

第41回

トポロジー・シンポジウム

講演集

1994年7月19日～22日

於 愛媛大学

平成6年度科学研究費補助金・総合研究(A)

課題番号 05302006





## 序

この講演集は、1994年7月19日から22日の間、愛媛大学教養部で開催される第41回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、参加者が講演をよりよく理解して、研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は、科学研究費 総合研究 (A)

「トポロジー的グラフ理論の総合的研究」(課題番号05302006)により作られたものであることを付記しておく。

1994年7月

総合研究 (A) 05302006

研究代表者 鈴木 晋一



## 目次

離散群と $G$ -空間の有理 Euler 標数	
秋田利之 (大阪大)	1
Algebraic $G$ vector bundle over adjoint representation	
長瀬昭子 (大阪経済大)	9
3次元多様体の幾何化の現状 <sup>(*)</sup>	
小島定吉 (東京工業大)	19
Global rigidity of manifolds with symmetry	
神島芳宣 (熊本大)	24
3次元多様体の単体分割の average edge order について	
田村 誠 (大阪大)	38
$\varepsilon$ -translations and dimension	
後藤達生 (埼玉大)	52
各点収束位相をもつ関数空間の位相的性質について	
酒井政美 (神奈川大)	60
Vassiliev 不変量と knot diagrams <sup>(*)</sup>	
大山淑之 (名古屋工業大)	64
Vassiliev invariants, graph complex and differential forms on the space of knots	
河野俊丈 (東京大)	81
An integral lift of the Rochlin invariant and gauge theory	
太田啓史 (東京大)	92

HOMFLY polynomial via an invariant of colored planar graphs	大槻知忠 (東京大)	1 0 8
The Jones polynomial of an unknotting number one knot	宮沢康行 (山口大)	1 2 4
Applications of labelled configuration spaces	Martin Guest (Univ. of Rochester, 東京工業大)	1 3 0
同変代数的 K 理論の局所化定理とその応用	竹田雄一郎 (東京都立大)	1 3 6
実代数曲線のトポロジーとニュートン図形	福井敏純 (名古屋工業大)	1 4 6
Survey on 2-dimensional braids	鎌田聖一 (大阪市立大)	1 6 2
Homologically antipodal locally linear involutions on 4-manifolds	関根光弘 (広島市立大)	1 7 8

(\*) 印を付したものは、総合報告です。

# 離散群と $G$ -空間の有理 Euler 標数

秋田 利之 (阪大理/学振)

## 1 はじめに

Brown[5] はある種の  $\Gamma$ -CW 複体 ( $\Gamma$  は離散群) に対して (完備) 有理 Euler 標数という不変量を導入し、様々な性質 (とくに不動点に関する公式) を導いた。今回の講演ではこの (完備) 有理 Euler 標数とその応用を紹介する。

(完備) 有理 Euler 標数の定義には Hattori-Stallings rank と呼ばれる有限生成射影  $R\Gamma$  加群の不変量をもちいられる。§2 で Hattori-Stallings rank の定義と簡単な例を述べる。§3 で適当な有限性条件を満たす  $\Gamma$ -CW 複体に対し (完備) 有理 Euler 標数を定義しその性質を述べる。

$X$  が多様体で  $\Gamma$  が  $X$  に真性不連続に作用するとき、軌道空間  $X/\Gamma$  は orbifold の構造を持つ。適当な条件のもとでは orbifold としての Euler 標数が定義されるが、有理 Euler 標数は orbifold の Euler 標数の一般化となっている。§4 では応用として  $X/\Gamma$  の通常の Euler 標数と orbifold としての Euler 標数の差を有理 Euler 標数で表す等式を導く。

## 2 代数的準備

この節では Hattori-Stallings rank の定義と簡単な例を述べる。Hattori-Stallings rank は [10], [13] で導入され [1] で詳細に研究されている。詳しくは [1] を参照して欲しい。

$R$ を単位的環,  $[R, R]$  を  $r_1 r_2 - r_2 r_1$  ( $r_1, r_2 \in R$ ) の形の元で生成される  $R$  の部分  $R$ 加群,  $T(R) = R/[R, R]$  をその商加群,  $\pi : R \rightarrow T(R)$  を自然な射影とする。

$P$ を(左)射影  $R$ 加群,  $P^* = \text{Hom}_R(P, R)$  を  $P$ の双対加群とする。  $P^* \otimes_R P$  と  $\text{End}_R(P) = \text{Hom}_R(P, P)$  は写像  $f \otimes p \mapsto (q \mapsto f(q) \cdot p)$  により同型である。この同一視のもとで  $\text{Tr}_P : \text{End}_R(P) \rightarrow T(R)$  を

$$\text{Tr}_P(f \otimes p) = \pi(f(p))$$

で定義する。  $\text{Tr}_P$  を universal trace function と呼ぶ。  $\text{Tr}_P$  は次の二つの意味で加法的である。

(i)  $\phi, \psi \in \text{End}_R(P)$  に対して

$$\text{Tr}_P(\phi \circ \psi) = \text{Tr}_P(\phi) + \text{Tr}_P(\psi)$$

(ii)  $\phi \in \text{End}_R(P_1), \psi \in \text{End}_R(P_2)$  に対して

$$\text{Tr}_{P_1 \oplus P_2}(\phi \oplus \psi) = \text{Tr}_{P_1}(\phi) + \text{Tr}_{P_2}(\psi)$$

ただし  $P, P_1, P_2$  は有限生成射影  $R$ 加群である。

**定義 1**  $P$  を有限生成射影  $R$ 加群とする。  $r_P = \text{Tr}_P(\text{id}_P)$  を  $P$  の Hattori-Stallings rank という [10]. [13]。

$r_{P \oplus P'} = r_P + r_{P'}$  が成り立つから  $P \mapsto r_P$  により写像

$$K_0(R) \rightarrow T(R)$$

を得る。ただし  $K_0(R)$  は有限生成射影  $R$ 加群の同値類の Grothendieck 群。上の写像により  $K_0(R)$  の元の Hattori-Stallings rank を定義する。

**例 1**  $F$  を階数  $n$  の自由  $R$ 加群とする ( $F \cong R^n$ )。  $F$  の Hattori-Stallings rank は  $r_F = n \cdot [1] \in T(R)$ 。ただし  $[1]$  は  $1 \in R$  の  $T(R)$  における像。

群 $\Gamma$ の群環 $R\Gamma$ に対して $T(R\Gamma)$ は $\Gamma$ の共役類 $[\gamma]$ の全体 $T(\Gamma)$ を基底とする自由 $R$ 加群 $\bigoplus_{[\gamma] \in T(\Gamma)} R_{[\gamma]}$ と同一視される。したがって有限生成射影 $R\Gamma$ 加群のHattori-Stallings rankは共役類の一次結合とみなせる。 $r_P(\gamma)$ により $r_P \in T(\Gamma)$ の $[\gamma]$ の係数を表す。

例 2  $G$ を有限群, $k$ を標数0の体, $V$ を $G$ の $k$ 上の有限次元線型表現とすると $V$ は有限生成射影 $kG$ 加群でそのHattori-Stallings rankは

$$r_V(g) = \frac{\chi_V(g^{-1})}{|C_G(g)|}$$

で与えられる。ただし $\chi_V$ は $V$ の指標, $C_G(g)$ は $g$ の $G$ における中心化群である[10]。

次にHattori-Stallings rankを鎖複体に拡張しよう。

定義 2  $R$ 上の非負鎖複体 $P_* = \bigoplus_{i \geq 0} P_i$ が有限とは各 $P_i$ が有限生成射影 $R$ 加群で $i > N$ のとき $P_i = 0$ となる $N$ が存在すること。二つの非負鎖複体 $C_*, D_*$ に対して鎖準同型 $\circ : C_* \rightarrow D_*$ が弱同値とは $\circ$ がホモロジー群の同型写像 $\circ_* : H(C_*) \rightarrow H(D_*)$ を誘導すること。

定義 3  $C$ を $R$ 上の非負鎖複体とする。有限鎖複体 $P_*$ と弱同値 $\circ : P_* \rightarrow C$ が存在するとき $C$ を $R$ 上FPとよぶ。そのとき

$$\sum_i (-1)^i [P_i] \in K_0(R)$$

のHattori-Stallings rankを $C$ のHattori-Stallings rankと定義し $r_C$ と書く。具体的には

$$r_C = \sum_i (-1)^i r_{P_i} \in T(R)$$

となる。

付記 [8]によると $T(\mathbb{Q}\Gamma)$ は $\mathbb{Q}\Gamma$ の0次の巡回ホモロジー $HC_0(\mathbb{Q}\Gamma)$ と同型で $K_0(\mathbb{Q}\Gamma)$ にHattori-Stallings rankを対応させる写像はChern指標 $Ch_0^0 : K_0(\mathbb{Q}\Gamma) \rightarrow HC_0(\mathbb{Q}\Gamma)$ と一致するそうである。

### 3 離散群と $G$ -空間の有理 Euler 標数

前節で定義した鎖複体の Hattori-Stallings rank を使って  $\Gamma$ -CW 複体の有理 Euler 標数を定義しその性質を述べる。一部を除いて [5] による。

**定義 4**  $\Gamma$  を離散群,  $X$  を  $\Gamma$ -CW 複体とする。有理係数の鎖複体  $C_*(X, \mathbb{Q})$  が  $\mathbb{Q}\Gamma$  上 FP のとき  $(\Gamma, X)$  は FP という。とくに  $X = *$  が一点からなる空間で  $(\Gamma, *)$  が FP のとき単に  $\Gamma$  は FP であるという。

**定義 5**  $(\Gamma, X)$  が FP とする。

$$E_\Gamma(X) = r_{C_*(X, \mathbb{Q})}$$

を  $(\Gamma, X)$  の完備有理 Euler 標数 (complete rational Euler characteristic) という。

$$e_\Gamma(X) = E_\Gamma(X)(1)$$

を有理 Euler 標数 (rational Euler characteristic) という。とくに  $X$  が一点のとき  $E_\Gamma(X)$ ,  $e_\Gamma(X)$  をそれぞれ  $E(\Gamma)$ ,  $e(\Gamma)$  と書き、群の完備有理 Euler 標数、有理 Euler 標数と呼ぶ。

$E(\Gamma)$  は [13] で complete Euler characteristic,  $e(\Gamma)$  は [1], [7] で単に Euler characteristic と呼ばれている。

**例 3**  $G$  が有限群,  $X$  を  $G$ -CW 複体とする。もし  $\dim X < \infty$  かつ  $H_*(X, \mathbb{Q})$  が有限生成ならば  $(G, X)$  は FP で、その完備有理 Euler 標数は

$$E_G(X)(g) = \frac{L(g^{-1})}{|C_G(g)|}$$

で与えられる。ただし  $L(g)$  はホモロジー群で計算された  $g$  の Lefschetz 数

$$L(g) = \sum_i (-1)^i \text{trace}(g_* : H_i(X, \mathbb{Q}) \rightarrow H_i(X, \mathbb{Q}))$$



である。実際  $\mathbb{Q}G$  は Noether 環であるから  $C_*(X, \mathbb{Q})$  は有限複体  $P_*$  に鎖ホモトピー同値であり、 $K_0(\mathbb{Q}G)$  の元として

$$\sum_i (-1)^i [P_i] = \sum_i (-1)^i [H_i(P_*)] = \sum_i (-1)^i [H_i(X, \mathbb{Q})]$$

が成り立つ。あとは例 2 を適用すればよい。

(完備) 有理 Euler 標数の性質をいくつか述べよう。その前に言葉を定義しておく。

**定義 6**  $\Gamma$ -CW 複体  $X$  が **cocompact** とは軌道空間  $X/\Gamma$  が有限複体になること、 $X$  が **proper** とは各点の固定部分群が有限群になることをいう。

1.  $X, Y$  を  $\Gamma$ -CW 複体とする。 $\Gamma$  同変な胞体的写像  $f: Y \rightarrow X$  が有理係数ホモロジー群の恒等写像を誘導するならば  $(\Gamma, X)$  が FP であることと  $(\Gamma, Y)$  が FP であることは同値で

$$E_\Gamma(X) = E_\Gamma(Y)$$

が成り立つ。とくに  $X$  が  $\mathbb{Q}$ -acyclic であれば  $E_\Gamma(X) = E(\Gamma)$ 。

2. (有限指数の部分群)  $(\Gamma, X)$  が FP で  $\Gamma'$  が  $\Gamma$  の有限指数の部分群ならば  $(\Gamma', X)$  も FP で

$$E_{\Gamma'}(X)(\gamma) = (C_\Gamma(\gamma), C_{\Gamma'}(\gamma)) \cdot E_\Gamma(X)(\gamma)$$

がなりたつ。とくに

$$e_{\Gamma'}(X) = (\Gamma, \Gamma') \cdot e_\Gamma(X)$$

となる。

3. (Quillen の公式)  $X$  を cocompact な  $\Gamma$ -CW 複体とする。もし各胞体  $\sigma$  の固定部分群  $\Gamma_\sigma$  が FP ならば、 $(\Gamma, X)$  は FP で

$$E_\Gamma(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (-1)^{\dim \sigma} i_{\Gamma_\sigma - \Gamma} E(\Gamma_\sigma),$$

ただし  $i_{\Gamma_\sigma \rightarrow \Gamma} : T(Q\Gamma_\sigma) \rightarrow T(Q\Gamma)$  は射入  $\Gamma_\sigma \rightarrow \Gamma$  から誘導される自然な写像,  $\mathcal{E}$  は  $X$  の胞体の  $\Gamma$  軌道の代表元の集合。とくに

$$e_\Gamma(X) = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}} (-1)^{\dim \sigma} e(\Gamma_\sigma)$$

となる。

性質 1-3 はほぼ代数的に証明される。

4. (不動点)  $X$  が cocompact な  $\Gamma$ -CW 複体とする。部分群  $H < \Gamma$  に対して  $N_\Gamma(H)$  を  $H$  の  $\Gamma$  における正規化群,  $X^H$  を  $H$  の不動点集合とする。各部分群  $H$  に対して  $(N_\Gamma(H), X^H)$  が FP ならば  $(N_\Gamma(H)$  は  $X^H$  に作用する),

$$X^\gamma = \emptyset \Rightarrow E_\Gamma(X)(\gamma) = 0$$

が成り立つ (筆者による)。とくに  $X$  が proper かつ cocompact な  $\Gamma$ -CW 複体ならば Quillen の公式より  $(\Gamma, X)$  は FP で

$$E_\Gamma(X)(\gamma) = e_{C_\Gamma(\gamma)}(X^\gamma)$$

が成り立つ。

5. (Wall の有理 Euler 標数との関連について) 群  $\Gamma$  に対して, その有限指数の部分群  $\Gamma'$  で  $K(\Gamma', 1)$  複体が有限複体にホモトピー同値なものが存在するとする。そのとき

$$\chi \text{ Wall}(\Gamma) = \frac{\chi(K(\Gamma', 1))}{(\Gamma, \Gamma')}$$

が Wall の定義による群の有理 Euler 標数である [14]。上の条件を満たす群は FP となり  $\chi \text{ Wall}(\Gamma) = e(\Gamma)$  が成り立つ。Wall の Euler 標数は [12], [4] によって一般化されたが, それに対して上の等式が満たされるかどうかはわかってない。FP だが上の条件を満たさない群が存在する [11]。

## 4 Proper かつ cocompact な $\Gamma$ -CW 複体

この節では proper かつ cocompact な  $\Gamma$ -CW 複体に対して, その有理 Euler 標数と軌道空間の Euler 数との差をあらわす等式をみちびく (筆者の仕事

の紹介)。

$E_\Gamma$ を可縮な自由 $\Gamma$ -CW 複体,  $X$ を $\Gamma$ -CW 複体とする。 $\Gamma$ は  $E_\Gamma \times X$ に diagonal に作用しているとする。 $X_\Gamma = (E_\Gamma \times X)/\Gamma$ とおく (いわゆる Borel 構成)。

**定理 1** ( $\Gamma, X$ ) が FP ならば

$$\sum_{[\gamma]} E_\Gamma(X)(\gamma) = \chi(X_\Gamma; \mathbf{Q}),$$

ただし  $[\gamma]$  は共役類全体をうごき, また  $\chi(-; \mathbf{Q})$  は有理系数ホモロジー群のレベルで計算された Euler 標数。

証明はスペクトル系列と群のコホモロジーの一般論による。

さて  $X$  が proper かつ cocompact ならば Quillen の公式より

$$e_\Gamma(X) = \sum_{\sigma} (-1)^{\dim \sigma} \frac{1}{|\Gamma_{\sigma}|}$$

となる。

**定理 2**  $X$  が proper かつ cocompact な  $\Gamma$ -CW 複体とする。そのとき

$$\chi(X/\Gamma) - e_\Gamma(X) = \sum_{[\gamma] \in T(\Gamma) - \{1\}} e_{C_\Gamma(\gamma)}(X^\gamma)$$

ただし,  $\gamma$  は  $\Gamma$  の単位元以外の元の共役類全体をうごく。

証明は定理 1, 前節の不動点に関する等式, および Leray のスペクトル系列を用いる。

$X$  が多様体ならば  $X/\Gamma$  は orbifold の構造をもつ。そのとき  $e_\Gamma(X)$  は orbifold Euler 標数  $\chi^{\text{orb}}(X/\Gamma)$  に他ならない。上の定理は orbifold Euler 標数  $\chi^{\text{orb}}(X/\Gamma)$  と  $\chi(X/\Gamma)$  の差と解釈できる。

## 参考文献

- [1] H. Bass, Euler characteristics and characters of discrete groups, *Invent. Math.* **35** (1976), 155–196
- [2] ———, Traces and Euler characteristics, Homological group theory (C. T. C. Wall ed.), *London Math. Soc. Lecture Notes 36*, Cambridge University Press, Cambridge, 1979, 1–26.
- [3] R. Bieri, *Homological dimension of discrete groups* (2nd edition), Queen Mary College Mathematics Notes, London, 1981.
- [4] K. S. Brown, Euler characteristics of discrete groups and  $G$ -spaces, *Invent. Math.* **27** (1974) 229–264.
- [5] ———, Complete Euler characteristics and fixed-point theory, *J. Pure Appl. Algebra* **24** (1982), 103–121.
- [6] ———, *Cohomology of Groups*, Graduate texts in mathematics, vol. 87, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1982.
- [7] I. M. Chiswell, Euler characteristics of groups, *Math. Z.* **147** (1976), 1–11.
- [8] B. Eckmann, Cyclic homology of groups and the Bass conjecture, *Comment. Math. Helv.* **61** (1986), 193–202.
- [9] D. H. Gottlieb, A certain subgroup of the fundamental group, *Amer. J. Math.* **87** (1963), 840–856.
- [10] A. Hattori, Rank element of a projective module, *Nagoya J. Math.* **25** (1965), 113–120.
- [11] H. R. Schneebeli, On virtual properties of group extensions, *Math. Z.* **159** (1978), 159–167.
- [12] J.-P. Serre, Cohomologie de groupes discrets, *Ann. of Math. Studies*, vol. 70, Princeton University Press, Princeton, 1971, 77–169.
- [13] Centerless groups—an algebraic formulation of Gottlieb’s theorem, *Topology* **4** (1965), 129–134.
- [14] C. T. C. Wall, Rational Euler characteristics, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **57** (1961) 182–183.

# ALGEBRAIC $G$ VECTOR BUNDLE OVER ADJOINT REPRESENTATION

長瀬 昭子

$G$  を reductive complex algebraic group とし,  $B, F$  を  $G$  module over  $\mathbb{C}$  としよう.

$\text{Vec}(B, F) = \{E \mid B \text{ 上の algebraic } G \text{ vector bundle, } 0 \in B \text{ 上の fiber が } F\}$  とし,  $\text{VEC}(B, F)$  を  $\text{Vec}(B, F)$  の元の  $G$  isomorphism classes の集合とする.

$\text{VEC}(B, F)$  は, 自明かという問題は, 同変 Serre 問題といわれる.  $G = \{e\}$  の場合は, Quillen と Suslin により肯定的に解決されている. (1976 年 [Q] [Su]) また Bass と Haboush により,  $\text{VEC}(B, F)$  の元は, stably に自明であることが示された. ([BH1] [BH2]) 1989 年 [Sch] で Schwarz によって  $B$  の algebraic quotient  $B/G$  の次元が 1 の場合 (即ち,  $B$  上の  $G$ -invariant functions  $\mathcal{O}(B)^G$  が一変数多項式環となる場合) 非自明な  $\text{VEC}(B, F)$  の存在が示され,  $G = O_2$  と  $SL_2$  の例が出された. その後 Kraft と Schwarz [KS] で, 代数的な証明が与えられ,  $\text{VEC}(B, F)$  の構造も明らかにされた.

$\dim B/G > 1$  の場合, Knop [Kn], 折田-長瀬 [MN] で,  $G$  が非可換, 連結の場合,  $\mathcal{O}$  を  $G$  の adjoint 表現とした時  $\text{VEC}(\mathcal{O}, F)$  はほとんどの既約  $G$  module  $F$  に対して自明でない事がわかっている. この場合  $\dim \mathcal{O}/G = \text{rank } G$  である. しかし, 一般の  $B$  に対しては,  $\text{VEC}(B, F)$  の構造は, ほとんど知られていない. Kraft-Schwarz の理論は, vector bundle を transition functions の族としてとらえているが, Masuda-

Petrieの方法は、 $VEC(B, F)$ の元が *stably* に自明である事に注目してこの問題に別のアプローチをしている。cf. [MPI] [MP2] [MMP1].

この講演では *adjoint* 表現上の  $G$  vector bundle  $F$  絞って話る予定で内容は次の通り。

§ 1. Kraft - Schwarz の結果 ( $G = SL_2$  case)

§ 2.  $\dim B/G > 1$  の場合

§ 3. Non linearizable action の存在

§ 4. Masuda - Petrie の方法

Bass と Haboush [BH2] により  $VEC(B, F)$  の非自明な元は、 $\mathbb{C}^n$  上の non-linearizable action の候補であることが指摘されている。§ 3 は、Linearity Problem ( $\mathbb{C}^n$  上の  $G$  action は表現と同値か) についてである。

§ 1. Kraft と Schwarz の結果

$B/G$  を  $B$  の algebraic quotient としよう。  $B/G$  は coordinate ring  $\mathcal{O}(B)^G$  を持ち、  $B/G$  の subspace  $Z$  上 closed orbits  $F$  でおて parameterize された空間である。

$\Delta: B \rightarrow B/G$  を quotient map とする。

$\dim B/G = 1$  の場合 (i.e.  $\mathcal{O}(B)^G = \mathbb{C}[\Delta]$ ),  $B/G \cong \mathbb{C}$

Proposition 1.1  $\forall E \in VEC(B, F)$  について

$E|_{\Delta^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})}$ ,  $E|_{\Delta^{-1}(\mathbb{C} - S)}$  は自明である。

但し、  $S \subset \mathbb{C} - \{0\}$  finite set.

(注) 第1の自明は [KS] より、第2の自明は [K.] による。

従って、transition function は  $\gamma_E: \Delta^{-1}(\mathbb{C} - (\{0\} \cup S)) \rightarrow GL(F)$  となる。  $E$  に対し、transition function の選び方は一通り。

ではなく、 $E|\Delta^{-1}(\mathbb{C}-\{0\})$  と  $E|\Delta^{-1}(\mathbb{C}-S)$  の同型との合成  $E|_{\Gamma}$  とりかえられる。

[KS] は  $\text{VEC}(B, F)$  を transition functions の double cosets class として記述した。

次に、 $G = \text{SL}_2(\mathbb{C})$  の場合を詳しく述べよう。Schwartz の結果は次の様に解釈できる。(cf. [LMN])

$R_n = \{ \sum_{i=0}^n a_i X^{n-i} Y^i \mid a_i \in \mathbb{C} \}$  : degree  $n$  の binary forms とする。これは既約  $\text{SL}_2$  module,  $\{R_n \mid n \in \mathbb{N}\}$  は既約  $\text{SL}_2$  module の完全代表系である。特に、 $B = R_2 \cong \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$  とする。

$\Delta: R_2 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\Delta(aX^2 + bXY + cY^2) = b^2 - 4ac$  とする Prop. 1.1 により、transition function は、

$\psi_E: \Delta^{-1}(\mathbb{C} - (\{0\} \cup S)) \rightarrow \text{GL}(R_n)$  :  $\text{SL}_2$ -morphism であるが、 $T$  を  $\text{SL}_2$  の maximal torus とした時、 $\psi_E$  は、

$R_2^T = \{ bXY \mid b \in \mathbb{C} \}$  上への制限で決まる。即ち、

$\psi_E|_{R_2^T}: R_2^T \cap \Delta^{-1}(\mathbb{C} - (\{0\} \cup S)) \rightarrow \text{GL}(R_n)^T$ :  $W$ -morphism で決まる。(但し、 $W$  は  $\text{SL}_2$  の Weyl group)  $T$  module として、

$R_n = \bigoplus_{i=0}^n \mathbb{C} X^{n-i} Y^i$  と分解されるので、 $\text{GL}(R_n)^T = \bigoplus_{i=0}^n \text{GL}(\mathbb{C} X^{n-i} Y^i)$

従って、

$$\psi_E(bXY) = \begin{pmatrix} f_1(b) & & & \\ & f_2(b) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(b) \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} f_i(b) = f_{n-i}(b) \\ f_i(b): \text{rational function} \end{array}$$

と表わせる。

これは、 $E|\Delta^{-1}(\mathbb{C} - \{0\})$  上の同型を合成して unique  $f_i(0) = 1$  と拡張できる。更に power series に展開する。

Lemma 1.2  $\sigma \in \text{Mor}(R_2^T, (\text{End } R_n)^T) \cap W$  は、

$$\sigma(bXY) = \begin{pmatrix} f_0(b) & & & \\ & f_1(b) & & \\ & & \ddots & \\ & & & f_n(b) \end{pmatrix}, \begin{matrix} f_i(b) = f_{n-i}(b) \\ f_i(b) \text{ は } b \text{ の} \\ \text{polynomial.} \end{matrix}$$

と表わせる。

Lemma 1.3

$$\text{Mor}(R_2, \text{End } R_n)^{\text{SL}_2} \cong \mathbb{C}[\Delta][Y] / \prod_{i=0}^n (Y - (n-2i)\sqrt{\Delta})$$

こゝで

$$\gamma(bXY) = \begin{pmatrix} n & & & \\ & n-2 & & \\ & & n-4 & \\ & & & \ddots \\ & & & & -n \end{pmatrix} \quad b \text{ は degree } 1 \text{ の元}$$

$i_*: \text{Mor}(R_2, \text{End } R_n)^{\text{SL}_2} \rightarrow \text{Mor}(R_2^T, (\text{End } R_n)^T)^W$  は単射で

$$M_k^n = \{ \text{degree } k \text{ の元} \in i_* \text{Mor}(R_2, \text{End } R_n)^{\text{SL}_2} \}$$

$$N_k^n = \{ \text{degree } k \text{ の元} \in \text{Mor}(R_2^T, (\text{End } R_n)^T)^W \} \text{ とすると}$$

$$\mathcal{U}_E \in I + \sum_{k \geq 1} N_k^n \text{ である。}$$

次に、 $E \mid \Delta^T(\mathbb{C} - \mathbb{J})$  上の同型を計算して、 $\mathcal{U}_E \in I + \sum_{k \geq 1} M_k^n$  の場合、 $E$  が自明かわかる。

Theorem 1.4  $\mathcal{U}: \text{VEC}(R_2, R_n) \rightarrow I + \sum_{k \geq 1} N_k^n / I + \sum_{k \geq 1} M_k^n$

を、 $\mathcal{U}(E) = [\mathcal{U}_E \mid R_2^T]$  とすると、 $\mathcal{U}$  は bijection である。

(注1)  $k \geq n-1$  の時  $N_k^n = M_k^n$  より

$$I + \sum_{k \geq 1} N_k^n / I + \sum_{k \geq 1} M_k^n \cong \text{Mor}(R_2^T, (\text{End } R_n)^T)^W / i_* \text{Mor}(R_2, \text{End } R_n)^{\text{SL}_2}$$

即ち、 $\mathcal{U}_E(bXY)$  の対角成分  $f_i(b)$  は polynomial ととれる。

(注2) 右辺の次元を計算して、 $\text{VEC}(R_2, R_n) \cong \mathbb{C}^{\lfloor \frac{n(n-1)}{2} \rfloor}$ 。

従って、 $n \geq 3$  の時  $\text{VEC}(R_2, R_n)$  は自明でない。



§ 2.  $\dim B/\mathfrak{g} > 1$  の場合 cf [Kn] [MN]

$G$  を非可換, 連結な reductive group とする。

$B = \mathfrak{g}$ :  $G$  の adjoint 表現 とする。  $F$  は highest weight  $\lambda$  を持つ既約  $G$  module とする。  $G$  の simple root 系を  $\Sigma$  とする。  $\alpha \in \Sigma$  に対し,  $\text{Knop}$  は, 次の写像を定義した。

$$\Phi^\alpha: \text{VEC}(\mathfrak{g}, F) \longrightarrow \text{VEC}(R_2, R_1)$$

定義を述べよう。  $T$  を  $G$  の maximal torus とし,  $\mathfrak{t}$  を  $T$  の Lie 環 とする。  $T$  と root subgroups  $U_\alpha, U_{-\alpha}$  で生成された subgroup を  $L$  とする。  $L' = [L, L]$ ,  $Z$  を  $L$  の center の identity component とする。  $L = ZL'$ ,  $L' \cong SL_2(\mathbb{C})$ ,  $Z$  は codim 1 torus in  $T$  となる。  $\xi_0 \in \mathfrak{t}$  を  $\xi_0$  の centralizer  $= L$  となるように  $\xi_0$  を fix する。  $\sigma = \xi_0 + \text{Lie } L'$  とする。  $\sigma$  は  $L$  invariant,  $\sigma$  上  $\wedge$  の  $Z$  の作用は trivial,  $\sigma$  は  $L'$  module として,  $R_2$  と同型。

$E \in \text{VEC}(\mathfrak{g}, F)$  に対し,  $E|_\sigma$  は  $\sigma$  上の  $Z$  action が自明なので,  $E|_\sigma$  は  $Z$  bundle として  $F$  の weight に依り eigen bundles に分解する。  $X' = X|_Z$  とし,  $(E|_\sigma)X'$  を  $X'$  に対応する eigen bundle とする。  $Z$  と  $L'$  は可換より,  $(E|_\sigma)X'$  は  $L'$  vector bundle。  $\Phi^\alpha(E) = (E|_\sigma)X'$  とする。 ここで,  $\gamma = \langle \lambda, \alpha \rangle$  (i.e.  $\lambda$  の  $\alpha$ -string  $(\lambda, \lambda - \alpha, \dots, \lambda - n\alpha)$  の長さ)

定義  $\lambda$  の  $\alpha$ -string が singular とは ある hyper plane  $P_\beta$   $\beta \in \Sigma$  に  $\alpha$ -string が含まれること。 そうでない時, regular とする。

(註)  $\lambda$ : regular なら  $\lambda$  の  $\alpha$ -string は regular

$\lambda$ : singular でも,  $\lambda$  の  $\alpha$ -string が regular となることはある。 例えは,  $G$ : semi simple of rank 2 の場合

Theorem 2.1 [MN]  $G$ : 非可換, 連結 とする

(1)  $X$  の  $\alpha$  string が "regular"  $\Rightarrow \Phi^\alpha$ : surjection

(2)  $X$  の  $\alpha$  string が "singular"  $\Rightarrow \text{im } \Phi^\alpha \supset \mathbb{C} \frac{\left[\frac{n}{2}\right] \left[\frac{n}{2}\right] - 1}{2}$

これより

Theorem 2.2 [MN]  $G$ : semi simple,  $F$ : 既約 とする

$\text{VEC}(\mathcal{O}_F, F)$  は有限個の  $F$  を除いて, non trivial.

### § 3. Nonlinearizable action の存在

非自明な algebraic  $G$  vector bundle は non linearizable な  $G$  action の候補である。

Theorem 3.1 (Bass Haboush tric) [BH2]

$E \oplus \theta(B) \in \text{Vec}(B, F \oplus B)$  が 非自明なら,  $E$  上の  $G$  action は nonlinearizable.

但し,  $\theta(B)$  は trivial  $G$  bundle  $B \times B \rightarrow B$

Knop は これを使って,  $G$ : 非可換, 連結な reductive group は必ず nonlinearizable な  $\mathbb{C}^N$  上の  $G$  action を持つことを次の様に表示した。

§ 2 より,  $\exists E$ :  $G$  vector bundle over  $\mathcal{O}_F$  と dominant weight  $\chi$  を

(1)  $\exists \nu^\circ \in \text{VEC}(\mathcal{O}_F, F)$  st.  $\Phi^\alpha(\nu^\circ) \neq \theta$

(2)  $\chi'$  が  $Z$  の  $(E \oplus \mathcal{O}_F)$  上の weight でない

となる様にとり  $\nu = \nu^\circ \times E$  とおく。

$((\nu \times \mathcal{O}_F) |_{\mathcal{O}_F}) \chi' = (\nu^\circ |_{\mathcal{O}_F} \times E \times \mathcal{O}_F) \chi' = \Phi^\alpha(\nu^\circ) \neq \theta$

Theorem 3.2 [MP2]  $H \subset G$ : subgroup st.  $(B \oplus F)^H = B$

とある。このとき。

$E \cong E'$  as  $G$  varieties  $\Leftrightarrow E \cong \varphi^* E'$  as  $G$  vector bundle  
for  $\exists \varphi: B \rightarrow B$   $G$  auto.

(註) 従って、 $VEC(B, F)/Aut(B)^G$  は  $G$  variety としての  
分類を与える。但し、 $Aut(B)^G$  は  $B$  の  $G$  variety auto-  
morphisms のなす群である

特に、 $B = \mathcal{O}_G$  の場合、 $Aut(\mathcal{O}_G)^G = \mathbb{C}^*$  且  $H = Z(G)$ ;  
 $G$  の center とすると、 $F^{Z(G)} = \{0\}$  なる既約表現  $F$  へ  
対して  $(\mathcal{O}_G \oplus F)^{Z(G)} = \mathcal{O}_G$ 、 $VEC(\mathcal{O}_G, F)$  ( $\mathcal{O}_G \neq \mathbb{A}^2(\mathbb{C})$ ) の  
構造は未知であるが、 $VEC(\mathcal{O}_G, F)/\mathbb{C}^*$  は  $G$  varieties  
としての分類を与える。

例、 $(F)^{Z(G)} = \{0\}$  となる  $F$  の highest weight を  $\chi$  とする。

$G = SL_n(\mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}^n$  への自然な作用を  $\lambda_i$  とし  $\lambda_i = \lambda^i \mathbb{C}^n$   
とする。  $\chi = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \lambda_i$  ( $m_i \geq 0$ ) が任意の dominant  
weight である。  $Z(SL_n)$ : order  $n$  の cyclic group.

このとき  $\sum_{i=1}^{n-1} i m_i \not\equiv 0 \pmod{n}$  ならば、 $(F)^{Z(G)} = \{0\}$  と  
なる。

#### §4. Masuda Petrie の方法

$S$  を  $G$  module とする。

$VEC(B, F; S) = \{E \in VEC(B, F) \mid E \oplus \theta(S) \cong \theta(F \oplus S)\}$

とする。  $\forall E \in VEC(B, F; S)$  は、 $\theta(F \oplus S) \cong E \oplus \theta(S)$  より

$\exists$  surjection  $L: \theta(F \oplus S) \rightarrow \theta(S)$ ,  $E = \ker L$  とかけ

る。従って次の様な言替ができる。

$\text{sur}(\theta(F \oplus S), \theta(S))$  を algebraic  $G$  vector bundle  
surjection  $L: \theta(F \oplus S) \rightarrow \theta(S)$  の集合とし、

$Aut(\theta(F \oplus S))$  を  $\theta(F \oplus S)$  の  $G$  vector bundle automorphism  
で  $\theta(F \oplus S) \rightarrow \theta(S)$  のなす群とする。

Theorem 4.1  $VEC(B, F; S) = \text{Mor}(\theta(F \oplus S), \theta(S)) / \text{aut}(\theta(F \oplus S))$

この方法によつて, Kraft Schwarz の結果をこゝで

- (1)  $G$  が有限群 (dihedral 群, meta cyclic 群等) に対し  $VEC(B, F; S) \neq \{\theta\}$  となる例を与えた [MP2]  
 (2)  $G$  が可換の時,  $VEC(B, F; S) = \{\theta\}$  [MMP2]  
 等の結果が得られている。

この方法は, vector bundle の total space が明記されている利点があり,  $G$  action も explicit になる  
 多分の  $G = SL_2$  の場合を考察する。 of [N]

Theorem 1.4 (注1) によつて,

$$VEC(R_2, R_n) \cong \text{Mor}(R_2^T, (\text{End } R_n)^T) / \text{Aut}(R_2, \text{End } R_n)^{SL_2}$$

であった。

Proposition 4.2  $\forall E \in VEC(R_2, R_n)$  に対し,  $\psi_E$  は次の様に分解する。

$$\psi_E |_{R_2^T} = \prod_{i=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \begin{pmatrix} \tau_{n-2i} & & & \\ & \tau_{n-2i} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tau_{n-2i} \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

但し,  $\tau_{n-2i} \in \text{Mor}(R_2, \text{End } R_{n-2i})^{SL_2}$   $i=1, \dots, \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$   
 st.  $\tau_{n-2i}(0) = 0$

vector bundle の構成'.  $R_2$  上の  $SL_2$  vector bundle morph.

$$L: R_2 \times (R_n \oplus R_{n-2} \oplus \dots \oplus R_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \rightarrow R_2 \times (R_{n-2} \oplus \dots \oplus R_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$$

$$L = \begin{pmatrix} \psi & -(I + \tau_{n-2}) & & & \\ & \psi & -(I + \tau_{n-4}) & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \psi & -(I + \tau_{n-2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \end{pmatrix}$$

とする。但し、 $\tau_R$ は Proposition 4.2 のものとする。

$\psi$  は、 $\text{Mor}(R_2, \text{Hom}(R_m, R_{m-2}))^{SL_2}$  の元で、

$\forall u \in R_2$  に対し、 $\varphi(u): R_{m-2} \rightarrow R_m$  を  $u$  倍する map  $\varphi$  ( $\varphi \in \text{Mor}(R_2, \text{Hom}(R_{m-2}, R_m))^{SL_2}$ ) の dual から  $R_m$  の self duality を使って定義される。

$u \neq 0$  の時、 $\psi(u)$  は surjective である。

$u = 0$  の時  $(I + \tau_m)(0) = I \neq 1$ 、 $L$  は常に surjection。

$[\ker L] \in \text{VEC}(R_2, R_n; R_{n-2} \oplus \dots \oplus R_{n-2}[\frac{1}{2}])$  となり、

更に、 $\ker L$  の transition function を計算すると、Proposition 4.2 の形になる。従って、

### Theorem 4.3. [N]

$$\text{VEC}(R_2, R_3) = \text{VEC}(R_2, R_n; R_{n-2} \oplus \dots \oplus R_{n-2}[\frac{1}{2}])$$

(註) Proposition 4.2 の分解は、unique ではない。

§1 の結果と合わせて、 $\text{VEC}(R_2, R_n)$  を上の様な surjection  $L$  の同値類として記述することができる。

## 参考文献

- [BH1] H. Bass and W. Haboush: Linearizing certain reductive group actions, Trans. Amer. Math. Soc., 292(1985), 463-482
- [BH2] H. Bass and W. Haboush: Some equivariant K-theory of affine algebraic group actions, Comm. in Alg., 151(1987), 181-217
- [Kn] F. Knop: Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher Gruppen auf affinen Räumen, Invent. Math., 105(1991), 217-220
- [Kr] H. Kraft: G-vector bundles and the linearization problem, in "Group actions and invariant theory," CMS Conference Proceedings 10, 1989, 111-123
- [KS] H. Kraft and G. Schwarz: Reductive group actions with one dimensional quotient, Publ. Math., IHES 76(1992), 1-97
- [MMP1] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie: Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups: Applications, Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 88(1991), 9065-9066
- [MMP2] M. Masuda, L. Moser-Jauslin and T. Petrie: Equivariant Serre problem for abelian groups, (to appear)
- [MN] M. Masuda and T. Nagase: Equivariant algebraic vector bundles over adjoint representations, (to appear in Osaka J. Math.)
- [MP1] M. Masuda and T. Petrie: Equivariant algebraic vector bundles over representations of reductive groups, Theory Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 88(1991), 9061-9064
- [MP2] M. Masuda and T. Petrie: Stably trivial Equivariant Algebraic vector bundles, (preprint)
- [N] T. Nagase: Algebraic  $SL_2$ -vector bundles over  $R_2$  as a variety, (preprint)
- [Q] D. Quillen: Projective modules over polynomial rings, Invent. Math., 36(1976), 167-171
- [Su] A. Suslin: Projective modules over a polynomial ring, Soviet Math. Doklady, 17(1976), 1160-1174
- [Sch] G. Schwarz: Exotic algebraic group actions, C. R. Acad. Sci. Paris, Sér.I, 309(1989), 89-94

## 3次元多様体の幾何化の現状

小島定吉 (東工大・情報理工)

### §1. 序

3次元多様体の幾何化とは、リーマン面の一意化定理のアナロジーとして10数年前 Thurston により定式化された次の仮説である。

**【幾何化仮説】** 任意の閉3次元多様体は、オイラー標数が非負の曲面による標準的な分解が存在し、その各成分は、球面による境界を球体で埋めれば、8種類の等質幾何学をモデルとする完備な幾何的多様体に位相同型である。

この仮説は、発表当時すでに示されていた多くの優れた結果をもとに、3次元多様体の構造に関する最終図を夢見たものである。仮説中の標準的分解は、Milnor [16] による連結和分解と、Jaco-Shalen [9] と Johannson [10] による特性部分多様体の一意性をさしている。等質幾何は、2次元幾何学と  $\mathbb{R}$  の fiber 積が作る6種類の幾何学、 $S^1$  上のトーラス束やその有限群作用による商を記述する可解幾何学、および一番一般的な双曲幾何学をさす [17]。Thurston の結果 [19] を考慮に入れると、定式化された時点では、

分解の必要のない3次元多様体は幾何構造を持つ

というより単純な命題が残されていた。本講演では、この命題に関わる最近の進展について私感をこめ報告をしたい。

### §2. 幾何化の現状

最初に1つ重要な注意をする。幾何化仮説の解決を目指す場合、過去の結果に立脚することは必ずしも必要ないのは当たり前で、たとえば、Riemann 計量の変分問題として定式化した優れた研究が Anderson [1] によりなされている。ほかにも隠れたもの

が多々あるに違いない。最終的な解決にどのアプローチが有効なのかはまだ分からないが、ここでは独断と偏見をたよりに勝手な道を描く。

さて、現時点では命題を以下の3つに分けるのが適切である。即ち、閉3次元多様体が分解の必要がないとすると

【予想 S (一般化された Smith 予想)】  $\pi_1$  が有限のとき、普遍被覆は  $S^3$  で被覆変換は線形作用に位相共役。

【予想  $S^1$ -束 (Seifert Fibre Space 予想)】  $\pi_1$  が  $\mathbb{Z}$  と同型な正規部分群を含むとき、種数 1 以上の曲面上の  $S^1$  束を有限被覆にもち、被覆変換は  $S^1$  作用と可換または歪可換。

【予想 H】  $\pi_1$  が  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  を含まないとき、普遍被覆は  $H^3$  で被覆変換は Klein 群作用に位相共役。

いずれの場合も、一番の課題は群の代数的な仮定をいかに幾何的な状況に反映させるかである。

予想 S については、まったく手法が見いだせていない。もちろん部分的に通用する議論はあるかも知れないが……。一方予想  $S^1$ -束は 4 年前見事に解決された。その歩みは最終的な決着に最も直接関与した Casson がたまたま東大に滞在中だったこともあり、多くの人の記憶に新しいと思う。多くの試行錯誤の中で大きな一步を記したのは Mess [15] (論文は to appear とされてからすでに 7 年以上たつ) の、仮定の下に  $\pi_1/\mathbb{Z}$  は Euclid 結晶群であるか  $S^1$  に収束群として作用する、という定理である。Casson [3] はそれを抛り所に、Waldhausen [20], Kerckhoff [11], Scott [18] 等の 3 次元多様体論の結果を経由し予想  $S^1$ -束を解決した。系として、収束群は Fuchs 群に位相共役であることが分かる。一方 Gabai [5] は独立に、収束群は Fuchs 群に位相共役であることを直接示した。これから Scott [18] の結果を用いれば予想  $S^1$ -束が従うことも分かっていたので、予想の別証明にもなっている。

講演では主に予想 H について論じたい。この部分は、解決には依然として遠いが、予想 S 程は悲観的でない材料がある。そのような材料を組み合わせ得られる 1 つの



夢のアプローチを次節で披露する。

### §3. とくに予想 H について

議論の流れに従い命題をならべる。始まりは、

$$\pi_1 \text{ が } \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \text{ を含まない}$$

という基本群に関する代数的な仮定である。これに対し 3 次元多様体論はいまだに明確な指針を得ていないが、次元を忘れると、

【Gromov の問題 [8]】 可縮凸多様体に固有不連続に作用する群は  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  を含まなければ Gromov 双曲群か？

という大胆な問いが目に入る。Gromov 双曲群には境界がある。多様体の内部構造には直接は結び付かないが、漸近的な量・性質が双曲幾何に酷似する。これは大きな拠り所である。

3 次元多様体の基本群の場合いろいろな特殊な事情が重なり、境界の解析がさらにうまく行くことが Bestvina-Mess により以下のように示されている。

【Bestvina-Mess の定理 [2]】  $N$  を既約 3 次元多様体とする。基本群  $\Gamma = \pi_1(N)$  が Gromov 双曲群であれば、群の境界  $\partial\Gamma$  は 2 次元球面に同相、普遍被覆  $\tilde{N}$  は  $\mathbb{R}^3$  であり、さらに  $\tilde{N} \cup \partial\Gamma$  は自然な  $B^3$  へのコンパクト化を与える。

$\Gamma$  は境界  $\partial\Gamma$  に作用するが、その作用は多少テクニカルな議論が必要だが収束性をもつことが示せる。そこで Cabai の仕事の 1 つ次元の高い場合を想定して、「2 次元球面に作用する収束群は Klein 群に位相共役か？」と問題をたててみる。この問題は適当な仮定をおかなければ直ちに否定的な答えが得られる。

【Martin の問題 [14]】 2 次元球面に作用する放物的元を含まない収束群は、極限集合が全体であれば Klein 群に位相共役か？

としても、たぶんまだ仮定が弱すぎるだろうが、反例は見つかっていない。問題を拡大解釈し、Klein 群の無限遠球面の作用の位相不変量を定義し、収束群の場合にどのようなようになるかを考えるのはなかなか面白い問題ではないか [13]。

さてとにかくここまでが成立するとすると、群の構造の仮定の下に、考える3次元既約多様体の基本群は、ある双曲多様体の基本群と同型になることが示されたことになる。それらは aspherical なのでホモトピー同値。そこで最後の山は、次元に依らない次の予想である。

【位相的剛体性予想】 双曲多様体にホモトピー同値な多様体はそれと位相同型

この予想は、2次元の場合は曲面の分類から従い、5次元以上は Farrell-Jones [4] により手術理論を用いて証明された。4次元では全く仕事がないようだが、注目の3次元では大きな進展が Gabai [6,7] により得られている。

これに関し、ホモトピー同値を位相同型におきかえるための1つの結び目理論的な判定条件を述べたい。  $N$  を3次元コンパクト双曲多様体、  $M$  を  $N$  とホモトピー同値な3次元既約多様体、  $f: N \rightarrow M$  をホモトピー同値写像とする。  $f$  は群の同型  $\Gamma = \pi_1(N) \simeq \pi_1(M)$  を誘導するので  $\pi_1(M)$  は Gromov 双曲群であり、境界  $\partial\pi_1(M)$  をもつ。さらに  $f$  は  $\Gamma$  の作用に関する同変写像  $\partial f: S_\infty^2 = \partial\Gamma \rightarrow \partial\pi_1(M)$  を誘導する。

そこで  $N$  の中から単純閉測地線  $\ell$  を適当に選び、その普遍被覆  $H^3$  への逆像を  $\mathcal{L}$  とおく。  $(H^3, \mathcal{L})$  の閉包は無数個の測地線からなる tangle となる。  $f(\ell)$  とホモトピックな単純閉曲線  $\delta$  を適当に  $M$  の中から選び、その普遍被覆  $\widetilde{M}$  の逆像を  $\Delta$  とする。  $\Delta$  の各成分は  $\partial\pi_1(M)$  上の2点に収束し、  $\partial f$  により  $\mathcal{L}$  の成分に1対1に対応する。このとき Gabai は次を示した（筆者の境界のみを使った証明もある [12]）

【Gabai の判定条件 [7]】 もし  $\partial f$  が、対の位相同型  $h: (H^3, \mathcal{L}) \rightarrow (\widetilde{M}, \Delta)$  に拡張するように  $\delta \subset M$  が選べれば、  $f$  は位相同型にホモトピック。

この判定基準をもとに [7] では、極小曲面の理論を用い任意の  $M$  が判定基準をみたすような  $N$  のもつ極めて広い十分条件が見い出されている。条件そのものは煩雑だが、たとえば「太さが  $(\log 3)/2$  以上の管状近傍を持つ閉測地線がある」は十分である。これによれば、体積を上から押さえたとき判定条件を満たさない  $N$  は高々有限個である。しかもこの太さの条件をみたさない双曲多様体はまだ1個（Weeks 多様体）

しか見つかっていない。筆者にはけっこう話が面白くなってきたと感ずるのだが...

## 参 考 文 献

1. M. Anderson, *Degeneration of metrics with bounded curvature and applications to critical metrics of Riemannian functionals*, Proc. Symp. Pure Math. 54, Part III (1993), 53 - 79.
2. M. Bestvina and G. Mess, *The boundary of negatively curved groups*, J. Amer. Math. Soc. 4 (1991), 469 - 481.
3. A. Casson and D. Jungreis, *Convergence groups and Seifert fibered 3-manifolds*, preprint (1992).
4. T. Farrell and Jones, *A topological analogue of Mostow's rigidity theorem*, J. Amer. Math. Soc. 2 (89), 257 - 370.
5. D. Gabai, *Convergence groups and Fuchsian groups*, Ann. of Math. 136 (1992), 447 - 510.
6. D. Gabai, *Homotopy hyperbolic 3-manifolds are virtually hyperbolic*, J. Amer. Math. Soc. 7 (1994), 193 - 198.
7. D. Gabai, *On the geometric and topological rigidity of hyperbolic 3-manifolds*, preprint (1993).
8. M. Gromov, *Hyperbolic groups*, Essays in group theory, (S. M. Gersten, ed.), MSRI Publications, vol. 8, 1987, pp. 75 - 263.
9. W. Jaco and P. Shalen, *Seifert fibered spaces in 3-manifolds*, Memoirs Amer. Math. Soc. 220 (1979).
10. K. Johannson, *Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundaries*, Lecture Notes in Math., vol. 761, Springer, 1979.
11. S. Kerckhoff, *The Nielsen realization problem*, Ann. of Math. 117 (1983), 235 - 265.
12. S. Kojima, *A note on Gabai's criterion for homeomorphisms*, preprint (1994).
13. S. Kojima, in preparation.
14. G. Martin, *Infinite group actions on spheres*, Revista Math. Ibero. 4 (8), 407 - 451.
15. G. Mess, *The Seifert conjecture and groups which are coarse quasiisometric to planes*, to appear in Ann. of Math..
16. J. Milnor, *A unique decomposition theorem for 3-manifolds*, Amer. J. Math. 84 (1962), 1 - 7.
17. P. Scott, *The geometries of 3-manifolds*, Bull. London Math. Soc. 15 (1983), 401 - 487.
18. P. Scott, *There are no fake Seifert fibre spaces with infinite  $\pi_1$* , Ann. of Math. 117 (1983), 35 - 70.
19. W. Thurston, *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357 - 381.
20. F. Waldhausen, *On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large*, Ann. of Math. 87 (1968), 56 - 88.

# Global Rigidity of Manifolds with Symmetry

神島 芳宣

1994年7月19日 愛媛県

I. 次の極めて漠然とした予想を考える (Gromov, D'ambra [6]).

**Vague General Conjecture.** コンパクト  $C^\infty$ -多様体  $M$  上に与えられた幾何構造を保つように作用する大きな群  $G$  があるとき, その多様体  $M$  は rigid に決まるか.

ここで大きな群とは主にノンコンパクト群をさすが, "幾何構造をもつ多様体" というのはどのような対象をさしているのか, また "多様体は rigid" といったとき, 幾何構造不変のもとでどこまでその多様体のトポロジーを決めるかははっきりしていない. しかしこの予想を肯定的に示すものとして小畑 [12], Lelong-Ferrand [11] の結果 (1970年) がある.

**定理 A.**  $n$  次元リーマン多様体  $M$  の共形変換群を  $\text{Conf}(M)$  とする. もし  $M$  がコンパクトで連結成分  $\text{Conf}^0(M)$  がノンコンパクトならば  $M$  は標準球面  $S^n$  に共形的に同型である.

ここで標準球面  $S^n$  は共形平坦多様体としての  $n$  次元球面である.  $S^n$  は今の場合そしてそのときに限り立体射影 (変換) によって平坦なユークリッド空間と局所共形的に同値であるような共形構造を持っている. さらに上の予想を肯定的に示すものとして, 2年前, 次のことを考えた.

コンタクト構造をもつ多様体  $M$  をコンタクト多様体とよぶ. 必然的に  $M$  の次元は奇数次元  $2n+1$  となり,  $\omega$  をコンタクト構造とすると  $\mathbb{R}$ -valued 1-form で

$\omega \wedge d\omega^n \neq 0$  を満たすことから  $2n$  次元 subbundle  $\text{Null}\omega = \{X \in TM \mid \omega(X) = 0\}$  が定まる.

奇数次元多様体  $M$  上で holomorphic 変換に対応するような  $M$  の diffeomorphism  $f$  を定義しようとするとき, まず,  $\text{Null}\omega$  上に複素構造  $J$  が存在していて  $f : M \rightarrow M$  は

Typeset by  $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$ -TEX

Null $\omega$ を保ち、微分写像が  $J$  と可換となるような diffeomorphism として考えることができる。このような diffeomorphism を  $M$  の  $CR$  変換という。また、対  $(\text{Null}\omega, J)$  を  $M$  上の  $CR$  構造という。このとき、 $M$  は  $CR$  多様体とよばれる。

このことは共形構造の complex analogue である。実際、複素数空間  $\mathbb{C}^{n+1}$  の単位球面  $S^{2n+1}$  には自然に強疑凸な  $CR$  構造が入る。共形平坦に対応してこの標準球面  $S^{2n+1}$  を spherical  $CR$  多様体という [3]。Cauchy-Riemann の関係式から単位円の内部を保つ biholomorphic 変換は上の定義より  $S^{2n+1}$  上に  $CR$  変換として作用する。2年前、我々は次の結果を示した [8]。

**定理 B.**  $M$  を  $2n + 1$  次元強疑凸  $CR$  多様体とし、 $M$  の  $CR$  変換群を  $\text{Aut}_{CR}(M)$  とする。もし  $M$  がコンパクトで連結成分  $\text{Aut}_{CR}^0(M)$  がノンコンパクトならば  $M$  は標準球面  $S^{2n+1}$  に  $CR$ -同型である。

この定理 A, B の結果とその証明は次の一般化を期待させる。

2. ひとつのあたえられた幾何構造 (integrable  $G$ -structure) をもつ  $k$  次元多様体を  $M$  とする。この幾何構造から構成される幾何不変量 (geometric invariant) がある。

(今の場合、Weyl curvature tensor (form), Chern-Moser-Bochner curvature tensor (form))。

3. この不変量の特性として、それが消滅するとき、そしてそのときに限りその幾何構造が、 $M$  上のその幾何構造全体の中で stationary になっていることである。

(今の場合、(original) Chern-Simons invariant, Burns-Epstein invariant)。

4. そしてこの critical な幾何構造をもつ多様体は Frobenius, Liouville の結果 (cf. [10]) から次の意味で flat 多様体になる: 不変量が消滅すると、 $k$  次元空間  $X$  と有限次元 Lie 群  $G$  が現れる。ここで  $X$  は  $k$  次元 homogeneous space  $G/G_p$  である。 $G_p$  は  $X$  の点  $p$  における stabilizer  $\{g \in G | gp = p\}$ 。

これを使って次のような uniformization が導かれる;  $M$  の charts  $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in \Lambda}$  の集合

$$M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} U_\alpha,$$

$$\phi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \phi_\alpha(U_\alpha) \subset X \text{ は homeomorphism,}$$

が存在して、もし  $U_\alpha, U_\beta$  の空でない共通部分の座標変換 (局所変換  $g_{\alpha\beta} = \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}$ ) が  $X$  全体に拡張してさらに  $\mathcal{G}$  の元になっているとき、その charts の集合は  $M$  上にひとつの *uniformization* をあたえるという。

この *uniformization* の (細分による) 同値類のことを  $M$  上の  $(\mathcal{G}, X)$ -structure とよぶ (単に *geometric structure* と言うことが多い)。

これにより、 $M$  の不変量が消滅すると  $M$  は局所的にモデル空間  $(\mathcal{G}, X)$  と同型になる。(言い換えると  $M$  は  $(\mathcal{G}, X)$  に develop される)。

(今の場合  $M$  は conformally flat 多様体, spherical CR 多様体になる。)

5. これらから定理 A, B の証明方法のポイントはつぎのようになる:

$\text{Conf}^0(M)$ ,  $\text{Aut}_{CR}(M)^0$  がノンコンパクトなら  $M$  に対する geometric invariant (= Weyl curvature tensor, Chern-Moser-Bochner curvature tensor) が消滅することを示す。一方、その vanishing に対してモデル空間  $(\mathcal{G}, X)$  が現れるが、今の場合  $(\mathcal{G}, X)$  は

$$\begin{aligned} (\text{Conf}(S^n), S^n) &= (PO(n+1, 1), S^n), \\ (\text{Aut}_{CR}(S^{2n+1}), S^{2n+1}) &= (PU(n+1, 1), S^{2n+1}), \end{aligned}$$

ここで  $PO(n+1, 1)$ ,  $PU(n+1, 1)$  は orthogonal Lorentz 群, unitary Lorentz 群を表す。さてこのとき上のことから、 $M$  は局所的に  $(\mathcal{G}, X)$  に develop (uniformized) されるが、さらに、conformally flat 多様体 (spherical CR 多様体)  $M$  がそれぞれ球面  $S^n$  ( $S^{2n+1}$ ) と大域的に共形同値 (CR 同値) であることを示すために、

仮定である  $\text{Conf}^0(M)$  ( $\text{Aut}_{CR}(M)^0$ ) がノンコンパクト、すなわちそれらに属する  $\mathbb{R}$  に同型な閉 one-parameter 群の存在が本質的である。その one-parameter 群を  $M$  の普遍被覆空間に lift したものは

(\*)  $M$  の基本群を centralize するという位相的性質を持っている。

lift された one-parameter 群を上 developing により球面に写すことにより、 $\text{Conf}^0(S^n)$  ( $\text{Aut}_{CR}(S^{2n+1})^0$ ) において (\*) の性質をもつ one-parameter 共形変換群 (CR 変換群) の存在が保証される。

実はこれらの場合、結論をだすのに必要なことは  $\text{Conf}^0(M)$ ,  $\text{Aut}_{CR}(M)^0$  全体よりも  $\mathbf{R}$  に同型な閉 one-parameter 群の存在だけでよいことがわかる。これを VII で示そう。ここでは、

II. 球面上に与えられた幾何構造 (特に conformally flat structure, spherical CR structure) を保つ  $\mathbf{R}$ -作用を調べるのがこの講演の目的である。

上の肯定的な結果 A, B は 2 から 4 を加えて次の形の問題に発展する。

問題 C.  $M$  を  $G$ -structure をもつ多様体とする。

- (i) ひとつの integrable  $G$ -structure から次の性質 (\*\*) をもつ  $M$  の不変量を構成する; (\*\*) その vanishing がモデル空間  $(G, X)$  をあたえ、そのとき、 $M$  は  $(G, X)$  に uniformize される。
- (ii) (i) が満たされていると仮定する。  $\text{Aut}_G(M)$  を  $M$  の  $G$ -structure を保つ変換群とする。このとき、もし  $\text{Aut}_G(M)^0$  がノンコンパクトなら  $M$  は rigid か。すなわち、 $M$  は  $X$  と  $G$ -同型となるか。

## 6. Remark.

- (1) 上の定理 A, B は閉  $R$ -共形 (CR) 作用の存在だけで導ける。
- (2) 同様に四元数 analogue として、 $4n + 3$  次元球面  $S^{4n+3}$  にも pseudo-quaternionic flat 変換とよぶべきものが定義され、モデル空間  $(\text{Aut}_{\mathbf{H}Sp}(S^{4n+3}), S^{4n+3})$  が構成される [8]。  $(\text{Aut}_{\mathbf{H}Sp}(S^{4n+3}), S^{4n+3})$  に局所的に uniformize される多様体を pseudo-quaternionic flat 多様体とよぶことにすると、次がえられる。

命題 D.  $M$  をコンパクト  $4n + 3$  次元 pseudo-quaternionic flat 多様体とする。もし pseudo-quaternionic flat 変換群の連結成分  $\text{Aut}_{\mathbf{H}Sp}(M)^0$  がノンコンパクトなら (あるいは、単に  $\mathbf{R}$  と同型な pseudo-quaternionic flat 閉 one-parameter 変換群が存在するなら)  $M$  は球面  $S^{4n+3}$  に quaternionically に同型である。

- (3) 一方、上の問題 C は  $\text{Aut}_G(M)$  の代わりに  $G$ -structure を保つ  $\mathbf{R}$  に同型な閉 one-parameter 変換群と置き換えると一般に成り立たない。たとえば、

**Fact E (Lorentz hyperbolic 構造).** Spacelike Killing ベクトル場をもつ 3次元コンパクト Lorentz hyperbolic space form  $M$  (コンパクト, 測地的完備, 負定曲率 Lorentz 多様体) で homogeneous Lorentz hyperbolic space form でないものがある (Goldman).

(4)  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})$  の有限位数の元をもたない uniform 離散部分群  $\Gamma$  をとることにより causal ベクトル場をもつコンパクト homogeneous Lorentz space form  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$  ができるが, 今の場合, 位相的には  $M$  は  $\mathrm{PSL}_2(\mathbf{R})/\Gamma$  と同相で, したがって genus  $g$  ( $\geq 2$ ) の閉曲面上の nontrivial  $S^1$ -bundle である.

(5) 奇数次元球面の Lorentz isometries の群はコンパクトである (D'ambra).

**III. Smooth flow.**  $\mathbf{R}$  を実数全体のつくる加群とする. 最初に, 球面  $S^n$  上の  $\mathbf{R}$  の  $C^\infty$ -作用のトポロジーに関して知られていることを復習する.

$M$  上の a smooth ( $C^\infty$ -) flow とは a smooth  $\mathbf{R}$ -作用

$$\mu : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$$

のことである. A smooth  $\mathbf{R}$ -作用  $\mu$  に対し, a smooth circle 作用  $\Phi : S^1 \times M \rightarrow M$  が存在して,  $\mu$  と同じ軌道をもつとき, つまり  $M$  の各点  $x$  において

$$\{\mu(t, x) | t \in \mathbf{R}\} = \{\Phi(t, x) | t \in S^1\},$$

のとき, その smooth  $\mathbf{R}$ -作用  $\mu$  は reducible という.

一般に reducible でない  $\mathbf{R}$ -作用が circle 作用と異なる点は Slice 定理 (cf. [2]) がほとんど成り立たないことである. もちろん, ノンコンパクト群でも proper 作用, properly discontinuous 作用に対しては Slice 定理が成り立つ (cf. [9]). したがって,  $\mathbf{R}$ -作用に関しては, まず軌道の様子を調べることから始まる. ここでは, Dynamical aspect (ergodicity, geodesic flow) は我々の範囲を越えるのであきらめて, Geometric aspect にのみ専念する.

**7. Flow が閉軌道 (closed orbits) (周期軌道) をもつ場合.**

(7.1.) Epstein [7]. コンパクト 3次元多様体に a smooth flow があたえられたとき, もしすべての軌道が閉軌道からなるならば, その smooth flow は reducible である.



すなわち, circle 作用が存在してその軌道が一致する. 特に  $M$  は Seifert 多様体になる. (ここでは  $S^1$ -多様体のことをそうよぶ.)

これは,  $M$  上に Poincaré map を定義するためにセクション (スライスにあたるもの) を作ることがポイントである. だから最初からセクションがつくれるような smooth flow に対しては上の結果は期待できる. たとえば,

(7.2.) ([1], [17]). コンパクト regular contact 多様体, almost regular contact 多様体の characteristic ベクトル場は circle 作用を誘導し (つまり, そのような smooth flow は reducible), それぞれ almost free (不動点をもたない), free (自由) 作用になる.

(説明)  $M^{2n+1}$  上の contact form  $\omega$  は定義  $\omega \wedge d\omega^n \neq 0$  から

$$\omega(\xi) = 1,$$

$$\text{すべての } X \in TM \text{ に対し, } d\omega(\xi, X) = 0$$

を満たすベクトル場  $\xi$  が一意に定まる. これを  $\omega$  の characteristic ベクトル場といい,  $M$  がコンパクトのとき,  $\xi$  が生成する one-parameter 変換群ができるがこれは strict contact 変換群である ((注)  $M$  の diffeomorphism  $f$  が strict contact とは  $f^*\omega = \omega$  となること).

ここで almost regular (resp. regular) contact 構造とはこの characteristic ベクトル場  $\xi$  が次をみたしているときにいう: ある数  $N$  が存在して,  $M$  の各点  $p$  に対し, 近傍  $U$  が存在して  $p$  を通る  $\xi$  の積分曲線たちは  $U$  を高々  $N$  回 (resp. きっかり一回) 通過する.

各点  $p$  に対し  $p$  を通る cubic neighborhood をとり, その中で  $p$  をふくむ slice (壁とする) をとり  $p$  から発して flow に沿って進んで再び初めてその slice にぶつかる点を対応させることにより写像  $T : M \rightarrow M$  ができる (Poincaré map といわれる). このとき almost regular が意味することは  $T$  が pointwise periodic ということである. Montgomery の定理から, 多様体に対して, pointwise periodic は本当に periodic map になる. これからその characteristic contact flow は (almost free) circle 作用を引き起こすことがわかる.

これは有界な値があるから reducible になったわけであるが, 一般に flow の軌道がすべて閉軌道であっても reducible になるか (circle 作用にできるか) は明らかでない. Sullivan は反例を示した (1976 年).

(7.3.) ([15]). コンパクト  $r(\geq 5)$  次元多様体  $M$  とその上に smooth flow が存在して、軌道はすべて閉軌道 (circle) であるが軌道の長さが非有界なものがある。

$M$  は 3 次元コンパクト Lie 群  $G$  に対し、直積  $G \times S^1 \times I$  を境界で張り合わせることでえられる。circle から  $G \times S^1 \times I$  への immersion を作ることによって smooth flow が構成される (Edwards)。

これとは別に、5 次元球面  $S^5$  にも上の様な smooth flow が構成できる (Kuiper)。

このような  $\mathbf{R}$ -作用は決して  $S^1$ -action に reduce しない。なぜなら、もし  $S^1$ -作用にできたら  $S^1$ -不変な Riemann 計量がとれる。したがって  $S^1$ -作用に対するスライス定理と  $M$  がコンパクトということからすべての軌道の長さが一様に有界になる (7.2) のような  $N$  がある。

## 8. Flow がノンコンパクト軌道 (noncompact orbits) をもつ場合。

この場合、何から取り組むかが問題であるが、Seifert は 1950 年頃、次のことを問題にした [14]。だから我々はそれから出発する。

(8.1.) **Seifert conjecture.** 3 次元球面  $S^3$  上の任意の零でない  $C^r$ -flow ( $r \geq 1$ ) は少なくともひとつの閉軌道 (circle) をもつ。

Seifert は Seifert 多様体 ( $S^1$  作用をもつ 3 次元コンパクト多様体) として知られているが、もちろん最初から flow として circle 作用がとれている時はなにも意味しない。Hopf bundle  $S^1 \rightarrow S^3 \rightarrow \mathbf{CP}^1$  に出てくる free circle 作用  $S^1$  が誘導するベクトル場 (定義にそって、その reducible な  $\mathbf{R}$ -作用) を Hopf flow ということにすると、Seifert は  $S^3$  上の  $C^r$ -flow が十分 Hopf flow に近ければ (各点で測ったふたつのベクトルのなす角度がある小さい値で抑えられているという意味で)、少なくともひとつの閉軌道 (circle) をもつことを示した。しかるにこの制限をはずして上の予想を立てたが、しかし Schweitzer により  $C^1$ -flow 対して反例が出された (1974 年)。(この辺は田村 [16] に詳しい)

(8.2.) ([13]). 3 次元球面  $S^3$  上に零でない  $C^1$ -flow でどの軌道もノンコンパクトなものがある。

これは球面に限らず任意のコンパクト 3-多様体に対してそのような零でない  $C^1$ -flow がある。おそらく、任意の  $1 \leq r$  に対して、3 次元球面上にはどの軌道もノンコンパクト

トな  $C^r$ -flow が存在するのであろう。最近、著名な日本の数学者から  $C^\infty$  に対しても反例があることを聞いた。

しかしながら、我々は幾何構造を持つコンパクト多様体上の幾何構造を保つ flow に対して Seifert conjecture を肯定的に示すことを考える。

#### IV. 幾何構造を不変にする flow.

一般的に  $M$  を  $G$ -structure をもつ多様体とし、 $\text{Aut}_G(M)$  を  $M$  の  $G$ -structure を不変にする変換群とする。(多くの場合これは Lie 群である.)

$M$  上に与えられた (smooth) flow  $\mu : \mathbf{R} \times M \rightarrow M$  が  $M$  の  $G$ -structure を保つ変換群として作用するとき、つまり 各  $t \in \mathbf{R}$  に対し、 $\phi_t(x) = \mu(t, x)$  で定義された変換  $\phi_t : M \rightarrow M$  が  $\text{Aut}_G(M)$  の元となるとき、 $G$ -flow (あるいは geometric flow) とよぶ。

#### 9. examples.

- (1)  $M$  を共形構造をもつ多様体. 各  $t \in \mathbf{R}$  に対し、 $\phi_t$  が共形変換 (与えられたリーマン計量に関してふたつのベクトルの角度を保つ変換) からなるとき、conformal flow という (共形平坦構造を保つ flow を conformally flat flow というのが厳密であるが geometry がはっきりしているときは、このような言い方はあまりしない).
- (2)  $(M, \omega)$  を Contact 多様体. 各  $t \in \mathbf{R}$  に対し、 $\phi_t$  が contact 変換からなるとき、contact flow という. (ここで  $f : M \rightarrow M$  が contact 変換とは  $M$  上の正値関数  $\lambda$  が存在して  $f^*\omega = \lambda \cdot \omega$  を満たしていることである. 言い換えると、微分写像  $f_* : TM \rightarrow TM$  が contact subbundle  $\text{Null}\omega$  を保つ ことである (I 参照).
- (3)  $(M, \omega)$  を Contact 多様体.  $\text{Null}\omega$  に複素構造  $J$  が存在するとき  $(M, (\text{Null}\omega, J))$  は  $CR$  多様体である. 各  $t \in \mathbf{R}$  に対し、 $\phi_t$  が  $CR$  変換からなるとき、 $CR$  flow という (ここで  $f : M \rightarrow M$  が  $CR$  変換とは contact 変換であって、 $\text{Null}\omega$  上  $f_* \cdot J = J \cdot f_*$  を満たすもの).
- (4) 話の流れから上の幾何を出したが、その他いろいろ考えられる (e.g Affine flat structure, Lorentz structure). しかしその幾何構造が 3 次元多様体に入るかどうかは別の問題であり、Thurston 予想が示すように究極的である.
- (5) はたして、向き付け可能な 3 次元コンパクト多様体は contact 構造,  $CR$  構造をもつ. したがって コンパクト  $CR$  多様体, contact 多様体を考えることは 3 次元では一般的である. Conformal 多様体とは共形同値によるリーマン計量の同

値類が備わった多様体のことだから我々が考える多様体はいつもそうである。

(6) しかし、前述したように、geometric invariant が消えるとき、上の多様体は conformally flat 多様体、spherical CR多様になるわけであるが、どのような 3次元コンパクト多様体がこれらの構造を持つかはまだすべてわかっていない。特に次の (a), (b) は問題である。

- (a) 任意の整数  $g, e$  に対する principal  $S^1$ -bundle の total space は conformally flat structure をもつか。
- (b) 直積 (閉曲面  $\times S^1$ ), hyperbolic 多様体  $H_{\mathbb{R}}^3/\Gamma$  は spherical CR構造をもつか。
- (c) 例えば、つまらないが、3次元 solvmanifold は両方の構造は入らない一方、nilmanifold は spherical CR構造をもつが conformally flat 構造を持たない、3次元 torus は conformally flat 構造をもつが spherical CR構造を持たない等。

## V. 結果.

残りのセクションで (1), (3) の geometric flows に対して Seifert conjecture が正しいかどうかを調べる。しかし、(2) の場合

$(S^3, \omega)$  を Contact 球面。  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  を、零でない contact flow (不動点をもたない contact one-parameter 変換群) とするとき、

問題 F.  $S^3$  上の零でない contact flow に対し Seifert conjecture は正しいか。

何とか講演の時まで結果を知りたいが残念ながらまだ私は分からない。  $B^4$  を  $S^3$  を bound する ball とする。 Eliashberg の結果で  $S^3$  上の contact 変換は  $B^4$  に拡大する。 contact one-parameter 変換群  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  に対し  $\{\bar{\phi}_t\}_{t \in \mathbb{R}}$  を拡張された変換群とするとき、Brouwer の不動点定理から、  $\bar{\phi}_t$  は  $B^4$  で不動点をもつ。 境界にもてば  $\phi_t$  に対し閉軌道がとれる。 しかしすべての  $\bar{\phi}_t$  が不動点を原点にもつとき closure  $\overline{\{\phi_t\}_{t \in \mathbb{R}}}$  がコンパクト群になることが示せない。

残念ながら、6月22日の時点で次のことしか証明できなかった。

命題 G. 3次元コンパクト CR多様体  $M$ 上に CR-flow  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$  が与えられたとき、次が成り立つ。  $H$ を  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ の  $\text{Aut}_{CR}(M)$ における closure とする。

- (1)  $H = S^1 (= \{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}})$  で  $M$ は Seifert 多様体である。 CR  $S^1$ -flow は任意の Seifert 多様体に対して存在する。  $\{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ は elliptic flow と呼ぼう。
- (2)  $H = T^2$  で  $M = S^3$  か  $M = S^1 \times S^2$ である。 CR-flow は singular (不動点をもつ)。
- (3)  $H = T^2$  で  $M = T^3$ になる。 CR-flow は nonsingular (不動点をもたない)。  $M$ は spherical CR多様体でない。
- (4)  $H = \mathbf{R}$ ,  $M = S^3$ となり、特に、  $M$ は spherical CR多様体。  $\mathbf{R} = \{\phi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ は horospherical flow か loxodromic (hyperbolic) flow。 したがって singular (不動点をもつ)。
- (5) conformal flow に対しても同様に (1),(2), (3)が成り立つ (不変リーマン計量の存在)。 (3)の  $M = S^3$ は conformally flat 多様体。

系 H. 零でない CR flow, conformal flow に対しては Seifert conjecture は正しくてあまりある。

## VI. 証明方法 - Poincaré model.

$Y$ を nonpositive 断面曲率  $k$ をもつ完備、単連結  $n+1$ 次元リーマン多様体とする。  $d$ を  $Y$ 上の距離関数。 測地線  $\alpha, \beta : (-\infty, \infty) \rightarrow Y$ において、ある数  $L$ が存在して  $d(\alpha(t), \beta(t)) \leq L$  ( $t \geq 0$ ) が成り立つ時、  $\alpha$ と  $\beta$ が asymptotic という。  $\alpha(\infty)$ を  $\alpha$ の asymptote class とする。  $\alpha(-\infty)$ としてもうひとつの asymptote class がある。 この測地線の同値類のことを無限遠点 (point at infinity) という。

$Y(\infty)$ をすべての無限遠点の集合とする。 和集合  $Y \cup Y(\infty)$ に次の基によって与えられる topology(位相)を導入する:

各点  $p \in Y$ と  $\epsilon > 0$  に対し、

$$C(p, v, \epsilon) = \{q \in Y \cup Y(\infty) \mid \angle_p(\gamma_{p,v}, \gamma_{p,q}) < \epsilon\}$$

ここで  $v \in T_p Y$ ,  $\gamma_{p,v}$ は  $p$ において tangent vector  $v$ をもつ測地線、  $\gamma_{p,q}$ は  $p$ と  $q$ の間を結ぶ測地線。 さらに  $\angle_p$ は  $p$ における tangent vectors  $v$ と  $\gamma_{p,q}$ の間の角度。

この topology は  $Y \cup Y(\infty)$ 上の cone topology といわれる。 位相空間  $\bar{Y} = Y \cup Y(\infty)$ は  $n+1$ 次元 closed ball に同相である。(実際、  $E_p Y$ を  $T_p Y$ の unit disk とするとき、

$v \in E_p Y$  に対し,  $\bar{Y}$  における点  $\exp(\frac{\|v\|}{1-\|v\|}v)$  を対応させる写像は homeomorphism である.)

定義 I.  $Y(\infty) = \partial Y$  において  $\bar{Y}$  の境界という.  $n$  次元球面  $S^n$  に同相である. *Isometries* の群  $\text{Iso}(Y)$  の各元  $h$  は

$$h(\alpha(\infty)) = (h\alpha)(\infty).$$

とおくことにより  $\bar{Y}$  の homeomorphism に拡張する.

一般に,  $\text{Iso}(Y)$  の作用は  $\partial Y$  上 topological (連続) である.  $\partial Y$  上でこの作用を通してみた  $\text{Iso}(Y)$  のことを  $(\text{Aut}(\partial Y), \partial Y)$  とかく.

### 10. examples.

- (1) flat ユークリッド空間  $Y = \mathbb{R}^{n+1}$  に対し  $(\text{Aut}(\partial Y), \partial Y) = (O(n+1), S^n)$ .  
直交変換.
- (2) 実双曲空間  $Y = \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^{n+1}$  に対し  $(\text{Aut}(\partial Y), \partial Y) = (PO(n+1, 1), S^n)$ .  
共形変換.
- (3) 複素双曲空間  $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^{n+1}$  に対し,  $(\text{Aut}(\partial Y), \partial Y) = (PU(n+1, 1), S^{2n+1})$ .  
*CR*変換.
- (4) 4元数双曲空間  $\mathbb{H}_{\mathbb{H}}^{n+1}$  に対し,  $(\text{Aut}(\partial Y), \partial Y) = (PSp(n+1, 1), S^{4n+3})$ .  
quaternionic 変換.

これらの作用は topological 以上に解析的である.

補題 J. *Isometries* の群  $\text{Iso}(Y)$  の各元は次の三つのタイプのどれかに落ちつく.  $g$  を  $\text{Iso}(Y)$  の元とする.

- (1)  $g$  は  $Y$  において不動点をもつ.
- (2)  $g$  は  $\partial Y$  においてただひとつの不動点をもつ.
- (3)  $g$  は  $\partial Y$  においてきっかりふたつの不動点をもつ.

(証) Brouwer の不動点定理により  $g: \bar{Y} \rightarrow \bar{Y}$  は不動点をもつ.  $g$  が内部  $Y$  で不動点をもたないとする. このとき  $g$  が  $\partial Y$  上異なる 3 点  $\{x, y, z\}$  を固定したとすると  $g$  は測地線  $(x, y)$  を不変にする, 同様に測地線  $(y, z)$ ,  $(x, z)$  もそう.  $(x, y)$  において 1 点  $p$  をとる. このとき  $\lim_{i \rightarrow \infty} g^i p = x$  としてよい. 点  $q \in (y, z)$  に対し  $d(g^i p, g^i q) = d(p, q)$  だか

ら  $\lim g^i q = \lim g^i p = x$  が成り立つ. しかし  $g$  は測地線  $(y, z)$  を不変にし,  $g^i q \in (y, z)$  だから,  $\lim g^i q = y$  かあるいは  $z$  となり, 矛盾.

したがって  $H$  を  $\text{Aut}(\partial Y)$  の連結な solvable 閉部分群とする. このとき,  $H$  はコンパクト (したがって,  $k$ -torus) で内部にただひとつ不動点をもつか,  $\partial Y$  上の  $k$ 次元球面 ( $1 \leq k < n$ ) を不動点集合にもつか, あるいはまた  $H$  はノンコンパクトで  $\partial Y$  のたかだか 2 点を固定する.

$S^n = \partial Y$  とおく. 明らかに,

系 K. A smooth flow が  $\text{Aut}(S^n)$  の元からなるとき, その geometric flow に対しては  $n \leq 5$  のとき, Seifert conjecture は正しい.

この場合,  $n \leq 5$  までなら確実に  $k$ -torus  $H$  は linear に作用するから.

定義 L.  $\text{Iso}(Y)$  の元は上の (1), (2), (3) にしたがって, elliptic, parabolic, loxodromic とよばれる.

## VII. 補足.

上の結果で見たように本当に閉  $\mathbf{R}$ -作用があると  $S^n$  上不動点をもってしまう (flow が特異点を持つ - (注) Seifert conjecture は nonzero flow に対してである).

問題 M. Geometric flow が閉  $\mathbf{R}$ -作用を誘導するなら, flow は singular か ( $\mathbf{R}$  は不動点をもつか).

(関連する仕事として [18] 参照).

問題 M に関して球面  $S^n$  上の射影変換群を考える.  $R^+$  を  $R^* = R - \{0\}$  の連結成分とすると, 次のような fibration がある

$$(\mathbf{R}^+, \mathbf{R}^+) \rightarrow (\text{GL}(n+1, \mathbf{R}), \mathbf{R}^{n+1} - \{0\}) \rightarrow (\text{GL}(n+1, \mathbf{R})/\mathbf{R}^+, S^n),$$

ここで  $\mathbf{R}^{n+1} - \{0\}/\mathbf{R}^+ \approx S^n \times \mathbf{R}^+/\mathbf{R}^+ = S^n$ .

例えば, この射影変換群  $\text{GL}(n+1, \mathbf{R})/\mathbf{R}^+$  は  $S^n$  の上半球面  $D^n$  を不変にする affine 変換群  $A(n)$  を含んでいる. だから, 閉  $\mathbf{R}$ -作用がこの affine 部分群に入っているときは問題 M は正しい. Seifert conjecture に対しては次のことが問題になる.

問題 N. A one-parameter 部分群  $\mathbf{R}$  は  $\text{GL}(n+1, \mathbf{R})/\mathbf{R}^+$  の部分群で  $S^n$  に射影変換として作用しているとする. このときこの flow が nonsingular なら閉軌道をもつか.

## 参考文献

- [1] W.M. Boothby and H.C. Wang, *On contact manifolds*, Ann. of Math. **68** (1958), 721-734.
- [2] G.Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, New York, 1972.
- [3] D.M.Burns and S.Shnider, *Spherical hypersurfaces in complex manifolds*, Invent. Math. **33** (1976), 223-246.
- [4] S.S.Chen and L.Greenberg, *Hyperbolic Spaces*, Contribution to Analysis, Academic Press, New York, 1974, pp. 49-87.
- [5] S.S.Chern and J.Moser, *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Acta. Math. **133** (1974), 48-69.
- [6] G.D'ambra and M.Gromov, *Lectures on transformation groups*, Surveys in Diff. Geom. I (1990), 19-111.
- [7] D. B. Epstein, *Periodic flows on 3-manifolds*, Ann. of Math. **95** (1972), 66-82.
- [8] Y. Kamishima, *A rigidity theorem for CR manifolds and a refinement of Obata and Lelong-Ferrand's result*, in "Geometry and its applications, Proceedings of a workshop in honor of Morio Obata, Keio University, 1991", T. Nagano, Y. Maeda, M. Kanai(eds.), Singapore (1993), 73-83.
- [9] J. Koszul, *Lectures on groups of transformations*, Tata Institute (1965).
- [10] R.Kulkarni, *On the principle of uniformization*, J. Diff. Geom. **13** (1978), 109-138.
- [11] J.Lelong-Ferrand, *Transformations conformes et quasi conformes des variétés riemanniennes compactes*, Acad. Roy. Belgique Sci. Mem. Coll. **8** (1971), 1-44.
- [12] M.Obata, *Conformal transformations of Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **4** (1970), 311-333.
- [13] P. Schweitzer, *Counterexamples to the Seifert conjecture and opening closed leaves*, Ann. of Math. **100** (1974), 386-400.
- [14] H. Seifert, *Closed integral curves in 3-space and isotopic 2-dimensional deformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950), 287-302.



- [15] D. Sullivan, *A counterexample to the periodic orbit conjecture*, Publ I.H.E.S. **46** (1976), 5-14.
- [16] 田村一郎, *葉層のトポロジー*, 岩波書店, 1976.
- [17] C.B. Thomas, *Almost regular contact manifolds*, J. Diff. Geom. **11** (1976), 521-533.
- [18] F. Uchida, *Certain aspects of twisted linear actions, II*, Tôhoku Math. Jour. **41** (1989), 561-573.

(1994年6月24日未明提出)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, KUMAMOTO UNIVERSITY  
*E-mail*: yoshi@srv901.eecs.kumamoto-u.ac.jp

# 3次元多様体の単体分割の average edge order について

田村 誠 (大阪大 理)

$M$  をコンパクト 3次元多様体とし、その単体分割を  $K$  とする。 $K$ 内の vertices, edges, faces, tetrahedra の数をそれぞれ  $V(K), E(K), F(K), T(K)$  とおく。edge の order とはそれを含む  $K$  内の faces の数のこととする。 $K$  の average edge order  $\mu(K)$  を  $3F(K)/E(K)$  と定義する。edge の order の平均を  $\mu(K)$  とすると、各 face には 3本の edges が含まれ、各 edge には平均  $\mu(K)$  枚の faces が集まっているので、 $3F(K) = \mu(K)E(K)$  すなわち、 $\mu(K) = 3F(K)/E(K)$  が成立する。average edge order の名前はこれに由来する。Feng Luo と Richard Stong は、 $\mu(K)$  が 3次元多様体  $M$  の位相構造に強い制限を与えることを示した。それが次の定理である。

定理 1 [LS]  $M$  を連結な閉 3次元多様体とし、 $K$  をその単体分割とする。このとき、

(a)  $3 \leq \mu(K) < 6$

等号成立は、( $M$  は  $S^3$  で)  $K = \partial\Delta^4$  のとき、かつそのときに限る。

(b)  $M$  は与えられているとする。任意の  $\varepsilon > 0$  に対して  $M$  の単体分割  $K_1, K_2$  で  $\mu(K_1) < 4.5 + \varepsilon$ ,  $\mu(K_2) > 6 - \varepsilon$  を満たすものが存在する。

(c)  $\mu(K) < 4.5$  ならば  $K$  は  $S^3$  の単体分割である。

特にこのような  $K$  は無限に存在するが、任意の  $c < 4.5$  に対して  $\mu(K) < c$  を満たす  $K$  の数は有限である。

(d)  $\mu(K) = 4.5$  ならば  $K$  は  $S^3, S^2 \times S^1$  または  $S^2 \tilde{\times} S^1$  の単体分割である。

さらに (c), (d) の場合、その単体分割  $K$  を記述することができる。

ここでの目的は、average edge order による特徴付けを、 $M$  がコンパクト境界付き 3次元多様体の場合に拡張することである。実際、上の定理とほぼ平行に次の結果が得られた。

定理 2  $M$  を連結なコンパクト境界付き 3次元多様体とし、 $K$  をその単体分割とする。このとき、

(a)  $2 \leq \mu(K) < 6$

等号成立は、( $M$ は  $B^3$ で)  $K = \Delta^3$  のとき、かつその時に限る。

(b)  $M$ は与えられているとする。 $3 < r < 6$  を満たす任意の有理数  $r$  に対して、 $\mu(K') = r$  なる  $M$  の単体分割  $K'$  が存在する。

(c)  $\mu(K) < 3$  ならば  $K$  は  $B^3$  の単体分割である。

特にこのような  $K$  は無限に存在するが、任意の  $c < 3$  に対して  $\mu(K) < c$  を満たす  $K$  の数は有限である。

(d)  $\mu(K) = 3$  ならば  $K$  は  $B^3, D^2 \times S^1$  または  $D^2 \tilde{\times} S^1$  の単体分割である。

さらに (c), (d) の場合、その単体分割  $K$  を記述することができる。

閉3次元多様体の場合にも、より一般に开区間 (4.5, 6) 内の任意の有理数に対し、average edge order をその値に持つ単体分割の存在が、定理 2(b) とほぼ同様にして示された。

命題 3  $M$  を連結な閉3次元多様体とする。

(b)  $4.5 < r < 6$  を満たす任意の有理数  $r$  に対して、 $\mu(K') = r$  なる  $M$  の単体分割  $K'$  が存在する。

またコンパクト多様体  $M$  (境界の有無は問わない) に対し、その単体分割  $K$  の重心細分をとり続けたときの average edge order の値について、次の命題が示された。

命題 4  $M$  をコンパクト3次元多様体、 $K$  をその単体分割とする。 $K$  を  $n$  回重心細分したものを  $K_n$  とすると、 $n \rightarrow \infty$  のとき  $\mu(K_n)$  は  $66/13$  に収束する。

### 定理 2(a), (b) の証明について

定理 2(a) は [LS] とほぼ同様にして示される。実際、各 edge は少なくとも 2 枚以上の faces に含まれるので、 $3F(K) \geq 2E(K)$  が成立する。すなわち、 $\mu(K) = 3F(K)/E(K) \geq 6$ 。

$N = M \cup_{\partial M} M$  とすると、 $N$  は閉3次元多様体である。 $K$  より入る  $N, \partial M$  の単体分割をそれぞれ  $K_N, K_\partial$  とすると、定理 1(a) より

$$\mu(K_N) = 3\{2F(K) - F(K_\partial)\} / \{2E(K) - E(K_\partial)\} < 6$$

したがって

$$3F(K) < 6E(K) - 3E(K_\partial) + (3/2)F(K_\partial) \tag{1}$$

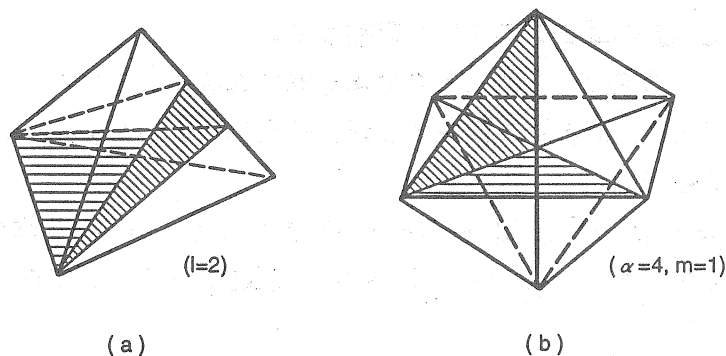


Figure 2

(1)  $e_1$  の order は 2。  $\alpha$  を  $q/p < \alpha/(\alpha+1)$  を満たす整数として、  $e_2, e_3$  の order はそれぞれ  $\alpha, \alpha+1$ 。

(2)  $st(e_i)$  と  $st(e_j) (i \neq j)$  は交わりを持たない。

$e_1, e_2, e_3$  上  $m, n$  個の vertices をとって  $K'$  を細分すると、 edges の数はそれぞれ  $3l, (\alpha+1)m, (\alpha+2)n$ 、 また faces の数はそれぞれ  $3l, 2\alpha m, 2(\alpha+1)n$  だけ増加する。(Figure 2) ゆえにここで得られた単体分割を  $K''$  とすると、

$$\mu(K'') = 3\{F(K') + 3l + 2\alpha m + 2(\alpha+1)n\} / \{E(K') + 3l + (\alpha+1)m + (\alpha+2)n\}$$

と表すことができる。  $r = q/p$  ( $p, q$  は互いに素) とする。定理 2(b) の証明は、  $\mu(K'') = q/p$  を満たす非負整数  $l, m, n$  が存在すること、すなわち

$$3(3p-q)l + \{6\alpha p - (\alpha+1)q\}m + \{6(\alpha+1)p - (\alpha+2)q\}n = qE(K') - 3pF(K')$$

を満たす非負整数  $l, m, n$  が存在することを示せば完了する。それは、  $3(3p-q)$  と  $6\alpha p - (\alpha+1)q$  と  $6(\alpha+1)p - (\alpha+2)q$  の最大公約数が 1 であること、および

$$3(3p-q)l' + \{6\alpha p - (\alpha+1)q\}m' + \{6(\alpha+1)p - (\alpha+2)q\}n' = 0$$

を満たす非負整数  $l', m', n'$  が存在することにより示される。

命題 3 については order  $3, \alpha, \alpha+1$  の edges  $e_1, e_2, e_3$  を与え、同様の議論により証明される。

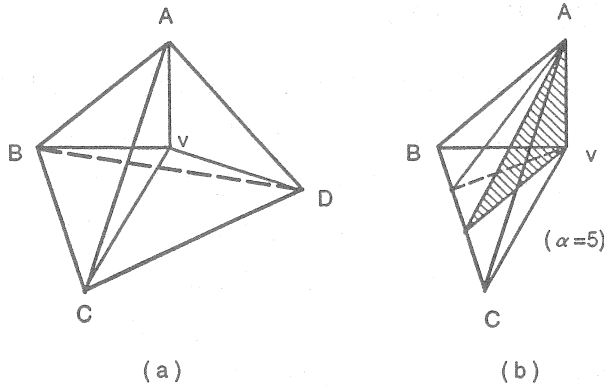


Figure 1

$\partial M$  は閉 2 次元多様体だから、各 edge は 2 枚の faces に含まれるので

$$3F(K_{\partial}) = 2E(K_{\partial}) \quad (2)$$

(1), (2) 式より、 $3F(K) < 6E(K) - 2E(K_{\partial})$ . よって、

$$\mu(K) = 3F(K)/E(K) < 6 - 2E(K_{\partial})/E(K) < 6$$

(注) 実は  $K_N$  は単体分割であるとは限らない。しかし、定理 1(a) は cell complex に対して成立することは容易に確かめられるので、 $\mu(K_N) < 6$  が従う。

等号成立について、 $\mu(K) = 2$  ならば各 edge がちょうど 2 枚の faces に含まれるので、 $K$  内で 3 単体が face を共有している所はない。したがって  $K$  内の 3 単体の数は 1 つでなければならない。

また (b) の証明には次の補題を用いる。

**補題 5**  $M, K$  が与えられているとする。任意の  $\alpha \geq 3$  に対して、order  $\alpha$  の edge を持つように  $K$  の細分  $K'$  を構成することができる。

**証明**  $K$  内のある 3 単体  $[abcd]$  の内部に vertex  $v$  を 1 つとって  $K$  の細分を作ると、order 3 edge  $[av]$  ができる。(Figure 1(a)) さらに、edge  $[bc]$  上  $(\alpha - 3)$  点を取って細分すると、edge  $[av]$  の order は  $\alpha$  となる。(Figure 1(b))  $\square$

必要ならば境界上の face に貼りつけるように  $K'$  に新たな 3 単体を追加することで、 $K'$  には order 2 の edge があるとしてよい。したがって  $K'$  の edges  $e_1, e_2, e_3$  で次を満たすものがあるとしてよい。

## 定理 2(c),(d) の証明について

(c),(d) について、定理 1 ではその証明に閉 3 次元 PL 多様体は各 vertex  $v$  の絡み複体  $lk(v)$  が  $S^2$  になっていることを本質的に用いている。すなわち、 $v$  と  $lk(v)$  内の vertices との位置関係を  $S^2$  の単体分割の中で考え、average vertex degree  $2E(K)/V(K)$  を評価する。さらにこれと  $\mu(K)$  との関係を求め、証明を与えている。定理 2 では vertex  $v$  の絡み複体  $lk(v)$  が disk の場合もあるので、同様の議論は成り立たない。そこで disjoint な 3 単体から  $K$  を構成し、構成の前後で average edge order の値の変化を調べることで証明を与えた。

$M, K$  は与えられているとする。 $K$  の 3 単体を  $\Delta_1^3, \Delta_2^3, \dots, \Delta_{T(K)}^3$  として  $K_0 = \coprod \Delta_i^3$  (disjoint union) とする。 $K_0$  の faces には  $K$  より自然な対応が与えられるが、対応する faces の組全てについて同一視を行えば、それらを行う順序によらず  $K_0$  から  $K$  を再構成できる。

$S$  は  $K$  の dual cell complex の 1-skeleton とする。 $S$  の各 edge は  $K_0$  の faces 1 組の同一視と 1 対 1 に対応する。簡単のため、 $S$  の edge で  $K_0$  の faces 1 組の同一視を表すことにする。 $S$  の edges を  $e_1, e_2, \dots, e_n$  とすると、

$$K_0 = D_0 \xrightarrow{e_1} D_1 \xrightarrow{e_2} D_2 \xrightarrow{e_3} \dots \xrightarrow{e_n} D_n = K$$

なる操作列が考えられる。中間段階の  $D_1, D_2, \dots, D_{n-1}$  は、既にそれ迄に行われた同一視の影響で一般には単体複体になるとは限らないが、形式的に average edge order  $\mu(D_i) = F(D_i)/E(D_i)$  を定義することができる。 $\mu(K_0) = 2$  であることは容易にわかる。適当な操作列を選ぶことで、 $\mu(K)$  は  $\mu(K_0)$  より評価できる。

$D_{i-1} \xrightarrow{e_i} D_i$  なる各段階の同一視について考える。この操作によって  $D_{i-1}$  内の 2 つの faces  $\Delta, \Delta'$  が同一視されて  $D_i$  内の 1 つの face になる。

$$F(D_i) = F(D_{i-1}) - 1$$

また、 $D_{i-1}$  内で  $\Delta$  と  $\Delta'$  が共有する edges の数により、同一視  $e_i$  の型を  $O, I, II, III$  と分類する。このとき、 $e$  により edges の数はそれぞれ 3, 2, 1, 0 だけ減る。

(注) 同一視の型  $O, I, II, III$  は  $S$  の edge それ自体で決まるのではなく、 $K_0 \rightarrow K$  の構成の順序により決定される。

$\xi(K) = F(K) - E(K)$  とおく。直ちに次の 2 つの補題が成立する。

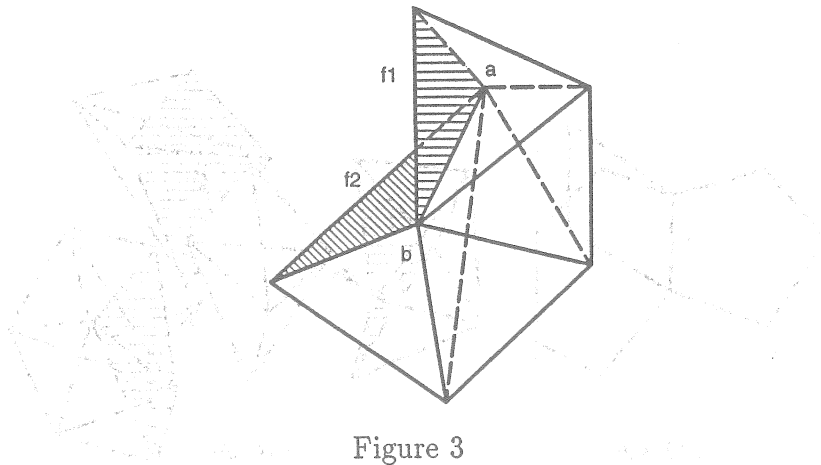


Figure 3

補題 6  $\mu(K) \leq 3$  と  $\xi(K) \leq 0$  は同値である。とくに  $\mu(K) = 3$  と  $\xi(K) = 0$  も同値である。

補題 7  $D_{i-1} \xrightarrow{e_i} D_i$  について、 $e_i$  が  $k$  型するとき

$$\xi(D_i) = \xi(D_{i-1}) + 2 - k$$

また各  $D_i$  に対しては以下の補題が成立する。

補題 8 与えられた  $D_i$  に対して、 $D_i$  内の 2 つの faces  $f_1, f_2$  が edge  $[ab]$  を共有するならば、 $D_i$  内には  $[ab]$  を含む faces の列  $f_1 = \Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_k = f_2$  が存在して、 $\Delta_i$  と  $\Delta_{i+1}$  は  $D_i$  内のある 1 つの 3 単体の faces になっている。

これを図に示したものが Figure 3 である。

$D_i$  内の edge  $[ab]$  に対し、 $[ab]$  を含む  $D_i$  内の faces および 3 単体に対応する  $S$  の元全体を  $L_i([ab])$  と書く。 $L_i([ab])$  が cycle となっているとき、これを edge cycle とよぶ。 $S$  の edge  $e_i$  に対しそれに対応する  $D_i$  の face を  $[abc]$  とするとき、 $L_i([ab]) \cup L_i([bc]) \cup L_i([ca])$  を  $A_i(e_i)$  と書くことにする。

$S$  の部分複体  $A$  に対して、 $A$  の vertices に対応する  $K_0$  の 3 単体に、 $A$  の edges による faces の同一視を行なったものを  $N(A)$  と書くことにする。

補題 9  $D_i$  の 2 つの edges  $[ab], [a'b']$  に対して、 $L_i([ab])$  と  $L_i([a'b'])$  とが交わりを持てば、それは 1 点か、または 1 本の edge とその端点である。

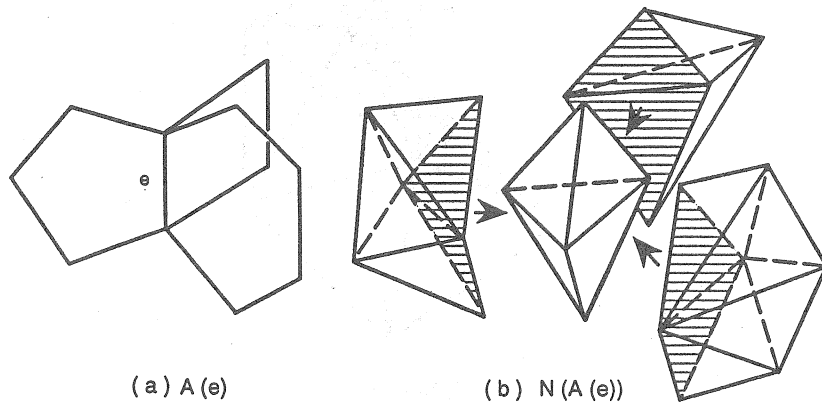


Figure 4

補題 10 ある操作列で  $S$  の edge  $e_i$  が III 型であったとする。このとき、 $A_i(e_i)$  は  $e_i$  とその端点のみを共有する 3 つの edge cycles からなり、また  $\xi(N(A_i(e_i))) = 1$  が成立する。(Figure 4)

以下に挙げる 主張 A, B が証明の Key observation である。

主張 A  $\mu(K) \leq 3$  ならば任意の操作列の中に III 型の同一視は現れない。

主張 B  $\mu(K) < 3$  ならば、任意の操作列の中に II 型の同一視は現れない。

証明 (主張 A) ある操作列において、 $e_i \in S$  が III 型であったとする。あらためて操作列

$$K_0 \xrightarrow{A_i(e_i)} D_l \xrightarrow{S \setminus A_i(e_i)} D_n = K$$

を構成する。ただし、 $A_i(e_i)$  は  $A_i(e_i)$  の edges 全てにおいて同一視を行うことを意味する。2 枚のシートをぴったり貼り合わせるように、間に入り込んだ気泡を押し出すのとよく似たやり方で、 $S \setminus A_i(e_i)$  内の III 型の edges を解消する事ができる。すなわち次の補題が成立する。

補題 11  $S \setminus A_i(e_i)$  内の edges を並べ換えることにより、 $S \setminus A_i(e_i)$  に III 型の現れないような操作列を得ることができる。



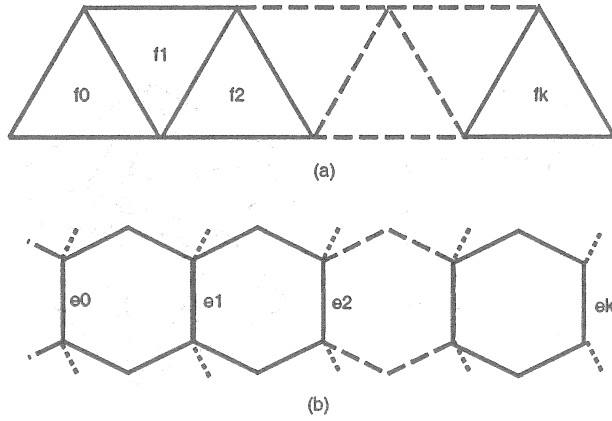


Figure 5

証明  $e_{l+1}, \dots, e_n$  の中に III 型の edges が現れるとき、その最初に現れる III 型の edge を  $e_m$  とする。

$$K_0 = D_0 \xrightarrow{A_l(e_l)} D_l \xrightarrow{e_{l+1}} \dots \xrightarrow{e_m} D_m \xrightarrow{e_{m+1}} \dots \xrightarrow{e_n} D_n = K$$

$e_m$  に対応する  $D_m$  内の face を  $f_m$  とする。 $N(A_l(e_l))$  は  $B^3$  と同相であるから、 $D_m$  内の faces の列  $f_m = f_{m_0}, f_{m_1}, \dots, f_{m_k}$  で  $f_{m_i}$  と  $f_{m_{i+1}}$  は edge を共有し、 $f_{m_i} \subset \text{int} D_m$  ( $i = 0, 1, \dots, k-1$ )、かつ  $f_{m_k}$  は  $D_m$  の境界に edge を持つようなものが存在する。 $f_{m_i}$  に対応する  $S$  の edge を  $e_{m_i}$  とすると、 $e_{m_i}$  ( $i = 0, \dots, k$ ) は全て  $\{e_{l+1}, \dots, e_m\}$  に含まれている。また  $e_{m_i}$  と  $e_{m_{i+1}}$  が edge を共有するので  $e_{m_{i+1}} \in A_i(e_{m_i})$  が成り立つ。(Figure 5) ここで  $e_{l+1}, \dots, e_m$  について

$$e_{l+1}, \dots, e_{m_1-1}, e_{m_1+1}, \dots, e_m, \underline{e_{m_1}}$$

の順になるように並べ換えを行う。このとき、 $e_{m_1+1}, \dots, e_{m-1}$  の中に III 型が新たに現れることはない。またこの順序においては  $e_m$  は II 型になっている。さらに同様にして、 $e_{m_{i+1}}$  が  $e_{m_i}$  の後になるように並べ換えを続ける。 $e_{m_k}$  については  $f_{m_k}$  が  $D_m$  の境界上に edge を持つので III 型になりえない。したがって何回かの並べ換えの後に  $D_l \rightarrow D_m$  の間の同一視の中に III 型が無いようにできる。以下、 $D_m \rightarrow D_n$  に III 型の edges が現れれば同様の並べ換えを行うことにより、 $D_l \rightarrow D_n$  には III 型が現れないようにできる。□

$t = T(K) - T(N(A_l(e_l)))$  とすると、

$$D_l = N(A_l(e_l)) \amalg \left( \coprod^t \Delta^3 \right)$$

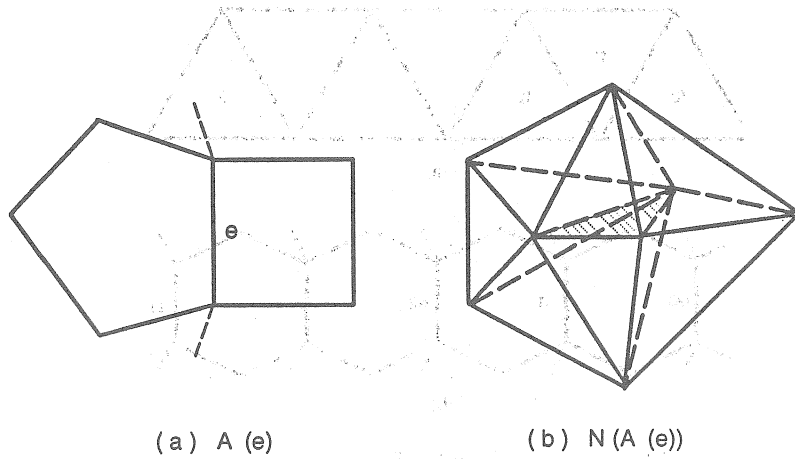


Figure 6

であるから、

$$\xi(D_l) = \xi(N(\mathcal{A}_l(e_l))) + t\xi(\Delta^3) = 1 - 2t$$

$e_{l+1}, \dots, e_n$  には III 型が無いので、補題 7 より  $D_l \rightarrow D_n$  の間で  $\xi$  の値は減ることではない。0 ~ II 型で連結成分の数を変えうるものは 0 型のみで、これによって連結成分の数は 1 減りうる。 $D_l$  の連結成分の数は  $t+1$  であるから、 $e_{l+1}, \dots, e_n$  には連結成分の数を減らすような 0 型が  $t$  回現れる。したがって、

$$\xi(K) = \xi(D_n) \geq \xi(D_l) + 2t = 1 > 0$$

これは  $\mu(K) \leq 3$  に矛盾する。□

(主張 B) ある操作列において、 $e_l \in S$  が II 型であったとする。 $\mathcal{A}_l(e_l)$  は  $e_l$  を共有する 2 つの edge cycles を含んでおり、また  $\xi(N(\mathcal{A}_l(e_l))) = 0$  である。(Figure 6)

$$K_0 = D_0 \xrightarrow{\mathcal{A}_l(e_l)} D_l \xrightarrow{\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}_l(e_l)} D_m \xrightarrow{S \setminus \mathcal{M}} D_n = K$$

について考える。ただし、 $A$  を  $S$  の部分複体として、 $\mathcal{M}$  が  $A$  を含む *extended maximal tree* であるとは、 $S$  のある maximal tree  $\mathcal{M}'$  に対し  $\mathcal{M} = \mathcal{M}' \cup A$  と書いて、 $\mathcal{M}'$  内の任意の cycle は  $A$  に含まれることとする。

$t = T(K) - T(N(\mathcal{A}_l(e_l)))$  とおくと、

$$D = N(\mathcal{A}_l(e_l)) \amalg \left( \amalg_t \Delta^3 \right)$$

であるから

$$\xi(D) = \xi(N(\mathcal{A}_l(e_l))) + t\xi(\Delta^3) = -2t$$

が成り立つ。  $D$  の連結成分の数は  $t+1$  であるから、  $D_M \xrightarrow{S \setminus M} D_n = K$  では  $t$  回、  $O$  型の同一視が行われる。したがって、

$$\xi(D_m) = -2t + 2t = 0$$

$S \setminus M$  には主張 1 より  $O, I, II$  型の同一視しか現れないので、補題 7 より  $D_m \xrightarrow{S \setminus M} D_n$  で  $\xi$  の値は減ることはない。すなわち

$$\xi(K) = \xi(D_n) \geq \xi(D_m) = 0 \quad (3)$$

(特に等号成立は  $S \setminus M$  が空であるか、または  $II$  型のみするとき)

これは  $\mu(K) < 3$  に矛盾する。  $\square$

### 定理 2(c) の証明

$\mu(K) < 3$  とする。  $M$  を  $S$  の maximal tree として、操作列

$$K_0 = D_0 \xrightarrow{M} D_m \xrightarrow{S \setminus M} D_n = K$$

について考える。  $T = T(K)$  とおくと、  $M$  は  $T-1$  回の  $O$  型であるから、

$$\xi(D_m) = \xi(D_0) + 2(t-1) = -2T + 2(T-1) = -2$$

が成り立つ。主張 A, B により、  $S \setminus M$  には  $O$  型と  $I$  型しか現れない。  $\xi(K) < 0$  であるから、補題 7 より  $S \setminus M$  には、同一視の操作が無い、または  $I$  型が 1 回だけ現れる。いずれの場合も  $M$  は  $B^3$  で、前者のとき  $K$  は  $\mathfrak{h}^T \Delta^3$  ( $\mathfrak{h}$  は  $\Delta^3$  の face で行う境界連結和) であり、後者のとき  $K$  は  $\mathfrak{h}^T \Delta^3$  について、その境界上の隣り合う 2 つの faces を  $I$  型で同一視したものになっている。

さらに任意の自然数  $T$  について  $\mu(K) = 3\{3T+1-i\}/\{3T+3-2i\} < 3$  である。ただし、  $i$  は  $S \setminus M$  内の  $I$  型 edge の数である。よって  $\mu(K) < 3$  なる  $K$  は無数に存在する。また、  $c < 3$  を固定して

$$\mu(K) = 3\{3T+1-i\}/\{3T+3-2i\} < c$$

とすると、

$$T < \{3(c-1) + (3-2c)i\}/\{3(3-c)\}$$

を得る。したがって  $\mu(K) < c$  なる  $K$  の数は有限である。以上で (c) が示された。

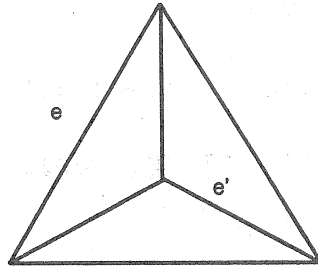


Figure 7

定理 2(d) の証明

$\mu(K) = 1$  とする。

(1) 操作列に II 型がある場合

主張 B の (3) 式で等号が成立する場合について考える。

$$K_0 = D_0 \xrightarrow{A_l(e_l)} D_l \xrightarrow{M \setminus A_l(e_l)} D_m \xrightarrow{S \setminus M} D_n = K$$

$S \setminus M = \emptyset$  のときは、 $M$  は  $B^3$  で  $K$  は  $N(A_l(e_l)) \natural (\natural \Delta^3)$  と書くことができる。  
 $S \setminus M$  が II 型のみするとき、補題 8 より  $S \setminus M$  は Figure 7 のような  $e'$  のみであることがわかる。このとき  $M$  は  $B^3$  で  $K$  は  $N(B) \natural (\natural \Delta^3)$  と書くことができる。ただし、 $B = A_l(e_l) \cup A_n(e'_n)$  とおいた。(2) 操作列に II 型がない場合

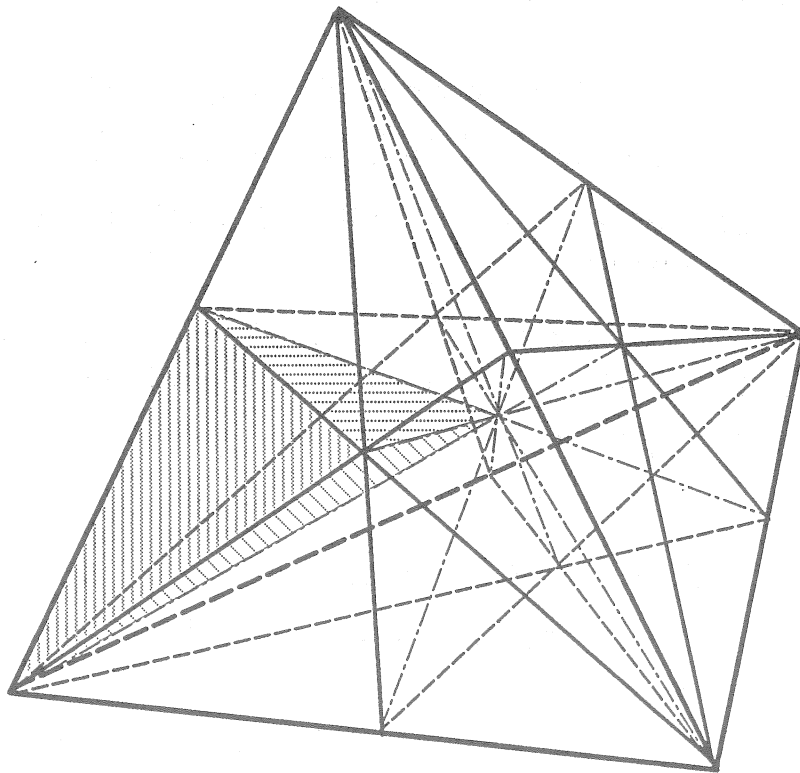
$M$  を  $S$  の maximal tree とする。操作列は

$$K_0 = D_0 \xrightarrow{M} D_m \xrightarrow{S \setminus M} D_n = K$$

と書ける。 $T = T(K)$  とおくと、 $M$  は  $T - 1$  回の  $O$  型であるから、

$$\xi(D_m) = \xi(D_0) + 2(t - 1) = -2T + 2(T - 1) = -2$$

が成り立つ。 $\xi(K) = 0$  であるから、 $S \setminus M$  は  $I$  型が 2 回か、または  $O$  型が 1 回で構成される。 $S \setminus M$  が  $I$  型 2 回するとき、 $K$  は  $\natural^T \Delta^3$  について、その境界上の隣り合う 2 つの faces 2 組をそれぞれ  $I$  型で同一視したものになっている。また  $S \setminus M$  が  $O$  型 1 回するとき、 $K$  は  $\natural^T \Delta^3$  について、その境界上の交わりを持たない 2 つの faces を  $O$  型で同一視したものになっている。このとき多面体として  $K$  の向きづけ可能性が保たれるか否かによって、 $M$  は  $D^2 \times S^1$  または  $D^2 \tilde{\times} S^1$  のいずれかになっている。以上で (d) が示された。  $\square$



(斜線部は新たにできた3単体)

Figure 8

## 命題 4 の証明

$M$  が閉 3 次元多様体であるとき、 $K_{n+1}$  の edges, faces の数を、 $K_n$  の edges 上, faces の内部, 3 単体の内部に分けて数えると、

$$E(K_{n+1}) = 2E(K_n) + 6F(K_n) + 14T(K_n),$$

$$F(K_{n+1}) = 6F(K_n) + 36T(K_n)$$

であることがわかる。(Figure 8)

$$\begin{aligned} \mu(K_{n+1}) &= 3\{6F(K_n) + 36T(K_n)\} / \{2E(K_n) + 6F(K_n) + 14T(K_n)\} \\ &= 3\{24F(K_n)\} / \{2E(K_n) + 13F(K_n)\} \\ &= 72\mu(K_n) / \{2 + 13\mu(K_n)\} \end{aligned}$$

が いえる。もし  $\mu(K_n)$  が収束すれば収束値は  $x = 72x/(2 + 13x)$  の解  $x = 66/13$  である。

$$x < 66/13 \text{ のとき } x < 72x/(2 + 13x) < 66/13$$

$$x > 66/13 \text{ のとき } x > 72x/(2 + 13x) > 66/13$$

であることは容易に確かめられるので、収束値の存在は保証される。したがって、 $\mu(K_n)$  は  $66/13$  に収束する。

$M$  が境界付きコンパクト 3次元多様体のとき、定理 2(a) の証明のときと同様に、 $N = M \cup_{\partial M} M$  について考える。 $K_n$  より入る  $N, \partial M$  の単体分割を  $K_{N_n}, K_{\partial n}$  とする。 $\mu(K_{N_n}) = 3b_n/a_n$  とおくと、

$$\mu(K_{N_n}) = 3\{2F(K_n) - F(K_{\partial n})\}/\{2E(K_n) - E(K_{\partial n})\} = 3b_n/a_n$$

$$2a_n F(K_n) = 2b_n E(K_n) - b_n E(K_{\partial n}) + a_n F(K_{\partial n})$$

$$2a_n F(K_n) = 2b_n E(K_n) + \{a_n - (3/2)b_n\} F(K_{\partial n})$$

$$F(K_n)/E(K_n) = b_n/a_n + \{(2a_n - 3b_n)/4a_n\} \{F(K_{\partial n})/E(K_n)\}$$

が成り立つ。重心細分をとることで各 face は 6 分割、各 3 単体は 24 分割されるので、

$$F(K_{\partial(n+1)}) = 6^{n-1} F(K_{\partial}), T(K_n) = 24^{n-1} T(K)$$

である。また

$$E(K_n) > E(K_{\partial n}) + T(K_{n-1})$$

であるので

$$\begin{aligned} F(K_{\partial n})/E(K_n) &< F(K_{\partial n})/\{E(K_{\partial n}) + T(K_{n-1})\} \\ &= F(K_{\partial n})/\{(3/2)F(K_{\partial n}) + T(K_{n-1})\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が いえる。

$n \rightarrow \infty$  のとき  $b_n/a_n \rightarrow 22/13$  なので、以上より

$$3F(K_n)/E(K_n) = 3b_n/a_n + \{3(2a_n - 3b_n)/4a_n\} \{F(K_{\partial n})/E(K_n)\} \rightarrow 66/13 \quad (n \rightarrow \infty)$$

が成立する。□

## References

- [Ba] D. B. Barnette, *The triangulations of the 3-sphere with up to 8 vertices*, J. Combinatorial Theory **14** (1973), 37-52.
- [LS] Feng Luo and Richard Stong, *Combinatorics of triangulations of 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), 891-906.

# $\varepsilon$ -translations and dimension

Tatsuo Goto

Faculty of Education, Saitama University

## 0. Introduction

The original notion of metric dimension was introduced by P.S.Alexandroff around 1930 in terms of  $\varepsilon$ -translations of point sets into polyhedra, and K.A.Sitnikov is the first who revealed the dependency of the metric dimension on metric functions of spaces by his works in 1950's. Sitnikov's construction of a two-dimensional space in  $\mathbb{R}^3$  with metric dimension one will be extended, and Alexandroff's theorems on  $\varepsilon$ -translations of compacta are generalized to non-compact spaces by use of metric dimension. A question of Ju.M.Smirnov concerning the equivalence of two definitions of metric dimension is answered in the affirmative. Some classes of  $\varepsilon$ -translations are used to characterize the covering dimension of (bounded) point sets which are closely related Katětov's uniformly 0-dimensional mappings. Also, some related open problems are introduced in this talk.

## 1. metric dimension $\mu\text{dim}$

Let  $X$  be a metric space and  $\mathcal{U}$  a cover of  $X$ . Then the *mesh* and the *order* of  $\mathcal{U}$  are defined by

- i)  $\text{mesh } \mathcal{U} = \sup\{\delta(U) : U \in \mathcal{U}\}$  where  $\delta(U)$  denotes the diameter of  $U$ , and
- ii)  $\text{ord } \mathcal{U} = \sup\{\text{ord}_x \mathcal{U} : x \in X\}$  where  $\text{ord}_x \mathcal{U} =$  the cardinality of  $\{U \in \mathcal{U} : x \in U\}$ .

The *covering dimension*  $\dim X$  and the *metric dimension*  $\mu\text{dim } X$  are defined as follows:

- i)  $\dim X = -1$  iff  $X = \emptyset$  and  $\dim X \leq m$  for  $m \in \mathbb{Z}$  with  $m \geq 0$  iff every open cover of  $X$  has an open refinement of order  $\leq m + 1$ , and
- ii)  $\mu\text{dim } X = -1$  iff  $X = \emptyset$  and  $\mu\text{dim } X \leq m$  for  $m \in \mathbb{Z}$  with  $m \geq 0$  iff for every  $\varepsilon > 0$   $X$  admits an open cover of order  $\leq m + 1$  and  $\text{mesh} < \varepsilon$ .

It is clear that  $\mu\text{dim } X \leq \dim X$  for every  $X$  and the equality holds in case  $X$  is compact. It was a serious problem whether the equality is always valid for non-compact spaces, until K.Sitnikov[Si1] constructed a subspace  $S$  in  $\mathbb{R}^3$  with  $1 = \mu\text{dim } S < \dim S = 2$  in 1953(see also [Si3]). In the same paper, Sitnikov proved the following theorem by use of his homology theory[Si2]; it would be interesting, as stated by himself, to give a proof by means of purely set-topological methods.

**Theorem 1**[Si1][Si3]. *If  $\dim X = \dim \text{Cl}(X)$  for  $X \subset \mathbb{R}^n$  then  $\dim X = \mu\text{dim } X$ .*



Let  $S$  be Sitnikov's space cited above. By Hurewicz's theorem [Hu], there exists a metric compactification  $\alpha S$  of  $S$  with  $\dim \alpha S = 2$ . We may assume  $\alpha S \subset \mathbb{R}^5$  by Nöbeling-Pontrjagin's theorem [N][PT] and let  $\alpha : S \rightarrow \alpha S$  be an embedding with  $\text{Cl}(\alpha(S)) = \alpha S$ . Then by Theorem 1 we have  $\mu \dim \alpha(S) = \dim \alpha(S) = 2$ , which shows that the metric dimension  $\mu \dim$  is *not* a topological invariant but depends on metric functions.

## 2. Extensions of Sitnikov's construction

Let  $X \subset \mathbb{R}^n$  and  $\varepsilon > 0$ . Then a continuous mapping  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  is called an  $\varepsilon$ -translation if  $\|x - f(x)\| < \varepsilon$  for every  $x \in X$ , and we define

$$T_\varepsilon^n(X) = \cup \{T_\varepsilon^n(X) : \varepsilon > 0\}$$

where  $T_\varepsilon^n(X)$  denotes the family of all  $\varepsilon$ -translations of  $X$  into  $\mathbb{R}^n$ . It is clear that  $T^n(X)$  is complete with the sup norm metric.

The following lemma is obtained by a quite natural generalization of Sitnikov's construction of the space  $S$  [S1].

**Lemma 2** [G1]. *For every  $m, n \in \mathbb{Z}$  with  $0 \leq m \leq n - 1$ , there exists a subspace  $S_m^n$  in  $\mathbb{R}^n$  such that  $\mu \dim S_m^n = m$  and  $\dim S_m^n = \min\{2m, n - 1\}$ .*

Let  $X \subset \mathbb{R}^n$  and  $m = \mu \dim X \leq n - 1$ . Then by Katětov's inequality [Ka2], we have

$$m \leq \dim X \leq \min\{2m, n - 1\}.$$

Thus the space  $S_m^n$  in the lemma proves the existence of a subspace in  $\mathbb{R}^n$  of metric dimension  $m$  which has the maximal difference between the values of  $\dim$  and  $\mu \dim$ . We note also that if  $\dim X = n$  for  $X \subset \mathbb{R}^n$  then  $\mu \dim X = n$  since the interior of  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  is non-empty by Menger's theorem [M].

Now we exhibit here the construction of the space  $S_m^n$ . First, we take a sequence  $\{T_i\}$  of subsets of  $\mathbb{Q}$ , the rationals, such that  $T_i = \{t_{i,k} : k \in \mathbb{Z}\}$  and

$$t_{i,k+1} - t_{i,k} = 1/i \text{ for every } i, k.$$

We can assume here that  $\{T_i\}$  is pairwise disjoint. Define the cover  $\mathcal{T}_i$  of  $\mathbb{R}^n$  by

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_i &= \{\tau_i(k_1, \dots, k_n) : (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{Z}^n\} \\ \text{where } \tau_i(k_1, \dots, k_n) &\text{ denotes the } n\text{-cube } \prod_{j=1}^n [t_{i,k_j}, t_{i,k_j+1}]. \end{aligned}$$

Denote by  $B_i^{n-m-1}$  the union of the  $(n - m - 1)$ -faces of all  $n$ -cubes in  $\mathcal{T}_i$  and set

$$S_m^n = \mathbb{R}^n - \cup \{B_i^{n-m-1} : i \in \mathbb{N}\}.$$

To prove the latter equality of the lemma, it suffices to apply the following lemma due to J.W. Wilkinson (observe that the family  $\{B_i^{n-m-1} : i \in \mathbb{N}\}$  is in general position, i.e.,  $\dim(B_i^{n-m-1} \cap B_j^{n-m-1}) \leq \max\{n - 2m - 2, -1\}$  if  $i \neq j$ ).

**Lemma 3** [W]. *Let  $m \in \mathbb{Z}$  with  $m \geq -1$  and  $\{B_i\}$  a sequence of closed proper subsets in  $\mathbb{R}^n$  such that  $\dim(B_i \cap B_j) \leq m$  whenever  $i \neq j$ . Then  $\dim(X - \cup B_i) \geq n - m - 2$ .*

### 3. Alexandroff's definition of metric dimension and Smirnov's problem

The original notion of the metric dimension  $\delta m X$  for an arbitrary subspace  $X$  in some Euclidean space was introduced by P.S. Alexandroff around 1930 [E][Sm1] and defined to be the least integer  $m$  for which  $X$  allows arbitrarily small translations into  $m$ -dimensional polyhedra. (Here we understand by a *polyhedron*  $P$  in  $R^n$  an underlying space of a simplicial complex locally finite in  $R^n$  at every point of  $P$ .) Ju.M. Smirnov [Sm1] proved the equality  $\delta m X = \mu \dim X$  for every  $X$ ; the essential part of his proof consists in the proof of the fact that if  $\mu \dim X \leq m$  for  $X \subset R^n$ , then for every  $\varepsilon > 0$  there exists an  $\varepsilon$ -translation of  $X$  into an  $m$ -dimensional polyhedron  $P$  in  $R^N$  where  $N = \max\{n, 2m + 2\}$ , and asked whether it is possible to take the polyhedron  $P$  in the same  $R^n$  which contains  $X$ : This question is answered in the following theorem in the affirmative. Also, the equivalences (a)  $\Leftrightarrow$  (b) and (a)  $\Leftrightarrow$  (c) in the theorem extend classical theorems of Alexandroff [A1][A2], since  $\mu \dim$  coincides with the covering dimension for compacta.

We need some definitions. Suppose  $\mathcal{U}$  is a locally finite open cover of a metric space  $X$  and  $\mathcal{P} = \{p_U : U \in \mathcal{U}\}$  is an arbitrary set in  $R^n$ . Then the  $\kappa$ -mapping  $f : X \rightarrow R^n$  relative to  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{P}$  is defined by

$$f(x) = \sum_{U \in \mathcal{U}} f_U(x) p_U \quad \text{where} \quad f_U(x) = \frac{d(x, X - U)}{\sum_{V \in \mathcal{U}} d(x, X - V)}$$

If, in particular,  $X \subset R^n$  and for some  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta(U \cup \{p_U\}) < \varepsilon$  for every  $U \in \mathcal{U}$ , then  $f$  is an  $\varepsilon$ -translation. We define the *generalized nerve*  $\mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$  of  $\mathcal{U}$  relative to  $\mathcal{P}$  by

$$\mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathcal{P}) = \{(p_{U_0}, \dots, p_{U_r}) : \bigcap_{i=0}^r U_i \neq \emptyset, U_0, \dots, U_r \in \mathcal{U}, r = 0, 1, \dots\}$$

where  $(p_{U_0}, \dots, p_{U_r})$  denotes the open (degenerate in general) simplex with vertices  $p_{U_0}, \dots, p_{U_r}$ .

**Theorem 4** [G4]. *For every subspace  $X$  in  $R^n$ , the following conditions are equivalent where  $m \in Z$  with  $0 \leq m \leq n - 1$ .*

- (a)  $\mu \dim X \leq m$ .
- (b) For every  $\varepsilon > 0$ , there exist an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  and an  $m$ -dimensional polyhedron  $P$  in  $R^n$  such that  $f(X) \subset P$  (or  $\text{Cl}(f(X)) \subset P$ ).
- (c) For every  $(n - m - 1)$ -dimensional polyhedron  $P$  in  $R^n$  and  $\varepsilon > 0$ , there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  with  $f(X) \cap P = \emptyset$  (or  $\text{Cl}(f(X)) \cap P = \emptyset$ ).

**Remark 5.** In the condition (b) or (c) of Theorem 4, it is possible to replace the polyhedron  $P$  by the one which is an underlying space of *uniform* complex in the sense of Smirnov [Sm2], and to prove the implication (a)  $\rightarrow$  (b),  $\kappa$ -mappings are used sending  $X$  into underlying spaces of generalized nerves which can be triangulated into uniform complexes.

### 4. An open problem of Alexandroff

For a subspace  $X$  in  $R^n$  and  $m \in Z$  with  $0 \leq m \leq n - 1$ , consider the following conditions:

- (a) For every  $\varepsilon > 0$  and every  $(n - m - 1)$ -plane  $H$  in  $R^n$  there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $f(X) \cap H = \emptyset$ .

(b) For every  $\varepsilon > 0$  and every  $(n-m-1)$ -plane  $H$  parallel to an  $(n-m-1)$ -dimensional coordinate plane of  $\mathbb{R}^n$ , there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $f(X) \cap H = \emptyset$ .

**Alexandroff's problem.** *If  $X$  is a compactum in  $\mathbb{R}^n$  and satisfies the condition (a) or (b), then is it true that  $\dim X \leq m$ ?*

G.Chogoshvili[C] asserts that the condition (b) (and hence (a)) implies that  $\dim X \leq m$  for every (non-compact) subspace  $X$  in  $\mathbb{R}^n$ . However, as pointed out by Alexandroff[A3], its proof contained a gap; indeed, Sitnikov's space  $S$  cited above satisfies the condition (a) for  $(m, n) = (1, 3)$  but  $\dim S = 2$ . Also, in view of Theorem 4, it is natural to ask whether the condition (a) implies  $\mu\dim X \leq m$ . However, it is not the case, as the following example shows:

**Example 6[G2].** *There exists a bounded subspace  $X$  in  $\mathbb{R}^3$  satisfying the condition (a) for  $(m, n) = (1, 3)$  and  $\mu\dim X = 2$ .*

Recently, Y.Sternfeld[St] has proved that the condition (b) does not imply  $\dim X \leq m$  in general even if  $X$  is compact; more precisely, he proved

**Theorem 7[St].** *For every integer  $k \geq 2$ , there exists an  $k$ -dimensional compactum  $X$  in  $\mathbb{R}^N$ ,  $N = N(k)$ , which satisfies the condition (b) for  $(m, n) = (1, N)$ .*

However, it remains open whether the condition (a) implies  $\dim X \leq m$  for compacta  $X$ .

## 5. Another extensions of Sitnikov's construction

For  $x = (x_i) \in \mathbb{R}^n$  we define  $r(x) =$  the number of  $\{i : x_i \in \mathbb{Q}\}$  and

$$N_m^n = \{x \in \mathbb{R}^n : r(x) \leq m\} (m = 0, 1, \dots, n) \text{ and } N_{-1}^n = \emptyset.$$

Thus the space  $N_m^n - N_{m-1}^n$  consists of those points exactly  $m$  of whose coordinates are rational, and  $\dim(N_m^n - N_{m-1}^n) = 0$ . Moreover, it is known that

$$\mu\dim N_m^n = \dim N_m^n = m, \quad -1 \leq m \leq n.$$

The space  $S_m^n$  in Lemma 2 can be now expressed in a similar way; let  $\{T_i\}$  be the sequence of subsets of  $\mathbb{Q}$  in the proof of Lemma 2 and then we can write

$$S_m^n = \{x \in \mathbb{R}^n : r_j(x) \leq m \text{ for every } j \in \mathbb{N}\} \text{ where } r_j(x) = \text{the number of } \{i : x_i \in T_j\}.$$

Obviously  $r_j(x) \leq r(x)$  for every  $j$  and we have  $N_m^n \subset S_m^n$  for every  $m$ . We set

$$S_{m,k}^n = S_m^n \cap N_k^n, \quad 0 \leq m \leq k \leq \min\{2m, n-1\},$$

and consider the sequence

$$N_m^n = S_{m,m}^n \subset S_{m,m+1}^n \subset \dots \subset S_{m,m_0}^n \subset S_m^n, \quad m_0 = \min\{2m, n-1\}.$$

Then we have the following theorem which improves Lemma 2.

**Theorem 8[G3].** For every  $m, n, k \in \mathbb{Z}$  with  $0 \leq m \leq k \leq \min\{2m, n-1\}$ , the space  $S_{m,k}^n$  in  $\mathbb{R}^n$  satisfies the equalities  $\mu\dim S_{m,k}^n = m$  and  $\dim S_{m,k}^n = k$ .

**Corollary 9[G4].** For every subspace  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  and  $m \in \mathbb{Z}$  with  $0 \leq m \leq n-1$  the following conditions are equivalent.

- (1)  $\mu\dim X \leq m$ .
- (2) For every  $\varepsilon > 0$  there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $f(X) \subset N_m^n$  (or  $\text{Cl}(f(X)) \subset N_m^n$ ).
- (3) For every  $\varepsilon > 0$  and  $k \in \mathbb{Z}$  with  $m \leq k \leq \min\{2m, n-1\}$ , there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $f(X) \subset S_{m,k}^n$  (or  $\text{Cl}(f(X)) \subset S_{m,k}^n$ ).
- (4) For every  $\varepsilon > 0$  there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $f(X) \subset S_m^n$  (or  $\text{Cl}(f(X)) \subset S_m^n$ ).

## 6. Nemeč's universal space

Let  $\mathcal{M}_\tau^m$  be the class of metric spaces of a given topological weight  $\tau$  and  $\mu\dim \leq m$ . A.G.Nemeč[Ne] proved the existence of a *universal space* in  $\mathcal{M}_\tau^m$  in the following sense:

**Theorem 10.[Ne].** There exists a space  $M_\tau^m$  in  $\mathcal{M}_\tau^m$  with the property that for every  $X$  in  $\mathcal{M}_\tau^m$ , there exists a topological embedding  $f: X \rightarrow M_\tau^m$  which is uniformly continuous.

The proof given in [Ne] is based on his factorization theorem which is a metric dimensional version of Pasynkov's factorization theorem[P]. It is desirable to construct explicitly a concrete space with a universality in any sense for the class  $\mathcal{M}_\tau^m$ , such as Nöbeling's universal space  $N_n^{2n+1}$  for the class of  $n$ -dimensional separable metric spaces[N]. The following is a quite natural question in view of the above result of Nemeč:

*Suppose  $X \subset \mathbb{R}^n$  and  $\mu\dim X \leq m$ . Then does there exist a topological embedding of  $X$  into  $S_m^n$  which is uniformly continuous?*

We note that the answer is yes for compacta  $X$  since every  $m$ -dimensional compact space  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  is embeddable in Menger's space  $M_m^n$  by M.A.Štan'ko[S] and  $M_m^n$  is embeddable in  $N_m^n$  (and hence in  $S_m^n$ )[E].

Let  $f$  be a real valued continuous function of  $X \subset \mathbb{R}^n$  with  $0 \leq f(x) \leq 1$  and  $\Gamma$  the graph of  $f$  in  $\mathbb{R}^{n+1}$ . Then it follows from J.H.Roberts and F.G.Slaughter[RS] that

$$\mu\dim X \leq \mu\dim \Gamma \leq \mu\dim X + 1.$$

Hence we obtain the following:

Let  $X \subset \mathbb{R}^n$  with  $\mu\dim X = m$ . Then for every  $\varepsilon > 0$  and integer  $k$  with  $m \leq k \leq \dim X$  there exist a *homeomorphism*  $f \in T_\varepsilon^N(X)$ ,  $N = n + \dim X$ , such that  $\mu\dim f(X) = k$ .

This result is closely related to the product theorem for metric dimension. Y.Hattori[Ha] has proved the product theorem of general metric spaces for metric dimension.

## 7. Uniformly 0-dimensional $\varepsilon$ -translations

The notion of uniformly 0-dimensional mapping was introduced by Katětov to prove the equality  $\dim = \text{Ind}$  in the realm of general metric spaces. Also, Katětov proved that uniformly 0-dimensional mappings do not decrease the covering dimension and that a metric space  $X$  has  $\dim X \leq n$  iff  $X$  admits a uniformly 0-dimensional mapping into  $\mathbb{R}^n$  [Ka2]. We intend to characterize the dimension of bounded subspaces in a Euclidean space in terms of uniformly 0-dimensional  $\varepsilon$ -translations.

Let  $\mathcal{U}$  be an open cover of a topological space  $X$  and  $A \subset X$ . Then we write

$$\mathcal{U}\text{-dim } A \leq 0$$

if there exists a pairwise disjoint open collection  $\mathcal{U}_0$  in  $X$  such that  $\mathcal{U}_0$  refines  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{U}\mathcal{U}_0 \supset A$ . Moreover, for a continuous mapping  $f : X \rightarrow Y$ , we write

$$\mathcal{U}\text{-dim } f \leq 0$$

if there exists an open cover  $\mathcal{V}$  of  $Y$  such that  $\mathcal{U}\text{-dim } f^{-1}(V) \leq 0$  for every  $V \in \mathcal{V}$ . It is clear that if  $f$  is  $\mathcal{U}$ -mapping in the sense of [E], or if  $f$  is  $\mathcal{U}$ -0-dimensional in the sense of [Ka2], then  $\mathcal{U}\text{-dim } f \leq 0$ .

Let  $f : X \rightarrow Y$  be a continuous mapping between metric spaces. Denote by  $\mathcal{U}_\varepsilon$  the cover of  $X$  consisting of all spherical neighborhoods of radius  $\varepsilon > 0$ . Then  $f$  is called *uniformly 0-dimensional* [Ka2] if for every  $\varepsilon > 0$  there exists  $\eta > 0$  such that

$$\mathcal{U}_\varepsilon\text{-dim } f^{-1}(A) \leq 0 \text{ whenever } A \subset Y \text{ and } \delta(A) < \eta.$$

**Lemma 11**[G4]. *Let  $\mathcal{U}$  be a countable star-finite open cover of a metric space  $X$  with  $\text{ord } \mathcal{U} \leq k + 1$  and  $\mathcal{P} = \{p_U : U \in \mathcal{U}\}$  an arbitrary set in  $\mathbb{R}^n$ . If the generalized nerve  $\mathcal{N} = \mathcal{N}(\mathcal{U}, \mathcal{P})$  forms a complex in the sense of [Ku] (i.e.,  $\mathcal{N}$  is locally finite in  $\mathbb{R}^n$  at every point of  $\cup \mathcal{N}$ ) and consists of non-degenerate simplexes, then  $\mathcal{U}\text{-dim } f \leq 0$  for the  $\kappa$ -mapping  $f : X \rightarrow \cup \mathcal{N}$  relative to  $\mathcal{U}$  and  $\mathcal{P}$ .*

**Theorem 12**[G4]. *For every subspace  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  and every  $k \in \mathbb{Z}$  with  $0 \leq k \leq n$ , the following conditions are equivalent.*

- (1)  $\dim X \leq k$ .
- (2) For every  $\varepsilon > 0$  and every finite open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $\text{Cl}(f(X)) \subset N_k^n$  and  $\mathcal{U}\text{-dim } f \leq 0$ .
- (3) For every  $\varepsilon > 0$  and every finite open cover  $\mathcal{U}$  of  $X$ , there exists an  $f \in T_\varepsilon^n(X)$  such that  $f(X) \subset N_k^n$  and  $\mathcal{U}\text{-dim } f \leq 0$ .

**Theorem 13**[G4]. *For every bounded subspace  $X$  in  $\mathbb{R}^n$  and every  $k \in \mathbb{Z}$  with  $0 \leq k \leq n$ , the following conditions are equivalent.*

- (1)  $\dim X \leq k$ .
- (2) For every  $\varepsilon > 0$ , there exists a uniformly 0-dimensional mapping  $f$  in  $T_\varepsilon^n(X)$  with  $\text{Cl}(f(X)) \subset N_k^n$ .
- (3) For every  $\varepsilon > 0$ , there exists a uniformly 0-dimensional mapping  $f$  in  $T_\varepsilon^n(X)$  with  $f(X) \subset N_k^n$ .

We give a sketch of the proof of the implication (1)  $\rightarrow$  (2). Assume that  $\dim X \leq k$  and let  $\{H_i^{n-k-1}\}$  be a sequence of  $(n - k - 1)$ -planes in  $\mathbb{R}^n$  such that

$$\mathbb{R}^n - N_k^n = \cup H_i^{n-k-1}.$$

We set for  $i \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_i &= \{f \in T(X) : \text{Cl}(X) \cap H_i^{n-k-1} = \emptyset\} \\ \mathcal{T} &= \{f \in T(X) : f \text{ is uniformly } 0\text{-dimensional}\}. \end{aligned}$$

Since  $f(X)$  is bounded for every  $f \in T(X)$ ,  $\mathcal{S}_i$  is dense and open in  $T(X)$ . Moreover, by Katětov's theorem[Ka1],  $\mathcal{T}$  forms a dense  $G_\delta$  subspace of  $T(X)$ . Hence by Baire's category theorem,  $\cap \mathcal{S}_i \cap \mathcal{T}$  is dense in  $T(X)$ . Thus for every  $\varepsilon > 0$  there exists  $f \in \cap \mathcal{S}_i \cap \mathcal{T}$  with  $d(1_X, f) < \varepsilon$ , and then  $f$  is an  $\varepsilon$ -translation of  $X$  with  $\text{Cl}(f(X)) \subset N_k^n$ .

## References

- [A1] P.Alexandroff, Über den allgemeinen Dimensionsbegriff und seine Beziehungen zur elementaren geometrischen Anschauung, Math. Ann. 98 (1928)617-636.
- [A2] —, Zum allgemeinen Dimensionsproblem, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen(1928) 25-44.
- [A3] —, The present status of the theory of dimension, Uspehi Mat.Nauk 6(1951)43-68.
- [C] G.Chogoshvili, On a theorem in the theory of dimensionality, Compositio.Math.5(1938) 298.
- [E] R.Engelking, Dimension theory, North Holland, 1978.
- [G1] T. Goto, Metric dimension of bounded subspaces in Euclidean spaces, Top. Proc. 16(1991)45-51.
- [G2] —, Metric dimension of bounded subspaces in Euclidean spaces II, ibid. 53-56.
- [G3] —, A construction of a subspace in Euclidean space with designated values of dimension and metric dimension, Proc. Amer. Math. Soc. 118(1993)1319-1321.
- [G4] —,  $\varepsilon$ -translations and dimension, preprint.
- [Ha] Y.Hattori, Product theorem of metric dimension  $\mu\text{dim}$ , unpublished.
- [Hu] W.Hurewicz, Über das verhältnis seperabler Räume zu kompakten Räumen, Proc. Akad. Amsterdam 30(1927)425-430.
- [Ka1] M.Katětov, On the dimension of non-separable spaces I, Czech. Math. J. 2(1952)333-368.
- [Ka2] —, On the relation between the metric and topological dimensions, Czech. Math. J. 8(1953)163-166.
- [Ku] K. Kuratowski, Topology I, New York 1966.
- [Ne] A.G.Nemec, On metric dimension, Dokl. Akad. Nauk SSSR 225(1975) 44-47.
- [N] G.Nöbeling, Über eine n-dimensionale Universalmenge im  $\mathbb{R}^{2n+1}$ , Math. Ann. 104 (1931)71-80.

- [P] B.A.Pasynkov, On universal bicompecta of given weight and dimension, Dokl. Akad. Nauk SSSR 154(1964)1042-1043.
- [PT] L.Pontrjagin and G.Tolstowa, Beweis des Mengerschen Einbettungssatzes, Math. Ann. 105(1931)734-747.
- [RS] J.H.Roberts and F.G.Slaughter, Metric dimension and equivalent metrics, Fund. Math. 62(1968)1-5.
- [S] M.A.Štan'ko, Solution of Menger's problem in the class of compacta, Dokl. Akad. Nauk SSSR 201(1971)1299-1302.
- [Si1] K.A.Sitnikov, An example of a two dimensional set in three dimensional Euclidean space allowing arbitrarily small deformations into a one dimensional polyhedron and a certain new characterization of the dimension of sets in Euclidean spaces, Dokl. Akad. Nauk SSSR 88 (1953)21-24.
- [Si2] —, Combinatorial topology of nonclosed sets I. The first duality law; spectral duality, Mat. Sb. 34(76)(1954)3-54.
- [Si3] —, Combinatorial topology of nonclosed sets II. Dimension, Mat. Sb. 37(79)(1955) 385-434.
- [Sm1] Ju.M. Smirnov, On the metric dimension in the sense of P.S. Alexandroff, Izv. Akad. Nauk SSSR 20(1956)679-684.
- [Sm2] —, Geometry of infinite uniform complexes and  $\delta$ -dimension of points sets, Mat. Sb. 38(1956)137-156.
- [St] Y.Sternfeld, Stability and dimension—a counter-example to a conjecture of Chogoshvili, Trans. Amer. Math. Soc. 340(1993)243-251.
- [W] J.W.Wilkinson, A lower bound for the dimension of certain  $G_\delta$  sets in completely normal spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 20 (1969)175-178.

# 各点収束位相をもつ関数空間の位相的性質について

神奈川大・工 酒井 政美

$X$  をチコノフ空間（実数空間の積の部分空間）とする。 $X$  にたいして  $C(X)$  を  $X$  上の実数値連続関数全体からなる集合とし、 $C_p(X)$  を  $C(X)$  に各点収束位相をいれた関数空間とする。各点収束位相はコンパクト開位相や一様収束位相より弱い位相であるが、 $X$  の位相的性質をよく反映しており、主にロシアの数学者を中心に研究されてきている。ここでは  $C_p(X)$  に関してどのような問題が考えられているかをみてみたい。この分野の概要としては[1]をみていただきたい。

$C_p(X)$  は自然に位相環、また線形位相空間（とくに位相群）となっている。 $C_p(X)$  と  $C_p(Y)$  が線形位相空間として同形るとき、 $C_p(X) \simeq C_p(Y)$  とかく。

問題 1:  $C_p(X)$  を線形位相空間として分類せよ。

$C(X)$  に一様収束位相をいれた関数空間を  $C_u(X)$  とする。コンパクト距離空間上の  $C_u(X)$  の分類は既に知られている。

定理[7]  $X$  と  $Y$  をコンパクト距離空間とする。このとき、 $C_u(X)$  と  $C_u(Y)$  が線形位相空間として同形となるための必要十分条件は、次のどれかが成立することである。

- (a)  $X$  と  $Y$  はともに有限集合であり濃度が等しい、
- (b) ある可算順序数  $a$  と  $b$  が存在して、 $X = [1, a], Y = [1, b]$   
 $\max(a, b) < [\min(a, b)]^\omega$ ,
- (c)  $X$  と  $Y$  はともに非可算。

特に  $C$  をカントル集合、 $I$  を単位閉区間としたとき、 $C_u(C)$  と  $C_u(I)$  は線形同形である。ところが各点収束位相の場合は事情が異なり、後に述べる Pestov の結果より  $C_p(C)$  と  $C_p(I)$  は線形同形とならない。ただし、0-次元のコンパクト距離空間の族のなかでは上の定理と同じ分類定理が成り立つことが知られている[2]。しかし次元が上がった場合については分類定理は得られていない。

$C_p(X)$  を位相環として考えたとき、次の結果が知られている。



定理[3]  $C_p(X)$  と  $C_p(Y)$  が位相環として同形であれば、 $X$  と  $Y$  は同相である。

この定理より自然に次の問題が考えられる。

問題2:  $C_p(X) \cong C_p(Y)$  のとき、 $X$  のどのような位相的性質が  $Y$  に保存されるか?

一般に  $C_p(X) \cong C_p(Y)$  でも、 $X$  と  $Y$  は同相とはならない。例えば、 $X$  を収束点列の可算位相和、また  $Y$  を  $X$  における集積点全体を1点につぶした空間とすると、 $C_p(X) \cong C_p(Y)$  であるが、 $X$  と  $Y$  は同相でない。

問題2に関しては次の結果が知られている。

定理[4]  $C_p(X) \cong C_p(Y)$  であれば、 $\dim X = \dim Y$ 。

バナッハ空間  $B$  に弱位相をいれた空間を  $(B, w)$  とする。 $(B, w)$  のコンパクト部分空間と同相な空間を Eberlein コンパクト空間とよぶ。例えば、離散空間の1点コンパクト化は Eberlein コンパクトである。Eberlein コンパクト空間の特徴付けはいろいろ知られているが、 $C_p(X)$  をつかった特徴付けとして次の結果が知られている。

定理[1]  $X$  をコンパクト空間とすると次は同値。

- (a)  $X$  は Eberlein コンパクト、
- (b) あるコンパクト空間  $Y$  が存在して、 $X$  は  $C_p(Y)$  に埋め込める。

一般にあるコンパクト空間  $Y$  上の  $C_p(Y)$  に埋め込める空間を Eberlein-Grothendieck 空間 (略して、EG-空間) とよぶことにする[1]。

問題3: EG-空間の内的特徴付けを与えよ。

距離空間は Eberlein コンパクトとなるコンパクト化をもつことが知られているので、上の定理より EG-空間である。しかし一般の空間にたいしてはこれ以上のことは知られていない。空間を限定して、集積点がひとつしかない空間の場合の外的特徴付けについては次の結果が知られている。

定理[9] 点  $p$  を空間  $X$  の唯一の集積点とする。このとき次は同値。

- (a)  $X$  は EG-空間、

(b)  $W(X, p) = \{f \in \{0,1\}^X : f^{\leftarrow}(0) \text{は } p \text{の近傍}\}$  はコンパクト集合の可算和。

- 例[9] (1) sequential fan は EG-空間ではない、  
 (2)  $p \in \beta\omega - \omega$  のとき、 $\omega \cup \{p\}$  は EG-空間ではない。

ここでは集積点がひとつしかない空間が EG-空間となるための内的特徴付けが  $k$ -距離空間の概念によって与えられることを示す。

まず[6]において導入された  $k$ -距離空間の定義を与える。開集合の閉包となっている集合を正則閉集合とよび、 $P(X)$  を  $X$  の正則閉集合全体からなる集合とする。 $X \times P(X)$  からの非負実数値関数  $F$  は次の4つの条件を満たすとき  $X$  の  $k$ -距離とよばれる。

- (1)  $F(x, R) = 0$  と  $x \in R$  は同値、
- (2)  $A$  が  $B$  の部分集合であれば、すべての  $x$  にたいして  $F(x, A) \geq F(x, B)$ 、
- (3) 各  $R$  にたいして、 $F(x, R)$  は  $x$  に関して連続関数、
- (4)  $\{R_\alpha\}$  が単調増大であれば、  

$$F(x, \overline{\cup R_\alpha}) = \inf_{\alpha} F(x, R_\alpha)。$$

$k$ -距離が存在する空間を  $k$ -距離空間とよぶ。距離空間は自然に  $k$ -距離空間になっている。

空間  $X$  とその点  $p$  にたいして、 $X(p)$  を  $X$  の  $p$  以外の全ての点を孤立点化した空間とする。

補題1  $X$  は EG-空間であり点  $p$  が  $X$  の  $G_G$ -集合であれば、 $X(p)$  は  $k$ -距離空間になる。

補題2  $X$  は集積点をひとつしかもたないとする。このとき  $X$  が  $k$ -距離空間であれば、 $X$  は EG-空間となる。

これらの補題より次の定理が得られる。

定理[5]  $X$  の集積点はただひとつであり、その点は  $G_G$ -集合であるとする。このとき次は同値である。

- (a)  $X$  は EG-空間、
- (b)  $X$  は  $k$ -距離空間。

系  $X$  を可算空間とし、集積点はひとつしかないとする。このとき次は同値。

- (a)  $X$  は EG-空間、
- (b)  $X$  は  $C_p(C)$  に埋め込まれる、ただし  $C$  はカントル集合、
- (c)  $X$  は  $k$ -距離空間。

距離空間の閉連続像になっている空間はラスネフ空間とよばれる。ラスネフ空間であり、 $k$ -距離空間でもある空間は距離化可能であることが知られている[8]。例の(1)における空間はラスネフ空間であるが距離化可能ではないので、上の定理より EG-空間ではないことが直ちにわかる。また、extremally disconnected な  $k$ -距離空間は離散空間となる[6]ことより、例の(2)の空間も EG-空間ではないことが直ちにわかる。

より一般的な空間にたいしての EG-空間の内的特徴付けが得られればおもしろいが今のところ手がつけられていない。

#### 文献

- [1] A.V. Arhangel'skii, Topological Function Spaces, Kluwer Academic Publishers, 1992.
- [2] J.A. Baars and J. de Groot, On Topological and Linear Equivalence of certain Function Spaces, CWI Tract vol.86, 1992.
- [3] J. Nagata, On lattices of functions on topological spaces and functions on uniform spaces, Osaka Math. J. 1(1949) 166-181.
- [4] V.G. Pestov, The coincidence of the dimension  $\dim$  of 1-equivalent topological spaces, Soviet Math. Dokl. 26(1982) 380-383.
- [5] M. Sakai, Embeddings of  $k$ -metrizable spaces into function spaces, preprint.
- [6] E.V. Ščepin, On  $k$ -metrizable spaces, Math. USSR Izvestija 14(1980) 407-440.
- [7] Z. Semadeni, Banach spaces of continuous functions, PWN Warszawa, 1971.
- [8] K. Tamano, Closed images of metric spaces and metrization, Topology Proceed. 10(1985) 177-186.
- [9] V.V. Uspenskii, On imbeddings in function spaces, Soviet Math. Dokl. 19(1978) 1159-1162.

# Vassiliev 不変量と knot diagrams

名古屋工業大学 大山淑之

1990年 Vassiliev[23]により, quantum group invariants を含むような knots invariant の無限列が定義された. また Birman と Lin[5] は Vassiliev invariants を knot diagram を使って計算できるように定式化した. この稿では [5] にしたがって計算方法を説明し, 関連する問題にふれ 最後に筆者の結果を述べる.

## 1. Vassiliev invariant の定義

定義 ([5]) knot の numerical な invariant  $v$  が与えられると, 次の式で knotted graph の invariant が定義される.

$$(1) \quad v(\text{crossing}) = v(\text{right crossing}) - v(\text{left crossing})$$

ここで knotted graph とは circle の  $R^3$  への immersion で singularity は double point のみであり, flat vertex graph として取り扱う.

$K^n$  を  $n$  double point をもつ knotted graph とする.

$$(2) \quad v(K^n) = 0 (n > i)$$

を満たすとき, 最小値  $i$  をとり  $v$  を Vassiliev invariant of order  $i$  とよび  $v_i$  とかく.

また Knot の不変量が finite type であるとは ある自然数  $m$  が存在して, その不変量が Vassiliev invariant of order  $m$  となっていることとする.

この定義によりわかるように, 多くの invariant が Vassiliev invariant となり, invariant というよりは invariant の族と考えた方がよい. この Vassiliev type invariant には 次の定理で示されるように quantum group invariant が含まれてしまう.

定理 ([4] [5] [11])  $\mathcal{Q}_q(K)$  を knot  $K$  の quantum group invariant とし,

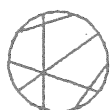
$$\mathcal{P}_x(K) = \sum_{i=0}^{inf} u_i(K)x^i$$

を  $\mathcal{Q}_q(K)$  に  $q = e^x$  を代入し  $e^x$  をテイラー展開することにより得られるべき級数とする. このとき  $x^i$  の係数  $u_i(K)$  は  $i=0$  のとき 1,  $i \geq 1$  のとき Vassiliev invariant of order  $i$  である.

quantum group invariant とは braid group の R-行列表現の trace として得られるものであり, Jones, HOMFLY, Kauffman polynomial 等が含まれる.

このように 多くの情報を持った不変量を計算するわけであるが, 定義に戻ってみると 条件 (2) は  $v_i(K^i)$  は knotted graph の埋め込みに依らないことと同値である. そこでまず  $[i]$ -configuration という概念を用意する.

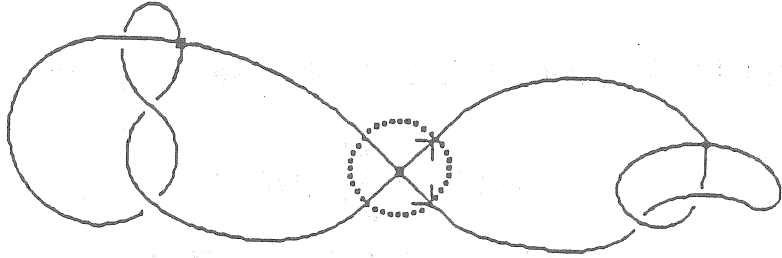
$[i]$ -configuration とは  $S^1$  上の  $2i$  個の点を  $i$  個の対に分ける分け方であり, 次の図のように対応する点を線分で結んであらわす.



$[5]$ -configuration

Knotted graph  $K^i$  を  $S^1$  の immersion とみたとき 一致する点を対としてみると  $K^i$  にたいして  $[i]$ -configuration が対応する. 即ち 条件 (2) は  $v_i(K^i)$  が  $[i]$ -configuration にのみ依存するということになる.  $[i]$ -configuration において 他の線分と交わらない線分があるとき, この  $[i]$ -configuration は inadmissible であるという (inadmissible でないとき admissible). Inadmissible  $[j]$ -configuration にたいしては 下図のように 1 つ double point を取り除くと 2 つの成分に分かれるような immersion がとれる. これを inadmissible configuration に対する good model とよぶ. good model  $K^j$  にたいしては (1) より 任意の  $i$  に対し  $v_i(K^j) = 0$

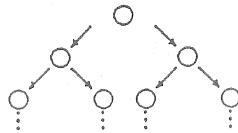
となる。



以下の2つを  $v_i(K)$  に対する initial data とよぶ。

- (3) 任意の  $i$  にたいし  $v_i(O) = 0$ . ここで  $O$  は trivial knot をあらわす.
- (4)  $2 \leq j \leq i$  に対する admissible  $[j]$ -configuration をもつ knotted graph  $K^j$  (model graph とよぶ) の  $v_i(k^j)$  の値.

Axiom(1), (2) と initial data(3), (4) により,  $v_i(K)$  は決定することができる. 実際の計算は 次のような resolution tree を考えればよい.



各  $\begin{matrix} \circ \\ \swarrow \quad \searrow \\ \circ \quad \circ \end{matrix}$  において 3つの  $\circ$  は axiom(1) にあらわれる3つの knotted graph で 右下が1つ double point が多いものとする. これを通常の polynomial invariant であらわれる resolution tree と同様なものとする. 右下に向かう枝は double point が増えていくので, (2) 及び (4) により double point が  $i$  になった時点で計算が可能であり, 左下に向かう枝については “[ $j$ ]-configuration をもつ任意の knotted graph は cross change で [ $j$ ]-configuration の model graph にすることができる” ので (3),(4) により計算可能となる.

## 2. Initial data の計算

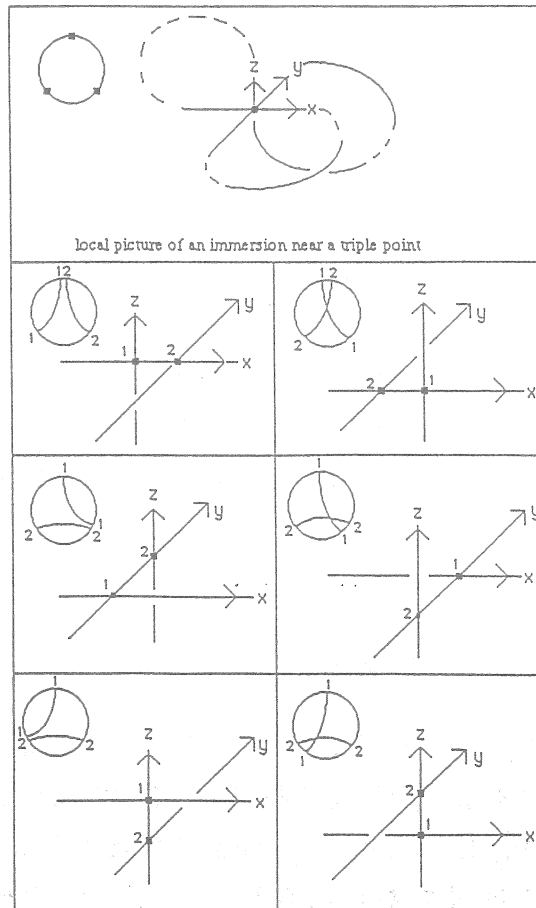
Vassiliev invariant が多くの情報を持っているのは その initial data の複雑さにある. 有限個の knotted graph の  $v_i$  を求めればよいのである

が、一言で言うと 次の lokal な等式を満たすようにすればよい。

$$\begin{aligned}
 (5) \quad & v_i(\text{Diagram 1}) - v_i(\text{Diagram 2}) \\
 &= v_i(\text{Diagram 3}) - v_i(\text{Diagram 4}) \\
 &= v_i(\text{Diagram 5}) - v_i(\text{Diagram 6})
 \end{aligned}$$

実際に (5) の等式をすべて挙げるには 次のようにおこなう。

$\langle j \rangle$ -configuration を  $[i-2]$ -configuration に 3 点  $x, y, z$  を加えたものとし、 $\langle j \rangle$ -configuration をあらわす model graph は  $x, y, z$  が同一視されているとする。即ち 1つの triple point と  $j-2$  個の double point をもっている immersion である。この triple point から次の 6 つの resolution をつくり、(5) の式を list up すればよい。



ここで 注意しなければならないのは  $v_i$  の initial data において  $[i]$ -configuration に対する model graph の  $v_i$  の値は embedding に依らない。即ち  $[i]$ -configuration のみによるのだが、 $[j]$ -configuration ( $j < i$ ) においては model graph によるので 事情が異なってくる。

まず  $v_i$  の  $[i]$ -configuration に対しては次のようにすればよい。  
 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  を admissible  $[i]$ -configuration とし、

$$(X_1, X_2, \dots, X_n) = (v_i(\alpha_1), v_i(\alpha_2), \dots, v_i(\alpha_n))$$

とおく。  $\{\beta_s : s = 1, 2, \dots, m\}$  を admissible  $\langle i \rangle$ -configuration とし  
 そこから (5) の式を導く。同次連立 1 次方程式をとけばよいのである。行列で表せば

$$(6) \quad \mathcal{M}_i^t \mathcal{X}_i = 0.$$

$\mathcal{X}_i = (X_1, X_2, \dots, X_n)$  で  $\mathcal{M}_i$  は  $2m \times n$  の係数行列である。もちろん nontrivial Vassiliev invariant of order  $i$  が存在すれば、(6) の解空間の次元は正になる。

$[j]$ -configuration ( $j < i$ ) についても同様にすればよいが、  
 $\langle j \rangle$ -configuration にも model graph をつくり (5) の式を導くため、(5) の式であらわれる knotted graph が最初に指定した model graph とは  $[j]$ -configuration は同じでも embedding が異なるものがでてくる。それを axiom(1) で補正する必要がある。即ち 非同次連立方程式がでてくることになる。

$$(7) \quad \mathcal{M}_j^t \mathcal{X}_j = \mathcal{N}_{ij} (1 \leq j \leq i-1).$$

ここで  $\mathcal{X}_j = (X_1, X_2, \dots, X_{n_j})$  は すべての admissible  $[j]$ -configuration の model graph に対する  $v_i$  の値であり、 $\mathcal{M}_j$  は (5) の関係式より得られる係数行列である。 $\mathcal{N}_{ij}$  は model graph にするためにでてくる項であり、 $\mathcal{X}_{j+1}, \dots, \mathcal{X}_i$  の項の 1 次式であらわされている。 $\mathcal{X}_i$  の値に対して (7) の



解が存在しなければならないことになる。

$\mathcal{N}_{ij}$  が  $\mathcal{X}_{j+1}, \dots, \mathcal{X}_i$  の 1 次式なのだから, (6) と (7) を一緒にして 次のような同次連立 1 次方程式が 得られる。ただし  $\mathcal{X}^i = (\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_{i-1}, \dots, \mathcal{X}_1)$  である。

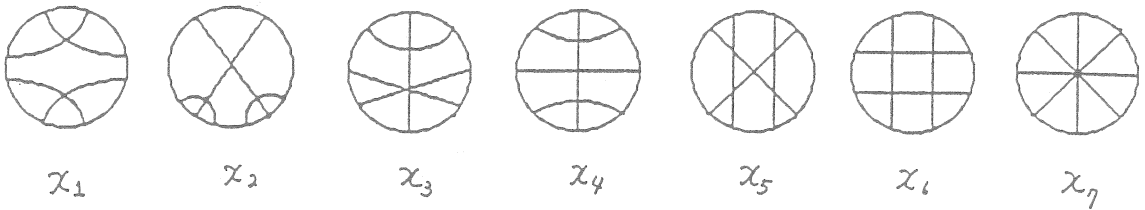
$$(8) \quad \mathcal{M}^i \mathcal{X}^i = 0.$$

定理 [5] order  $i$  の nontrivial Vassiliev invariant が存在すれば (8) の解空間の次元が正となる。

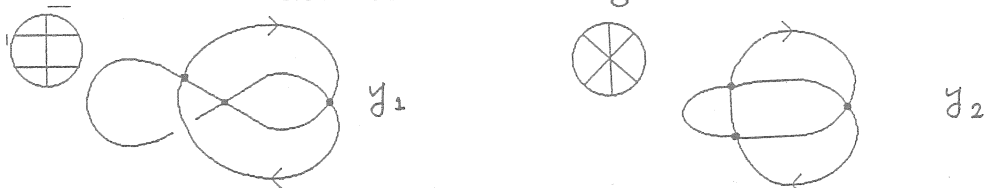
### 3. Vassiliev invariants of order 4

実際に 2 の解説どおりに order 4 の Vassiliev invariant の initial data を計算してみる。

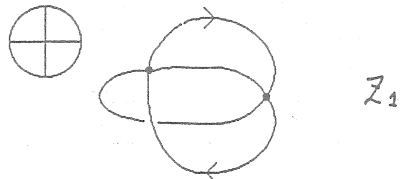
まず admissible  $[j]$ -configuration ( $j \leq 4$ ) をあげる。



#### admissible 4-configuration



#### admissible 3-configuration と model graph



#### admissible 2-configuration と model graph

$x_1, x_2, \dots, x_7$  は 図の configuration に対する  $v_4$  の値,  $y_1, y_2, z_1$  は 図のような model graph の  $v_4$  の値である.

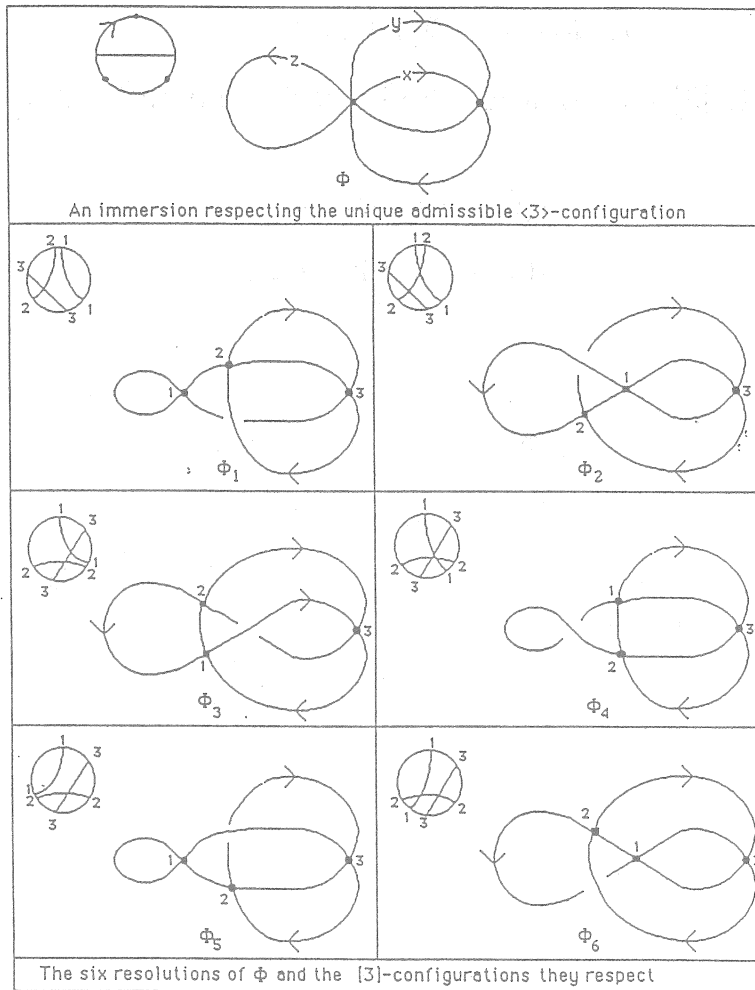
まず  $j = 4$  について  $x_1, x_2, \dots, x_7$  に成り立つ式を考えてみる.  $x, y, z$  のうち 2 点が隣あっている場合 あるいは対称性を持つ場合 (5) の 2 つの式が 1 つに reduce される. 必要なものだけをあげてみると次のようになる.

<4>-configuration

	$\chi_4 - \chi_3 = 0 - \chi_2$			
	$\chi_5 - \chi_7 = 0 - \chi_3$			
	$\chi_4 - \chi_3 = 0 - \chi_2$			
	$\chi_6 - \chi_5 = 0 - \chi_4$			
	$\chi_2 - \chi_3 = \chi_1 - \chi_2$			
	$\chi_3 - \chi_5 = \chi_2 - \chi_6$			

diagram labels: 3 configurations - 2 diagrams

$j = 3$  の場合 admissible  $\langle 3 \rangle$ -configuration は唯一つである.



$\Phi_i$  は  $\langle 3 \rangle$ -configuration の immersion からでてくる knotted graph である.

$$v_4(\Phi_1) - v_4(\Phi_2) = v_4(\Phi_3) - v_4(\Phi_4)$$

$$v_4(\Phi_1) - v_4(\Phi_2) = v_4(\Phi_5) - v_4(\Phi_6)$$

$v_4(\Phi_1) = v_4(\Phi_5) = 0$  より,

$$-v_4(\Phi_2) = v_4(\Phi_3) - v_4(\Phi_4) = -v_4(\Phi_6)$$

$\Phi_2$  と  $\Phi_6$  が isotopic より,

$$v_4(\Phi_3) - v_4(\Phi_4) + v_4(\Phi_6) = 0$$

$\Phi_3$  と  $\Phi_6$  は同じ [3]-configuration を持つので axiom(1) より

$$v_4(\Phi_3) - v_4(\Phi_6) = x_6$$

$$v_4(\Phi_3) = v_4(\Phi_6) + x_6$$

よって

$$2v_4(\Phi_6) - v_4(\Phi_4) + x_6 = 0$$

$$\therefore 2y_1 - y_2 + x_6 = 0$$

$j = 2$  については admissible  $\langle 2 \rangle$ -configuration は存在しない。よって何の制限もつかないことになる。

以上 まとめると

$$x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

$$x_3 + x_5 - x_7 = 0$$

$$x_4 - x_5 + x_6 = 0$$

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_2 + x_3 - x_5 + x_6 = 0$$

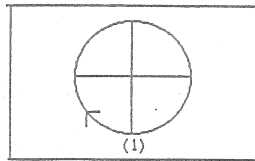
$$2y_1 - y_2 + x_6 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

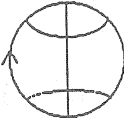

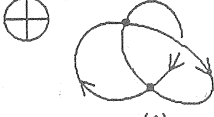
この式を解くことにより

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ y_1 \\ y_2 \\ z_1 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + e \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$









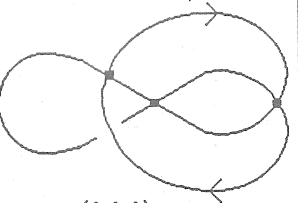

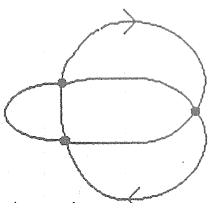

$a, b, c, d, e$  は任意定数. ここで  $j=4$  の  $v_4$  の値がすべて 0 の場合 order 3 の Vassiliev invariant になっていることに注意されたい. 以上により次のような initial data の表 (actually table) が得られる.



Actually table for  $i=2$

$j=3$	 (1)	 (2)
$j=2$	 (0)	

Actually table for  $i = 3$

$j=4$	 $(-3, 2, 1)$	 $(-2, 1, 1)$	 $(-1, 0, 1)$	 $(1, -1, 0)$	 $(1, 0, 0)$	 $(0, 1, 0)$	 $(0, 0, 1)$
$j=3$	 $(0, 0, 0)$	 $(0, 0, 0)$		 $(0, 1, 0)$	 $(0, 1, 0)$		
$j=2$	 $(0, 0, 0)$						

Actually table for  $i = 4$

これまでみてきたように Vassiliev invariant を記述するには たいへん複雑な状況が生じる。Bar-Natan[1] は configuration を chord diagram に拡張し、 $v_i$  に対する  $[i]$ -configuration の nontrivial な data が存在することを simple Lie algebra を用いて示している。 $i$  以下については Kontsevich による。近年 Vassiliev type invariant である Kontsevich integral が反復積分を用いて定義され、更に universal Vassiliev invariant に拡張さ

れている。これについては [3],[6], [7],[8],[9],[10] 等を参照されたい。また T.Stanford[20],[21] により 組み合わせ的な方法で graph に対しても 拡張されている。

Birman と Lin は [5] において いくつか問題を挙げている。例えば 次のようなものである。

1. order  $i$  の Vassiliev invariant の次元はいくつか。
2. Vassiliev invariant は quantum group invariant を含んでいるが、それは proper か。
3. Vassiliev invariant により noninvertible knot は区別できるか。
4. Vassiliev invariant はどのくらい強力か。knot を分類できるか。

もちろん 3 と 4 は関係しているわけだが、実は 3 が正しければ quantum group invariant は noninvertibility を判定できないので 2 も正しいことになる。

最後に 4 について order を制限すれば 任意の knot に対して同じ Vassiliev invariant をもつ knot が無限個存在するという定理を紹介する。

#### 4. $n$ -trivial, $n$ -similar and Vassiliev invariants

定理.[12] [16] [19] 任意に knot  $K$  と自然数  $n$  を与えると、 $K$  と同じ Vassiliev invariant of order  $m(1 \leq m \leq n)$  をもつ knot が無限個存在する。

この定理は 筆者、T.Stanford, X.-s.Lin により それぞれ別々の方法で証明された。筆者の方法の概略を示す。

定義  $K$  を knot,  $\tilde{K}$  を  $K$  の diagram,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  を  $\tilde{K}$  の空でない crossing の sets とする。以下の 2 つの条件を満たすとき、 $\tilde{K}$  が  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  に関し  $n$ -trivial diagram であるという。

- (1)  $A_i$  と  $A_j$  は互いに disjoint ( $i \neq j$ )。

(2)  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  の任意の空でない subset(subfamily) の crossing で cross change すると,  $\tilde{K}$  は trivial knot の diagram になる.

knot  $K$  が  $n$ -trivial diagram をもち,  $(n+1)$ -trivial diagram をもたないとき  $n$  を  $O(K)$  であらわす. また knot  $K$  が 任意の自然数  $n$  に対して  $n$ -trivial diagram をもつとき,  $O(K) = \infty$  とする.

この定義では 様々な crossing で cross change すると trivial knot になるのだが, trivial knot の代わりに 何か与えられた knot  $L$  にかえる. その場合が谷山氏によって拡張された  $n$ -similar であり [22],  $n$ -trivial とは trivial knot に  $n$ -similar と言い換えることができる.

まず  $n$ -trivial について既に得られている結果をしるす.

命題 ([24])

任意の knot  $K$  は 2-trivial diagram をもつ.

定理 1 ([15])

2 以上の自然数を任意に与えたとき,  $n$ -trivial diagram をもつ nontrivial knot が存在する.

定理 2 ([15])

knot  $K$  が  $n$ -trivial diagram をもつとき,  $K$  の Conway polynomial  $\nabla_K(z)$  は 以下の形となる.

(1)  $n$  が奇数のとき

$$\nabla_K(z) = 1 + a_{n+1}z^{n+1} + a_{n+3}z^{n+3} + \dots,$$

(2)  $n$  が偶数のとき

$$\nabla_K(z) = 1 + a_n z^n + a_{n+2} z^{n+2} + \dots$$

定理 3 ([18])

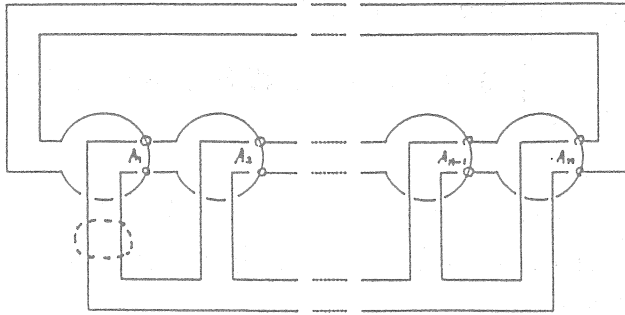
knot  $K$  が  $2n$ -trivial diagram をもつとき,  $K$  の Conway polynomial の  $z^{2n}$  の係数は偶数である.



定理4 ([18])

2以上の任意の自然数  $n$  に対し,  $O(K) = n$  の knot が無限個存在する.

定理1を証明するのに 次の knot  $K_n$  を用いた. この knot は alternating knot であり, nontrivial である.



$K_n$  の Conway polynomial は次のようになる.

$n = 2m (m \geq 1)$  のとき

$$\nabla_{K_n}(z) = 1 - 2z^{2m} + \dots - 2mz^{2(2m-1)},$$

$n = 2m - 1 (m \geq 2)$  のとき

$$\nabla_{K_n}(z) = 1 + (2m - 1)z^{2m} + \dots + (2m - 1)z^{2(2m-2)}.$$

定理2, 3より  $O(K) = n$  であることがわかる.

次に  $K_n$  の点線部分に  $l$ -twist をくわえた knot  $K_{n,l}$  を考える.  $K_{n,l}$  は  $K_n$  と同じ Conway polynomial をもち 図より  $n$ -trivial であることがわかるので,  $O(K_{n,l}) = n$  となる. 一方 Jones polynomial  $V_{K_{n,l}}(t)$  は  $l < l'$  に対し  $V_{K_{n,l}}(t) \neq V_{K_{n,l'}}(t)$  となり, 定理4が示されるのである.

言い替えると 次のことを示していることになる.

・  $n$ -trivial かつ  $(n+1)$ -trivial でない knot で Jones polynomial が異なるものが無限個.

・  $n$ -trivial knot で Conway polynomial が異なるものが無限個存在する. ( $m > n$  のとき  $m$ -trivial ならば  $n$ -trivial であるから)

ここで  $(n$ -trivial knot)  $\#$  (knot  $L$ ) という knot を考える. これは  $L$  に  $n$ -similar となり, 上述の結果より

\*  $L$  に  $n$ -similar な knot で Jones polynomial が異なるものが無限個, Conway polynomial が異なるものが無限個存在する.

knot  $L$  に  $n$ -similar な knot の Vassiliev invariant を計算する.

$K$  を  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  に関して  $L$  に  $n$ -similar な knot とする.  $A_i = \{c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{i\alpha(i)}\}$ ,  $c_{ij}$  の符号を  $\varepsilon_{ij}$  とおく.

また  $K \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$  を  $K$  から次の操作で得られる knotted graph とする.

- $c_{11}, \dots, c_{1i_1-1}, c_{21}, \dots, c_{2i_2-1}, \dots, c_{n1}, \dots, c_{ni_n-1}$  で cross change
- $c_{1i_1}, c_{2i_2}, \dots, c_{ni_n}$  で crossing point を double point に変える.

このとき 次の補題が成立する.

補題 knot  $K$  が knot  $L$  に  $n$ -similar であるとする. このとき  $K$  の Vassiliev invariant of order  $m$ ,  $v_m$  は次の式で与えられる.

$$v_m(K) = v_m(L) + \sum_{\substack{1 \leq i_j \leq \alpha(j) \\ j = 1, 2, \dots, n}} \varepsilon_{1i_1} \varepsilon_{2i_2} \dots \varepsilon_{ni_n} v_m \left( K \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \right).$$

$K \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$  は  $n$  個の double point を持っているので  $m < n$

のとき  $v_m \left( K \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix} \right) = 0$ . したがって  $L$  に  $(n+1)$ -similar な knot は order が  $n$  以下の Vassiliev invariant は  $L$  と同じになってしまい, 定理が得られる.

即ち 任意に knot  $K$  と自然数  $n$  を与えると, order が  $n$  以下の Vassiliev invariant が  $K$  と同じで Jones polynomial が異なる Knot が無限個, Conway polynomial が異なる knot が無限個構成できたことになる.

## 参考文献

- [1] D.Bar-Natan, *On the Vassiliev invariants*, to appear in Topology.

- [2] D.Bar-Natan, *Vassiliev homotopy string link invariants*, preprint.
- [3] D.Bar-Natan, *Non-associative tangles*, preprint.
- [4] J.S.Birman, *New point of view in knot theory*, Bull.Amer.Soc.28No.2(1993), 253-287.
- [5] J.S.Birman and X.-S.Lin, *Knot polynomials and Vassiliev invariants*, Invent.Math.111(1993), 225-270.
- [6] M.Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, to appear in Adv.Sov.Math.
- [7] T.Q.T.Le and J.Murakami, *On Kontsevich's integral for the HOMFLY polynomial and relations of multiple  $\zeta$ -numbers*, preprint.
- [8] T.Q.T.Le and J.Murakami, *Kontsevich integral for Kauffman polynomial*, preprint.
- [9] T.Q.T.Le and J.Murakami, *Representation of tangles and Kontsevich's integral*, preprint.
- [10] T.Q.T.Le and J.Murakami, *The universal Vassiliev-Kontsevich integral for framed oriented links*, preprint.
- [11] X.-S.Lin, *Vertex model, quantum groups and Vassiliev's knot invariants*, Columbia Univ.,preprint 1991.
- [12] X.-S.Lin, *Finite type link invariants of 3-manifolds*, Columbia Univ.,preprint 1992.
- [13] H.Murakami, *Vassiliev invariants について*, 津田塾大学 数学・計算機科学研究所報, 2(1991),49-56.
- [14] H.Murakami, *Vassiliev invariants 概説*, 賢島研究集会報告集 1993, 1-8.
- [15] Y.Ohyama, *A new numerical invariant of knots induced from their regular diagrams*, Topology and Appl.37(1990), 249-255.
- [16] Y.Ohyama, *Vassiliev invariants and similarity of knots*, to appear in Proc.Amer.Math.Soc.
- [17] Y.Ohyama, *Vassiliev invariants and similarity of knots*, 賢島研究集会報告集 1993, 47-53.
- [18] Y.Ohyama and Y.Ogushi, *On the triviality index of knots*, Tokyo J.Math. 13(1990), 179-190.
- [19] T.Stanford, *Braid commutators and Vassiliev invariants*,Columbia Univ.,preprint 1992.

- [20] T.Stanford, *Finite type invariants of knots, links and graphs*, Columbia Univ., preprint 1992.
- [21] T.Stanford, *The functoriality of Vassiliev-type invariants of links, braids, and knotted graphs*, preprint 1994.
- [22] K.Taniyama, *On similarity of links*, Gakujutu Kenkyu (issued by the school of education in Waseda University)14(1992), 33-36.
- [23] V.A.Vassiliev, *Cohomology of knot space*, Theory of Singularities and its Applications, (ed. V.I.Arnold)(Adv.Sov.Math.,vol1)Amer.Math.Soc.,Providence, 1990, 9-21.
- [24] M.Yamamoto, *Knots in spacial embeddings of complete graph on four vertices*, Topology and Appl.36(1990), 291-298.

# VASSILIEV INVARIANTS, GRAPH COMPLEX AND DIFFERENTIAL FORMS ON THE SPACE OF KNOTS

TOSHITAKE KOHNO

河野 俊文 (東大数理)

## Introduction

The purpose of this note is to describe Vassiliev's knot invariants and differential forms on the space of knots from the viewpoint of de Rham homotopy theory.

In conformal field theory, the representations of the braid group appearing as the monodromy of the Knizhnik-Zamolodchikov differential equation play an important role (see [KZ], [TK], [Ko2] and [D]). These representations of the braid groups have been studied in relation with representations of quantum groups, and revealed a new relation between conformal field theory and topological invariants for knots and 3-manifolds (see [W], [RT] and [Ko3]). On the other hand, knot invariants had been studied by Vassiliev [V] as the zero dimensional cohomology of the space of all knots, and he defined the notion of invariants of finite order, which are now called the Vassiliev invariants. It was pointed out by Birman-Lin [BL] that the derivatives of the Jones polynomial, or more generally quantum group invariants, can be described by the Vassiliev invariants. One can show that the invariants derived from the monodromy of the Knizhnik-Zamolodchikov equation also admit a similar description.

One of the ways to express such monodromy representations is to use Chen's iterated integrals of logarithmic 1-forms. The expression for monodromy of braids was recently generalized by Kontsevich [K1] to the situation of knots in 3-dimensional space.

It has been known that Chen's iterated integrals provide information on the lower central series of the fundamental groups. Let us consider the Vassiliev invariants for pure braids. The de Rham homotopy theory suggests a relation between two filtrations, one obtained from lower central series and the other obtained from Vassiliev invariants. In the first part of this paper, we shall show that these two filtrations on the pure braid group actually coincide (**Theorem 1.2.25**).

Another approach for a description of the Vassiliev invariants has been pursued motivated by Chern-Simons perturbation theory (see [W], [AS], [B1] and [K2]). In the process of examining the asymptotic expansion of the Feynman integral of the Chern-Simons functional, it was discovered in [GMM] that the second coefficient of the Conway polynomial, which is a Vassiliev invariant of order 2, has an integral representation. A relation between Chern-Simons perturbation theory for 3-manifolds and graph homology was pointed out by Kontsevich [K2]. In the second part of this note, we are going to discuss graph complex for the space of knots. To

each graph we associate a differential form on the space of knots and we present an algebraic manipulation describing the differential in terms graphs.

## 1. Vassiliev invariants and de Rham homotopy theory

### 1.1. Review of Vassiliev invariants for knots

Let us recall briefly the notion of the Vassiliev invariants for knots. First, we consider the space of smooth maps

$$\mathcal{M} = \{f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3\}.$$

An element  $f \in \mathcal{M}$  is considered to be a knot if it is an embedding. We denote by  $\Sigma$  the subset of  $\mathcal{M}$  consisting of maps which are not embeddings. A knot type is clearly a connected component of the complementary space  $\mathcal{M} \setminus \Sigma$ .

A starting point of Vassiliev was to compute the cohomology of  $\mathcal{M} \setminus \Sigma$ . In particular, the zero dimensional cohomology corresponds to the knot invariants. In the study of the spectral sequence obtained from the stratification of the discriminant set  $\Sigma$ , Vassiliev reached, in a natural way, the notion of finite type invariants.

According to [BL], we shall say that a knot invariant  $v$  is a Vassiliev invariant of order  $k$  if the following condition is satisfied for any knot  $K$  and  $m > k$ .

$$\sum_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m v(K_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_m}) = 0, \quad (1.1.1)$$

where  $\epsilon_j = 1$  or  $-1$ ,  $j = 1, \dots, m$  and the symbol  $K_{\epsilon_1 \cdots \epsilon_m}$  stands for the knot obtained from a diagram of  $K$  by interchanging  $m$  crossings into positive ones or negative ones according as  $\epsilon_j = 1$  or  $-1$ .

Let us denote by  $V_k$  the vector space of order  $k$  Vassiliev invariants with values in  $\mathbb{C}$ . We have an increasing sequence

$$\mathbb{C} = V_0 = V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_k \subset \cdots$$

Let us extend  $v$  on diagrams with finitely many transverse double points recursively by

$$v(D_x K) = v(K_+) - v(K_-), \quad (1.1.2)$$

where  $D_x K$  stands for a diagram with a transverse double point at  $x$ . The symbols  $K_+$  and  $K_-$  represent diagrams obtained from  $D_x$  by replacing  $x$  with a positive crossing or a negative crossing respectively. If  $v$  is an invariant of order  $k$ , then it naturally defines a value on a diagram with  $k$  transverse double points. This does not depend on the other crossing points, and determines a value on a diagram with  $k$  chords as shown in Figure 1. Moreover, the obtained values satisfy the compatibility, so called 4-term relations and framing independence depicted in Figure 1.

Let us denote by  $A_k$  the vector space spanned by the diagrams with  $k$  chords modulo the above two types of relations, i.e., the 4-term relations and the framing independence. The above construction shows that we have an injective map

$$V_k/V_{k-1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{C}}(A_k, \mathbb{C}). \quad (1.1.3)$$

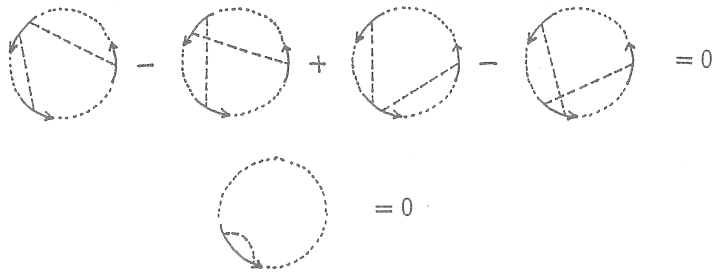


FIGURE 1 4-TERM RELATIONS AND FRAMING INDEPENDENCE

It was shown by Kontsevich that this is actually an isomorphism (see [K1] and [B2]). The construction of the inverse to the map 1.1.3 involves a generalization of Chen's iterated integrals discussed below.

## 1.2. Bar complex

We are going to describe de Rham homotopical aspects of the Vassiliev invariants. Let us first recall the notion of Chen's iterated integrals and the bar complex (see [C] for details). Let  $X$  be a smooth manifold. We denote by

$$\pi_i : X^q = X \times \cdots \times X \rightarrow X$$

the projection on the  $i$ -th factor. For differential forms  $\omega_1, \dots, \omega_q$  on  $X$ , we put

$$\omega_1 \times \cdots \times \omega_q = \pi_1^* \omega_1 \wedge \cdots \wedge \pi_q^* \omega_q.$$

We set

$$B^n = \bigoplus_{p-q=n} C^{p,-q} \tag{1.2.1}$$

where  $C^{p,-q}$  is the vector space spanned by the symbols

$$[\omega_1 | \cdots | \omega_q] = \omega_1 \times \cdots \times \omega_q$$

with differential forms of positive degrees  $\omega_1, \dots, \omega_q$  on  $X$  such that

$$\deg \omega_1 + \cdots + \deg \omega_q = p.$$

We denote by  $\Omega_x X$  the loop space, i.e., the space of smooth maps  $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$  such that  $\gamma(0) = \gamma(1) = x$ . Let  $\Delta_q$  denote the standard  $q$ -simplex defined by

$$\Delta_q = \{(t_1, \dots, t_q) ; 0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_q \leq 1\}.$$

We have a natural map

$$\phi : \Omega_x X \times \Delta_q \rightarrow X^q = X \times \cdots \times X \tag{1.2.2}$$

defined by

$$\phi(\gamma; t_1, \dots, t_q) = (\gamma(t_1), \dots, \gamma(t_q)).$$

Chen's iterated integral of the differential forms  $\omega_1, \dots, \omega_q$  along the path  $\gamma$  is by definition

$$\int_{\Delta_q} \phi^*(\omega_1 \times \dots \times \omega_q) \quad (1.2.3)$$

which is denoted by

$$\int_{\gamma} \omega_1 \cdots \omega_q. \quad (1.2.4)$$

The integral (1.2.3) is considered to be a differential form of degree  $p - q$  on the loop space  $\Omega_x X$ . Let  $\mathcal{A}^n(\Omega_x X)$  denote the space of differential  $n$  forms on  $\Omega_x X$ . The above construction defines a map

$$\mu : B^\bullet \rightarrow \mathcal{A}^\bullet(\Omega_x X). \quad (1.2.5)$$

By introducing a differential  $d : B^n \rightarrow B^{n+1}$  in the following way, we can show that the above  $\mu$  determines a morphism of complexes. Let us introduce the following two differentials  $d_1$  and  $d_2$ .

$$\begin{aligned} d_1[\omega_1 | \cdots | \omega_q] &= \sum_i (-1)^i [J\omega_1 | \cdots | J\omega_{i-1} | d\omega | \omega_{i+1} | \cdots | \omega_q] \\ d_2[\omega_1 | \cdots | \omega_q] &= \sum_i (-1)^{i-1} [J\omega_1 | \cdots | J\omega_{i-1} | J\omega_i \wedge \omega_{i+1} | \omega_{i+2} | \cdots | \omega_q] \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

where  $J\omega$  stands for  $(-1)^{\deg \omega} \omega$ . These two differentials make  $\oplus_{p,q} C^{p,-q}$  into a double complex. It turns out that the differential on the de Rham complex for the loop space corresponds to the total differential  $d_1 + d_2$ . The associated total complex  $(B^\bullet, d_1 + d_2)$  is called the bar complex.

Let us summarize basic results on the bar complex obtained by Chen (see [C]). Let us suppose that the manifold  $X$  is simply connected. Then, the bar complex computes the cohomology of the loop space  $\Omega_x X$ . Namely, one has an isomorphism

$$H^j(\Omega_x X; \mathbb{C}) \cong H^j(B^\bullet) \quad (1.2.7)$$

for any  $j$ . In the case  $X$  is non-simply connected, the 0-dimensional cohomology of the bar complex extracts information on the fundamental group of  $X$  in the following sense. Let  $\mathbb{C}[\pi_1(X, x)]$  denote the group ring over  $\mathbb{C}$  of the fundamental group and let  $I$  denote its augmentation ideal. We have a pairing by integration

$$H^0(B^\bullet) \otimes \mathbb{C}[\pi_1(X, x)] \rightarrow \mathbb{C}. \quad (1.2.8)$$

We have an increasing filtration on the bar complex defined by

$$F_k B^\bullet = \oplus_{q \leq k} C^{p,-q}, \quad (1.2.9)$$

which induces an increasing filtration on the cohomology  $F_k H^0(B^\bullet)$ ,  $k \geq 0$ . The above pairing gives us an isomorphism

$$F_k H^0(B^\bullet) \cong \text{Hom}(\mathbb{C}[\pi_1(X, x)]/I^{k+1}, \mathbb{C}). \quad (1.2.10)$$



By taking the projective limit, we obtain an isomorphism

$$H^0(B^\bullet) \cong \text{Hom}(\mathbb{C}[\widehat{\pi_1(X, x)}], \mathbb{C}), \quad (1.2.11)$$

where the symbol  $\mathbb{C}[\widehat{\pi_1(X, x)}]$  stands for the completion of the group ring with respect to the powers of the augmentation ideal (see also [H]).

Let us apply the above construction to the configuration space

$$\text{Conf}_n(\mathbb{C}) = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n ; z_i \neq z_j \text{ if } i \neq j\}. \quad (1.2.12)$$

We put

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} d \log(z_i - z_j), \quad i \neq j. \quad (1.2.13)$$

It is known by Arnold [A] that the cohomology ring  $H^*(\text{Conf}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$  is an exterior algebra generated by  $\omega_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , with the quadratic relations

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{jk} + \omega_{jk} \wedge \omega_{ki} + \omega_{ki} \wedge \omega_{ij} = 0, \quad i < j < k. \quad (1.2.14)$$

We denote by  $\Omega$  the above cohomology ring. Let us recall that the fundamental group of  $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$  is the pure braid group  $P_n$ . We denote by  $\mathbb{C}\langle X_{ij} \rangle$  the ring of non-commutative formal power series with indeterminates  $X_{ij}$ ,  $1 \leq i < j \leq n$ , and  $\mathcal{I}$  the ideal generated by

$$\begin{aligned} & [X_{ij}, X_{ik} + X_{kj}] \text{ for distinct } i, j, k \\ & [X_{ij}, X_{kl}] \text{ for distinct } i, j, k, l. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Here we put  $X_{ij} = X_{ji}$ .

By means of the de Rham homotopy theory on the configuration space of  $n$  points on  $\mathbb{C}$ , it is known that we have an isomorphism of complete Hopf algebras

$$\widehat{\mathbb{C}[P_n]} \cong \mathbb{C}\langle X_{ij} \rangle / \mathcal{I}. \quad (1.2.16)$$

We refer the reader to [Ko1] and [Ko2] for a more detailed description.

Let  $B^\bullet \Omega$  denote the bar complex on the algebra  $\Omega$ . Namely, we define the complex as in (1.2.1) by taking elements of positive degrees  $\omega_1, \dots, \omega_q$  from the algebra  $\Omega$ . The following Proposition asserts that it is enough to consider the bar complex on the algebra  $\Omega$  for our purpose.

**Proposition 1.2.17.** *We have an isomorphism*

$$F_k H^0(B^\bullet \Omega) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}[P_n] / I^{k+1}, \mathbb{C}),$$

which induces an isomorphism

$$H^0(B^\bullet \Omega) \cong \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\widehat{\mathbb{C}[P_n]}, \mathbb{C}).$$

Let us recall the notion of the holonomy Lie algebra. Let

$$\cup : H^1(X; \mathbb{C}) \otimes H^1(X; \mathbb{C}) \rightarrow H^2(X; \mathbb{C})$$

be the cup product homomorphism. We denote by  $Lib(H_1(X; \mathbb{C}))$  the free Lie algebra generated by  $H_1$  and let  $\mathcal{J}$  be the ideal generated by the image of the dual of the cup product homomorphism

$$\eta : H_2 \rightarrow H_1 \wedge H_1.$$

We define the holonomy Lie algebra for  $X$  by

$$\mathcal{G}_X = Lib(H_1(X; \mathbb{C}))/\mathcal{J}. \quad (1.2.18)$$

The primitive part of the complete Hopf algebra  $\mathbb{C}\langle X_{ij} \rangle/\mathcal{I}$  is identified with the completed holonomy Lie algebra for  $Conf_n(\mathbb{C})$ , which is isomorphic to the nilpotent completion of the pure braid group  $P_n$  over  $\mathbb{C}$ .

We have a homomorphism

$$\theta : P_n \rightarrow \mathbb{C}\langle X_{ij} \rangle/\mathcal{I} \quad (1.2.19)$$

given by the iterated integral

$$\theta(\gamma) = 1 + \int_{\gamma} \omega + \int_{\gamma} \omega \omega + \cdots + \int_{\gamma} \omega \cdots \omega + \cdots$$

with the connection

$$\omega = \sum_{i < j} X_{ij} \omega_{ij}.$$

This is a universal expression for the monodromy representation of the Knizhnik-Zamolodchikov differential equation.

Let us notice that the condition

$$d \left( \int_{\gamma} \sum a_{i_1 j_1 \dots i_n j_n} \omega_{i_1 j_1} \cdots \omega_{i_n j_n} \right) = 0 \quad (1.2.20)$$

can be expressed as a linear relation among the coefficients  $a_{i_1 j_1 \dots i_n j_n} \in \mathbb{C}$ . This relation is nothing but the 4-term relation and is shown diagrammatically as in Figure 2.

The diagram shows four vertical strands. The first term is a crossing between strands 1 and 2. The second term is a crossing between strands 2 and 3. The third term is a crossing between strands 1 and 3. The fourth term is a crossing between strands 1 and 2. The terms are combined with signs: +, -, +, -.

FIGURE 2 4 TERM RELATION FOR PURE BRAIDS

### 1.3. Vassiliev invariants and lower central series

Let us denote by  $\Gamma_k P_n$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , the lower central series of  $P_n$  defined inductively by

$$\Gamma_0 P_n = P_n, \quad \Gamma_{k+1} P_n = [\Gamma_k P_n, P_n]. \quad (1.2.21)$$

We say that  $v : P_n \rightarrow \mathbf{C}$  is a Vassiliev invariant of order  $k$  if the condition

$$\sum_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m} \epsilon_1 \cdots \epsilon_m v(\gamma_{\epsilon_1, \dots, \epsilon_m}) = 0 \quad (1.2.22)$$

holds for any  $m > k$  and  $\gamma \in P_n$ , where the notation is similar to the case of the Vassiliev invariants for knots. Here we consider only the crossings of distinct strands. We denote by  $V_k^n$  the vector space of Vassiliev invariants of order  $k$  for pure braids with  $n$  strands. We put  $V^n = \cup_{k \geq 0} V_k^n$ , which is the space of Vassiliev invariants for pure braids with  $n$  strands.

Let  $v$  be a Vassiliev invariant for a pure braid with  $n$  strands of order  $k$ . As in the case of knots, this determines a value on a diagram with  $k$  chords by considering singular braids with double points. We have the 4-term relations as shown in Figure 2. Let us denote by  $A_k^n$  the vector space spanned by the above diagrams with  $k$  chords modulo the 4-term relations. Let us notice that  $A^n = \prod_{k=0}^{\infty} A_k^n$  is equipped with a structure of a graded algebra. This algebra is generated by diagrams,  $\Omega_{ij}$ , with one chord connecting  $i$ -th and  $j$ -th strands for  $1 \leq i < j \leq n$ . Here the multiplication of the algebra is given by the composition of diagrams and the degree of  $\Omega_{ij}$  is set to be  $-1$ . The above construction gives an injective homomorphism

$$V_k^n / V_{k-1}^n \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_k^n, \mathbf{C}). \quad (1.2.23)$$

As in the case of the Vassiliev invariants for knots, we have the following Proposition.

**Proposition 1.2.24.** *We have an isomorphism*

$$V_k^n / V_{k-1}^n \cong \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A_k^n, \mathbf{C}).$$

It was noticed by Stanford [S] that if  $\gamma \in \Gamma_k P_n$ , then any order  $k$  Vassiliev invariant for  $\gamma - 1$  is equal to zero. Combining the above construction, we have the converse to this statement.

**Theorem 1.2.25.** *For  $\gamma \in P_n$ ,  $\gamma$  is an element of the  $k$ -th stage of the lower central series  $\Gamma_k P_n$  if and only if any order  $k$  Vassiliev invariant for  $\gamma - 1$  vanishes.*

The following is an immediate Corollary to our argument.

**Corollary 1.2.26.** *We have a canonical isomorphism*

$$V_k^n \cong F_k H^0(B^\circ(\Omega)).$$

By taking the projective limit, we have an identification of the space of Vassiliev invariants and the 0-dimensional cohomology of the bar complex

$$V^n \cong H^0(B^\circ(\Omega)).$$

It is known that the pure braid group is residually nilpotent, namely, the intersection of the lower central series for the pure braid group reduces to  $\{e\}$ . Combining with the above Theorem, we obtain the following result.

**Corollary 1.2.27.** *The Vassiliev invariants for pure braids are strong enough to distinguish any pure braid. Namely, for  $\gamma_1, \gamma_2 \in P_n$ , we have  $\gamma_1 = \gamma_2$  if and only if  $v(\gamma_1) = v(\gamma_2)$  holds for any Vassiliev invariant  $v$ .*

## 2. Graph complex and differential forms on the space of knots

### 2.1. Graphs and associated differential forms

For  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  we put

$$\omega(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \frac{x_1 dx_2 \wedge dx_3 + x_2 dx_3 \wedge dx_1 + x_3 dx_1 \wedge dx_2}{\|\mathbf{x}\|^3}, \quad (2.1.1)$$

which is the volume form for  $S^2$  normalized so that  $\int_{S^2} \omega(\mathbf{x}) = 1$ . Let us consider the configuration space

$$\text{Conf}_n(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) = \{(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n); \mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}, \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j \text{ if } i \neq j\}. \quad (2.1.2)$$

The differential form  $\omega(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n$  is considered to be a 2-form on  $\text{Conf}_n(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ .

In the following, we consider a finite graph  $\Gamma$  whose boundary consists of finitely many points on a circle, satisfying the following conditions (see Figure 3 below):

(1) For each vertex which is not on the boundary, there are at least 3 edges meeting at the vertex.

(2) There is no loop in the graph  $\Gamma$ , i.e., there is no edge adjoining the same vertex.

We suppose that each edge of the graph is directed. We set

$$\partial\Gamma = \{p_1, \dots, p_k\}.$$

The circle is parametrized as  $e^{2\pi it}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ . Here we fix a base point  $O$  on the circle corresponding to  $t = 0$ , and  $p_k$  has coordinate  $t_k$ , so that  $0 < t_1 < \dots < t_k < 1$ . These vertices are called external vertices. We fix an ordering for the other vertices called internal vertices and we denote them by  $\{p_{k+1}, \dots, p_{k+l}\}$ .

We denote by  $m$  the number of edges of the graph  $\Gamma$ . We define the degree of the graph  $\Gamma$  by

$$\deg \Gamma = -k - 3l + 2m, \quad (2.1.3)$$

which may also be expressed as

$$\sum_{i \geq 2} (i-1)k_i + \sum_{j \geq 4} (j-3)l_j$$

where  $k_i$  and  $l_j$  denote the number of the external vertices with valency  $i$  and the number of internal vertices with valency  $j$  respectively.

To each graph  $\Gamma$  satisfying the above conditions, we associate a differential form on  $Conf_{k+l}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$  in the following way. First, for each directed edge  $[p_i p_j]$  we set

$$\omega_{[p_i p_j]} = \omega(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i).$$

Using this, we define  $\omega_\Gamma$  by

$$\omega_\Gamma = \bigwedge_{[p_i p_j] \in \text{edge}(\Gamma)} \omega_{[p_i p_j]}. \quad (2.1.4)$$

Here  $\text{edge}(\Gamma)$  stands for the set of edges of the graph  $\Gamma$ .

We define  $(\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0$  to be the space of embeddings  $f : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$  such that  $f(O) = 0$ . We define  $X_{k,l}$  by

$$\begin{aligned} X_{k,l} \\ = \{(f; \mathbf{t}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l) \in (\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0 \times \Delta_k \times Conf_l \mathbb{R}^3; \mathbf{x}_j \notin f(S^1), 1 \leq j \leq l\}. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

We have a map

$$\phi : X_{k,l} \rightarrow Conf_{k+l}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \quad (2.1.6)$$

defined by

$$\phi(f; \mathbf{t}; \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l) = (f(t_1), \dots, f(t_k); \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_l).$$

We denote by  $\pi : X_{k,l} \rightarrow (\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0$  the natural projection. The fiber  $\pi^{-1}(f)$  is equal to  $\Delta_k \times Conf_l(\mathbb{R}^3 \setminus f(S^1))$ .

For a graph  $\Gamma$  of degree  $n$  in the above sense, let us consider the differential form  $\phi^* \omega_\Gamma$ . Then, the integration

$$\int_{\pi^{-1}(f)} \phi^* \omega_\Gamma \quad (2.1.7)$$

defines a differential form of degree  $n$  on  $(\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0$ .

## 2.2. Graph complex

We denote by  $\mathcal{D}^n$  the vector space over  $\mathbb{R}$  spanned formally by the graphs of degree  $n$  in the above sense. Here the graph obtained from  $\Gamma$  by making the direction of one edge opposite is identified with  $-\Gamma$ . Let  $W$  be the subspace of  $\mathcal{D}^n$  spanned by graphs with double edges, i.e., graphs containing two distinct vertices, so that there are at least two edges adjoining these two vertices. We define  $\overline{\mathcal{D}}^n$  to be the quotient vector space  $\mathcal{D}^n/W$ .

For  $\Gamma \in \overline{\mathcal{D}}^n$  we define  $\delta\Gamma$  as a formal sum of graphs obtained by contracting edges in the following manner. For each directed edge  $e$  we define a new graph  $\Gamma/e$  obtained from  $\Gamma$  by contracting the edge  $e$ . We define the direction of the edges

of  $\Gamma/e$  as the one induced from  $\Gamma$ . In a similar way, we define  $\Gamma/\overline{p_j p_{j+1}}$ , to be the graph obtained from  $\Gamma$  by contracting the arc  $\overline{p_j p_{j+1}}$  on the circle, with the direction for edges induced from  $\Gamma$ . Let us notice that in the above contracting procedure the resulting graph might have a loop. We define  $\delta\Gamma$  by a formal sum

$$\delta\Gamma = \sum_j (-1)^j \Gamma/\overline{p_j p_{j+1}} + \sum_{e \in \text{edge}(\Gamma)} \epsilon(e) \Gamma/e. \quad (2.2.1)$$

The symbol  $\epsilon(e)$  is 1 or  $-1$  determined in the following convention.

For  $1 \leq i < j \leq k+l$ , let us consider the edge adjoining the vertices  $p_i$  and  $p_j$ . We put

$$\epsilon([p_i, p_j]) = (-1)^{j-1}, \quad \epsilon([p_j, p_i]) = (-1)^j. \quad (2.2.2)$$

We define  $\mathcal{C}^n$  to be the subspace of  $\overline{\mathcal{D}}^n$  consisting of  $x \in \overline{\mathcal{D}}^n$  such that  $\delta x$  is expressed as a linear combination of graphs without loops. Thus,  $\delta$  is considered to be a map from  $\mathcal{C}^n \rightarrow \overline{\mathcal{D}}^{n+1}$ .

*example:* We indicate below simple examples of graphs and their derivatives. The graph  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  depicted in Figure 3 are both of degree 0 and their derivatives  $\delta\Gamma_1$  and  $\delta\Gamma_2$  are shown in Figure 3. Consequently, we have

$$\delta(\Gamma_1 + \Gamma_2) = 0. \quad (2.2.3)$$

It follows from Theorem 2.2.5 below that the integration of  $\omega_{\Gamma_1} + \omega_{\Gamma_2}$  is locally constant on the space on knots and determines a knot invariant. Let us recall that  $\omega_{\Gamma_1} + \omega_{\Gamma_2} - \frac{1}{24}$  defines, as a knot invariant, nothing but the second coefficient of the Conway polynomial (see [GMM] and [K1]).

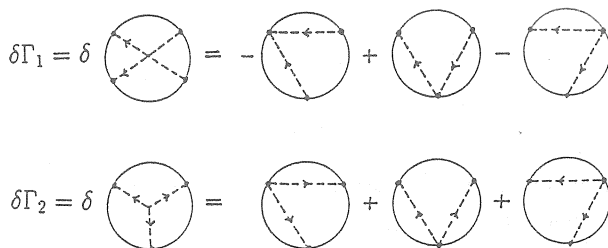


FIGURE 3 EXAMPLES OF GRAPHS AND THEIR DERIVATIVES

We denote by  $\mathcal{A}^n((\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0)$  the space of differential  $n$  forms on  $(\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0$ . From the construction of the previous paragraph, we have a map

$$\mu^n : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{A}^n((\mathcal{M} \setminus \Sigma)_0) \quad (2.2.4)$$

by defining  $\mu^n(\Gamma)$  to be the integration of  $\phi^* \omega_\Gamma$  as in (2.1.7) for a graph  $\Gamma$  of degree  $n$ .

**Theorem 2.2.5.** *We have*

$$d\mu^n(\Gamma) = \mu^{n+1}(\delta\Gamma).$$

## REFERENCES

- [A] V. I. Arnold, *The cohomology ring of the colored braid group*, Mat. Zametki **5** (1969), 227–231.
- [AS] S. Axelrod and I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory*, Proc. XXth DGM Conference (S. Catto and A. Rocha eds) (1992), 3–45.
- [B1] D. Bar-Natan, *Perturbative Chern-Simons theory*, preprint.
- [B2] D. Bar-Natan, *On Vassiliev knot invariants*, preprint, Harvard University.
- [BL] J. S. Birman and X.-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants*, Invent. Math. **111** (1993), 225–270.
- [C] K. T. Chen, *Iterated path integrals*, Bull. Amer. Math. Soc. **83** (1977), 831–879.
- [D] V. G. Drinfel'd, *Quasi-Hopf algebras*, Leningrad Math. J. **1** (1990), 1419–1457.
- [GMM] E. Guadagnini, M. Martellini and M. Mintchev, *Wilson lines in Chern-Simons theory and link invariants*, Nucl. Phys. **B330** (1990), 575–607.
- [H] R. M. Hain, *The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group*, Proc. Symp. Pure Math. **46** (1987), 247–282.
- [KZ] V. G. Knizhnik and A. B. Zamolodchikov, *Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions*, Nucl. Phys. **B247**, 83–103.
- [Ko1] T. Kohno, *Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures*, Invent. Math. **82** (1985), 57–75.
- [Ko2] T. Kohno, *Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations*, Ann. Inst. Fourier **37** (1987), 139–160.
- [Ko3] T. Kohno, *Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I*, Topology **31** (1992), 203–230.
- [Ko4] T. Kohno, *Graph complex and differential forms on the space of knots*, in preparation.
- [K1] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants*, to appear in Advances in Soviet Mathematics.
- [K2] M. Kontsevich, *Feynman diagrams and low-dimensional topology*, preprint.
- [RT] N. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups*, Invent. Math. **103** (1991), 547–597.
- [S] T. Stanford, *Braid commutators and Vassiliev invariants*, preprint 1993, Columbia University.
- [TK] A. Tsuchiya and Y. Kanie, *Vertex operators in conformal field theory on  $P^1$  and monodromy representations of braid groups*, Advanced Studies in Pure Math. **16** (1988), 297–372.
- [V] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces*, Theory of singularities and its applications, Amer. Math. Soc. (1992).
- [W] E. Witten, *Quantum field theory and the Jones polynomial*, Commun. Math. Phys. **121** (1989), 351–399.

DEPARTMENT OF MATHEMATICAL SCIENCES, UNIVERSITY OF TOKYO, KOMABA, TOKYO 153,  
JAPAN, E-MAIL:T-KOHNO@TANSEI.CC.U-TOKYO.AC.JP

# An integral lift of the Rochlin invariant and gauge theory

太田 啓史

東京大学 教養学部 数学教室

## §0 口上

3次元多様体の幾何と4次元多様体の幾何との関わりあいを見てみたい。3次元多様体において基本群は基本的かつ本質的な不変量であり、4次元多様体においては交叉形式が基本的かつ本質的な不変量であろう。例えば、境界付4次元多様体を考えるとその交叉形式と境界の3次元多様体の基本群が深く関わっていることはいろいろと観察されている。本講演の視点も基本群と交叉形式というこの枠組のなかにある。3次元多様体の基本群を用いて得られる Casson 不変量は4次元の交叉理論からどのように捉えることができるか、ということを考えてみたい。

## §1 Rochlin 不変量と Casson 不変量

### 1.1) Rochlin 不変量

まず、3次元多様体の古典的な不変量である Rochlin 不変量から。 $M$  を有向閉3次元多様体とする。 $M$  の接束は自明であるから、 $M$  は必ずスピン構造を持つ。それを  $\alpha$  と書く。3次元スピノボルディズム群は自明であることから、 $(M, \alpha)$  に対し、スピン4次元多様体  $(W, \tilde{\alpha})$  で  $\partial W = M$  かつ  $\tilde{\alpha}|_{\partial W} = \alpha$  なるものが存在する。このとき

$$\mu(M, \alpha) \equiv -\frac{1}{8} \text{signature}(W) \pmod{2}$$

と定義すると、これは Rochlin の定理: 滑らかなスピン閉4次元多様体の指数は16で割り切れる、により、 $(W, \tilde{\alpha})$  のとり方によらずに決まる。これを  $(M, \alpha)$  の Rochlin 不変量という。特に、 $M$  が  $H_1(M; \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}) = 0$  つまり、 $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ホモロジー3球面の時、 $M$  上のスピン構造は唯一つしかないので Rochlin 不変量は  $M$  の位相不変量となる。更に  $H_1(M; \mathbf{Z}) = 0$  つまり、 $\mathbf{Z}$  ホモロジー3球面の時、Poincaré-Lefschetz の双対定理により  $W$  の交叉形式は  $\mathbf{Z}$  上ユニモジュラーになる。一方、スピン4多様体の交叉形式は偶タイプで、 $\mathbf{Z}$  上ユニモジュラーな偶タイプの2次形式の指数は8で割り切れるから、 $\mu(M)$  は0または1に値をとる。以下、 $M$  は  $\mathbf{Z}$  ホモロジー3球面とする。



Rochlin 不変量は 4 次元のトポロジー、特に交叉形式にかかわる不変量であることをここでは強調したい。Rochlin 不変量はゲージ理論の最も古典的な雛型と思える。実際、ゲージ理論は Atiyah-Singer の指数定理の無限次元非線型版と思うと、Rochlin の定理は Atiyah-Singer の指数定理を認めると、4 行で証明できる。

### 1.2) Casson 不変量

ここでは Casson 不変量の荒っぽい定義だけをいうにとどめる。 $\mathbf{Z}$ -ホモロジー 3 球面  $M$  に対し、

$$\lambda(M) = \frac{1}{2} \# \text{Hom} (\pi_1 M, SU(2))^{\text{irr}} / \text{conjugate}$$

と定義する。 $\#$  は向きもこめた個数を表す。ここで  $\pi_1 M$  の  $SU(2)$  表現は既約なものだけを考えている。 $(\pi_1 M$  が perfect であることから、可約な表現は自明表現しかないことに注意。) 一般にはこの表現のなす空間は 0 次元とは限らず次元を持った variety であるがそのことについては触れない。 $\lambda(M)$  を  $M$  の Casson 不変量という。値は整数である。

ここで強調したいことは  $\lambda(M)$  は  $M$  の基本群の情報を使って定義されていることで 4 次元とは何等関係がないことである。

### 1.3) 関係

ところが Casson は次を示した。[1]

定理. (Casson)  $\lambda(M) \equiv \mu(M) \pmod{2}$ .

これは Casson 不変量と Rochlin 不変量の二つの surgery formula を見比べることにより証明される。これはなんとも不思議な式である。左辺は 3 次元多様体の基本群から決まる量で、右辺は 4 次元の交叉形式から決まる量である。この式の幾何学的な背景を明らかにしたい。そこで次の問題を考える。

問題 A  $\mathbf{Z}$ -ホモロジー 3 球面  $M$  が与えられたとき、それからある標準的な方法で  $M$  をバウンドする 4 次元スピンド様体  $W$  を構成し、その指数が  $M$  の位相不変量になるようなものは存在するか?

問題 B もし問題 A ができたとしたとき、 $-\frac{1}{8} \text{signature}(W)$  は Casson 不変量に一致するか?

本講演では、問題 A に関して述べる。アイデアは  $\mathbf{Z}$ -ホモロジー 3 球面  $M$  が与えられたとき、 $M \times S^1$  上の主  $SU(2)$  束の反自己双対接続のモジュ

ライ空間を考え、そこから自然に  $M$  をバウンドするスピン 4 次元多様体をモジュライ空間のなかで実現しようというものである。このときその指数は  $M$  の位相不変量であることを証明する。つまり、ある自然な方法でモジュライ空間のなかに構成された  $M$  をバウンドするスピン 4 次元多様体の指数は mod 2 しなくてもそれ自体で既に  $M$  の不変量を与える、ということである。

問題 A、B に関して次のようなことが知られている。 $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$  を Seifert fibered ホモロジー 3 球面とする。このとき、Milnor ファイバーと呼ばれる 4 次元スピン多様体  $V(a_1, \dots, a_n)$  があって、それは  $\Sigma(a_1, \dots, a_n)$  をバウンドしている。このとき、

定理. (Fintushel-Stern, 福原-松本-坂本) [3], [4] 次が成り立つ。

$$\lambda(\Sigma(a_1, \dots, a_n)) = -\frac{1}{8} \text{signature}(V(a_1, \dots, a_n)).$$

この定理は両辺の  $n$  に関する漸化式を見比べて示すというこれまた不思議な定理である。また、左辺は一応  $SU(2)$  がかかわっているが、Milnor ファイバーは一見  $SU(2)$  とは無関係のように思える。例えば、Casson 不変量は別の群に対しても色々とはげられるが、その Casson 不変量に対して、上の定理における Milnor ファイバーに対応するものは何か? ということを考えてみてもよくわからない。

我々はここでは  $SU(2)$  束上のモジュライ空間を用いて、4 次元多様体を実現しようとするのである。

## §2 Background

$X$  を滑らかな閉 4 次元多様体とし、 $P \rightarrow X$  を  $X$  上の主  $SU(2)$  束とする。  $\pi_1 SU(2) = \pi_2 SU(2) = 0$  より、 $P$  はトポロジカルには第二 Chern 類  $c_2(P) = k$  で分類される。  $\mathfrak{g} = P \times_{Ad} \mathfrak{su}(2)$  を、リー環  $\mathfrak{su}(2)$  をファイバーとする  $P$  の同伴束とする。  $SU(2)$  のファイバー  $\mathfrak{su}(2)$  への作用は随伴表現によるものとする。  $P$  上の接続全体を  $\mathcal{A}$  とし、ゲージ変換全体を  $\mathcal{G}$  と書く。  $\mathcal{A}$  は  $\mathfrak{g}$  係数の 1 形式  $\Omega^1(\mathfrak{g})$  をモデルとするアフィン空間で、以下  $\mathcal{A}$  を  $\Omega^1(\mathfrak{g})$  と同一視する。(厳密にはこれらの適当なソボレフノルムによる完備化を考えるが、ここでは立ち入らない。)  $\mathcal{G}$  は  $\mathcal{A}$  に

$$g(A) = gAg^{-1} - (dg)g^{-1} \quad g \in \mathcal{G}, A \in \mathcal{A}$$

により作用する。この作用は自由ではない。この作用による商空間を  $\mathcal{B} = \mathcal{A}/\mathcal{G}$  とする。  $\mathcal{A}^* \subset \mathcal{A}$  を既約な接続全体とし、同様に  $\mathcal{B}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}$  とおく。接続  $A$  が既約とは  $A$  における  $\mathcal{G}$  の作用に関する固定化群が  $SU(2)$  の中心 (この場合は  $\pm 1$ ) に一致するときであり、そうでない時  $A$  は可約と言う。

更に、 $\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}$  をゲージ変換で、ある基点上のファイバーを動かさないものの全体とする。 $\mathcal{G}_0$  の  $\mathcal{A}$  への作用は自由である。 $\tilde{\mathcal{B}} = \mathcal{A}/\mathcal{G}_0, \tilde{\mathcal{B}}^* = \mathcal{A}^*/\mathcal{G}_0$  とおく。以上の空間は然るべき完備化の後、無限次元バナッハ多様体となる。

さて、 $X$  上にリーマン計量を一つとり、それにより定まる Hodge の \* 作用素を用いて、

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \mathcal{M}_k = \{A \in \mathcal{A} \mid *F_A = -F_A\}/\mathcal{G} \\ \mathcal{M}^* &= \mathcal{M}_k^* = \{A \in \mathcal{A}^* \mid *F_A = -F_A\}/\mathcal{G} \end{aligned}$$

とおく。ここで  $F_A$  は  $A$  の曲率 2 形式である。 $\mathcal{G}_0$  で割ることにより  $\tilde{\mathcal{M}}$  や  $\tilde{\mathcal{M}}^*$  も定義される。 $\mathcal{M}$  を反自己双対接続のモジュライ空間とよぶ。Atiyah-Hitchin-Singer により  $\mathcal{M}$  の仮想次元が

$$\dim \mathcal{M}_k = 8c_2(P) - 3(1 - b_1 + b_2^+)$$

で計算される。 $b_2^+$  は  $X$  の交叉形式の正固有値の個数を表す。

接続のゲージ同値類の空間のコホモロジー類が次のようにして構成できる。まず  $\tilde{\mathcal{B}} \times X$  上に普遍束を構成する。 $P \rightarrow X$  を  $\mathcal{A} \times X \rightarrow X$  により  $\mathcal{A} \times X$  上に引き戻す。これは  $\mathcal{A} \times P \rightarrow \mathcal{A} \times X$  に他ならない。 $\mathcal{G}_0$  は  $\mathcal{A} \times P$  と  $\mathcal{A} \times X$  に自由に作用する。(  $X$  へは自明作用。) よって  $\mathcal{G}_0$  で割ることにより、 $SU(2)$  束  $\tilde{P} = \mathcal{A} \times_{\mathcal{G}_0} P$  が  $\tilde{\mathcal{B}} \times X$  上に定義される。しかし、 $\mathcal{G}$  の  $\mathcal{A}$  への作用は中心  $\pm 1$  があるため、自由ではなく、 $\mathcal{B} \times X$  上には普遍  $SU(2)$  束は一般には定義されない。今、既約接続だけを考える。 $\pm 1$  は  $\mathcal{A}^* \times X$  には自明に作用するが、 $\mathcal{A}^* \times P$  には非自明に作用している。よって上と同じ手続きで得られる束は  $SU(2)$  束としては定まらず、 $SU(2)/\pm 1 = SO(3)$  束として得られる。

$$\mathbb{P}^{\text{ad}} \longrightarrow \mathcal{B}^* \times X.$$

これらの普遍束を用いて  $\tilde{\mathcal{B}}, \mathcal{B}^*$  のコホモロジー類を構成しよう。写像  $\tilde{\mu}$  を

$$(\#) \quad \tilde{\mu} : H_i(X; \mathbb{Z}) \ni \alpha \longmapsto c_2(\tilde{P})/\alpha \in H^{4-i}(\tilde{\mathcal{B}}; \mathbb{Z})$$

により定義する。ここで  $/$  はスラント積を表す。同様に  $SO(3)$  束  $\mathbb{P}^{\text{ad}}$  の第一 Pontryagin 類を用いて、

$$\mu : H_i(X; \mathbb{Q}) \ni \alpha \longmapsto -\frac{1}{4}p_1(\mathbb{P}^{\text{ad}})/\alpha \in H^{4-i}(\mathcal{B}^*; \mathbb{Q})$$

と定義する。このとき純代数的トポロジーの計算により次が示される。

命題. 次は環として同型。

$$H^*(\tilde{\mathcal{B}}; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[\tilde{\mu}(\alpha_1), \dots, \tilde{\mu}(\alpha_n)] \otimes \bigwedge (\tilde{\mu}(\gamma_1), \dots, \tilde{\mu}(\gamma_m), \tilde{\mu}(\beta_1), \dots, \tilde{\mu}(\beta_m))$$

但し、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in H_2(X; \mathbf{Q})$ ,  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in H_1(X; \mathbf{Q})$ ,  $\beta_1, \dots, \beta_m \in H_3(X; \mathbf{Q})$  はそれぞれの自由基底。

REMARK:  $\mathbf{Z}$  上で、torsion を計算することは一般には非常に難しい。例えば  $X = S^4$  の場合でさえ、あらゆる torsion が出てくる。実際、 $p$  を任意の素数とするととき、

$$\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \subset H^{2p-2}(\tilde{B}; \mathbf{Z})$$

であり、しかも  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torsion を持つコホモロジー群の最小の次数は  $2p-2$  であることがわかる。これは  $S^3 = SU(2)$  のホモトピー群は次数  $2p$  で  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ -torsion を持つこと及び Serre の  $C$ 理論を使うことにより証明できる。

### §3 $M \times S^1$ 上のゲージ理論

#### 3.1) モジュライ空間の構成

以下、 $M$  は  $\mathbf{Z}$ -ホモロジー 3 球面とする。  $P \rightarrow M \times S^1$  を  $M \times S^1$  上の主  $SU(2)$  束で  $c_2 = 1$  なるものとする。この状況で §2 の記号を援用する。  $P$  上の既約な反自己双対接続のモジュライ空間  $\mathcal{M}^*$  の次元は 8 となる。 Taubes の存在定理を使うと、 $\mathcal{M}^*$  は空ではないことがわかる。この 8 次元の  $\mathcal{M}^*$  をある余次元 1 と 3 の部分多様体で切ってやることにより 4 次元のものを作ろうというのが基本的なアイデアである。そのための次数 1 と 3 のコホモロジー類は §2 の方法で構成される。即ち、我々の  $M \times S^1$  の場合、ホモロジーは 1 次と 3 次にいきており、 $(\#)$  において  $i=1$  と  $i=3$  の場合に適応すると  $\gamma \in H_1(M \times S^1)$ ,  $[M] \in H_3(M \times S^1)$  に対し、 $\tilde{\mu}(\gamma)$ ,  $\tilde{\mu}([M])$  なる 3 次と 1 次のコホモロジー類が得られる。

補題.  $\tilde{\mu}(\gamma) \in H^3(\tilde{B}^*)$  及び、 $\tilde{\mu}([M]) \in H^1(\tilde{B}^*)$  はそれぞれ、 $H^3(\tilde{B}^*)$ 、 $H^1(\tilde{B}^*)$  の元に落ちる。(落ちた元を  $\mu(\gamma)$ ,  $\mu([M])$  と書く。

これは  $SU(2)/\pm 1 = SO(3) \rightarrow \tilde{B}^* \rightarrow B^*$  なる主ファイブレーションのスペクトル系列を見ることにより示される。あるいは普遍  $SU(2)$  束  $P$  が  $SU(2)$  束として、 $B^*$  上に落ちることを言うことにより示される。 $\mathbf{Q}$  上では明らかであるが、 $\mathbf{Z}$  上では、一般に  $X$  がスピン多様体で  $c_2$  が奇数なら正しい。

そこでコホモロジー類  $\mu(\gamma)$ ,  $\mu([M])$  を幾何学的に実現することを考える。まず、 $\tilde{\mu}(\gamma)$ ,  $\tilde{\mu}([M])$  を考える。今、 $M \times S^1$  に一つ基点  $x_0$  を決め、 $\gamma$  は  $x_0$  を基点とするループで  $H_1(M \times S^1)$  の生成元を表すものとする。また  $M$  は  $x_0$  を通るものとし、 $M$  と  $\gamma$  は  $x_0$  において横断的に交わりしかも他に交叉はないものとする。さて、接続  $A \in \tilde{B}^*$  に対し、ループ  $\gamma$  に沿うホロノミー写像

$$h_\gamma : \tilde{B}^* \rightarrow SU(2)$$

が定まる。この  $h_\gamma$  により  $SU(2) = S^3$  の基本コホモロジー類  $\omega_{S^3}$  を引き戻す。このとき、次が成り立つ。

補題.  $\tilde{\mu}(\gamma) = h_\gamma^*(\omega_{S^3})$

従って、 $\tilde{\mu}(\gamma)$  はホロノミー写像  $h_\gamma$  の正則値の逆像で実現される。また、 $\tilde{\mu}([M])$  については、 $A \in \widetilde{B^*}$  に対し、それを  $M$  上に制限する。 $M$  上の  $SU(2)$  接続  $A|_M$  に対しては Chern-Simons functional  $cs$  がある。

$$cs_M(A) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{Trace} (dA \wedge A + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A).$$

Chern-Simons functional はゲージ変換  $g$  の作用で不変ではなく、丁度  $g$  を  $M$  から  $SU(2)$  への写像と見たときの写像度だけずれる。従って、 $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$  に値をとる。よって、次の写像が得られる。

$$cs_M : \widetilde{B^*} \longrightarrow \widetilde{B_M^*} \longrightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1.$$

そこで、やはり  $cs_M$  により  $S^1$  の基本コホモロジー類  $\omega_{S^1}$  を引き戻すと、Chern-Weil 理論から次がわかる。

補題.  $\tilde{\mu}([M]) = cs_M^*(\omega_{S^1})$

従って、 $\tilde{\mu}([M])$  は  $cs_M$  の正則値の逆像で実現される。

ホロノミー写像  $h_\gamma$  と Chern-Simons functional  $cs_M$  の正則値を調べ、更にその逆像が  $SO(3)$  の作用で不変であること、即ち、 $B^*$  に落ちることを示すことにより、結局  $\mu(\gamma)$ ,  $\mu([M])$  は次の余次元 3 と 1 の部分多様体  $V_\gamma$ ,  $V_M$  で実現されることがわかる。

定義.

$$V_\gamma = \{A \in B^* \mid h_\gamma(A) = 1\}$$

$$V_M = \{A \in B^* \mid cs(A) = y \in S^1\} \text{ 但し、} y \in S^1 \text{ はある正則値。}$$

REMARK:  $h_\gamma(A) = 1$  という条件は  $A \in B^*$  に対しても意味がある。一般には  $A \in B^*$  に対し  $A$  のホロノミーは  $SU(2)$  の中での共役類でしか決まらないが、 $\pm 1$  の場合はそのまま意味を持つ。ここでは  $-1$  ではなく  $1$  を使う。また  $cs$  の方は  $y$  の任意性があるが、最終的には  $y$  によらない量を取り出すこととなる。

更に標準的な横断性の議論から、 $\mathcal{M}^*$  と  $V_\gamma$ ,  $V_M$  が横断的であるようにできる。正確に言うと、ホロノミー写像を  $SU(2)$  束  $\widetilde{B^*} \times_{SU(2)} SU(2) \rightarrow B^*$  (ここで  $SU(2)$  のファイバー  $SU(2)$  への作用は conjugate) の切断と見た時、

補題.  $h_0 \equiv 1$  と横断的なある切断  $h_\gamma$  と、 $cs$  のある正則値  $y \in S^1$  で、 $\mathcal{M}^*$ ,  $h_\gamma^{-1}(1)$ ,  $cs^{-1}(y)$  が横断的に交わるものが存在する。

定義.  $\mathcal{N} = \mathcal{M}^* \cap V_\gamma \cap V_M$  とおく。上の横断性より、 $\mathcal{N}$  の次元は 4 である。

### 3.2) 可約接続に対応する特異点

一般にはモジュライ空間  $\mathcal{M}$  には特異点が現れる。それはゲージ群  $G$  の作用で接続の空間を割る際、接続  $A$  の固定化群  $\Gamma_A$  が  $SU(2)$  の中心 (これは接続の空間に自明に作用する) と一致しない時、即ち、可約接続のところで生じる。さて、今  $A$  を可約な反自己双対接続とする。このとき、 $\Gamma_A$  の可能性は  $SU(2)$  のあるトーラス即ち、 $S^1$  と  $SU(2)$  の 2 つである。後者は、自明平坦接続の場合である。前者の場合を考える。 $E \rightarrow X$  を  $SU(2)$  束  $P$  に同伴する  $\mathbf{C}^2$  ベクトル束とすると、 $\Gamma_A = S^1$  なる可約接続は  $E$  にある  $\mathbf{C}$  部分ベクトル束  $L$  を定め、 $E = L \oplus L^{-1}$  なる位相的な分解を引き起こす。このとき  $A$  は  $L$  上に反自己双対接続を定める。一般に、Hodge 理論により、次がわかる。

補題. 複素直線束  $L \rightarrow X$  に反自己双対接続が入る為の必要十分条件は、 $c_1(L) \in H^2(X; \mathbf{Z})$  がある反自己双対調和 2 形式で表現されること。

即ち、 $H^2(X; \mathbf{R}) = H^+ \oplus H^-$  を自己双対、反自己双対調和 2 形式への分解とした時、 $c_1(L) \in H^2(X; \mathbf{Z}) \subset H^2(X; \mathbf{R}) = H^+ \oplus H^-$  において、 $c_1(L) \in H^-$  なるとき、 $L$  には反自己双対接続が入る。

さて、我々の場合、 $X = M \times S^1$  で  $H^2(M \times S^1; \mathbf{R}) = 0$  ゆえ、 $H^- = 0$  である。従って、 $c_1(L) = 0$  つまり、 $M \times S^1$  上の自明直線束の場合のみ反自己双対接続を持つ。しかし、 $E = L \oplus L^{-1}$  で  $c_2(E) = 1$  だから、 $E$  は自明ではない。よって、

命題.  $c_2(P) = 1$  なる  $P \rightarrow M \times S^1$  上には  $\Gamma_A = S^1$  なる可約な反自己双対接続は存在しない。

従って、 $\mathcal{M}_1$  には可約接続に対応する特異点は現れない。

### 3.3) 反自己双対方程式の振動

$\mathcal{N}$  のエンドを調べたいわけだが、まず Uhlenbeck のコンパクト性定理から、列  $\{[A_j]\} \in \mathcal{M}$  は適当な部分列とゲージ変換をとることにより、ある一点  $p$  の近傍の外ではある  $M \times S^1$  上の平坦接続  $A_\infty$  に収束する。 $M \times S^1$  上の平坦接続のゲージ同値類はホロノミー写像により  $\pi_1 M \times S^1 = \pi_1 M \oplus \mathbf{Z}$  の  $SU(2)$  表現の共役類によって分類される。 $\pi_1 M$  は perfect だから、 $M$  上可約な平坦接続は自明なもののみであることに注意すると、 $M \times S^1$  上の平坦接続のゲージ同値類は次のように分類される。

- (1)  $M$ 上既約平坦。
- (2)  $M$ 上自明平坦で、(2.1)  $S^1$ 上も自明平坦。  
(2.2)  $S^1$ 上非自明可約平坦。

そこでここでは、(1)のタイプのエンドが現れないように反自己双対方程式を摂動する。これは Donaldson の摂動を用いれば、可能である。即ち、

命題. あるゲージ不変な  $\sigma: \mathcal{A} \rightarrow \Omega_+^2(\mathfrak{g})$  が存在し、

$$F_+(A) + \sigma(A) = 0$$

の  $\mathcal{M}_0 \cap V_\gamma$ における解は自明平坦接続しかない。

そこでこのように摂動した反自己双対方程式を満たす接続のモジュライ空間を  $\mathcal{M}^{*,\sigma}$  とし、

定義.  $\mathcal{N}^\sigma = \mathcal{M}^{*,\sigma} \cap V_\gamma \cap V_M$  とおく。やはりこれも4次元である。

### 3.4) モジュライ空間 $\mathcal{N}^\sigma$ のエンド

まず、 $V_M$ 、つまり、Chern-Simons に関する条件がなにを意味するかを考えよう。まず、Chern-Simons functional の微分を計算すると、 $A \in \mathcal{M}^*$  に対し、

$$dcs_{M,A}(a) = \frac{1}{8\pi^2} \int_M \text{Trace} (F(A|_M) \wedge a|_M)$$

で与えられる。従って、 $cs$  の特異点は  $M$ に制限すると曲率が0つまり、平坦接続となるものである。逆に言うと、今我々は正則値の逆像  $V_M$ を考えているから、その元は全て、 $M$ 上平坦ではない。従って、列  $\{[A_j]\} \in \mathcal{N}^\sigma$  の曲率が集中していく点  $p$  は  $M$ 上になければならない。

次に、 $V_\gamma$ の意味を考える。曲率が集中していく点  $p$  がループ  $\gamma$ 上にならば(つまり  $p \neq x_0 = \gamma \cap M$ )、 $A_j|_\gamma \rightarrow A_\infty|_\gamma$  だから、 $h_\gamma(A_\infty) = 1$ 。  $M$ 上では前節の摂動により  $A_\infty$ は自明平坦ゆえ、結局  $A_\infty$ は  $M \times S^1$ 上の自明平坦接続になる。これに対応するモジュライのエンドは  $(M - x_0) \times \mathbf{R}_+$ となる。一方、 $p = x_0$ で  $\gamma$ 上で曲率が集中していく場合は、 $A_\infty$ の  $\gamma$ に沿うホロノミーは1とはならない。この場合、1以外のあらゆるホロノミーが現れることがわかり、これに対応するエンドは  $(S^3 - pt) \times \mathbf{R}_+$ になることがわかる。これは  $M \times S^1$ 上の可約平坦接続のモジュライ空間と張り合わせのパラメータ空間を調べることにより倉西の方法を用いて示される。以上をあわせて全体のエンドが形成され、結局まとめると

命題.  $\mathcal{N}^\sigma = \mathcal{M}^{*,\sigma} \cap V_\gamma \cap V_M$ は唯一つのエンドを持ち、それは  $M \times \mathbf{R}_+$ に diffeomorphic である。

### 3.5) モジュライ空間の向き

命題。(Donaldson) 反自己双対接続のモジュライ空間  $\mathcal{M}^*$  はいつでも向き付け可能で、その向きは  $H^1(X) \oplus H_+^2(X)$  の向きによって決まる。ここで  $H_+^2(X)$  は交叉形式が正になる極大部分空間。

よって我々の場合、 $H^1(M \times S^1)$  の向きにより決まる。

### §4 $\tau$ 不変量

前節3で得られた4次元多様体  $\mathcal{N}^\sigma$  のエンドの部分をつランケイトしコンパクトで  $M$  を境界とする4次元多様体を得られる。これも  $\mathcal{N}^\sigma$  と書くことにする。(ここでつランケイトの意味は、 $\mathcal{N}^\sigma$  のエンドが  $M \times \mathbf{R}_+$  と書いたときの  $\mathbf{R}_+$  は接続の曲率密度の集中度を表すスケーリングパラメータで記述され、十分大きなところでそれをカットすること。) 我々は以上により、 $\mathbf{Z}$  ホモロジー3球面をバウンドする4次元多様体を構成した。次に問題になるのは、これはスピン構造を持つか? ということである。

命題。  $\mathcal{N}^\sigma$  はスピン構造を持つ。

これについては次節でより一般的な状況でモジュライ空間がスピン構造を持つための十分条件を与える。

そこで、

定義。  $\mathbf{Z}$ -ホモロジー3球面  $M$  に対し、

$$\tau(M) = -\frac{1}{8} \text{signature}(\mathcal{N}^\sigma)$$

と定義する。このとき、

定理。

- (1)  $\tau(M)$  は整数であり、それは  $M$  の位相不変量である。
- (2)  $\tau(M) \equiv \mu(M) \pmod{2}$ 。
- (3)  $\overline{M}$  を  $M$  と逆の向きを持つものとする、 $\tau(\overline{M}) = -\tau(M)$ 。
- (4) 特に、 $M$  が向きを逆にする automorphism を持てば、 $\tau(M) = 0$ 。
- (5) 特に、 $\tau(S^3) = 0$ 。

更に応用として、

系。  $\mathbf{Z}$ -ホモロジー3球面  $M$  が向きを逆にする automorphism を持てば、その Rochlin 不変量  $\mu(M)$  はゼロ。



この系は Casson が Casson 不変量を用いてはじめて証明されたもので [1] これはその別証となる。

$\tau(M)$  が整数値であることは次のように示される。 $\mathcal{N}^\sigma$  の境界は  $M$  で  $\mathbf{Z}$ -ホモロジー 3 球面であるから、Poincaré-Lefschetz の双対定理により、 $\mathcal{N}^\sigma$  の交叉形式は  $\mathbf{Z}$  上非退化、つまりユニモジュラー。またスピンの 4 次元多様体の交叉形式は偶タイプで、 $\mathbf{Z}$  上ユニモジュラーで偶タイプな 2 次形式の指数は 8 で割り切れる。(2) は定義により明らかである。(3) は  $H^1(\overline{M} \times S^1)$  の向きは  $H^1(M \times S^1)$  の向きと逆であることによる。従って、問題は  $\tau(M)$  の位相不変性である。

$\tau(M)$  の位相不変性は正確に言うと次のようになる。

命題.  $\tau(M)$  は (a)  $M \times S^1$  の計量、(b) 反自己双対方程式の摂動のとり方、(c)  $\mu([M])$  の幾何学的実現  $V_M$  における Chern-Simons functional の正則値のとり方、(d)  $\mu(\gamma)$  の幾何学的実現  $V_\gamma$  における切断  $h_\gamma$  のとり方、にはよらない。

REMARK: ここでは、一応、 $\mu(\gamma)$  の幾何学的実現におけるホロノミー写像の正則値は 1 で固定する必要がある。

これらに  $\tau(M)$  がよらないことは、基本的には指数がコボルディズム不変量であることによる。

例えば、(a) 計量によらないことを示すには、 $M \times S^1$  上の二つの generic な計量を  $g_0, g_1$  とする。 $g_t$  を  $g_0$  と  $g_1$  をつなぐ計量の道とする。 $g_t$  によりモジュライ空間  $\mathcal{N}^\sigma(g_0)$  と  $\mathcal{N}^\sigma(g_1)$  の間のコボルディズム  $\bigsqcup_t \mathcal{N}^\sigma(g_t) \times \{t\}$  を作りたいわけだが、ここで問題となるのは、 $\mathcal{N}^\sigma(g_t)$  が特異点を持たない滑らかな多様体であるとは一般にはわからないことである。即ち、ある  $g_t$  に関して、 $\mathcal{N}^\sigma(g_t)$  には可約な反自己双対接続が現れるかもしれない。そのときは  $\mathcal{N}^\sigma(g_t)$  に可約接続が現れないような道  $g_t$  がとれるか否かが問題となる。3.2 節の補題と横断性定理を使えば、 $b_2^+(X) > 1$  ならばそのような道が存在することがわかる。(従って、Donaldson 多項式が不変量として定義されるためには  $b_2^+(X) > 1$  という条件が本質的に必要となる。) さて今は  $X = M \times S^1$  であり、 $b_2^+ = 0$  である。しかしながら、この場合、むしろ状況はより簡単になっている。即ち、3.2 節のことから、 $c_2(P) \neq 0$  である限り、任意の計量 に対して、 $P$  上には可約な反自己双対接続は存在しない。従って、

$$\mathcal{L} = \bigsqcup_{0 \leq t \leq 1} \mathcal{N}^\sigma(g_t) \times \{t\}$$

を考えると、 $\mathcal{L}$  は滑らかな 5 次元多様体で、境界は

$$\partial \mathcal{L} = \mathcal{N}^\sigma(g_0) \bigsqcup \mathcal{N}^\sigma(g_1) \bigsqcup M \times [0, 1]$$

となる。 $M$  はホモロジー 3 球面ゆえ、 $M \times [0, 1]$  の指数はゼロ。ゆえに、 $\mathcal{N}^\sigma(g_0)$  の指数と  $\mathcal{N}^\sigma(g_1)$  の指数は等しい。

これは 1.3 節の問題 A に肯定的に答えるものである。しかしながら、問題 B に関しては今のところ、よくわからない。

### §5 モジュライ空間上のスピン構造

一般にはモジュライ空間はスピン構造を持つかわからず、実際、持たないものも存在する。ここでは  $\mathcal{B}^*$  にスピン構造が入る為のある十分条件を与える。 $\mathcal{N}^\sigma \subset \mathcal{M}^{*,\sigma} \subset \mathcal{B}^*$  において、それぞれの normal 束は自明であることから、 $\mathcal{B}^*$  にスピン構造が入ることと、 $\mathcal{M}^{*,\sigma}$ 、 $\mathcal{N}^\sigma$  にスピン構造が入ることは同値である。

$A \in \mathcal{M}^*$  における接ベクトル空間は、楕円型複体

$$0 \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_A} \Omega^1(\mathfrak{g}) \xrightarrow{d_A^+} \Omega_+^2(\mathfrak{g}) \longrightarrow 0$$

の  $H^1$  と同一視される。generic には  $A \in \mathcal{M}^*$  に対し、 $H^0 = H^2 = 0$  ゆえ、接ベクトル空間は上の楕円型複体の index と思え、 $\mathcal{M}^*$  の接ベクトル束はその index 束と ( $KO$  群の元としては) 同一視できる。言い替えると、楕円型作用素

$$\mathcal{D}_A = d_A^* \oplus d_A^+ : \Omega^1(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g}) \oplus \Omega_+^2(\mathfrak{g})$$

を考えた時、 $T\mathcal{M}^* = \bigsqcup_{A \in \mathcal{M}^*} \text{Ind}(\mathcal{D}_A) = \text{Ind}(\mathcal{D})$  が  $KO(\mathcal{M}^*)$  の元として成り立つ。そこで以下では  $\text{Ind}(\mathcal{D})$  を  $\mathcal{B}^*$  上で考え、その  $w_2$  を計算する。これを Atiyah-Singer のファミリー版の index 定理を用いて実行する。しかし、ファミリーの場合  $K$  と  $KO$  では事情が大きく異なる。 $K$  群の元つまり、複素ベクトル束ならば Chern 指標を使って、特性類 (Chern 類) を具体的に書き下すことはできるが、 $KO$  群の元つまり、実ベクトル束ならば、Chern 指標は使えず特性類特に Stiefel-Whitny 類のような torsion 類を具体的に書き下すことは困難である。すくなくとも私は、実ベクトル束のファミリーの index の特性類を書き下す方法を知らない。(もちろん複素化してしまえば、 $w_2$  の情報などは消えてしまう。)

そこで、ここでは  $X$  は概複素構造を持つと仮定する。このとき次が成り立つ。

定理.  $X$  は概複素構造を持ち、 $H_1(X; \mathbf{Z})$  は 2-torsion を持たないと仮定する。このとき、(1) または (2) の時、 $\mathcal{B}^*$  はスピン構造を持つ。

(1)  $X$  の交叉形式は奇タイプ。

(2)  $X$  の交叉形式は偶タイプでかつ  $c_2(P)$  は奇数。

$X$  が概複素構造を持つならば、それを用いて  $\Omega^p(\mathfrak{g}) = \Gamma(\wedge^p T^*X \otimes_{\mathbf{R}} \mathfrak{g})$  に複素構造が入る。更に、 $X$  の概複素構造  $J$  と  $X$  上のリーマン計量  $g$  を用い

て、 $\omega(\zeta, \eta) = g(J\zeta, \eta)$  と定めると、これは非退化な 2 形式を定める。 $\omega$  を用いると、 $\Omega_+^2(\mathfrak{g})$  は  $\Omega^0 \cdot \omega \oplus \Omega^{(0,2)}(\mathfrak{g})$  と同一視され、更に  $\Omega^0(\mathfrak{g}) \oplus \Omega^0(\mathfrak{g}) \cdot \omega$  を  $I \cdot \omega / \sqrt{2} = -1$ 、 $I \cdot 1 = \omega / \sqrt{2}$  により  $\Omega^0(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}}$  と見ることにより、 $\mathcal{D}$  は

$$\mathcal{D} : \Omega^{(0,1)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \oplus \Omega^{(0,2)}(\mathfrak{g})$$

となる。 $X$  がケーラーの時は  $\mathcal{D}$  は Dolbeart 作用素

$$\overline{\partial}_A^* \oplus \overline{\partial}_A : \Omega^{(0,1)}(\mathfrak{g}) \longrightarrow \Omega^0(\mathfrak{g})^{\mathbb{C}} \oplus \Omega^{(0,2)}(\mathfrak{g})$$

に他ならない。従って、 $\mathcal{D}_A$  は複素線型で、Index は  $K$  群の元を定める。 $(X$  がケーラーなら、モジュライ空間は複素多様体になるのであった。) しかし、 $X$  が単に概複素多様体でケーラーでなければ、 $\mathcal{D}_A$  は複素線型ではない。ところが、大事なことは、 $\mathcal{D}_A$  のシンボルは複素線型で、かつそのシンボルクラスは Dolbeart 作用素のシンボルクラスと一致することである。従って、index はそのシンボルクラスにのみよるから、

$$\text{Ind}(\mathcal{D}) = \text{Ind}(\overline{\partial}^* \oplus \overline{\partial}) \in KO(\mathcal{B}^*).$$

よって、

$$w_2(\text{Ind}(\mathcal{D})) = w_2(\text{Ind}(\overline{\partial}^* \oplus \overline{\partial})).$$

一方、Dolbeart 作用素は複素線型であるから、

$$w_2(\text{Ind}(\overline{\partial}^* \oplus \overline{\partial})) = c_1(\text{Ind}(\overline{\partial}^* \oplus \overline{\partial})) \pmod{2}.$$

よって、 $c_1(\text{Ind}(\overline{\partial}^* \oplus \overline{\partial}))$  を計算すればよい。これは Index 定理で計算できる。結果は

$$(\heartsuit) \quad c_1(\text{Ind}(\overline{\partial}^* \oplus \overline{\partial})) = -2\mu(P.D.c_1(X))$$

となる。ここに  $\mu$  は 1 節のもので、 $P.D.$  はポアンカレ双対を表す。

次なる問題は、等式  $\heartsuit$  は  $\mathbb{Q}$  上でしかとりあえず意味を持たないことである。なぜなら、Index 定理を用いたとき我々はそこで Chern 指標を用いており、それは  $\mathbb{Q}$  上でしか意味がない。しかし、ここで得られた等式の両辺はともに  $\mathbb{Z}$  上定義されているものである。従って、上の  $\heartsuit$  は  $\mathbb{Z}$  上の自由な部分での等式ではあるが、torsion 部分についてはなにも言えない。modulo 2 しても  $w_2 = 0$  とは言い切れない。そこで、 $H^2(\mathcal{B}^*; \mathbb{Z})$  の torsion を調べる。それは普遍係数定理により、 $H_1(\mathcal{B}^*; \mathbb{Z})$  の torsion を調べればよいわけで、それは次でわかる。

命題.  $H_1(X; \mathbf{Z})$  は 2-torsion を持たないとする。このとき、  
 (1)  $X$  の交叉形式が奇タイプまたは、偶タイプでかつ  $c_2(P)$  が奇数ならば、

$$\pi_1 \mathcal{B}^* = H^3(X; \mathbf{Z}).$$

(2)  $X$  の交叉形式が偶タイプでかつ  $c_2(P)$  が偶数ならば、次の完全系列がある。

$$0 \longrightarrow \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \longrightarrow \pi_1 \mathcal{B}^* \longrightarrow H^3(X; \mathbf{Z}) \longrightarrow 0.$$

これは Steenrod の分類定理、あるいは障害理論を用いて、いくつかの代数的トポロジーの議論を行なうことにより、計算される。

ゆえに、この命題から、(1) の場合、 $H_1(\mathcal{B}^*; \mathbf{Z})$  は 2-torsion を持たないことがわかり、よって、 $\heartsuit$  は  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  上で成り立つ等式である。つまり、このときモジュライ空間はスピン構造を持つ。特に  $X = M \times S^1$  で、 $c_2 = 1$  の時はスピン構造を持つ。

例 1.  $X = \mathbf{C}P^2$ .

$\mathcal{M}_1(\mathbf{C}P^2)$  は空で、 $\mathcal{M}_2(\mathbf{C}P^2)$  は  $\mathbf{C}P^5$  のなかの実 10 次元のある開部分集合と同一視できることが知られている。よって、これはスピン。

例 2.  $X = K3$  曲面。

この場合  $\mathcal{M}_k^*$  には超ケーラー構造が入ることが伊藤光弘氏の結果でわかっており、 $c_1 = 0$  がでる。よって、 $c_2(P) = k$  が偶数でもスピン構造が入る。 $X$  がトーラスの場合も同様である。

例 3.  $X = \overline{\mathbf{C}P^2}$ .

古田幹雄氏の結果により、 $\mathcal{M}_1(\overline{\mathbf{C}P^2})$  は  $\overline{\mathbf{C}P^2}$  上の cone であり、これはスピン構造を持たない。 $\overline{\mathbf{C}P^2}$  は概複素多様体ではない!

例 4.  $X = S^4$ .

これももちろん概複素多様体ではない。Atiyah-Hitchin-Singer により、 $\mathcal{M}_1(S^4) = B^5$  でこれはスピン。一方、服部晶夫先生の結果により、 $\mathcal{M}_2(S^4)$  はグラスマン多様体  $Gr_{5,2}(\mathbf{R})$  上のあるランク 7 の実ベクトル束の全空間である。これはスピンでない。

**Remark** (1)  $SU(n) (n \geq 3)$  を構造群とする主束の上の接続のモジュライ空間のスピン構造については次が成り立つ。

定理.  $X$  は概複素構造を持ち、 $H_1(X; \mathbf{Z})$  は 2-torsion を持たないと仮定する。

- (1)  $n$  が偶数ならば、モジュライ空間はスピン構造を持つ。
- (2)  $n$  が奇数で、 $X$  がスピンならば、モジュライ空間はスピン構造を持つ。

**Remark (2)** 4次元多様体の概複素構造について。  $X$  を有向閉4次元多様体とする。  $w_2(X)$  の integral lift  $\alpha \in H^2(X; \mathbf{Z})$  であって  $\alpha^2 = 3\text{sign}(X) + 2\chi(X)$  を満たす ( $\chi(X)$  は  $X$  のオイラー数) ものが存在すれば、  $X$  は概複素構造を持つことが示せる。任意の4次元多様体は  $Spin^c$  構造を持つので、  $w_2(X)$  の integral lift は必ず存在する。更に  $\alpha^2 \equiv 3\text{sign}(X) + 2\chi(X) \pmod{4}$  を満たす lift  $\alpha$  が常に存在することもわかる。従って、特に  $k$  を適当にとれば  $X \# k(S^2 \times S^2)$  は概複素構造を持つようにできる。  $X$  の交叉形式が奇タイプなら、  $X \# k(S^2 \times S^2)$  もそうで、  $X$  の交叉形式が偶タイプなら、  $X \# k(S^2 \times S^2)$  も偶である。よって、この意味で、"stable" には、先の定理のなかで概複素多様体の仮定は除ける。

### §6 問題等

(1)  $\tau(M)$  は Casson 不変量  $\lambda(M)$  と一致するか? そのために、Casson 不変量の持つ性質を  $\tau(M)$  が持つかどうかを調べよ。例えば、

(1.1) 和公式  $\tau(M_1 \# M_2) = \tau(M_1) + \tau(M_2)$ ?

これは、余次元1の surgery で反自己双対接続のモジュライがどう変わるか、という問題である。

(1.2) Dehn surgery 公式。  $K \subset M$  を knot とし、  $M'$  を  $K$  に沿う +1 Dehn surgery したものとす。このとき、  $\tau(M') - \tau(M) = 1/2 \Delta_K''(1)$ ? 但し、  $\Delta_K(t)$  は  $K$  のアレキサンダー多項式。これは、  $\tau(M)$  の relative version を作り、その coupling formula を作れという問題に他ならない。relative version を作る際、3次元トールスを境界に持つ4次元多様体の上でゲージ理論をやらねばならず、それは Morgan-Mrowka-Rubermann [5] の解析が必要になる。しかし、我々の場合の新たな問題は、  $\tau(M)$  を定義する際に用いたホモロジー類が境界と交わるもの ( $\gamma \in H_1(M \times S^1)$  に相当) と、もろに境界にくるもの ( $[M] \in H_3(M \times S^1)$  に相当) を扱わねばならないこと。Donaldson 多項式の relative version の場合2次元のホモロジー類を用いるが、これらは境界と交わらないものである時にはいろいろとわかっている。境界と交わるホモロジー類を使う場合 (我々では  $H_1$  の方に対応する) は、Braam-Donaldson [2] により深谷賢治氏のインスタントホモロジーに値を持つものとして、Donaldson 多項式が相対化されているが、我々の  $H_3$  に対応する解析はなにもなされていないと思われる。また、(1.2) が示されることは、knot のアレキサンダー多項式をゲージ理論から捉えるということも意味し、それ自体興味深いことと思われる。

(2)  $M$  が Seifert fiberd ホモロジー3球面の場合モジュライ空間  $\mathcal{N}^\sigma$  は Milnor fibre か? 少なくとも Milnor fiber とコボルダントか? 5節のことから  $\mathcal{N}^\sigma$  には複素構造は入らないだろう。更に特別な場合として、  $M$  がポアンカレ球面の時、  $\mathcal{N}^\sigma$  の交叉形式は  $-E_8$  と同型か?

(3)  $M$ が  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ホモロジー 3 球面の場合、同様にして、 $\tau(M)$  は定義できるか? できたとするとそれは  $|H_1(M; \mathbf{Z})|^2 \tau(M) \equiv \mu(M) \pmod{2}$  を満たすか? (これは Walker 不変量の時の式に対応する。)  $\tau(M)$  を定義する際  $M$ が  $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$  ホモロジー 3 球面の場合、モジュライ空間に可約接続に対応する特異点が現れ、その分モジュライ空間の指数に少し修正が加わるはずであろう。

(4)  $X$ を可微分閉 4 次元多様体で、 $M \times S^1$ と同相であるとする。但し  $M$ は  $\mathbf{Z}$  ホモロジー 3 球面。我々の方法で  $X$ の微分位相不変量は得られないか? そのために、 $H_1(X)$ の生成元は滑らかな埋め込まれた  $S^1$ で実現できるが、 $H_3(X)$ の生成元は  $M$ の埋め込みで実現できるか? 一般に  $H_3(X)$ の元は常にある 3 次元多様体  $N$ の埋め込みで実現することはできるが、 $N = M$ にとれるか、ということである。ポアンカレ双対により  $H_3(X; \mathbf{Z}) \cong H^1(X; \mathbf{Z})$  で、

$$H^1(X; \mathbf{Z}) = [X, K(\mathbf{Z}, 1)] = [X, S^1].$$

$f \in [X, S^1]$ を smooth にとって、その正則値  $a$ の逆像  $f^{-1}(a)$ は  $X$ の余次元 1 の部分多様体となり、これが  $f$ に対応する  $H_3(X; \mathbf{Z})$ の元を実現している。従って、問題は次のように言い替えられる:  $[f_0] \in [X, S^1]$ を  $H_3(X; \mathbf{Z})$ の生成元に対応するホモトピー類とする。このとき、 $f_0$ とホモトピー同値な滑らかな写像  $f: X \rightarrow S^1$ であって、その正則値の逆像が  $M$ となるものは存在するか? もし、これが肯定的ならば、 $X$ の微分位相不変量が同様の方法で得られる。できたとして、これを  $\tau(X)$ と書くことにすると、その性質として  $\tau(X) \equiv \mu(M) \pmod{2}$  になり、特に  $\tau(X)$ の偶奇は  $X$ の位相不変量であることになる。一般に次のことが予想されている。

予想. Donaldson 多項式 (は可微分 4 次元多様体の微分位相不変量であるが、その偶奇は位相不変量である。

(5) モジュライ空間の有向コボルディズム不変量が 4 次元多様体の微分位相不変量を与える、というのがゲージ理論の基本的な発想であるとするならば、モジュライ空間がスピン構造を持つときそのスピニコボルディズム不変量は 4 次元多様体のどのような不変量を与えることとなるか?

(6) 我々は  $c_2(P) = 1$ の上の接続のモジュライ空間を用いて、 $\tau(M)$ を得たが、 $c_2(P) = k \geq 2$ なる束を用いてはどうか? このとき  $M_k^g \cap V_7 \cap V_M$ の次元は  $8k - 4$ になり、4の倍数ゆえ指数が定義される。その指数は  $M$ の不変量になるか? もしなるなら、それを  $\tau_k(M)$ と書くとき、

$$\tau(M; q) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\tau_k(M)}{k!} q^k, \quad \text{但し、} \tau_0(M) = 1$$

とおくと、これはなにか?

文献

- [1] Akbulut S. and J. McCarthy, Casson's invariant for oriented homology 3-spheres. Princeton Univ. Press. 1990.
- [2] Braam P. and S. Donaldson, Fukaya-Floer homology and gluing formulae for polynomial invariants. Preprint.
- [3] Fintushel R. and R. Stern, Instanton homology of Seifert fibered homology three sphere. Proc.London Math.Soc. 1990.
- [4] Fukuhara S, Matsumoto Y. and K. Sakamoto, Casson's invariant of Seifert homology 3-spheres. Math.Ann. 1990.
- [5] Morgan J, Mrowka T. and D. Ruberman, The  $L^2$ -moduli space and a vanishing theorem for Donaldson polynomial invariants. Preprint.
- [6] Ohta H, An integral lift of the Rohlin invariant and gauge theory. Preprint.
- [7] Ohta H, Spin structure on moduli spaces of Yang-Mills connections. Preprint.

# HOMFLY polynomial via an invariant of colored planar graphs

大槻 知忠 (東京大・数理)

以下の内容は村上斉 (大阪市大・理)、山田修司 (京都産大・理) の両氏との共同研究です。

## §0. Introduction.

数年前 Witten により “量子  $G$  不変量” が提唱されました。これは compact な 3次元多様体の位相不変量で、Lie 群  $G$  を与えるごとに不変量が 1 つできます。ただ Witten の “定義” は数学的に厳密でないという意味でいかがわしいものであり、多くの人によってこの不変量をきちんと定式化する努力がなされてきました。

最初にこれに成功したのが Reshetikhin-Turaev で、量子群  $U_q(sl_2)$  の表現を用いて link の isotopy 不変量をたくさん構成しこれをたしあげることにより量子  $SU(2)$  不変量の厳密な定義を与えました。彼らのアプローチは conformal field theory からくる豊富な状況証拠によって背景をかためられており、その説得力は不変量が存在することを信じさせるに十分ですが、いかんせんその長い証明の全貌を細部にわたるまで把握するのは容易ではありません。(たとえていうと、作用素環による Jones 多項式の定義を見ているような感じがします。)

幸いにして、その後 Lickorish が量子  $SU(2)$  不変量の elementary な定義を与えました。それは linear skein theory により link の isotopy 不変量をたくさん定義しそれらをたしあげて 3次元多様体の位相不変量にするというものです。このアプローチのご利益として、位相不変性の証明が (“ネコでもわかるほど”) 明快



になったことと、具体例の計算が手でできるようになったことがあげられます。量子  $SU(2)$  不変量の研究には Lickorish の定義が欠かせないものとなっています。

次なる目標は量子  $SU(n)$  不変量なわけですが、これは量子群  $U_q(sl_n)$  の表現から得られる link の isotopy 不変量をたしあげることによって定義されます。たしあげられる link の不変量の中で一番簡単なものが、 $sl_n(\mathbb{C})$  のベクトル表現  $V$  (すなわち  $sl_n(\mathbb{C})$  の  $\mathbb{C}^n$  への自然な作用) を変形した  $U_q(sl_n)$  の表現から得られる link の不変量ですが、それが表題の HOMFLY 多項式です。 $sl_n(\mathbb{C})$  の表現環は  $V, \wedge^2 V, \wedge^3 V, \dots, \wedge^{n-1} V$  で生成されるため、量子  $SU(n)$  不変量を定義するために実際に必要になるのは、これらを変形した  $U_q(sl_n)$  の表現  $V_1, V_2, V_3, \dots, V_{n-1}$  を使って得られる link の不変量です。それらも以下で述べる方法により同様に構成することができますが、本稿では簡単のため HOMFLY 多項式の定義 (正確には、我々による再定義) とその isotopy 不変性に話を限ります。特に、elementary で構成的な定義を与えることが、今後量子  $SU(n)$  不変量を研究するにあたって重要であると思われます。

HOMFLY 多項式を最初に定義したのは [F+] で、それ以後よく使われるのは skein relation;

$$q^{n/2}P(L_+) - q^{-n/2}P(L_-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})P(L_0)$$

による特徴づけです。ここで  $L_+, L_-, L_0$  は小さい 3-ball の外では同じ形で 3-ball の中では Fig 0.1 のようになっている 3 つの link です。

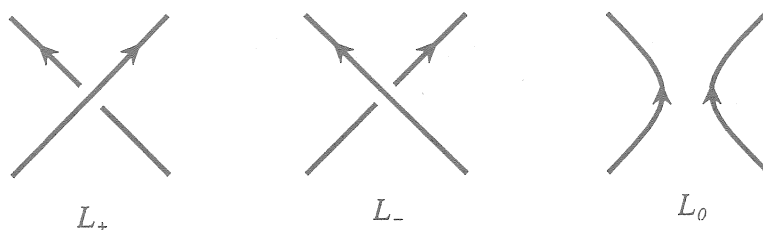


Fig 0.1

任意の link  $L$  の値  $P(L)$  が skein relation によって trivial knot の値に帰着されることは容易にわかるので、skein relation が HOMFLY 多項式を定義すると思ってもいいわけですが、skein relation を定義だと思うと well-defined であることの証明が容易ではありません ([PT] 参照)。つまり今までは、定義を elementary にすると存在がみえにくく、定義を構成的にすると定義自体や不変性の証明が大変である、といった状況でした。

以下では、HOMFLY 多項式を elementary かつ構成的に与えますが、これが量子  $SU(n)$  不変量の研究につながっていくことを期待したいと思います。

### §1. graph の不変量.

2 以上の整数  $n$  を固定し  $\mathcal{N} = \{-(n-1)/2, -(n-3)/2, \dots, (n-1)/2\}$  とおきます。また  $q$  は不定元とします。

以下であつかう graph とは oriented planar trivalent graph で各 edge は次の 3 種類のうちのいずれかです。(量子群のことばでいうと、 $k$  個の矢印は、 $U_q(\mathfrak{sl}_n)$  の表現  $V_k$  を edge にはりつけることを表しています。)



Fig 1.1

各 vertex において edge の矢印の数は保存されているとします。(以下、そのようなものを単に graph とよびます。) また簡単のため (必要なら isotopy でうごかして)、各 vertex のところで edge の接ベクトルは上向きになっているとしま

す。すると我々の graph は必ず Fig 1.2 にかいた piece に分割することができます。

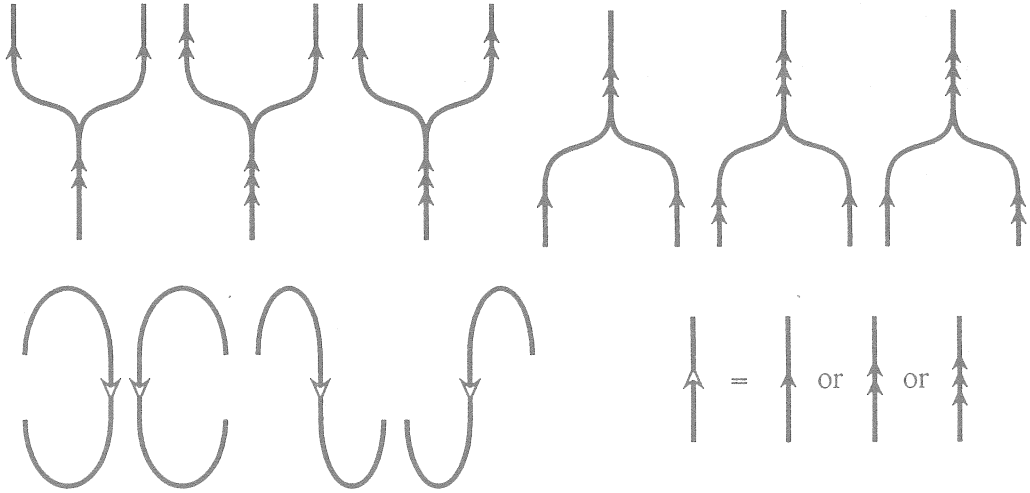


Fig 1.2

さて、与えられた graph  $G$  について、state  $\sigma$  とは graph  $G$  の各 edge に  $\mathcal{N}$  の元をはりつけたもののことです。ただし edge についている矢印の個数だけ  $\mathcal{N}$  の元をはりつけます。すなわち

$$\sigma : \{G \text{ の矢印 1 つの edge}\} \longrightarrow \mathcal{N}$$

$$\sigma : \{G \text{ の矢印 2 つの edge}\} \longrightarrow \{A \subset \mathcal{N} \mid \#A = 2\}$$

$$\sigma : \{G \text{ の矢印 3 つの edge}\} \longrightarrow \{A \subset \mathcal{N} \mid \#A = 3\}$$

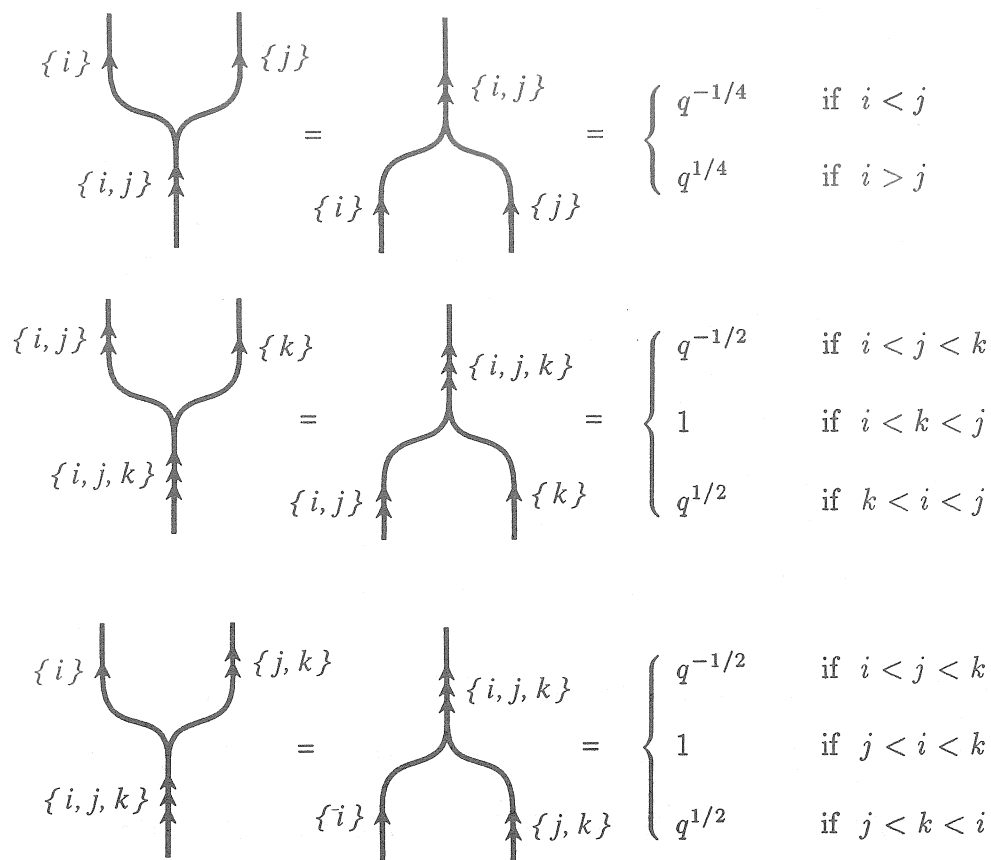
(これは、 $V$  の base を  $\{e_i\}_{i \in \mathcal{N}}$  とすると、 $\wedge^2 V$  の base は  $\{e_i \wedge e_j\}$  であり、 $\wedge^3 V$  の base は  $\{e_i \wedge e_j \wedge e_k\}$  であることと対応しています。) さらに各 vertex においてはりつけられた  $\mathcal{N}$  の部分集合は保存されているとします。つまり 2 つの edge  $e_1$  と  $e_2$  が合流して  $e$  になる (または  $e$  が  $e_1$  と  $e_2$  にわかれる) とき

$\sigma(e) = \sigma(e_1) \cup \sigma(e_2)$  をみたしているとします。(矢印の数が保存されていることより必然的に  $\sigma(e_1)$  と  $\sigma(e_2)$  は disjoint でなければなりません。) そのようなものを以下では state とよびます。

我々の不変量  $\langle G \rangle$  は次のように定義されます。

$$\langle G \rangle = \sum_{\text{state}} \prod (\text{各 piece の weight})$$

ただし和は可能な state 全体をわたります。また state が与えられたとき各 piece に対して weight を Fig 1.3 のように定めます。



$$\begin{aligned} \text{Clockwise loop with arrow pointing down} &= q^{|A|} \quad \text{ただし} \quad |A| = \sum_{a \in A} a \\ \text{Counter-clockwise loop with arrow pointing down} &= q^{-|A|} \\ \text{Two crossings} &= \text{Two crossings} = 1 \end{aligned}$$

Fig 1.3

以上のように定義された  $\langle G \rangle$  が  $\mathbb{R}^2$  の ambient isotopy で不変であることは容易にわかります。

## §2. link の不変量.

$L$  を oriented link,  $D$  をその diagram とします。link のすべての成分に“1つ矢印”をつけてから、Fig 2.1 の式によって §1 の不変量を拡張して  $\langle D \rangle$  を定

義します。

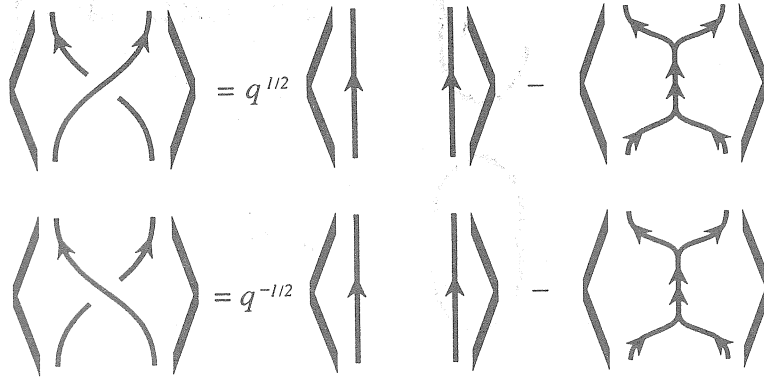


Fig 2.1

つまり diagram  $D$  の crossing があると、local にその部分を右辺の 2 つの graph におきかえて、それらの不変量の 1 次結合として diagram の不変量を定義するわけです。正確には、Fig 2.1 の式より、まず crossing が 1 つの “graph の diagram” について不変量  $\langle \cdot \rangle$  が定義され、次に crossing が 2 つの場合に拡張され... となります。別の見方をして、crossing が  $N$  個の link diagram について、 $2^N$  個の planar graph をつくりその不変量の 1 次結合をとる、と思ってもかまいません。

次の 2 つの定理が主結果です。

定理 2.1  $P(L) = (q^{n/2})^{-w(D)} \langle D \rangle$  は link  $L$  の isotopy 不変量である。

ただし  $w(D)$  は diagram  $D$  の writhe です。すなわち、

$$w(D) = \#\{D \text{ の positive crossing}\} - \#\{D \text{ の negative crossing}\}.$$

定理 2.1 は §4 で証明します。

定理 2.2  $P(L)$  は次の skein relation をみたす。

$$q^{n/2}P(L_+) - q^{-n/2}P(L_-) = (q^{1/2} - q^{-1/2})P(L_0)$$

すなわち  $P(L)$  は HOMFLY 多項式と同値である。

証明  $L_+, L_-, L_0$  の diagram を  $D_+, D_-, D_0$  とします。Fig 2.1 の 2つの式の差をとると

$$\langle D_+ \rangle - \langle D_- \rangle = (q^{1/2} - q^{-1/2}) \langle D_0 \rangle$$

となります。  $w(D_+) - 1 = w(D_-) + 1 = w(D_0)$  に注意すると与式が得られます。■

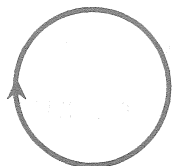
### §3. graph の不変量の性質.

§4 で定理 2.1 の証明をする準備として、§1 で定義した graph の不変量  $\langle G \rangle$  の性質をいくつか導きます。簡単のため  $\langle G \rangle$  をしばしば  $G$  の絵で表します。また

$$\begin{aligned} [k] &= (q^{k/2} - q^{-k/2}) / (q^{1/2} - q^{-1/2}) \\ &= q^{-(k-1)/2} + q^{-(k-3)/2} + \dots + q^{(k-1)/2} \end{aligned}$$

とおきます。

#### 補題 3.1



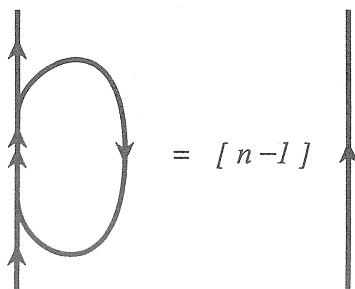
$$= [n]$$

証明 edge は1つなのでこの edge に  $\mathcal{N}$  の元  $k$  を対応させるのが state です。  
weight は  $q^k$  なので

$$\text{左辺} = \sum_{k \in \mathcal{N}} q^k = [n]$$

となります。■

補題 3.2



証明 左辺において上端の state を  $i \in \mathcal{N}$  とし、これを固定します。分岐点で state の集合は保存されるので下端も  $i$  になります。右にまるまっている部分の state を  $j$  とおくとこの graph の weight は

$$i < j \text{ のとき} \quad q^{-1/4} \cdot q^{-1/4} \cdot q^j = q^{j-1/2}$$

$$i > j \text{ のとき} \quad q^{1/4} \cdot q^{1/4} \cdot q^j = q^{j+1/2}$$

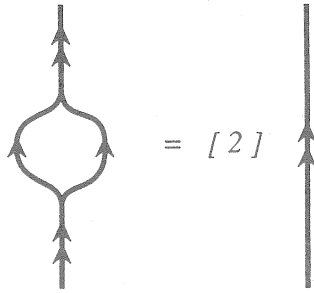
となります。  $j$  について和をとると

$$\sum_{j>i} q^{j-1/2} + \sum_{j<i} q^{j+1/2} = [n-1].$$

state 全体について和をとったものが不変量になるので、先に  $j$  について和をとることにすれば、 $i$  の値によらずに（したがって外の形に関係なく）、<左辺の graph> は <右辺の graph> の  $[n-1]$  倍になることがわかります。■

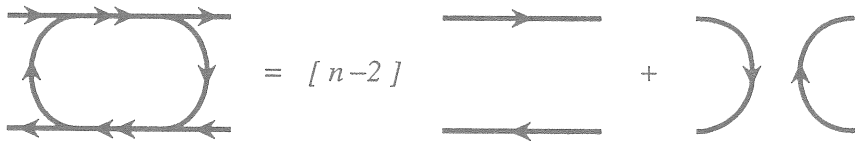


補題 3.3



証明 左辺の上端の state を  $\{i, j\}$  とし、これを固定します。このとき中央の部分は  $i, j$  となるか  $j, i$  となるかの 2通りで、weight は  $q^{-1/2}$  と  $q^{1/2}$  になります。よって <左辺の graph> は <右辺の graph> の  $q^{-1/2} + q^{1/2}$  ( $= [2]$ ) 倍になります。■

補題 3.4



証明 左辺において左上の state を  $i$  とすると、その  $i$  はどこかからでていかなければならないので右上か左下は  $i$  になります。よって 4 隅の state は  $\begin{smallmatrix} i & i \\ i & i \end{smallmatrix}$  か  $\begin{smallmatrix} i & i \\ j & j \end{smallmatrix}$  か  $\begin{smallmatrix} i & j \\ i & j \end{smallmatrix}$  かのいずれかです。4 隅をそのように固定したとき左辺と右辺の weight が等しいことを確かめます。

$\begin{smallmatrix} i & i \\ i & i \end{smallmatrix}$  のとき、左辺の weight は

$$\sum_{k>i} q^{k-1} + \sum_{k<i} q^{k+1} = [n-2] + q^i$$

となります。右辺の第 1 項は  $[n-2]$  で第 2 項は  $q^i$  なのでこれに等しくなります。

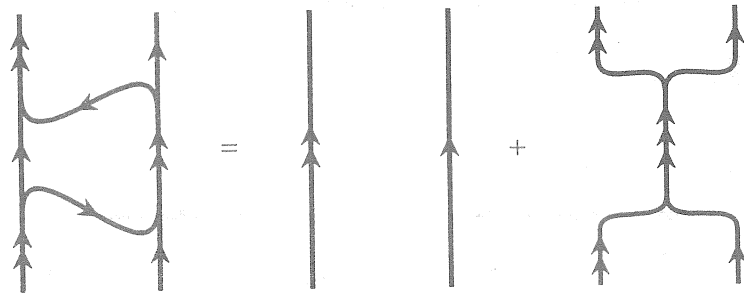
$\begin{matrix} i \\ \vdots \\ j \end{matrix}$  のとき、 $i > j$  とすると、左辺の weight は

$$\sum_{k>i} q^{k-1} + \sum_{i<k<j} q^k + \sum_{k<j} q^{k+1} = [n-2]$$

となります。 $i < j$  のときも同様に  $[n-2]$  となることがわかります。一方、右辺の第1項は  $[n-2]$  で第2項は 0 なのでこれに等しくなります。

$\begin{matrix} i & j \\ \vdots & \vdots \\ i & j \end{matrix}$  のとき、左辺の weight は  $q^{i/2} + q^{j/2}$  です。右辺の第1項は 0 で第2項は  $q^{i/2} + q^{j/2}$  なのでこれに等しくなります。■

補題 3.5



証明 4 隅は  $\begin{matrix} \{i,j\} & \{k\} \\ \{i,j\} & \{k\} \end{matrix}$  か  $\begin{matrix} \{i,j\} & \{k\} \\ \{i,k\} & \{j\} \end{matrix}$  のいずれかです。

前者の場合、(一般性を失うことなく)  $i < j$  とおくと、左辺の weight は

$$\begin{cases} 1+q & \text{if } k < i \\ 1 & \text{if } k = i \\ 2 & \text{if } i < k < j \\ 1 & \text{if } k = j \\ 1+q^{-1} & \text{if } k > j \end{cases}$$

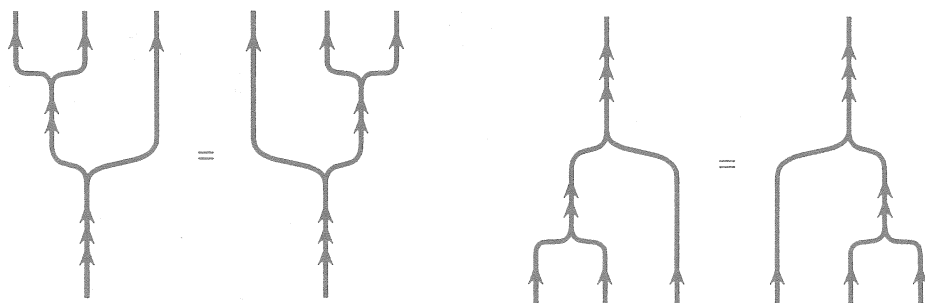
となります。それぞれの場合について右辺と等しいことは容易にわかります。

後者の場合、左辺の weight は

$$\left\{ \begin{array}{ll} q^{-1/2} & \text{if } i < j < k \\ q^{-1/2} & \text{if } i < k < j \\ 1 & \text{if } j < i < k \\ q^{1/2} & \text{if } j < k < i \\ 1 & \text{if } k < i < j \\ q^{1/2} & \text{if } k < j < i \end{array} \right.$$

となります。これらは右辺の第2項と等しくなり、右辺の第1項は0になります。■

補題 3.6



証明 第1式 (resp. 第2式) について上端 (resp. 下端) の state を  $i, j, k$  とします。他端の state は  $\{i, j, k\}$  です。左辺の weight は

$$\left\{ \begin{array}{ll} q^{-3/4} & \text{if } i < j < k \\ q^{-1/4} & \text{if } i < k < j \\ q^{-1/4} & \text{if } j < i < k \\ q^{1/4} & \text{if } j < k < i \\ q^{1/4} & \text{if } k < i < j \\ q^{3/4} & \text{if } k < j < i \end{array} \right.$$

で、右辺の weight も同じ値です。■

§4. 定理 2.1 の証明.

Reidemeister move の I, II, III (以下 RI, RII, RIII とかく) で  $(q^{n/2})^{-w(D)} < D >$  が不変であることを確かめれば十分です。(link の orientation は RII ですべての orientation について確かめれば、RI と RIII はすべて上向きの orientation についてだけ確かめれば十分であることに注意します。)

RI での不変性 Fig 2.1 の式と補題 3.1, 3.2 をつかうと

$$\begin{aligned}
 \text{Diagram 1} &= q^{n/2} \text{Diagram 2} - \text{Diagram 3} \\
 &= (q^{n/2} [n] - [n-1]) \text{Diagram 4} = q^{n/2} \text{Diagram 5}
 \end{aligned}$$

Fig 4.1

となり、 $q^{n/2}$  は  $(q^{n/2})^{-w(D)}$  の変化とうちけしあうので、positive crossing をはずす RI で不変になります。同様に、negative crossing では  $q^{-n/2}$  が係数にて、 $(q^{n/2})^{-w(D)}$  の変化とうちけしあひ、RI での不変性がわかります。■

RII での不変性 Fig 2.1 の式と補題 3.3 をつかうと

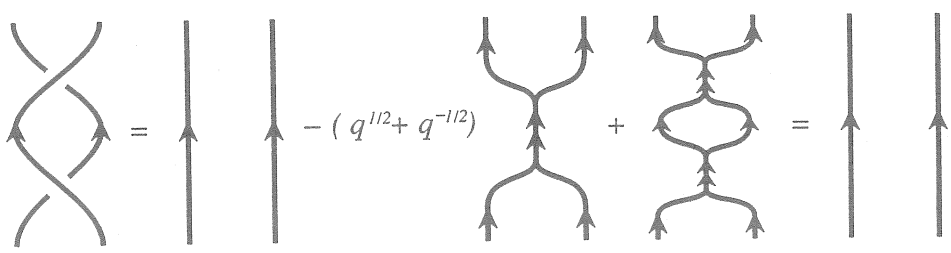


Fig 4.2

となります。まったく同様に、

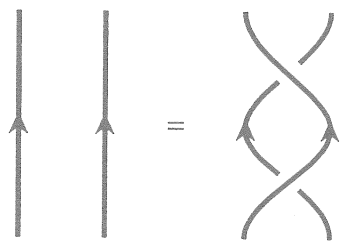


Fig 4.3

も示されます。また Fig 2.1 の式と補題 3.1, 3.2, 3.5 をつかうと

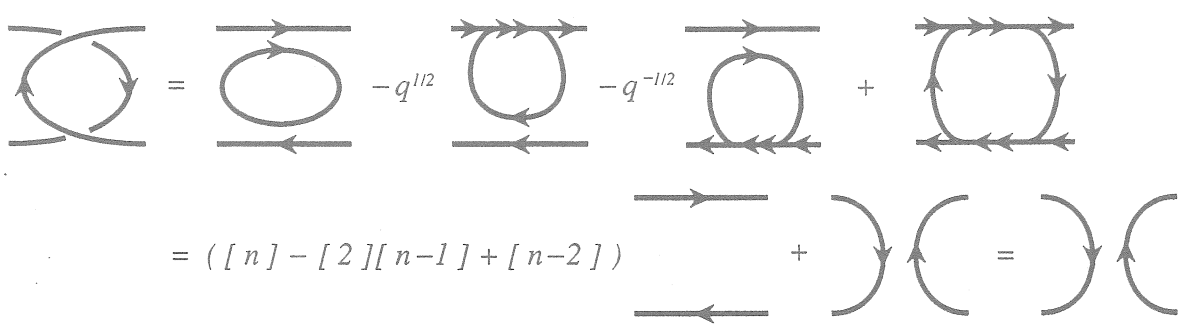


Fig 4.4

が示され、以上で RII での不変性が示されました。■

RIII での不変性 すべて上向きの orientation について確かめれば十分です。Fig

2.1 の式と補題 3.3, 3.5 をつかうと

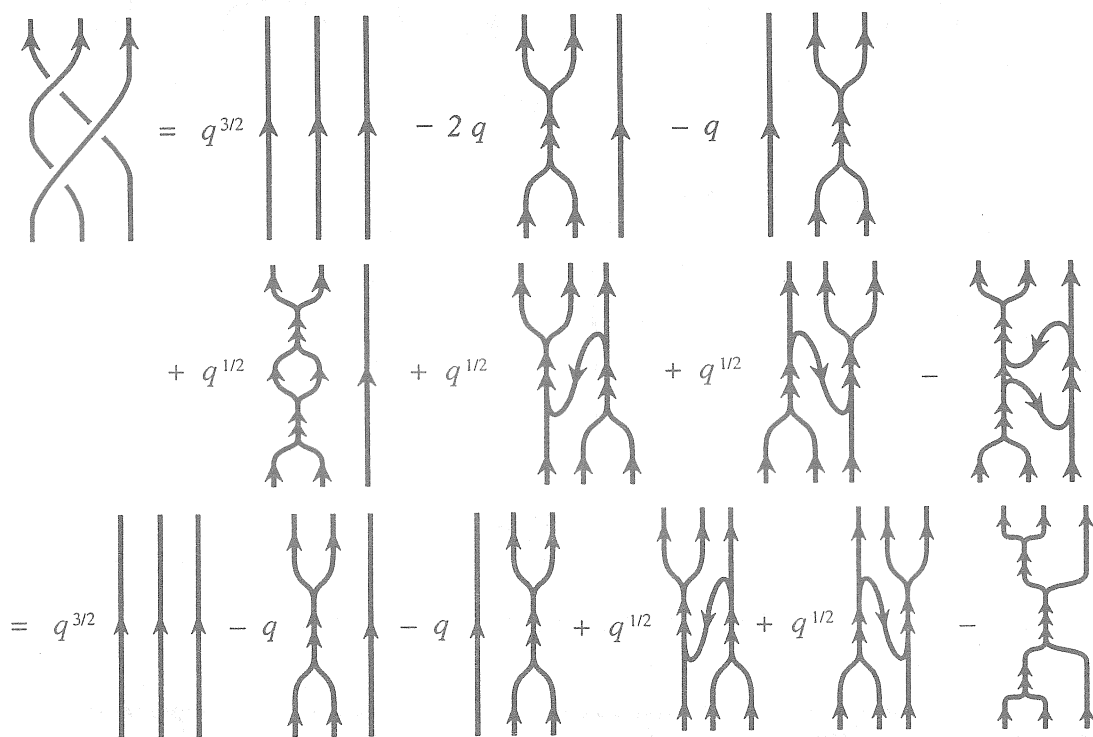


Fig 4.5

となります。さらに補題 3.6 をつかうと右辺は左右対称であることがわかるので、

Fig 2.1 の式の右辺の左右対称性に注意すると、

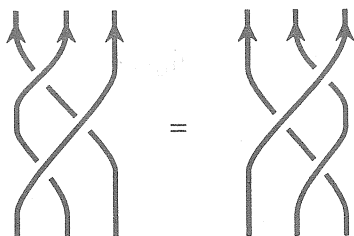


Fig 4.6

がわかります。したがって RIII での不変性が示されました。■

以上により  $(q^{n/2})^{-w(D)} \langle D \rangle$  は Reidemeister move で不変であることがわかり、定理 2.1 が証明されました。■

#### REFERENCES

- [F+]. Freyd, P., Yetter, D., Hoste, J., Lickorish, W.B.R., Millett, K., Ocneanu, A., *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. **12** (1985), 239-246.
- [PT]. Przytycki, J.H., Traczyk, P., *Invariant of links of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1988), 115-139.



# The Jones polynomial of an unknotting number one knot

山口大学理学部 宮澤康行

## 0 はじめに

ここでは、3次元球面  $S^3$  内の結び目を考察の対象とする。結び目が与えられたとき、その結び目が“どのくらい複雑か”ということを考える。自明な結び目とどれくらいかけ離れているかと言ってもよい。しかし、“複雑”とか、“かけ離れている”とかいうのは、曖昧で、数学的ではないので、もう少しきちんとした議論が必要となる。そこで、第1節において、“複雑さ”とそれを表わす量とを定義する。これによって、与えられた結び目には一つの特徴付けがなされることになる。第3節では、その特徴、すなわち、結び目の“複雑さ”を、評価、決定する方法として、これまでに知られている結果を紹介する。そして、今回得られた結果は、第4節において述べられる(定理4.1、系4.2)。尚、これを書くにあたっては、[8, 第11章]を参考に行っている。

## 1 結び目解消数

結び目の複雑さを定義するにあたり、与えられた結び目を自明な結び目に変形する操作、すなわち、結び目を“ほどく”操作を考える。

定義1.1 結び目の正則表示上の操作で、それを有限回施すことによって、任意の結び目を自明な結び目にできるものを、結び目解消操作と呼ぶ。

結び目の正則表示において、図1のような操作を考える。



図1



この操作は、明らかに結び目解消操作となる。以下、結び目解消操作といえは、この操作を表わす。任意の2つの結び目は、結び目解消操作で互いに移り合うので、結び目の間に距離を入れることができる。

定義1.2 2つの結び目  $K, K'$  に対して、 $K'$  から  $K$  を得るのに必要な結び目解消操作の最小数を、 $K$  と  $K'$  の間の距離と呼ぶ。

上の定義で実際に距離が与えられることはすぐにわかる。2つの結び目のうち一方を自明な結び目にする事で、与えられた結び目が、自明な結び目とどれだけ“かけ離れている”かということをも具体的に定義できる。

定義1.3 任意の結び目  $K$  に対し、自明な結び目との距離（すなわち、結び目解消操作の最小数）を結び目解消数と呼び、 $u(K)$  と表わす。

結び目解消数が定義できたので、次は、与えられた結び目の結び目解消数を決定するというのが問題になる。しかし、結び目解消数は、結び目の正則表示をすべて考えたときの結び目解消操作の最小数であるから、その決定は容易ではないということが推測される。実際、正則表示の交点数を多くした方が、結び目解消操作の数が少なくなる例 [19] が知られている。

## 2 Jones 多項式、Conway 多項式、符号数

以下の節では、結び目解消数を評価、決定する方法について述べるが、ここでは、そのために必要な多項式等を準備する。

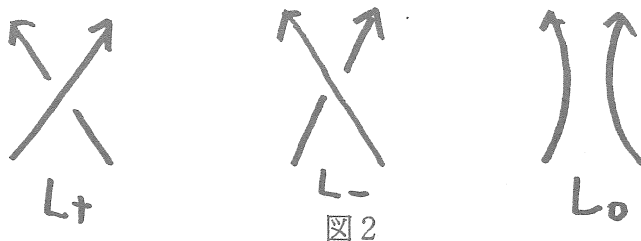
定義2.1 向き付けられた絡み目  $L$  の Skein 多項式  $P_L(v, z)$  [5, 13] とは、

(1) 図2のように、1ヶ所だけ異なる3つの絡み目  $L_+, L_-, L_0$  に対し、

$$v^{-1} P_{L_+}(v, z) - v P_{L_-}(v, z) = z P_{L_0}(v, z)$$

(2) 自明な結び目  $U$  に対し、 $P_U(v, z) = 1$

によって定義される多項式である。



絡み目  $L$  の Jones 多項式  $V_L(t)$  [6]、Conway 多項式  $\nabla_L(z)$  [4]、Alexander 多項式  $\Delta_L(t)$  は、Skein 多項式から次のようにして定義される。

$$\begin{aligned} \text{定義 2.2} \quad V_L(t) &= P_L(t, t^{1/2}, t^{-1/2}) \\ \nabla_L(z) &= P_L(1, z) \\ \Delta_L(t) &= P_L(1, t^{1/2}, t^{-1/2}) \end{aligned}$$

このとき、結び目  $K$  の Conway 多項式は、

$$\nabla_K(z) = a_0(K) + a_2(K)z^2 + a_4(K)z^4 + \dots, \quad a_{2n}(K) \in \mathbb{Z}$$

と表わせる。また、 $V_K(-1) = \nabla_K(2\sqrt{-1}) = \Delta_K(-1)$  であり、これらの絶対値を結び目の determinant という。

定義 2.3 結び目  $K$  の Seifert 行列  $\Theta$  に対し、行列  $\Theta + \Theta^T$  の符号数を  $K$  の符号数といい、 $\sigma(K)$  と表わす。

このとき、結び目の符号数は、偶数になる。

### 3 結び目解消数の評価、決定

すでに述べたように、結び目解消数を決定することは、難しい問題であるが、結び目解消数を評価、決定する方法として、これまでに知られている結果がいくつかあるので、ここでは、それらについて紹介する。

まず、特定の型の結び目に注目すると、

定理 3.1 ([7])  $K$  を自明でない 2 橋結び目とする。次の 3 つは同値。

- (1)  $u(K) = 1$
- (2) ある奇数  $p (> 1)$  と、 $2mn = p \pm 1$  を満たす互いに素な 2 つの自然数  $m, n$  があり、 $K \cong S(p, 2n^2)$
- (3)  $K \cong C(a, a_1, a_2, \dots, a_r, \pm 2, -a_r, \dots, -a_2, -a_1)$

定理 3.2 ([11])  $T_{p,q}$  を  $(p, q)$  torus 結び目とする。そのとき、

$$u(T_{p,q}) = (p-1)(q-1)/2$$

定理 3.3 ([9]) 自明でない pretzel 結び目  $K(2p+1, 2q+1, 2r+1)$  の結び目解消数が 1 であるための必要十分条件は、 $\{2p+1, 2q+1, 2r+1\}$  が  $\{1, 1\}, \{-1, -1\}, \{3, -1\}, \{3, 1\}$  のどれかを含むことである。

定理 3.4 ([9]) 種数が 1 で、結び目解消数が 1 の結び目は、ある結び目の 2 重化結び目に限る。

等があげられる。一般の結び目について、結び目解消数を評価したものとしては、

定理 3.5 ([17])  $u(K) \geq |\sigma(K)|/2$

定理 3.6 ([18])  $u(K) \geq m(K)$ ,

ここで、 $m(K)$  は中西指数、すなわち、結び目  $K$  の Alexander 行列の最小のサイズを表わす。

定理 3.7 ([3]) 向き付けられた結び目  $K$  の符号  $\varepsilon$  の交差点で、結び目解消操作を行って、自明な結び目が得られるならば、

$$\lambda(a, a) \equiv 2\varepsilon n^2 / \Delta(-1) \pmod{1}, \quad a \in H_1(M(K)),$$

ここで、 $\varepsilon = \pm 1$ ,  $M(K)$  は  $K$  上分岐する 3 次元球面  $S^3$  の 2 重分岐被覆空間、 $\lambda$  はリンク形式  $H_1(M(K)) \times H_1(M(K)) \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  を表わす。

等がある。結び目の不変量としてよく利用される多項式についてはどうかというところが知られている。

定理 3.8 ([10], [20])  $f(1)=1, f(t^{-1})=f(t)$  なる Laurent 多項式  $f(t)$  に対し、結び目解消数が 1 で、Alexander 多項式が  $f(t)$  であるような結び目  $K$  が存在する。

この定理は、Alexander 多項式が結び目解消数を決定する情報を含んでいないことを意味している。他の多項式については、

命題 3.9 ([8])

$$(1) \quad u(K) \geq \log_2 |P_K(\sqrt{-1}, \sqrt{-1})|,$$

$$(2) \quad u(K) \geq \log_3 |Q_K(-1)|,$$

ここで、 $Q_K(x)$  は  $\mathbb{Q}$  多項式 (定義は省略) を表わす。

が成り立つ。従って、Skein 多項式、 $\mathbb{Q}$  多項式は結び目解消数を決定する情報を含んでいることがわかる。しかし、命題 3.9 の評価は、本質的に中西指数によっているので、それ以上の結論は得られない。

#### 4 結び目解消数 1 の結び目の Jones 多項式

前節の終りでは、結び目の多項式不変量と結び目解消数について述べたが、Jones 多項式に関してはどうかという次の定理を得る。

定理 4.1  $K$  を向き付けられた、結び目解消数が 1 の結び目、 $\sigma(K)$  を  $K$  の符号数とする。

(1)  $\sigma(K) = 0$ 、かつ  $K$  の符号  $\varepsilon$  の交差点で、結び目解消操作を行って、自明な結び目が得られるならば、

$$V_K^{(1)}(-1) \equiv 24 a_4(K) + \frac{\varepsilon}{4} (\delta - 1) (\delta - 5) \pmod{48},$$

(2)  $\sigma(K) = 2\varepsilon$  ならば、

$$V_K^{(1)}(-1) \equiv 24 a_4(K) - \frac{\varepsilon}{4} (\delta + 1) (\delta + 5) \pmod{48},$$

ここで、 $\varepsilon = \pm 1$ 、 $\delta$  は  $K$  の determinant、 $V_K^{(1)}(-1)$  は  $K$  の Jones 多項式の  $t = -1$  における 1 階微分、 $a_4(K)$  は  $K$  の Conway 多項式の 4 次の係数を表わす。

系 4.2 結び目  $K$  が  $|\sigma(K)| \leq 2$ 、 $V_K(t^{-1}) = V_K(t)$ 、 $V_K(-1) \equiv 9 \pmod{12}$  を満たすならば、 $u(K) \geq 2$ 。

定理 4.1 の証明 結び目を分岐集合とする 3 次元球面  $S^3$  の 2 重分岐被覆空間の Casson 不変量を 2 通りの方法で計算することにより示されるが、ここでは詳しい議論は省略する。(参考論文 [1], [2], [12], [14], [15], [16], [21])

#### References

- [1] S. Akubult and J. McCarthy, "Casson's invariant for oriented homology 3-spheres: An exposition", Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, 1990.
- [2] S. Boyer and D. Lines, *Surgery formulae for Casson's invariant and extensions to homology lens spaces*, J. Reine Angew. Math. 45 (1990), 181-220.
- [3] T. D. Cochran and W. B. R. Lickorish, *Unknotting information from 4-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), 125-142.
- [4] J. H. Conway, *An enumeration of knots and links*, in "Computational Problems in Abstract Algebra", (ed. J. Leech) Pergamon Press, New York, 1969, pp. 329-358.
- [5] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B. R. Lickorish, K. Millett, A. Ocneanu, *A new polynomial invariant of knots and links*, Bull. Amer. Math. Soc. 12 (1985) 239-246.

- [6] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Ann. Math. 126 (1987), 335-388.
- [7] T. Kanenobu and H. Murakami, *Two -bridge knots with unknotting number one*, Proc. Amer. Math. Soc. 98 (1986), 499-502.
- [8] A. Kawauchi, "Musubime Riron (Knot Theory)", (in Japanese) Springer-Verlag Tokyo, Tokyo, 1990.
- [9] T. Kobayashi, *Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots*, Kobe. J. Math. 6 (1989) 53-62.
- [10] H. Kondo, *Knots of unknotting number 1 and their Alexander polynomials*, Osaka J. Math. 16 (197 ) 551-559.
- [11] P. B. Kronheimer and T. S. Mrowka, *Gauge Theory for embedded surfaces, I*, Topology 32 (1993) 773-826.
- [12] W. B. R. Lickorish, *The unknotting number of a classical knot*, Contemp. Math. 44 (1985), 117-121.
- [13] W. B. R. Lickorish and K. Millett, *A polynomial invariant of oriented links*, Topology 26 (1987) 107-141.
- [14] Y. Miyazawa, *Arf invariants of strongly invertible knots obtained from unknotting number one knots*, to appear in Osaka J. Math..
- [15] J. M. Montesinos, *Surgery on links and double branched cover of  $S^3$* , in "Knots, groups and 3-manifold", Ann. Math. Studies 84, Princeton Univ. Press, 1975, pp. 227-259.
- [16] D. Mullins, *The generalized Casson's invariant for 2-fold branched covers of  $S^3$  and the Jones polynomial*, Topology 32 (1993), 419-438.
- [17] K. Murasugi, *On a certain numerical invariant of link type*, Trans. Amer. Math. Soc. 117 (1965), 387-422.
- [18] Y. Nakanishi, *A note on unknotting number*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 9 (1981) 99-108.
- [19] Y. Nakanishi, *Unknotting numbers and knot diagrams with the minimum crossings*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. 11 (1983), 257-258.
- [20] T. Sakai, *A remark on the Alexander polynomials of knots*, Math. Sem. Notes. Kobe Univ. 5 (1977) 451-456.
- [21] K. Walker, "An extension of Casson's invariant", Annals of Mathematics Studies, 126, Princeton University Press, Princeton, 1992.

*Example 1.2:* Let  $\hat{M} = \mathbf{Z}$ ,  $M = \mathbf{N}_0 = \mathbf{N} \cup \{0\}$ ,  $N = \{0\}$ ,  $D_n = \{0, 1, \dots, n\}$ . Then  $Q_{D_n}^{M,N}(X, Y) = Sp^n(X/Y)$ , if  $Y \neq \emptyset$ .

*Example 1.3:* Let  $\hat{M} = \mathbf{Z}^2$ ,  $M = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)\}$ ,  $N = \{(0, 0), (1, 1)\}$ ,  $D_n = \{(i, i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ . Then  $Q_{D_n}^{M,N}(X) = C_n^\pm(X)$ . This is the space of “configurations of positive and negative particles” in  $X$ , where (in each configuration)

$$\text{number of positive particles} = \text{number of negative particles} \leq n.$$

This space was introduced in [Mc].

*Example 1.4:* Let  $\hat{M} = \mathbf{Z}^2$ ,  $M = \mathbf{N}_0^2$ ,  $N = \{(i, i) \mid i \in \mathbf{N}_0\}$ ,  $D_n = \{(i, i) \mid i = 0, 1, \dots, n\}$ . Then  $Q_{D_n}^{M,N}(X) = Gp^n(X)$ . This space is the “partial group completion” of  $Sp^n(X)$  which is defined as follows:

$$Gp^n(X) = \{\alpha - \beta \mid \alpha, \beta \in Sp^i(X), i = 0, 1, \dots, n, \alpha \cap \beta = \emptyset\}.$$

## §2 Stabilization.

Choose a sequence  $D_0, D_1, D_2, \dots$  such that  $D_n \subseteq \hat{M}$  and  $D_n \subseteq D_{n+1}$ . We have natural inclusion maps

$$s_n : Q_{D_n}^{M,N}(X) \rightarrow Q_{D_{n+1}}^{M,N}(X), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

**Definition.**  $\hat{Q}^{M,N}(X) = \bigcup_{n \geq 0} Q_{D_n}^{M,N}(X)$ .

*Example 2.1:* In example 1.2, the map  $s_n$  is just the natural inclusion  $Sp^n(X/Y) \rightarrow Sp^{n+1}(X/Y)$ . We have  $\hat{Q}^{M,N}(X, Y) = Sp^\infty(X/Y)$ . (Notice that we must use example 1.2; we cannot use example 1.1.) This space is also equal to  $Q^{\mathbf{N}_0, \{0\}}(X, Y)$ .

*Example 2.2:* In example 1.3, we have  $\hat{Q}^{M,N}(X) = Q_{\{0\}}^{\{-1, 0, 1\}, \{0\}}(X)$ .

*Example 2.3:* In example 1.4, we have  $\hat{Q}^{M,N}(X) = Gp^\infty(X) = Q_{\{0\}}^{\mathbf{Z}, \{0\}}(X)$ .

### §3 Two principles.

**Principle A.** *If  $m \geq 2$ , then*

$$\hat{Q}^{M,N}(\mathbf{R}^m) \simeq \Omega_0^m Q^{M,N}(S^m, \infty)$$

(i.e.  $\hat{Q}^{M,N}(\mathbf{R}^m)$  is homotopy equivalent to the identity component of  $\Omega^m Q^{M,N}(S^m, \infty)$ ).

Here,  $S^m = \mathbf{R}^m \cup \{\infty\}$ . This principle is valid (i.e. the statement is true) under certain technical conditions. We do not give these conditions here, so we call the statement a “principle”, instead of a “theorem”. The proof uses a method due to Segal and McDuff (see [Se2],[Mc]). An important idea behind the proof is the idea that the functor

$$(X, Y) \rightarrow \pi_i \hat{Q}^{M,N}(X, Y)$$

satisfies the axioms of a generalized homology theory (on a very special category of spaces and maps).

*Example 3.1:* (See examples 1.2, 2.1.) Dold and Thom ([DT]) showed that

$$\pi_i Sp^\infty(X/Y) \cong H_i(X, Y).$$

In this case, Principle A says that

$$Sp^\infty(\mathbf{R}^m) \simeq \Omega_0^m Sp^\infty(S^m).$$

(This is not very interesting, as both spaces are contractible).

*Example 3.2:* (See example 1.3.) In [Mc], McDuff showed that

$$C^\pm(\mathbf{R}^m) = \bigcup_{n \geq 0} C_n^\pm(\mathbf{R}^m) \simeq \Omega_0^m(S^m \times S^m)/\Delta.$$

(Here,  $Q^{M,N}(S^m, \infty) \simeq (S^m \times S^m)/\Delta$ , where  $\Delta = \{(x, y) \in S^m \times S^m \mid x = y\}$ ).

**Principle B.**

(i) *The map  $(s_n)_* : H_* Q_{D_n}^{M,N}(X) \rightarrow H_* Q_{D_{n+1}}^{M,N}(X)$  is an isomorphism for  $* < r$ , and a surjection for  $* = r$ , for some  $r = r(X, M, N, D_n)$ . (We say that “ $s_n$  is a homology equivalence up to dimension  $r$ ”.)*

(ii) *There exists a sequence  $D_0, D_1, D_2, \dots$  such that  $\lim_{n \rightarrow \infty} r = \infty$ .*

This principle holds for many examples (e.g. [Se2], [Ko], [GKY1], [Gu1], [Gu2], [GKY2]). In these examples, “homology” can be replaced by “homotopy”. We have a method to calculate  $r$  in the general situation, but we do not know whether (ii) holds in general.

# APPLICATIONS OF LABELLED CONFIGURATION SPACES

MARTIN GUEST, ANDRZEJ KOZŁOWSKI, AND KOHHEI YAMAGUCHI

## §1 Definitions.

Let  $\hat{M}$  be an abelian, associative monoid. Let  $M$  be any subset of  $\hat{M}$ . (We call  $M$  a “partial monoid”.)

**Definition.** Let  $X$  be a topological space.

- (1)  $Q^M(X)$  is the space of “labelled configurations” of the form  $\{(x_i, m_i)\}_{i \in \Lambda}$ , where
- a)  $x_i \in X$ , and  $i \neq j$  implies  $x_i \neq x_j$ ,
  - b)  $m_i \in M$ , and
  - c)  $|\Lambda| < \infty$ .

- (2) For  $D \subseteq \hat{M}$ ,  $Q_D^M(X) = \{ \{(x_i, m_i)\}_{i \in \Lambda} \in Q^M(X) \mid \sum_{i \in \Lambda} m_i \in D \}$ .

The space  $Q^M(X)$  is topologized so that a point  $(x, m)$  can collide with a point  $(x', m')$ , if  $m + m' \in M$ . Thus, the topology of  $Q^M(X)$  depends on the (partial) monoid structure of  $M$ . Because of this, our space  $Q^M(X)$  is slightly more general than the usual “labelled configuration spaces” in topology.

*Example 1.1:* Let  $\hat{M} = \mathbf{Z}$ ,  $M = \mathbf{N}$ ,  $D = \{n\}$ . Then  $Q_D^M(X) = Sp^n(X)$  (the  $n$ -th symmetric product of  $X$ ).

**Definition.** Let  $N \subseteq M$ . Let  $Y$  be a subspace of  $X$ .

- (1)  $Q^{M,N}(X, Y) = Q^M(X) / \approx$ , where the equivalence relation  $\approx$  is defined as follows:  
 $\{(x_i, m_i)\}_{i \in \Lambda} \approx \{(x'_i, m'_i)\}_{i \in \Lambda'}$  if and only if

$$\{(x_i, m_i) \mid i \in \Lambda, x_i \notin Y, m_i \notin N\} = \{(x'_i, m'_i) \mid i \in \Lambda', x_i \notin Y, m_i \notin N\}.$$

We denote the equivalence class of  $\{(x_i, m_i)\}_{i \in \Lambda}$  by  $[(x_i, m_i)]_{i \in \Lambda}$ .

- (2) For  $D \subseteq \hat{M}$ ,  
 $Q_D^{M,N}(X, Y) = \{ [(x_i, m_i)]_{i \in \Lambda} \in Q^{M,N}(X, Y) \mid \sum_{i \in \Lambda, x_i \notin Y, m_i \notin N} m_i \in D \}$ .



Principles A and B imply that the configuration space  $Q_{D_n}^{M,N}(\mathbf{R}^m)$  is a finite dimensional “model” for the iterated loop space  $\Omega_0^m Q^{M,N}(S^m, \infty)$ . To get interesting applications, we must establish Principles A and B, and we must identify the space  $Q^{M,N}(S^m, \infty)$ .

#### §4 Applications.

*I: Rational functions*

Let  $X = \mathbf{C}$ , and let

$$\begin{aligned}\hat{M} &= \mathbf{Z}^2 \\ M &= \{(i, j) \in \mathbf{N}_0^2 \mid i, j \geq 0 \text{ and } i = 0 \text{ or } j = 0\} \\ N &= \{(0, 0)\} \\ D &= \{(n, n)\}.\end{aligned}$$

In this case we have

$$Q_D^{M,N}(\mathbf{C}) \cong \{f : S^2 \rightarrow S^2 \mid f \text{ is holomorphic, } f(\infty) = 1, \deg f = n\} = \text{Hol}_n(S^2, S^2)$$

where  $S^2 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ . (This follows from the fact that such a function  $f$  is given by  $f(z) = p(z)/q(z)$ , where  $p, q$  are coprime monic polynomials of degree exactly  $n$ .)

In this case we have  $Q^{M,N}(S^2, \infty) \simeq S^2//S^1$ , and so  $\Omega_0^2 Q^{M,N}(S^2, \infty) \simeq \Omega_0^2 S^2$ . Segal established Principles A and B for this example (in [Se2]):

**Theorem (Segal).** *The natural inclusion  $\text{Hol}_n(S^2, S^2) \rightarrow \Omega_0^2 S^2$  is a homotopy equivalence up to dimension  $n$ .*

Our proof of this theorem is technically simpler than the proof in [Se2]. (In order to define the stabilized space, however, we must modify the space  $Q_D^{M,N}(X)$ . We use the same method that is used to obtain  $Gp^n(X)$  from  $Sp^n(X)$ . The stabilized space may then be identified with  $Q_{(0,0)}^{\mathbf{Z} \times \{0\} \cup \{0\} \times \mathbf{Z}, \{(0,0)\}}(X)$ .)

In [Gu1],[Gu2], this theorem was generalized to the case  $\text{Hol}(S^2, X)$ , where  $X$  is a toric variety.

## II: A generalization of positive and negative particles

Let  $X = \mathbf{C}$ , and let

$$\hat{M} = \mathbf{Z}^k$$

$$M = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \mid \epsilon_i = 0 \text{ or } 1\}$$

$$N = \{(\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) \in M \mid (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k) = \sum (0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)\}$$

$$D = \{(d_1, \dots, d_k) \mid 0 \leq d_i \leq n \text{ and } (d_1, \dots, d_k) = \sum (0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0)\}.$$

In this case we have  $\pi_i Q^{M,N}(S^2, \infty) \cong \pi_i \Omega S^3$  for  $i < 2k + 1$ . In [GKY2] we establish Principles A and B for this example:

**Theorem.** *There is a map  $Q_{D_n}^{M,N}(\mathbf{C}) \rightarrow \Omega_0^3 S^3$ , which is a homotopy equivalence up to dimension  $\min\{2k - 1, [n/2]\}$ .*

Another example is given in [Se1].

## REFERENCES

- [DT] Dold, A., and Thom, R., *Quasifaserungen und unendliche symmetrische Produkte*, Ann. of Math. **67** (1958), 239–281.
- [GKY1] M.A. Guest, A. Kozłowski, and K. Yamaguchi, *The topology of spaces of coprime polynomials*, to appear, Math. Z.
- [GKY2] M.A. Guest, A. Kozłowski, and K. Yamaguchi, *A new configuration space model for  $\Omega^3 S^3$* , in preparation.
- [Gu1] M.A. Guest, *On the space of holomorphic maps from the Riemann sphere to the quadric cone*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **45** (1994), 57–75.
- [Gu2] M.A. Guest, *Topology of the space of rational curves on a toric variety*, preprint.
- [Ko] A. Kozłowski, *Stabilization of homology groups of spaces of mutually disjoint divisors*, RIMS (Kyoto University) Kokyuroku **8** (1992), 108–116.
- [Mc] D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, Topology **14** (1975), 91–107.
- [Se1] G.B. Segal, *K-Theory and Operator Algebras*, Lecture Notes in Mathematics 575 (B.B. Morrel, I.M. Singer, eds.), pp. 113–127.
- [Se2] G.B. Segal, *The topology of spaces of rational functions*, Acta Math. **143** (1979), 39–72.

*Tokyo Institute of Technology and University of Rochester, USA*

*Toyama International University*

*The University of Electro-Communications*

*martin@math.titech.ac.jp*

*cleo@tansei.cc.u-tokyo.ac.jp*

*f00741@sinet.ac.jp*

# 同変代数的K理論の局所化定理とその応用

都立大理 竹田 雄一郎

## §0. 序

Atiyah - Segal - Singer による  $G$ -Index theorem とその系として得られる Fixed point formula の代数幾何におけるアナロジーについて話をします。

compact Lie 群  $G$  の作用する多様体  $X$  上の elliptic  $G$ -operator  $P$  を考えます。Fixed point formula というのは  $P$  の Lefschetz number  $\text{ind}_g(P)$  ( $g \in G$ ) をコホモロジーの言葉で表現する公式でした。

代数幾何の世界には "elliptic operator" というものが (少なくとも筆者の知る範囲では) 存在しないのが、代わりに次の問題を考えます。

$G$  を体上の reductive group,  $X$  を  $G$  の作用する proper variety とします。  $X$  上の  $G$ -vector bundle  $\mathcal{F}$  と semisimple point  $g \in G$  に対し、

$$\text{ind}_g(\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \text{tr}(g: H^i(X, \mathcal{F}))$$

を  $\mathcal{F}$  のコホモロジーの言葉で表現せよ。

本講演では同変K群の局所化定理を証明し、これ

により Fixed point formula の類似人を導くことができることを示します。その意義は、reductive group (例えば  $GL_n$ ) のような compact でない Lie 群の作用する vector bundle についても代数的な状況では compact Lie 群の作用する場合と同様の Fixed point formula が成立するという所にあります。

この問題については、R. Thomason の一連の仕事があります。しかし、彼の用いた道具および手法は筆者には非常に難解に思えます。なお、彼は筆者と独立に [Th. 3] の中で同じ結果を証明しています。

### §1. equivariant algebraic K theory

この章では、以下の議論で中心的道具である同変代数的 K 群を Thomason の論文 [Th. 1] に従って定義する。まず記号の定義をします。scheme はすべて noetherian, separated であると仮定します。

$S \in$  base scheme,  $G \in$  faithfully flat, affine group scheme/ $S$ ,  $X$  を  $G$  の作用する scheme/ $S$  とします。このとき、 $X$  上の coherent  $G$ -module のカテゴリと、その代数的 K 群を定義することかできます。それを  $G_*(G, X)$  と表します。locally free  $G$ -module からなる full subcategory (これは  $G$ -vector bundle のカテゴリと同視できます) に対しても同じく代数的 K 群が定義できます。それを  $K_*(G, X)$  と表します。特に  $G_0(G, X)$  は coherent  $G$ -module のカテゴリ

の Grothendieck 群にたいし、 $K_0(G, X)$  は  $G$ -vector bundle のカテゴリーの Grothendieck 群にたいします。

これらの  $K$  群は 群作用なしの scheme の  $K$  群の性質をほとんどそのままたします。詳しくは [Th1] を見て下さい。

## §2. localization theorem

$M$  を有限生成 abel 群、 $\mathbb{Z}[M]$  を群環とします。

$T = \text{Spec } \mathbb{Z}[M]$  は  $\mathbb{Z}[M]$  の comultiplication ( $m \mapsto m \otimes m$ ) により、群の構造が入ります。  $T$  は diagonalizable group と呼ぶことにします。  $M$  が自由のとき  $T$  は torus といいます。  $T$  の表現は 一次元表現の直和に分解し、  $T$  の表現環を  $R(T)$  と表すと、  $R(T) \cong \mathbb{Z}[M]$  が成り立ちます。

$X$  を  $T$  が自明に作用する base scheme  $S$  上の scheme とします。  $X$  上の coherent  $T$ -module  $\mathcal{F}$  は  $m \in M$  に対して weight 分解します。つまり、

$$\mathcal{F} = \bigoplus_{m \in M} \mathcal{F}_m, \quad \mathcal{F}_m \text{ は } m \in M \text{ により } T \text{ が作用する。}$$

このことから、

$$\left( \begin{array}{c} \text{coherent } T \text{ module} \\ \text{のカテゴリー} \end{array} \right) \cong \bigoplus_{m \in M} \left( \begin{array}{c} \text{coherent } \mathcal{O}_X \text{ module} \\ \text{のカテゴリー} \end{array} \right)_m$$

従って、 $G_*(T, X) \cong G_*(X) \otimes \mathbb{Z}[M]$ 、 $K_*(T, X) \cong K_*(X) \otimes \mathbb{Z}[M]$  が成り立ちます。ただし、 $G_*(X)$ 、 $K_*(X)$  は scheme  $X$  の Quillen による  $K'$ -theory と  $K$ -theory です。

このことから base scheme  $S$  の同変  $K$  群  $K_*(T, S), G_*(T, S)$  は  $\mathbb{Z}[M]$  加群になり、 $T$  の作用する  $S$  上 scheme の同変  $K$  群にも  $\mathbb{Z}[M]$  加群の構造が入ることになります。

$\Lambda$  を  $\{[0] - [m] ; m \neq 0 \in M\}$  で生成される  $\mathbb{Z}[M]$  の積閉集合とします。  $\Lambda$  で局所化した  $K$  群  $K_*(T, X)_\Lambda, G_*(T, X)_\Lambda$  を考えることができます。このとき、次の定理が成り立ちます。

### Main theorem

$X$  は  $S$  上定義された  $T$  の作用する scheme で、 $X$  は  $S$  上 of finite type とします。  $X$  の  $T$  の作用に関する fixed point scheme を  $X^T$  と表すと、埋め込み  $i: X^T \hookrightarrow X$  による導入される写像

$$i_* : G_*(T, X^T)_\Lambda \longrightarrow G_*(T, X)_\Lambda$$

は同型。

証明のあらましは §4 を見てください。

$X$  を regular  $T$ -scheme とします。このとき、fixed point scheme  $X^T$  も regular で、 $i: X^T \hookrightarrow X$  の conormal sheaf  $\mathcal{N}$  は locally free になります。  $\lambda \mapsto \sum (-1)^i [\lambda^i \mathcal{N}] \in K_0(T, X^T)$  とするとこれは  $\Lambda$  で局所化すると可逆元になります。

$i_* \circ i^* : G_*(T, X^T) \longrightarrow G_*(T, X^T)$  は  $\lambda \sim N$  をかけたあわゆる写像と等しくなります。このことから次の系が導かれます。

Corollary 1.

$$i^* : K_*(T, X)_\Lambda \longrightarrow K_*(T, X^T)_\Lambda \text{ は同型.}$$

次に split reductive group が作用する場合を考えます。  $G$  は split reductive group /  $\mathbb{Z}$ ,  $T \subset G$  は maximal torus とします。  $R(G)$  は  $G$  の表現環,  $W$  は  $G$  の Weyl 群 とします。  $R(G)$  は 加法群 としては 既約表現で生成される自由加群で  $R(G) = R(T)^W$  が成り立ちます。

$M$  を  $T$  の指標群, ( $T = \text{Spec } \mathbb{Z}[M]$ ) とし,  $\Lambda' = \left\{ \prod_{w \in W} ([0] - [m^w]) \right\}$ ,  $m \neq 0 \in M$  で生成される  $R(T)^W = R(G)$  の積閉集合とすると。

Corollary 2.

$X$  は  $S$  上の  $G$  の作用をもつ scheme  $Z$ 。  $S$  は of finite type とすると。

$$i_* : G_*(G, X^G)_\Lambda \longrightarrow G_*(G, X)_\Lambda \text{ は同型}$$

(pf)  $K_0(G, X) \rightarrow K_0(T, X)$  が単射であることから



Main theorem に帰着できる。

### §3. fixed point formula

この § では  $S = \text{Spec } k$ ,  $k$  は体と仮定します。

$G \in \text{reductive group}/k$ ,  $X \in \text{proper smooth } G\text{-variety}/k$ ,  $\mathcal{F} \in X$  上の  $G$ -vector bundle とします。

このとき、 $\mathcal{F}$  の  $G$ -index  $\in$

$$\text{ind}_G(\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i [H^i(X; \mathcal{F})] \in R(G)$$

と定義します。  $g \in G(k)$ ,  $k$ -point に対し

$$\text{ind}_g(\mathcal{F}) = \sum_i (-1)^i \text{trace}(g: H^i(X; \mathcal{F})) \in k$$

と定義します。 すると、次の可換図式

$$\begin{array}{ccc} K_0(G, X) & \xrightarrow{\text{ind}_G} & R(G) \\ & \searrow \text{ind}_g & \downarrow \text{trace of } g \\ & & k \end{array}$$

が成り立ちます。

$g \in G(k)$  は semisimple element と仮定します。

$T' = \overline{\langle g \rangle} \in$   $g$  を含む  $G$  の最小の閉部分群とすると、 $T'$

は  $k$  の閉体にもち上げると diagonalizable group に

なります。このことから  $g: X \rightarrow X$  の fixed point scheme

$X^g$  は regular であることがわかります。埋め込み  $i: X^g \hookrightarrow X$

の conormal sheaf  $\in \mathcal{N}_g$  と表します。

$A^*( )$  を  $k$ -variety の cohomology theory とする。  
 例えは "Chow 群" とか。  $k = \mathbb{C}$  の場合は singular cohomology  
 もそうである。  $\text{ch}_g$  を

$$\text{ch}_g : K_0(G, X^g) \rightarrow K_0(T', X^g) \cong K_0(X^g) \otimes R(T')$$

$$\downarrow \text{ch} \otimes t_g$$

$$A^*(X^g) \otimes k$$

と定義する。すると  $\lambda_1 \mathcal{N}_g = \sum (-1)^i [\wedge^i \mathcal{N}_g] \in K_0(G, X^g)$   
 に対し  $\text{ch}_g(\lambda_1 \mathcal{N}_g) \in A^*(X^g) \otimes k$  は可逆元になり得る。

### Theorem (fixed point formula)

$$\text{deg} \left( \frac{\text{ch}_g(\mathbb{F}|_{X^g})}{\text{ch}_g(\lambda_1 \mathcal{N}_g)} \cdot T_d(X^g) \right) = \text{ind}_g(\mathbb{F})$$

$T = T^d$  且  $X^g = \phi$  のときは左辺は 0 と定義する。

(pf). 両辺は体  $k$  を拡大しても不変なので、 $T'$  は  
 diagonalizable とする。 §2 の Main theorem と  
 その系、及び Riemann-Roch の定理を組み合わせると  
 と上の公式が得られる。

### §4. Main theorem の証明

$K$  群の性質、 $\llcorner$  に localization exact sequence と、  
 noetherian induction を使ってより簡単な場合に、

7.111には  $\mathbb{P}^n$  まで帰着させる。というのが方針である。

0)  $X^T = \emptyset \Rightarrow G_i(T, X)_\Lambda = 0$  を示せばよい

これは  $K$  群の localization exact sequence より可成にわかる。

1)  $S$  が体へ帰着させる

$S$  が reduced としてよいことは明らか。  $S$  について noetherian induction を用いることにする。  $X \rightarrow S$  が generically surjective として  $S$  が integral scheme としてよいことがわかる。

$U \subset S$  を affine open subset,  $Z = S - U$  とすると

$$\cdots \rightarrow G_i(T, X_Z)_\Lambda \rightarrow G_i(T, X)_\Lambda \rightarrow G_i(T, X_U)_\Lambda \rightarrow \cdots$$

は exact。  $T = T \otimes_S S$ ,  $X_Z = X \otimes_S Z$ ,  $X_U = X \otimes_S U$ 。 noetherian induction により  $G_i(T, X_Z)_\Lambda = 0$  としてよいことがわかる。

$$G_i(T, X)_\Lambda \cong G_i(T, X_U)_\Lambda$$

このように  $U$  について limit をとると

$$G_i(T, X)_\Lambda \cong \varinjlim G_i(T, X_U)_\Lambda \\ \cong G_i(T, \varprojlim X_U)_\Lambda$$

しかし  $\varprojlim X_U \cong X \otimes_S \text{Spec } k(S)$ ,  $k(S)$  は  $S$  の函数体  $T$  から  $S = \text{Spec } k(S)$  のときへ帰着できる。

2)  $T$  が torus へ帰着させる

[Th. 2] によると  $X$  の  $T$ -invariant affine open subset が存在する。  $X$  について noetherian induction と  $K$  群の

localization exact sequence 1.5.2  $X$  は affine としよ  
 11.

$T = T_1 \times T_2$ ,  $T_1$  は torus,  $T_2$  は finite group scheme  
 と分解する。  $T_2$  は ある torus  $\tilde{T}_2$  の閉部分群である  
 こと。  $\tilde{T} = T_1 \times \tilde{T}_2$  は torus とすると  $T$  は  $\tilde{T}$  の閉部分群  
 である。  $\tilde{T} \times X$  上の  $T$  の作用を  $(\tilde{t}, x) \cdot t = (\tilde{t}t, t^{-1}x)$   
 で定義する。  $\tilde{T} \times X$  上の  $T$  の作用での quotient を考えると  
 これは  $\tilde{T}_2 \times X$  上の  $T_2$  での quotient と一致する。  $\tilde{T}_2 \times X$  は  
 affine で  $T_2$  は finite torus の quotient scheme が存在する。

Morita equivalence により

$$G_i(T, X) \cong G_i(\tilde{T}, \tilde{T} \times X / T)$$

が成り立つので torus  $\tilde{T}$  の場合に帰着できる。

### 3) $\mathbb{P}^n$ に帰着させる

$X$  に関する noetherian induction と  $K$  群の localization  
 exact sequence により  $X$  は regular としよ 11。 [Su] により  
 $X$  は  $T$ -ample line bundle を持つ。つまり、有限次元の  $T$ -  
 表現空間  $E$  があって、  $X$  から  $\mathbb{P}(E)$  へのうめこみがある。  $X^T = \phi$   
 を仮定していたので

$$i: X \hookrightarrow \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E)^T$$

が存在する。

$G_* (T, X)_\Lambda$  は  $K_0(T, X)_\Lambda$ -module であるから  $K_0(T, X)_\Lambda = 0$   
 を示せばよい。  $i^*: K_0(T, \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E)^T)_\Lambda \rightarrow K_0(T, X)_\Lambda$   
 は環準同型だから  $K_0(T, \mathbb{P}(E) - \mathbb{P}(E)^T)_\Lambda = 0$  を示せばよい。

$P(E) - P(E)^T$  は smooth だから  $K_0(T, P(E) - P(E)^T) \cong G_0(T, P(E) - P(E)^T)$ .  $LT$  によって  $P^n(E)$  の場合に帰着できる。

#### 4) $P(E)$ の場合

§2. Corollary 1. で示すように

$i^* : K_*(T, P(E))_{\mathbb{Z}} \rightarrow K_*(T, P(E)^T)_{\mathbb{Z}}$  が同型  
を証明すればよい。この場合はそれぞれの  $K$  群を計算  
して同型を示す。詳しくは [Ta] を見てください。

#### 文献

[Su] H. Sumihiro, Equivariant completion II.

J. Math. Kyoto Univ. 15 (1975) 573-605

[Ta] Y. Takeda, Localization theorem in equivariant algebraic K-theory, to appear in JPAA

[Th. 1] R. Thomason, Algebraic K-theory of group scheme actions, Am. Math. Studies 113  
539-563

[Th. 2] R. Thomason, Lefschetz-Riemann-Roch theorem and coherent trace formula, Invent. Math. 85  
(1986) 515-543

[Th. 3] R. Thomason, Une formule de Lefschetz en K-théorie équivariante algébrique, Duke Math J.  
68 (1992) 447-462

# 実代数曲線のトポロジーとニュートン図形

名工大 福井敏純

**序.** 2変数実多項式  $f(x, y) = \sum a_{ij}x^i y^j$  に対し  $a_{ij} \neq 0$  なるような点  $(i, j)$  全体の集合の凸包を  $f$  のニュートン図形と呼び  $\Delta(f)$  で表す。本稿では多項式  $f$  の零点集合のトポロジーと  $f$  のニュートン図形  $\Delta(f)$  との関連を論ずる。(本稿の内容は preprint として準備中である。)

定義より明らかにニュートン図形は整凸多角形である。ここで整とは各頂点がすべて整数点という意味である。多項式  $f(x, y)$  が非退化とは、 $\Delta(f)$  の各面(頂点、辺、 $\Delta(f)$  自身)  $\gamma$  に対し  $f_\gamma(x, y) = \sum_{(i,j) \in \gamma} a_{ij}x^i y^j$  の勾配ベクトルが  $(C-0)^2$  上至るところ消えない時をいう。このとき  $f$  の実または複素の零点集合は適当な実または複素コンパクトトーリック曲面  $P_\Delta(K)$ ,  $K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  のなかで非特異代数多様体としてコンパクト化される。この集合をそれぞれ  $Z(\mathbf{R}), Z(\mathbf{C})$  と表す。トーリック曲面については次節で述べるがアフィン平面や射影平面、射影直線の直積などを特別の場合として含む曲面のクラスである。このとき次の事実が古典的に知られている。

**定理 (HARNACK の不等式).**  $Z(\mathbf{R})$  の連結成分の個数は  $g+1$  を超えない。但し  $g$  は  $Z(\mathbf{C})$  の種数である。

$M = g+1$  とおき  $Z(\mathbf{R})$  の連結成分が  $M-i$  個ある時  $Z$  を  $(M-i)$ -曲線( $(M-i)$ -curve)と呼ぶ習慣である。今の場合  $\Delta(f)$  の内部にある  $M$  の点の個数が  $g$  で、これは  $g = 1 - \frac{1}{2} \text{Vol}_1(\Delta(f)) + \text{Vol}_2(\Delta(f))$  (Pick の公式)を満たす。ここで  $\text{Vol}_k(\Delta)$  は  $\Delta$  のすべての  $k$ -次元面の  $k$ -次元体積の総和を表す。但し、 $M$  の基底の一部で生成される  $k$  次元平行多面体の体積を 1 としている。Harnack の不等式の証明 [W, §6] より、 $Z(\mathbf{C}) - Z(\mathbf{R})$  の連結成分は高々 2 つである。 $Z(\mathbf{C}) - Z(\mathbf{R})$  の連結成分が 2 つの時、 $Z$  は分割曲線(dividing curve)という。[W, §6] にも注意してあるように、 $M$ -曲線は分割曲線であり、 $i$  が奇数の時  $(M-i)$ -曲線は分割曲線にならない。

円板  $B_i \subset P_\Delta(\mathbf{R})$   $i = 1, \dots, s$  が存在して次を満たすとき  $Z$  の nest の深さは  $s$  であるという。

- (i) 各  $B_i$  の境界は  $Z(\mathbf{R})$  の連結成分。
- (ii)  $B_i$  の閉包は  $B_{i+1}$  の内部に含まれる。



深さ 3 の nest

**定理 A.**  $Z$  の nest の深さは  $\text{Vol}_2(\Delta(f))/p$  を超えない。但し、 $p$  は  $\Delta(f)$  に含まれる線分の長さ (=線分上の整数点の個数-1) の最大数。

$P_\Delta = P^2$  (射影平面) の時はこの定理は古典的な Bézout の定理の帰結で Hilbert の定理という。この定理の証明は (1.9) の補足で与える。

$B^\pm = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \pm f(x, y) \geq 0\}$  と置く。整凸多角形  $\Delta$  が偶とは  $\Delta$  が他の整凸多角形の 2 倍になっている時をいう。もしニュートン図形  $\Delta(f)$  が偶ならば、集合  $B^\pm$  は上述のコンパクト実トーリック曲面の中で境界付き曲面としてコンパクト化される。コンパクト化して得られる集合を記号  $P_\Delta^\pm$  で表す。我々はこの集合  $P_\Delta^\pm$  のオイラー数  $\chi(P_\Delta^\pm)$  に関心を持とう。 $\Delta(f)$  が原点を含み  $B^+$  がコンパクトなら  $P_\Delta^+ = B^+$  である。トーリック多様体の記号を避けるために、序では以後しばしばこの条件を仮定する。更に多項式  $f$  が非退化ならばその実零点集合は実アフィン平面内の有界な非特異実代数曲線であり、特にいくつかの互いに交わらない  $S^1$  の合併集合になる。

定理 B. 多項式  $f$  が非退化で  $\Delta(f)$  が偶かつ原点を含み、さらに  $B^+$  がコンパクトと仮定する。

- (i)  $Z$  が  $M$ -曲線ならば  $\chi(B^+) \equiv \frac{1}{2}\text{Vol}_2(\Delta(f)) \pmod{8}$ 。
- (ii)  $Z$  が  $(M-1)$ -曲線ならば  $\chi(B^+) \equiv \frac{1}{2}\text{Vol}_2(\Delta(f)) \pm 1 \pmod{8}$ 。
- (iii)  $Z$  が  $(M-2)$ -曲線で非分割曲線ならば  $\chi(B^+) \equiv \frac{1}{2}\text{Vol}_2(\Delta(f)); \frac{1}{2}\text{Vol}_2\Delta(f) \pm 2 \pmod{8}$ 。
- (iv)  $Z$  が分割曲線ならば  $\chi(B^+) \equiv \frac{1}{2}\text{Vol}_2(\Delta(f)), \frac{1}{2}\text{Vol}_2\Delta(f) + 4 \pmod{8}$ 。

$P_\Delta = P^2$  の時、すなわち偶数次非特異実射影曲線の場合は A.Marin [M1] に証明されている。 $P_\Delta = P^2$  の場合、歴史的には (i) は D.A.Gudkov [G], V.A.Rokhlin [R1] によって (ii) は D.A.Gudkov-A.D.Krachnov [GK], V.M.Kharlamov [K2] によって (iv) は V.I.Arnol'd [A] によって得られている。 $P_\Delta = P^1 \times P^1$  (射影直線の直積) の時は松岡幸子氏が [M3, M5] で同様な合同式を証明した。§2 では、この定理のトーリック曲面への一般化とその証明を与える。

定理 C. 多項式  $f$  が非退化で  $\Delta(f)$  が偶ならば、次の不等式が成り立つ。

$$3 - e(\Delta(f)) + \frac{1}{4}\text{Vol}_1(\Delta(f)) - \frac{3}{4}\text{Vol}_2(\Delta(f)) \leq \chi(P_\Delta^+) \leq 1 - \frac{1}{4}\text{Vol}_1(\Delta(f)) + \frac{3}{4}\text{Vol}_2(\Delta(f)).$$

但し  $e(\Delta)$  は整多角形  $\Delta$  の辺の個数。

$P_\Delta = P^2$  の場合、この不等式は I.Petrovsky [P] が偶数次非特異実射影曲線について示した不等式そのものである。

$f$  の実零点集合の連結成分が 零卵形線 (0-oval) とはそれが実円板の境界になるときをいう。(この呼び方はここだけの local rule である。) 一般に、非特異実曲面内の連結曲線で有向曲面を近傍にもつものを 卵形線 (oval) と呼ぶようである。以後  $\Delta(f)$  が原点を含みかつ  $B^+$  がコンパクトかつ  $f$  が非退化と仮定する。このとき  $Z(\mathbf{R})$  は零卵形線のみからなる。ある卵形線が外側から偶数 (奇数) 個の他の卵形線から囲まれるときこの卵形線を偶 (奇) 卵形線であるという。偶 (奇) 卵形線の個数を  $N^+$  ( $N^-$ ) と書く。明らかに  $\chi(B^+) = N^+ - N^-$  である。偶 (奇) 卵形線がすぐ内側に囲む  $B^+$  ( $B^-$ ) の連結成分のオイラー数が正、0、負のときこの卵形線は正、0、負であるという。正、0、負の偶 (奇) 卵形線の個数をそれぞれ  $N_+^+, N_0^+, N_-^+$  ( $N_+^-, N_0^-, N_-^-$ ) で表す。

定理 D. 多項式  $f$  が非退化で  $\Delta(f)$  が偶かつ原点を含み、さらに  $B^+$  がコンパクトの時、次の不等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} (1^\pm) \quad N_\pm^+ + N_0^\pm &\leq 2 - \frac{1}{4}\text{Vol}_1(\Delta(f)) + \frac{1}{4}\text{Vol}_2(\Delta(f)) \\ (2^+) \quad N^+ &\leq 1 - \frac{1}{4}\text{Vol}_1(\Delta(f)) + \frac{3}{4}\text{Vol}_2(\Delta(f)) + N_-^- \\ (2^-) \quad N^- &\leq 1 - \frac{1}{4}\text{Vol}_1(\Delta(f)) + \frac{3}{4}\text{Vol}_2(\Delta(f)) + N_-^+ + e(\Delta(f)) - 4 \end{aligned}$$

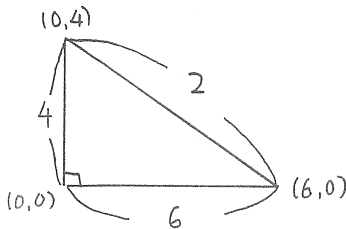
さらに、 $(1^\pm)$  で等号が成立すれば  $N_+^\pm = N_-^\pm = 0$ 。

$P_\Delta = P^2$  の時、即ち偶数次非特異実射影曲線の場合にはこの不等式は V.I.Arnol'd [A] でその証明のアイディアが提出された。G.Wilson [W] §7 に証明がある。§3 では定理 C, D のトーリック曲面への一般化とその証明を与える。また松岡幸子氏の [M3] に定理 C, D の  $P_\Delta = P^1 \times P^1$  の時の記述がある。

系. 多項式  $f$  が非退化で  $\Delta(f)$  が偶かつ原点を含み、さらに  $B^+$  がコンパクトと仮定する。

- (i)  $Z$  が  $(M-i)$ -曲線ならば  $N_+^+ + N_+^- \geq \frac{1}{2} \text{Vol}_2(\Delta(f)) - i$ .
- (ii)  $Z$  が  $(M-i)$ -曲線で  $B^+$  が互いに交わらない円板の和集合ならば  $i \geq 1 - \frac{1}{4} \text{Vol}_1(\Delta(f)) + \frac{1}{4} \text{Vol}_2(\Delta(f))$ .

例.  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0,0), (6,0), (0,4)$  の凸包となるような非退化な多項式  $f$  を考える。すると



$$\begin{aligned}
 e(\Delta(f)) &= 3, \\
 \text{Vol}_1(\Delta(f)) &= 12, \\
 \text{Vol}_2(\Delta(f)) &= 12, \\
 g &= 7, \\
 M &= g + 1 = 8.
 \end{aligned}$$

が判る。 $B^+$  をコンパクトとすると定理 A より  $\text{nest}$  の深さは高々 2 で、定理 B より  $-6 \leq \chi(B^+) \leq 7$ , 定理 C より  $Z$  が  $M$ -曲線ならば  $\chi(B^+) \equiv 6 \pmod{8}$ ,  $Z$  が  $(M-1)$ -曲線ならば  $\chi(B^+) \equiv 5, 7 \pmod{8}$ . よって  $Z(\mathbf{R})$  のイソトピー型は下の表のいずれかである事が判る。またこの表のどの型も実際に存在することが判っている。但し例えば記号  $\frac{5}{1}2$  は右下図の様なイソトピー型をもつ曲線を表す。

		$\frac{5}{1}2$				$\frac{1}{1}6$	
	$\frac{5}{1}1$	$\frac{4}{1}2$			$\frac{1}{1}5$	7	
$\frac{5}{1}$	$\frac{4}{1}1$	$\frac{3}{1}2$	$\frac{2}{1}3$	$\frac{1}{1}4$	6		
	$\frac{4}{1}$	$\frac{3}{1}1$	$\frac{2}{1}2$	$\frac{1}{1}3$	5		
		$\frac{3}{1}$	$\frac{2}{1}1$	$\frac{1}{1}2$	4		
			$\frac{2}{1}$	$\frac{1}{1}1$	3		
				$\frac{1}{1}$	2		
					1		
					$\emptyset$		

$\frac{5}{1}2$  の素イソトピー型



### §1. トーリック多様体. まずトーリック多様体の定義を復習しよう。詳細は 小田忠雄氏の教科書 [O], または V.I.Danilov [D], W.Fulton [F] 等を参照のこと。

(1.1). 格子  $\mathbf{Z}^n$  を  $M$  で表し、その双対格子  $\text{Hom}_{\mathbf{Z}}(M, \mathbf{Z})$  を  $N$  で表す。 $M$  の元を横ベクトル、 $N$  の元を縦ベクトルで表すことにする。 $M_{\mathbf{R}} = M \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$ ,  $N_{\mathbf{R}} = N \otimes_{\mathbf{Z}} \mathbf{R}$  と置く。 $N$  の有限個の元  $v_1, \dots, v_s$  の非負実係数線形結合として表される  $N_{\mathbf{R}}$  の部分集合  $\sigma$  を  $v_1, \dots, v_s$  の生成する  $N$  の錐 (cone in  $N$ ) という。 $\sigma \cap -\sigma = 0$  を仮定しておく。 $N$  の錐  $\sigma$  に対し、

$$\begin{aligned}
 \sigma^{\vee} &= \{u \in M_{\mathbf{R}} : \langle u, v \rangle \geq 0, \forall v \in \sigma\} \\
 \sigma^{\perp} &= \{u \in M_{\mathbf{R}} : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in \sigma\}
 \end{aligned}$$

とおく。 $\sigma^{\vee}$  は  $M$  の錐である。加法半群  $M \cap \sigma^{\vee}$  が生成する体  $K$  上の代数を  $K[M \cap \sigma^{\vee}]$  と書き、 $\text{Spec}(K[M \cap \sigma^{\vee}])$  の  $K$ -値点全体の集合を  $U_{\sigma}(K)$  と書く。すると  $U_{\sigma}(K)$  は



$K[M \cap \sigma^\vee]$  から  $K$  への  $K$ -代数としての射全体であり、 $u_1, \dots, u_r$  を  $K$ -代数としての  $K[M \cap \sigma^\vee]$  の生成元とすると単射  $U_\sigma(K) \ni \alpha \mapsto (\alpha(u_1), \dots, \alpha(u_r)) \in K^r$  により  $U_\sigma(K)$  にアファイン代数的集合の構造が入る。 $U_\sigma(K)$  がアファイントーリック多様体である。

(1.2). 錐  $\sigma_1$  が錐  $\sigma_2$  の面ならば、 $K[M \cap \sigma_1^\vee]$  と  $K[M \cap \sigma_2^\vee]$  は同じ商体をもつので、自然な包含写像  $\sigma_2^\vee \subset \sigma_1^\vee$  は開埋込  $U_{\sigma_1}(K) \subset U_{\sigma_2}(K)$  を誘導する。従って  $\Sigma$  が扇 (fan)、すなわち複体であるような  $N$  の錐の有限集合、であれば  $U_\sigma(K)$ ,  $\sigma \in \Sigma$ , を貼り合わせて  $K$  上の代数的集合が得られる。この集合を  $X_\Sigma(K)$  で表しトーリック多様体と呼ぶ。各  $\sigma \in \Sigma$  に対して  $\sigma \cap N$  が  $N$  の基底の一部で生成されるとき  $\Sigma$  は非特異であるという。このとき  $X_\Sigma(K)$  は非特異代数多様体になる。

(1.3).  $\varphi: N' \rightarrow N$  を格子の射、 $\Sigma$  を  $N$  の扇、 $\Sigma'$  を  $N'$  の扇とする。各  $\sigma' \in \Sigma'$  に対し  $\varphi(\sigma') \subset \sigma$  なる  $\sigma \in \Sigma$  が存在するとき、 $(N', \Sigma')$  は  $(N, \Sigma)$  を支配するといい  $(N', \Sigma') \rightarrow (N, \Sigma) \ (N = N'$  の時など誤解の恐れのないときは短く  $\Sigma' \rightarrow \Sigma)$  と書く。このとき射  $\varphi$  は射  $U_{\sigma'}(K) \rightarrow U_\sigma(K)$  を誘導し、さらに射  $X_{\Sigma'}(K) \rightarrow X_\Sigma(K)$  を誘導する。扇  $\Sigma$  に対し、各  $\sigma \in \Sigma$  の相対内部の合併集合を  $|\Sigma|$  と書く。このとき  $X_{\Sigma'}(K) \rightarrow X_\Sigma(K)$  が固有 (proper) である事と  $\varphi^{-1}(|\Sigma|) = |\Sigma'|$  とは同値である。特に  $X_\Sigma$  がコンパクトである事は  $|\Sigma| = N_{\mathbb{R}}$  と同値。

(1.4).  $K$ -代数  $K[M \cap \sigma^\perp]$  のスペクトルの  $K$ -値点全体の集合を  $T_\sigma(K)$  と表す。 $T_\sigma(K)$  は代数的トーラス  $(K - 0)^{n - \dim \sigma}$  と同型である。 $\sigma$  が  $\sigma_1$  の面ならば、射  $\alpha: K[M \cap \sigma^\perp] \rightarrow K$  の零拡大は射  $\alpha: K[M \cap \sigma_1^\perp] \rightarrow K$  を誘導するので、自然に  $T_\sigma(K)$  は  $U_{\sigma_1}(K)$  の部分集合になる。 $T_\sigma(K)$  を  $X_\Sigma$  の  $\sigma$ -軌道とよぶ。任意のトーリック多様体は  $X_\Sigma(K) = \coprod_{\sigma \in \Sigma} T_\sigma(K)$  なる軌道分解がある。 $T_\sigma(K)$  の  $X_\Sigma(K)$  内での閉包を  $V_\sigma(K)$  と書く。

(1.5).  $\Delta$  を有限個の頂点をもつ  $M_{\mathbb{R}}$  内の有理凸多面体とする。 $\Delta$  の各面  $F$  に対し、 $\tau_F = \text{Cone}(\Delta; F) = \bigcup_{r \geq 0} r(\Delta - m)$ , 但し、 $m$  は  $F$  の相対内部の点。このとき  $\Sigma_\Delta := \{\tau_F^\vee\}$  は扇である。この扇  $\Sigma_\Delta$  に対応するトーリック多様体を  $P_\Delta(K)$  で表す。 $0\Delta = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \epsilon\Delta$  と解釈するとき  $P_\Delta(K)$  は  $\text{Spec}(K[M \cap 0\Delta])$  上の射影多様体である。実際  $S_d(K) = \bigoplus_{m \in M \cap d\Delta} Kx^m$  と置くと  $S(K) = \bigoplus_{d \geq 0} S_d(K)$  に次数環の構造が入り  $P_\Delta(K)$  は  $\text{Proj}(S(K))$  の  $K$ -値点全体となる。 $\Sigma_\Delta$  が非特異の時、 $\Delta$  は非特異と呼ぶ。 $\Delta', \Delta$  を2つの凸多面体とする。 $\Sigma_{\Delta'}$  が  $\Sigma_\Delta$  を支配するとき  $\Delta'$  は  $\Delta$  を支配するといい  $\Delta' \rightarrow \Delta$  とかく。このとき射  $P_{\Delta'} \rightarrow P_\Delta$  が存在する。

(1.6).  $\Sigma$  を  $N$  の扇、 $\sigma_1, \dots, \sigma_d$  を  $\Sigma$  の1次元錐、 $v_i$  を  $\sigma_i$  を生成する最も短い整ベクトルとする。 $X_\Sigma$  の因子  $V_{\sigma_i}$  を  $D_i$  で表す。因子  $D = \sum a_i D_i$  が次の条件を満たすとき  $T$ -Cartier という。各  $\sigma \in \Sigma$  に対して  $m(\sigma) \in M$  が存在して  $\sigma_i \subset \sigma$  ならば  $\langle m(\sigma), v_i \rangle = -a_i$ 。  $T$ -Cartier 因子  $D$  の定義する直線束  $[D]$  の代数的断面の作る層を  $\mathcal{O}(D)$  と書く。このとき  $\Gamma(U_\sigma(K), \mathcal{O}(D)) \ni f \mapsto x^{-m(\sigma)} f \in K[M \cap \sigma^\vee]$  は同型で、各  $\sigma \in \Sigma$  に対し共通部分をとれば

$$(1.6.1) \quad \Gamma(X_\Sigma(K), \mathcal{O}(D)) = \bigoplus_{m \in M \cap \Delta_D} Kx^m$$

を得る。但し  $\Delta_D = \{u \in M_{\mathbb{R}} : \langle u, v_i \rangle \geq -a_i, \forall i\}$ 。以後  $X_\Sigma$  コンパクトを仮定しよう。 $m(\sigma), \sigma \in \Sigma$  の凸包が  $\Delta_D$  ならば完備一次系  $|D|$  は固定点をもたず、さらに  $\Delta_D$  が  $n$  次元ならば  $D$  は豊富 (ample) である。また自己交点数  $D(\mathbb{C})^n$  は  $n! \text{Vol}_n(\Delta_D)$  に一致する。また、適当な胞体分割を考える事により、 $\chi(X_\Sigma(\mathbb{C})) = d_n, \chi(X_\Sigma(\mathbb{R})) = \sum_{k=0}^n (-2)^k d_{n-k}$  がわかる。但し  $d_k$  は扇  $\Sigma$  の  $k$  次元錐の個数。

(1.7). (1.6.1) を通じて  $\Delta(f) \subset \Delta_D$  なる  $K$  係数ローラン多項式  $f$  は  $P_\Delta(K)$  上の直線束  $\mathcal{O}(D)$  の断面とみなす事ができる。以後ローラン多項式と断面を同一視して議論する。ニュートン図形が  $\Delta_D$  になるような実ローラン多項式  $f$  が非退化とは  $\Delta_D$  の各面  $\gamma$  に対し  $f_\gamma$  の勾配が  $(\mathbf{C}-0)^n$  上至るところ消えない時をいう。 $\Delta \rightarrow \Delta(f)$  なる非特異な  $\Delta$  とる。非退化な  $f$  の零点集合  $Z(K), K = \mathbf{R}, \mathbf{C}$  は  $P_\Delta(K)$  の非特異超曲面でこれは各  $V_\sigma(K) (\sigma \in \Sigma_\Delta)$  に横断的に交わる。 $P_\Delta(\mathbf{C})$  の全 Chern 類は  $\prod_{i=1}^d (1 + D_i(\mathbf{C}))$  で  $Z(\mathbf{C}) \subset P_\Delta(\mathbf{C})$  の法束は  $[D]|Z(\mathbf{C})$  なので  $Z(\mathbf{C})$  のオイラー数は

$$(1.7.1) \quad \chi(Z(\mathbf{C})) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k! \text{Vol}_k(\Delta(f))$$

で与えられる。(D.N.Bernstein[B1], A.G.Khovanskii[K1]) これはオイラー数の加法性を經由して、 $\chi((f=0) \cap (\mathbf{C}-0)^n) = (-1)^{n-1} n! \text{Vol}_n(\Delta(f))$  と理解しておくことと記憶に便利で  $n=1$  のときの、「非退化な一変数  $d$  次多項式は  $d$  個の相異なる複素根を  $\mathbf{C}-0$  内にもつ」という初等的事実の一般化とみなすことができる。

複素共役に関して同変な三角形分割を考えれば、

$$(1.7.2) \quad \chi(Z(\mathbf{R})) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k! \text{Vol}_k(\Delta(f)) \pmod{2}$$

を得る。

(1.8). 射影的非特異トーリック多様体については Lefschetz の超平面断面定理が成り立つ。(J.Milnor [M7] I. §7) すなわち

$$\begin{aligned} H_q(P_\Delta(\mathbf{C}), Z(\mathbf{C}); \mathbf{Z}) &= 0, \text{ for } q = 0, 1, \dots, n-1 \\ \pi_q(P_\Delta(\mathbf{C}), Z(\mathbf{C})) &= 0, \text{ for } q = 0, 1, \dots, n-1. \end{aligned}$$

特に  $P_\Delta(\mathbf{C})$  は単連結なので、 $n \geq 3$  ならば  $Z(\mathbf{C})$  も単連結。

(1.9).  $\Delta$  を非特異  $n$  次元凸多角形  $Z_1, \dots, Z_n$  を  $P_\Delta$  の因子とし  $\Delta_i = \Delta_{Z_i}$  と書く。各  $|Z_i|$  は固定点をもたないと仮定する。すると次のような Bézout の定理が成り立つ。(小田氏の教科書 [O]2.2, D.N.Bernstein[B1], A.G.Kouchinirenko[K2], A.G.Khovanskii[K1])

$$Z_1(\mathbf{C}) \cdots Z_n(\mathbf{C}) = \sum_{I \subset \{1, \dots, n\}, I \neq \emptyset} (-1)^{n-\#I} \text{Vol}_n\left(\sum_{i \in I} \Delta_i\right)$$

右辺は  $\Delta_1, \dots, \Delta_n$  の混合体積  $V(\Delta_1, \dots, \Delta_n)$  と呼ばれるものの  $n!$  倍である。

(1.9) への補足。(1.9) の系として次を得る。 $\Delta \rightarrow \Delta_1$  なる  $n-1$  次元凸多角形  $\Delta_1$  をとる。このとき  $P_\Delta(\mathbf{C}) \rightarrow P_{\Delta_1}(\mathbf{C})$  のファイバーと  $Z(\mathbf{C})$  の交点数は

$$\frac{n! V(\Delta(f), \overbrace{\Delta_1, \dots, \Delta_1}^{n-1})}{(n-1)! \text{Vol}_{n-1}(\Delta_1)} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{n-k-1} \frac{\text{Vol}_n(\Delta(f) + k\Delta_1)}{(n-1)! \text{Vol}_{n-1}(\Delta_1)}$$

で与えられる。これより  $P_\Delta(\mathbf{R}) \rightarrow P_{\Delta_1}(\mathbf{R})$  のファイバーと  $Z(\mathbf{R})$  の交点数は  $2V(\Delta(f), \Delta_1)$  を超えない。以後  $n = 2$ 、 $\Delta_1$  は線分とする。

$$\begin{aligned} R(\Delta(f), \Delta_1) &= \inf\{\lambda \geq 0 : \exists x \in M_{\mathbf{R}}, x + \lambda\Delta(f) \supset \Delta_1\} \\ &= 1/\sup\{\lambda \geq 0 : \exists x \in M_{\mathbf{R}}, x + \lambda\Delta_1 \subset \Delta(f)\} \end{aligned}$$

とおくと Flanders の不等式 (小田忠雄氏の教科書 [O], §A.4) より

$$V(\Delta(f), \Delta_1) \leq R(\Delta(f), \Delta_1) \text{Vol}_2(\Delta(f))$$

が成り立つ。これより直ちに定理 A を得る。

(1.10).  $P_\Delta(K)$  上の  $T$ -Cartier 因子  $D$  が偶とは  $D = 2\bar{D}$  なる  $T$ -Cartier 因子  $\bar{D}$  が存在する時をいう。このとき、各  $m(\sigma)$  は  $2M$  に入ると仮定してよいので、 $\alpha \in P_\Delta(\mathbf{R})$  に対して  $f(\alpha) \geq 0$  ということが意味をもつ。 $P_\Delta^\pm = \{\alpha \in P_\Delta(\mathbf{R}) : \pm f(\alpha) \geq 0\}$  と置く。

(1.11). さて、非特異コンパクトトーリック曲面を考えよう。これは次の条件を満たす反時計回りに並んだ整数ベクトル  $v_0, v_1, \dots, v_d = v_0$  で定まる。(条件) 隣合う対  $v_i, v_{i+1}$  が格子  $N = \mathbf{Z}^2$  を生成する。 $v_i = \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} (i = 0, \dots, d)$  とおくと  $\begin{vmatrix} a_i & a_{i+1} \\ b_i & b_{i+1} \end{vmatrix} = 1, (i = 0, \dots, d-1)$ 。

このとき  $v_i$  及び隣合う  $v_i, v_{i+1}$  の生成する錐達は非特異な扇になる。またこのとき  $v_{i-1} + v_{i+1} + c_i v_i = 0, 1 \leq i \leq d$  を満たすような整数  $c_i$  が存在する。 $v_i$  の生成する 1 次元錐の決める因子を  $D_i$  と書く。すると  $D_i(\mathbf{C}).D_i(\mathbf{C}) = c_i, D_i(\mathbf{C}).D_{i+1}(\mathbf{C}) = 1, D_i(\mathbf{C}).D_j(\mathbf{C}) = 0 (i = 0, 1, \dots, d-1; |i-j| > 1)$  となる。非特異コンパクトトーリック曲面は射影的であることもすぐわかる。また  $H_2(P_\Delta(K); \mathbf{Z})$  は  $D_i(K) (i = 1, \dots, d)$  で生成され、 $\sum_{i=1}^d a_i D_i(K), \sum_{i=1}^d b_i D_i(K)$  の表す  $H_2(P_\Delta(K); \mathbf{Z})$  の元は零である。

例 1:  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = v_0$  の時、 $X_\Sigma$  は射影平面  $P^2$  である。また  $d = 3$  なる非特異コンパクトトーリック曲面は  $P^2$  に同型。

例 2:  $a$  を非負整数とする。 $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ a \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_4 = v_0$  の時、このトーリック曲面は Hirzebruch 曲面  $F_a$  と呼ばれる。また  $d = 4$  なる非特異コンパクトトーリック曲面はどれかの  $F_a$  に同型。特に  $F_0 = P^1 \times P^1$ 。

(1.12).  $m_1, \dots, m_q$  を  $M = \mathbf{Z}^n$  の元、 $\Delta$  を  $m_1, \dots, m_q$  の凸包とする。写像  $T_0(\mathbf{C}) = (\mathbf{C} - 0)^n \ni x \mapsto \sum_{i=1}^q \frac{m_i |x^{m_i}|}{\sum_{i=1}^q |x^{m_i}|} \in \mathbf{R}^n$  が誘導する写像  $\mu : P_\Delta(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbf{R}^n$  を moment map

と呼ぶ。moment map の像は  $\Delta$  であり、moment map の  $T_0(\mathbf{R}) = (\mathbf{R} - 0)^n$  の連結成分への制限は  $\Delta$  の内点集合への実解析的同型写像である。 $\mathbf{R}^n$  の座標超平面での折り返しが生成する群  $G$  は、 $T_0(\mathbf{R}) = (\mathbf{R} - 0)^n \subset \mathbf{R}^n$  に自然に作用している。写像  $\tilde{\mu} : T_0(\mathbf{R}) \rightarrow \mathbf{R}$  を  $\tilde{\mu} \circ g(x) = g \circ \mu(x), x = (x_1, \dots, x_n) \in T_0(\mathbf{R}) = (\mathbf{R} - 0)^n, x_i > 0, g \in G$  で定義する。以後  $\Delta$  が第一象限にあると仮定する。このとき  $\tilde{\mu}$  は同相写像である。 $Z(\mathbf{R}) \cap T_0(\mathbf{R})$  の  $\tilde{\mu}$  による像を多項式  $f$  の chart といい  $C_\Delta(f)$  で表す。

§2. 合同式と商空間  $P_\Delta$ . この節における我々の主結果は (2.6), (2.7) からの帰結としての合同式である。(2.7) の  $\beta_W, \beta_L, \beta_U$  は (2.8)-(2.10) を用いて計算される。これらは特別な場合として序の定理 B を含む。まずブラウン不変量を復習しよう。

ブラウン不変量.  $V$  を体  $\mathbf{Z}/2$  上の有限次元ベクトル空間で、非退化な双一次形式  $q : V \times V \rightarrow \mathbf{Z}/2$  があるものとする。このとき  $q(u+v) = q(u) + q(v) + 2u.v$  を満たす写像  $g : V \rightarrow \mathbf{Z}/4$  を  $\mathbf{Z}/4$ -値二次形式 ( $\mathbf{Z}/4$ -quadratic) と呼ぶ。

例：以下に  $\mathbf{Z}/4$ -値二次形式の例をあげる。

$$\begin{aligned} P_{\pm} &= (V = \mathbf{Z}/2(v); v.v = 1; q(v) = \pm 1), \\ T_0 &= (V = \mathbf{Z}/2(u) \oplus \mathbf{Z}/2(v); u.u = v.v = 0, u.v = 1; q(u) = q(v) = 0), \\ T_4 &= (V = \mathbf{Z}/2(u) \oplus \mathbf{Z}/2(v); u.u = v.v = 0, u.v = 1; q(u) = q(v) = 2). \end{aligned}$$

およびこれらの直和。

直和分解できない  $\mathbf{Z}/4$ -値二次形式は上の  $P_{\pm}, T_0, T_4$  のいずれかに同型なので、任意の  $\mathbf{Z}/4$ -値二次形式は  $P_{\pm}, T_0, T_4$  の直和に同型である。 $q$  が  $aP_+ \oplus bP_- \oplus cT_0 \oplus dT_4$  と同型の時、 $\beta(q) = a - b + 4d \pmod{8}$  を  $q$  の ブラウン不変量 という。このとき次の式が成り立つ。

$$(2.1) \quad \exp \frac{\beta(q)\pi\sqrt{-1}}{4} = 2^{-\frac{\dim V}{2}} \sum_{v \in V} \exp \frac{q(v)\pi\sqrt{-1}}{2}.$$

補題 (2.2).  $q(H) = 0, \dim H = \frac{1}{2} \dim V$  なる部分空間  $H$  があれば  $\beta(q) = 0$ .

ブラウン不変量についての詳細は E.H.Brown Jr [B2] 参照。

ロホリン形式. 有向4次元多様体  $M$  内の非特異曲面  $F$  を考える。自然な写像  $H_1(F; \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(M; \mathbf{Z}/2)$  が零写像と仮定する。このとき  $F$  内にはめ込まれた任意の曲線  $C$  にはいつでも  $M$  内で膜  $M$  が貼れる。ここで膜(membrane) というのは  $C$  を境界にもつ  $M$  内の曲面  $\mathcal{M}$  で  $C$  では  $F$  と直交し、至るところ  $F$  と接しないものをいう。埋込  $C \subset F$  の法束を はめ込み  $\mathcal{M} \subset M$  の法束の部分直線束に拡張するときの障害類を  $(\mathcal{M}, C)$  の基本類で評価して得られる整数 (障害数) を  $n(\mathcal{M})$  とかく。さて  $F$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類のポアンカレ双対が  $M$  の第2 Stiefel-Whitney 類と一致すると仮定しよう。すると、 $q(C) = n(\mathcal{M}) + 2\mathcal{M}.F \pmod{4}$  は  $C$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類で決まる。この  $q: H_1(F; \mathbf{Z}/2) \rightarrow \mathbf{Z}/4$  を  $F$  の ロホリン形式 という。 $q$  は  $F$  の  $\mathbf{Z}/2$ -値交点形式に対して  $\mathbf{Z}/4$ -値二次形式となっている。

定理 (2.3)(GUILLOU-MARIN). 以上の仮定のもとに次の合同式が成り立つ。

$$M \text{ の符号数} \equiv F.F + \beta(q) \pmod{16}.$$

但し  $F.F$  は  $F \subset M$  の法オイラー数。

参考文献：L.Guillou-A.Marin [GM1-3], 松本幸夫氏の [M2]

商空間  $P'_\Delta$ . 非退化な2変数実多項式  $f$  と、 $\Delta \rightarrow \Delta(f)$  なる非特異な  $\Delta$  をとる。以下 (1.11) の記号を用いる。複素共役が誘導する  $P_\Delta(C)$  上の反正則対合を  $\tau$  で表す。 $f$  の零点が定める  $P_\Delta$  内の代数曲線を  $Z$  で表す。対合  $\tau$  は  $Z(C)$  上の対合を誘導する。これも同じ記号  $\tau$  で表す。

補題 (2.4).  $P_\Delta(C)$  の対合  $\tau$  による商空間  $P'_\Delta$  は  $S^4$  に同相である。

以後  $\Delta(f)$  は偶と仮定する。 $D$  を  $Z \in |D|$  なる  $P_\Delta$  内の  $T$ -Cartier 因子、 $\bar{D}$  を  $D = 2\bar{D}$  なる  $T$ -Cartier 因子とする。明らかに  $\Delta(f) = \Delta_D = 2\Delta_{\bar{D}}$ 。 $Z'$  を  $Z$  の  $\tau$  による商空間、

$F$  を  $Z' \cup P_{\Delta}^+$  を  $P'_{\Delta}$  内で smoothing したものとす。  $F$  の  $P'_{\Delta}$  内の法オイラー数は次の公式で与えられる。

$$(2.5) \quad F.F = \frac{1}{2}D(\mathbf{C}).D(\mathbf{C})_{\text{in}P_{\Delta}(\mathbf{C})} - 2\chi(P_{\Delta}^+).$$

従って、  $F$  が向き付け可能ならば  $\chi(P_{\Delta}^+) = \overline{D}(\mathbf{C}).\overline{D}(\mathbf{C})$  を得る。ここで  $\overline{D}(\mathbf{C}).\overline{D}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\text{Vol}_2(\Delta(f))$  に注意。  $F$  が向き付け可能でないときは、(2.3) より、次の合同式が成り立つ。

$$(2.6) \quad \chi(P_{\Delta}^+) \equiv \overline{D}(\mathbf{C}).\overline{D}(\mathbf{C}) + \beta(q) \pmod{8}$$

但し  $\beta(q)$  は  $F$  のロホリン形式  $q$  のブラウン不変量である。

よって、  $\beta(q)$  の計算ができれば  $\chi(P_{\Delta}^+)$  に関する合同式が証明できることになる。

合同式とその証明。まず記号を導入する。

$$\begin{aligned} U &= \text{Im}\{H_1(P_{\Delta}^+; \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(P_{\Delta}^+, Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(F, Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(F; \mathbf{Z}/2)\} \\ W &= \text{Im}\{H_1(Z'; \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(Z', Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(F, Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(F; \mathbf{Z}/2)\} \\ L &= \text{Im}\{H_1(Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(F; \mathbf{Z}/2)\} \\ \tilde{L} &= \{u \in H_1(F; \mathbf{Z}/2) : u.v = 0, \forall v \in U \oplus W\} \end{aligned}$$

とおく。  $Z$  を  $(M-i)$ -曲線とすると  $\dim W = i, \dim L = M-i-h_0(P_{\Delta}^+), \dim \tilde{L} = 2(M-i-h_0(P_{\Delta}^+))$ 。さらに  $\mathbf{Z}/2$ -値交点形式  $\cdot$  の  $U, W, \tilde{L}$  への制限は非退化で、  $F$  のオイラー数の計算より  $H_1(F; \mathbf{Z}/2) \simeq U \oplus \tilde{L} \oplus W$  となる。よって  $\beta_U = \beta(q|U), \beta_W = \beta(q|W), \beta_L = \beta(q|\tilde{L})$  とおくと次が成り立つ。

補題 (2.7).

$$\beta(q) = \beta_U + \beta_W + \beta_L.$$

補題 (2.8).  $\beta_W$  については次が成り立つ。

- (i)  $Z$  が  $M$ -曲線ならば  $\beta_W = 0$ 。
- (ii)  $Z$  が  $(M-1)$ -曲線ならば  $\beta_W = \pm 1$ 。
- (iii)  $Z$  が  $(M-2)$ -曲線で非分割曲線ならば  $\beta_W = 0, \pm 2$ 。
- (iv)  $Z$  が分割曲線ならば  $\beta_W = 0, 4$ 。

証明  $\dim W = i$  で、また  $Z$  が分割曲線である事と  $Z'$  が向き付け可能である事は同値。よって  $\mathbf{Z}/4$ -値二次形式の分類より補題を得る。■

次に  $L.L = 0$  なので  $q(L) \subset \{0, 2\}$  に注意する。  $q(C) = 2$  なる  $Z(\mathbf{R})$  の成分  $C$  の全体を  $L_2$  で表す。明らかに  $L_2$  の元は偶数個である。  $Z$  が分割曲線ならば  $Z'$  は有向曲面であり  $Z(\mathbf{R})$  に  $\partial Z'$  として向きが入る。  $P_{\Delta}^+$  が有向曲面のとき  $Z(\mathbf{R})$  に  $\partial P_{\Delta}^+$  としても向きが入る。  $L_2$  の元で二つの向きが一致しないものが偶数 (奇数) 個の時、  $L_2$  は偶 (奇) と呼ぶ。

補題 (2.9).  $\beta_L$  については次が成り立つ。

- (i)  $q(L) = 0$  ならば  $\beta_L = 0$ 。
- (ii)  $Z$  が分割曲線で  $P_\Delta^+$  が有向曲面とする。  $L_2$  が奇ならば  $\beta_L = \pm 2$ 。
- (iii)  $Z$  が分割曲線で  $P_\Delta^+$  が有向曲面とする。  $L_2$  が偶ならば  $\beta_L = 0, 4$ 。

次の (2.10) は  $L \oplus U$  上の  $q$  の値を決めるのに有効である。まず  $H_1(P_\Delta; \mathbf{Z}/2)$  は  $D_i(\mathbf{R})(i = 1, \dots, d)$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類で生成される事に注意する。

命題 (2.10). 曲線  $C$  が  $F \cap P_\Delta(\mathbf{R})$  内であれば  $q(C)$  は  $P_\Delta(\mathbf{R})$  での  $C$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類で定まる。さらに  $C$  の表す  $H_1(P_\Delta(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2)$  でのホモロジー類が  $\sum_{i \in I} D_i(\mathbf{R})$  のそれに一致するならば  $q(C) = \sum_{i \in I} (c_i + \text{Vol}_1(E_i))$ 。但し  $E_i$  は  $v_i$  が支持する  $\Delta(f)$  の辺。

(2.1) と (2.10) を使えば  $\beta_U$  は決定される事に注意。命題 (2.10) は次の補題 (2.11)-(2.13) から直ちに従う。

補題 (2.11). 曲線  $C \subset F \cap P_\Delta(\mathbf{R})$  が  $P_\Delta(\mathbf{R})$  内の曲面の境界ならば  $q(C) = 0$ 。特に  $H_1(Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_1(P_\Delta(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2)$  が零写像なら、  $q(L) = 0$ 。

証明:  $\partial M = C$  なる  $P_\Delta(\mathbf{R})$  内の曲面  $M$  をとる。  $C$  に直交する  $M$  上のベクトル場  $v$  に対し  $\sqrt{-1}v$  の  $M$  の近傍への拡張  $\tilde{v}$  を考えれば、  $\tilde{v}|_C$  は埋込  $C \subset F$  の法ベクトル場なので、  $\tilde{v}|_C$  を埋込  $M \subset P_\Delta(C)$  の法ベクトル場に拡張するときの障害数は  $-\chi(M)$  に一致する。よって  $n(M) = 2(-\chi(M))$  である。分岐二重被覆  $P_\Delta(C) \rightarrow P'_\Delta$  の  $M$  への制限  $M \rightarrow M'$  を考えれば、  $n(M') = 2n(M) \equiv 0 \pmod{4}$  である。また  $M' \cdot P_\Delta^+ = 2M \cdot P_\Delta^+$  より、  $q(C) \equiv 0 \pmod{4}$  を得る。■





補題 (2.12).  $n(D_i(\mathbf{R})) = c_i$ 、よって  $q(D_i(\mathbf{R})) = c_i + \text{Vol}_1(E_i)$ 。

証明: 直接計算。■

補題 (2.13).  $C$  を  $F \cap P_\Delta(\mathbf{R})$  内の曲線、  $M_0$  を  $T_0(\mathbf{R}) - C$  のいくつかの連結成分の合併集合の閉包でその境界が  $C$  を含むようなものとする。  $I$  を  $\partial M_0 = C \cup \bigcup_{i \in I} D_i(\mathbf{R})$  なる  $\{1, \dots, d\}$  の部分集合とする。このとき  $C$  の表す  $P_\Delta(\mathbf{R})$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類は  $\sum_{i \in I} D_i(\mathbf{R})$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類と一致し、さらに  $q(C) = \sum_{i \in I} (c_i + \text{Vol}_1(E_i))$ 。

証明:  $M = M_0 \cup \bigcup_{i \in I} D_i'$  を膜とする。  $D_i'$  の  $q(C)$  への寄与は (2.12) で  $M_0$  の  $q(C)$  への寄与は (2.11) で計算できる。■

例 1.  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0, 0), (6k, 0), (0, 4k)$  の閉包のとき。  $P_{\Delta(f)}^+$  の連結成分としては表 1 斜線部内部からいくつかの円板を引いたものしかあらわれないとする。但し  $\tilde{\mu}$  の定義は (1.12) 参照。  $\Delta$  として次で定まるものとする。  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_6 = v_0$ 。すると  $q(L) = 0$  で、  $\beta_U$  は表 1 の  $\beta_U$  への寄与を加えたものになる。

表 1				
$\tilde{\mu}$ による像				
$\beta_U$ への寄与	0	4	$(-1)^k 2$	0

例 2.  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0,0), (10k,0), (0,6k)$  の閉包 のとき。  $P_{\Delta(f)}^+$  の連結成分としては表 2 斜線部内部からいくつかの円板を引いたものしかあらわれないとする。  $\Delta$  として次で定めるものをとる。  $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, v_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, v_7 = v_0$ . すると  $q(L) = 0$  で、  $\beta_U$  は表 2 の  $\beta_U$  への寄与を加えたものになる。

表 2										
$\bar{\mu}$ による像										
$\beta_U$ への寄与	0	2	4	$2 - (-1)^k$	$(-1)^k 3$	$(-1)^{k-1}$	$(-1)^{k-1}$	0	0	0

注意：本節の結果は偶数次実射影代数曲線に関する A.Marin [M1] の合同式のトーリック曲面への一般化と見なせる。 A.Marin の合同式は多くの著者によって（主に実射影空間の中の実完全交叉多様体に対し）一般化されている。 [KV,M3,M5,M6] 等参照の事。

§3 不等式と二重被覆  $Y$ . 2次元の多角形  $\Delta$  に対し、  $e(\Delta)$  を  $\Delta$  の辺の個数とすると、  $\chi(P_{\Delta}(\mathbf{R})) = 4 - e(\Delta)$  であった。 前節の様に  $f(x,y)$  は  $\Delta(f) = \Delta_D$  が偶な 2 変数非退化多項式とする。 前節までの記号を引き続き用いる。  $\Delta \rightarrow \Delta(f)$  なる非特異多角形  $\Delta$  をとる。  $P_{\Delta} \rightarrow P_{\Delta(f)}$  は極小特異点解消として一般性を失わない。  $\bar{D}$  を  $D = 2\bar{D}$  なる  $P_{\Delta}$  の因子で、  $\bar{g}$  は完備一次系  $|\bar{D}(\mathbf{C})|$  の一般の元の種数とする。  $\bar{g} = 1 - \frac{1}{4}\text{Vol}_1(\Delta(f)) + \frac{1}{4}\text{Vol}_2(\Delta(f)), \bar{D}(\mathbf{C}) \cdot \bar{D}(\mathbf{C}) = \frac{1}{2}\text{Vol}_2(\Delta(f))$  に注意しよう。

定理 (3.1).

$$\chi(P_{\Delta(f)}^{\pm}) \leq \bar{g} + \bar{D}(\mathbf{C}) \cdot \bar{D}(\mathbf{C}).$$

$\chi(P_{\Delta}^+) + \chi(P_{\Delta}^-) = \chi(P_{\Delta}(\mathbf{R}))$  を用いて (3.1) より定理 C を得るのは易しい。 (3.1) を示すために  $f(x,y)$  の零点  $Z$  で分岐する  $P_{\Delta}$  の二重被覆  $Y$  を考えよう。  $Y$  は方程式  $F(x,y,z) := z^2 + f(x,y)$  で定義されるものとする。  $\tilde{\Delta} \rightarrow \Delta(F)$  なる 3次元非特異多面体  $\tilde{\Delta}$  を考える。 (1.8) より  $Y(\mathbf{C})$  は単連結であり、従って (1.7.1) より  $H_2(Y(\mathbf{C}); \mathbf{Z})$  は階数  $2(e(\Delta) + g - 2)$  の自由アーベル群である。 算術種数に関する A.G.Khovanskii [K1] の公式より、  $Y(\mathbf{C})$  の幾何種数は  $\bar{g}$  で、 F.Hirzebruch による分岐被覆の符号数の公式より、  $Y(\mathbf{C})$  の符号数は  $2(4 - e(\Delta)) - \text{Vol}_2(\Delta_D)$  である。  $T_-$  を  $Y(\mathbf{C})$  の複素共役、  $\theta$  を  $Y(\mathbf{C}) \rightarrow P_{\Delta}(\mathbf{C})$  の被覆変換、  $T_+ = T_- \circ \theta$  とおく。  $T_{\pm}$  の固定点集合を  $Y^{\pm}$  とおくと、  $Y^{\pm}$  は「  $Z(\mathbf{R})$  で分岐する  $P_{\Delta}^{\pm}$  の二重被覆」である。  $P_{\Delta,i}^{\pm}$  を  $P_{\Delta}^{\pm}$  の連結成分、  $Y_i^{\pm}$  を  $P_{\Delta,i}^{\pm}$  に対応する  $Y^{\pm}$  の連結成分とすると、  $Y_i^{\pm}$  が向き付け可能である事と  $P_{\Delta,i}^{\pm}$  内の任意の閉曲線と  $(\bar{D} + \sum_{j=1}^d D_j)(\mathbf{R})$  の  $\mathbf{Z}/2$ -値交点形式が零である事は同値で、これは更に、 (1.11) の記号を使えば、  $P_{\Delta,i}^{\pm}$  内の任意の閉曲線は  $P_{\Delta}(\mathbf{R})$  内で  $\sum_{j \in I_1} k_j \equiv 0 \pmod{2}$  なる  $\sum_{j=1}^d k_j D_j(\mathbf{R})$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類を表す事と同値である。 但し、  $I_1 = \{j : c_j + \frac{1}{2}\text{Vol}_1(E_j) \equiv 1 \pmod{2}\}$  で  $E_j$  は  $v_j$  の支持する  $\Delta(f)$  の辺。  $Y^{\pm}$  の向き付け可能な連結成分でオイラー数正、零、負のもの個数をそれぞれ  $n_+^{\pm}, n_0^{\pm}, n_-^{\pm}$  と書く。

定理 (3.2). このとき次の不等式が成り立つ。

$$(I^\pm) \quad n_\pm^\pm + n_0^\pm \leq \bar{g} + 1$$

$$(II^\pm) \quad n_\pm^\pm + n_0^\pm \leq \bar{g} + \bar{D}(C) \cdot \bar{D}(C) - \chi(P_{\Delta(f)}^\mp)$$

更に、

- (i) 等式  $(I^\pm)$  で等号が成立すれば、 $Z$  は分割曲線で、 $Y^\pm$  は向き付け可能な連結成分しか持たず、さらに  $n_+^\pm = n_-^\pm = 0$ 。
- (ii)  $(I^+)$  と  $(I^-)$  の等号が同時に成立すれば、ある偶数  $a$  が存在して  $P_\Delta$  は Hirzebruch 曲面  $F_a$  と同型。

この定理より定理 D を得るのは易しい。

(3.1) の証明: まず分解

$$H_2(Y(C); \mathbf{R}) = {}_1V_1 \oplus {}_{-1}V_1 \oplus {}_1V_{-1} \oplus {}_{-1}V_{-1}$$

を考える。但し  ${}_\beta V_\alpha$  は  $(T_+, T_-)$  の  $(\alpha, \beta)$ -固有空間。  $\theta = T_+ \circ T_-$  の 1-固有空間は  $H_2(P_\Delta(C); \mathbf{R})$  に同型で、 $T_\pm$  は  $P_\Delta(C)$  の複素共役の持ち上げだから、 ${}_1V_1 = 0$ 。各  ${}_\beta V_\alpha$  は交点形式に関して正または負定値な部分空間の直和に分解する:  ${}_\beta V_\alpha = {}_\beta V_\alpha^+ \oplus {}_\beta V_\alpha^-$ 。  ${}_{-1}V_{-1} \simeq H_2(P_\Delta(C); \mathbf{R})$  と Hodge 指数定理より  $\dim {}_{-1}V_{-1}^+ = 1$ ,  $\dim {}_{-1}V_{-1}^- = e(\Delta) - 3$ 。  ${}_{-1}V_1^+, {}_{-1}V_1^-, {}_1V_{-1}^+, {}_1V_{-1}^-$  の次元をそれぞれ  $a^+, b^+, a^-, b^-$  とすると次が成り立つ

$$a^+ + b^+ + a^- + b^- + 1 + (e(\Delta) - 3) = \dim H_2(Y(C); \mathbf{R})$$

$$a^+ - b^+ + a^- - b^- + 1 - (e(\Delta) - 3) = Y(C) \text{ の符号数}$$

$$a^+ + b^+ - a^- - b^- - 1 - (e(\Delta) - 3) = \chi(Y^+) - 2$$

$$a^+ - b^+ - a^- + b^- - 1 + (e(\Delta) - 3) = -\chi(Y^+)$$

最初の二つの式は自明で、3番目の式は  $T_+$  に関する Lefschetz の不動点公式の帰結、最後の式は Atiyah-Singer の対合  $T_+$  の符号数に関する定理の帰結である。これらを解いて、

$$(3.3) \quad a^\pm = \bar{g}$$

$$(3.4) \quad b^\pm = \bar{g} + \bar{D}(C) \cdot \bar{D}(C) - \chi(P_\Delta^\mp)$$

を得る。 $E$  を  $P_\Delta \rightarrow P_{\Delta(f)}$  の例外集合とすると、 $E$  の各規約成分の実部は  $P_\Delta^+$  または  $P_\Delta^-$  のいずれかに入っている。実部が  $P_\Delta^\pm$  内に入っている  $E$  の規約成分の個数を  $e^\pm$  と書く。すると

$$(3.5) \quad \chi(P_\Delta^\pm) = \chi(P_{\Delta(f)}^\pm) - e^\pm.$$

$E = \bigcup_i E_i^+ \cup \bigcup_i E_i^-$  を規約分解とする。 $E_i^\pm(\mathbf{R}) \subset P_\Delta^\pm$  と約束しておく。 $Y \rightarrow P_\Delta$  による  $E_i^\pm$  の逆像の規約成分を  $E_{i\pm}^\pm$  と書く。

$$T_-(E_{i\pm}^-) = -E_{i\pm}^-, \quad T_+(E_{i\pm}^-) = -E_{i\mp}^-$$

$$T_-(E_{i\pm}^+) = -E_{i\pm}^+, \quad T_+(E_{i\pm}^+) = -E_{i\mp}^+$$



となる。よって  $E_{i+}^{\pm} - E_{i-}^{\pm}$  は  $\mp 1 V_{\pm 1}^{-}$  の元  $\tilde{E}_i^{\pm}$  を表す。 $E$  は例外集合なのでこれらは一次独立、よって

$$(3.6) \quad e^{\mp} \leq b^{\pm}.$$

(3.4),(3.5) と (3.6) より (3.1) を得る。■

(3.2) の証明をするために少し精密な  $a^{\pm}, b^{\pm}$  の下からの評価を考えよう。

$\Pi_i^{\pm}$  を  $Y^{\pm}$  の向き付け可能な連結成分で  $P_{\Delta}^{\pm}$  の連結成分  $P_{\Delta, i}^{\pm}$  に対応するものとする。と、 $\Pi_i^{\pm} \cdot \Pi_i^{\pm} = -\chi(\Pi_i^{\pm}) = -2\chi(P_{\Delta, i}^{\pm})$ 。  $\Pi_i^{\pm}$  は  $-1V_1^{+} \oplus -1V_1^{-}$  の元  $[\Pi_i^{\pm}]$  を定める。

(3.7) 非正のオイラー数を持つ  $[\Pi_i^{\pm}]$  達が一次独立ならば、 $n_{\pm}^{\pm} + n_0^{\pm} \leq a^{\pm}$ 。

(3.8) 非負のオイラー数を持つ  $[\Pi_i^{\pm}]$  達と  $\tilde{E}_i^{\mp}$  達が一次独立ならば、 $n_{+}^{\pm} + n_0^{\pm} + e^{\mp} \leq b^{\pm}$ 。

$\Pi_i^{\pm}$  達と  $\tilde{E}_i^{\mp}$  達は共通部分をもたず  $\tilde{E}_i^{\pm}$  達は一次独立なので  $[\Pi_i^{\pm}]$  達の一次独立性を議論すればよい。つまり写像  $H_2(Y_{\pm}; \mathbf{R}) \rightarrow H_2(Y(\mathbf{C}); \mathbf{R})$  の核  $H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{R})$  を調べれば十分である。普遍係数定理より

$$\begin{aligned} H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{R}) &\simeq H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{R} \\ H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2) &\simeq H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}) \otimes \mathbf{Z}/2 \oplus \text{Tor}(H_2(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}), \mathbf{Z}/2). \end{aligned}$$

従って

$$\dim H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2) \geq \dim H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{R})$$

を得る。よって  $H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2)$  を調べよう。対合  $\theta$  と  $Y(\mathbf{C})/Y^{\pm}$  に関する Smith の完全列に、代数的トポロジーの機械的計算を行えば、次の完全列を得る。

$$(3.9) \quad 0 \rightarrow \mathbf{Z}/2 \rightarrow H_3(P_{\Delta}(\mathbf{C}), P_{\Delta}^{\pm} \cup Z(\mathbf{C}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2) \rightarrow 0$$

また対  $(P_{\Delta}(\mathbf{C})/P_{\Delta}^{\pm}, Z(\mathbf{C})/Z(\mathbf{R}))$  の完全列より次を得る。

$$(3.10) \quad 0 \rightarrow H_3(P_{\Delta}(\mathbf{C}), P_{\Delta}^{\pm} \cup Z(\mathbf{C}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_2(Z(\mathbf{C}), Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_2(P_{\Delta}(\mathbf{C}), P_{\Delta}^{\pm}; \mathbf{Z}/2)$$

双対性より

$$(3.11) \quad H_2(Z(\mathbf{C}), Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) = \begin{cases} \mathbf{Z}/2 & Z \text{ が非分割曲線の時,} \\ \mathbf{Z}/2 \oplus \mathbf{Z}/2 & Z \text{ が分割曲線の時.} \end{cases}$$

よって (3.9),(3.10) より  $H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2)$  の次元は高々 1。故に

$$(3.12) \quad n_{\pm}^{\pm} + n_0^{\pm} \leq a^{\pm} + 1,$$

$$(3.13) \quad n_{+}^{\pm} + n_0^{\pm} + e^{\mp} \leq b^{\pm} + 1.$$

よって不等式 (I $^{\pm}$ ) と不等式 (II $^{\pm}$ ) の右辺に 1 を加えたものは成り立つ事がわかる。

(i) の証明:  $Z$  が非分割曲線なら (3.9)-(3.11) より  $H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2) = 0$  なので、不等式 (II $^{\pm}$ ) は成り立つ。 $Z$  は分割曲線と仮定する。(3.9),(3.10) より

$$H_3(Y(\mathbf{C}), Y^{\pm}; \mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$$

は

$$H_2(Z(\mathbf{C}), Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_2(P_\Delta(\mathbf{C}), P_\Delta^\pm; \mathbf{Z}/2) \text{ が零写像である}$$

ことと同値で、 $H_3(Y(\mathbf{C}), Y^\pm; \mathbf{Z}/2) = \mathbf{Z}/2$  と仮定すると、 $H_2(Y^\pm; \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_2(Y(\mathbf{C}); \mathbf{Z}/2)$  の核は  $Y^\pm$  の  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類で生成される。よって非負（または非正）のオイラー数をもつ  $[\Pi_i^\pm]$  達が一次従属ならば  $Y^\pm$  の各連結成分が向き付け可能でオイラー数零でなければならない。■

(ii) の証明:  $(P_\Delta(\mathbf{R}), P_\Delta^+, P_\Delta^-)$  を法とした  $P_\Delta(\mathbf{C})$  の相対 Mayer-Vietoris 完全列より、 $H_3(P_\Delta(\mathbf{C}), P_\Delta(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) = 0$  でなければ、

$$H_2(Z(\mathbf{C}), Z(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \rightarrow H_2(Z(\mathbf{C}), P_\Delta^+; \mathbf{Z}/2) \oplus H_2(Z(\mathbf{C}), P_\Delta^-; \mathbf{Z}/2)$$

は零写像ではない。よって  $(I^+)$  と  $(I^-)$  の等号は同時には成立しない。ここで

$$H_3(P_\Delta(\mathbf{C}), P_\Delta(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) = 0$$

は  $P_\Delta(\mathbf{R})$  が零  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類と同値。ところで  $P_\Delta(\mathbf{R})$  の自己交点数は

$$-\chi(P_\Delta(\mathbf{R})) = e(\Delta) - 4.$$

よって  $e(\Delta) \neq 4$  ならば  $H_3(P_\Delta(\mathbf{C}), P_\Delta(\mathbf{R}); \mathbf{Z}/2) \neq 0$ 。  $e(\Delta) = 4$  ならば  $P_\Delta = F_a$ 。(1.11) の記号を使うと、 $P_\Delta(\mathbf{R})$  と  $\sqrt{-1} + y + yx^a = 0$  の定義する  $P_\Delta(\mathbf{R})$  内の非特異複素代数曲線との  $\mathbf{Z}/2$ -値交点数は  $a$  なので  $a$  が奇数なら  $P_\Delta(\mathbf{R})$  は零  $\mathbf{Z}/2$ -ホモロジー類でない。■

$(II^\pm)$  の証明: (3.13) で等号が成立しないことを示せば十分。まず  $\Delta(f)$  非特異とする。すると  $\Delta(f) = \Delta$  で  $e^\pm = 0$ 。また  $\bar{D}$  は豊富だから  $\bar{D}(\mathbf{C}) \cdot \bar{D}(\mathbf{C}) > 0$ 。よって (3.13) で等号成立と仮定すると、 $n_+^\pm = n_-^\pm = 0, \chi(P_\Delta^\pm) = 0$  なので  $(I^\pm)$  に矛盾する。

よって  $\Delta(f)$  は非特異でないとする。  $P_\Delta \rightarrow P_{\Delta(f)}$  を極小特異点解消とすると  $e(\Delta) \geq 4$ 。(3.13) で等号成立と仮定する。  $n_+^\pm = n_-^\pm = 0, \chi(P_\Delta^\pm) = 0$  なので  $\chi(P_\Delta^\mp) = 4 - e(\Delta)$ 。また  $\bar{D}(\mathbf{C}) \cdot \bar{D}(\mathbf{C}) = 2\text{Vol}_2(\Delta_{\bar{D}}) = 2(\bar{g} - 1) + \text{Vol}_1(\Delta_{\bar{D}})$ 。(  $I^\pm$  ) より  $n_0^\pm \leq \bar{g} + 1$  なので

$$2(\bar{g} - 1) + (\text{Vol}_1(\Delta_{\bar{D}}) - e^\mp) + (e(\Delta) - 4) \leq 0.$$

第2項と第3項は非負であることに注意すれば、次の (3.14) と (3.15) の場合を除いて  $(II^\pm)$  は成り立つことがわかる。

$$(3.14) \quad \bar{g} = 0, 0 \leq \text{Vol}_1(\Delta_{\bar{D}}) - e^\mp \leq 6 - e(\Delta) \leq 2$$

$$(3.15) \quad \bar{g} = 1, \text{Vol}_1(\Delta_{\bar{D}}) = e^\mp, e(\Delta) = 4.$$

(3.14) の場合、補題 (3.16) よりこの場合は起こり得ない。(3.15) の場合  $n_0^\pm = 2, e^\pm = \text{Vol}_1(\Delta_{\bar{D}}) = e(\Delta) = 4$  で、 $\text{Vol}_2(\Delta_{\bar{D}}) = \frac{1}{2}\text{Vol}_1(\Delta_{\bar{D}}) = 2$ 。  $P_\Delta^\pm$  の各連結成分に  $P_\Delta \rightarrow P_{\Delta(f)}$  に制限したとき Blow up の回数は高々 1 回なので  $P_\Delta^\pm$  の連結成分の個数は 4 以上。よって矛盾。■

凸  $N$  角形  $\Delta$  の頂点  $P$  が特異とは  $\text{Cone}(\Delta; P)$  が  $M$  の基底で生成されないときとする。

補題 (3.16). 整凸  $N$  角形  $\Delta$  に対し、 $s$  を  $\Delta$  の特異頂点の個数とする。  $\Delta$  の内部は  $\mathbf{Z}^2$  の点を含まず、  $\text{Vol}_1(\Delta) \leq s + 2$  と仮定する。

- (i)  $N = 3$  ならば、  $\Delta$  の特異頂点は高々一つ。
- (ii)  $N \geq 4$  ならば、  $\Delta$  は特異頂点を持たない。

証明:  $N = 3$  とすると  $\text{Vol}_2(\Delta) = \frac{1}{2}\text{Vol}_1(\Delta) - 1$  で  $\text{Vol}_1(\Delta) = 3, 4, 5$  より、  $\text{Vol}_2(\Delta) = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ . 視察により  $\Delta$  には長さ 1 の辺が必ず存在するので、座標を取り替える事によりその辺を  $(0, 0)$  と  $(1, 0)$  を結ぶ線分と仮定してよい。  $\text{Vol}_2(\Delta) = \frac{1}{2}$  のときは  $\Delta$  の高さは 1 で、  $\Delta$  は非特異。  $\text{Vol}_2(\Delta) = 1$  のときは  $\Delta$  の高さは 2 で、初等的な考察により、長さが 2 の辺の両端の頂点は非特異が判る。  $\text{Vol}_2(\Delta) = \frac{3}{2}$  の時は  $\Delta$  の高さは 3 で、初等的な考察により、長さ 2 の辺は存在し得ず長さが 3 の辺の両端の頂点は非特異が判る。

$N \geq 4$  とする。  $\Delta$  の頂点  $P$  と  $P$  の隣の  $\Delta$  の頂点  $P_1, P_2$  のなす三角形  $\Delta_1$  を考える。  $\Delta$  の内部は  $\mathbf{Z}^2$  の点を含まないの、線分  $P_1P_2$  の内部に整数点はない。この三角形  $\Delta_1$  は補題の仮定を満たすので (i) の形をしてなければならないが  $P_1P_2$  の長さが 1 なので長さが 2 以上になり得る辺は  $PP_1$  または  $PP_2$  のいずれか。  $N = 3$  の場合の考察より  $P$  は特異頂点にならない。 ■

注意: (3.1) は I.Petrovsky [P] の不等式の一般化とみなす事ができる。 I.Petrovsky の不等式は実射影空間内の実代数多様体に対して V.M.Kharlamov [K1, K4] により一般化されている。我々の不等式 (3.1) は V.M.Kharlamov [K1] の不等式を我々の状況に適用すれば、

$$\chi(P_{\Delta}^{\pm}) \leq \bar{g} + \bar{D}(C) \cdot \bar{D}(C)$$

を得る。これは  $P_{\Delta} \rightarrow P_{\Delta(f)}$  の例外集合の寄与を考察してない分、我々の不等式 (3.1) より甘い不等式になる。

#### REFERENCES

- A. V.I.Arnol'd, *Distribution of ovals of the real plane of algebraic curves, of involutions of four-dimensional smooth manifolds, and the arithmetic of integer-valued quadratic forms*, *Funct. Anal. Appl.* 5 (1971), 169-176.
- B1. D.N.Bernshtein, *The number of roots of a system of equations*, *Funct. Anal. Appl.* 9 (1975), 183-185.
- B2. E.H.Brown Jr., *Generalizations of the Kervaire invariant*, *Ann. of Math.* 95 (1972), 368-384.
- D. V.I.Danilov, *The geometry of toric varieties*, *Russian Math. Surveys* 33 (1978), 97-154.
- F. W.Fulton, "Introduction to Toric Varieties," *Ann. of Math. Studies* 131, Princeton Univ. Press, 1993.
- GK. D.A.Gudkov and A.D.Krachnov, *Periodicity of the Euler characteristic of real algebraic  $(M - 1)$ -varieties*, *Funct. Anal. Appl.* 7 (1973), 98-102.
- G. D.A.Gudkov, *The topology of real projective algebraic varieties*, *Russian Math. Surveys* 29 (1974), 1-79.
- GM1. L.Guillou and A.Marin, *Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature*, *C.R.Acad.Sci.Paris Ser. A-B* 285 (1977), 95-98.

- GM2. L.Guillou and A.Marin, *Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature*, in "Séminaire sur la géométrie algébrique réelle (J.J.Risler ed.)," Publ. Math. Univ. Paris VII 9., 1980, pp. 69-80.
- GM3. L.Guillou and A.Marin, *Une extension d'un théorème de Rohlin sur la signature*, "A la Recherche de la Topologie Perdue," Progress in Mathematics, Vol. 62, Birkhäuser, 1986, pp. 69-80.
- I1. 石川剛郎, "実平面代数曲線のトポロジー —ヒルベルト第16問題—," Seminar Notes on Differential Topology 2, 1983.
- I2. I.Itenberg, *Contre-exemples à la conjecture de Ragsdale*, C.R.Acad.Sci.Paris 317 (1993), 277-282.
- K1. V.M.Kharlamov, *A generalized Petrovskii inequality*, Funct. Anal. Appl. 7 (1973), 50-56.
- K2. V.M.Kharlamov, *New relations for Euler characteristic of real algebraic manifolds*, Funct. Anal. Appl. 7 (1973), 147-150.
- K3. V.M.Kharlamov, *Additional congruences for Euler characteristic of real algebraic manifolds of even dimensions*, Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 134-141.
- K4. V.M.Kharlamov, *A generalized Petrovskii inequality II*, Funct. Anal. Appl. 9 (1975), 266-268.
- KV. V.M.Kharlamov and O.Y.Viro, *Extensions of the Gudkov-Rohlin congruence*, in "Topology and Geometry—Rohlin seminar (O.Viro ed.)," Lect. Note in Math. Vol. 1346, Springer-Verlag, 1988, pp. 357-406.
- K1. A.G.Khovanskii, *Newton polyhedra and the genus of complete intersection*, Funct. Anal. Appl. 12 (1978), 38-46.
- K2. A.G.Kouchnirenko, *Newton polyhedra and Bezout's theorem*, Funct. Anal. Appl. 10 (1976).
- M1. A.Marin, *Quelques remarques sur les courbes algébriques planes réelles*, in "Séminaire sur la géométrie algébrique réelle (J.J.Risler ed.)," Publ. Math. Univ. Paris VII 9., 1980, pp. 51-68.
- M2. 松本幸夫, *An elementary proof of Rochlin's signature theorem and its extension by Guillou and Marin*, "A la Recherche de la Topologie Perdue," Progress in Mathematics, Vol. 62, Birkhäuser, 1986, pp. 119-139.
- M3. 松岡幸子, *Nonsingular algebraic curves in  $\mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}P^1$* , Trans. Amer. Math. Soc. 324 (1991), 87-107.
- M4. 松岡幸子, *The configurations of the  $M$ -curves of degree (4,4) in  $\mathbf{R}P^1 \times \mathbf{R}P^1$  and periods of real  $K3$  surfaces*, Hokkaido Math. J. 19 (1990), 361-378.
- M5. 松岡幸子, *Congruences for  $M$ - and  $(M-1)$ -curves with odd branches on a hyperboloid*, Bull. London Math. Soc. 24 (1992), 61-67.
- M6. G.Mikhalkin, *Extensions of Rokhlin congruence for curves on surfaces*, in "Real Algebraic Geometry (M.Coste L.Mahé M.-F.Roy ed.)," Lect. Note in Math. Vol. 1524, Springer-Verlag, 1992, pp. 357-406.
- M7. J.Milnor, "Morse theory," Ann. of Math. Studies 51, Princeton Univ. Press, 1963.
- O. 小田忠雄, "凸体と代数幾何学," 紀伊國屋数学叢書 24, 紀伊國屋書店, 1985.
- P. I.Petrovsky, *On the topology of real plane algebraic curves*, Ann. of Math. 39 (1938), 189-209.
- R1. V.A.Rokhlin, *Proof of Gudkov's hypothesis*, Funct. Anal. Appl. 6 (1972), 136-138.

- R2. V.A.Rokhlin, *Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteen problem*, *Funct. Anal. Appl.* **6** (1972), 301–306.
- R3. V.A.Rokhlin, *Congruences modulo 16 in Hilbert's sixteen problem II*, *Funct. Anal. Appl.* **7** (1973), 163–164.
- V1. O.Y.Viro, *Gluing of plane real algebraic curves and constructions of curves of degree 6 and 7*, in "Proc. Internat. Topology Conf., Leningrad 1982," *Lect. Note in Math.* Vol. 1060, Springer-Verlag, 1984, pp. 187–200.
- V2. O.Y.Viro, *Progress in the topology of real algebraic varieties over the last six years*, *Russian Math. Surveys* **41** (1986), 55–82.
- W. G.Wilson, *Hilbert's sixteenth problem*, *Topology* **17** (1978), 53–73.

# Survey on 2-dimensional braids

SEIICHI KAMADA

Department of Mathematics, Osaka City University

We work in the piecewise linear category and every manifold embedded in a manifold is assumed to be proper and locally flat.

## Contents

- § 1. Geometric braids and braid groups
- § 2. 2-dimensional braids and 2-dimensional braid semi-groups
- § 3. Chart description and braid movies
- § 4. Braid monodromy representations and braid systems
- § 5. Braided product and invariants
- § 6. Note on non-simple 2-dimensional braids
- § 7. Toward 2-links

## 1. GEOMETRIC BRAIDS AND BRAID GROUPS

Let  $D^2$  be the 2-disk  $\{(x, y) \in R^2 \mid -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1\}$ ,  $y_i = 1 - 2^{-i}$  and  $z_i = (0, y_i) \in D^2$  for each  $i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ). For a positive integer  $m$ , we denote by  $X_m$  the set  $\{z_1, \dots, z_m\} \subset D^2$ . Consider the product  $D^2 \times I$  of the unit interval  $I = [0, 1]$  and  $D^2$ .

A *geometric  $m$ -braid* is a compact oriented 1-manifold  $b$  embedded in  $D^2 \times I$  such that  $pr_2|_b : b \rightarrow I$  is an oriented covering of degree  $m$  and  $pr_1(\partial b) = X_m$ .

Let  $b_i$  ( $i = 1, 2$ ) be geometric  $m$ -braids in  $D^2 \times I_i$  where  $I_i$  is a copy of  $I$ . Identifying  $I_1 = [0, 1/2]$  and  $I_2 = [1/2, 1]$ , we have a geometric  $m$ -braid  $b_1 \cup b_2$  in  $D^2 \times (I_1 \cup I_2) = D^2 \times I$ . We call it the *product* of  $b_1$  and  $b_2$  and denote it by  $b_1 \cdot b_2$ . (This product does not satisfy the associative law  $(b_1 \cdot b_2) \cdot b_3 = b_1 \cdot (b_2 \cdot b_3)$  in general.) Two geometric  $m$ -braids  $b$  and  $b'$  are said to be *equivalent* if there is a continuous sequence  $\{b_t\}_{t \in I}$  of geometric  $m$ -braids with  $b_0 = b$  and  $b_1 = b'$ . This is an equivalence relation on the set of geometric  $m$ -braids. The set of equivalence

classes of geometric  $m$ -braids forms a semi-group together with the multiplication induced from the product. It is easy to see that each equivalence class has the inverse element under the multiplication, and hence the semi-group is a group, which is called the  $m$ -braid group and denoted by  $B_m$ . Each equivalence class is called an  $m$ -braid.

The *configuration space of ordered  $m$  points* of a topological space  $W$  is

$$\{(w_1, \dots, w_m) \in W^m \mid w_i \neq w_j \text{ for } i \neq j\}.$$

The symmetry group on  $m$  letters acts naturally on the space by permuting the coordinates. The quotient space (with the quotient topology) is called the *configuration space of unordered  $m$  points* of  $W$ . We denote by  $C_m$  the configuration space of unordered  $m$  points of the interior of  $D^2$ .

For a geometric  $m$ -braid  $b$ , let  $g_b : I \rightarrow C_m$  be a path defined by

$$g_b(t) = pr_1(b \cap D^2 \times \{t\}) \quad \text{for } t \in I.$$

Then  $g_b$  is a loop in  $C_m$  with base point  $X_m$ .

LEMMA 1.1. *The  $m$ -braid group  $B_m$  is isomorphic to the fundamental group  $\pi_1(C_m, X_m)$  by the mapping  $[b] \mapsto [g_b]$ .*

LEMMA 1.2. *The  $m$ -braid group  $B_m$  has a presentation of generators:*

$$\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}$$

*with defining relations*

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j \sigma_i &= \sigma_j \sigma_i \sigma_j \quad (|i - j| = 1), \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \neq 1). \end{aligned}$$

The geometric  $m$ -braid corresponding to  $\sigma_j$  is the one whose  $j$ th string and  $j + 1$ st string are twisted once nicely and other strings are trivial, see [B1].

LEMMA 1.3. *Let  $b$  and  $b'$  are geometric  $m$ -braids. Then the followings are mutually equivalent:*

- (1)  $b$  and  $b'$  are ambient isotopic by an isotopy  $\{h_t\}$  of  $D^2 \times I$  such that for each  $t \in I$ ,  $h_t$  is fiber-preserving, where we regard  $D^2 \times I$  as the trivial  $D^2$ -bundle over  $I$ , and  $h_t|_{D^2 \times \partial I} = \text{id}$ .
- (2)  $b$  and  $b'$  are ambient isotopic by an isotopy  $\{h_t\}$  of  $D^2 \times I$  such that for each  $t \in I$ ,  $h_t(b)$  is a geometric  $m$ -braid and  $h_t|_{D^2 \times \partial I} = \text{id}$ .
- (3)  $b$  and  $b'$  are equivalent, i.e. there is a continuous sequence of geometric  $m$ -braids from  $b$  to  $b'$ .

For proofs of Lemmas 1.1–1.3 and for further information on braids, refer to [Ar1; Ar2; B1].

## 2. 2-DIMENSIONAL BRAIDS AND 2-DIMENSIONAL BRAID SEMI-GROUPS

Let  $D_1^2$  and  $D_2^2$  be copies of  $D^2$ . A homeomorphism  $h : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_1^2 \times D_2^2$  is *fiber-preserving* if there is a homeomorphism  $\underline{h} : D_2^2 \rightarrow D_2^2$  such that  $pr_2 \circ h = \underline{h} \circ pr_2$ . Furthermore if  $\underline{h}$  is the identity, then  $h$  is an *isomorphism*.

A *2-dimensional braid* of degree  $m$  (or a 2-dimensional  $m$ -braid) is a compact oriented surface  $S$  embedded in  $D_1^2 \times D_2^2$  such that  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$  is an oriented branched covering of degree  $m$  and  $pr_1(\partial B) = X_m$ .

Let  $S$  and  $S'$  be 2-dimensional braids.

(1)  $S$  and  $S'$  are *isomorphic* if they are ambient isotopic by an isotopy  $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$  of  $D_1^2 \times D_2^2$  such that for each  $t \in [0, 1]$ ,  $h_t$  is an isomorphism and  $h_t|_{D_1^2 \times \partial D_2^2} = \text{id}$ .

(2)  $S$  and  $S'$  are *equivalent* if they are ambient isotopic by an isotopy  $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$  of  $D_1^2 \times D_2^2$  such that for each  $t \in [0, 1]$ ,  $h_t$  is fiber-preserving and  $h_t|_{D_1^2 \times \partial D_2^2} = \text{id}$ .

(3)  $S$  and  $S'$  are *braid ambient isotopic* if they are ambient isotopic by an isotopy  $\{h_t\}_{t \in [0,1]}$  of  $D_1^2 \times D_2^2$  (called a *braid ambient isotopy*) such that for each  $t \in [0, 1]$ ,  $h_t(S)$  is a 2-dimensional braid and  $h_t|_{D_1^2 \times \partial D_2^2} = \text{id}$ .

(4)  $S$  and  $S'$  are *braid isotopic* if there is an isotopy  $\{S_t\}_{t \in [0,1]}$  (called a *braid isotopy*) with  $S_0 = S$  and  $S_1 = S'$  such that for each  $t \in [0, 1]$ ,  $S_t$  is a 2-dimensional braid.

By definition, (1)  $\rightarrow$  (2), (2)  $\rightarrow$  (3), (3)  $\rightarrow$  (4). In general neither (2)  $\rightarrow$  (1) nor (3)  $\rightarrow$  (2) holds. It is unknown to the author whether (4)  $\rightarrow$  (3) holds or not. (For classical braids, these four equivalence relations replaced  $D_2^2$  with  $I$  are mutually equivalent, Lemma 1.3.)

A 2-dimensional braid is *trivial* if it is equivalent to the product  $X_m \times D_2^2$ .

Let  $S_i$  ( $i = 1, 2$ ) be 2-dimensional  $m$ -braids in  $D_1^2 \times D_{2(i)}^2$  where  $D_{2(i)}^2$  is a copy of  $D_2^2$ . The boundary connected sum  $D_{2(1)}^2 \natural D_{2(2)}^2$  is also a 2-disk, which we identify with  $D_2^2$ . Then  $S_1 \cup S_2$  in  $D_1^2 \times (D_{2(1)}^2 \natural D_{2(2)}^2)$  is a 2-dimensional  $m$ -braid in  $D_1^2 \times D_2^2$ . We call it the *product* of  $S_1$  and  $S_2$  and denote it by  $S_1 \cdot S_2$ . The set of equivalence classes of 2-dimensional  $m$ -braids forms, together with the multiplication induced by the product, a (commutative) semi-group, called the *2-dimensional  $m$ -braid semi-group* and denoted by  $\mathcal{B}_m$ . The identity of  $\mathcal{B}_m$  is the equivalence class of the trivial. For a 2-dimensional braid  $S$ , we denote by  $n(S)$  the number of branch points of the branched covering  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$ . Since  $n(S) = n(S')$  for equivalent  $S$  and  $S'$  and since  $n(S_1 \cdot S_2) = n(S_1) + n(S_2)$ , we



have a semi-group homomorphism

$$n : \mathcal{B}_m \rightarrow \mathbb{N}_0$$

where  $\mathbb{N}_0$  is the semi-group of non-negative integers with the additive multiplication.

LEMMA 2.1. *A 2-dimensional braid  $S$  is trivial if and only if  $n(S) = 0$ .*

COROLLARY 2.2: Any non-trivial element of  $\mathcal{B}_m$  has no inverse element.

A 2-dimensional braid  $S$  is said to be *simple* if the branched covering  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$  is *simple* [BE]. The set of equivalence classes of simple 2-dimensional  $m$ -braids forms a sub-semi-group of  $\mathcal{B}_m$ , which is called the *simple 2-dimensional  $m$ -braid semi-group* and denoted by  $S\mathcal{B}_m$ .

### 3. CHART DESCRIPTION AND BRAID MOVIES

Let  $S$  be a 2-dimensional  $m$ -braid in  $D_1^2 \times D_2^2$ . Fix a parametrization of  $D_2^2$  by  $I \times I$  and let  $b_t = S \cap D_1^2 \times I \times \{t\}$  for each  $t \in I$ . Then  $\{b_t\}_{t \in I}$  is a continuous sequence of  $m$ -braids except a finite number of  $b_t$ 's where *string recombinations* (*intercommutations* [K1]) occur. We call the sequence a *braid movie* of  $S$ . Refer to [R2; R4; CS7; CS11; K1; K2].

THEOREM 3.1(CARTER/SAITO). *Two braid movies are equivalent if and only if they are related by a sequence of braid movie moves and locality changes.*

Refer to [CS7; CS11] for the terminology in 3.1. Braid movie description is the easiest way to understand and tell the configuration of  $S$ . But it is not so convenient when one wants to deform the configuration of  $S$  up to equivalence. So we introduce another method called *chart description*. Let  $m \geq 1$  and  $n \geq 0$  be integers.

An  $m$ -chart  $\Gamma$  is an immersed finite graph (possibly, the empty) in the interior of  $D_2^2$  satisfying the following conditions (i)–(iv):

- (i) Every vertex of  $\Gamma$  is colored in white or black.
- (ii) Each edge or loop is oriented and labeled by an integer in  $\{1, \dots, m-1\}$ .
- (iii) Each black vertex is attached an edge and white vertex is attached six edges such that they are labeled by  $i$  and  $i+1$  ( $i = 1, \dots, m-2$ ) alternately, consecutive three edges are oriented toward the outside of the white vertex and the other three edges toward inside.
- (iv) The singularity is empty or consists of double points where two edges or loops whose difference in labels is more than one intersect transversally.

An  $m$ -chart with  $n$  black vertices is called an  $(m, n)$ -chart.

For an  $(m, n)$ -chart  $\Gamma$ , we can define a simple 2-dimensional  $m$ -braid  $\rho(\Gamma)$  with  $n$  branch points, see [K1; CS7]. A simple 2-dimensional braid  $S$  is said to be *represented* by  $\Gamma$  if it is equivalent to  $\rho(\Gamma)$ . (Although the notion of chart description is extended to non-simple 2-dimensional braids, we do not discuss it.)

**THEOREM 3.2.** *Any simple 2-dimensional  $m$ -braid with  $n$  branch points is represented by an  $(m, n)$ -chart.*

**THEOREM 3.3.** *Let  $\Gamma$  and  $\Gamma'$  be  $m$ -charts. They represent the same (equivalent) 2-dimensional braid if and only if they are  $C$ -move equivalent.*

Refer to [K1] for the definition of the  $C$ -move equivalent.

For  $m$ -charts  $\Gamma_1 \subset D_{2(1)}^2$  and  $\Gamma_2 \subset D_{2(2)}^2$ , the union  $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$  in  $D^2 = D_{2(1)}^2 \natural D_{2(2)}^2$  is an  $m$ -chart, called the product of  $\Gamma_1$  and  $\Gamma_2$  and denoted by  $\Gamma_1 \cdot \Gamma_2$ . This product makes the family of ambient isotopy classes of  $m$ -charts a commutative semi-group. Since  $\rho(\Gamma_1 \cdot \Gamma_2)$  is equivalent to  $\rho(\Gamma_1) \cdot \rho(\Gamma_2)$ , we have a semi-group homomorphism  $\rho$  from this semi-group to  $SB_m$ . Theorem 3.2 asserts that it is onto and Theorem 3.3 that it induces a semi-group isomorphism from the  $m$ -chart semi-group modulo  $C$ -move equivalence to  $SB_m$ .

An edge of an  $m$ -chart is called a *free edge* if both of the endpoints are black vertices. An  $m$ -chart is said to be *unknotted* if it is empty or consists of free edges. A simple 2-dimensional  $m$ -braid represented by an unknotted  $m$ -chart is called an *unknotted 2-dimensional  $m$ -braid*. A simple 2-dimensional  $m$ -braid  $S$  in  $D_1^2 \times D_2^2 = D_1^2 \times (I \times [-1, 1])$  is called *ribbon* if it is equivalent to a simple 2-dimensional  $m$ -braid  $S'$  such that  $S'$  is symmetric with respect to the hyperplane  $D_1^2 \times (I \times \{0\})$ . (For any unknotted (or ribbon, resp.) 2-dimensional  $m$ -braid, the closure in  $R^4$  (§ 7) is an unknotted (ribbon, resp.) surface in  $R^4$  and conversely any unknotted (or ribbon, resp.) oriented surface in  $R^4$  is ambient isotopic to the closure in  $R^4$  of an unknotted (ribbon, resp.) 2-dimensional  $m$ -braid for some (non-unique) integer  $m$ . This is the reason for using the terminologies “unknotted” and “ribbon”.)

**THEOREM 3.4.** *Any 2-dimensional 2-braid is unknotted. Two 2-dimensional 2-braids are equivalent if and only if they have the same number of branch points.*

**COROLLARY.**  $B_2 = SB_2$  is isomorphic to  $\mathbb{N}_0$ .

**THEOREM 3.5.** *A simple 2-dimensional  $m$ -braid  $S$  is ribbon if and only if it is*

represented by an  $m$ -chart  $\Gamma$  such that  $\Gamma = -\Gamma^*$ , where  $*$  means the mirror image with respect to the line  $I \times \{0\} \subset I \times [-1, 1] = D_2^2$  and  $-$  means the inversion of orientations of edges and loops.

LEMMA 3.6. *Let  $\Gamma$  be an  $m$ -chart. The following four conditions are equivalent:*

- (i)  $\Gamma$  is  $C$ -move equivalent to an  $m$ -chart  $\Gamma_1$  such that  $\Gamma_1 = -\Gamma_1^*$ .
- (ii)  $\Gamma$  is  $C$ -move equivalent to an  $m$ -chart  $\Gamma_1$  which has no white vertices.
- (iii)  $\Gamma$  is  $C$ -move equivalent to an  $m$ -chart  $\Gamma_1$  such that every black vertex of  $\Gamma_1$  is an endpoint of a free edge.
- (iv)  $\Gamma$  is  $C$ -move equivalent to an  $m$ -chart that is the product of charts each of which consists of a single free edge with some (or no) concentric loops around it.

THEOREM 3.7. *A simple 2-dimensional  $m$ -braid is ribbon if and only if it is represented by an  $m$ -chart which has no white vertices.*

THEOREM 3.8. *Every simple 2-dimensional 3-braid is ribbon.*

For an  $m$ -chart  $\Gamma$ , let  $w(\Gamma)$  be the number of white vertices of  $\Gamma$ . The  $w$ -index of a simple 2-dimensional braid  $S$ , denoted by  $w(S)$ , is  $\min\{w(\Gamma) \mid \Gamma \text{ represents } S\}$ . Then Theorem 3.7 is that for a simple 2-dimensional braid  $S$ ,  $w(S) = 0$  if and only if  $S$  is ribbon.

Let  $F$  be a compact oriented surface properly embedded in a 4-manifold  $W^4$ . A 3-ball  $B^3$  embedded in the interior of  $W^4$  is called a *1-handle attaching to  $F$*  if the intersection of  $B^3$  and  $F$  is a pair of 2-disks on the boundary of  $B^3$  and the closure of  $F \cup \partial B^3 - F \cap B^3$  in  $W^4$  is an orientable surface. (We assign the resultant surface in  $W^4$  an orientation induced from  $F$ .) It is called a *surface obtained from  $F$  by surgery along  $B^3$*  or simply the *surgery result*.

Let  $S$  be a simple 2-dimensional  $m$ -braid. A 1-handle attaching to  $S$  is *nice* if the core is contained in  $D_1^2 \times \{y\}$  for some  $y \in D_2^2$  such that  $y$  is not a branch point of  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$ . Such a 1-handle corresponds to a free edge with some (or no) concentric loops around it in terms of chart description. We define  $r(S)$  (or  $u(S)$ , resp.) by the minimum number of nice 1-handles attaching to  $S$  such that the surgery result is a ribbon (resp. unknotted) 2-dimensional braid.

THEOREM 3.9. *Let  $S$  be a simple 2-dimensional  $m$ -braid.*

- (1)  $u(S) \leq r(S) + m - 1$ .
- (2)  $r(S) \leq w(S)$ .

#### 4. BRAID MONODROMY REPRESENTATIONS AND BRAID SYSTEMS

Let  $w_0$  be a point of  $\partial D_2^2$  and fix it. Let  $S$  be a 2-dimensional  $m$ -braid and  $W_S$  the branch point set of the branched covering  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$ . A path  $c : (I, \partial I) \rightarrow (D_2^2 - W_S, w_0)$  induces a path  $\rho_S(c) : (I, \partial I) \rightarrow (C_m, X_m)$  by  $\rho_S(c)(t) = pr_1(S \cap D_1^2 \times \{c(t)\})$  for  $t \in I$ . If  $c$  and  $c'$  are homotopic, then  $\rho_S(c)$  and  $\rho_S(c')$  are homotopic. Hence we have a homomorphism

$$\rho_S : \pi_1(D_2^2 - W_S, w_0) \rightarrow \pi_1(C_m, X_m) = B_m,$$

which we call the *braid monodromy representation* of  $S$ . The idea of the braid monodromy representation is due to Moishezon[Mo], Rudolph[R2; R4] and Viro.

LEMMA 4.1. *Let  $S$  and  $S'$  be 2-dimensional  $m$ -braids. They are isomorphic if and only if  $W_S = W_{S'}$  and  $\rho_S = \rho_{S'}$ .*

THEOREM 4.2 (MONODROMY THEOREM I). *Let  $S$  and  $S'$  be 2-dimensional  $m$ -braids, and  $\rho_S$  and  $\rho_{S'}$  their braid monodromies.  $S$  and  $S'$  are equivalent if and only if there is a homeomorphism  $h : (D_2^2, W_S) \rightarrow (D_2^2, W_{S'})$  with  $h|_{\partial D_2^2} = id$  such that  $\rho_S = \rho_{S'} \circ h_*$ , where  $h_* : \pi_1(D_2^2 - W_S, w_0) \rightarrow \pi_1(D_2^2 - W_{S'}, w_0)$  is the induced homomorphism.*

Let  $W$  be a set of distinct  $n$  interior points of  $D_2^2$ . A *Hurwitz arc system* for  $W$  with base point  $w_0$  is an ordered  $n$  simple arcs  $\mathcal{A} = a_1, \dots, a_n$  in  $D_2^2$  such that

- (1) for each  $i$  ( $i = 1, \dots, n$ ),  $\partial a_i = \{w_0, w_i\}$  where  $w_i$  is a point of  $W$ ,
- (2)  $a_i \cap a_j = \{w_0\}$  if  $i \neq j$  and
- (3)  $a_1, \dots, a_n$  are ordered in the positive direction around  $w_0$ .

Let  $c_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) be a loop in  $D_2^2 - W$  with base point  $w_0$  such that it runs along  $a_i$ , goes around  $w_i$  in the positive direction and returns along  $a_i$ . We denote by  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) the element of  $\pi_1(D_2^2 - W, w_0)$  represented by  $c_i$ . Then the fundamental group is freely generated by  $\eta_1, \dots, \eta_n$  and the element represented by  $\partial D_2^2$  is the product  $\eta_1 \cdots \eta_n$ . We call them the *generator system* of  $\pi_1(D_2^2 - W, w_0)$  associated with the Hurwitz arc system  $\mathcal{A}$ .

Let  $S$  be a 2-dimensional  $m$ -braid,  $W_S$  the branch point set of the branched covering  $pr_2|_S : S \rightarrow D_2^2$  and  $\rho_S : \pi_1(D_2^2 - W_S, w_0) \rightarrow B_m$  the braid monodromy of  $S$ . Let  $\mathcal{A} = a_1, \dots, a_n$  be a Hurwitz arc system for  $W_S$  with base point  $w_0$  and  $\eta_1, \dots, \eta_n$  the generator system of  $\pi_1(D_2^2 - W_S, w_0)$  associated with  $\mathcal{A}$ , where  $n = n(S)$ .

The *braid system* of  $S$  associated with  $\mathcal{A}$  is the  $n$ -tuple of  $m$ -braids

$$(\rho_S(\eta_1), \rho_S(\eta_2), \dots, \rho_S(\eta_n)).$$

(For a 2-dimensional braid  $S$  with  $n(S) = 0$ , i.e. it is trivial, we define the braid system is the 0-tuple.)

The braid system depends on the choice of the Hurwitz arc system. But there is a relationship between braid systems of the same (equivalent) 2-dimensional braid, which we observe below.

Let  $G$  be a group and  $G^n$  the  $n$ -fold product of  $G$ . The *slide action* of the  $n$ -braid group  $B_n$  on  $G^n$  is defined as follows:

$$\begin{aligned} \text{slide}(\sigma_j)(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_{j-1}, g_j g_{j+1} g_j^{-1}, g_j, g_{j+2}, \dots, g_n), \\ \text{slide}(\sigma_j^{-1})(g_1, \dots, g_n) &= (g_1, \dots, g_{j-1}, g_{j+1}, g_j^{-1} g_j g_{j+1}, g_{j+2}, \dots, g_n), \end{aligned}$$

where  $\sigma_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ) is a standard generator of  $B_n$  (Lemma 1.2). ( $\text{slide}(\sigma_j)$  and  $\text{slide}(\sigma_j^{-1})$  are known as Peiffer transformations of the first kind, cf.[LS, p157].)

**THEOREM 4.3 (MONODROMY THEOREM II).** *Let  $S$  and  $S'$  be 2-dimensional  $m$ -braids with  $n$  branch points,  $\vec{b} = (b_1, \dots, b_n)$  and  $\vec{b}' = (b'_1, \dots, b'_n)$  their braid systems.  $S$  and  $S'$  are equivalent if and only if  $\vec{b}$  and  $\vec{b}'$  are in the same orbit of the slide action.*

Let  $\vec{g} = (g_1, \dots, g_n)$  be an element of  $G^n$  ( $n \geq 2$ ). A Peiffer transformation of the second kind is replacing  $\vec{g}$  by  $\vec{g}' = (g_1, \dots, g_{j-1}, g_{j+2}, \dots, g_n) \in G^{n-2}$  where  $g_j \cdot g_{j+1} = 1$  in  $G$  for some  $j$ . When we consider braid systems of simple 2-dimensional braids, this transformation corresponds to a deletion of a free edge in terms of chart description.

**THEOREM 4.4(RUDOLPH).** *Any braid system of a simple 2-dimensional braid is transformed into the empty braid system by a sequence of Peiffer transformations and their inverses.*

For a braid system of simple 2-dimensional braid  $S$ , we define the *Rudolph index* of it by the minimum number of Peiffer transformations of the second kind and their inverses appearing in sequences as in Theorem 4.4. From Theorem 4.3, we see that it depends only on  $S$ , hence we can define the *Rudolph index* of  $S$  by it.

**THEOREM 4.5.** *For a simple 2-dimensional  $m$ -braid  $S$  with  $n$  branch points, the Rudolph index of  $S$  equals  $2r(S) + n/2$ .*

## 5. BRAIDED PRODUCT AND INVARIANTS

For a 2-dimensional braid  $S$ , the degree  $m(S)$  and the number of branch points  $n(S)$  are evident invariants. The fundamental group  $\pi_1(D_1^2 \times D_2^2 - S)$  and other invariants arising from it are nice invariants. In case  $S$  is simple, we defined some invariants;  $w(S), u(S), r(S)$  and the Rudolph index. Here we introduce another invariant which is more practicable.

An *automorphic set* is a pair  $(A, *)$  of a set  $A$  and a map  $* : A \times A \rightarrow A$  satisfying

- (1) for any  $a, c \in A$ , there is a unique  $b \in A$  with  $a * b = c$ , and
- (2) for any  $a, b, c \in A$ ,  $(a * b) * (a * c) = a * (b * c)$ .

A morphism  $f : (A, *) \rightarrow (A', *)$  is a map  $f : A \rightarrow A'$  such that  $f(a * b) = f(a) * f(b)$ . (We use the same symbol “ $*$ ” for different automorphic set, if it makes no confusion, and usually abbreviate  $(A, *)$  as  $A$ . Our terminology is due to E. Brieskorn [Br]. A similar idea was given by D. Joyce [Joy], called a *quandle*.)

Let  $A$  be an automorphic set and  $P_n(A) = A^n$  the  $n$ -fold product of  $A$ . The  $n$ -braid group  $B_n$  acts on it by

$$\begin{aligned}\sigma_j(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_{j-1}, x_j * x_{j+1}, x_j, x_{j+2}, \dots, x_n) \\ \sigma_j^{-1}(x_1, \dots, x_n) &= (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, y_j, x_{j+2}, \dots, x_n),\end{aligned}$$

where  $y_j$  is a unique element of  $A$  with  $x_{j+1} * y_j = x_j$ . The quotient of  $P_n(A)$  by the action of  $B_n$  is called the  $n$ -fold *braided product* of  $A$  and denoted by  $Q_n(A) = P_n(A)/B_n$ . The  $n$ -fold *symmetric product* of  $A$  is  $S_n(A) = P_n(A)/S_n$  where the symmetric group  $S_n$  acts on  $P_n(A)$  by permuting the coordinates. Let  $P_*(A) = \coprod_{n=0}^{\infty} P_n(A)$ ,  $Q_*(A) = \coprod_{n=0}^{\infty} Q_n(A)$  and  $S_*(A) = \coprod_{n=0}^{\infty} S_n(A)$ , which are semi-groups with concatenation products. An automorphic set  $A$  is *trivial* if  $a * b = b$  for any  $a, b \in A$ . If  $A$  is trivial, then  $Q_n(A) = S_n(A)$ .

For a morphism  $f : A \rightarrow A'$ , we define a map  $P_n(f) : P_n(A) \rightarrow P_n(A')$  by  $P_n(f)(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$ , which induces maps  $Q_n(f) : Q_n(A) \rightarrow Q_n(A')$  and  $S_n(f) : S_n(A) \rightarrow S_n(A')$ .

Let  $G$  be a group. It is regarded as an automorphic set when we define  $a * b = aba^{-1}$  for  $a, b \in G$ . It is a trivial automorphic set if and only if  $G$  is abelian. Note that the  $n$ -braid group action on  $P_n(G)$  is the same as the slide action in § 4. A subset  $S$  of  $G$  is *self-conjugation closed* if  $aba^{-1} \in S$  for any  $a, b \in S$ . Then  $S$  is an automorphic subset of  $G$ . We denote by  $P_n^1(S)$  the subset of  $P_n(S)$  consisting of  $(g_1, \dots, g_n)$  with  $g_1 \cdots g_n = 1$  in  $G$ , and by  $Q_n^1(S)$  the subset of  $Q_n(S)$  which is the quotient of  $P_n^1(S)$ . Then  $P_*^1(S) = \coprod_{n=0}^{\infty} P_n^1(S)$  and  $Q_*^1(S) = \coprod_{n=0}^{\infty} Q_n^1(S)$  are semi-groups with concatenation products. Let  $\mathcal{B}_{m,n}$  be the set of equivalence

classes of 2-dimensional  $m$ -braids with  $n$  branch points and  $SB_{m,n}$  the subset of  $B_{m,n}$  consisting of equivalence classes of simple ones. Let  $A_m$  and  $SA_m$  be subsets of  $B_m$  defined in [K6], which are self-conjugation closed.

THEOREM 5.1. *There exist canonical one-to-one correspondences*

$$B_{m,n} \leftrightarrow Q_n^1(A_m) \text{ and } SB_{m,n} \leftrightarrow Q_n^1(SA_m).$$

Moreover they induce semi-group isomorphism

$$B_m \leftrightarrow Q_*^1(A_m) \text{ and } SB_m \leftrightarrow Q_*^1(SA_m).$$

Let  $f : B_m \rightarrow G$  be a group representation of the  $m$ -braid group, which is also regarded as a morphism between automorphic sets. The composition of the inclusion  $i : A_m \rightarrow B_m$  (or  $i : SA_m \rightarrow B_m$ , resp.) and  $f$  is a morphism  $f \circ i : A_m \rightarrow G$  (resp.  $SA_m \rightarrow G$ ), which induces a map  $Q_n(f \circ i) : Q_n^1(A_m) \rightarrow Q_n^1(G)$  (resp.  $Q_n(f \circ i) : Q_n^1(SA_m) \rightarrow Q_n^1(G)$ ). By Theorem 5.1, it is an invariant of  $B_{m,n}$  (resp.  $SB_{m,n}$ ).

5.2 A SERIES OF INVARIANTS OF  $SB_{m,n}$ : For each  $p$  ( $p = 2, 3, 4, \dots$ ), let  $f_p : B_m \rightarrow SL(m-1, Z/pZ)$  be a group representation defined by

$$f_p(\sigma_1) = a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_p(\sigma_j) = a_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & 0 & 0 & & & & \\ & & -1 & 1 & 1 & & & & \\ & & 0 & 0 & 1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & & & & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$f_p(\sigma_{m-1}) = a_{m-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & 0 \\ 0 & & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

where  $j \in \{2, \dots, m-2\}$  and  $-1, 1, 1$  appear on the  $j$ th row.

Let  $S$  be the self-conjugation closed subset of  $G = SL(m-1, Z/pZ)$  generated by  $\{a_1, \dots, a_{m-1}\}$ . Then the image of  $Q_n(f_p \circ i) : Q_n^1(SA_m) \rightarrow Q_n^1(G)$  is contained in  $Q_n^1(S)$ . Hence we assume the morphism to be from  $Q_n^1(SA_m)$  to  $Q_n^1(S)$ . By Theorem 5.1 we have an invariant  $\varphi_p : SB_{m,n} \cong Q_n^1(SA_m) \rightarrow Q_n^1(S)$ .

## 6. NOTE ON NON-SIMPLE 2-DIMENSIONAL BRAID

It is well-known that a non-simple branched covering map is deformed into a simple one by a sufficiently small modification; for example see [BE]. A natural analogue of it does not hold for 2-dimensional braids. In fact there is a non-simple 2-dimensional braid which cannot be deformed into a simple 2-dimensional braid by a braid isotopy.

**THEOREM 6.1.** *For  $m \leq 3$ , any 2-dimensional  $m$ -braid is braid (ambient) isotopic to a simple 2-dimensional braid by a small modification.*

**THEOREM 6.2.** *For each integers  $m \geq 4$ , there are infinitely many non-equivalent 2-dimensional braids  $S$  such that  $S$  is non-simple and any 2-dimensional braid  $S'$  which is braid (ambient) isotopic to  $S$  is equivalent to  $S$ . In particular,  $S$  is not braid (ambient) isotopic to a simple 2-dimensional braid.*

**THEOREM 6.3.** *For any non-simple 2-dimensional braid  $S$ , there is a sequence of conjugations and stabilizations (§ 7) carrying  $S$  into one that is braid ambient isotopic to a simple 2-dimensional braid.*

For proofs of Theorems 6.1–6.3, refer to [K6].

## 7. TOWARD 2-LINKS

**THEOREM 7.1(RUDOLPH).** *Every compact oriented ribbon surface embedded in a 4-disk  $D^4 \cong D_1^2 \times D_2^2$  is ambient isotopic to a braided surface.*

Let  $S^2$  be the oriented 2-sphere obtained from  $D_2^2$  by identifying  $\partial D_2^2$  with a single point and  $p : D_2^2 \rightarrow S^2 = D_2^2/\partial D_2^2$  the projection. For a 2-dimensional braid  $S$  of degree  $m$  in  $D_1^2 \times D_2^2$ , the image of it under the projection  $\text{id} \times p : D_1^2 \times D_2^2 \rightarrow D_1^2 \times S^2$  is a closed oriented surface embedded in  $D_1^2 \times S^2$ . We call it the *closure* of  $S$  in  $D_1^2 \times S^2$  and denote by  $\widehat{S}$ . Then  $pr_2|_{\widehat{S}} : \widehat{S} \rightarrow S^2$  is an oriented branched covering of degree  $m$ . Identify  $S^2$  with the standard 2-sphere in  $R^4$  about the 4th axis (assigned an orientation which we fix) and  $D_1^2 \times S^2$  a tubular neighborhood of it. Then the image of  $\widehat{S}$  is a closed oriented surface embedded in  $R^4$ . We call it the *closure* of  $S$  in  $R^4$  or a *closed 2-dimensional braid* in  $R^4$  and denote it also by  $\widehat{S}$ .

**THEOREM 7.2(VIRO).** *Any closed oriented surface in  $R^4$  is ambient isotopic to the closure in  $R^4$  of a (simple) 2-dimensional braid.*



In [K4;K5], the notion of conjugations and stabilizations is defined in a geometrical way as an analogue of the classical one. We explain it in terms of braid systems according to [K6]. Let  $\vec{b} = (b(1), \dots, b(n))$  be a braid system of a 2-dimensional  $m$ -braid  $S$ , which is an element of  $P_n^1(A_m)$ . For an  $m$ -braid  $\gamma$ , the  $n$ -tuple of  $m$ -braids

$$(\gamma b(1)\gamma^{-1}, \dots, \gamma b(n)\gamma^{-1})$$

is an element of  $P_n^1(A_m)$  and determines a unique 2-dimensional  $m$ -braid, said to be obtained from  $S$  by a *conjugation* by  $\gamma$ . The  $(n+2)$ -tuple of  $(m+1)$ -braids

$$(\iota(b(1)), \dots, \iota(b(n)), \sigma_m^{-1}, \sigma_m)$$

is an element of  $P_{n+2}^1(A_{m+1})$  and determines a unique 2-dimensional  $m$ -braid, said to be obtained from  $S$  by a *conjugation*, where  $\iota: B_m \rightarrow B_{m+1}$  is the natural injection.

**THEOREM 7.3([K5]).** *Let  $S$  and  $S'$  be 2-dimensional braids. The closures in  $R^4$  of them are ambient isotopic if and only if  $S'$  is obtained from  $S$  by braid ambient isotopies, conjugations, stabilizations and inverses of stabilizations.*

**COROLLARY.** *Any function of  $\prod_{m=0}^{\infty} Q_*^1(A_m)$  that is invariant under Euler fusions (Euler fissions), conjugations and stabilizations is an invariant of 2-links.  $\square$*

Refer to [K6], for the definition of the Euler fusion.

**THEOREM 7.4.** *Let  $S$  and  $S'$  be 2-dimensional braids. Suppose that  $S'$  is obtained from  $S$  by braid ambient isotopies, conjugations, stabilizations and inverses of stabilizations. Then there are 2-dimensional braids  $\tilde{S}$  and  $\tilde{S}'$  such that they are braid ambient isotopic and they are obtained from  $S$  and  $S'$  respectively by conjugations and stabilizations.*

**THEOREM 7.5.** *Let  $S$  and  $S'$  be simple 2-dimensional braids. The closures in  $R^4$  of them are ambient isotopic if and only if there is a finite sequence of simple 2-dimensional braids  $S = S_0, S_1, \dots, S_s = S'$  such that for each  $i$  ( $i = 0, 1, \dots, s-1$ ),  $S_{i+1}$  is obtained from  $S_i$  by a braid ambient isotopy, a conjugation, a stabilization or the inverse of a stabilization.*

Let  $e_1$  be the Artin automorphism of the free group  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  associated with  $\sigma_1 \in B_m$  (cf.[Ar1; Bi]). An ordered  $n$  Artin automorphisms  $f_1, \dots, f_n$  satisfy the  $\partial$ -condition [K3] if we can choose  $\epsilon_i \in \{\pm 1\}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) such that  $\prod_{i=1}^n f_i^{-1} e_1^{\epsilon_i} f_i = 1$ .

**THEOREM 7.6.** For any integers  $c \geq 1$  and  $g \geq 0$ , a group  $G$  is isomorphic to  $\pi_1(R^4 - F)$  for a  $c$ -component (total) genus  $g$  closed oriented surface  $F$  in  $R^4$  if and only if

- (1)  $G/[G, G]$  is the free abelian group of rank  $c$  and
- (2)  $G$  has a Wirtinger presentation  $\langle x_1, \dots, x_m \mid f_i(x_1) = f_i(x_2) (i = 1, \dots, n) \rangle$ , where  $f_1, \dots, f_n$  are Artin automorphisms satisfying the  $\partial$ -condition for some  $m (\geq 1)$  and  $n (\geq 0)$  such that  $2m - n = 2c - 2g$ .

This theorem is proved in [K3]. It is also obtained from [R2] under assuming Theorem 7.2.

For a closed oriented surface  $F$  in  $R^4$ , the *braid index* of  $F$ , denoted by  $b(F)$ , is the minimum degree of closed simple 2-dimensional braids which are ambient isotopic to  $F$ . The braid index is one if and only if  $F$  is an unknotted 2-sphere. If  $F$  is  $c$  unknotted, unlinked 2-spheres in  $R^4$ , then  $b(F) = c$ .

**THEOREM 7.7.** A closed oriented surface  $F$  in  $R^4$  has braid index two if and only if it is unknotted and homeomorphic to either a connected orientable surface with positive genus or a pair of 2-spheres.

From this theorem, we see that no 2-knot has braid index two. There are infinitely many 2-knots of braid index three.

**THEOREM 7.8.** If the braid index of  $F$  is three, then it is ribbon.

The 2-twist spun 2-knot of a trefoil knot is ambient isotopic to a closed simple 2-dimensional 4-braid. Since it is not ribbon, the braid index is four.

**THEOREM 7.9.** Let  $F$  be a spun 2-knot obtained from a 1-knot  $k$ . If the braid index of  $k$  is  $b$ , then  $b(F) \leq 2b - 1$ .

**THEOREM 7.10.** Let  $F$  be a connected sum of  $F_1$  and  $F_2$ . Then  $b(F) \leq b(F_1) + b(F_2) - 1$ .

## REFERENCES

- [A] J. W. Alexander, *A lemma on systems of knotted curves*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 9 (1923), 93-95.
- [Ar1] E. Artin, *Theory of braids*, Ann. of Math. 48 (1947), 101-126.
- [Ar2] ———, *Braids and permutations*, Ann. of Math. 48 (1947), 643-649.

- [Be] D. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque 107–108 (1983), 87–161.
- [BE] I. Bernstein and A. L. Edmonds, *On the classification of generic branched coverings of surfaces*, Illinois J. Math. Soc. 28 (1984), 64–82.
- [Bi] J. S. Birman, “Braids, links, and mapping class groups,” Ann. Math. Studies 82, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1974.
- [BM1] J. S. Birman and W. Menasco, *Studying links via closed braids I: A finiteness theorem*, Pacific J. Math. 154 (1992), 17–36.
- [BM2] —————, *Studying links via closed braids II: On a theorem of Bennequin*, Topology Appl. 40 (1991), 71–82.
- [BM3] —————, *Studying links via closed braids III: Classifying links which are closed 3-braids*, Pacific J. Math. 161 (1993), 25–113.
- [BM4] —————, *Studying links via closed braids IV: Composite links and split links*, Invent. Math. 102 (1990), 115–139.
- [BM5] —————, *Studying links via closed braids V: The unlink*, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992), 585–606.
- [BM6] —————, *Studying links via closed braids VI: A non-finiteness theorem*, Pacific J. Math. 156 (1992), 265–285.
- [Bo] J. Boyle, *Classifying 1-handles attached to knotted surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 306 (1988), 475–487.
- [Br] E. Brieskorn, *Automorphic sets and braids and singularities*, Contemp. Math. 78 (1988), 45–115.
- [BS] E. Brieskorn and K. Saito, *Artin Gruppen und Coxeter Gruppen*, Invent. Math. 17 (1972), 245–271.
- [BZ] G. Burde and H. Zieschang, “Knots,” Studies in Math. 5, Walter de Gruyter, 1985.
- [CS1] J. S. Carter and M. Saito, *Syzygies among Elementary String Interactions in 2+1 Dimensions*, Letters in Math. Physics 23 (1991), 287–300.
- [CS2] —————, *Canceling Branch Points on the Projections of Surfaces in 4-space*, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 229–237.
- [CS3] —————, *Planar Generalizations of the Yang-Baxter Equation and Their Skeins*, J. Knot Theory Ramifications 1 (1992), 207–217.
- [CS4] —————, *Reidemeister Moves for Surface Isotopies and Their Interpretations as Moves to Movies*, J. Knot Theory Ramifications 2 (1993), 251–284.
- [CS5] —————, *A Diagrammatic Theory of Knotted Surfaces*, in “Quantum Topology,” eds. R. A. Baadhio and L. H. Kauffman, Series on knots and everything vol.3, World Scientific, 1993, pp. 91–115.
- [CS6] —————, *Some New Solutions to the Permutohedron Equation*, preprint, to appear in the conference proceedings on quantum topology, eds. L. Crane and D. Yetter (1993).

- [CS7] \_\_\_\_\_, *'Knotted Surfaces, Braid Movies and Beyond*, in "Knots and Quantum Gravity," ed. J. Baez, Oxford U. Press, to appear.
- [CS8] \_\_\_\_\_, *A Seifert Algorithm for Knotted Surfaces*, preprint (1991).
- [CS9] \_\_\_\_\_, *On Formulations and Solutions of Simplex Equations*, preprint (1992).
- [CS10] \_\_\_\_\_, *Diagrammatic Invariants of Knotted Curves and Surfaces*, preprint (1992).
- [CS11] \_\_\_\_\_, *Braids and Movies*, preprint (1993).
- [D] D. Dahm, *A generalization of braid theory*, Princeton Ph.D. thesis (1962).
- [Fi] T. Fiedler, *A small state sum for knots*, *Topology* **32** (1993), 281–294.
- [Fo] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in "Topology of 3-Manifolds and Related Topics," Prentice-Hall, 1962, pp. 120–167.
- [G1] D. L. Goldsmith, *The theory of motion groups*, *Michigan Math. J.* **28** (1981), 3–17.
- [G2] \_\_\_\_\_, *Motion of links in the 3-sphere*, *Math. Scand.* **50** (1982), 167–205.
- [HK] F. Hosokawa and A. Kawauchi, *Proposals for unknotted surfaces in four-spaces*, *Osaka J. Math.* **16** (1979), 233–248.
- [H] J. F. P. Hudson, "Piecewise linear topology," Benjamin N.Y., 1969.
- [J1] V. F. R. Jones, *A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras*, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)* **12** (1985), 103–111.
- [J2] \_\_\_\_\_, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, *Ann. of Math. (2)* **126** (1987), 335–388.
- [Joy] D. Joyce, *A classical invariant of knots, the knot quandle*, *J. Pure Appl. Algebra* **23** (1982), 37–65.
- [K1] S. Kamada, *Surfaces in  $R^4$  of braid index three are ribbon*, *J. Knot Theory Ramifications* **1** (1992), 137–160.
- [K2] \_\_\_\_\_, *2-dimensional braids and chart descriptions*, in "Topics in Knot Theory," Proceedings of the NATO Advanced Study Institute on Topics in Knot Theory held in Turkey, 1992, pp. 277–287.
- [K3] \_\_\_\_\_, *A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space*, *Topology* **33** (1994), 113–122.
- [K4] \_\_\_\_\_, *Alexander's and Markov's theorems in dimension four*, to appear in *Bull. Amer. Math. Soc.*
- [K5] \_\_\_\_\_, *Generalized Alexander's and Markov's theorems in dimension four*, preprint.
- [K6] \_\_\_\_\_, *Braid monodromies of non-simple braided surfaces*, preprint.
- [KSS1] A. Kawauchi, T. Shibuya and S. Suzuki, *Descriptions on surfaces in four-space, I. Normal forms*, *Math. Sem. Notes Kobe Univ.* **10** (1982), 75–125.

- [KSS2] —————, *Descriptions on surfaces in four-space, II. Singularities and cross-sectional links*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **11** (1983), 31–69.
- [LS] R. C. Lyndon and P. E. Schupp, “Combinatorial group theory,” Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1977.
- [Ma] A. A. Markov, *Über die freie Äquivalenz der geschlossener Zöpfe*, Rec. Soc. Math. Moscou **1** (1935), 73–78.
- [MS] Yu. I. Manin and V. V. Schechtman, *Arrangements of hyperplanes, higher braid groups and higher Bruhat*, Advanced Studies in Pure Mathematics **17** (1986), 289–308.
- [Moi] B. G. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies*, in “Algebraic Geometry,” Lect. Notes in Math. 862, 1981, pp. 107–192.
- [Mor1] H. R. Morton, *An irreducible 4-string braid with unknotted closure*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **93** (1983), 259–261.
- [Mor2] —————, *Threading knot diagrams*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **99** (1986), 247–260.
- [Mu] K. Murasugi, “On closed 3-braids,” Memoirs Amer. Math. Soc. **151**, 1974.
- [RS] C. P. Rourke and B. J. Sanderson, “Introduction to piecewise-linear topology,” Springer-Verlag, 1972.
- [R1] L. Rudolph, *Algebraic functions and closed braids*, Topology **22** (1983), 191–202.
- [R2] —————, *Braided surfaces and Seifert ribbons for closed braids*, Comment. Math. Helv. **58** (1983), 1–37.
- [R3] —————, *Some topologically locally-flat surfaces in the complex projective plane*, Comment. Math. Helv. **59** (1984), 592–599.
- [R4] —————, *Special positions for surfaces bounded by closed braids*, Rev. Mat. Iberoamericana **1** (1985), 93–133.
- [R5] —————, *A characterization of quasipositive Seifert surfaces (Constructions of quasipositive knots and links, III)*, Topology **31** (1992), 231–237.
- [R6] —————, *Quasipositivity as an obstruction to sliceness*, Bull. Amer. Math. Soc (N.S.) **29** (1993), 51–59.
- [S1] M. Saito, *A note on cobordism of surface links in  $S^4$* , Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 883–887.
- [S2] —————, *Minimal number of saddle points of properly embedded surfaces in the 4-ball*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **11** (1983), 345–348.
- [Sun] P. A. Sundheim, *The Alexander and Markov theorems via diagrams for links in 3-manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **337** (1993), 591–607.
- [Suz] S. Suzuki, *Knotting problems of 2-spheres in the 4-sphere*, Math. Sem. Notes Kobe Univ. **4** (1976), 241–371.
- [V] P. Vogel, *Representation of links by braids: A new algorithm*, Comment. Math. Helv. **65** (1990), 104–113.

[Y] S. Yamada, *The minimal number of Seifert circles equals the braid index of a link*,  
Invent. Math. **89** (1987), 347-356.

# Homologically antipodal locally linear involutions on 4-manifolds

関根光弘 (広島市立大学情報科学部)

以下、位相的カテゴリーで話を進めます。

$M$  を連結で向きづけられた 4 次元閉多様体で、 $H_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$  を満たすものとします。さらに  $M$  上には、向きを保つ局所線形な対合  $\sigma$  ( $\sigma^2 = id$ ) があり、 $H_2(M; \mathbf{Z})$  上で、 $-1$  倍写像を誘導するものとします。ここで局所線形とは、固定点の近傍で線形な作用と同値という意味です。また  $\sigma$  の固定点全体の集合を  $F$  とします。

$M$  が連結で向き付けられた 4 次元閉  $\text{spin}$  多様体かつ  $H_1(M; \mathbf{Z}_2) = 0$  で、 $\sigma$  が  $H_2(M; \mathbf{Z})$  上で恒等写像を誘導するとき、 $\text{sign}(M) = 0$  であることが松本堯生氏により、示されています。

この証明には、多様体の分岐被覆を構成する手法が、有効に用いられています。

そこでこの方法を少し改変してアプローチすることにより、我々の設定のもとでは、 $F$  および、 $M$  はどのような性質をもつのか? ということを考えます。

まず、 $\sigma$  が向きを保つことから  $F$  の連結成分は 0 次元か 2 次元になります。そこでこれに対応して、 $F = F^0 \cup F^2$  と書くことにします。さらに、局所線形ということから、固定点のまわりでの軌道空間  $M/\sigma$  の様子は、次元に応じて  $\mathbf{RP}^3$  の錘あるいは  $D^4$  になっています。従って、

1.  $F^0 = \phi$  のとき、 $M/\sigma$  は多様体になります。

また、 $\sigma$  による  $M$  の有理係数ホモロジー群上の固定元全体  $H_*(M; \mathbf{Q})^{\sigma^*}$  は、 $H_*(M/\sigma; \mathbf{Q})$  と同型になることから、

2.  $\chi(M/\sigma) = 2$  です。

さらに、3.  $F^0 = \phi$  かつ  $F^2 \neq \phi$  かつ  $\pi_1(M) = 0$  を仮定すると、 $M/\sigma$  は  $S^4$  と同相になります。

具体例をいくつかあげることになります。

## 例.1

$S^3 \times S^1$  上の対合を  $S^3$  上 antipodal,  $S^1$  上恒等写像によって与えます。 $p \in S^3$  とし、 $S^3 \times S^1$  を  $\{p\} \times S^1 \cup \{-p\} \times S^1$  で surgery したものを  $M$  とします。 $M$  は  $S^2 \times S^2$  と同相になりますが、上の構成から自然に対合  $\sigma$  が入り、 $F = \phi$  となります。

このとき  $M/\sigma$  は、 $\mathbf{RP}^3 \times S^1$  を  $\{[p]\} \times S^1$  で surgery したものになります。

例.2

$M = S^4 \subset \mathbf{R}^5$  上の対合  $\sigma$  を次のように定めます。

$\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_1, -x_2, -x_3, -x_4, x_5)$ , すると  $F=2$  点で、 $M/\sigma$  は  $\mathbf{RP}^3$  上の懸垂になります。

例.3

$M = S^4 \subset \mathbf{R}^5$  とし、 $\sigma(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-x_1, -x_2, x_3, x_4, x_5)$  とします。

このとき、 $F = S^2$  で  $M/\sigma = S^4$  です。

例.4

$M = \mathbf{CP}^2$ 、 $\sigma([z_1, z_2, z_3]) = ([\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3])$  とすると、 $F = \mathbf{RP}^2$  で、 $M/\sigma = S^4$ 。

例.5

$M = S^2 \times S^2 = \mathbf{CP}^1 \times \mathbf{CP}^1$  とし、 $\sigma([z_1, z_2], [z_3, z_4]) = ([\bar{z}_1, \bar{z}_2], [\bar{z}_3, \bar{z}_4])$  とすると、 $F = \mathbf{RP}^1 \times \mathbf{RP}^1 = T^2$  で、 $M/\sigma = S^4$ 。

例.6

例 4 と 5 でそれぞれ同変連結和をとることにより、

$(M, F, M/\sigma) = (m\mathbf{CP}^2 \# n\mathbf{CP}^2, (m+n)\mathbf{RP}^2, S^4)$ , あるいは、 $(n(S^2 \times S^2), nT^2, S^4)$  となる例ができます。(ただし、 $m\mathbf{CP}^2$  は、 $\mathbf{CP}^2$  の  $m$  個の連結和の意味です。)

一般に次の定理が示せます。

定理 1

$M$  および  $\sigma$  を上の通りとすると、固定点集合  $F$  は次のいずれかの場合になる。

- (1)  $F = \phi$
- (2)  $F = 2$  点
- (3)  $F =$  連結閉曲面

さらに、 $F$  により、 $M$  には次のような条件がつかます。

定理 2

定理 1 の各場合について次が成り立つ。

- (1) のとき、2次元ベッチ数  $b_2(M) = 2$
- (2) のとき、 $b_2(M) = 0$
- (3) のとき、 $F$  が向き付け可能ならば、 $M$  の交叉形式は even、 $F$  が向き付け不可能ならば、 $M$  の交叉形式は odd

定理 1 の証明は次にあげる 4 つの補題を用いて行われます。



まず  $CP^2 - \text{Int}(D^4)$  は  $S^4$  上のオイラー数  $-1$  の  $D^4$  束であり、これに  $0$ -切断を固定点として、fiberwise に対合を入れることにより、次が得られます。

### 補題 3

$x \in F^0$  とする。このとき、 $(M, \sigma)$  を改変して、 $(M' = M \sharp CP^2, \sigma')$  を作り、あらたな固定点集合が  $F' = (F - \{x\}) \cup S^2$  (disjoint union) となるようにできる。

### 補題 4

$F_1, \dots, F_n$  を  $M^4$  内の disjoint で局所平坦な閉曲面とし、それらの表わすホモロジー類  $[F_1], \dots, [F_n]$  が  $H_2(M; \mathbb{Z}_2)$  で線形従属とすると、 $F_i$  達の適当な和集合上で分岐する  $M$  の二重分岐被覆が構成できる。

補題 4 は、 $H_1(M - \cup F_i; \mathbb{Z}_2)$  内のしかるべき元を与えることにより、得られます。

### 補題 5

$S_1, \dots, S_n$  を  $M^4$  内の disjoint で局所平坦な球面とし、 $[S_1], \dots, [S_n]$  は  $H_2(M; \mathbb{Z}_2)$  で線形独立とする。さらに、各  $i$  に対し  $[S_i]$  の自己交叉数が偶数でかつ、 $2n > b_2(M)$  であるとき、 $S_i$  達の適当な和集合上で分岐する  $M$  の二重分岐被覆が構成できる。

補題 5 は、 $M$  上の交叉形式において  $[S_i]$  達の生成する部分 lattice と、その双対 lattice との差の 2-torsion part を調べることにより、得られます。

次の補題は参考文献において重要な役割を果たしており、我々の場合にも適用することができます。

### 補題 6

$M$  上の対合  $\sigma$  に対し、その固定点集合  $F$  は余次元 2 とし、 $M/\sigma$  は多様体とする。さらに、 $F_0 \subseteq F$  を分岐集合とする  $M/\sigma$  の二重分岐被覆がとれるならば、 $M$  には連結な二重不分岐被覆が存在する。

まず仮定から  $M/\sigma$  の  $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$  分岐被覆  $\tilde{M}$  を作ります。 $\tilde{M}$  には自然に 2 つの対合がありますが、これらは可換であり合成をとるとまた対合になり、しかも固定点が無くなります。そこで、 $\tilde{M}$  をわってやることにより結果が得られます。

以上の補題をもとに、定理 1 の証明のスケッチをします。

まず、 $F^2 = \phi$  かつ  $F^0 \neq \phi$  のときは、オイラー標数をみることにより、 $F$  が 2 点以下となることがわかります。さらに補題 3 を用いて、1 点の場合がないことが示せます。

次に、 $F^2 \neq \phi$  かつ  $F^0 \neq \phi$  のときは、補題 3 を繰り返し適用し固定点の 0 次元成分をなくします。このときできた固定点集合の球面達は補題 5 の仮定をみたし

ます。 $F^2 \neq \phi$ なので、補題6を用いてもとの  $M$  に二重被覆がとれることになりませんが、これは  $H_1(M; \mathbb{Z}_2) = 0$  に矛盾します。

最後に、 $F^2 \neq \phi$ かつ  $F^0 = \phi$  のときは、 $F$  の連結成分  $F_1$  が補題4の仮定を満たしているので、 $F^2$  が連結でないとは定すると、前と同様に補題6を用いて、矛盾がでます。

#### 参考文献

- T. Matumoto, Homologically trivial smooth involutions on K3 surfaces,  
Advanced Studies in Pure Math., vol.20, (1992) 365-376.





「実代数曲線のトポロジーとニュートン図形」  
 中以下の誤りがありますので訂正します。(福井敏純)

1頁 18行目:

(誤): 但し、 $M$  の基底の一部で生成される  $k$  次元平行多面体の体積を 1 としている。

(正): 但し、 $\mathbf{Z}^n$  の基底の一部で生成される  $k$  次元平行多面体の体積を 1 としている。

5頁 (1.7.1):

(誤) 
$$\chi(Z(\mathbf{C})) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k! \text{Vol}_k(\Delta(f))$$

(正) 
$$\chi(Z(\mathbf{C})) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k! \text{Vol}_k(\Delta(f))$$

5頁 (1.7.2):

(誤) 
$$\chi(Z(\mathbf{R})) \equiv \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} k! \text{Vol}_k(\Delta(f)) \pmod{2}$$

(正) 
$$\chi(Z(\mathbf{R})) \equiv \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k! \text{Vol}_k(\Delta(f)) \pmod{2}$$

6頁 1行目:

(誤): これより  $P_{\Delta}(\mathbf{R}) \rightarrow P_{\Delta_1}(\mathbf{R})$  のファイバーと  $Z(\mathbf{R})$  の交点数は  $2V(\Delta(f), \Delta_1)$  を超えない。

(正): これより  $P_{\Delta}(\mathbf{R}) \rightarrow P_{\Delta_1}(\mathbf{R})$  のファイバーと  $Z(\mathbf{R})$  の交点数は上の値を超えない。

7頁 定理 (2.3):

(誤) 
$$M \text{ の符号数} \equiv F \cdot F + \beta(q) \pmod{16}.$$

(正) 
$$M \text{ の符号数} \equiv F \cdot F + 2\beta(q) \pmod{16}.$$

9頁 例 1, 1行目:

(誤):  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0, 0), (6k, 0), (0, 4k)$  の閉包 のとき。

(正):  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0, 0), (6k, 0), (0, 4k)$  の凸包 のとき。

10頁 例 2, 1行目:

(誤):  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0, 0), (10k, 0), (0, 6k)$  の閉包 のとき。

(正):  $\Delta(f)$  が 3 点  $(0, 0), (10k, 0), (0, 6k)$  の凸包 のとき。

14頁 注意, 3行目:

(誤): 我々の不等式 (3.1) は V.M.Kharlamov [K1] の不等式を我々の状況に適用すれば、

(正): V.M.Kharlamov [K1] の不等式を我々の状況に適用すれば、