものである。）

§0. Overview.

昨年（ １９９４年）秋に Witten が４次元多様体上にモノポール方程式（ 数学ではたまに Seiberg-Witten 方程式と呼ばれることもあるようである）と呼ばれる方程式を導入し、その解のモジュライ空間を用いると４次元幾何に色々と顕著な結果をもたらすことが観察されている。特に、４次元 Yang-Mills 理論（ Donaldson 理論）で得られた結果の「 多く」は再生できるし真に新しい結果もうまれている。物理的には $N = 2$ 超対称性をもつ Dnaldson 理論のある双対理論と思われているが、Donaldson 理論とのはっきりとした数学的な関係は、少なくともこの原稿を書いている時点では、解明されていない。しかし、現象としてはいくつもの関係が明らかになっている。最も象徴的なものを一つあげると、Kronheimer-Mrowka による Donaldson 多項式の構造定理である。Donaldson 多項式はシンプルタイプと呼ばれる４次元多様体に対しては（ 全ての４次元多様体はシンプルタイプであろうと思われている）交叉形式と、有限個の basic class と呼ばれる２次のコホモロジー類を用いて表現できる、というものである。従って、Donaldson 多項式は大体この basic class により決定されるといえる。Seiberg-Witten 理論（ と呼んでしまっていいのかよくわからないが）ではまさにその basic class に対応するであろうものが捉えられる。歯切れの悪い表現になっているが、basic class を用いた定理は Seiberg-Witten 理論でも同じ形の定理として得られるのだが（ 例えば埋め込まれた曲面に対する adjunction 不等式、単連結楕円曲面に対する Donaldson 多項式の上記の表示）、実際のところその両者の明確な関係はわかっていない。正確に言えば、Kronheimer-Mrowka の basic class は Seiberg-Witten 理論で現れるコホモロジー類に一致するだろう、というのは予想である。

Donaldson 理論との比較でみれば、それは構造群が SU_2 なる非可換群を用いた理論であったのに対し、Seiberg-Witten 理論は U_1 なる可換群を用いた理論である。非可換性はモジュライを解析する際に非常な難しさをともなっていたのに対し、U_1 理論はそれに比べれば非常に易しくなる。また、Donaldson 理論で使われる反自己双対接続のモジュライ空間は bubbling off という現象の為、非コンパクトであった。これがものごとを複雑にする最大の要因であったが、モノポール方程式の解のモジュライはコンパクトである。これは本質的にはモノポール方程式が（ 後で見るように）スカラー曲率の情報を内在しており、S^4 には正スカラー曲率計量をもつことによる。この

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

ようなことを考えると、Seiberg-Witten 理論で Donaldson 理論の多くのことが言えてしまうというのはまことに不思議なことと思える。しかし、一方で確かに bubbling off は解析を困難にしていたが、それは逆に言えば bubbling をみることで例えば基本群の情報を捉えることができるなどそこに何らかの geometry が反映されていたことも事実である。従って、Seiberg-Witten 理論では捕まえられない(少なくとも安直には捕まえにくいであろう) Donaldson 理論からの寄与というものも存在する(と思っている。例えば、昨年トポロジーシンポジウムでお話させて頂いたこと。そこでは、SU_2の非可換性と bubbling off をむしろ積極的に用いたのであった。)(しかしそもそも捕まえられない、などと誰が断言できようか、否、誰にもできまい。)

§1. Monopole Equation.

1.1) $Spin^c$ representation and $Spin^c$ structure.

C_4を $\mathbb{R}$ 上の $\mathbb{R}^4$の Clifford 代数とする。これは $\mathbb{R}$ 代数として、$M_2(\mathbb{H})$ と同型である。S_4を $C_4 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の既約な部分加群とする。これは $\mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$ と同型である。Clifford 代数の元を左から Clifford 積することにより、$C_4 \otimes \mathbb{C}$ の S_4への既約表現ができる。これをスピノール群 $Spin(4) \subset C_4 \otimes \mathbb{C}$ に制限すると、これは既約ではなく 2 つの既約表現 ($S_4 = S_4^+ \oplus S_4^- = \mathbb{H} \oplus \mathbb{H}$) に分解する。

$$\rho_\pm \ : \ Spin(4) \longrightarrow \mathrm{End}\ (S_4^\pm) = \mathrm{End}\ (\mathbb{H})$$

これを半正 (負) スピノール表現という。この分解は、$Spin(4) = Sp(1) \times Sp(1)$ の分解に対応し、具体的には $(g_+, g_-) \in Sp(1) \times Sp(1)$ に対し $g_\pm$ を $\mathbb{H}$ の長さ 1 の元と見て左から掛けることに他ならない。

さて、$Spin^c(4)$ は $Spin(4) \times_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} U_1$ で定義される。$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ は対角作用である。この時、次の 4 つの $Spin^c(4)$ 表現が得られる。

$$\begin{aligned}
(\clubsuit) \quad & \rho_+^c \ : \ Spin^c(4) \longrightarrow U_2 \\
(\diamondsuit) \quad & \rho_-^c \ : \ Spin^c(4) \longrightarrow U_2 \\
(\heartsuit) \quad & \rho_l^c \ : \ Spin^c(4) \longrightarrow U_1 \\
(\spadesuit) \quad & \rho_o^c \ : \ Spin^c(4) \longrightarrow SO(4)
\end{aligned}$$

具体的には、$[g_+, g_-, z] \in Spin^c(4)$ と $v \in \mathbb{H}$ に対し、上から順に $g_\pm v z$、vz^2、$g_+ v g_-^{-1}$ (積は四元数 $\mathbb{H}$ での積) で定まる $\mathbb{H}$ の endmorphism である。

Xを可微分 4 次元多様体とする。X上の $Spin^c$構造を次で定義する。Xにリーマン計量を入れ、それによる orthonormal frame bundle を $F(X)$ とする。これは勿論 $SO(4)$ 束である。

定義. X上の $Spin^c$構造とは、X上の $Spin^c(4)$ 束 Pで、ρ_o^cで同伴する $SO(4)$ 束が $F(X)$ であるもの、のこと。

とりあえず計量を用いて $Spin^c$構造を定義したが、実は $Spin^c$構造は計量によらない概念である。今、X上に $Spin^c$構造 Pが一つ与えられれば、上の 4 つの表現に対応して次の 4 つのベクトル束が定まる。

$$\begin{aligned}
(\clubsuit) \quad & S^+ = P \times_{\rho_+^c} \mathbb{C}^2 \\
(\diamondsuit) \quad & S^- = P \times_{\rho_-^c} \mathbb{C}^2 \\
(\heartsuit) \quad & L = P \times_{\rho_l^c} \mathbb{C} \\
(\spadesuit) \quad & TX = P \times_{\rho_o^c} \mathbb{R}^4.
\end{aligned}$$

$S^{\pm}$を半正(負)スピノール束という。$\det \rho^c_{\pm} = \rho^c_l$故、$L = \det S^{\pm}$である。この時、次が成り立つ。

補題. 1)$c_1(L) \equiv w_2(TX)$ ($mod\ 2$).

2)X上の$Spin^c$構造の集合は、$\{x \in H^2(X;\mathbb{Z}) | x \equiv w_2(TX)\}$ と一対一に対応する。以下この集合を $Spin^c(X)$ と書く。

3)可微分向き付け可能4次元多様体はいつでも $Spin^c$ 構造をもつ。

1.2) Monopole equation.

まず、モノポール方程式を Witten に従い天下り的に定義する。Xを向き付け可能可微分4次元多様体とする。X上に$Spin^c$構造とリーマン計量を一つ固定する。その$Spin^c$構造から決まる複素直線束を L とする。これは $c_1(L) \equiv w_2(TX)$ を満たす。L上の接続の全体を $\mathcal{A}_L$、S^+の切断の全体を$\Gamma(S^+)$ と書く。

定義. *(Witten).* $(A, \Phi) \in \mathcal{A}_L \times \Gamma(S^+)$ に対するモノポール方程式とは、

$$\begin{cases} D_A\Phi = 0 & (M.1) \\ \rho(F_A^+) = \sigma(\Phi, \Phi) & (M.2) \end{cases}$$

説明. (1)$D_A : \Gamma(S) \xrightarrow{\nabla_{A'}} \Gamma(S \otimes T^*X) \longrightarrow \Gamma(S)$ は $Spin^c$Dirac 作用素。$\nabla_{A'}$ は、はじめにとったリーマン計量の Levi-Civita 接続と L 上の接続 A から導かれる S上の接続 A'による共変微分。($spin^c(4) = so(4) \oplus u(1)$ に注意。)二つめの写像は、計量による $T^*X = TX$の同一視の下での Clifford 積。

(2)F_Aは接続 A の曲率2形式で $u(1) = i\mathbb{R}$ 値2形式とみている。F_A^+はその自己双対部分。

(3)$\rho : \Omega^2_+(i\mathbb{R}) \to \{\psi \in \mathrm{End}(S^+)$ で self-adjoint, traceless $\}$ は$\xi \wedge \eta \in \Omega^2_+(i\mathbb{R})$ に対し、ξ, とη で2回 Clifford 積したものより定まる同一視写像。次の図式を眺めて頂きたい。

$$\begin{array}{ccccc} \bigwedge^2(\mathbb{R}^4) & = & \bigwedge^2_+ & \oplus & \bigwedge^2_- \\ \| \wr & & \| \wr & & \| \wr \\ so(4) & = & so(3) & \oplus & so(3) \\ \| \wr & & \| \wr & & \| \wr \\ spin(4) & = & sp(1) & \oplus & sp(1). \end{array}$$

(4)$\sigma : \Gamma(S^+) \times \Gamma(S^+) \ni (\Phi, \Phi) \to (\Phi\Phi^*)_0 \in \mathrm{End}(S^+)|$ self-adjoint, traceless 。ここで、$()_0$は traceless part を表す。

§2. Yang-Mills-Higgs functional.

ここではモノポール方程式を、別の立場から見直したい。まず、ドナルドソン理論で用いられた反自己双対接続の方程式を思い出す。$Q \to X$を SU_2束とする。$\mathcal{A}_Q$を Q 上の接続全体とする。X上の計量を用いて $\mathcal{A}_Q$上に次の Yang-Mills 汎関数が定義された。$A \in \mathcal{A}_Q$に対し、

$$\mathcal{YM}(A) = \int_X |F_A|^2 = -\int_X \mathrm{Trace}\ (F_A \wedge *_g F_A).$$

ここで F_A は A の曲率2形式で、$*_g$ は X の計量 g に関する Hodge $*$作用素。この時、Chern-Weil 理論を用いて、

$$\mathcal{YM}(A) \geq 8\pi^2 |c_2(Q)|$$

となり、$c_2(Q) > 0$ の時、等号成立の必要十分条件として反自己双対接続の方程式

$$*_g F_A = -F_A$$

が出るのであった。つまり、反自己双対接続は Yang-Mills 汎関数の最小値を与える方程式と理解できた。その後、この方程式はケーラー曲面の場合、Einstein-Hermetian 接続の方程式と理解され、安定正則ベクトル束のモジュライとの関係が見い出され、更に、高次元化された。一方、接続だけを考えるのではなく、束の切断も組にして考えることがある。それは、Yang-Mills-Higgs 場というものである。ここでは、先のモノポール方程式を Yang-Mills-Higgs 方程式（ 渦方程式）の一種として捉えようと思う。

X を4次元多様体とし、g をその一つのリーマン計量とする。s_g を g のスカラー曲率とする。1.2）の状況で、$\mathcal{A}_L \times \Gamma(S^+)$ 上の汎関数 $\mathcal{YMH}$ を次で定義する。$(A, \Phi) \in \mathcal{A} \times \Gamma(S^+)$ に対し、

$$\mathcal{YMH}(A,\Phi) = \int_X |F_A|^2 + \frac{1}{4\nu}|\nabla_A \Phi|^2 + \frac{1}{4\nu^2}||\Phi|^2 + \nu s_g|^2 \ \mathrm{vol(X)}.$$

ν はある実パラメータである。この時、Chern-Weil 理論と次の Weitzenböck 公式

$$D_A^2 \Phi = \nabla_A^* \nabla_A \Phi + \frac{1}{2}\rho(F_A)\Phi + \frac{1}{4}s_g \Phi, \qquad \text{for } \Phi \in \Gamma(S)$$

(注意: ここで D_A や ∇_A は L 上の接続 A と Levi-Civita 接続とから導かれる S 上の接続に関するものである。) を使って計算すると、次の下からの有界性がでる。

$$\mathcal{YMH}(A,\Phi) \geq -4\pi^2 c_1^2(L) + \frac{1}{4}\int_X s_g^2 \ \mathrm{vol(X)}.$$

ここで等号が成立する為の必要十分条件は、(A, Φ) が次の方程式を満たすことである。

$$\begin{cases} D_A \Phi = 0 \\ \rho(F_A^+) = \frac{1}{\nu}\sigma(\Phi, \Phi). \end{cases}$$

これは $\nu = 1$ の時、まさにモノポール方程式 (M.1)(M.2) に他ならない。

§4. Seiberg-Witten Invariant.

X を向き付け可能可微分閉4次元多様体とする。X 上の $Spin^c$ 構造 $c \in Spin^c(X) = \{x \in H^2(X;\mathbb{Z}) | x \equiv w_2(X)\}$ と計量を一つ固定する。その $Spin^c$ 構造 c から定まる複素直線束を L とする。$c_1(L) = c$ である。§1 の記号を援用する。ゲージ群を

$$\mathcal{G} = \mathrm{Aut}\ L = \mathrm{Map}\ (X, S^1)$$

とする。これは、接続の空間 $\mathcal{A}_L$ と切断の空間$\Gamma(S^+)$ にそれぞれ次で作用する。

$$\nabla_{g(A)}s = g\nabla_A(g^{-1}s)$$
$$g(\Phi) = \Phi g^{-1}.$$

モノポール方程式はこの作用で、不変であることが容易に確かめられる。そこで、モノポール方程式の解のモジュライ空間を

$$\mathcal{M}_c = \frac{\{(A,\Phi) \in \mathcal{A}_L \times \Gamma(S^+) \mid (A,\Phi) \text{ はモノポール方程式の解 }\}}{\mathcal{G}}.$$

とおく。ゲージ群の解空間への作用は自由ではないので商空間 $\mathcal{M}_c$は特異点をもつ。しかしそれは作用をみれば次が簡単にわかる。

命題４．１．ゲージ群の解空間への作用の不動点集合は $\{(A,0)\}$ であり、そこでの固定化群は S^1である。

そこで、

$$\mathcal{M}_c^* = \{(A,\Phi) \in \mathcal{M} \mid \Phi \neq 0\}$$

とおく。

4.1) Perturbation of Monopole Equation.

モジュライ空間が期待される次元を持つ滑らかな多様体となるために、方程式を摂動する必要がある。$\eta \in \Omega_+^2(X)$ をとって、

$$\begin{array}{cccc} SW_\eta & : & (\mathcal{A}_L \times \Gamma(S^+))/\mathcal{G} & \longrightarrow & (\Gamma(S^-) \times \mathrm{End}\ (S^+))/\mathcal{G} \\ & & (A,\Phi) & \longrightarrow & (D_A\Phi, \rho(F_A^+ + i\eta) - (\Phi\Phi^*)_0) \end{array}$$

とおく。ここで関数空間としては、kを十分大きくとり、$\mathcal{G}$ はソボレフノルム L_k^2 ($= k$ 回微分まで L^2有界) で、$\mathcal{A}_L \times \Gamma(S^+)$ は L_{k-1}^2で、またΩ_+^2 は L_{k-2}^2によりそれぞれ完備化したものを考える。この時無限次元版 Sard-Smale の定理により次が成り立つ。

命題４．２．（１）SW_ηの線形化写像は *Fredholm* で指数は

$$\begin{aligned} d(c) = index &= \frac{1}{4}(c^2 - sign\ X) - (1 - b_1(X) + b_2^+(X)) \\ &= \frac{1}{4}(c^2 - (2e(X) + 3sign\ X)) \end{aligned}$$

ここで $e(X)$ はオイラー数、$sign\ X$は Xの指数。

（２）*generic* なηに対し、$\mathcal{M}_{c,\eta} = SW_\eta^{-1}(0)$ は$\Phi \neq 0$ のところで $d(c)$ 次元の滑らかな多様体。

（３）更に $b_2^+(X) \geq 1$ の時、*generic* な計量 gに関し

$$\mathcal{M}_{c,\eta}(g) \subset \frac{\mathcal{A}_L \times (\Gamma(S^+) - 0)}{\mathcal{G}}.$$

また $b_2^+(X) \geq 2$ の時、計量の *generic* な道 g_t, $(0 \leq t \leq 1)$ が存在し、$\mathcal{M}_{c,\eta}^{\mathrm{para}} = \bigsqcup_{0\leq t\leq 1} \mathcal{M}_{c,\eta}(g_t) \times \{t\}$ は滑らかな $d(c)+1$ 次元多様体で、

$$\partial\mathcal{M}_{c,\eta}^{\mathrm{para}} = \mathcal{M}_{c,\eta}(g_0) \bigcup -\mathcal{M}_{c,\eta}(g_1).$$

(実はすぐにあとで述べるようにこれらのモジュライ空間はコンパクトで向き付け可能である。)

4.2) Compactness.

次はモノポール方程式の解のモジュライ空間の最も顕著な性質である。

命題4．3．$\mathcal{M}_{c,\eta}$はコンパクトである。

証明は Weitzenböck 公式を用いることにより、

$$|\Phi|^2_{C^0} \leq C|\eta| - s_g, \qquad C > 0$$

で一様に上から有界であること、および楕円型微分方程式系

$$d_A^* \oplus d_A^+ \ : \ \Omega^1(i\mathbb{R}) \longrightarrow \Omega^0 \oplus \Omega^2_+$$

の標準的なアプリオリ評価を使えばそれほど難しいものではない。

命題4．4．$\mathcal{M}_{c,\eta}$は向き付け可能で、向きはベクトル空間 $\det(H^0(X) \oplus H^1(X) \oplus H^2_+(X))$ の向きにより定まる。

4.3) Seiberg-Witten Invariant.

以上の準備の下で4次元多様体 Xの微分位相不変量を定義しよう。まず、

$$\mathcal{B}^* = \frac{\mathcal{A}_L \times (\Gamma(S^+) - 0)}{\mathcal{G}}$$

とおき、そのトポロジーをしらべる。上の分子は一点とホモトピー同値だから、$\mathcal{B}^*$はゲージ群 $\mathcal{G} = \mathrm{Map}(X, S^1)$ の分類空間である。Xに基点 x_0をとり、$\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})_0$を基点を保つ写像の空間とすると、次のファイブレイションができる。

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Map}(X,\mathbb{R})_0 & \longrightarrow & \mathcal{G} & \longrightarrow & S^1 \times [X, S^1] \\ & & g & \longrightarrow & (g(x_0), [g]). \end{array}$$

ここで、[,] は写像のホモトピー類をあらわす。$\mathrm{Map}(X, \mathbb{R})_0$は一点ホモトピー同値ゆえ、

$$\mathcal{G} \simeq S^1 \times [X, S^1] = S^1 \times H^1(X; \mathbb{Z}).$$

よって、次を得る。

補題. $\mathcal{B}^* = B\mathcal{G} \simeq \mathbb{C}P^\infty \times T^{b_1(X)}$. 特に、

$$H^*(\mathcal{B}^*; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}[[t]] \otimes \bigwedge^* \mathbb{Z}^{b_1(X)}$$

ここで $t \in H^2(\mathcal{B}^*; \mathbb{Z})$ は次のものである。$\mathcal{G}_0 = \{g \in \mathcal{G} | g(x_0) = \mathrm{id}\}$ とすると、$\widetilde{\mathcal{B}^*} = (\mathcal{A}_L \times (\Gamma(S^+) - 0))/\mathcal{G}_0 \to \mathcal{B}^*$ は S^1束となる。t はこの S^1束の c_1である。

いま、$d(c) = \dim_{\mathbb{R}} \mathcal{M}^*_{c,\eta} = 1/4(c^2 - (2e(X) + 3\mathrm{sign}X))$ とする。

定義. $c \in Spin^c(X) = \{c \in H^2(X;\mathbb{Z}) | c \equiv w_2(X)\}$ に対し、$SW(c) \in \mathbb{Z}$ を次で定義する。

1）$d(c) < 0$ の時、$SW(c) = 0$.
2）$d(c) = 0$ の時、$SW(c) = \#\mathcal{M}_{c,\eta}$.
3）$d(c) > 0$ で偶数の時、$SW(c) = t^{d(c)/2}[\mathcal{M}_{c,\eta}]$.
4）$d(c) > 0$ で奇数の時、$SW(c) = 0$.
但し2）では向きもこめて個数を数える。

この時この節の命題から、次が証明できる。

定理 **(Witten)**. $b_2^+(X) \geq 2$ ならば、SWは Xの微分位相不変量である。

§5. Applications.

5.1) Vanishing Theorem.

コンパクト性を証明する際、$|\Phi|^2 \leq C|\eta| - s_g$ を示した。これから直ちにでることは、

定理 **(Witten)**. $b_2^+(X) \geq 2$ で Xが正スカラー曲率となる計量を許容すれば、SW はすべてゼロ。

次の定理は Donaldson 不変量の時も成り立った。

定理. Xが $X = X_1\#X_2$でともに $b_2^+(X_i) \geq 1$ ならば、Xの SWはゼロ。

上のように分解しない時、即ち $X = X_1\#X_2$ ならば、どちらかの X_iは負定値である時、Xを既約という。

5.2) Non Vanishing Theorem.

定理 **(Taubes)**. (X,ω) を $b_2^+(X) \geq 2$ なる 4 次元シンプレクティク多様体とする。この時、ωと同調する概複素構造 Jに関する標準束を Kとすると、$SW(\pm c_1(K)) = \pm 1$.

従って、前の消滅定理とあわせることにより、

系.（ 1）(X,ω) を上の通りとする。この時、1）Xは既約。2）正スカラー曲率の計量をもたない。
（ 2）特に $n\mathbb{C}P^2\#m\overline{\mathbb{C}P^2}$ $(n \geq 2)$ はシンプレクティク構造をもたない。

ケーラー曲面の場合 Donaldson 不変量は必ずゼロではなかったので、ケーラーの場合の既約性は Donaldson 理論により知られていた。シンプレクティクの場合に Donaldson 理論を用いて非消滅定理を出そうということは考えられていたが、それは解析が難しくなることが障害となっていた。(シンプレクティク形式を自己双対にするような計量を入れると、モジュライ空間の非特異部分にシンプレクティク構造が入れることがわかるが、不変量を得る為にはモジュライ空間が特異点をもたないように計量を generic にとり直さなければならない。しかしシンプレクティク形式を自己双対にするような計量がその意味で generic にとれるか否かは難しい。）また、正スカラー曲率なる計量の存在に関しては、上の結果は一般次元と 4 次元との大きな違いを示している。例えば、Hitchin の結果によれば、Xはコンパクトスピン多様体で正スカラー曲率なる計量をもてば、Xの$\hat{A}$種数はゼロであり、また Gromov-Lawson の結果によれば、$\hat{A}$種数の消える 5 次元以上の単連結コンパクトスピン多様体 X は

いくつか連結和をとれば、いつでも正スカラー曲率なる計量をもつことが知られている。スピンでない時は、やはり Gromov-Lawson により、5 次元以上のコンパクト単連結多様体はいつでも正スカラー曲率なる計量をもつ。

(X,ω) を $b_2^+ \geq 2$ なるシンプレクティク多様体とする。先の Taubes の結果により、もし Xが $X = X_1 \# X_2$と分解するならば、どちらかは負定値でなければならない。それを X_1としよう。この時、次が示せる。

命題. $\pi_1 X_1$は有限指数の部分群をもたない。特に $H_1(X_1;\mathbb{Z}) = 0$ である。(以下の証明を見て頂ければわかるように次のことまで言えている。Xはシンプレクティク 4 次元多様体で $X = X_1 \# X_2$、$b_2^+(X_1) = 0$、$b_2^+(X_2) \geq 1$ とする。この時、X_1について上の主張が成り立つ。)

これはケーラーの時 Kotschick により示されていた。証明は簡単である。$\pi_1 X_1$が指数 $d < \infty$ なる部分群 G をもつと仮定する。これに対応して X_1の d 重被覆$\tilde{X}_1 \to X_1$がとれる。更に$\pi_1 X = \pi_1 X_1 * \pi_1 X_2$ゆえ、やはり G に対応する、Xの d 重被覆$\tilde{X} \to X$が存在する。この時、$\tilde{X} = \tilde{X}_1 \# d X_2$である。$b_2^+(X_2) \geq 1$ かつ $d \geq 2$ ゆえ $b_2^+(\tilde{X}) \geq 2$ で$\tilde{X}$は既約ではない。一方ωを$\tilde{X}$に引き戻せば、これは$\tilde{X}$上のシンプレクティク構造を定める。これは Taubes の定理の系に矛盾する。

5.3) $b_2^+ = 1$ Case.

この場合は SW は不変量ではなく、計量に依存する。しかし、$H^2(X;\mathbb{R})$ の正の部分と負の部分の、計量や方程式の摂動による変化を調べてやることによりいくつかのことがわかる。

定理 (Taubes). $\mathbb{C}P^2$上には

$$\int c_1(K) \wedge \omega > 0$$

なるシンプレクティク構造は入らない。

標準的なシンプレクティク構造では$\int c_1(K) \wedge \omega < 0$ である。その後更に強く、Taubes は次のことまで主張する。

定理 (Taubes). $\mathbb{C}P^2$上にはシンプレクティク構造は (シンプレクティク同型を除いて) 一つしかない。

これは、モノポール方程式の解に対して Xのある J-curve が対応すること(これにより $\mathbb{C}P^2$ の中のある性質を満たす J-curve の存在が示され、そこで Gromov の定理を使うことにより示される。

一意性まではまだ言えていないが、つぎのことが示せる。

定理 (小野ー太田). Xは次の１）２）を満たすとする。１）$2e(X) + 3sign\ X \geq 0$, ２）正スカラー曲率なる計量を許容する。この時、Xには

$$\int c_1(K) \wedge \omega > 0$$

なるシンプレクティク構造をもたない。

例えば、$\mathbb{C}P^1 \times \mathbb{C}P^1$ や $\mathbb{C}P^2 \# k\overline{\mathbb{C}P^2}$, $(0 \leq k \leq 9)$ は条件を満たしている。これの系として、次が極めて簡単に得られる。

系. 有理曲面は一般型極小曲面に微分同相になり得ない。

これは、例えば Kotschick が Donaldson 不変量を用いて示したこと：Barlow 曲面は有理曲面 $\mathbb{C}P^2\#8\overline{\mathbb{C}P^2}$ と微分同相でないことや、Hiruzebruch 予想：$\mathbb{C}P^1\times\mathbb{C}P^1$ と微分同相な一般型曲面は存在しないだろう、（これは少し前にやはり Donaldson 理論を用いて Qin により肯定的に解かれていた）を含んでいる。あと $\mathbb{C}P^2$ の 7 点ブローアップなどについていくつか知られていることがあったようだが、そんなことはともかく、今では次のことまで SW を用いて示されている。

定理 (Friedman-Morgan). 複素多様体 X の *plurigenera* $p_m(X)=h^0(K^{\otimes m})$ は（任意の m について）微分位相不変量。特に *Van de Ven* 予想：小平次元は微分位相不変量、が成り立つ。

(Van de Ven 予想自体は少し前に Friedman-Qin により、Donaldson 理論を用いて証明されていた。)

他に、複素幾何、ケーラー幾何における射影空間の特徴付けのシンプレクティク類似として、次が得られる。

定理（小野一太田）. (X,ω) はシンプレクティク 4 次元多様体で $c_1(X)=\lambda\omega,\ \lambda>0$ かつ $[\omega]\in H^2(X;\mathbb{Z})$ とする。この時、

1）$\lambda\leq 3,\ c_1^2(X)\leq 9.$

2）$b_1(X)=0,\ b_2^+(X)=1,\ \mathit{Todd}\ (X)=1.$

3）π_1X は有限指数部分群をもたない。

実は仮定は $c_1(X)\wedge\omega>0$ かつ $c_1^2(X)>0$ で十分である（服部晶夫先生による御指摘)。これを使うと、Mumford による fake projective plane について次のことがわかる。fake projective plane X は Betti 数が射影平面と同じであるが、標準束が豊富な一般型代数曲面である。(もともと p 進数 $\mathbb{Q}_p$ を用いて構成される。少なくとも 3 つは存在することが知られているが、どれだけあるかはまだ知られていない。) 宮岡一 Yau 不等式において等号が成立する場合で、Yau の結果により、これらは $\mathbb{C}^2$ の中のボール商 $B^4/\Gamma,\ \Gamma\in SU(2,1)$ の形にかける。Γ が有限指数部分群をもつことから、

命題. 任意の *fake projective plane* X には

$$\int_X c_1(K)\wedge\omega\leq 0$$

なるシンプレクティク構造は存在しない。

ーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーーー

ここに書かなかったが他にも重要なことはいくつもある。例えば、ケーラー曲面の場合モノポール方程式は具体的に解くことができ、そのモジュライと stable pair のモジュライとの関係や、埋め込まれた曲面の種数に関する adjunction 不等式（一般化された Thom 予想、もともとの Thom 予想）などがあるが、それらについては既に幾度かお話させて頂いており、また既に原稿の〆切日になってしまっていることでもあるので、書くことを御勘弁下さい。

References

1. R.Fintushel and R.Stern, "Rational blowdowns on smooth 4-manifolds," preprint.

2. R.Friedman and J.W.Morgan, "Algebraic surfaces and Seiberg-Witten invariants," preprint. (どこかのプレプリントサーバーに入っています。)

3. P.B.Kronheimer and T.S.Mrowka, "The genus of embedded surfaces in the projective plane," Math. Res. Letters 1 (1994), 797-808.

4. N.Seiberg and E.Witten, "Electromagnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory," hep-th/9407087.

5. N.Seiberg and E.Witten, "Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD," hep-th/9408099.

6. C.H.Taubes, "The Seiberg-Witten invariants and symplectic forms," Math. Res. Letters 1 (1994), 809-822.

7. C.H.Taubes, "More constrains on symplectic manifolds from Seiberg-Witten invariants," Math. Res. Letters 2 (1995), 9-14.

8. C.H.Taubes, "The Seiberg-Witten and Gromov invariants," preprint.

9. E.Witten, "Supersymmetric Yang-Mills theory on a four manifold," hep-th, 94/5.

10. E.Witten, "Monopoles and four-manifolds," Math. Res. Letters 1 (1994), 769-796.

11. H.Ohta and K.Ono, "Notes on symplectic 4-manifolds with $b_2^+ = 1$," preprint.

12. H.Ohta and K.Ono, "Notes on symplectic 4-manifolds with $b_2^+ = 1$, II," in preparation.

１９９５年５月１９日＝〆切日

11/8予想とモノポール方程式

京大数理研　　　　古田幹雄

1. 11/8予想

Xを4次元のスピン閉多様体とする。必要なら向きをいれかえ、Xのsignatureは0以下と仮定する。この時、Xの交差形式は、$H^2(X,\mathbb{Z})/\mathrm{torsion}$のユニモジュラー2次形式であり、ある非負整数$a, b$に対して

$$2aE_8 + bH \qquad \left(\text{ただし } E_8 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & & & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & & & 1 \\ & & 1 & -2 & 1 & & & \\ & & & 1 & -2 & 1 & & \\ & & & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & & & 1 & -2 & \\ & & 1 & & & & & -2 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

という形をしている。（Rochlinの定理、Donaldsonの定理Aによる。）

11/8予想　$3a \leq b$

上の予想は「第2Betti数とsignatureの絶対値との比が11/8以上」と同値である。K3曲面と$S^2 \times S^2$のいくつかの直和をとると、$3a \leq b$をみたす任意のa, bに対して$2aE_8 + bH$が実現されることがわかる。

既知の結果としては、Donaldson (1986)が $a \geq 1 \Rightarrow b \geq 3$ を示し、Kronheimer-Mrowka (1994)が $a \geq 2 \Rightarrow b \geq 6$ 及び $a \geq 3 \Rightarrow b \geq 9$ をアナウンスしている。

ここでは、次の結果の証明のあらすじを説明する。

定理1　$a>0$ のとき、　$2a+1 \leq b$

2. Rochlinの定理

Rochinの定理の、Atiyah-Singer index theoremを用いた証明の復習をする。この節の議論は、直接後には使われないが、この節の議論の、いわば非線型版が後に展開される。

4次元スピン閉多様体Xに、Riemann計量をひとつ固定する。$P_\pm$を、スピン構造に対応する正負のスピン主束とする。$P_\pm$の構造群は、$Sp(1)$である。$Sp(1)$は長さ1の四元数の全体であり、四元数体$\mathbb{H}$に、右と左から乗法で作用する。$\mathbb{H}$への左乗法によって$P_\pm$と同伴するベクトル束$S_\pm$には、右乗法によって$Sp(1)$がさらに右から作用する。Dirac作用素 $\not{D} : \Gamma(S_+) \longrightarrow \Gamma(S_-)$ は一階の微分作用素で、$Sp(1)$同変である。

$\not{D}$は Fredholm作用素である。即ち、$\Gamma(S_\pm) = V_\pm^0 \oplus V_\pm^1$, $\not{D} = \not{D}_0 \oplus \not{D}_1$ という直和分解が存在し、$\not{D}_0 : V_+^0 \longrightarrow V_-^0$ は有限次元ベクトル空間の間の線型写像、$\not{D}_1 : V_+^1 \longrightarrow V_-^1$ は無限次元ベクトル空間の間の同型な線型写像となる。これは、「有限次元を無視すると$\not{D}$は同型である」ととらえられ、また一方逆に、「十分大きな有限次元部分空間を考えることにより、(無限次元部分空間間の)同型の部分を(キャンセルされるとみなし)無視すると、$\not{D}$を有限次元ベクトル空間の間の写像によって近似できる」ととらえることもできる。ここでは後者の見方をとる。このような分解のとり方は一意ではないが、$\dim V_+^0 - \dim V_-^0$は分解のとり方によらない。特に分解を $V_+^0 = \mathrm{Ker}\,\not{D}$　$V_-^0 \cong \mathrm{Coker}\,\not{D}$ となるようとれるので、この値は $\dim \mathrm{Ker}\,\not{D} - \dim \mathrm{Coker}\,\not{D}$ に等しい。Index theoremは、この値のtopologicalな計算方法を与える。今の場合それは、($\mathbb{R}$上の次元で)

$$-(\mathrm{signature})/4$$

となる。

一方、$\not{D}$ は $Sp(1)$ 同変であり、±の分解は $Sp(1)$ 作用を両立するようにとれる。（$V^+ = \mathrm{Ker}\,\not{D}$, $V^- \cong \mathrm{Coker}\,\not{D}$ がその例である。）よって、V^+, V^- は $Sp(1)$ 加群であるとしてよい。今の場合それらは $\mathbb{H}$ の有限個の直和と同型になる。（∵ X に適当に有限個の点 $p_1, \ldots, p_l$ をとると、制限写像 $V^\pm \longrightarrow \bigoplus_i (S_\pm)_{p_i}$ が埋め込みになり、各 $(S_\pm)_{p_i}$ は $\mathbb{H}$ と同型な $Sp(1)$ 加群。）特に、$\dim V^\pm$ は4の倍数である。これから「4次元スピン閉多様体の signature は16で割り切れる」という Rochlin の定理が得られる。

3. モノポール方程式

以下、簡単のため、X の第1 Betti 数が 0 の場合のみを考える。X の交差形式を考察するためには、必要なら X に surgery を行って、交差形式をかえずに第一 Betti 数を 0 にすることができるので、これで十分である。

前節の議論の非線型版を次節で行うための準備をする。線型微分作用素

$$\not{D} : \Gamma(S_+) \longrightarrow \Gamma(S_-) \qquad Sp(1)\text{-同変}$$

のかわりに、X のスピン構造に対応するモノポール方程式から得られる写像

$$L+Q : V \longrightarrow W \qquad G\text{-同変}$$

を考える。ここで L は 1階の線型微分作用素、Q は微分を含まない2次の写像、G はあるコンパクト Lie 群である。具体的には、次の通りである。

$$\begin{cases} V = \Gamma(S_+) \oplus \mathrm{Ker}(\Omega^1 \xrightarrow{d^*} \Omega^0) & \\ W = \Gamma(S_-) \oplus \Omega^+ & (\ \Omega^+ = \{\text{self-dual 2-forms}\}\ ) \\ L = \not{D} \oplus d^+ & (\ d^+\alpha = \text{self-dual part of } d\alpha\ ) \\ Q : (\Phi, \alpha) \longmapsto (\alpha\Phi i,\ \Phi i \bar{\Phi}) & \\ G = \langle S^1, j \rangle \subset Sp(1) & (\ S^1 = \{z \in \mathbb{R} + \mathbb{R}i \mid |z| = 1\}\ ) \end{cases}$$

ここで、Q の定義の中の $\alpha\Phi$ は Clifford 積、$\alpha\Phi i$ はさらに右から $i \in \mathbb{H}$ を

かけたものである。また、$\Phi i \Phi$ は、

$$S_+ = P_+ \times_{Sp(1)} \mathbb{H} \longrightarrow \Lambda^+ = P_+ \times_{Sp(1)} \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$$
$$\Phi \longmapsto \Phi i \Phi$$

によって定義される。今、$S_\pm$ へのG作用を右乗法により定義し、Λ^1, Λ^+ へのG作用を $G/S^1 = \{\pm 1\}$ の乗法により定義すると、これらの写像はG同変である。

モノポール方程式の最も大切な性質は、解のmoduli空間のコンパクト性である。

FACT (Taubes etc.?)　　$(L+Q)^{-1}(0)$ はコンパクト

4. 大域的写像

アイディアは『V, Wの、十分大きな有限次元部分空間を考えることにより、(無限次元部分空間間の)同型の部分を無視すると $L+Q: V \to W$ を、有限次元ベクトル空間の間の写像によって近似できる』ということである。

ここでは要点のみを説明する。第1 Betti数が0という仮定の下で、$L+Q$ の零点集合はコンパクトである。よって、原点を中心とする十分大きな(無限次元の)球体 $B(V) \subset V$ をとると、$(L+Q)^{-1}(0)$ はその内部に含まれる。$L+Q$ は、$B(V)$ 上で、零点集合を保ちつつホモトピーで動かすと、次のような分解をもつ写像 $f \oplus L_1$ に(canonicalなやり方で)変形できることを示せる。

$$\begin{cases} V = V_0 \oplus V_1 \\ W = W_0 \oplus W_1 \end{cases} \qquad f: B(V_0) \to B(W_0),\ L_1: V_1 \to W_1$$

$\Bigg($ ・ L は分解を保ち、$L_1: V_1 \to W_1$ は L の制限で、同型写像。
　・ V_0, W_0 は有限次元。$f: B(V_0) \to B(W_0)$ は非線型。

特に、球面 $S(V_0)$ の f による像は $0 \in B(W_0)$ と交わらない。

これから、写像

$$\varphi: S(V_0) \longrightarrow S(W_0)$$

が得られる。この構成はcanonicalなので、G作用によって保たれる。従って、V_0, W_0 は有限次元のG加群であり、φ はG同変写像となる。

f のことを，大域的鏡面写像とよぶことにする。

第2節と同様に，index theorem を用いると，G加群 V_0, W_0 の可能性をしぼることができる。$\mathbb{H}$ を右乗法によってG加群とみなす。また，$\mathbb{R}$ を，$G/S^1 = \{\pm 1\}$ の乗法によってG加群とみなす。

補題 ある非負整数 m, n が存在して

$$\begin{cases} V_0 \cong (a+m)\mathbb{H} + n\mathbb{R} \\ V_1 \cong m\mathbb{H} + (b+n)\mathbb{R} \end{cases}$$

これから直ちに次の定理を得る。

定理2 4次元スピン閉多様体によって $2aE_8 + bH$ が交差形式として実現されるならば，ある m, n に対して，G同変写像

$$\varphi : S((a+m)\mathbb{H} + n\mathbb{R}) \longrightarrow S(m\mathbb{H} + (b+n)\mathbb{R})$$

が存在する。

従って，11/8 予想は，次の予想に帰着される。

予想 G同変写像 $\varphi : S((a+m)\mathbb{H} + n\mathbb{R}) \longrightarrow S(m\mathbb{H} + (b+n)\mathbb{R})$ が存在すれば，$3a \le b$。

5. 定理1の証明

定理1の証明のためには，次を示せばよい。

定理3 G同変写像 $\varphi : S((a+m)\mathbb{H} + n\mathbb{R}) \longrightarrow S(m\mathbb{H} + (b+n)\mathbb{R})$ が存在すれば，$a = 0$ または $2a+1 \le b$。

証明には，K理論を用いる。

$\varphi : S(V_0) \longrightarrow S(W_0)$ の cone $C\varphi : B(V_0) \longrightarrow B(W_0)$ を考える。

（φ が大域的鏡面写像からつくられる場合は，$C\varphi$ は，大域的鏡面写像をホモトピーで変形したものである。）複素K理論を用いるために，$C\varphi$ のかわりに $\tilde{\varphi} = C\varphi \times C\varphi : B(V_0)^2 \longrightarrow B(W_0)^2$ を考え，これを

$$\tilde{\varphi} : B(V_0 \otimes \mathbb{C}) \longrightarrow B(W_0 \otimes \mathbb{C})$$

とみなす。φは境界を保つG同変写像である。従って誘導写像

$$\varphi^* : K_G(B(W_0\otimes\mathbb{C}), S(W_0\otimes\mathbb{C})) \longrightarrow K_G(B(V_0\otimes\mathbb{C}), S(V_0\otimes\mathbb{C}))$$

が得られる。Thom同型定理から、2つのK群は、各々、Thom類τ_{W_0}, τ_{V_0}で生成される$K_G(pt)=R(G)$上の自由加群である。

<u>定義</u>　$\varphi_K \in R(G)$を、$\varphi^*\tau_{W_0} = \varphi_K \tau_{V_0}$ をみたす（唯一の）要素とする。

記号Kは K理論のKである。Thom類は次の性質をもつ。一般にEを$\mathbb{C}$上のG加群とすると、

$$\begin{array}{ccc} K_G(BE, SE) & \longrightarrow & K_G(BE) \cong K_G(pt) = R(G) \\ \tau_E & \longmapsto & \Lambda_{-1}E := \sum_k (-1)^k \Lambda^k E \end{array}$$

ここで、$\Lambda_{-1}E$は、EのEuler類である。これからR(G)の要素間の関係式　$\Lambda_{-1}(W_0\otimes\mathbb{C}) = \varphi_K \cdot \Lambda_{-1}(V_0\otimes\mathbb{C})$　を得る。

特に、$j\in G$の指標を見ると、次の関係式が得られる。

$$\mathrm{tr}(j\,|\,\Lambda_{-1}(W_0\otimes\mathbb{C})) = \mathrm{tr}(j\,|\,\varphi_K)\cdot \mathrm{tr}(j\,|\,\Lambda_{-1}(V_0\otimes\mathbb{C}))$$

ここで、$\mathrm{tr}(j\,|\,\Lambda_{-1}(\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}))=4$, $\mathrm{tr}(j\,|\,\Lambda_{-1}(\mathbb{R}\otimes\mathbb{C}))=2$ より、

$$4^m 2^{b+n} = \mathrm{tr}(j\,|\,\varphi_K)\cdot 4^{a+m}\cdot 2^n$$

また、$\mathrm{tr}(j\,|\,\varphi_K)$は、代数的整数であるから、上の整除関係から、$2a\le b$を得る。

また、Adams作用素の作用を考察することにより、φ_Kの可能性をもう少し強くしぼることができ、$a>0$の下で、$2a+1\le b$を得ることができる。

6. Seiberg-Witten不変量の整数性定理

<u>Xがスピン多様体でない時にも</u>、Xの$spin^c$構造を使って、似た構成を行うことができる。簡単のため、第1Betti数は0と仮定する。さらに、この節では$b^+ = (b_2 + \text{signature})/2$は3以上の奇数と仮定し、$p := (b^+-1)/2 \ge 1$とおく。Xはスピンとは仮定しない。

Xの Riemann計量と $Spin^c$ 構造をひとつ固定し，$W_\pm$ を正負の spinor 束とする。すると $\det W_+ \cong \det W_-$ であり，これを L とおく。$c_1(L)$ は，$\mathbb{R}$上 0 でないと仮定しておく。L上に接続をひとつ選ぶごとに，Dirac作用素をつくることができるが，今，Lの接続Aであって，曲率 dA が harmonic になるものを選んでおく。($b_1=0$なので一意的に存在する。) Xの Riemann計量を generic にとっておくと，dA の self dual part d^+A は 0でない。そのように仮定しておく。付随する Dirac作用素を $D: \Gamma(W_+) \longrightarrow \Gamma(W_-)$ とおく。$W_\pm$ には，S^1 が(右から)作用し，これによって複素ベクトル束の構造が入る。Dは S^1同変であり，$\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Ker} D - \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Coker} D$ は，($\operatorname{Ker} D$, $\operatorname{Coker} D$ の複素構造から)偶数になる。この値を $2k$ とおくと，index theorem から $k = (c_1(L)^2 - \text{signature})/8$ である。右辺が整数になることは，$c_1(L)$ が，実は，$w_2(X) \equiv c_1(L) \bmod 2$ をみたしていることによって保証されている。

この場合，大域的な断面写像から，S^1同変写像

$$\varphi : S((k+m)\mathbb{C} + n\mathbb{R}) \cup B(0 \oplus n\mathbb{R}) \longrightarrow S(m\mathbb{C} + (2p+1+n)\mathbb{R})$$

を得る。φは(up to homotopy で) 2つの Thom 空間の間の写像とみなせる。即ち，定義域，値域は，各々

$$\begin{array}{c} S((k+m)\mathbb{C}) \times \mathbb{R}^n \\ \downarrow \\ S((k+m)\mathbb{C}) \end{array} \quad \text{及び} \quad \begin{array}{c} pt \times (\mathbb{C}^m \oplus \mathbb{R}^{2p+n}) \\ \downarrow \\ pt \end{array}$$

の Thom 空間である。第5節では K_G 理論を用いたが，ここでは，まず，$H^*_{S^1}$理論を用いると，やはり，Thom類のひきもどしから

$$\varphi_H \in H^{2m+2p}_{S^1}(S(k+m)\mathbb{C}) = H^{2m+2p}(\mathbb{C}P^{k+m-1})$$

を得る。$d = k-p-1$ とおくと，φ_H の Poincaré双対は

P.D. $\varphi_H \in H_{2d}(\mathbb{C}P^{k+m-1}) \cong H_{2d}(\mathbb{C}P^{\infty})$ の要素と思うことができる。 $d<0$ ならこれは 0 なので、$d \geq 0$ と仮定する。

<u>補題</u> P.D. $\varphi_H \in H_{2d}(\mathbb{C}P^{\infty}) \cong \mathbb{Z}$ は、与えられた spin^c 構造の "Seiberg-Witten 不変量" と一致する。

あるいは、これをもって "Seiberg-Witten 不変量" の定義としてもよい。

一方、(必要なら $\mathbb{R}$ をひとつ直和し、それを偶数にしておく) K_{S^1} 理論を用いて $\varphi_K \in K(\mathbb{C}P^{k+m-1})$ を定義する。

$d\varphi_K$ と φ_H とは一般には一致せず、そのずれは、ある Todd 類を用いてあらわされる。一方、φ_K は、Adams 作用素の作用を考察することにより、その可能性をしぼることができる。この2つの事柄をあわせると、(これは [Atiyah] p143 の議論のまねである) 次の整数性定理を得る。

<u>定理4</u> $\left(\dfrac{\log(1+x)}{x}\right)^{p}$ の Taylor 展開の $1, x, \cdots, x^d$ の係数の分母は、すべて P.D $\varphi_H \in \mathbb{Z}$ の約数である。

上の定理は、$d=0$ あるいは P.D $\varphi_H = 0$ の時には何の意味もない。これまで知られているすべての例では、$d>0$ のとき $e=0$ である。もし、すべての場合にこれが成立するのであれば、上の定理は何も意味のあることは主張していないことになる。

なお、K_{S^1} 理論、$H^*_{S^1}$ 理論を考える以前の φ 自体 (の安定ホモトピー類) 自体が、X の spin^c 構造の不変量となっていることを注意しておく。

参考文献

[Atiyah] K-Theory (1967) Benjamin.

[Donaldson] JDG 24 (1986) 275–341

[Kronheimer] 1994年12月 Cambridge でのシンポジウムの講演(のノート)

[Witten] "Monopole and four-manifold" hep-th/9411102

ASYMPTOTIC METHOD IN HIGHER SIGNATURE PROBLEM

Tsuyoshi Kato

Univ. of Kyoto

1. この講演では、高位の符号数のホモトピー不変性について扱う。はじめに、Hirtzebruch の符号定理を思い出す。滑らかな閉多様体 M の符号数は、符号作用素の指数に等しいことはすぐわかる。一方その指数は、Hirtzebruch の符号定理から、有理ポントリャーギンクラスの積で書ける特性類で、L 種数と呼ばれるもの $L(M)$ の積分で書ける。従って $< L(M), [M] >$ は M の向きをいれた閉多様体のホモトピー不変量であることがわかる。

ポントリャーギンクラスは、多様体の接空間の特性類である。従って M の微分構造を一つ定めて決まる量なので、このことは、自明なことではない。

より一般な特性類を積分した量、高位の符号数がホモトピー不変であるかをここでは問題にする。それらの正確な定義は後で述べるが、基本群が関係してくる量である。

その問題に対し、現在、まだ完全な答えは得られていないが、基本群に幾何学的な条件をつけて様々な部分解が得られている。例えば、基本群が次の群と同型であるとき、それらがホモトピー不変量であることが知られていた。

（１） 非正曲率空間の基本群、

（２） 連結成分の数が有限のリイ群の離散部分群、

（３） 双曲的群。

双曲的群は、グロモフによって導入された離散群のクラスで、負曲率空間の基本群の持つ幾何学的な性質を満たす群である。

（１）（２）（３）のいずれの場合も、離散群自身が有限次元多様体に作用している。

（３）は分類空間 $K(\pi,1) = B\pi$ （に近いもの）が有限次元空間（単体複体）で実現できるクラスである。

ここでは幾何学的な条件を満たす離散群のクラス、

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(quasi geodesic bicombing groups) を設定し、さらに torsion free である時、それらの群に対して高位の符号数がホモトピー不変量であることを示す。

quasi geodesic bicombing groups は、双曲的群を含む。また $H^*(\Gamma, \mathbb{Q})$ のランクが有限で切れなくてよい。

2. 幾何学的な解釈　ここで高位の符号数と呼ばれるものの説明をする。π を離散群とする。M を閉多様体とし、$f : M \mapsto K(\pi, 1)$ を基本群の準同型を導く写像とする。f はホモトピー類の中で一意である。

今、$K(\pi, 1)$ が閉多様体 V ($\dim M \geq \dim V$) で実現されているとし、f が滑らかであるとする。f の正則点 $m \in V$ に対し、$W \equiv f^{-1}(m)$ は M の滑らかな部分多様体で、 codim $W = \dim V$ である。W の cobordism class は f のホモトピー類で決まる。また $[W] \in H_*(M)$ と見なすと W の Poincare dual 元は $f^*([V])$ である。ここで $[V] \in H^{dimV}(V)$ は V の基本コホモロジー類である。

W の normal bundle は自明であると仮定する。 その時

$$Sign(W) =< L(W), [W] >=< L(M), [W] >$$
$$=< L(M)f^*([V]), [M] >$$

が分かる。$Sign(W)$ は M の高位の符号数と呼ばれるものの一つである。

定義　$f : M \mapsto K(\pi, 1)$ を連続な写像とする。任意に $x \in H^*(\pi, 1)$ を取って来た時、

$$< L(M)f^*(x), [M] > \qquad \cdots *$$

を高位の符号数とよぶ。

予想　高位の符号数はホモトピー不変量である。

ノビコフ予想とよばれている。

別の幾何学的な見方をする。最近のノビコフ予想の発展にはこちらの解釈が非常に有効であった。

$F \to X \to M$ を M 上のファイバー束とする。X が滑らかな閉多様体の時、X の符号数は $*$ の形をしている。より正確には、$H \to M$ を ファイバーが $H^*(F; \mathbb{R})$ と同型であるような ” コホモロジー束” とする。H は平坦なベクトル束である。H には自然に involution が作用し、$H = H_+ \oplus H_-$ と分裂する。各 H_+, H_- は $K(\pi, 1)$ 上のベクトル束を引き戻したものであり、

$$Sign(X) =< L(M)ch(H_+ - H_-), [M] > \qquad \cdots **$$

である。明らかに左辺、従って右辺はホモトピー不変量である。次の二つの問いは自然である。

問い

（１）$*$ を ”符号数” として持つ M 上のファイバー束 X で ”多様体”（に近いもの）を構成せよ。

（２）$*$ のホモトピー不変性を示すためには、ファイバー束から作られる平坦なベクトル束と、そこに作用するうまい involution だけが必要である。従って任意の $x \in H^*(\pi, \mathbb{Q})$ に対し、上のような代数的な対象のみを見つけよ。

（２）の方法で、 Lusztig は基本群が自由アーベル群の場合のノビコフ予想を示している。

（１）に対してこれまでに有効な方法があったかどうか私は知らない。

3. Fredholm representation. （２）のベクトル束の無限次元版といえるものが、 Mischenko によって見つけ出されたフレドホルム表現である。

定義　離散群 π を fix する。π のフレドホルム表現とは組 (H_1, H_2, ρ, F) のことである。

ここで H_1, H_2 はヒルベルト空間、 $F : H_1 \mapsto H_2$ はフレドホルム作用素、 $\rho : \pi \mapsto U(H_1, H_2)$ はユニタリ表現で次を満たす。任意の $\gamma \in \pi$ に対し $\rho(\gamma)F - F\rho(\gamma)$ はコンパクト作用素。

フレドホルム表現 F から $K(\pi, 1) = B\pi$ 上の virtual bundle が以下のようにして構成される。

連続で equivariant な写像 $f : E\pi \mapsto B(H_1, H_2)$ で １つの頂点 x では $f(x) = F$, 任意の $x, y \in E\pi$ に対し $f(x) - f(y)$ はコンパクト作用素となるようなものを構成する。これが可能なのは上の条件があるからである。$(f : E\pi \times_\pi H_1 \mapsto E\pi \times_\pi H_2)$ が求めるものである。

この対応は $B\pi$ 上の virtual bundle のホモトピー類の中で well defined であり、 $\mu(F)$ と書くことにする。

$$\mu : \{ \text{ Fredholm representations } \} \mapsto \text{ virtual bundles over } B\pi.$$

定理 (Mischenko)　　$f : M \mapsto B\pi$ を連続な写像とする。

$$< L(M) f^* ch(\mu(F)), [M] >$$

は M の向きをいれたホモトピー不変量。

4. Novikov conjecture for word hyperbolic groups. 上の定理から、次に考えることは、$H^*(\pi, \mathbb{Q})$ の元はどれくらいフレドホルム表現から作られるだろうかということである。A.Connes, M.Gromov, H.Moscovici 達により、離散群が 双曲的であるとき、$H^*(\pi, \mathbb{Q})$ の元はすべてフレドホルム表現からくることが示された。以下でその説明をする。

事実　一般の離散群に対し、Rips complex と呼ばれる有限次元単体複体の列 $\{P_n(\pi)\}_{1 \leq n}$ が存在し、次を満たす。
（１）各 $P_n(\pi)$ には π が作用し、$P_n(\pi)/\pi$ はコンパクト。
（２）π が torsion free である時、上の作用も自由。
（３）$P_1(\pi) \subset \ldots P_n(\pi) \subset P_{n+1}(\pi) \subset \ldots$
（４）π が双曲的の時、充分大きな n に対し $P_n(\pi)$ は可縮。

特に、双曲的で torsion free である離散群には有限次元単体複体で分類空間が実現できる。P_n/π を偶数次元ユークリッド空間に埋め込んで正則近傍をとったものを $\tilde{P_n}(\pi)/\pi$ と書く。$\tilde{P_n}(\pi)/\pi$ は境界のない開多様体とみなす。$\tilde{P_n}(\pi)$ には自然に距離が入る。以下簡単の為、π は双曲的で、torsion free とする。

一般に空間 X の上の ” Dirac 作用素 ” から作られる K homology $K_*(X)$ が存在する。K cohomology $K^*(X)$ （ X 上のベクトル束の同型類の群化 ）との pairing が、ベクトル束をテンソルして指数を取ることでとれる。

事実　$ch_* : K_0(\tilde{P_n}/\pi) \otimes \mathbb{Q} \cong H_{2*}^{inf}(\tilde{P_n}/\pi; \mathbb{Q})$

ここで $H^{inf}(\tilde{P_n}/\pi; \mathbb{Q})$ は局所有限な無限チェインのホモロジー群。

K homology と K cohomology を合体させたものがカスパロフの KK 群である。KK 群はノビコフ予想の証明に非常に有効であった。実際、[CGM] や、ここではそれを大きく使う。KK 群は作用素環 （ C^* 環 ）の framework の中で幾何学的に定義されるものであり、その定義を知るのにも多少作用素環の知識が必要である。ここではそれらを定義することはしないで、いくつかの性質を述べるだけにする。

KK は空間の対 (X, Y) に対して定まる bifunctor で、X について 共変, Y について 反変である。さらに次が成り立つ。

$$KK_*(X, pt) \cong K_*(X)$$
$$KK_*(pt, Y) \cong K^*(Y)$$

Equivariant version もある。$KK_\pi(pt,pt)$ はフレドホルム表現をホモトピー類で割ったものである。

最も重要な性質は intersection product と呼ばれる pairing が存在することである。

$$KK_\pi(X,Y)\times KK_\pi(Y,Z)\mapsto KK_\pi(X,Z)$$

双曲的群に対する [CGM] の方法で本質的なステップは $\phi\in KK_\pi(pt,\tilde{P}_n)$ を構成することである。それは次のようにしてつくられる。

P_n が可縮であることを使って Poincare duality を導く写像

$$\alpha:\tilde{P}_n\times_\pi\tilde{P}_n\mapsto T\tilde{P}_n/\pi$$

が作られる。即ち $\beta\in H^*(P_n/\pi;\mathbb{Q})$, $z\in H_*^{inf}(\tilde{P}_n/\pi;\mathbb{Q})$ に対し

$$\alpha\cap: H_*^{inf}(\tilde{P}_n/\pi;\mathbb{Q})\mapsto H^*(P_n/\pi;\mathbb{Q})$$
$$\alpha\cap(z)(\beta)=\int_{\tilde{z}\times_\pi\tilde{\beta}}\alpha.$$

<u>補題 [CGM]</u>　この α がファイバーごとに Lipschitz であれば、これから ϕ が構成される。

そのため α を fiberwise な proper homotopy でファイバーごとに Lipschitz になるように変形する。まず π の双曲性を使って次の写像が構成される。

<u>補題</u>　次のような F_t が存在する。任意に小さい $0<\mu<1$ をとる。

$$F_t:\tilde{P}_n\times_\pi\tilde{P}_n\mapsto\tilde{P}_n\times_\pi\tilde{P}_n$$

（1）F_1 はファイバーごとに μ Lipschitz,

（2）F_t はファイバーごとの proper homotopy で恒等写像と F_1 をつなぐ。

<u>注意</u>　上のような F が存在すれば、$\tilde{P}_n$ は可縮でなければならない。

十分大きな r をとって $D\equiv\{(x,y)\in\tilde{P}_n\times_\pi\tilde{P}_n, d(x,y)\leq r\}$ とおく。α を少し modify して $\mu^{-1}\alpha\circ F|_{\partial F^{-1}(D)}=\alpha|_{\partial F^{-1}(D)}$ となるようにしておく。

$$B_i\equiv\{(x,y)\in\tilde{P}_n\times_\pi\tilde{P}_n, F^i(x,y)\equiv F\circ\dots F(x,y)\in D\}$$
$$D_i\equiv B_i-B_{i-1}$$

とおき、

$$\alpha_\infty : \tilde{P}_n \times_\pi \tilde{P}_n \mapsto T\tilde{P}_n$$

を $\alpha_\infty|_{D_i} \equiv \mu^{-i+1}\alpha \circ F^{i-1}$ で定義する。α_∞ はファイバーごとに Lipschitz であることが分かり、さらに上の補題 (2) からファイバーごとに α に properly homotopic であることが分かる。

上のようにして構成された α_∞ から ϕ をつくる。この ϕ を使って

$$\phi : KK_\pi(\tilde{P}_n, pt) \mapsto KK_\pi(pt, pt)$$
$$\phi(x) \equiv \phi \times x$$

と定義すれば、

定理 [CGM]　次の可換な図式がある。

$$\begin{array}{ccc} KK_\Gamma(\tilde{P}_n(\pi), \mathbb{Q}) & \xrightarrow{\phi\circ\mu} & K^{2*}(B\pi) \\ \downarrow ch_* & & \downarrow ch^* \\ H_{2*}^{inf}(\tilde{P}_n(\pi)/\pi) & \xrightarrow{PD} & H^{2*}(B\pi) \end{array}$$

ここで PD は Poincare duality。

群に $\mathbb{Z}$ をかけることで、コホモロジーの元が奇数次の時も、偶数次の場合に帰着できる。従って

系　π を双曲的な離散群とし、$f : M \mapsto K(\pi, 1)$ を連続な写像とする。その時 任意の $x \in H^*(\pi, \mathbb{Q})$ に対し $< L(M)f^*(x), [M] >$ は向きを入れた多様体のホモトピー不変量。即ち、$p : M_1 \to M_2$ を向きを入れた滑らかな閉多様体の間のホモトピー同値写像とする。その時

$$< L(M_1)(p \circ f)^*(x), [M_1] >=< L(M_2)f^*(x), [M_2] > .$$

双曲的群の場合、$\mathbb{Q}$ 上 $K(\pi, 1)$ が有限次元単体複体で実現できることを上の構成では本質的に使った。双曲的群より広いクラスを扱う場合、例えば非正曲率空間の基本群を念頭においたクラス（ここで扱うクラス）では、そのことは望めない。（反例があるわけではないが。）特に $H^*(\pi, \mathbb{Q})$ のランクが有限であるかどうかもわからない。

5. Quasi geodesic bicombing groups　離散群に対し combable という概念があるが、これを満たすクラスは非常に大きく、双曲的群、オートマチック群などのクラスを含む。ここで扱うクラスもすべて combable である。

定理　π が combable である時、$K(\pi,1)$ が各次元の胞体の数が有限であるような CW 複体で実現できる。

上の定理によって、combable group π に対し, dim $H^n(\pi,\mathbb{Q})<\infty$ が 各 n についていえる。このことを併せて、以下で扱うクラスでは、$K(\pi,1)$ を有限次元で近似した空間、Rips 複体上で、双曲的群の場合の $K(\pi,1)$ に対する構成を真似する。

離散群の定義　離散群の生成元を定めると、それからケイリイグラフと呼ばれる 1 次元単体複体であるものが構成される。$G(\pi)$ などと書く。

非正曲率空間の普遍被覆空間上の測地線の凸性を念頭において次の概念を導入する。

定義（グロモフ）　π が 次の性質を持つ時 bicombing と呼ぶ。任意に生成元を定める時、連続で π equivariant な写像 S

$$S:\pi\times\pi\times[0,1]\mapsto G(\pi)$$

で、ある $k\geq 1, C\geq 0$ に対し、次を満たす。

$$S(0,\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_1,\quad S(1,\gamma_1,\gamma_2)=\gamma_2,$$
$$d(S_t(\gamma_1,\gamma_2),S_t(\gamma_1',\gamma_2'))\leq k(td(\gamma_2,\gamma_2')+(1-t)d(\gamma_1,\gamma_1'))+C.$$

$S(\quad,\gamma_1,\gamma_2):[0,1]\mapsto G(\pi)$ は γ_1 と γ_2 をつなぐ道だが、あまり遠周りしたり、$[0,1]$ の間にスピードが急激に変化したら困るので次の性質を要求する。

定義（グロモフ）　π が bicombing で bounded とはさらに以下を満たすもののことである。或る $k\geq 1, C\geq 0$ に対し

$$d(S_t(\gamma_1,\gamma_2),S_{t'}(\gamma_1,\gamma_2))\leq k|t-t'|d(\gamma_1,\gamma_2)+C$$

定義　π : bounded bicombing が quasi geodesic とは 各 γ について $S(\quad,e,\gamma)$ は逆戻りせず、さらに次の性質を満たす。$S(\quad,e,\gamma)$ がたどる道を早さ 1 で進む写像を ω_γ と書く。

$\omega_\gamma : [0, |S(\quad, e, \gamma)|] \mapsto G(\pi)$. その時 $d(\gamma_1, \gamma_2) \leq 1$ に対し

$$Ud(\omega_{\gamma_1}, \omega_{\gamma_2}) \equiv sup_t d(\omega_{\gamma_1}(t), \omega_{\gamma_2}(t)) \leq C,$$
$$|S(\quad, e, \gamma)| \leq k|\gamma| + C$$

さらに 或る $A > 0, B \geq 0$ があって

$$d(\gamma, S_t(\gamma, \gamma')) \geq Atd(\gamma, \gamma') - B$$

を満たす。

この S を使って次の補題が容易に示せる。

補題 (Alonso) π が quasi geodesic ならば、各 Rips 複体 $P_i(\pi)$ は、十分大きな $n = n(i)$ について $P_n(\pi)$ の中で可縮である。

上の補題から torsion free quasi geodesic な離散群に対し $P_\infty(\pi)$ は $E\pi$ の実現である。また双曲的群の時と違って P_n が可縮ではないので、前のような $F : \tilde{P}_n \times_\pi \tilde{P}_n \mapsto \tilde{P}_n \times_\pi \tilde{P}_n$ は構成できない。しかし次の写像の family を構成する。

補題 任意に $\{\mu_i\}_{0\leq i}$ を $1 >> \ldots \mu_i >> \mu_{i-1} \cdots >> \mu_0 > 0$ となるようにとる。ある Rips 複体の列 $\{P_{n(i)}\}_{0\leq i}$ と写像の列が存在して次を満たす。

$$F_i : \tilde{P}_{n(0)} \times_\pi \tilde{P}_{n(i)} \mapsto \tilde{P}_{n(0)} \times_\pi \tilde{P}_{n(i+1)}$$

(1) 各 F_i はファイバーごとに μ_i Lipschitz,
(2) 各 F_i はファイバーごとに inclusion と properly homotopic.

これらを使って

補題

$$\alpha_\infty : \tilde{P}_{n(0)} \times_\pi \tilde{P}_{n(0)} \mapsto \mathbb{R}^\infty$$

で α とファイバーごとに properly homotopic な写像が構成される。さらに

$$pr : \mathbb{R}^\infty \mapsto \mathbb{R}^N, \qquad N = dim\tilde{P}_{n(0)}$$

をスタンダードな projection とすると、$pr \circ \alpha_\infty$ はファイバーごとに proper な写像である。

これと α_∞ は明らかにファイバーごとに proper homotopic であるので、前のように $\phi \in KK_\pi(pt, \tilde{P}_n)$ が構成される。$n = n(0)$.

次のことがよく知られている。

定理 $H_*(P_\infty(\pi)/\pi) = lim_n H_*(P_n(\pi)/\pi)$

π が combing の場合、各 $H_n(P_n(\pi)/\pi;\mathbb{Q})$ のランクが有限であることとこの定理をあわせて、次の補題を得る。

補題 任意に N をとった時、$* \leq N$ に対し、充分大きな n をとれば、inclusion $i : P_n(\pi)/\pi \to P_\infty(\pi)/\pi$ に対し

$$i_* : H_*(P_n(\pi)/\pi;\mathbb{Q}) \mapsto H_*(P_\infty(\pi)/\pi;\mathbb{Q})$$

は $* \leq N$ で全射。

定理 次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} KK_\pi(C_0(\tilde{P_n}(\pi)),\mathbb{Q}) & \xrightarrow{\mu\circ\psi} & K^{2*}(B\pi) \\ \downarrow{ch_*} & & \downarrow{i^*\circ ch^*} \\ H_{2*}^{inf}(\tilde{P}_n(\pi)/\pi) & \xrightarrow{PD} & H^{2*}(P_n(\pi)/\pi) \end{array}$$

系 π が torsion free quasi geodesic bicombing group とする。そのとき任意に N をとる。各 $x \in H^{2*}(B\pi;\mathbb{Q})$ に対し、あるフレドホルム表現 F で $x - ch(\mu(F)) \in H^*(B\pi;\mathbb{Q})$, $* \geq N$ を満たすものが存在する。

系 torsion free quasi geodesic bicombing groups に対し、高位の符号数は、向きをいれたホモトピー不変量。

Refs

[CGM] A. Connes, M. Gromov, H. Moscovici
Group cohomology with Lipschitz controll and Higher Signatures. . (GAFA 3) 1993年.

[K] T. Kato
Lipschitz construction of infinite groups and higher signatures (学位論文).

[M] A.S. Mischenko
Infinite dimensional representations of discrete groups and higher signature
(Izv. Akad. Nauk. SSSR. 38, 1974年)

The Geometry and Topology of the Fibonacci manifolds

Alexander Mednykh and Andrei Vesnin

1. Introduction

We consider three dimensional compact orienatable manifolds connected with the Fibonacci groups. The Fibonacci groups

$$F(2,m) =< x_1, x_2, ..., x_m : x_i x_{i+1} = x_{i+2},\ i \bmod m >$$

were introduced by J. Conway [2]. First of all the following question was connected with these groups: whether $F(2,m)$ are infinite groups or not. From [3], [7], [24], [10] and [30] it is known that the group $F(2,m)$ is finite if and only if $m = 1,2,3,4,5,7$. The algebraic generalizations of $F(2,m)$ were considered in [5] and [15].

A new stage in the investigation of the Fibonacci groups is connected with a remarkable work of Helling, Kim and Mennicke [10]. They showed that the Fibonacci groups are interesting from the geometrical point of wiew. In particular, the group $F(2,2n)$ is isomorphic to a discontinuous co-compact subgroup isometries which acts fixed point free on a space X_n, where $X_2 = S^3$–spherical, $X_3 = \mathbb{E}^3$–Euclidean and $X_n = \mathbb{H}^3$ is hyperbolic space for $n > 3$. Moreover the group $F(2,6)$ is isomorphic to the fundamental group of the Hantzche-Wendt manifold [38].

We will call manifolds $M_n = X_n \,/\, F(2,2n)$, uniformized by Fibonacci groups to be **Fibonacci manifolds**.

C. Maclachlan [15] showed that if m is odd then the groups $F(2,m)$ cannot be the fundamental groups of hyperbolic 3-manifolds of finite volume.

In [11] it is shown that manifolds M_n are n–fold cyclic covers of the S^3, branched over the figure-eight knot. We note that M_n are isometric to hyperbolic manifolds, described by Hempel [9].

For all positive integers k, the manifolds M_{3k} are double covered by a fiber bundle over the circle [26].

It has proved in [10] and [11] the manifold M_n is arithmetic for $n = 4, 5, 6, 8, 12$ and non-arithmetic otherwise.

In the present paper we continue the investigation of the algebraical, topological and arithmetical properties of Fibonacci manifolds.

Acknowledgements. The first–named author gratefully acknowledges the support and the hospitality of the *Tokyo Institute of Technology* during the preperation of the present article. Both authors are thankful to Russian Fund of Fundamental Investigations (Grant 94-01-01170) and International Scientific Fund (Grant RPD 000) for financial support of this work.

2. Hyperbolic volumes of the Fibonacci manifolds

In this section we recall some properties of the volumes of the hyperbolic manifolds. An n-dimensional hyperbolic manifold can be defined as a quotient space $M^n = \mathbb{H}^n/\Gamma$, where Γ is a discrete isometry group of the Lobachevsky space $\mathbb{H}^n$ acting without fixed points. The concepts of hyperbolic area and hyperbolic volume in $\mathbb{H}^2$ and $\mathbb{H}^3$ are carried over naturally to M^2 and M^3. We are interested in the set $\mathcal{M}^n$, $n = 2, 3$, of n-dimensional orientable hyperbolic manifolds of the finite volume.

Consider the volume function $v_n : \mathcal{M}^n \to \mathbb{R}$, $n = 2, 3$ which makes correspondence between a manifold $M^n \in \mathcal{M}^n$ and its volume $vol(M^n)$. It is interesting to remark that the volume functions v_2 and v_3 have essentially different properties.

The two-dimensional case is described by the Gauss–Bonnet theorem. If M^2 is a hyperbolic surface of genus g with k points removed, then

$$vol(M^2) = 2\pi\,(2g - 2 + k).$$

Therefore the values of v_2 are positive numbers from the set $2\pi\mathbb{N}$, where $\mathbb{N}$ is the set of natural numbers, and we have the following picture for the values of v_2 (see Figure 1):

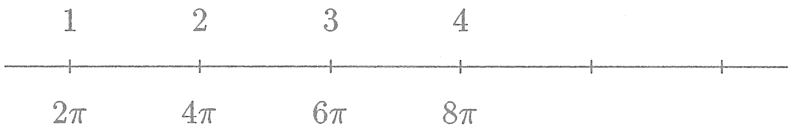


Figure 1. *Values of* v_2.

In particular, for each even $n \in \mathbb{N}$, there are compact and non-compact surfaces with the same area $2\pi n$.

In the three-dimensional situation we have the following remarkable theorem of Thurston and Jørgensen: *the set of volumes of three-dimensional hyperbolic manifolds form a well-ordered subset of the real line of type* ω^ω. Therefore we have the following picture for v_3 (see Figure 2), where we show some known values:

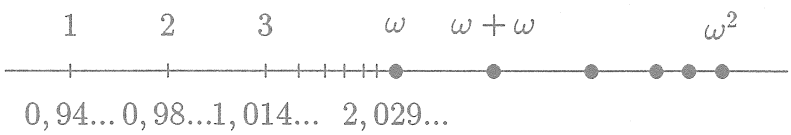


Figure 2. *Values of* v_3.

In particular, it follows from the Thurston–Jørgensen theorem that there exists a three-dimensional hyperbolic manifold with the smallest volume. The minimal known value of volumes of non-compact manifolds (which corresponds to the first limit ordinal number) is equal to the double volume of the regular ideal tetrahedron and it is the volume of the complement of the Figure-eight knot. The minimal known value of volumes of compact manifolds is the volume of the Weeks–Matveev–Fomenko manifold [16], [34].

In [16] Matveev and Fomenko conjectured the structure of the initial part of the volume sequence of compact manifolds. But the set from [16] does not contain the Meyerhoff–Neumann manifold [20], which corresponds to the third minimal known volume (Theorem 3).

In [31] Thurston constructed an example of two non-compact manifolds with different numbers of the cusps, but with the same volume. This volume corresponds to the limit ordinal of the set ω^{ω}. But it was unknown if there are compact manifolds which volumes correspond to limit ordinals. It will be shown (Theorem 1) that the compact Fibonacci manifolds have this property.

Denote by Th_n, $n \geq 2$, the closed 3-strings braid $\left(\sigma_1\sigma_2^{-1}\right)^n$.We note that members of the family Th_n are well-known. In particular, Th_2 is the Figure-eight knot, Th_3 are the Borromean rings, Th_4 is the Turk's head knot 8_{18} and Th_5 is the knot 10_{123} according to the notaion of [28]. It was shown in [31] that the manifolds $S^3 \setminus Th_n$ are hyperbolic for all $n \geq 2$. In [14] the virtual Betti number of compact hyperbolic manifolds obtained by Dehn surgeries on knots Th_n were studied. The symmetry groups of knots and links Th_n are described in [29].

The following theorem has been proved by the authors in [17] and [18].

Theorem 1. *For $n \geq 2$ we have*

$$vol\ (M_{2n}) = vol\ \left(S^3 \setminus Th_n\right).$$

Therefore the volumes of the compact Fibonacci manifolds correspond to limit ordinals in the Thurston–Jørgensen theorem. In particular, the following assertions hold.

Corollary 1. *The volume of the manifold M_4 is equal to the volume of the complement of the figure-eight knot.*

Corollary 2. *The volume of the manifold M_6 is equal to the volume of the complement of the Borromean rings.*

Many properties of hyperbolic manifolds are defined by arithmeticity or non-arithmeticity of their fundamental group [1]. As proven in [10] and [11] the manifold M_n is arithmetic for $n = 4$, 5, 6, 8, 12 and non-arithmetic otherwise. It is well-known [25] that Th_2, the Figure-eight knot, is the only arithmetic knot. It is shown in [31] that Th_3, the Borromean rings, is also arithmetic.

Corollary 3. *We have the following table of manifolds of equal volume:*

n	M_{2n}	$S^3 \setminus Th_n$
2	*arithmetic*	*arithmetic*
3	*arithmetic*	*arithmetic*
4	*arithmetic*	*non-arithmetic*
5	*non-arithmetic*	*non-arithmetic*

In particular, there exist an arithmetic compact manifold M_8 and a non-arithmetic non-compact manifold $S^3 \setminus Th_4$ which have the same volume.

A. W. Reid kindly informed us about his unpublished results where he constructed compact arithmetic and non-compact arithmetic manifolds with the same volume by number-theoretical methods.

3. Fibonacci manifolds as two-fold coverings.

The following theorem gives one more relation between Fibonacci manifolds M_n and links Th_n.

Theorem 2. *For any $n \geq 2$ the manifold M_n can be represented as a two-fold covering of the S^3 branched over Th_n.*

The proof of the theorem is based on the commutativity of the following diagram of coverings (Figure 3).

$$\begin{tikzcd} & M_n \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "n"] & \\ Th_n(2) \arrow[dr, "n"'] & & Th_2(n) \arrow[dl, "2"] \\ & 6_2^2(2,n) & \end{tikzcd}$$

Figure 3. *The diagram of coverings.*

In this diagram we denote by $Th_n(k)$ an orbifold with the underlying space the 3-sphere and the singular set the link Th_n with the branched index k. At the same time $6_2^2(2,n)$ is an orbifold with the underlying space the 3-sphere and the singular set the interchangeable 2-component link 6_2^2 according to [28] with branched indices 2 and n. For more detaled arguments see [19].

We recall that Meyerhoff and Neumann [20] have obtained a compact hyperbolic manifold $N = W(3,-2;6,-1)$ by means of Dehn surgery on the Whitehead link which volume approximately (up to 10^{-50}) equals to the volume of the regular ideal tetrahedron. They asked if the volumes are strictly equal and if the manifold N is arithmetic over the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$. As a consequence of the above results we have affirmative answers on this questions.

Theorem 3. *The Meyerhoff–Neumann manifold is arithmetic over the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$ and its volume equals to the volume of the regular ideal tetrahedron.*

For the demonstration of this theorem we remark that by the Montesinos theorem [22] any manifold obtained by a Dehn surgery on a strongly invertable link can be represented as a two-fold covering of S^3 branched over some link. This theorem also gives an algorithm for constructing such link. By Theorem 2 the manifold M_4 can be realized as a two-fold covering of the three-sphere branched over the Turk's knot Th_4. In another words the manifold M_4 is a two-fold covering of the otbifold $Th_4(2)$. The orbifold $Th_4(2)$ has an evident rotational symmetry of order 2. After factorization by this symmetry one gets an orbifold $\Omega(2,2)$ with the underlying space S^3 and the singular set Ω consisting of two components labelled by 2. One component of the link Ω is unlink, another-the Figure-eight knot. The picture of the link Ω can be found in [17] and [18]. In the notations of [35] the link Ω is just 10^2_{138}.

Using the Montesinos algorithm for N and some arguments from [19] we get the following diagram of coverings (see Figure 4):

$$\begin{tikzcd}
& M_4 \arrow[dl, "2"'] \arrow[dr, "2"] & \\
\mathrm{N} \arrow[dr, "2"'] & & Th_4(2) \arrow[dl, "2"] \\
& \Omega(2,2) &
\end{tikzcd}$$

Figure 4. *The diagram of coverings.*

Corollary 4. *The Fibonacci manifold M_4 is the unique (unbranched) double covering of the Meyerhoff-Neumann manifold N.*

The existence follows from the above diagram of covering .The uniqueness can be obtained by computing $H_1(N, \mathbb{Z})$, which is $\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$.

So, manifolds N and M_4 are commensurable. Therefore the manifold N is arithmetic over the field $\mathbb{Q}(\sqrt{-3})$, because it is true for M_4 [10]. Moreover by Corollaries 3 and 4 we have: $vol\,(N) = \frac{1}{2}\,vol\,(M_4) =$ the volume of the ideal regular tetrahedron.

We note that the arithmetic description of the manifolds M_4 and N is obtained in [26]. In particular, it is shown that both these manifolds are non-Haken and have 10-fold coverings which fiber over the circle, with the fiber having genus 2.

4. The Fibonacci manifolds and the 84(g−1)–Hurwitz theorem

Following [37] we recall some known facts from the theory of 3-manifolds.

Let M^3 be a closed orientable 3-manifold. A Pair $(H_g, H_g^{'})$ of handelbodies of genus g is called a *Heegaard decomposition of genus* g of M^3 if $M^3 = H_g \cup H_g^{'}$ and $H_g \cap H_g^{'} = S = \partial H_g = \partial H_g^{'}$ is a closed orientable surface of genus g. S is called a *Heegaard surface.* The minimal genus among the genera of all Heegaard decompositions of M^3 is called the *Heegaard genus* of M^3 and is denoted by $h(M^3)$. The three-dimensional sphere S^3 is the alone orientable manifold which Heegaard genus is equal to 0. The Heegaard genus is equal to 1 only for lens spaces and for manifold $S^2 \times S^1$. In particular, if a manifold M^3 admits Euclidean or hyperbolic structure, then $h(M^3) \geq 2$.

The following proposition is a consequence of the Theorem 2 and the Viro's theorem [33].

Proposition 1. *For any $n \geq 3$ the Heegaard genus $h(M_n)$ of the Fibonacci manifold M_n is two.*

Proof. By theorem 1 for any $n \geq 2$ the Fibonacci manifold M_n is a two-fold covering of S^3 branched over the Turk's head link Th_n. The link Th_n is a closed 3-string braid $(\sigma_1\sigma_2^{-1})^n$ and therefore has a 3-bridge presentation. Hence by the Viro's theorem $h(M_n) \leq 2$. But for $n \geq 4$ the manifold M_n is hyperbolic [10]. The manifold M_3 coincides with the Hantzche–Wendt manifold [38] and admits an Euclidean structure. Therefore $h(M_3) = 2$ for $n \geq 3$. □

The Fibonacci manifold M_2 is two-fold covering of S^3 branched over the figure-eight knot and coincides with the lens space $L(5,2)$. Therefore $h(M_2) = 1$.

We will make three remarks on above results.

The first remark is connected with the classical $84(g-1)$–Hurwitz theorem. By this theorem the automorphism group of a compact Riemann surface of genus $g > 1$ is finite and bounded above by $84(g-1)$.

By Mostow rigidity theorem the isometry group of the compact hyperbolic 3-manifold is finite always. Moreover *a priori* it may be isomorphic to an arbitrary finite group [13].

By analogy to the Hurwitz theorem for 2-dimensional case one can try to estimate the order of the isometry group of the hyperbolic 3-manifold in terms of the Heegaard genus. But the following proposition shows that it is impossible.

Proposition 2. *There are hyperbolic 3-manifolds of Heegaard genus 2 with an arbitrary large group of isometries.*

Proof. The Fibonacci hyperbolic manifold M_n has an orientation-preserving isometry of the order n. This isometry is induced by an automorphism $x_i \to x_{i+2}$ ($i \bmod 2n$) of the fundamental group $\pi_1(M_n) = F(2, 2n)$. It was shown in [11] that a factor-space of M_n by this isometry is the orbifold with the underlying space S^3 and the figure-eight knot as the singular set. Therefore by one hand the isometry group contains the cyclic group of the order n and so can be arbitrary large as $n \to \infty$.

By the other hand, $h(M_n) = 2$ for $n > 3$. □

The second remark shines light on relationship between the Heegaard genus and the volume of hyperbolic 3-manifolds.

Proposition 3. *There are hyperbolic 3-manifolds of Heegaard genus 2 with an arbitrary large volume.*

Proof. It was shown in [17], Corollary 1, that for $n \geq 4$ the hyperbolic volume of the Fibonacci manifold M_n is given by the formula

$$vol\,(M_n) = 2\,n\,\left(\Lambda(\beta + \delta) + \Lambda(\beta - \delta)\right),$$

where $\delta = \frac{\pi}{n}$, $\beta = \frac{1}{2}\arccos\left(\cos(2\delta) - \frac{1}{2}\right)$ and $\Lambda(x)$ is the Lobachevsky function

$$\Lambda(x) = -\int_0^x \ln|\,2\sin\zeta\,|\,d\zeta.$$

The main prorerties of the Lobachevsky function can be found in [21] and [32]. In particular, $\Lambda(x)$ is continuous on the real line and

$$\Lambda(\beta + \delta) + \Lambda(\beta - \delta) \to 2\,\Lambda(\frac{\pi}{6}), \quad \delta \to 0,$$

Hence,we have the following asymptotic

$$vol\,(M_n) \sim 2\,n\,V_0, \qquad n \to \infty,$$

where $V_0 = 2\,\Lambda(\frac{\pi}{6}) = 1.014...$ is the volume of the regular ideal tetrahedron.

So, the volume $vol\,(M_n)$ of the Fibonacci manifold M_n is an arbitrary large as $n \to \infty$ in spite of its Heegaard genus $h(M_n) = 2$. □

Proposition 4. *If $n > 10$ then each Heegaard surface of the genus 2 in the Fibonacci manifold M_n is not invariant under the isometry group.*

Proof. Let (H_2, H_2') be a genus two Heegaard decomposition of M_n. Denote by $S = H_2 \cap H_2' = \partial H_2 = \partial H_2'$ the corresponding Heegaard surface. Suppose that S is invariant under the isometry group of M_n. As in the proof of Proposition 2 consider an orientation-preserving isometry $f: M_n \to M_n$ of the order n induced by an automorphism $x_i \to x_{i+2}$ ($i \bmod 2n$) of the fundamental group $F(2, 2n)$ of the manifold M_n. The restriction $f|_S: S \to S$ gives us a topological automorphism of the surface S. From [12] there exists a suitable conformal structure on S which is invariant under $f|_S$. By Wiman theorem [36] the order of an automorphism of the Riemann surface S of genus $g = 2$ is bounded above by $4 \cdot g + 2 = 10$. Hence $n \leq 10$. Contradiction. $\square$

According to [6] we note that the manifold M_n has a finite number genus two Heegaard decompositions up to homeomorphism.

B. Zimmermann [39] asked if there is some relationship between equivariant Heegaard genus of hyperbolic 3-manifold and its Heegaard genus. Using a technique from [39] it is possible to show that equivariant Heegaard genus of the Fibonacci manifold M_n is equal to $n-1$ in spite of its Heegaard genus equals two. So there are hyperbolic 3-manifolds with an arbitrary large distance between equivariant Heegaard genus and Heegaard genus.

References

[1] Borel A., *Commensurability classes and hyperbolic volumes,* Annali Sci. Norm. Pisa, 1991, **8**, 1, 1–33.

[2] Conway J., *Advanced problem 5327,* Amer. Math. Monthly, 1965, **72**, 915.

[3] Conway J. et al., *Solution to Advanced problem 5327,* Amer. Math. Monthly, 1967, **74**, 91–93.

[4] Crowell R.H., Fox R.H., *Introduction to Knot Theory,* 1963, 182p.

[5] Johnson, D.L., Wamsley, J.W., Wright, D., *The Fibonacci groups,* Proc. London Math.Soc., 1974, **29**, 577–592.

[6] Hass, J., *Genus Two Heegaard Splittings,* Proc. Amer. Math. Soc., 1992, **114**, 2, 565–570.

[7] Havas G., *Computer aided determination of a Fibonacci group,* Bull. Austral. Math. Soc., 1976, **15**, 297–305.

[8] Hempel J., *3-manifolds,* Ann. of Math. Studies **86**, Princeton University Press, Princeton, N.J., 1976.

[9] Hempel J., *The lattice of branched covers over the figure - eight knot,* Topology and its Appl., 1990, **34**, 2, 183–201.

[10] Helling, H., Kim A.C., Mennicke, J., *A geometric study of Fibonacci groups,* SFB 343 Bielefeld, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Preprint (1990).

[11] Hilden H.M., Lozano M.T., Montesinos J.M., *Arithmeticy of the Figure-Eight Knot Orbifolds,* Topology'90, 1992, 169–184.

[12] Kerekjarto B., *Vorlesungen über Topologie,* Berlin., Springer, 1923.

[13] Kojima S., *Isometry transformations of hyperbolic 3-manifolds,* Topology Appl.,1988, **29**, 297–307.

[14] Kojima S., Long D.D., *Virtual Betti numbers of some hyperbolic 3–manifolds,* A Fete of Topology, Academic Press Inc., 1988, pp. 417–442.

[15] Maclachlan C., *Generalisations of Fibonacci numbers, groups and manifolds,* in: Combinatorial and Geometric Group Theory, Edinburgh 1993, edited by J. Duncan, N.D. Gilbert, J. Howie, London Mathematical Society Lecture Notes Series **204**, 233–238.

[16] Matveev V.S., Fomenko A.T., *Constant energy surfaces of Hamiltonian systems, enumeration of three-dimensional manifolds in increasing order of complexity, and computation of volumes of closed hyperbolic manifolds,* Russian Mathem. Surveys, 1988, **43**, 1, 3–24.

[17] Mednykh A.D., Vesnin A.Ju., *Volumes of the Fibonacci manifolds,* SFB 343 Bielefeld, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Preprint 94 - 015 (1994).

[18] Mednykh A.D., Vesnin A.Ju., *On limit ordinals in the Thurston–Jorgensen theorem on the volumes of three-dimensional hyperbolic manifolds,* Dokl. RAS., 1994, **336**, 7–10 (In Russian).

[19] Mednykh A.D., Vesnin A.Ju., *Hyperbolic 3-manifolds as 2-fold coverings according to Montesinos,* SFB 343 Bielefeld, Diskrete Strukturen in der Mathematik, Preprint 95 - 010 (1995).

[20] Meyerhoff R., Neumann W.D., *An asymptotic formula for the eta invariants of hyperbolic 3-manifolds,* Comment. Math. Helv.,1992, **67**, 28–46.

[21] Milnor J., *Hyperbolic geometry: the first 150 years,* Bull. Amer. Math. Soc., 1982, **6**, 9–25.

[22] Montesinos J.M., Whitten W., *Constructions of two-fold branched covering spaces,* Pacific J. Math., 1986, **125**, 2, 415–446.

[23] Neumann W.D., Zagier D., *Volumes of hyperbolic 3-manifolds,* Topology, 1985, **24**, 307–322.

[24] Newman M.F., *Proving a group infinite,* Reseach Report 26, Department of Mathematics, Australian National University, 1988.

[25] Reid A., *Arithmeticity of knot complements,* Journal London Math. Soc., 1991, **43**, 171–184.

[26] Reid A., *A Non-Haken Hyperbolic 3-Manifolds Covered By Surface Bundle,* Pacific J. Math., 1995, **167**, 2, 163–182.

[27] Riley R., *An elliptic path from parabolic representation to hyperbolic structures,* Lecture Notes in Math. **722**, Springer-Verlag, 1979, 99–133.

[28] Rolfsen D., *Knots and Links,* Publish of Perish Inc., Berkely Ca., 1976.

[29] Sakuma M., Weeks J., *Examples of canonical decompositions of hyperbolic link complements*, Preprint, 1993.

[30] Thomas R.M., *The Fibonacci groups $F(2, 2m)$,* Bull. London Math. Soc., 1989, **21**, 5, 463–465.

[31] Thurston, W.P., *The Geometry and Topology of Three-Manifolds,* Lecture Notes, Princeton University 1980.

[32] Vinberg E.B., *The volume of the polyhedra on a sphere and in Lobachevsky space,*. Amer. Math. Soc. Transl.(2), 1991, **148**, 15 - 27.

[33] Viro O.Ja., *Linkings, 2-sheeted branched coverings and braids*, Math. USSR, Sbornik, 1972, **16**, 223–236.

[34] Weeks J., *Hyperbolic structures on 3-manifolds,* Princeton Univ. Ph. D. Thesis, 1985.

[35] Weeks J., *Snappea, Version 5/18/92,* A program for the Macintosh to compute hyperbolic structures on 3-manifolds, Available upon request from J. Weeks.

[36] Wiman A., *Über die hyperelliptischen Curven und diejenigen vom Geschlechte p=3 welche eindenregen Transformationen in sich zulassen,* Bihang Till. Kongl. Svenska Veienskaps-Akademiens Handlingar, **21** (1895-96), 1–23.

[37] Zieschang H., *On Heegaard Diagrams of 3-manifolds*, Asterisque, 1988, **163-164**, 247–280.

[38] Zimmermann B., *On the Hantzche–Wendt manifold*, Monat. Math., 1990, **110**, 321–327.

[39] Zimmermann B., *Finite group actions on handelbodies and equivariant Heegaard genus for 3-manifolds*, Topology and Appl., 1992, **43**, 263–274.

Department of Mathematics
Novosibirsk State University
630090, Novosibirsk 90,
Russia.
E-mail: *mednykh@math.nsk.su*

Department of Mathematical
and Computing Sciences
Tokyo Institute of Technology,
Meguru-ku, Tokyo, Japan 152
E-mail: *mednykh@is.titech.ac.jp*

Institute of Mathematics
Siberian Branch
Russian Academy of Science
630090, Novosibirsk 90,
Russia.
E-mail: *vesnin@math.nsk.su*

積空間の正規性とその周辺

家本宣幸（けもとのぶゆき・大分大学・教育学部）

以下の話は、野倉（愛媛大・理)、大田（静岡大・教育)、Smith（ Auburn 大・院)、玉野（横浜国大・工）及び矢島（神奈川大・工）各氏との一連の共同研究である。

1. 正則性と正規性

Xを位相空間とする。空間 Xが正則（正規）とは点（閉集合）と閉集合が開集合によって分離されることである。正則と正規とがかなり異なった性質を持つことはよく知られている。たとえば、

(1) Xが正則で$Y \subset X$ならばYも正則である。

(2) XとYが正則ならば積空間 $X \times Y$も正則である。

ところが上の二つは正規性については成立しない。以下において空間はすべて正則とする。

2. 順序数空間と積空間

順序数を小さい順に並べると、$0, 1, 2, \ldots \omega, \omega+1, \omega+2, \ldots \omega_1, \ldots$と表される。ここで、$\omega$ は最小の無限順序数、ω_1 は最小の非可算順序数を表す。α を順序数とする。α と書けばα未満の順序数の全体の集合を表すことにする。例えば、$1 = \{0\}, 2 = \{0, 1\}, \ldots \omega = \{0, 1, 2, \ldots\}, \omega+1 = \{0, 1, 2, \ldots \omega\}$ 等である。順序数 α に普通の意味の開区間の全体から導かれる位相を与えた位相空間を順序数空間という。順序数空間 ω は離散空間となり、位相的なおもしろみはないが、順序数空間 $\omega+1$ は ω 一点だけを極限点として持ち、その他の点を孤立点として持つ最も簡単な自明でない位相空間と考えられる。$\omega+1$ を実数空間における（コンパクトな）収束点列 $\{0\} \cup \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \ldots\}$ とみなしてもさしつかえない。特にことわらない限り、順序数 α と言えば順序数空間 α を表すことにする。

(2) に関連し、X を正規空間とし、$X \times (\omega+1)$ が正規となるための必要十分条件は何かということが１９５０年代に議論された。空間 X が可算パラ

（メタ）コンパクトとは閉集合達の単調減少列 $\{F_n : n \in \omega\}$ で $\bigcap_{n\in\omega} F_n = \emptyset$ を満たしているものに対して $F_n \subset U_n$ を満たす開集合達の列 $\{U_n : n \in \omega\}$ で $\bigcap_{n\in\omega} \mathrm{Cl}\, U_n = \emptyset$（$\bigcap_{n\in\omega} U_n = \emptyset$）となるものが存在することである。定義から可算パラコンパクトであれば、可算メタコンパクトである。また、正規で可算メタコンパクトであれば、可算パラコンパクトである。順序数空間の部分空間はすべて正規で可算メタコンパクトであることがよく知られている。

１９５０年代 Dowker によって次が知られた。

定理１． [Do] X を正規空間とするとき、
$X \times (\omega+1)$ 正規 $\Longleftrightarrow$ X 可算パラコンパクト

これに対応する結果として、１９７０年代になって Scott によって次が知られた。

定理２． [Sc] X をオルソコンパクト空間とするとき、
$X \times (\omega+1)$ オルソコンパクト $\Longleftrightarrow$ X 可算メタコンパクト

ここで空間 X がオルソコンパクトとは任意の X の開被覆 $\mathfrak{U}$ に対して、$\mathfrak{U}$ の開細分 $\mathfrak{V}$ がとれて各 $\mathfrak{V}' \subset \mathfrak{V}$ に対し、$\bigcap \mathfrak{V}'$ が開集合とできることである。

定理１、２を比較すれば、一般論として、積空間の理論において次の基本構図が浮かび上がってくるであろう。

(基本構図)
$$\begin{pmatrix} \text{正規} & \sim & \text{可算パラコンパクト} \\ \wr & & \Downarrow \\ \text{オルソコンパクト} & \sim & \text{可算メタコンパクト} \end{pmatrix}$$

この先、この４つの性質に着目していこう。

さて、可算パラコンパクトであるが正規でない空間や、可算メタコンパクトであるがオルソコンパクトでない空間はたくさん知られている。逆に正規であるが可算パラコンパクトでない空間は Dowker 空間と呼ばれる。Dowker は定理１を発表した論文で Dowker 空間が存在するかどうかを問うたが、その肯定的な答えが Rudin 女史[Ru] によって与えられるまで実に二十数年の年月が費やされた。幸運にも Rudin 女史が構成した Dowker 空間はオルソコンパクトであるが可算メタコンパクトでない空間にもなっている。

可算パラコンパクト空間は可算メタコンパクトなので上の基本構図から、一般に、ある種の積空間が正規であればオルソコンパクトであろうことが予想される。実際にこれまで知られてきたほとんどのものはそうであったが、その逆だけが成立する最初の結果が次である。

定理 3. [KY2]

(1) X を（パラ）コンパクト空間とするとき、

$X\times\omega_1$ オルソコンパクト $\Longrightarrow X\times\omega_1$ 正規。

(2) (1) の逆の成立しないコンパクト空間 X がある。

これに関連し最近次がわかった。

定理 4. [KNY] X をリンデレーフ空間とするとき、
$X\times\omega_1$ 正規 $\Longleftrightarrow$ 射影 $\pi: X\times\omega_1\mapsto X$ が閉写像。

3. 順序数空間の積空間

順序数空間どうしの積空間の正規性についても最近の研究対象の一つである。$(\omega_1+1)\times(\omega_1+1)$ はコンパクト空間の積空間なので正規、また $\omega_1\times\omega_1$ も正規であることが知られている。ところが、$(\omega_1+1)\times\omega_1$ は正規でない。何故ならば、$\triangle=\{\langle\alpha,\alpha\rangle:\alpha<\omega_1\}$ と $\{\omega_1\}\times\omega_1$ は開集合で分離できない閉集合となっているからである。すると、"A,B を順序数空間 α の部分空間とすると A,B がどの様な条件を満たすとき $A\times B$ は正規か?" という問題が浮かび上がってくる。以後、断らない限り A,B はある順序数空間の部分空間とする。これに関する完全解が家本、大田、玉野によって与えられた。特に A,B が ω_1 の部分空間の時には次のように表される。

定理 5. [KOT] A,B を ω_1 の部分空間とするとき、
$A\times B$ 正規 $\Longleftrightarrow$ "A または B が *non-staionary* 、 または $A\cap B$ が *staionary* 。"

ここで A が ω_1 で stationary とは、A がすべての ω_1 の非有界閉集合と交わることである。

例. ω_1 には互いに素な 2 つの *stationary* な部分集合 A,B が存在することがよく知られているので、この A,B を取れば $A\times B$ は正規にはならない。

上に示したように $(\omega_1+1)\times\omega_1$ は正規ではないが、可算パラコンパクトであることが知られている。 従って、$A\times B$ の可算パラコンパクト性も問題になってくるが、これについても [KOT] で完全解が与えられた。その系として次の事柄がわかった。

系. [KOT]

(1) $A\times B$ 正規 $\Longrightarrow A\times B$ 可算パラコンパクト。

(2) 特に A,B を ω_1 の部分空間とするとき、

$A\times B$ 正規 $\Longleftrightarrow A\times B$ 可算パラコンパクト。

以上のように $A \times B$ の正規性と可算パラコンパクト性については分析できたが、残りの二つの性質、オルソコンパクト性と可算メタコンパクト性についてはどうであろうか。まず、オルソコンパクト性については次がわかった。

定理 6. [KY1]

$$\begin{array}{ll} A \times B & \text{正規} \\ \Updownarrow & \\ A \times B & \text{オルソコンパクト} \end{array}$$

基本構図、系及び定理 6 から次が予想される。

予想.

$$(?) \quad \begin{array}{ll} A \times B & \text{可算パラコンパクト} \\ \Updownarrow & \\ A \times B & \text{可算メタコンパクト} \end{array}$$

しかし、この予想は今年になって否定的に解かれることとなった。

定理 7. [KS] α を順序数空間とすれば $\alpha \times \alpha$ のどんな部分空間も可算メタコンパクトである。

系.

(1)（家本・大田・玉野の問題の肯定解）$A \times B$ は常に可算メタコンパクトである。

(2) $\alpha \times \alpha$ の正規部分空間は常に可算パラコンパクトである。

例の $A \times B$ は可算メタコンパクトであるが、可算パラコンパクトにはならないことに注意されたい。

すると今度は逆に定理 6 において $A \times B$ を $\alpha \times \alpha$ の任意の部分空間 X に置き換えても成立するかが問題となってくるがこれは未解決である。

未解決問題. X を $\alpha \times \alpha$ の任意の部分空間とすれば次は成立するか？

$$(?) \quad \begin{array}{ll} X & \text{正規} \\ \Updownarrow & \\ X & \text{オルソコンパクト} \end{array}$$

ここで、定理 7 の証明の基本的な部分である次の命題の証明を紹介をしよう。

命題. $X \subset \{\langle\alpha,\beta\rangle \in \omega_1 : \alpha < \beta\}$ とすると X は可算メタコンパクトである。

そのため次の簡単な補題を使う。

補題1. U, V を X の可算メタコンパクトな開集合とすると $U \cup V$ も可算メタコンパクトである。

補題2. $\alpha < \omega_1$ とすると、$\alpha \times \omega_1$ と $\omega_1 \times \alpha$ の任意の部分空間は可算メタコンパクトである。

補題3. C を ω_1 の非有界閉集合とすると $\omega_1 \backslash C$ は互いに素な有界な開区間達の和集合として表せる。

補題4. 可算個の ω_1 の非有界閉集合達の共通部分は再び非有界閉集合である。

The Pressing Down Lemma. $S \subset \omega_1$ は *staionary* で関数 $f : S \mapsto \omega_1$ は任意の $\alpha \in S$ に対して $f(\alpha) < \alpha$ を満たしているとする。すると *stationary* な $S' \subset S$ と $\alpha_0 \in \omega_1$ が取れて、任意の $\alpha \in S'$ に対して $f(\alpha) = \alpha_0$ とできる。

命題の証明. $\{D_n : n \in \omega\}$ を閉集合達の単調減少列とせよ。$\alpha < \omega_1, Y \subset \omega_1^2$ に対し $V_\alpha(Y) = \{\beta \in \omega_1 : \langle\alpha,\beta\rangle \in Y\}$ とおく。まず、次を証明する。

事実. $\{\alpha < \omega_1 : V_\alpha(D_m)$ *stationary* $\}$ が *non-staitonay* となる $m \in \omega$ が存在する。

事実の証明. $A = \{\alpha < \omega_1 : V_\alpha(X)$ stationary $\}$ とおく。A が non-stationary のときは明らかなので、A は staionary と仮定する。一般性を失うことなく A は極限順序数だけからなると仮定してよい。$\alpha \in A$ とする。各 $V_\alpha(D_n)$ は stationary な部分空間 $V_\alpha(X)$ で閉集合で $\bigcap_{n\in\omega} V_\alpha(D_n) = \emptyset$ であるから、補題4より、$V_\alpha(D_{n_\alpha})$ が有界になるような $n_\alpha \in \omega$ が取れる。A は stationary であるから、Pressing Down Lemma から stationary な $A' \subset A$ と $m \in \omega$ が取れ $n_\alpha = m$ が任意の $\alpha \in A'$ に対して成立するようにできる。$\alpha \in A'$ とし、$T = \{\gamma < \alpha : V_\gamma(D_m)$ は ω_1 で非有界 $\}$ とおく。各 $\gamma \in T$ に対し $C_\gamma = \{\delta < \omega_1 : \delta$ は $V_\gamma(D_m)$ の集積点 $\}$ とおくと C_γ は ω_1 で非有界閉集合で $C = \bigcap_{\gamma\in T} C_\gamma$ とおけば、C も非有界閉集合。$C \cap V_\alpha(X)$ は stationary で $V_\alpha(D_m)$ は有界であるから、$\beta > \sup V_\alpha(D_m)$ を満たす $\beta \in C \cap V_\alpha(X)$ が取れる。すると、$\langle\alpha,\beta\rangle \in X\backslash D_m$ で D_m は閉集合なので $(\zeta,\alpha] \times (\eta,\beta] \cap D_m = \emptyset$ をみたす $\zeta < \alpha, \eta < \beta$ が取れる。T が α で非有界と仮定すれば、$\zeta < \gamma < \alpha$ なる $\gamma \in T$ が取れる。すると、$\beta \in C \subset C_\gamma$ より β は $V_\gamma(D_m)$ の集積点となる。一方、$\zeta < \gamma < \alpha$ より

$(\eta,\beta]\times V_\gamma(D_m)=\emptyset$ となり矛盾。故に T は α で有界になる。以上から、各 $\alpha\in A'$ に対して $f(\alpha)<\alpha$ が取れ、各 $\gamma\in(f(\alpha),\alpha)$ に対して $V_\gamma(D_m)$ が有界になるようにできる。再び Pressing Down Lemma から $\alpha_0<\omega_1$ が取れ、各 $\alpha\in(\alpha_0,\omega_1)$ に対して $V_\alpha(D_m)$ 有界にできる。これで、事実が証明できた。

さて、命題の証明の続きをしよう。事実から非有界閉集合 C と $m\in\omega$ が取れ、任意の $\alpha\in C$ に対して $V_\alpha(D_m)$ が non-stationary になるようにできる。各 $\alpha\in C$ に対し $C_\alpha\cap V_\alpha(D_m)=\emptyset$ を満たす非有界閉集合 C_α を取り、$C'=\{\beta\in C:\forall\alpha\in C\cap\beta(\beta\in C_\alpha)\}$ とおけば C' は非有界閉集合。そこで、$U=[(\omega_1\backslash C')\times\omega_1\cap X]\cup[\omega_1\times(\omega_1\backslash C')\cap X]$ とおくと、補題1、2、3から U は可算メタコンパクトな X の開集合となる。又 C' の定義から $D_m\subset U$ がわかる。U は可算メタコンパクトで $\bigcap_{n\geq m}D_n=\emptyset$ より、各 $n\geq m$ に対し $D_n\subset U_n\subset U$ を満たす開集合 U_n が取れ $\bigcap_{n\geq m}U_n=\emptyset$ を満たすようにできる。各 $n<m$ に対しては $U_n=X$ とおくことで、$\{U_n:n\in\omega\}$ が X の可算メタコンパクト性を示すことがわかる。

4. 付記：モデルとの関係

V を集合論のモデル。P を forcing notion とすると V^P は V を拡張した集合論のモデルになっている。X を V の位相空間とし $\mathfrak{B}$ をその位相とする。$X,\mathfrak{B}\in V\subset V^P$ である。一般には V^P において $\mathfrak{B}$ が X の位相になっているとは限らないが基底になっていることが容易に確かめられる。従って V^P において X に $\mathfrak{B}$ を基底とする位相を入れることができる。この位相空間を V^P における位相空間 X という。次がよく知られている。

(1) V で X 正則 $\Longrightarrow V^P$ で X 正則。
(2) 一般には (1) において正則を正規には置き換えられない。

最近、Junqeira の興味ある次の結果が知られた。

定理. *P を Cohen forcing、X は V で正規であるが V^P では正規でないとすると、X は V で Dowker 空間である。*

この定理に関連して、P を Cohen forcing としたとき、V で X がオルソコンパクトであれば V^P でも X がオルソコンパクトであるかどうかは未解決である（Dow の問題)。

References

[Do] C.H.Dowker, *On countably paracompact spaces*, Canad. J. Math. **3** (1951), 219-224.

[KNY] N. Kemoto, T. Nogura, Y. Yajima, *Normality and closed projections of products with a cardinal factor (manuscript).*

[KOT] N. Kemoto, H. Ohta, K. Tamano, *Products of spaces of ordinal numbers*, Top. Appl. **45** (1992), 245-260.

[KS] N.Kemoto, K. D. Smith, *$\mu \times \nu$ is hereditarily countably metacompact for any ordinals μ and ν (manuscript).*

[KY1] N.Kemoto, Y.Yajima, *Orthocompactness in products*, Tsukuba J. Math. **16** (1992), 407-422.

[KY2] N.Kemoto, Y.Yajima, *Orthocompactness and normality of products with a cardinal factor*, Top. Appl. **49** (1993), 141-148.

[Ru] M.E.Rudin, *A nomal space X for which $X \times I$ is not normal*, Fund.Math. **73** (1971), 179-186.

[Sc] B.M.Scott, *Toward a product theory for orthocompactness*, Studies in Topology (N. M. Stavrakas and K.R.Allen, eds), Academic Press, 1975, pp. 517-537.

コンパクトC^∞G多様体のNash G 多様体構造について

川上智博　　大阪府立工業高専 数学

1. Introduction.

Nash多様体はC^∞多様体とnonsingular algebraic sets との中間的な存在である。Nash 多様体は 有限個の連結成分からなり、その各々がまた、Nash多様体となり(cf. [15])、C^∞多様体としてコンパクト化可能 [13]である。また、affine Nash多様体はNash多様体としてコンパクト化可能 [14]である。Nash多様体はC^∞ 多様体とnonsingular algebraic setsの両方の長所を備えている。

詳しい定義はsection 2 で行うことにして、まず、結果を述べるのに必要な定義のみする。

定義1.1　GをNash群, XをNash多様体とする。 Xが**Nash G 多様体**とは Xが G作用 $G\times X \to X$ をもち、その 作用写像がNash写像であることである。 Nash G 多様体XがあるG表現にNash G埋め込みできるとき、Xは**affine**という。

G 作用を考えないとき、[13] により、1次元以上のコンパクトまたはコンパクト化可能なC^∞多様体は、非可算無限個のnonaffine Nash多様体構造をもつことが知られている。C^∞ 多様体（C^∞G多様体）の場合は埋め込み定理がほとんどの場合成立するので、nonaffineにあたる概念は存在しない。

GをNash群とする。C^∞G多様体Xが**affine** (resp. **nonaffine**) **Nash G多様体構造**をもつとは, affine (resp. nonaffine) Nash G多様体Yが存在して、XとYがNashG微分同型となることである。

次の定理の（2）は塩田先生から助言をいただきました。

定理1.2 [6]　Gをコンパクトaffine Nash群、XをコンパクトC^∞G多様体とする。

（1）XはNashG微分同型を除いて、ただひとつaffine Nash G多様体構造をもつ。

（2）X上のG作用が推移的ならば、XのすべてのNash G多様体構造は（1）で得られた構造にNashG微分同型である。

（3）Xの次元が1次元以上で、連結かつ、X上のG作用が推移的でないならば、Xは非可算無限個のnonaffine Nash G多様体構造をもつ。

上の定理をXがC^∞G多様体としてコンパクト化可能の場合にも（1）の一意性は成立しないが、拡張することができる。

C^∞G多様体Xが（C^∞G多様体として）**コンパクト化可能**とは、境界をもったコンパクトC^∞G多様体Yが存在して、その内部とXがC^∞G微分同型となることである。

定理1.3 [6]　Gをコンパクトaffine Nash群、Xをコンパクトでないコンパクト化可能なC^∞G多様体とする。

（1）Xはaffine Nash G多様体構造をもつ。

（2）Xは非可算無限個のnonaffine Nash G多様体構造をもつ。

本題からそれるが、affine Nash多様体のnonsingular algebraic setの構造についても考えることができる。[15]により、affine Nash多様体はあるnonsingular algebraic setとNash微分同型であることが示されている。これの一般化として、以下を得ることができる。

定理1.4 [8]　Xをaffine Nash多様体とする。このとき可算無限個のnonsingular algebraic sets $\{Y_n\}$で各Y_nはXとNash微分同型であるが、$n \neq m$ならば、Y_nとY_mは双有理同型でないものが存在する。□

[2]により、コンパクトC^∞多様体は非可算無限個のnonsingular algebraic setの構造をもつことが知られている。affine Nash多様体に対

しても、その構造の個数は非可算無限であることが予想される。また、定理1.4. のG 作用をもった場合を考えることができる。これは、コンパクトC^∞ G多様体の場合に同変Nash予想と呼ばれる問題で、まだ完全には解決されていない（cf. [4]）。また、Nash G ベクトル束については、[5]などが知られている。

2. Nash G 多様体.

R^nの**semialgebraic subset** を以下の形の集合の有限和と定義する。

$$\{x \in R^n \mid f_1(x) = \ldots = f_k(x) = 0, g_1(x) > 0, \ldots g_l(x) > 0\},$$

ただし,$f_1, \ldots, f_k$, $g_1, \ldots g_l$ はR^n上の多項式写像とする。U, V を open semialgebraic setsとする。C^∞写像 $f: U \to V$が **Nash 写像**とは、f のグラフ（$\subset U \times V$）が semialgebraic set であることと定義する。特に、Nash 写像はC^∞ 写像である。Nash写像$f: U \to V$が **Nash微分同型** とは、Nash 写像が$g: V \to U$が存在して、$f \circ g = id, g \circ f = id$となることである。

定義2.1. （1）semialgebraic set $X \subset R^n$が **次元dのNash 部分多様体**とは、各$x \in X$に対して、原点のある近傍 Uからx ある近傍 V への Nash 微分同型 ϕ が存在して $\phi(0) = x, \phi(R^d \cap U) = X \cap V$ となることである。ただし、R^d はR^n の最後の（n−d）個の成分が0 である部分集合とみなす。

（2）d次元C^∞多様体が**Nash 多様体**とは、有限個のチャート$\{\phi_i : U_i \to R^d\}$が存在し、各i, jに対して、$\phi_i(U_i \cap U_j)$がR^dの open semialgebraic setで、$\phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(U_i \cap U_j) \to \phi_j(U_i \cap U_j)$がNash 微分同型となることとする。このとき、そのチャートを**Nashチャート**と呼ぶ。[15] より、Nash部分多様体は、Nash 多様体となる。

（3）X、YをNash 多様体とし、Nash チャートを それぞれ $\{\phi_i : U_i \to R^m\}, \{\varphi_j : V_j \to R^n\}$とする。写像$f: X \to Y$が**Nash 写像**であるとは、各$i, j$に対して、$\phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i)$ がR^dの open semialgebraic setであり、$\varphi_j \circ f \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(f^{-1}(V_j) \cap U_i) \to R^m$ が Nash 写像になることである。

（4） Nash 多様体 X と Y が **Nash微分同型** であるとは、Nash写像 $f : X \to Y, h : Y \to X$が存在して、$f \circ h = id, h \circ f = id$ となることである。

（5）Nash 多様体が**affine**とは、あるNash部分多様体とNash微分同型であることである。

注意 定義2.1 (2)での有限性の仮定が大切で、これから、Nash 多様体のコンパクト化可能定理が導かれる。定義 2.1 は自然 に実閉体上に拡張 することができ （cf. [1] ）、[3] により、任意の 実閉体 R 上の Nash 多様体は R_{alg}上で定義されたある Nash 多様体のR上への拡張とNash 微分同型であることが知られている。また、semi-algebraic setの拡張といえるdefinable set は 稠密順序 をもつが 終点をもたない o-minimal structure上では、cell分解定理などの望ましい性質をもつ [9]。しか し、微分構造の定義に必要な和, 積, 商の演算 を付け加えると、そのo-minimal structure はすでに 実閉体となることが知られているので [12]、実閉体上でNash理論を展開するのが適当と思われる。

例2.2. $f_1 : R \to R, f_1(x) = |x|$、 $f_2 : R^+ \to R, f_2(x) = x^\alpha, \alpha \in Q,$ $f_3 : R^* \to R^*, f_3(x) = \dfrac{1}{x}$ などは、 semialgebraic 写像である。定義域内に無限個 の基本周期をもつ 周期関数 は semialgebraic 写像でない。特に、$f_4 : R \to R, f_4(x) = \sin x$ はsemialgebraic 写像でない。

定義2.3. 群Gが**Nash群（affine Nash群）**とは、GがNash多様体（affine Nash多様体）であり、群演算$G \times G \to G, G \to G$がNash写像であることである。

1次元連結Nash 群については、[10]により、分類されている。また、コンパクトcenterless Lie群には、nonaffine Nash群構造が存在しないことも知られている [7]。

定義2.4. Gをaffine Nash群とする。

（1）G 表現の中のaffine Nash 部分多様体が G 不変のとき、**affine Nash G 部分多様体**という。

（2）Nash 多様体 Xが**Nash G 多様体** とは、XがG作用 $G \times X \to X$ をもち、その 作用写像がNash 写像であるである。

（3）X、YをNash G 多様体とする。Nash 写像$f: X \to Y$がG写像でもあるとき、 fを **Nash G 写像**と呼ぶ。X と**Nash G 微分同型**とは、Nash G写像$f: X \to Y, h: Y \to X$ が存在して、$f \circ h = id$, $h \circ f = id$ となることである。

（4）Nash G多様体Xが**affine**であるとは、Xがあるaffine Nash G部分多様体とNash G微分同型のときにいう。

C^∞ G多様体、Nash G多様体とnonsingular algebraic setsには集合として以下の包含関係が成立する。

{nonsingular algebraic G sets} $\subsetneqq$ {affine Nash G多様体} $\subsetneqq$ {Nash G多様体} $\subsetneqq$ {C^∞ G多様体}。

ただし、nonsingular algebraic G set は G 表現の中の G 不変 nonsingular algebraic setとする。

C^∞ G 多様体 ではよく知られた 管状近傍の存在 とcollar 近傍の存在がaffine Nash G 多様体に対しても成立する。

命題2.5. Gをコンパクトaffine Nash 群、XをG 表現Ω内のaffine Nash G部分多様体 とする。このとき、XにおけるNash G 管状 近傍 (U, p) が存在する。つまり、U はΩの中のaffine Nash G 部分多様体で X を含み、直交射影$p: U \to X$はNash G 写像である。□

命題2.6. Gをコンパクトaffine Nash群とする。任意の境界をもったコンパクトaffine Nash G多様体X はNash G collarをもつ。つまり、Nash G 埋め込み$\phi: \partial X \times [0,1] \to X$で$\phi | \partial X \times 0 = id_{\partial X}$となるもの存在する。□

3. Outline of proof of results.

ここでは、結果の証明の概略を述べる。本稿の主要結果 はまだ印刷中ですので、詳しい証明をご覧になりたい方は、ご請求 願えればありがたいです。

[4] により、次の同変 Nash 予想の部分的解決が知られている。

定理3.1. [4] Gをコンパクトaffine Nash群とする、XをコンパクトC^∞ G多様体でnonsingular algebraic G setとG 同境とする。このとき、Xはあるnonsingular algebraic G setとC^∞ G微分同型である。□

定理1.2.の（1）、（2）の証明.

（1）disjoint union $X \amalg X$は 零同境 なので、定理3.1.より、$X \amalg X$ は nonsingular algebraic G set とC^∞ G 微分同型 である。また、nonsingular algebraic G setの連結成分の和集合でG不変なものは、affine Nash G多様体なので、Xはaffine Nash G多様体YとC^∞ G微分同型である。

Zを X の別のaffine Nash G多様体構造とし、$f: Y \to Z$ をC^∞ G微分同型とする。Fをfと包含写像$i: Z \to \Omega$との合成とし、これを多項式近似する。Haar積分をほどこすことにより、その近似qはG写像かつその像はZのΩにおけるNash G管状近傍 Uに含まれているとしてよい。だから $p \circ q$が NashG微分同型となる。ただし、pはNash G 管状近傍Uの射影とする。

（2）X_1, X_2をaffineとは限らないXのNashG多様体構造とし、$k: X_1 \to X_2$をC^∞ G微分同型とする。$x_1 \in X_1$, $x_2 := k(x_1)$とすると、

$$f_i: G \to X_i,\ f_i(g) = gx_i \quad (i = 1, 2)$$

は全射Nash G 写像となり、$f_2 = k \circ f_1$。

以下の様にして、k がC^0Nash 写像になることを証明する。これがわかれば、kが NashG微分同型になることがわかる。[13] より、X_i はC^0Nash 埋め込み可能（C^0 affine）である。その 埋め込みを $I_i: X \to R^s$ $(i = 1, 2)$ とし、 $X_i' := I_i(X)$, $f_i' := I_i \circ f_i$, $k' := I_2 \circ k \circ I_1^{-1}$ とおく。 このとき、$f_i': G \to X_i'$ はC^0Nash 写像 である。G とX_i'が（C^0）affine なので、G

のsemialgebraic open cover $\{O_t\}_{t=1}^{l}$が存在して、各$f_i{}'|O_t$ が semialgebraic写像になる。よって、$f_i{}'$ もsemialgebraic 写像になる。特に、C^0 Nash 写像である。

ところで、k'がC^0Nash写像であることとkがC^0Nash写像であることが同値になるので、以下で、k'がC^0Nash写像であること示す。

$f_i{}'$ $(i=1,2)$がC^0Nash写像なので、G、X_1, X_2 のNashチャート$\{\phi_i : W_i \to R^m\}, \{\psi_j : U_j \to R^n\}, \{\varphi_l : V_l \to R^n\}$がそれぞれ存在して、各$i, j, l$に対して、

$$\phi_i((f_1{}')^{-1}(U_j)\cap W_i), \phi_i((f_2{}')^{-1}(V_l)\cap W_i)$$

がsemialgebraic setsで、

$$\varphi_l \circ f_1{}' \circ \phi_i^{-1} : \phi_i((f_1{}')^{-1}(U_j)\cap W_i) \to R^n,$$
$$\varphi_l \circ f_2{}' \circ \phi_i^{-1} : \phi_i((f_2{}')^{-1}(V_l)\cap W_i) \to R^n$$

がC^0Nash写像となる。ただし、$m = \dim G,\ n = \dim X_1 (=\dim X_2)$とする。このとき、各 $\varphi_l \circ k' \circ \psi_j^{-1}$ の 定義域が semialgebriac set かつ それ自身がsemialgebraic 写像であることを示せばよい。各j, lに対して、

$$K_{j,l} = \cup_i (graph(\varphi_l \circ f_1{}' \circ \phi_i^{-1}) \times graph(\varphi_l \circ f_2{}' \circ \phi_i^{-1})$$

とおく。ただし、$graph\ (H)$はHのグラフを表わすとする。このとき,$K_{j,l}$は、$(R^m \times R^n)\times(R^m \times R^n)$のsemilagebraic set なので、 射影 $proj : (R^m \times R^n)\times(R^m \times R^n) \to R^n \times R^n$ による 像 $K_{i,j}{}'$ もsemialgebraic setである。ここで、各$f_i{}'$ が全射、$f_2{}' = k' \circ f_1{}'$ に注意すると、$graph(\varphi_l \circ k' \circ \psi_j^{-1}) = K_{j,l}{}'$となり、k' が$C^0$ Nash 写像となることが示された。□

定理1.2.の(3)の証明の方針.

(1)より、Xはaffine Nash G 多様体としてよいので、$X \subset \Omega$とする。各$x \in X$ に対して、軌道G(x)はC^∞G部分多様体であり、 semialgebraic setでもあるので、affine Nash G多様体である。X上のG作用が推移的でなく、X が 連結で1次元以上なので、命題2.5. を用いることにより、ある

$x \in X$ に対して、G（x）の XにおけるNash G管状近傍(U, p) で$U \neq X$ となるものが存在する。Xにおける閉包$\overline{U}$に命題 2.6.を適用して、境界$\partial\overline{U}$の Nash G collar $\phi: \partial\overline{U} \times [0,1] \to \overline{U}$をとる。この$\phi$ を用いて、XをG不変な三つのaffine Nash 多様体 に分けて、（0、1） 上を動くparameter つきの Nash G 写像ではりあわせる。このはりあわせに よって得られたNash G 多様体Y_cがもとのXとC^∞ G微分同型を示し、各Y_cがaffineでないことは、次の補題を用いて示される。

補題3.2 [15]　M、Nを Nash多様体とし、$f: M \to N$を locally semi-algebraicC^∞写像とする。このとき、Nがaffineならば、fはNash写像である。□

また、各Y_cに対して、Y_cとNash G 微分同型となる$Y_{c'}$は, 高々可算個となることを示して、証明が終わる。□

定理1.3.の証明には、以下が必要となる。

定理3.3 [6]　GをコンパクトNash affine 群、XをコンパクトC^∞G 多様体、X’ を X のコンパクトC^∞G 部分 多様体 とする。 このとき、 affine Nash G 多様体Y、Yのaffine Nash G 部分多様体Y’ およびC^∞G 微分同型写像$f: X \to Y$で$f(X') = Y'$ となるものが存在する。□

定理1.3.の証明.

（1）Xがコンパクト化可能なので、境界$\partial X'$をもったコンパクトC^∞G 多様体X'が存在して、XとX'の内部 がC^∞G 微分同型となる。YをX’ のダブルとする。$(Y, \partial X')$に定理3.3.を適用することより, G表現 ΩとC^∞G 埋め込み$F: Y \to \Omega$が存在して、$F(Y)$, $F(\partial X')$がaffine Nash G多様体となる。たから、$F(X)$はaffine Nash G 多様体となり、Xはaffine Nash G多様体構造をもつ。

（2）（1）より、Xはaffine Nash G多様体としてよく、仮定と 命題 2.5を用いることにより、ある$x \in X$に対して、G（x）のXにおけるNash G 管状近傍 (U, p)で$U \neq X$となるものが存在する。以下は定理1.2.の（3）と同様に証明される。□

また、T. Petrieのnonsingular algebraic G setのC^∞G多様体としてのコンパクト化可能定理 [11] を用いることにより、次を得ることができる。

定理3.4 [6]　Gをコンパクトaffine Nash群とする。このとき、C^∞G多様体Xがaffine Nash G多様体構造をもつための必要十分条件はXがC^∞ G多様体としてのコンパクト化可能であることである。□

References.

1. J. Bochnack, M. Coste, and M.F. Roy, Geometie algebraic reelle, Ergebnisse der Mathematik, und ihrer Grenzebiete, Springer verlag, (1987).
2. J. Bochnak and W. Kuvharz, Nonisomorphic algebraic models of a smooth manifolds, Math. Ann. 290 (1990), 1-2.
3. M. Coste and M. Shiota, Nash triviality in families of Nash manifolds, Invent. Math. 108 (1992) , 349-368.
4. K.H. Dovermann, M. Masuda, and T. Petrie, Fixed point free algebraic actions on varieties diffeomorphic to R^n, Progress in Math. 80, Birkhauser (1990), 49-80.
5. T. Kawakami, Algebriac G vector bundles and Nash G vector bundles, Chinese J. Math. 22 (1994), 275-289.
6. T. Kawakami, Nash G manifold strucutrues of compact or compactifiable $C^\infty G$ manifolds, to appear in J. Math. Soc. Japan.
7. T. Kawakami, Nash structures of $C^\infty G$ vector bundles, preprint.
8. T. Kawakami, Nonisomorphic algebraic models of Nash manifolds and compactifiable C^∞ manifolds, Osaka J. Math. 31 (1994), 831-835.
9. J.F.Knight, A. Pillay, and C. Stanton, Definable sets in ordered

structure 2, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 593-605.

10. J.J. Madden and C.M. Stanton, One-dimensional Nash groups, Pacific J. Math. 154 (1992), 331-344.

11. T. Petrie, Smooth conjugacy of algebraic actions on affine varieties, Topology 27 (1988), 473-477.

12. A. Pillay and C. Stanton, Definable sets in ordered structure 1, Trans. Amer. Math. Soc. 295 (1986), 565-592.

13. M. Shiota, Abstract Nash manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 96 (1986), 155-162.

14. M. Shiota, Nash functions and manifolds, Chap. 2 of a preparing book, preprint.

15 M. Shiota, Nash manifolds, Lecture Note in Math. 1269, Springer Verlag, 1987.

$H^*(BO;Z_2)$ の自己準同形写像と普遍 Wu 類

広島大・総合科学部　吉田敏男

§1. 序

M を n 次元閉多様体とする．Poincaré の双対定理により，$0 \leq i \leq n$ なる i に対し，写像

$$D : H^i(M;Z_2) \to Hom_{Z_2}(H^{n-i}(M;Z_2);Z_2)$$

を $D(x)(y) = < xy, \mu >$ によって定義するとき，D は同形写像である．ここで，$x \in H^i(M;Z_2), y \in H^{n-i}(M;Z_2), \mu \in H_n(M;Z_2)$ は M の基本ホモロジー類，$<,>$ は Kronecker 積である．よって Steenrod 作用素 Sq^i[6] を用いて，準同形写像 $f_i : H^{n-i}(M;Z_2) \to Z_2$ を $f_i(y) = < Sq^i y, \mu >$ によって定義するとき，$D(x) = f_i$ となる $H^i(M;Z_2)$ の元 x が一意的に存在するが，これを M の i 次元 Wu 類といい，$v_i(M)$ で表す [4]．よって，$i > n/2$ のとき $v_i(M) = 0$ である．

Wu の定理により，M の i 次元 Stiefel-Whitney 類を $w_i(M)$ で表すとき，Wu 類と Stiefel-Whitney 類の間には次の関係式がある [4]:

$$(1.1) \qquad w_i(M) = Sq^0 v_i(M) + Sq^1 v_{i-1}(M) + \cdots + Sq^i v_0(M).$$

$BO(n)$ を n 次元実ベクトル束の分類空間とし，$BO(1) \subset BO(2) \subset \cdots \subset BO(n) \subset \cdots$ の極限空間を BO で表すと，$H^*(BO;Z_2) = Z_2[w_1, w_2, w_3, \cdots]$ である．ここで，w_i は i 次元普遍 Stiefel-Whitney 類である [4],[10].

普遍 Wu 類 $v_i (\in H^i(BO;Z_2))$ は (1.1) との関係で，次の様に帰納的に定義されている [3],[7],[8]:

$$(1.2) \qquad v_0 = w_0 = 1, \quad w_i = v_i + Sq^1 v_{i-1} + \cdots + Sq^i v_0 \ (i \geq 1).$$

問題とするのは，普遍 Wu を普遍 Stiefel-Whitney 類に関する多項式で具体的に記述することである．

kを自然数とする．写像

$$D_k : H^*(BO; Z_2) \to H^*(BO; Z_2)$$

を，$H^*(BO; Z_2)$ の単項式 $w_{i_1}w_{i_2}\cdots w_{i_l}(l \geq 1; i_1, i_2, \cdots, i_l \geq 1)$ に $H^*(BO; Z_2)$ の多項式

$$w_{i_1-k}w_{i_2}\cdots w_{i_l} + w_{i_1}w_{i_2-k}w_{i_3}\cdots w_{i_l} + \cdots + w_{i_1}\cdots w_{i_{l-1}}w_{i_l-k}$$

を対応させることによって誘導される $H^*(BO; Z_2)$ の自己準同形写像とする．ここで $j < 0$ のとき $w_j = 0$, $\dim x \leq 0$ のとき $D_k x = 0$ と定める．

このとき次を得る．

定理 1.3.　　任意の自然数 $i \geq k \geq 1$ に対して

$$D_k v_i = \begin{cases} v_{i-k} & (k = 2^*), \\ 0 & (k \neq 2^*). \end{cases} \tag{1.4}$$

$\bar{w}_i$を i 次元双対 Stiefel-Whitney 類，即ち $(1 + w_1 + w_2 + \cdots)(1 + \bar{w}_1 + \bar{w}_2 + \cdots) = 1$ を満たすものとする．$v_i\ (i \geq 1)$ における $w_j, \cdots, w_1$ に関する多項式を$< v_i; w_j, \cdots, w_1 >$で表す．

系 1.5.　(1)　$i(\geq 2)$ は 2 のベキとする．このとき

$$v_i = w_i + w_{i-1}\bar{w}_1 + w_{i-2}\bar{w}_2 + \cdots + w_{i/2+1}\bar{w}_{i/2-1} + < v_i; w_{i/2}, \cdots, w_1 > .$$

(2)　$i = a + b$ (a は 2 のベキ，$a > b \geq 1$) とする．このとき

$$v_i = w_a v_b + < v_i; w_{a-1}, \cdots, w_1 > .$$

Iを $w_1^2, w_2^2, w_3^2, \cdots$によって生成された $H^*(BO; Z_2)$ のイデアルとする．$w = 1 + w_1 + w_2 + \cdots$, $v = 1 + v_1 + v_2 + \cdots$とおく．

系 1.5 を一般化した結果を用いて次を得る．

定理 1.6 ([13]). (i) $i = a_1 + a_2 + \cdots + a_l$ （$a_1, a_2, \cdots, a_l$は互いに異なる２のベキ）とする．このとき

$$v_i \equiv v_{a_1} v_{a_2} \cdots v_{a_l} \mod I.$$

(ii) $i(\geq 1)$ は２のベキとし，$w_1, w_2, \cdots$に関する単項式$x_1, x_2, \ldots, x_m$によって$v_i \equiv x_1 + x_2 + \cdots + x_m \mod I$とする．このとき

$$v_{2i} \equiv w_{2i} + w_{2i-1}w_1 + \cdots + w_{i+1}w_{i-1} + \sum_{1 \leq i < j \leq m} x_i x_j \mod I.$$

(iii) $v = 1 + \sum w_{i_1} \cdots w_{i_l} \mod I,$

ここで Σ は列 $(i_1, \cdots i_l)$ $(l \geq 1, 1 \leq i_1 < \cdots < i_l)$ で，$\{i_1, \cdots, i_l\} = \{\alpha_1, \beta_1, \cdots, \alpha_m, \beta_m, \gamma_1, \cdots, \gamma_n\}$ $(l = 2m+n, m \geq 0, n \geq 0)$; $\alpha_j + \beta_j (1 \leq j \leq m), \gamma_j (1 \leq j \leq n)$ は全て２のベキ，である様なもの全体についての和である．

[13] における上の定理の (i) の証明には，実射影空間の幾つかの積空間上の特殊なベクトル束の Wu 類が用いられている．そして (i) を用いて (ii) が示され，(i) と (ii) を用いて (iii) が示されている．

§2. $\theta^i w_j$ による Wu 類の計算

θ^i を次の様に帰納的にされた mod 2 Steenrod 代数 の元とする:

$$\begin{aligned} &\theta^0 = Sq^0 = 1,\ \theta^1 = Sq^1, \\ &\theta^i = Sq^i + Sq^{i-1}\theta^1 + Sq^{i-2}\theta^2 + \cdots + Sq^1\theta^{i-1}\ (i \geq 2). \end{aligned} \tag{2.1}$$

よって $\theta^i = \Sigma Sq^{j_1} \cdots Sq^{j_l}$, ここで$\Sigma$ は自然数からなる列 $(j_1, \cdots, j_l)$ で，$j_1 + \cdots + j_l = i$ である様なもの全体についての和である．よって $\theta^i = Sq^i + \theta^1 Sq^{i-1} + \theta^2 Sq^{i-2} + \cdots + \theta^{i-1} Sq^1$ $(i \geq 2)$ であり，次を得る:

$$\begin{aligned} &(Sq^0 + Sq^1 + Sq^2 + \cdots)(\theta^0 + \theta^1 + \theta^2 + \cdots) = 1, \\ &(\theta^0 + \theta^1 + \theta^2 + \cdots)(Sq^0 + Sq^1 + Sq^2 + \cdots) = 1. \end{aligned} \tag{2.2}$$

従って $Sq = Sq^0 + Sq^1 + Sq^2 \cdots$ の逆元は $\theta^0 + \theta^1 + \theta^2 + \cdots$ であり，$w = Sq\ v$ より次を得る．

命題 2.3. $\quad v_i = \theta^i w_0 + \theta^{i-1} w_1 + \cdots + \theta^0 w_i.$

θ^i について次のことが分かっている [1],[12]:

$$
(2.4)\quad
\begin{aligned}
&\theta^{2i-1} = Sq^i Sq^{i/2} Sq^{i/4} Sq^{i/8} \cdots Sq^1 \ (i = 2^*),\\
&\theta^{2i-1-(p+q)} = Sq^{i-p}\theta^{i-1-q} + Sq^i \theta^{i-1-(p+q)} \ (i = 2^*, p = 2^*; i \geq p > q \geq 0),\\
&\theta^{2j+1} = \theta^{2j} Sq^1.
\end{aligned}
$$

命題 2.3, (2.4) そして $\theta^i(xy) = \Sigma_{j+k=i}(\theta^j x)(\theta^k y)$ 等を用いることにより，奇数次元の Wu 類は w_1 と偶数次元の Wu 類で次の様に表されることが分かっている [12]:

$$
(2.5)\qquad v_{2i+1} = \sum_{s\geq 1} w_1^{2^s-1} v_{2i-2^s+2}.
$$

$i = 2^{i_1} + \cdots + 2^{i_s} (i_1 > \cdots i_s \geq 0)$ のとき，$\alpha(i) = s, h(i) = i_1, l(i) = i_s$ とおく．

実ベクトル束の分解定理 [5] を用いて次を得る．

命題 2.6([14]). (i) $\alpha(i) > j \geq 1$ のとき，$\theta^{i-j} w_j = 0.$

(ii) $\alpha(i) \leq j \leq \alpha(i) + l(i)$ のとき，$\theta^{i-j} w_j = (\theta^{i/2^m - j} w_j)^{2^m}$. ここで $m = \alpha(i) + l(i) - j.$

Wu の公式 $Sq^a w_b = \Sigma_{i=0}^{a} \binom{b-a-1+i}{i} w_{a-i} w_{b+i} (0 \leq a < b)$ [11] を用いて, v_j を jが小さい方から順番に計算するとき，$< v_j; w_2, w_1 >$ については

$$
(2.7) < v_j; w_2, w_1 >= \begin{cases} (w_2 + w_1^2)^{j/2} & (j = 2^a, a \geq 1),\\ (\sum_{s=0}^{a-b-1} w_2^{2^s} w_1^{j/2^b - 2^{s+1}})^{2^b} & (j = 2^a + 2^b, a > b \geq 0),\\ 0 & (\alpha(j) \geq 3). \end{cases}
$$

であることが予想される．しかしながら$< v_j; w_3, w_2, w_1 >$に関しては複雑な式になる．

$P_t = Sq^{2^t}Sq^{2^{t-1}} \cdots Sq^1 w_2 (t \geq 0)$, $P_t = 0 (t = -1)$ とおく．Jを $w_4, w_5, w_6, \cdots$によって生成された$H^*(BO; Z_2)$のイデアルとする．

上の命題等を用いて次を得る．

定理 2.8([14]).

(i) $v_j \equiv (v_4)^{j/4} = (w_3 w_1 + w_2^2 + w_1^4)^{j/4} \mod J \ (j = 2^a, a \geq 2)$.

(ii) $v_i \equiv P_{a-2} w_1^{(i-1)/2} + w_2^{(i-1)/2} w_1 \mod J \ (i = 2^a + 1, a \geq 1)$.

(iii) $v_i \equiv P_{a-1} w_1 + (P_{a-2} + P_{a-3} w_1^{(i-2)/4} + w_2^{(i-2)/4} w_1)^2 + w_2 w_1^{i-2} \mod J \ (i = 2^a + 2, a \geq 2)$, $v_j \equiv (v_i)^{j/i} \mod J \ (j = 2^a + 2^b, a > b \geq 1;\ i = j/2^{b-1})$.

(iv) $v_i \equiv P_{a-1} w_1^{2^b} + P_{a-b-1}^{2^b} w_1 + P_{b-1} w_1^{2^a} \mod J \ (i = 2^a + 2^b + 1, a > b \geq 1)$, $v_j \equiv (v_i)^{j/i} \mod J \ (j = 2^a + 2^b + 2^c, a > b > c \geq 0;\ i = j/2^c)$.

(v) $v_j \equiv 0 \mod J \ (\alpha(j) \geq 4)$.

上の定理におけるP_tに関して次の漸化式を得る[14]:

(2.9) $P_t \equiv (w_2 + w_1^2)^{2^{t-1}} P_{t-1} + (w_3 + w_2 w_1)^{2^{t-1}} P_{t-2} \mod J \ (t \geq 1)$.

$H^{2^m - 2^{n+1}}(BO; Z_2)$ の元 $F_{m,n}$ を

$$F_{m,n} = \sum_{i=n}^{m-1} w_2^{2^i - 2^n} w_1^{2^m - 2^{i+1}} \ (m > n \geq 0),\ F_{m,n} = 0 \ (n \geq m \geq 0).$$

と定める．そして$p = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \cdots + 2^{p_s} (s \geq 1, p_1 > p_2 > \cdots > p_s \geq 0)$ のとき

$$G_p = \begin{cases} F_{p_1, p_2+1} F_{p_2, p_3+1} \cdots F_{p_{s-1}, p_s+1} & (s \geq 2), \\ 1 & (s = 1). \end{cases}$$

とおく．

P_t における w_2, w_1 に関する多項式を$< P_t; w_2, w_1 >$と表す．また P_t における w_3, w_2, w_1 に関する単項式で，w_3 のベキが $p(\geq 1)$ である様なもの全体の和を $P_t(p)$ で表す．このとき (2.9) を用いて次を得る．

定理 2.10([14]).　$p(\geq 2)$ を偶数とする．このとき

(i)　$< P_t; w_2, w_1 >= F_{t+1,0}w_2w_1.$

(ii)　$P_t(1) = w_3F_{t+1,0}.$

(iii)　$P_t(p) = w_3^pF_{t+1,h(p)+1}G_pF_{l(p),0}w_2w_1.$

(iv)　$P_t(p+1) = w_3^{p+1}F_{t+1,h(p)+1}G_pF_{l(p),0}.$

定理 2.8, 2.10 を用いると，(2.7) は正しいことが分かり，そして $< v_j; w_3, w_2, w_1 >$についても，w_3, w_2, w_1 に関する異なる単項式の和として具体的に記述することが出来る．たとえば，$i = 2^a + 1(a \geq 1)$ のとき，$< v_i; w_3, w_2, w_1 >$は

$$F_{a,0}w_2w_1 + w_3F_{a-1,0}w_1^m + \sum w_3^pF_{a-1,h(p)+1}G_pF_{l(p),0}(w_3 + w_2w_1)w_1^m.$$

である．ここで，$m = 2^{a-1}$, Σ は正の偶数全体についての和である [14].

§3.　D_k による Wu 類の計算

$d : H^*(BO; Z_2) \to H^*(BO; Z_2)$ を [3] における写像，即ち d は $dw_i = w_{2i}(i = 0, 1, 2, \cdots)$ によって誘導された環準同形写像とする．そして I_{odd}を $w_1, w_3, w_5, \cdots$によって生成された $H^*(BO; Z_2)$ のイデアルとする．たとえば，$dv_2 = d(w_2+w_1^2) = w_4+w_2^2$, $v_4 = w_4+w_3w_1+w_2^2+w_1^4$ であるから，$dv_2 \equiv v_4 \mod I_{odd}$ である．一般に次の定理が得られている．

定理 3.1([3]).　$H^*(BO; Z_2)$ の元 x に対して

(i)　$dSq^ix \equiv Sq^{2i}dx \quad \mod I_{odd}.$

(ii)　$dv_i \equiv v_{2i} \quad \mod I_{odd}.$

この節では，§1 で定義された $H^*(BO;Z_2)$ の自己準同形写像 D_k について述べる [15].

命題 3.2. $H^*(BO;Z_2)$ の元 x,y に対して

$$D_k(xy)=(D_kx)y+x(D_ky).$$

証明. x,y が $w_1,w_2,\cdots$ に関する単項式のときは D_k の定義から成立し，一般の場合はこのことを用いて分かる．□

命題 3.3. $i\geq k\geq 1$ とする．このとき $D_k\bar{w}_i=\bar{w}_{i-k}$.

証明. $D_k\bar{w}_k=D_k(w_1\bar{w}_{k-1}+w_2\bar{w}_{k-2}+\cdots+w_{k-1}\bar{w}_1+w_k)=D_kw_k=w_0=\bar{w}_0$. よって $i=k$ のとき成立する．k を固定し，i に関する帰納法により示される．□

$a<0$ のとき $Sq^a=0$, $b<0$ のとき $w_b=0$ と定める．定理 3.1(i) に対応するものとして次を得る．

命題 3.4. (i) $D_kSq^iw_j=\sum_{s=0}^{k-1}\binom{k-s-1}{s}Sq^{i-s}w_{j-k+s}$.

(ii) $H^*(BO;Z_2)\ni x$ に対して， $D_kSq^ix=\sum_{s=0}^{k-1}\binom{k-s-1}{s}Sq^{i-s}D_{k-s}x$.

証明. (ii) は (i) を用いて示される．(i) で特別な場合を調べてみると次の様である．

$i\geq j$ のとき: $i>j$ のとき $Sq^iw_j=0$ より左辺は 0 である．また $i=j$ のときも $D_kSq^iw_i=D_kw_i^2=0$ より左辺は 0 である．右辺においては $k-s-1\geq s$ 即ち $k>2s$ なる s についての和を考えればよい．このとき $i\geq j>j+2s-k$, よって $i-s>j+s-k$ となり右辺も 0 である．

$k>i+j$ のとき: Sq^iw_j の次元は $i+j$ で， $k>i+j$ より左辺は 0 である．右辺においては $i-s\geq 0$ 且つ $j-k+s\geq 0$ で考えればよいが，このとき $i\geq s\geq k-j>i$ だから，このような s はない．よって右辺も 0 である．

$j=i+1$ のとき: 上のことから $k\leq 2i+1$ で考えてよい．このとき右辺においては， $k-s-1\geq s$ 且つ $i+1-k+s\geq i-s$, 即ち $2s=k-1$ なる s について考えればよい．よって右辺は k が偶数のとき 0 で， k が奇数のとき $w_m^2(m=(2i-k+1)/2)$. 次に左辺を調べる．Wu の公式より

$Sq^i w_{i+1} = w_i w_{i+1} + w_{i-1}w_{i+2} + \cdots + w_1 w_{2i} + w_0 w_{2i+1}$. よって $1 \leq k \leq i$ のとき左辺は $w_i w_{i+1-k} + w_{i-1}w_{i+2-k} + \cdots + w_{i-k+1}w_i$. そして，これは k が偶数，奇数に応じてそれぞれ $0, w_m^2 (m = (2i-k+1)/2)$. $i+1 \leq k \leq 2i+1$ のとき左辺は $w_{2i+1-k}w_0 + w_{2i-k}w_1 + \cdots + w_1 w_{2i-k} + w_0 w_{2i+1-k}$. よって，このときも $1 \leq k \leq i$ の場合と同じ結果になる．一般の場合は，$l \geq 0, m \geq 0, n \geq 0$ に対して，関係式 $\sum_{i=0}^{l} \binom{l-i}{i}\binom{m+i}{n-i} \equiv \binom{l+m+1}{n} + \binom{m}{n-l-1} \mod 2$, を証明することにより示される．ここで特殊な2項係数は次の様に定める: $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ $(\beta < 0)$, $\binom{\alpha}{0} = 0$ $(\alpha \leq -2)$, $\binom{-1}{0} = 1$, $\binom{\alpha}{\beta} = 0$ $(\beta \geq 1, \alpha < 0)$. □

系 3.5. k を2のベキとする．このとき $D_k Sq^i x = Sq^i D_k x$.

証明. $\binom{k-s-1}{s}$ は $s=0$ のとき1で，$s > 0$ のとき偶数である．よって，上の命題より得られる． □

命題 3.6. k を2のベキとするとき，$D_k v_i = v_{i-k}$ $(i \geq k)$.

証明. k を固定し，i に関する帰納法で示す．系 3.5 と $D_k v_j = 0 (j < k)$ より

$$\begin{aligned} D_k v_k &= D_k(w_k + Sq^1 v_{k-1} + Sq^2 v_{k-2} + \cdots + Sq^k v_0) \\ &= w_0 + Sq^1 D_k v_{k-1} + Sq^2 D_k v_{k-2} + \cdots + Sq^k D_k v_0 = w_0 = v_0. \end{aligned}$$

よって $i = k$ のとき成り立つ．任意の $i \leq j-1 (j > k)$ に対して成り立つと仮定して，$i = j$ のときに成り立つことを示す．

$$D_k v_j = D_k(w_j + Sq^1 v_{j-1} + \cdots + Sq^{j-k} v_k + Sq^{j-k+1} v_{k-1} + \cdots + Sq^j v_0)$$

$$= w_{j-k} + Sq^1 D_k v_{j-1} + \cdots + Sq^{j-k} D_k v_k + Sq^{j-k+1} D_k v_{k-1} + \cdots + Sq^j D_k v_0$$

$$= w_{j-k} + Sq^1 v_{j-k-1} + \cdots + Sq^{j-k} v_0 = v_{j-k}. \ \square$$

定理 1.3 の証明.

(1.4) を k に関する帰納法で示す．$k = 1$ のとき，命題 3.6 より成立する．(1.4) は $1 \leq k \leq l-1$ $(l \geq 2)$ なる全ての k に対して成立すると仮定して，$k = l$ の場合に成立することを示す．命題 3.4 を用いて

$$(*) \qquad D_l v_i = w_{i-l} + \sum_{s=0}^{l-1} \binom{l-s-1}{s} \left(\sum_{t=1}^{i} Sq^{t-s} D_{l-s} v_{i-t}\right).$$

ここで $i=l$ のとき $(*)$ は

$$(**)\quad D_l v_l = w_0 + \binom{l-2}{1} D_{l-1}v_{l-1} + \binom{l-3}{2} D_{l-2}v_{l-2} + \cdots + \binom{0}{l-1} D_1 v_1.$$

となる．ここで l が2のベキのとき $(**)$ の右辺の2項係数は偶数だから，$D_l v_l = w_0 = v_0$. また $l = 2^p + q$ $(2^p > q \geq 1)$ のときには，帰納法の仮定を用いて，$\binom{2^a-1}{l-2^a} D_{2^a}v_{2^a}$ $(l > 2^a \geq 1)$ なるものについて考えればよい．$2^a - 1 \geq l - 2^a$ と $l > 2^a$ より $a = p$ となる．よって $D_l v_l = w_0 + \binom{2^p-1}{q} D_{2^p}v_{2^p} = w_0 + v_0 = 0$. よって $D_l v_l$ に対しては成立する．そこで $D_l v_i$ の場合を i に関する帰納法で示す．$D_l v_i$ に対する (1.4) は全ての $i \leq j-1$ $(j \geq l+1)$ に対して成立していると仮定する．このとき $D_l v_j$ を考える．ここで命題3.6より，l は2のベキを除いて，$l = 2^p + q$ $(2^p > q \geq 1)$ の場合を考えればよい．このとき，帰納法の仮定を用いて，上と同様に2項係数を調べることにより，$D_l v_j = w_{j-l} + \binom{2^p-1}{q} (Sq^{1-q}v_{j-2^p-1} + Sq^{2-q}v_{j-2^p-2} + \cdots + Sq^{j-q}v_{-2^p}) = w_{j-l} + w_{j-l} = 0$ $(v_m = 0(m<0))$. よって $D_l v_j$ に対する (1.4) は成立する．□

系 1.5 の証明.

(i) $v_i = cw_i + w_{i-1}X_1 + w_{i-2}X_2 + \cdots + w_{i/2+1}X_{i/2-1} + < v_i; w_{i/2}, \cdots, w_1 >$ とおくことが出来る．ここで $c \in Z_2, X_j (1 \leq j \leq i/2-1)$ は $w_j, \cdots, w_1$ に関する多項式である.

$D_i v_i = D_i(cw_i) = cw_0$. 一方，定理1.3 より $D_i v_i = v_0 = w_0$. よって $c = 1$. 同様にして $D_{i-1}v_i = w_1 + X_1$, $D_{i-1}v_i = 0 (i-1 \geq i/2+1)$ より $X_1 = w_1 = \bar{w}_1$. 帰納的に $X_j = \bar{w}_j (1 \leq j \leq l-1)(2 \leq l \leq i/2-1)$ と仮定する．このとき $D_{i-l}v_i = w_l + w_{l-1}\bar{w}_1 + w_{l-2}\bar{w}_2 + \cdots + w_1\bar{w}_{l-1} + X_l$, $D_{i-l}v_i = 0$ より $X_l = w_l + w_{l-1}\bar{w}_1 + w_{l-2}\bar{w}_2 + \cdots + w_1\bar{w}_{l-1} = \bar{w}_l$.

(ii)$v_i = dw_i + w_{i-1}Y_1 + w_{i-2}Y_2 + \cdots + w_{a+1}Y_{b-1} + w_aY_b + < v_i; w_{a-1}, \cdots, w_1 >$ とおくことが出来る．ここで $d \in Z_2, Y_j (1 \leq j \leq b)$ は $w_j, \cdots, w_1$ に関する多項式である.

$D_i v_i = D_i(dw_i) = dw_0$. 一方，定理1.3 より $D_i v_i = 0$. よって $d = 0$. 同様にして $D_{i-1}v_i = Y_1$, $D_{i-1}v_i = 0$ $(i-1 > a)$ より $Y_1 = 0$. 帰納的に $Y_j = 0$ $(1 \leq j \leq l-1)(2 \leq l \leq b-1)$ と仮定する．このとき $D_{i-l}v_i = Y_l$, $D_{i-l}v_i = 0$ より $Y_l = 0$. よって $v_i = w_aY_b + < v_i; w_{a-1}, \cdots, w_1 >$．ここで $D_a v_i = Y_b$, $D_a v_i = v_b$ より $Y_b = v_b$. □

$H^*(BO; Z_2)$ の元 x に対して，x における $w_i, \cdots, w_1$ に関する多項式を $< x; w_i, \cdots, w_1 >$ で表す.

系 1.5 の証明と同様にして，系 1.5 を一般化した次を得る．

定理 3.7([15]). $i \geq 2$ とする．このとき

$$v_i = \sum_{p=1}^{h(i)} \sum_{s=0}^{2^{p-1}-1} w_{2^p-s} < \sum_{t=p}^{h(i)} \bar{w}_{2^t-2^p+s} v_{i-2^t}; w_{2^p-s-1}, \cdots, w_1 > + Z_i,$$

ここで Z_i は v_i における $w_{j_1}^{p_1} \cdots w_{j_l}^{p_l}$ $(j_1 > \cdots > j_l \geq 1,\ p_1 \geq 2)$ の形の単項式の和である．

上の定理で，$\bar{w}_j \equiv w_j \bmod I$, $t > p$ のとき $2^t - 2^p + s > 2^p - s - 1$, より次を得る．

系 3.8. $i \geq 2$ とする．このとき

$$v_i \equiv \sum_{p=1}^{h(i)} \sum_{s=0}^{2^{p-1}-1} w_{2^p-s} < w_s v_{i-2^p}; w_{2^p-s-1}, \cdots, w_1 > \mod I.$$

定理 1.6 の証明．

系 3.8 を用いる．(i) $i = a + b$ ($a(\geq 2)$ は 2 のベキ，$a > b \geq 1$) とする．このとき，i に関する帰納法により，$v_i \equiv v_a v_b \bmod I$ が示される．(ii) は (i) を用いて示される．(iii) は Wu 類の次元に関する帰納法により示される．
□

普遍 Wu 類 v_i $(1 \leq i \leq 10)$ は次の通りである:

$$\begin{aligned}
&v_1 = w_1,\ v_2 = w_2 + w_1^2,\ v_3 = w_2 w_1,\ v_4 = w_4 + w_3 w_1 + w_2^2 + w_1^4, \\
&v_5 = w_4 w_1 + w_3 w_1^2 + w_2^2 w_1 + w_2 w_1^3, \\
&v_6 = w_4 w_2 + w_4 w_1^2 + w_3^2 + w_3 w_2 w_1 + w_3 w_1^3 + w_2^2 w_1^2, \\
&v_7 = w_4 w_2 w_1 + w_3^2 w_1 + w_3 w_2 w_1^2, \\
&v_8 = w_8 + w_7 w_1 + w_6 w_2 + w_6 w_1^2 + w_5 w_3 + w_5 w_1^3 + w_4^2 + w_4 w_3 w_1 + w_4 w_2 w_1^2 \\
&\qquad + w_3^2 w_1^2 + w_2^4 + w_1^8, \\
&v_9 = w_8 w_1 + w_7 w_1^2 + w_6 w_2 w_1 + w_6 w_1^3 + w_5 w_3 w_1 + w_5 w_1^4 + w_4^2 w_1 + w_4 w_3 w_1^2 \\
&\qquad + w_4 w_1^5 + w_3 w_2 w_1^4 + w_3 w_1^6 + w_2^4 w_1 + w_2^2 w_1^5 + w_2 w_1^7, \\
&v_{10} = w_8 w_2 + w_8 w_1^2 + w_7 w_2 w_1 + w_7 w_1^3 + w_6 w_2^2 + w_6 w_1^4 + w_5^2 + w_5 w_3 w_2 \\
&\qquad + w_5 w_3 w_1^2 + w_5 w_2 w_1^3 + w_5 w_1^5 + w_4^2 w_2 + w_4 w_3^2 + w_4 w_3 w_2 w_1 + w_4 w_3 w_1^3 \\
&\qquad + w_4 w_2^3 + w_4 w_2^2 w_1^2 + w_4 w_1^6 + w_3^3 w_1 + w_3^2 w_2^2 + w_3^2 w_2 w_1^2 + w_3 w_2^3 w_1 \\
&\qquad + w_3 w_2 w_1^5 + w_3 w_1^7 + w_2^4 w_1^2 + w_2^2 w_1^6.
\end{aligned}$$

参考文献

[1] D.M. Davis, The antiautomorphism of the Steenrod algebra, Proc. Amer. Math. Soc., **44**(1974), 235-236.

[2] H. Ichikawa and T. Yoshida, Some monomials in the universal Wu classes, Hiroshima Math. J., **20**(1990), 127-136.

[3] J.W. Milnor, On the Stiefel-Whitney numbers of complex manifolds and of spin manifolds, Topology, **3**(1965), 223-230.

[4] J.W. Milnor and J.D. Stasheff, Characteristic classes, Annals of Mathematics Studies No. 76, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey and Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1974.

[5] H. Osborn, Vector bundles, vol. 1, Foundations and Stiefel-Whitney classes, Academic Press, New York-London, 1982.

[6] N.E. Steenrod and D.B.A. Epstein, Cohomology operations, Annals of Mathematics Studies No. 50, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962.

[7] R.E. Stong, Cobordism and Stiefel-Whitney numbers, Topology, **4**(1965), 241-256.

[8] R.E. Stong, Notes on cobordism theory, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey and Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1968.

[9] R.E. Stong and T. Yoshida, Wu classes, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 352-354.

[10] J. Vrabec, Bordism, homology, and Stiefel-Whitney numbers, Postdiplom. Sem. Mat. 13, Društvo Mat. Fiz. Astronom. SR Slovenije, Ljubljana, 1982.

[11] W.-T. Wu, Les i-carrés dans une variété grassmannienne, C. R. Acad. Sci. Paris, **230**(1950), 918-920.

[12] T. Yoshida, Wu classes and unoriented bordism classes of certain manifolds, Hiroshima Math. J., **10**(1980), 567-596.

[13] T. Yoshida, Universal Wu classes, Hiroshima Math. J., **17**(1987), 489-493.

[14] T. Yoshida, The polynomials on $w_1, w_2,$ and w_3 in the universal Wu classes, to appear in Hiroshima Math. J..

[15] T. Yoshida, An endomorphism of $H^*(BO; Z_2)$ and the universal Wu classes, preprint.

無限次元多様体における
帰納的極限の位相と距離位相

筑波大学・数学系　酒井 克郎

序

Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ を自然に可算無限積空間 $\mathbb{R}^\omega$ の部分空間とみなすとき, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\mathbb{R}^n$ には 2 つの自然な位相, すなわち, $\mathbb{R}^1 \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3 \subset \cdots$ に関する帰納的極限の位相と $\mathbb{R}^\omega$ の直積位相に関する相対位相が考えられるが, それぞれの位相を持つ空間を $\varinjlim \mathbb{R}^n$ および $\mathbb{R}^\omega_f$, または簡単に $\mathbb{R}^\infty$ および σ と表す. また, 閉区間 $[-1,1]$ の可算無限積空間 $[-1,1]^\omega$ である Hilbert cube を Q と表し, 同様に $Q^\infty = \varinjlim Q^n$ および $\Sigma = Q^\omega_f$ と定義する. このとき, Q^∞ と Σ はそれぞれ $\mathbb{R}^\infty \times Q$ と $\sigma \times Q$ に同相である. 一般に, 与えられた空間 E と局所的に同相な paracompact Hausdorff 空間を E を model とする位相多様体, あるいは単に, E-**多様体**と呼ぶ. §1 では, 単体的複体を用いることにより, $\mathbb{R}^\infty$, σ, Q^∞, Σ を model とする多様体の相互の関係が明らかになることを示す.

同じ底集合を持つ 2 つの位相空間 X' と X'' の組 (X', X''), あるいは 2 つの位相 τ_1 と τ_2 が与えらた集合 $X = (X, \tau_1, \tau_2)$ のことを **双位相空間** と呼ぶが, 上で定義した $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$ および (Q^∞, Σ) は双位相空間となる. 双位相空間 $X = (X, \tau_1, \tau_2)$ に対して, $X_{\tau_i} = (X, \tau_i)$, $i = 1, 2$ と表すことにする. 双位相空間 $M = (M, \mathfrak{w}, \mathfrak{m})$ において, $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{w}$ で $\mathfrak{m}$ は距離付け可能, M の各点は $\mathfrak{m}$ に関する開近傍 U で 2 つの位相に関して同時にσ と $\mathbb{R}^\infty$ に開集合として埋め込める, すなわち, 開集合として埋め込み $h\colon U_\mathfrak{m} \to \sigma$ で $h\colon U_\mathfrak{w} \to \mathbb{R}^\infty$ も開集合として埋め込みとなっているものが存在するとき, M を $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$-**多様体** と呼ぶ. (Q^∞, Σ)-**多様体** も同様に定義される. §2

では, $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$-多様体と (Q^∞, Σ)-多様体のいくつかの特徴付けを紹介し, §3 では, 自然に現れるどんな双位相空間が $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$- または (Q^∞, Σ)-多様体になるかを紹介する.

1. 無限次元組み合わせ多様体

各頂点の星型体が ∞-単体 (可算無限充満単体的複体) と組み合わせ同値となる可算単体的複体を **無限次元組み合わせ多様体** と呼ぶ. [Sa$_2$] 単体的複体 K の多面体 $|K|$ は弱位相 $\mathfrak{w}$ と距離位相 $\mathfrak{m}$ を持つが, それぞれの位相を持つ空間を $|K|_{\mathfrak{w}}$ および $|K|_{\mathfrak{m}}$ と表す. 無限次元組み合わせ多様体を用いると $\mathbb{R}^\infty$, σ, Q^∞, Σ を model とする多様体の相互の関係が次のように明らかになる.

定理 [Sa$_5$, Sa$_3$, Sa$_2$]**.** 可算単体的複体 K に対して, 以下の条件は互いに同値である.

(1) K は無限次元組み合わせ多様体である;
(2) $|K|_{\mathfrak{w}}$ は $\mathbb{R}^\infty$-多様体である;
(3) $|K|_{\mathfrak{m}}$ は σ-多様体である;
(4) $|K|_{\mathfrak{w}} \times Q$ は Q^∞-多様体である;
(5) $|K|_{\mathfrak{m}} \times Q$ は Σ-多様体である;
(6) K の各単体の *Link* は可縮である;
(7) K の各単体の *Link* は単連結であり, 各点 $x \in |K|$ において, $H_*(|K|, |K| \setminus \{x\}) = 0$.

また, 点 $x \in K$ の重心座標を $(x(v))_{v \in K^{(0)}}$ と表し, $|K|$ 上の距離を

$$d_1(x, y) = \sum_{v \in K^{(0)}} |x(v) - y(y)|$$

で定義すると, この距離に関する完備化 $\overline{|K|}^{\ell_1}$ は ANR となる. この完備化を用いると, さらに ℓ_2-多様体との関係も次のように明らかになる.

定理 [Sa_4]. 可算単体的複体 K が無限次元組み合わせ多様体である必要十分条件は$\overline{|K|}^{\ell_1}$ が ℓ_2-多様体となることである.

無限次元組み合わせ多様体の分類に関しては, 次が成立する.

定理 [Sa_2]. 無限次元組み合わせ多様体 K と L に対して, 以下の条件は互いに同値である.

(1) K と L は組み合わせ同値である;

(2) $|K|_{\mathfrak{w}}$ と $|L|_{\mathfrak{w}}$ (または $|K|_{\mathfrak{m}}$ と $|L|_{\mathfrak{m}}$) は *homotopy* 同値である;

(3) $|K|_{\mathfrak{w}}$ と $|L|_{\mathfrak{w}}$ (または $|K|_{\mathfrak{m}}$ と $|L|_{\mathfrak{m}}$) は同相である.

2. $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$-多様体と (Q^∞, Σ)-多様体の特徴付け

連続写像 $h\colon X \to Y$ が任意の Y の開被覆 $\mathcal{U}$ に対しても, $\mathcal{U}$-homotopy inverse を持つとき, すなわち, 連続写像 $g\colon Y \to X$ で gh が id_X と $h^{-1}(\mathcal{U})$-homotopic となり, hg が id_Y と $\mathcal{U}$-homotopic となるものが存在するとき, **fine homotopy 同値** と呼ばれる. X の閉集合 A は任意の X の開被覆 $\mathcal{U}$ に対しても, 恒等写像の $\mathcal{U}$-近似連続写像 $f\colon X \to X$ で $A \cap \mathrm{cl} f(X) = \emptyset$ となるものが存在するとき, **strong Z-set** と呼ばれる. つぎのような $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$-多様体と (Q^∞, Σ)-多様体の特徴付けが得られる.

定理 [BS]. 双位相空間 $M = (M, \mathfrak{w}, \mathfrak{m})$ に対して, 以下の条件は互いに同値である.

(1) M は $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$-多様体 (または (Q^∞, Σ)-多様体) である;

(2) $M_{\mathfrak{w}}$ は $\mathbb{R}^\infty$-多様体 (または Q^∞-多様体), $M_{\mathfrak{m}}$ は σ-多様体 (または Σ-多様体) であり, 恒等写像 $\mathrm{id}\colon M_{\mathfrak{w}} \to M_{\mathfrak{m}}$ は *fine homotopy* 同値ある;

(3) $M_{\mathfrak{w}}$ は $\mathbb{R}^\infty$-多様体 (または Q^∞-多様体) であり, 恒等写像 $\mathrm{id}\colon M_{\mathfrak{w}} \to M_{\mathfrak{m}}$ は *fine homotopy* 同値, $M_{\mathfrak{m}}$ のどんな *compact set* も *strong Z-set* である.

また, $(\mathbb{R}^\infty,\sigma)$-多様体と (Q^∞,Σ)-多様体の分類に関して, 次が成立する.

定理 [Sa_7]. $(\mathbb{R}^\infty,\sigma)$-多様体 (または (Q^∞,Σ)-多様体) $M=(M,\mathfrak{w},\mathfrak{m})$ と $N=(N,\mathfrak{w},\mathfrak{m})$ において, $M_\mathfrak{m}$ と $N_\mathfrak{m}$ が *homotopy* 同値ならば, M と N は双同相である. すなわち, $\mathfrak{m}$ と $\mathfrak{w}$ 両方の位相に関して同相となる写像 $h\colon M\to N$ が存在する.

これから, つぎの結果も得られる.

定理 [Sa_7]. どんな $\mathbb{R}^\infty$-多様体も σ-多様体も $(\mathbb{R}^\infty,\sigma)$-多様体構造持ち, それは一意的である. また Q^∞-多様体も Σ-多様体も同様である.

(Cf. [We, NLC15])

3. $(\mathbb{R}^\infty,\sigma)$-多様体と (Q^∞,Σ)-多様体の例

1. 単体的複体 K に対して, 恒等写像 $\mathrm{id}\colon |K|_\mathfrak{w}\to|K|_\mathfrak{m}$ は fine homotopy 同値である. [Sa_1] これより, つぎを得る.

定理 [Sa_7]. 可算単体的複体 K が無限次元組み合わせ多様体である必要十分条件は $(|K|,\mathfrak{w},\mathfrak{m})$ が $((\mathbb{R}^\infty,\sigma))$-多様体となることである.

2. 線形位相空間に関しては, つぎが成立する.

定理 [BS, Ba_2]. L を距離付け可能な線形位相空間とし, $\mathfrak{w}$ を L 上の有限位相とする. $(L_\mathfrak{w},L)$ が $((\mathbb{R}^\infty,\sigma))$ に双同相になるための必要十分条件は L が $\aleph_0$-次元となることである.

3. 距離空間 X から距離空間 Y への Lipschitz 写像の空間を $\mathrm{LIP}(X,Y)$ と表す. ただし, $\mathrm{LIP}(X,Y)$ は sup-metric から導入される位相を持つ. k-Lipschitz 写像の部分空間を k-$\mathrm{LIP}(X,Y)$ と表し,

$$\mathrm{LIP}_\infty(X,Y)=\varinjlim k\text{-}\mathrm{LIP}(X,Y)$$

とする．このとき，$\mathrm{LIP}_\infty(X,Y)$ の位相は自然なものである．実際，つぎの集合で生成される：

$$N(f,\alpha)=\{g\in \mathrm{LIP}(X,Y)\mid d(f,g)<\alpha(\mathrm{lip}\, g)\}$$

ここで $f\in \mathrm{LIP}(X,Y)$，$\alpha\colon [0,\infty)\to(0,\infty)$ は連続．任意の距離空間の閉集合からの局所的 Lipshitz 写像も近傍からの局所的 Lipshitz 写像に拡張できるような距離空間を **ANLE** と呼ぶ．(cf. [Lu], [LV])

定理 [BS, Sa_6, Sa_8]．*X を無限個の点を含む compact 距離空間とし，Y を可分な局所 compact ANLE で，つぎのような開被覆 $\mathcal{V}$ を持つものとする．*

$$\forall V\in\mathcal{V},\ \exists\gamma\colon V\times[0,1]\to Y\ \exists k>1\ s.t.\ \gamma(y,0)=y,$$
$$k^{-1}\cdot|t-t'|\leqslant d_Y(\gamma(y,t),\gamma(y,t'))\leqslant k\cdot|t-t'|$$
$$(\forall y\in V,\forall t,t'\in[0,1]).$$

このとき，$(\mathrm{LIP}_\infty(X,Y),\mathrm{LIP}(X,Y))$ は (Q^∞,Σ)-多様体である．

4．位相空間 X 上の有限 support を持つ確率測度の空間を $P_\omega(X)$ と表す．(cf. [Fe]) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，n 点以下の support を持つ確率測度の部分空間を $P_n(X)$ と表し，$P_\infty(X)=\varinjlim P_n(X)$ とする．

定理 [BS, Ba_1, Za]．*無限個の点を含む compact 距離空間 X に対して，$(P_\infty(X),P_\omega(X))$ は $(\mathbb{R}^\infty,\sigma)$ と双同相である．*

5．位相空間 X 上の有限部分集合の空間を $\exp_\omega(X)$ と表す．(cf. [Nad]) 各 $n\in\mathbb{N}$ に対して，n 点以下の部分集合の空間を $\exp_n(X)$ と表し，$\exp_\infty(X)=\varinjlim \exp_n(X)$ とする．

定理 [BS, CN]．*双位相空間 $(\exp_\infty(X),\exp_\omega(X))$ が $(\mathbb{R}^\infty,\sigma)$ と双同相であるための必要十分条件は，X が連結かつ局所弧状連結，局所有限次元で局所 compact な 1 点以上の距離空間となることである．*

X が k_ω-空間, すなわち, compact 部分集合の列の帰納的極限となっている空間のとき, $\exp_\infty(X)$ は X 上の自由位相半束となっている. 一方, $\exp_\omega(X)$ は X 上の自由局所凸位相半束となっている. (cf. [Nac])

参考文献

[Ba$_1$] Banakh, T., *Soft maps, trivial bundles and functors in categories of σ-compact spaces*, Obshchaya topologiya. Prostranstva i otobrazheniya (General topology. Spaces and mappings), Moscow Univ. Press, Moscow, 1992, pp. 11–22. (Russian)

[Ba$_2$] ———, *On linear topological spaces (linearly) homeomorphic to $\mathbb{R}^\infty$ and linear strongly universal maps from $\mathbb{R}^\infty$ onto Q^∞*, Mat. Studii, (submitted).

[BS] Banakh, T. and Sakai, K., *Characterizations of $(\mathbb{R}^\infty, \sigma)$- or (Q^∞, Σ)-manifolds and their applications*, preprint.

[CN] Curtis, D.W. and Nguyen To Nhu, *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$-dimensional linear metric space*, Topology Appl. **19** (1985), 251–260.

[Fe] Fedorchuk, V.V., *Probability measures in topology*, Uspekhi Mat. Nauk **46:1** (1991), 41–80 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys **46:1** (1991), 45–93.

[Lu] Luukkainen, J., *Extension of spaces, maps and metrics in Lipschitz topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. Dissertationes **17** (1978).

[LV] Luukkainen, J. and Väisälä, J., *Elemets of Lipschitz topology*, Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A.I. Math. **3** (1977), 85–122.

[Nac] Nachbin, L., *Topology and Order*, Van Nostrand Math. Studies **4**, Van Nostrand Co., Princeton, N.J., 1965.

[Nad] Nadler, S.B.Jr., *Hyperspaces of Sets*, Monog. & textbooks in pure & applied math. **49**, Marcel Dekker Inc., New York, 1978.

[Sa$_1$] Sakai, K., *Fine homotopy equivalences of simplicial complexes*, Bull. Polish Acad. Sci., Math. **34** (1986), 89–97.

[Sa$_2$] ———, *Combinatorial infinite-dimensional manifolds and $\mathbb{R}^\infty$-manifolds*, Topology Appl. **26** (1987), 43–64.

[Sa$_3$] ———, *On topologies of triangulated infinite-dimensional manifolds*, J. Math. Soc. Japan **39** (1987), 288–300.

[Sa$_4$] ———, *The ℓ_1-completion of a metric compbinatorial ∞-manifold*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 574–578.

[Sa_5] ———, *Simplicial complexes triangulating infinite-dimensional manifolds*, Topology Appl. **29** (1988), 167–183.

[Sa_6] ———, *The space of Lipschitz maps from a compactum to an absolute neighborhood LIP extensor*, Fund. Math. **138** (1991), 27–34.

[Sa_7] ———, *Connecting direct limit topologies with metrics on infinite-dimensional manifolds*, Compositio Math. **81** (1992), 237–245; A corrigendum, ibid, in press.

[Sa_8] ———, *A Q^∞-manifold topology of the space of Lipschitz maps*, Topology Appl. **53** (1993), 7–18.

[Za] Zarichnyi, M.M., *Infinite-dimensional manifolds arising from direct limits of ANR's*, Uspekhi Mat. Nauk **39:2** (1984), 153–154 (Russian); English transl., Russian Math. Surveys **39:2** (1984), 213–214.

[We] West, J.E., *Open problems in infinite-dimensional topology*, Open Problems in Topology (J. van Mill and G.M. Reed, eds.), Elsevier Sci. Publ. B.V., Amsterdam, 1990, pp. 523–597.

2，3次元多様体上の葉層 S^1束について

駒澤大学自然科学教室
三好重明

1 葉層 S^1束

葉層 S^1束とは S^1束 $E \to M$であって，各ファイバーに横断的な余次元1葉層構造を持つもののことである．一般に葉層束とはファイバーに横断的な葉層構造を持つファイバー束のことであり，全不連結な構造群をもつファイバー束のことであると言い換えることができる．以下，簡単のため全てのものは向きづけ可能とする．この節では，葉層 S^1束の標準的な例として，双曲的閉曲面の接単位円周束について考察し，また全ホロノミー準同型と懸垂について述べる．

1.1 双曲的閉曲面の接単位円周束

いまΣを双曲的閉曲面，即ち，種数2以上の閉曲面であって，Gauss曲率-1 の計量を持つものとし，$T_1\Sigma$をΣの接単位円周束（の全空間）とする．$T_1\Sigma$上にはΣの双曲計量に関する測地流が定まり，この測地流の各軌道の弱（不）安定多様体達が$T_1\Sigma \to \Sigma$のファイバーに横断的な葉層構造を定める．これは以下のようにも記述できる：まず，Dを双曲的平面の Poincaré 円盤模型とする．即ち，Dは位相的には単位円盤D^2であって，Poincaré 計量

$$ds^2 = \frac{4|dx|^2}{(1-|x|^2)^2}$$

が備わっているとする．Dの接単位円周束 T_1Dは自明であるが，その標準的な自明化は単位ベクトル $v \in T_xD$に対し，x を発し，vに接する測地線の極限点$\theta \in S_\infty = \partial D \approx S^1$を対応させることにより得られる：

$$T_1 D \ni v \longmapsto (x, \theta) \in D \times S^1$$

また，Poincaré 計量に関する isometry は $x = x_1 + ix_2 \in D \subset \mathbf{C}$ と考えて，Möbius 変換

$$x \longmapsto \frac{e^{i\theta}(x-a)}{1-\bar{a}x}$$

（但し，$a \in \mathbf{C}$ かつ $|a| < 1$ ）である．Möbius 変換は無限円 S_∞をそれ自身へ写すことに注意する．Möbius 変換の全体 (即ち Poincaré 円盤の isometry 全体) は $PSL(2, \mathbf{R}) = SL(2, \mathbf{R})/\mathbf{Z_2}$ に同型であることはよく知られている．Möbius 変換はT_1D上に自然に作用し，$D \times S^1$ 上にも成分毎に作用するが，これらの作用に関して，上の自明化 $T_1D \cong D \times S^1$ は同変である．またこの作用は推移的であって isotropy 群が自明であることより，自然な微分同相 $T_1D \approx PSL(2, \mathbf{R})$ が存在する．

自明化 $T_1D \cong D \times S^1$ により T_1D上には S^1への射影による余次元 1 葉層構造（積葉層）$\mathcal{F}$が定まる．この葉層構造の葉 L_θは，単位接ベクトルであってそれらに沿った測地線の極限点が或る 1 点θであるようなもの全てから成る．特に，各葉は T_1D上の測地流の軌道の或る合併であり，またこの葉層構造 $\mathcal{F}$は isometry 群（$PSL(2, \mathbf{R})$ ）の作用で不変である．

次に，双曲的閉曲面Σは $PSL(2, \mathbf{R})$ の或る離散部分群Γによって$\Sigma = D/\Gamma$と表わせることから，Σの接単位円周束 $T_1\Sigma$は $T_1\Sigma = T_1D/\Gamma$と表わされる．T_1D上の葉層構造 $\mathcal{F}$はΓの作用で不変だったから $T_1\Sigma$上の余次元 1 C^ω級葉層構造 $\mathcal{F}/\Gamma$が得られる．構成から明らかなようにこの葉層構造は接単位円周束 $T_1\Sigma \to \Sigma$のファイバーに横断的である．このタイプの葉層構造は **Anosov 葉層構造**と呼ばれる．

1.2 全ホロノミー準同型

多様体 M上の葉層 S^1束は Mの基本群から S^1の向きを保つ同相の成す群 $\mathrm{Homeo}_+ S^1$への**全ホロノミー準同型**と呼ばれる或る準同型写像によって或る意味で完全に決定される．まずその準同型を定義しよう．

$\pi : E \to M$を葉層 S^1束とする．Mの点$*$を固定し，$*$を基点とする閉道 ℓに対してその Eに於ける葉に沿った持ち上げ$\tilde{\ell}$を考える．(葉層 S^1束の葉は底空間の被覆空間になっていることに注意.) このとき$\tilde{\ell}$の始点 x $(\pi(x) = *)$ を指定するとその終点は端点を止めたホモトピーで ℓ を動かしても不変である．即ち，$\pi_1(M)$ の元γに対して$\pi^{-1}(*)$ の変換 f_γが定まった．この変換 f_γは明らかに位相同型であり，対応$\gamma \mapsto f_\gamma$ は準同型である．同相$\pi^{-1}(*) \approx S^1$を一つ固定すればこの対応は準同型$\pi_1(M) \to \mathrm{Homeo}_+ S^1$を定める．これを葉層 S^1束$\pi : E \to M$の**全ホロノミー準同型**と呼ぶ．全ホロノミー準同型は共役を除いて定まる．ここで，葉層構造がC^r級なら全ホロノミー準同型の像はC^r微分同相の成す群 $\mathrm{Diff}^r_+ S^1$に含まれている．双曲的閉曲面の接単位円周束上の Anosov 葉層構造の場合，全ホロノミー準同型は双曲計量の誘導する基本群の $PSL(2, \mathbf{R})$ への表現（$PSL(2, \mathbf{R})$ は無限円 S_∞に自然に作用していた）に他ならない．

いま逆に準同型 $h : \pi_1(M) \to \mathrm{Homeo}_+ S^1$が与えられたとする．$M$の普遍被覆空間を$\widetilde{M}$とすると，$\pi_1(M)$ は被覆変換として$\widetilde{M}$に作用している．また S^1には準同型 h を通して作用するから，結局$\pi_1(M)$ は$\widetilde{M} \times S^1$に作用している．これらの作用に関し射影$\widetilde{M} \times S^1 \to \widetilde{M}$は同変であることより，$\pi_1(M)$ の作用で割れば S^1束$\widetilde{M} \times S^1/\pi_1(M) \to M$が得られる．また$\widetilde{M} \times S^1$の S^1成分への射影が定める積葉層$\widetilde{\mathcal{F}} = \{\widetilde{M} \times \{\theta\} | \theta \in S^1\}$は明らかにこの $\pi_1(M)$ の作用で不変である．従って$\widetilde{M} \times S^1/\pi_1(M)$ 上に余次元 1 葉層構造 $\mathcal{F} = \widetilde{\mathcal{F}}/\pi_1(M)$ が定義される．この葉層構造 $\mathcal{F}$は構成から明らかに上の S^1束のファイバーに横断的であり，その全ホロノミーは h（と共役）である．この葉層 S^1束を h の**懸垂**と呼ぶ．このとき次がいえる：

命題　M上の（位相的）葉層 S^1束の同型類全体と$\pi_1(M)$から $\mathrm{Homeo}_+ S^1$ への準同型写像の共役類全体とは上の対応によって 1 対 1 に対応する．

この命題により，葉層 S^1束とその全ホロノミー準同型は同等物と思える．以下でも場合によって同一視することがある．

2　曲面上の葉層 S^1束

前節でみたように，種数 2 以上の閉曲面上には標準的な葉層 S^1束，即ち接単位円周束が存在する．また向き付け可能な S^1束は Euler 類（この場合 Euler 類は 2 次コホモロジー類）によって分類されることもあり，2 次元多様体上の葉層 S^1束は基本的な重要性がある．

2.1　Milnor-Wood の不等式

Σを閉曲面とし，$\xi = \{E, \pi, \Sigma\}$ をΣ上の S^1束として，$e(\xi) \in H^2(\Sigma; \mathbf{Z})$ をその Euler 類とする．ξの **Euler 数** $\chi(\xi)$ を$\chi(\xi) = \langle e(\xi), [\Sigma] \rangle$ によって定義する．但し，$[\Sigma]$ はΣの基本類を表し，ペアリング $\langle\ ,\ \rangle$ は Kronecker 積を表す．また，Σの Euler 標数を$\chi(\Sigma)$ と書き，$\chi_-(\Sigma) = \max\{-\chi(\Sigma), 0\}$ と定める．このとき，葉層 S^1束の存在に関して次の重要な結果がある：

定理 ([Ml], [W])　ξがファイバーに横断的な葉層構造を持つための必要十分条件は $|\chi(\xi)| \le \chi_-(\Sigma)$ である．

S^2上の葉層 S^1束は S^2が単連結であることより自明でなければならないが，この定理により$\Sigma = T^2$の場合も，葉層 S^1束は（S^1束としては）自明でなければならないことがわかる．

ここで S^1束ξの Euler 数$\chi(\xi)$ の計算方法を述べておこう．まずΣ上に十分小さな円盤Δをとり，$\hat{\Sigma} = \Sigma - \mathrm{int}\Delta$と書く．$\xi$の$\hat{\Sigma}$への 制限$\xi|\hat{\Sigma}$を考えると，$\hat{\Sigma}$が S^1のブーケとホモトピー同値であることと，ξが向き付け可能であることより$\xi|\hat{\Sigma}$は自明である．そこで自明化$\xi|\hat{\Sigma} \cong \hat{\Sigma} \times S^1$を固定する．一方，$\xi$は勿論$\Delta$上でも自明だから自明化$\xi|\Delta \cong \Delta \times S^1$が存在する．いま$\Delta \times S^1$と$\hat{\Sigma} \times S^1$との（ファイバーを保つ）接着写像を$\alpha : \partial\Delta \times S^1 \to \partial\hat{\Sigma} \times S^1$とする：

$$\xi \cong (\Delta \times S^1) \cup_\alpha (\hat{\Sigma} \times S^1)$$

このとき $\{0\} \times S^1$を生成元として$\pi_1(\Delta \times S^1) \cong \mathbf{Z}$ と考えたとき$\chi(\xi) = -[\alpha^{-1}(\partial\hat{\Sigma} \times \{0\})]$（但し，$S^1 = \mathbf{R}/\mathbf{Z}$）である．即ち，$\hat{\Sigma}$上の断面の境

界がΔ上で何回ファイバーを回っているかを数えた値が Euler 数$\chi(\xi)$である．

いまξが葉層 S^1束であったとすると，$\pi_1(\Sigma)$ の表示

$$\langle a_1, b_1, \cdots, a_g, b_g | [a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] \rangle$$

とξの全ホロノミー準同型 h によって次のように計算できる：各 $h(a_i), h(b_i)$ の普遍被覆空間 $\mathbf{R} \to \mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$への持ち上げを$\widetilde{h(a_i)}, \widetilde{h(b_i)}$と書くとき $[\widetilde{h(a_1)}, \widetilde{h(b_1)}] \cdots [\widetilde{h(a_g)}, \widetilde{h(b_g)}]$ は恒等写像を被覆するから整数による平行移動である．その値が$-\chi(\xi)$ に他ならない．

2.2 剛性定理

Σを種数 2 以上の閉曲面とする．$\psi_1, \psi_2 : \pi_1(\Sigma) \to PSL(2, \mathbf{R})$ を２つの準同型で，それらの像が共に cocompact な離散部分群であるとする．ここで，$\Gamma \subset PSL(2, \mathbf{R})$ が cocompact とは商空間 D/Γが compact であることである．このとき，ψ_1とψ_2は位相共役，即ち，$f \in \mathrm{Homeo}_+ S^1$が存在して，任意の$\gamma \in \pi_1(\Sigma)$ に対し$\psi_1(\gamma) = f\psi_2(\gamma)f^{-1}$が成立することが知られている．しかし，$\psi_1, \psi_2$が $PSL(2, \mathbf{R})$ の元によって共役でない限り C^1微分同相では共役にならない（上の fは C^1になりえない）ことが示されている．([Gh1], [Su] 参照.)

いま種数 2 以上の閉曲面Σ上で Milnor-Wood の不等式で許される最小の場合，即ち，$\chi(\xi) = \chi(\Sigma)$ の場合を考えよう．１節で述べた双曲的閉曲面の接単位円周束が丁度この場合であるが，Σ上の葉層 S^1束ξで$\chi(\xi) = \chi(\Sigma)$ を満たすものはこれ以外にないことが示されている．$\varphi : \pi_1(\Sigma) \to PSL(2, \mathbf{R})$ をΣの双曲的計量の誘導する全ホロノミー準同型とするとき，まず１９８７年に次が示された：

定理 ([Mt]) $\psi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^2_+ S^1$を$\chi(\psi) = \chi(\Sigma)$ なる全ホロノミー準同型とするとき，ψとφ とは位相共役である．即ち，$f \in \mathrm{Homeo}_+ S^1$ が存在して$\varphi = f\psi f^{-1}$が成り立つ．

さらに，１９９２年，E. Ghys によって可微分共役であることが示

された：

定理 ([Gh2]) $\psi:\pi_1(\Sigma)\to \mathrm{Diff}^r_+S^1$ $(3\le r\le\infty)$ を $\chi(\psi)=\chi(\Sigma)$ なる全ホロノミー準同型とするとき，$f\in\mathrm{Diff}^r_+S^1$ が存在して $\varphi=f\psi f^{-1}$ が成り立つ．

2.3 Seifert Fibration

Milnor-Wood の不等式は D.Eisenbud, U. Hirsch 及び W. Neumann や M.C.Gazolaz，さらに M.Jankins, W.Neumann らの研究によって Seifert fibration の場合に拡張されている．ここでは本講演の目的から少し外れることもあり，Seifert fibration の場合の議論は省略させてもらう：詳しくは，[EHN], [Gz], [JN1], [JN2] を参照のこと．

3 3次元多様体上の葉層 S^1 束

3次元多様体上の葉層 S^1 束の中には標準的と言えるものは見当たらないので，いまのところは曲面上の葉層 S^1 束の研究を応用して手探りで進むしかない．

M を3次元閉多様体とする．まず，M 上の S^1 束 ξ がファイバーに横断的な葉層構造を持つためには，Milnor-Wood の不等式から要請される必要条件がある：

条件 (MW)：任意の $z\in H_2(M;\mathbf{Z})$ に対して $|\langle e(\xi),z\rangle|\le x(z)$ が成立する．

但し，x は Thurston ノルム，即ち，$z\in H_2(M;\mathbf{Z})$ に対し $x(z)=\min\{\chi_-(\Sigma)|z=[\Sigma],\Sigma\subset M\}$ と定義して得られる $H_2(M;\mathbf{Z})$ の pseudo norm である．([Th] 参照.)

3.1 C^3横断的葉層を持たない例

まず1つの現象を観察しよう．そのために以下のいくつかの予備観察が必要となる：Σを種数gの有向閉曲面とし，$f:\Sigma \to \Sigma$を向きを保つ同相写像とする．fの写像柱を$M = \Sigma \times [0,1]/f$と書く．ここで，$M$の位相型は$f$の isotopy 類によって定まるから，$\Sigma$上に基点$*$をとって$f(*) = *$と仮定してよい．すると$M$の基本群は

$$\pi_1(M) = \langle a_i, b_i, t | \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i],\ t a_i t^{-1} f_*(a_i)^{-1},\ t b_i t^{-1} f_*(b_i)^{-1} \rangle$$

と表示される．従って，或る群Gに対し，準同型$h:\pi_1(M) \to G$が与えられたとすると

$$\begin{aligned} h(t)h(a_i)h(t)^{-1} &= h(f_*(a_i)) \\ h(t)h(b_i)h(t)^{-1} &= h(f_*(b_i)) \end{aligned}$$

となっていなければならない．

ここで$g \geq 2$としてΣ上に双曲計量を導入しておくと$\pi_1(\Sigma) \cong \Gamma \subset PSL(2,\mathbf{R})$だが，$\Gamma$上への$f_*$の作用は

$$f_* : \Gamma \ni \gamma \longmapsto \tilde{f}\gamma\tilde{f}^{-1} \in \Gamma$$

(但し，$\tilde{*} \in D$を$* \in \Sigma$の持ち上げとして$\tilde{f}:D \to D$は$\tilde{f}(\tilde{*}) = \tilde{*}$なる$f$の持ち上げ）で与えられる．

最後に2．2項と同様に$\varphi : \pi_1(\Sigma) \to PSL(2,\mathbf{R})$を$\Sigma$の双曲的計量の誘導する全ホロノミー準同型としよう．以上の準備の下に次が得られる：

定理 ([My]) 3次元閉多様体M上のS^1束ξでファイバーに横断的なC^0葉層構造は持つが，そのようなC^3葉層構造は存在しないものが存在する．

略証 Σを種数$g \geq 2$の有向閉曲面とし，$f:\Sigma \to \Sigma$を周期的でない同相写像で向きを保つものとする．fはΣの基点$*$を固定すると仮定す

る．Mを fの写像柱とする：$M = \Sigma \times [0,1]/f$．次に $K = \{*\} \times [0,1]/f$ として，$[M] \cap e = (2-2g)[K] \in H_1(M;\mathbf{Z})$ によって $e \in H^2(M;\mathbf{Z})$ を定める．e は $[K]$ の Poincaré 双対である．ξをその Euler 類が e であるような M上の S^1束とするとξは$\Sigma \times \{0\} \subset M$上接単位円周束である：

$$\xi|\Sigma \times \{0\} \cong \{T_1\Sigma \to \Sigma\}$$

いま準同型$\psi : \pi_1(M) \to \mathrm{Diff}^r_+ S^1$ $(3 \leq r \leq \infty)$ であってその Euler 類 $e(\psi)$ が e に一致するものが存在すると仮定すると，ψの定める葉層 S^1束は S^1束としてξと同型である．ところが，Euler 類の定め方から E. Ghys の可微分剛性定理によりψは$\Sigma = \Sigma \times \{0\}$ 上φ と C^r微分同相により共役となる．一方，予備観察により少なくとも$\psi(t)$ の S_∞への作用は$\tilde{f}$の S_∞への拡張に等しくなければならない．ところが双曲的曲面の isometry 群は有限群であって，fは非周期的だからΣ上の如何なる双曲計量に対しても isometry になり得ない．従って，$\tilde{f}$の S_∞への拡張による共役は C^0同相ではあるが C^1同相になり得ない．また，φ と$\tilde{f}$により求める $\mathrm{Homeo}_+ S^1$への表現は構成できる．

3.2 存在定理

前項の結果より，滑らかな葉層 S^1束の存在については条件 (MW) は十分ではないことになるが，位相的（即ち C^0級の）葉層 S^1束の存在に関しては十分かもしれない．実際，前項の例の底空間としては或る種の双曲多様体（ monodromy 同相 fが pseudo Anosov の場合）が挙げられるが，Jaco-Shalen-Johanson 分解をして双曲的部分が無い場合は条件 (MW) が十分であることが証明できる：

定理 ([My])　Euler 類 $e(\xi) \in H^2(M;\mathbf{Z})$ が捩れ元であるとき，ξはファイバーに横断的な C^∞葉層構造を持つ．

定理 ([My])　Mを graph 多様体，即ち，幾つかの compact Seifert fibration の境界を貼り合わせて得られる閉多様体とするとき，M上の S^1束ξがファイバーに横断的な C^∞葉層構造を持つための必要十分条

件は，任意の $z \in H_2(M;\mathbf{Z})$ に対して $|\langle e(\xi), z\rangle| \leq x(z)$ が成り立つことである．

参考文献

[EHN] D. Eisenbud, U. Hirsch, W. Neumann: *Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphism of the circle*, Comment. Math. Helvetici **56** (1981), 638-660.

[Gz] M. C. Gazolaz: *Fibrés de Seifert: classification et existence de feuilletages*, C. R. Acad. Sc. Paris Sér. I **295** (1982) 677-679.

[Gh1] E. Ghys: *Actions localement libres du affine*, Invent. Math. **82** (1985) 479-526.

[Gh2] E. Ghys: *Rigidité différentiable des groupes fuchsiens*, Publ. math. I.H.E.S. **78** (1994) 163-185.

[JN1] M. Jankins, W. Neumann: *Homomorphisms of Fuchsian groups to* $PSL(2,\mathbf{R})$, Comment. Math. Helvetici **60** (1985) 480-495.

[JN2] M. Jankins, W. Neumann: *Rotation numbers of products of circle homeomorphisms*, Math. Annalen **271** (1985) 381-400.

[Ml] J. Milnor: *On the existence of a connection with curvature zero*, Comment. Math. Helvetici **32** (1957-58), 215-223.

[Mt] S. Matsumoto: *Some remarks on foliated* S^1 *bundles*, Invent. Math. **90**(1987), 343-358.

[My] S. Miyoshi: in preparation.

[Su] D. Sullivan: *Discrete conformal groups and measurable dynamics*, Bull. A.M.S. **6** (1982) 53-73.

[Th] W. Thurston: A norm for the homology of three-manifolds, Mem. A.M.S. **59**, No. 339 (1986) .

[W] J. W. Wood: *Bundles with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helvetici **46** (1971), 257-273.