

第40回

トポロジー・シンポジウム

講演集

1993年7月20日～23日

於信州大学

平成5年度科学研究費補助金・総合研究(A)

課題番号 04302002

序

この講演集は、1993年7月20日から23日の間、信州大学医学部で開催される第40回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。

その目的は、参加者が講演をよりよく理解して、研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立つことにある。

この講演集は、科学研究費 総合研究 (A)

「位相幾何学の総合的研究」(課題番号04302002)
により作られたものであることを付記しておく。

1993年7月

総合研究 (A) 04302002

研究代表者 福田 拓生

目次

Topological sutructures of free topological groups 山田耕三 (大阪教育大)	1
Stable homotopy types of stunted lens spaces mod 4 河野 進 (大阪大)	1 2
Riemann面の moduli空間と複素解析的 Gel'fand Fuks cohomology 河澄響矢 (東京大)	2 4
On the convergence problem of Cobar-type spectral sequences 玉木 大 (信州大)	4 6
実代数的集合族の modified Nash triviality について 小池敏司 (兵庫教育大)	5 4
ファイブレーションと有限性障害 角 俊雄 (福岡大)	6 7
3次元多様体上の流れ 松元重則 (日本大)	7 9
葉層の有理性, 非有理性 坪井 俊 (東京大)	8 8
Topology of spaces of rational functions and configuration spaces 山口耕平 (電気通信大)	1 0 5
結び目の最小種数ザイフェルト膜に付随する finite depth foliation と Heegaard 分解 合田 洋 (大阪大)	1 1 3

結び目のトンネル数と連結和	森元勸治 (拓殖大)	1 2 7
全測地的境界をもつ双曲的 3 次元多様体とその構造変形について	藤井道彦 (横浜市立大)	1 5 3
Quantum $SU(2)$ -invariants dominate Casson's $SU(2)$ -invariant あるいは, Quantum $SO(3)$ -invariants dominate Walker's $SU(2)$ -invariant?	村上 齊 (大阪市立大)	1 6 5
Association scheme, Spin model, invariant of links	坂内悦子 (九州大)	1 8 6
On finitely generated subgroups of 3-manifold groups	相馬輝彦 (東京電機大)	2 0 5
結び目群の表現	和田昌昭 (奈良女子大)	2 1 7

Topological structures of free topological groups

山田 耕三
大阪教育大学

1 序文 (基本的事実)

位相的構造と代数的構造を同時に持つ位相群に対しては、これまで多くの数学者によって研究されてきた。今回は特に、自由 (可換) 位相群について述べる。自由 (可換) 位相群は、1941年 A. A. Markov [11] によって以下のように定義された。

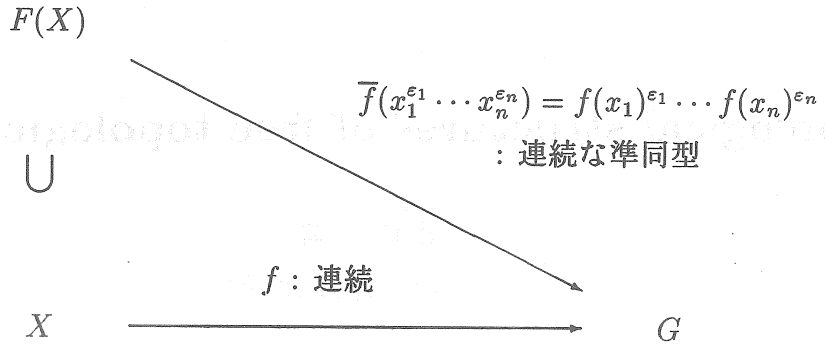
定義 1.1 ([11]) 空間 X から生成された自由群 $F(X)$ に、次の性質を満たす $F(X)$ 上の群位相 \mathcal{T} を導入したとき $(F(X), \mathcal{T})$ を X から生成された自由位相群と呼ぶ。(以後単に $F(X)$ と表す。)

- (1) X は、 $F(X)$ の部分空間として含まれる。
- (2) X から任意の位相群 G への連続写像 f は、 $F(X)$ 上の連続な準同型写像に拡張できる。

空間 X から生成された自由可換群 $A(X)$ に、上記の性質 (1) と任意の可換位相群 G に対する性質 (2) を満たす、 $A(X)$ 上の群位相 \mathcal{T} を導入したとき、 $(A(X), \mathcal{T})$ を X から生成された自由可換位相群と呼ぶ。(以後単に $A(X)$ と表す。)

以下、 $F(X)$ と $A(X)$ を区別する必要のない場合は、両者を代表して $G(X)$ で表すことにする。さて、 $G(X)$ の定義はカテゴリー的に与えられているため、その存在性と唯一性が気になるが、実際 A. A. Markov [12] さらには T. Nakayama [13], S. Kakutani [9] によってそれぞれ証明されている。また、M. I. Graev [6] は、少し拡張された自由位相群を定義し、その存在と唯一性を証明している。

以来、 $G(X)$ の topological structure についての研究が行われてきたが、その重要なテーマは、 $G(X)$ の topological structure を明らかにすること、そして空間 X の性質がどれだけ $G(X)$ に反映するかを調べることである。しかしながら、 $G(X)$



の algebraic structure に比べ、その topological structure は相当複雑である。実際、閉区間 $[0, 1]$ から、生成される $G([0, 1])$ でさえもその topological structure は相当複雑なものになる。例えば、 T を circle を含まない 1 次元グラフ (tree) とすると、 $G([0, 1])$ と $G(T)$ は algebraic にも topological にも同型となるが、 $G([0, 1])$ と $G(S^1)$ とは、topological に同型とはならない。また、 $G(X)$ が第 1 可算公理を満たすのは、 X が離散空間のときのみに限ることが分かっている。また、常に、 $G(X)$ は、compact にはならない。つまり、 $G([0, 1])$ は、metric space にも compact space にもなっていない。一方、 $G(X)$ の定義にはその内部の topological structure について何も述べられていない。これらのことが、 $G(X)$ の位相的構造の研究を困難なものとしてきた。

さて、1970年代になって、具体的な空間から生成される自由位相群については、少しずつ topological structure (topological property) が明らかにされてきたが、その重要な手段となったのが、M. I. Graev が自由位相群の存在の証明に用いた Graev の距離と呼ばれる、距離空間 X から生成される $G(X)$ 上のある群位相を導入する距離である。しかしながら、Graev の距離が導入する $G(X)$ 上の群位相は、自由位相群の本来の位相よりは弱いため、 $G(X)$ の topological structure そのものを表現することはできない。それに対し、1980年代になって、A. V. Arhangel'skiĭ をはじめとするモスクワ大学のグループにより、 $G(X)$ の単位元の近傍系を直接表現する研究が行われた。彼らの研究により、いくつかの単位元の近傍系が得られ、それらを使って、 $G(X)$ の topological structure の研究が飛躍的進歩を遂げたが、それらの近傍系の構成はなお相当複雑であり、応用することが困難であった。さて今回、 $A(X)$ におけるその構成が比較的簡単な近傍系を作ることができた。その、構成をまず Section 2 で述べる。

Topological property の中でも、重要なのが compact 性と metrizable 性 (第 1 可算性) であるが、先ほど述べたように $G([0, 1])$ 、さらには、 $G(C)$ 、但し $C = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$ でさえも、compact (実際は、locally compact) にも第 1 可算

にもならない。しかしながら、 $[0, 1]$ や C の topological property は、それらから生成される自由位相群のそれに何らかの影響を与えているはずである。そこで今回は、Section 2 で作った近傍系を使って、まず、Section 3 では $A(X)$ が持っている Compact 性に関する性質について、Section 4 では $A(X)$ が持っている第 1 可算性に関する性質について調べた結果をそれぞれ述べることにする。

以下、この section では、 $G(X)$ の持っている基本的性質を述べることにする。まずいくつかの記号を準備する。

記号 1.2 X を空間とする。 $F(X)$ の単位元を e 、 $A(X)$ の単位元を 0 とする。さて、 $F(X)$ の単位元以外の任意の元 g は、唯一の既約表現 $g = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n}$ で表される。但し、各 $i \leq n$ に対して、 $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ とする。このとき、

$$\begin{aligned} \ell_+(g) &= |\{i \leq n : \varepsilon_i = 1\}|, & \ell_-(g) &= |\{i \leq n : \varepsilon_i = -1\}|, \\ \text{そして } \ell(g) &= \ell_+(g) + \ell_-(g) \end{aligned}$$

とおく。このとき、 $\ell(g)$ を g の長さと呼ぶ。(但し、 $\ell(e) = 0$ とする。) また、各 $n \in N$ に対して、 $F_n(X) = \{g \in F(X) : \ell(g) \leq n\}$ とおく。さらに、 $\widetilde{X} = X \oplus \{e\} \oplus X^{-1}$ とし、 \widetilde{X}^n から $F_n(X)$ への写像 i_n を $i_n((x_1, x_2, \dots, x_n)) = x_1 x_2 \cdots x_n$ と定義する。

$A(X)$ に関してもこれらの記号は同様に定義される。

命題 1.3 ([1], [6]) (1) \mathcal{T}_1 を $G(X)$ 上の群位相で、 X 上では空間 X の位相と一致するものとするならば、 $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}$ となる。さらに、 $\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ をこのような性質を満たす $G(X)$ 上のすべての群位相としたとき、 $\mathcal{T} = \sup\{\mathcal{T}_\alpha : \alpha \in A\}$ となる。

(2) i_n は連続である。よって、もし X が compact ならば各 $G_n(X)$ もまた compact となる。

(3) 空間 X 及び各 $G_n(X)$ は $G(X)$ の閉集合となる。

(4) 空間 X と任意の $n \in N$ に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n|_{i_n^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \longrightarrow F_n(X) \setminus F_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は同相写像となる。

(5) 空間 X と任意の $n \in N$ に対して、次の写像

$$\begin{aligned} f_n &= i_n|_{i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X))} \\ &: i_n^{-1}(A_n(X) \setminus A_{n-1}(X)) \longrightarrow A_n(X) \setminus A_{n-1}(X) \end{aligned}$$

は $n! - 1$ の開且つ閉写像となる。

定理 1.4 空間 X において、 $i: X \rightarrow A(X)$ を包含写像とする。このとき、 i の $F(X)$ 上への拡張である連続な順同型写像を ϕ とすると、 $\phi: F(X) \rightarrow A(X)$ は開写像となる。よって、 $A(X)$ は $F(X)/\ker \phi$ と代数的に同型で且つ位相的にも同相である。

次に、 $G(X)$ の重要な部分群 G_0 を紹介する。この G_0 は $G(X)$ の topological property を調べるのに大変役だっている。実際、いくつかある単位元の近傍系も、実はすべて G_0 上で構成されている。(Section 2 を参照せよ。)

命題 1.5 $G_0 = \{g \in G(X) : l_+(g) = l_-(g)\}$ とおくと、 G_0 は $G(X)$ の閉且つ開部分群となる。

さて、compact space X から、生成される $G(X)$ については Graev が、ある程度その topological structure を明らかにする。次のような、結果を示している。

定理 1.6 ([6]) 空間 X がコンパクトのとき、 $G(X)$ の部分集合 U が $G(X)$ で開集合となる必要十分条件は、任意の $n \in N$ に対して、 $U \cap G_n(X)$ が $G_n(X)$ で開集合となることである。

空間 X がコンパクトのときは、各写像 i_n は閉写像、つまり商写像となる。そこで今、 \mathcal{T}_∞ を $G(X)$ 上の位相で、次の条件を満たすものとする。

$$U \in \mathcal{T}_\infty \iff \text{任意の } n \in N \text{ に対して } i_n^{-1}(U \cap G_n(X)) \text{ が } \tilde{X}^n \text{ の開集合。}$$

すると、定理 1.6 から次のことが分かる。

系 1.7 X がコンパクトならば、 $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}$ となる。

この結果に関して、A. V. Arhangel'skii, O. G. Okunev そして V. G. Pestov [3] の結果を合わせることにより、次の事実がわかる。(各用語の定義は Section 3 を参照のこと)

系 1.8 ([21]) 距離空間 X において次は同値である。

- (1) $F(X)$ は k -空間となる。
- (2) $F(X)$ は k_ω -空間、または離散空間となる。
- (3) \mathcal{T}_∞ は $F(X)$ 上の群位相となる。
- (4) $F(X)$ において $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}$ となる。

(5) X は局所コンパクトな可分空間、または離散空間となる。

系 1.9 ([21]) 距離空間 X において次は同値である。

- (1) $A(X)$ は k -空間となる。
- (2) \mathcal{T}_∞ は $A(X)$ 上の群位相となる。
- (3) $A(X)$ において $\mathcal{T}_\infty = \mathcal{T}$ となる。
- (4) X は局所コンパクト空間、且つ X の導集合が可分となる。

また、定理 1.6 を利用すると次の重要な性質が示される。

系 1.10 K を $G(X)$ のコンパクト部分集合とすると、ある $n \in \mathbb{N}$ が存在して $K \subset G_n(X)$ となる。

2 単位元の近傍系

この section では、[20] で作った、 $A(X)$ の単位元の近傍系の構成を紹介する。
空間 X 上の極大一様系を \mathcal{U}_X とする。

$$\mathcal{P} = \{P \subset \mathcal{U}_X : P \text{ は可算}\}$$

とし、任意の $P = \{U_1, U_2, \dots\} \in \mathcal{P}$ に対して、

$$\begin{aligned} W(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_k - y_k \\ &\quad : (x_i, y_i) \in U_i, i = 1, 2, \dots, k, k \in \mathbb{N}\}, \text{ そして} \\ \mathcal{W} &= \{W(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。さらに、任意の $n \in \mathbb{N}$ をとる。このとき、

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}_n(P) &= \{Q \subset P : |Q| = n\}, \\ \mathcal{W}_n(P) &= \{g = x_1 - y_1 + x_2 - y_2 + \dots + x_n - y_n \\ &\quad : (x_j, y_j) \in U_j, j = 1, 2, \dots, n, \{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}\} \in \mathcal{Q}_n(P)\}, \text{ そして} \\ \mathcal{W}_n &= \{\mathcal{W}_n(P) : P \in \mathcal{P}\} \end{aligned}$$

とおく。

定理 2.1 W は $A(X)$ における 0 の近傍系となる。また、任意の $n \in N$ に対して、 W_n は $A_{2n}(X)$ における 0 の近傍系となる。

そこで、これらの近傍系を使って得られる $A(X)$ の基本的な性質について少し述べる。

まず、 W の定義より、空間 X が離散空間でないならば、任意の $n \in N$ と任意の $W \in W$ に対して、

$$W \cap (A_{n+1}(X) \setminus A_n(X)) \neq \emptyset$$

となることがすぐに分かる。また定理 1.4 より、結局次のことが分かる。

系 2.2 空間 X が離散空間でないならば、 $G(X)$ は Baire 空間とはならない。つまり、*locally compact* にも Čech 完備空間にもなり得ない。

ここで、再び記号を準備する。空間 X と各 $n \in N$ に対して、写像 $j_n : X^{2n} (= X^n \times X^n) \rightarrow A_{2n}(X)$ を次のように定義する。任意の (x_1, x_2, \dots, x_n) と $(y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$ に対して、

$$j_n((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) = x_1 + x_2 + \dots + x_n - (y_1 + y_2 + \dots + y_n).$$

すると、次のことが分かる。

系 2.3 X を空間、 $n \in N$ 、 E を $A_{2n}(X)$ の部分集合とする。このとき $0 \in \overline{E}$ となる必要十分条件は、任意の $U \in \mathcal{U}_X$ に対して $j_n^{-1}(E) \cap U^n \neq \emptyset$ となることである。但し、 $U^n = \{((x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n)) \in X^{2n} : (x_i, y_i) \in U, i = 1, 2, \dots, n\}$ とする。

系 2.4 X をパラコンパクト空間、 E を $A_2(X)$ の部分集合とする。このとき、 $0 \in \overline{E}$ となる必要十分条件は $j_1^{-1}(E) \cap \Delta_X \neq \emptyset$ となることである。

3 k -spaces

さて、空間 X が discrete space でないならば、 $A(X)$ が *locally compact* にさえならないことはすでに述べたが、例えば X が compact であれば、この compact 性が $A(X)$ に何らかの compact 性に似た性質をもたらしているはずである。実際、この section の表題にもなっている、 k -property がそれである。さて、 k -spaces のクラスは、*locally compact spaces* のクラスを含む重要なクラスの一つであるが、まずその定義を述べる。

定義 3.1 空間 X が k -space であるとは、 X の部分集合 A において、任意の X の compact 部分集合 K に対して、 $A \cap K$ が K の closed 部分集合となるならば、 A は X の closed 部分集合となることを言う。

$A(X)$ が k -space となるための X の条件に対して、Arhangel'skiĭ, Okunev and Pestov [3] が、次のような結果を出した。

定理 3.2 ([3]) *Metric space* X において次は同値となる。

- (1) $A(X)$ は k -space となる、
- (2) ある k_ω -space K と *discrete space* D が存在して、 $A(X)$ と $K \times D$ は同相となる、
- (3) X は *locally compact* 且つ X' は *separable* となる。

ここでは、この結果に対して基となっている *metric space* X の状況を詳しく調べてみる。そこでまず、その構成は簡単だが重要な役割を果たす次の3つの *metric spaces* を紹介する。

- (1) 任意の $i = 1, 2, \dots$ に対して X_i を infinite discrete space とし、 X_0 を compact space とする。そこで、 $M_1 = X_0 \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} X_i$ とおく。但し、 $\{V_k = X_0 \cup \bigcup_{i=k}^{\infty} X_i : k = 1, 2, \dots\}$ が X_0 の M_1 における近傍系とする。とくに、 X_0 が1点で、各 X_i の濃度が可算のとき、 M_1' で表す。
- (2) $C = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, \dots\} \cup \{0\}$ とおく。つまり、 C は収束点列とその収束先からなる空間。そこで、 $M_2 = \bigoplus\{C_i : i = 1, 2, \dots\} \oplus M_1'$ 、但し、各 C_i は C のコピーとする。
- (3) $M_3 = \bigoplus\{C_\alpha : \alpha < \omega\}$ 、但し、各 C_α は C のコピーとする。

これらの空間は、次の性質を満たす。

定理 3.3 ([20]) (1) 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して、 $A_n(M_1)$ は k -space となるが、 $A(M_1)$ は k -space とはならない。

(2) $A_2(M_2)$ は k -space となるが、 $A_3(M_2)$ は k -space とはならない。

(3) $A_3(M_3)$ は k -space となるが、 $A_4(M_3)$ は k -space とはならない。

これらの空間を test spaces として使い、Section 2 の近傍系を利用すると、次の結果が得られた。

定理 3.4 ([20]) *Metric space* X において、次は同値である。

- (1) 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $A_n(X)$ は k -space となる。
- (2) $A_4(X)$ は k -space となる。
- (3) 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して i_n は商写像となる。
- (4) i_4 は商写像となる。
- (5) X が *locally compact* で且つ X の *nonisolated* である点全ての集合 X' が *separable* となるかまたは、 X' が *compact* になる。

系 3.5 *Metric space* X において、任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $A_n(X)$ が k -space となる必要十分条件は $A_4(X)$ が k -space となることである。

定理 3.6 ([20]) *Metric space* X において、 $A_2(X)$ は常に k -space となる。

定理 3.7 ([20]) *Metric space* X において、次は同値である。

- (1) $A_3(X)$ は k -space となる。
- (2) i_n は商写像となる。
- (3) X が *locally compact* となるかまたは、 X' が *compact* となる。

4 Tightness

この最後の section では、 X が discrete space でないと、 $A(X)$ が第 1 可算にならないことに関して、 $A(X)$ の持つ第 1 可算に似た性質について述べる。その性質が tightness である。さて、その tightness が可算となる空間のクラスは、第 1 可算公理を満たす空間のクラスをむ重要なものである。そこでここでは countable tightness について述べる。

定義 4.1 空間 X の tightness が可算 であるとは、 X の部分集合 A において、 $x \in \text{Cl } A$ ならば、 A の可算部分集合 B があって、 $x \in \text{Cl } B$ となることである。

さて、 $A(X)$ の tightness が可算となるための X の条件についてもまず、次の Arhangel'skiĭ, Okunev and Pestov [3] による結果がある。

定理 4.2 ([3]) *Metrisable space* X において、 $A(X)$ の tightness が可算となる必要十分条件は X の nonisolated point 全体からなる集合 X' が separable になることである。

そこで、 k -space のときと同様に、その基となっている空間 X について調べたところ、次のような結果が得られた。これらの結果と k -space に関する結果を見比べるとその性質の振る舞いが異なっているがわかる。

定理 4.3 ([22]) *Metric space* X において次は同値となる。

- (1) $(A(X))$ の tightness が可算となる。
- (2) 任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $A_n(X)$ の tightness が可算となる。
- (3) $A_4(X)$ の tightness が可算となる。
- (4) X' が separable となる。

系 4.4 *Metric space* X において、任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $A_n(X)$ の tightness が可算ならば、実際は $A_4(X)$ の tightness が可算ならば、 $A(X)$ の tightness は可算となる。

定理 4.5 ([22]) 任意の $x \in X$ に対して、ある x の近傍 U が存在して U' が separable となるならば、(特に、 X が locally separable ならば、) $A_3(X)$ の tightness は可算となる。

定理 4.6 ([22]) *Metric space* X において、 $A_2(X)$ の tightness は常に可算となる。

さて、空間 X が第 1 可算であれば、 X の中には収束点列 (自明でないもの) が存在するが、今 $G(X)$ は X が discrete space でないと、第 1 可算ではない。では、 $G(X)$ のなかに、(もちろん $G(X) \setminus (X \oplus X^{-1})$ のなかに、) 収束点列が含まれることは、ほとんどないのだろうか? この疑問に関して、最後に最近得られた結果を紹介しておく。

定理 4.7 ([5]) 空間 X において次は同値となる。

- (1) $F(X)$ は自明でない収束点列を含む。
- (2) $A(X)$ は自明でない収束点列を含む。

- (3) X に点列 $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ と $\{y_n : n = 1, 2, \dots\}$ が存在して次を満たす。任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $x_n \neq y_n$ 且つ任意の X 上の連続な擬距離 d に対して、 $d(x_n, y_n) \rightarrow 0$ となる。
- (4) X に点列 $\{x_n : n = 1, 2, \dots\}$ と $\{y_n : n = 1, 2, \dots\}$ が存在して次を満たす。任意の $n = 1, 2, \dots$ に対して $x_n \neq y_n$ 且つ任意の X 上で定義された連続な実数置関数 f に対して、 $|f(x_n) - f(y_n)| \rightarrow 0$ となる。

参考文献

- [1] A. V. Arhangel'skiĭ, Mapping related to topological groups, Soviet Math. Dokl. 9 (1968) 1011-1015.
- [2] _____, Algebraic objects generated by topological structure, J. Soviet Math. 45 (1989) 956-978.
- [3] A. V. Arhangel'skiĭ, O. G. Okunev and V. G. Pestov, Free topological groups over metrizable spaces, Topology Appl. 33 (1989) 63-76.
- [4] R. Engelking, General Topology, Heldermann, Berlin, 1989.
- [5] K. Eda, H. Ohta and K. Yamada, Prime subspaces in free topological groups, Submitted.
- [6] M. I. Graev, Free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 12(3) (1948) 279-324 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. transl. 35 (1951); Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 305-364.
- [7] E. Hewitt and K. Ross, Abstract harmonic analysis I, Academic Press, 1963.
- [8] C. Joiner, Free topological groups and dimension, Trans. Amer. Math. Soc. 220 (1976) 401-418.
- [9] S. Kakutani, Free topological groups and infinite direct product topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 20 (1944) 595-598.
- [10] Y. Kodama and K. Nagami, 位相空間論, 岩波書店, 1974.

- [11] A. A. Markov, On free topological groups, Dokl. Akad. Nauk SSSR, N. S. 31 (1941) 299-301.
- [12] _____, On free topological groups, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 9 (1945) 3-64 (in Russian); English transl.: Amer. Math. Soc. Transl. 30 (1950) 11-88; Reprint: Amer. Math. Soc. Transl. 8 (1962) 195-272.
- [13] T. Nakayama, Note on free topological groups, Proc. Imp. Acad. Tokyo 19 (1943) 471-475.
- [14] L. S. Pontrjagin, Continuous groups, Moscow, 1938; English translation: Topological groups, Princeton, N. I.: Princeton University Press 1939.
- [15] O. V. Sipacheva, Free topological groups of spaces and their subspaces, Preprint.
- [16] M. G. Tkačenko, Completeness of free abelian topological groups, Soviet Math. Dokl. 27 (1983) 341-345.
- [17] _____, On topologies on free groups, Czechoslovak Math. J. 34 (1984) 541-551.
- [18] V. V. Uspenskiĭ, On subgroups of free topological groups, Soviet Math. Dokl. 32 (1985) 847-849.
- [19] K. Yamada, Free Abelian topological groups and k -spaces, Submitted.
- [20] _____, Characterizations of a metrizable space such that every $A_n(X)$ is a k -space, Topology Appl. 49 (1993) 75-94.
- [21] _____, Remark on a topology of free topological groups, Manuscript.
- [22] _____, The tightness of free abelian topological groups and their subspaces, Preparation

STABLE HOMOTOPY TYPES OF STUNTED LENS SPACES MOD 4

河野 進

1. Introduction

Let $L^n(q) = S^{2n+1}/(\mathbb{Z}/q)$ be the $(2n+1)$ -dimensional standard lens space mod q . As defined in [3], we set

$$(1.1) \quad L_q^{2n+1} = L^n(q),$$

$$L_q^{2n} = \{[z_0, \dots, z_n] \in L^n(q) \mid z_n \text{ is real } \geq 0\}.$$

Spaces X and Y are said to have the same stable homotopy type ($X \cong Y$) if there exist non-negative integers a and b such that $S^a X$ and $S^b Y$ have the same homotopy type. The stable homotopy types of stunted lens spaces L_q^m/L_q^n have been studied by several authors (e.g. [2], [3], [4], [5], [6], [7] and [11]).

In order to state our results, we prepare functions $h_1, h_2, \alpha, \beta_1, \beta_2$ and γ_1 defined by

$$(1.2) \quad h_1(k) = \begin{cases} [k/4] + [(k+7)/8] + [(k+4)/8] & (k \geq 2) \\ 0 & (1 \geq k \geq 0). \end{cases}$$

$$(1.3) \quad h_2(k) = \begin{cases} [k/4] + [(k+7)/8] + [k/8] + 1 & (k \geq 4) \\ h_1(k) & (3 \geq k \geq 0). \end{cases}$$

$$(1.4) \quad \alpha(k, n) = \begin{cases} 1 & (n \equiv 0 \pmod{2} \text{ and } k \equiv 1 \pmod{8}, \\ & \text{or } k = 2([n/2] - [(n-1)/2])) \\ 0 & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

(1.5) $\beta_1(k, n)$ is equal to the corresponding integer in the following table:

$k \pmod{8}$ $n \pmod{4}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
2	0	0	0	1	0	0	1	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0

(1.6) $\beta_2(k,n)$ is equal to the corresponding integer in the following table:

$k \pmod{8}$ $n \pmod{8}$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	1	1	0	0	1	1
2	0	0	1	1	0	0	1	1
3	0	0	0	0	1	1	0	0
4	0	0	0	0	1	1	0	0
5	0	0	2	2	1	1	1	1
6	0	0	1	2	1	1	1	1
7	0	0	0	0	0	0	0	0

(1.7) $\gamma_1(m,n)$ is equal to the corresponding integer in the following table:

$m-n$ $n \pmod{8}$	1	2	3	4	5	6
0	0	0	1	0	1	0
1	0	1	1	1	1	2
2	0	0	1	0	2	1
3	0	1	1	1	1	1
4	0	0	1	0	1	0
5	0	1	1	1	1	1
6	0	0	1	0	1	1
7	0	1	1	1	2	2

Let $v_p(s)$ denote the exponent of the prime p in the

prime power decomposition of s .

Theorem 1. If $v_2(t) \geq h_1(k)+1-\alpha(k,n)$, then $L_4^m/L_4^n \cong L_4^{m+t}/L_4^{n+t}$, where $k = m-2[(n+1)/2]$.

Theorem 2. Set $k = m-2[(n+1)/2]$.

- (1) If $L_4^m/L_4^n \cong L_4^{m+t}/L_4^{n+t}$, then $v_2(t) \geq [k/2]+\beta_1(k,n)$.
- (2) Suppose $h_1(k)-\alpha(k,n) \geq i$ and $\max\{v_2(n+1), v_2(m+1)\} \geq i \geq 3$. If $L_4^m/L_4^n \cong L_4^{m+t}/L_4^{n+t}$, then $v_2(t) \geq i+1$.
- (3) Suppose $n < m \leq n+6$. If $L_4^m/L_4^n \cong L_4^{m+t}/L_4^{n+t}$, then $v_2(t) \geq [k/2]+\gamma_1(m,n)$.

Theorem 3. If $v_2(t) \geq h_2(k)+1-\alpha(k,n)$, then $L_8^m/L_8^n \cong L_8^{m+t}/L_8^{n+t}$, where $k = m-2[(n+1)/2]$.

Theorem 4. Set $k = m-2[(n+1)/2]$.

- (1) Suppose $m \geq n+5$. If $L_8^m/L_8^n \cong L_8^{m+t}/L_8^{n+t}$, then $v_2(t) \geq [k/2]+\beta_2(k,n)$.
- (2) Suppose $h_2(k)-\alpha(k,n) \geq i$ and $\max\{v_2(n+1), v_2(m+1)\} \geq i \geq 3$. If $L_8^m/L_8^n \cong L_8^{m+t}/L_8^{n+t}$, then $v_2(t) \geq i+1$.
- (3) Suppose $n < m \leq n+6$. If $L_8^m/L_8^n \cong L_8^{m+t}/L_8^{n+t}$, then $v_2(t) \geq [k/2]+\gamma_2(m,n)$, where $\gamma_2(m,n)$ is the integer defined by

$$\gamma_2(m,n) = \begin{cases} \gamma_1(m,n)+1 & (n \equiv 0 \pmod{8} \text{ and } n+5 \leq m \leq n+6, \\ & \text{or } n \equiv 1 \pmod{8} \text{ and } m = n+5) \\ \gamma_1(m,n) & (\text{otherwise}). \end{cases}$$

2. Preliminaries

Let $q \geq 2$ be an integer and q_0, q_1, \dots, q_n be integers relatively prime to q . Consider the (\mathbb{Z}/q) -action on the unit sphere $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ given by

$$\begin{aligned} & \exp(2\pi\sqrt{-1}/q)(z_0, \dots, z_n) \\ &= (z_0 \cdot \exp(2q_0\pi\sqrt{-1}/q), \dots, z_n \cdot \exp(2q_n\pi\sqrt{-1}/q)). \end{aligned}$$

Then $S^{2n+1}(q; q_0, \dots, q_n)$ denotes the space S^{2n+1} with this action,

$$L_q^{2n+1}(q_0, \dots, q_n) = S^{2n+1}(q; q_0, \dots, q_n)/(\mathbb{Z}/q)$$

and $L_q^{2n}(q_0, \dots, q_n)$ is the subspace of $L_q^{2n+1}(q_0, \dots, q_n)$ defined by

$$L_q^{2n}(q_0, \dots, q_n) = \{[z_0, \dots, z_n] \in L_q^{2n+1}(q_0, \dots, q_n) \mid z_n : \text{real} \geq 0\}.$$

For $0 \leq n < m \leq 2\ell+1$, we set

$$L_q^m/L_q^n(q_0, \dots, q_\ell) = L_q^m(q_0, \dots, q_\ell)/L_q^n(q_0, \dots, q_\ell),$$

which is called a stunted lens space mod q . Then we have

$$(2.1) \quad L_q^m/L_q^n(1, \dots, 1) = L_q^m/L_q^n.$$

Considering the (\mathbb{Z}/q) -action on $S^{2\ell+1}(q; q_0, \dots, q_\ell) \times \mathbb{C}^k$ given by

$$\begin{aligned} & \exp(2\pi\sqrt{-1}/q)(z, w_1, \dots, w_k) \\ &= (\exp(2\pi\sqrt{-1}/q) \cdot z, w_1 \cdot \exp(2a_1\pi\sqrt{-1}/q), \dots, w_k \cdot \exp(2a_k\pi\sqrt{-1}/q)) \end{aligned}$$

for $(z, w_1, \dots, w_k) \in S^{2\ell+1}(q; q_0, \dots, q_\ell) \times \mathbb{C}^k$, we have a

complex k -dimensional vector bundle

$$\eta(a_1, \dots, a_k): (S^{2\ell+1}(q; q_0, \dots, q_\ell) \times \mathbb{C}^k)/(\mathbb{Z}/q)$$

$$\longrightarrow L_q^{2\ell+1}(q_0, \dots, q_\ell).$$

We use same symbol for the restriction of $\eta(a_1, \dots, a_k)$ to $L_q^n(q_0, \dots, q_\ell)$ ($n \leq 2\ell+1$) and denote the complex line bundle

$\eta(1)$ by η . Then we have

$$(2.2) \quad \eta(a_1, \dots, a_k) \cong \eta^{a_1} \oplus \dots \oplus \eta^{a_k}.$$

Let $\xi: E(\xi) \rightarrow X$ be a real vector bundle over a finite CW-complex X with disk bundle $B(\xi)$ and sphere bundle $S(\xi)$. Then the Thom complex X^ξ of ξ is defined as the quotient space $B(\xi)/S(\xi)$. Define $f: S^{2n+1} \times D^{2k} \rightarrow S^{2k+2n+1}$ by

$$f(z_0, \dots, z_n, w) = (w, (1-\|w\|^2)^{1/2}z_0, \dots, (1-\|w\|^2)^{1/2}z_n)$$

for $(z_0, \dots, z_n, w) \in S^{2n+1} \times D^{2k}$, where $D^{2k} \subset \mathbb{C}^k$ is the unit disk. Then we have

(2.3) Let a_1, \dots, a_k be integers relatively prime to q . Then f induces the following homeomorphisms.

$$(1) \quad (L_q^{2n+1}(q_0, \dots, q_n))^{r(\eta(a_1, \dots, a_k))} \\ \approx L_q^{2k+2n+1}/L_q^{2k-1}(a_1, \dots, a_k, q_0, \dots, q_n).$$

$$(2) \quad (L_q^{2n}(q_0, \dots, q_n))^{r(\eta(a_1, \dots, a_k))} \\ \approx L_q^{2k+2n}/L_q^{2k-1}(a_1, \dots, a_k, q_0, \dots, q_n).$$

$$(3) \quad (L_q^{2n+1}(q_0, \dots, q_n))^{r(\eta(a_1, \dots, a_k))} / S^{2k} \\ \approx L_q^{2k+2n+1}/L_q^{2k}(a_1, \dots, a_k, q_0, \dots, q_n).$$

$$(4) \quad (L_q^{2n}(q_0, \dots, q_n))^{r(\eta(a_1, \dots, a_k))} / S^{2k} \\ \approx L_q^{2k+2n}/L_q^{2k}(a_1, \dots, a_k, q_0, \dots, q_n).$$

We define the function $h(q, k)$ by setting

$$(2.4) \quad h(q, k) = \text{ord} \langle J(r(\eta)-2) \rangle,$$

where $J(r(\eta)-2)$ is the image of $r(\eta)-2 \in \widetilde{KO}(L_q^k)$ by the J -homomorphism $J: \widetilde{KO}(L_q^k) \longrightarrow \widetilde{J}(L_q^k)$.

(2.5) (1) If $mn \equiv 0 \pmod{2}$, then $L_q^m/L_q^n(q_0, \dots, q_{[m/2]}) \cong L_q^m/L_q^n$. In particular, $L_q^m(q_0, \dots, q_{[m/2]}) \cong L_q^m$.

(2) Let $a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_k, q_0, \dots, q_n, r_0, \dots, r_n$ and a be integers relatively prime to q .

i) Assume $q_0 \cdots q_n \equiv \pm a^{n+1} r_0 \cdots r_n \pmod{q}$. Then

$$L_q^{2n+2k+1}/L_q^{2k-1}(a_1, \dots, a_k, q_0, \dots, q_n) \cong L_q^{2n+2k+1}/L_q^{2k-1}(b_1, \dots, b_k, r_0, \dots, r_n).$$

ii) If $k \equiv 0 \pmod{h(q, 2n+1)}$, then

$$L_q^{2n+2k+1}/L_q^{2k-1}(a_1, \dots, a_k, q_0, \dots, q_n) \cong L_q^{2n+2k+1}/L_q^{2k-1}.$$

Lemma 2.6. Suppose that $k = 2[m/2]+1-2[(n+1)/2] \geq 3$, $N \equiv 0 \pmod{2h(q, k)}$ and $N > m+1$. Then the S -dual of

$$L_q^m/L_q^n(a_1, \dots, a_{[(n+1)/2]}, q_0, \dots, q_{[k/2]})$$

is $L_q^{N-n-2}/L_q^{N-m-2}(b_1, \dots, b_{[(N-m-1)/2]}, q_0, \dots, q_{[k/2]})$.

It follows from (2.5) and Lemma 2.6 that, in the following cases, $L_q^m/L_q^n(a_1, \dots, a_u, q_0, \dots, q_{[m/2]-u}) \cong L_q^m/L_q^n$, where $u = [(n+1)/2]$:

- (1) $q = 2, 3, 4$ or 6 ,
- (2) $mn \equiv 0 \pmod{2}$,
- (3) $q_0 \cdots q_{[m/2]-u} \equiv \pm a^{[m/2]-u+1} \pmod{q}$,
- (4) $n+1 \equiv 0 \pmod{2h(q, m-n-1)}$,
- (5) $m+1 \equiv 0 \pmod{2h(q, m-n-1)}$.

From now on, we restrict ourselves to standard stunted lens spaces. According to [1, Propositions (2.6) and (2.9)], (2.3) and Lemma 2.6, we obtain the following.

(2.7) Set $k = m - 2[(n+1)/2]$ and $\ell = 2[m/2] - n$.

(1) If $t \equiv 0 \pmod{2h(q,k)}$, then $L_q^m/L_q^n \cong L_q^{m+t}/L_q^{n+t}$.

(2) If $k \geq 2$ and $n+1 \equiv 0 \pmod{2h(q,k)}$, then $t \equiv 0 \pmod{2h(q,k)}$ if and only if $L_q^m/L_q^n \cong L_q^{m+t}/L_q^{n+t}$.

(3) If $t \equiv 0 \pmod{2h(q,\ell)}$, then $L_q^m/L_q^n \cong L_q^{m+t}/L_q^{n+t}$.

(4) If $\ell \geq 2$ and $m+1 \equiv 0 \pmod{2h(q,\ell)}$, then $t \equiv 0 \pmod{2h(q,\ell)}$ if and only if $L_q^m/L_q^n \cong L_q^{m+t}/L_q^{n+t}$.

(2.8) (1) ([7, I; Theorem 1.1]) Let p be a prime and r a positive integer with $p^r > 2$. Suppose $k = m - 2[(n+1)/2] \geq 2$. Then $t \equiv 0 \pmod{2p^{[(k-2)/2(p-1)]}}$ if $L_{p^r}^m/L_{p^r}^n \cong L_{p^r}^{m+t}/L_{p^r}^{n+t}$.

(2) Let $r \geq 2$ be a positive integer and set $k = m - 2[(n+1)/2]$. Then $v_2(t) \geq [k/2] + \beta_1(k, n)$ if $L_{2^r}^m/L_{2^r}^n \cong L_{2^r}^{m+t}/L_{2^r}^{n+t}$, where β_1 is the function defined by (1.5).

(3) Suppose that $q \equiv 0 \pmod{2}$ and $m \geq n+2$. Then $v_2(t) \geq [\log_2 2(m-n-1)]$ if $L_q^m/L_q^n \cong L_q^{m+t}/L_q^{n+t}$.

In order to state the next proposition, we set

$$(2.9) \quad (1) \quad \begin{cases} \sigma_{2^i} = \eta^{2^i} - 1 & (0 \leq i \leq 2) \\ \sigma_6 = \sigma_4 \sigma_2 \\ \sigma_{2^{i+1}} = \sigma_{2^i} \sigma_1 & (1 \leq i \leq 3). \end{cases}$$

(2) Let $F(x)$ denote the free abelian group generated by $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ and x_7 . Then X_i and $X_i(n)$ ($1 \leq i \leq 7, n \geq 0$) denote the elements of $F(x)$ defined

$$\begin{aligned} & \text{by } X_1 = 4x_1 + 2x_3 + 2x_5 + x_7, X_2 = 2x_2 + x_6, X_3 = 2x_3 + x_7, X_6 \\ & = x_6 + x_7, X_i = x_i \text{ (} i = 4, 5 \text{ or } 7\text{)}, X_1(n) = 2^{\lfloor n/2 \rfloor} X_1, \\ & X_2(n) = 2^{\lfloor n/4 \rfloor} X_2 - 2^{2\lfloor n/4 \rfloor} X_1, \\ & X_3(n) = 2^{\lfloor (n-2)/4 \rfloor} X_3 + (2^{\lfloor n/2 \rfloor} - 2^{2\lfloor (n-2)/4 \rfloor + 1}) X_1, \\ & X_4(n) = 2^{\lfloor n/8 \rfloor} X_4 + (2^{\lfloor n/4 \rfloor} - 2^{2\lfloor n/8 \rfloor}) X_2 + 2^{\lfloor n/4 \rfloor + 2\lfloor n/8 \rfloor} X_1, \\ & X_5(n) = 2^{\lfloor (n-2)/8 \rfloor} X_5 + (2^{\lfloor (n-2)/4 \rfloor} - 2^{2\lfloor (n-2)/8 \rfloor}) X_3 \\ & \quad - 2^{\lfloor (n+2)/4 \rfloor + 2\lfloor (n-2)/8 \rfloor} X_1, \\ & X_6(n) = 2^{\lfloor (n-4)/8 \rfloor} X_6 + (2^{\lfloor n/4 \rfloor} - 2^{2\lfloor (n-4)/8 \rfloor + 1}) X_2 \\ & \quad - 2^{\lfloor n/4 \rfloor + 2\lfloor (n-4)/8 \rfloor + 1} X_1 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} X_7(n) = & 2^{\lfloor (n-6)/8 \rfloor} X_7 - (2^{\lfloor (n-2)/4 \rfloor} - 2^{2\lfloor (n-6)/8 \rfloor + 1}) (X_3 - 2X_2) \\ & + 2^{2\lfloor (n+2)/8 \rfloor + \lfloor (n-2)/4 \rfloor} X_1. \end{aligned}$$

(3) Let $\varphi: F(x) \longrightarrow \tilde{K}(L_8^m)$ be the homomorphism defined by setting $\varphi(x_i) = \sigma_i$ ($1 \leq i \leq 7$).

Proposition 2.10 (Kobayashi and Sugawara [7]). The homomorphism φ is an epimorphism, and the kernel of φ coincides with the subgroup of $F(x)$ generated by $(X_i(m) \mid 1 \leq i \leq 7)$.

For each integer n with $0 \leq n < m$, we denote the inclusion map of L_8^n into L_8^m by i_n^m , and denote the kernel of the homomorphism $(i_n^m)^!: \tilde{K}(L_8^m) \longrightarrow \tilde{K}(L_8^n)$ by V_n . Set $u = \lfloor (n+1)/2 \rfloor$ and $S_i = \varphi(X_i(2u))$ ($1 \leq i \leq 7$).

Lemma 2.11. (1) V_{2u} is the subgroup of $K(L_8^m)$ generated by $\{S_i \mid 1 \leq i \leq 7\}$, and

$$\tilde{K}(L_8^m/L_8^n) \cong \begin{cases} V_{2u} & (n \equiv 0 \pmod{2}) \\ \mathbb{Z} \oplus V_{2u} & (n \equiv 1 \pmod{2}). \end{cases}$$

$$(2) \quad \sigma^u \equiv \begin{cases} -\varphi(X_4(2u-2)) & (u \equiv 0 \pmod{4}) \\ -\varphi(X_5(2u-2)) & (u \equiv 1 \pmod{4}) \\ -\varphi(X_6(2u-2)+X_1(2u-2)) & (u \equiv 2 \pmod{4}) \\ \varphi(X_7(2u-2)) & (u \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

modulo the subgroup V_{2u} .

Lemma 2.12. The Adams operations are given by the following formulae, where $s_i = \varphi(X_i)$ ($1 \leq i \leq 7$) and $k \equiv 1 \pmod{2}$.

$$(1) \quad \psi^k(s_i) = s_i \quad (i = 1, 2 \text{ or } 4).$$

$$(2) \quad \psi^k(s_3) = \begin{cases} s_3 & (k \equiv 1 \pmod{4}) \\ -s_3 - 2s_2 & (k \equiv 3 \pmod{4}). \end{cases}$$

$$(3) \quad \psi^k(s_5) = \begin{cases} s_5 & (k \equiv 1 \pmod{8}) \\ s_5 + s_6 & (k \equiv 3 \pmod{8}) \\ -s_5 - 2s_4 & (k \equiv 5 \pmod{8}) \\ -s_5 - 2s_4 - s_6 & (k \equiv 7 \pmod{8}). \end{cases}$$

$$(4) \quad \psi^k(s_6) = \begin{cases} s_6 & (k \equiv \pm 1 \pmod{8}) \\ -s_6 & (k \equiv \pm 3 \pmod{8}). \end{cases}$$

$$(5) \quad \psi^k(s_7) = \begin{cases} s_7 & (k \equiv 1 \pmod{8}) \\ -s_7 + 2s_4 & (k \equiv 3 \pmod{8}) \\ s_7 - 2s_6 & (k \equiv 5 \pmod{8}) \\ -s_7 + 2s_4 + 2s_6 & (k \equiv 7 \pmod{8}). \end{cases}$$

3. Outline of proofs of Theorems

3.1. Theorems 1 and 3. According to [3], we have

$$h(q, k) = \begin{cases} h_1(k) & (q = 4) \\ h_2(k) & (q = 8). \end{cases}$$

Then Theorems 1 and 3 follows from (2.7) for the case $m \geq n+3$. Note that we have $L_q^{n+1}/L_q^n \approx S^{n+1}$ and

$$L_q^{n+2}/L_q^n \approx \begin{cases} S^{n+1} \vee S^{n+2} & (n \equiv 1 \pmod{2}) \\ S^{n+2} & (n \equiv 0 \pmod{2}). \end{cases}$$

3.2. Theorem 2. (1) is obtained by (2.8) (2).

The proof of the part (2) of Theorem 2 is completed by making use of [9] and Lemma 2.6.

The part (3) is obtained by (2.8) (3) and the parts (1) and (2) of Theorem 2.

3.3. Theorem 4. By Lemma 2.6, (2.8) (2) and [10], the part (1) of Theorem 4 is obtained except for the case $n \equiv m-n \equiv 2 \pmod{8}$. The proof for the case $n \equiv m-n \equiv 2 \pmod{8}$ is given by making use of Proposition 2.10, Lemma 2.11 (1) and Lemma 2.12.

The proof of the part (2) of Theorem 4 is completed by making use of [10] and Lemma 2.6.

By (2.8) (3) and the parts (1) and (2) of Theorem 4, the part (3) of Theorem 4 is obtained except for the case $\gamma_2(m, n) = \gamma_1(m, n) + 1$. The proof for the case $n \equiv 0 \pmod{8}$ and $m-n = 6$ is given by making use of Proposition 2.10, Lemma 2.11 (1) and Lemma 2.12. The proof for the case $n \equiv 1 \pmod{8}$ and $m-n = 5$ is given by making use of Proposition 2.10, Lemma 2.11 and Lemma 2.12. Now, Lemma 2.6 implies the result for the case $n \equiv 0 \pmod{8}$

and $m-n = 5$.

References

- [1] M. F. Atiyah: Thom complexes, Proc. London Math. Soc. 11 (1961), 291-310.
- [2] D. M. Davis and M. Mahowald: Classification of the stable homotopy types of stunted real projective spaces, Pacific J. Math. 125 (1986), 335-345.
- [3] K. Fujii, T. Kobayashi and M. Sugawara: Stable homotopy types of stunted lens spaces, Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.) 3 (1982), 21-27.
- [4] T. Kambe, H. Matsunaga and H. Toda: A note on stunted lens space, J. Math. Kyoto Univ. 5 (1966), 143-149.
- [5] T. Kobayashi: Stable homotopy types of stunted lens spaces mod p , Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.) 5 (1984), 7-14.
- [6] T. Kobayashi: Stable homotopy types of stunted lens spaces mod 2^r , Mem. Fac. Sci. Kochi Univ. (Math.) 11 (1990), 17-22.
- [7] T. Kobayashi and M. Sugawara: On stable homotopy types of stunted lens spaces, Hiroshima Math. J. 1 (1971), 287-304; II, 7 (1977), 689-705.
- [8] S. Kôno: Stable homotopy types of stunted lens spaces mod 4, Osaka J. Math. 29 (1992), 697-717.
- [9] S. Kôno and A. Tamamura: J -groups of suspensions of stunted lens spaces mod 4, Osaka J. Math. 26 (1989),

319-345.

- [10] S. Kôno and A. Tamamura: J-groups of suspensions of stunted lens spaces mod 8, to appear.
- [11] A. Tamamura: J-groups of the suspensions of the stunted lens spaces mod $2p$, to appear.

Riemann 面の moduli 空間と

複素解析的 Gel'fand Fuks cohomology

東大・数理、河澄 響矢

種数 g の向きづけられた閉曲面 Σ_g 上の複素構造
の同型類全体の空間、即ち種数 g compact Riemann
面の moduli 空間 M_g の cohomology は同型

$$H^*(M_g; \mathbb{Q}) = H^*(B\text{Diff}^+ \Sigma_g; \mathbb{Q})$$

$$= \{ \text{向きづけられた } \Sigma_g \text{ 束の特性類} / \mathbb{Q} \}$$

からも分るように、位相幾何学固有の観点からも
十分に意味をもつ対象です。森田茂之、D. Mumford,
J. Harer などの人々の多くの研究にもかかわらず、coho-
mology 代数 $H^*(M_g; \mathbb{Q})$ の構造はまだ十分に明
らかにされたとはいえません。

moduli 空間 M_g は最低キリキリのところまで情報が
煮詰まった空間であるために、とても rigid で余りにも
凸凹しています。言うまでもなく、等質性など期待す
る方が間違っているのです。(私自身の反省の記録として

[Ka3] があります。しかし、すべて fiber 束は vector 束の生活に憧れている (W. H. Pater) のであって、vector 束の特性類が等質空間であることの Grassmann 多様体の cohomology に他ならないように、向きづけられた Σ_g 束の特性類も何らかの等質空間の cohomology として実現して欲しいがっている筈です。

うまいこと、Beilinson, Manin, Schechtman [BMS] の observation によると moduli M_g は少し膨らませると無限小的に (infinitesimally) 等質になるのである。(ただし、無限次元になってしまふのが痛いところである。) その上で主に数理論理において Riemann 面の moduli の研究が多くなってきました。これは筆者の理解を大きく超えています。位相幾何的には、2次元 cohomology を扱うものが多いうようです。(例外として Feigin と Tsygan の『無限次元 Chern-Weil 理論』 [FT] があります。今回の話は、一部これに関係をもちますが、全く独立です。) 私としては、数理論理的意味づけは全く無視して、ただ、その膨らませた moduli の無限小的等質性という一点のみを扱い所として moduli M_g の高次の cohomology を研究することにしました。

この際研究の中心となるのが開 Riemann 面 \mathcal{U} 上の複素解析 vector 場全体の Lie 代数 $L(\mathcal{U})$ である。何れもまた $L(\mathcal{U})$ の cohomology であり、 \mathcal{U} の複素解析的 Gel'fand Fuks cohomology と調べる必要がある。

ここでは、得られた幾つかの計算公式を述べ、これを用いて moduli 空間 M_g 上に 森田-Mumford 類 e_n ($n \geq 1$) を再構成する。 M_g の安定 cohomology 代数 $\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(M_g; \mathbb{Q})$ が 森田 Mumford 類 e_n によって生成されるのではないかと予想される内容ともなっています。

講演では、標題の前半つまり moduli 空間への応用について概りから話るので、予稿では、標題の後半つまり開 Riemann 面の複素解析的 Gel'fand Fuks cohomology に重点をおくことにします。尚、以下、II の内容は [Ka] に、III は [Ka1] に、IV は [Ka2] にまとめられています。

I Lie 代数の同変 cohomology

II 分解定理

III Hartogs の定理の応用

IV Riemann 面の moduli 空間への応用。 _____

I Lie 代数の同変 cohomology

まず、群の同変 cohomology を復習する。

M を群 G の作用する位相空間とする。 M の G による homotopy 商 M_G とは、普遍主 G 束 $EG \rightarrow BG$ に随伴する M 束の全空間

$$M_G := EG \times_G M \rightarrow BG$$

のことであった。この homotopy 商 M_G の cohomology は M の G 同変 cohomology とする。 $H_G^*(M) := H^*(M_G)$ と表した。(適当な条件の下で)、標準的写像の写像

$$\begin{array}{ccc} M_G & \rightarrow & BG \\ \downarrow & & \\ M/G & & \end{array}$$

を通じた E_2 の spectral 系列

$$E_2^{p,q} = H^p(G; H^q(M)) \Rightarrow H_G^{p+q}(M)$$

$$E_2^{p,q} = H^p(M/G; H^q(G_x)) \Rightarrow H_G^{p+q}(M)$$

が与えられる。 $E_2^{p,q}$ の係数は $x \bmod G \in M/G$ における基 x における isotropy 群 G_x の q -次元 cohomology 群である層である。

次に \mathfrak{g} を複素 Lie 代数と見る。 \mathfrak{g} の加群 N に値をとる \mathfrak{g} の標準 cochain 複体 $C^*(\mathfrak{g}; N) = \{C^q(\mathfrak{g}; N), d\}_{q \geq 0}$ は

$$C^q(\mathfrak{g}; N) = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda_{\mathbb{C}}^q \mathfrak{g}, N)$$

$$d c(X_0, \dots, X_q) := \sum_{i=0}^q (-1)^i X_i \cdot c(X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, X_q) + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_0, \dots, \hat{X}_i, \dots, \hat{X}_j, \dots, X_q)$$

によって定義される。この複体の cohomology 群を $H^*(\mathfrak{g}; N)$ と表す。 Lie 代数 \mathfrak{g} の加群 N に値をとる cohomology 群とよぶ。

$\mathcal{F} \rightarrow M$ を位相空間 M 上の \mathfrak{g} -加群の層と見る。このとき M 上の層の cochain 複体

$$C^*(\mathfrak{g}; \mathcal{F}) : M \xrightarrow{\text{open}} \mathcal{O} \mapsto C^*(\mathfrak{g}; \mathcal{F}(\mathcal{O}))$$

の関手 $H^0(M; \cdot) (= \{M \text{ 上の層 } \cdot \text{ の大域切断}\})$ に関する hypercohomology ([G.E] ch. 0, §11.4, pp 32-) を $H_{\mathfrak{g}}^*(M; \mathcal{F})$ と表す。 M の層 \mathcal{F} に値をとる \mathfrak{g} -同変 cohomology とよぶ。7 頁の層の複体 $C^*(\mathfrak{g}; \mathcal{F})$ の単射的右 Cartan-Eilenberg 分解 $\mathcal{E}^{*,*} = (\mathcal{E}^{i,j})_{i,j \geq 0}$ によって

$$H_{\mathfrak{g}}^*(M; \mathcal{F}) := H^*(\text{Total}(H^0(M; \mathcal{E}^{*,*})))$$

と定めるのである。これは、群の場合と同変 cohomology の類似物である。同様に、同変 cohomology 群 $H_{\mathfrak{g}}^{p+q}(M; \mathcal{F})$

に収束する 2 つの spectral 系列

$$(1.1) \quad \begin{aligned} 'E_2^{p,q} &= H^p(H^q(M; C^*(\mathcal{O}_M; \mathcal{F}))) \\ ''E_2^{p,q} &= H^p(M; H^q(\mathcal{O}_M; \mathcal{F})) \end{aligned}$$

が存在する。こゝに $H^*(\mathcal{O}_M; \mathcal{F})$ は層 \mathcal{O}_M の cochain 複体 $C^*(\mathcal{O}_M; \mathcal{F})$ の cohomology として与えられる M 上の層である。

M を複素多様体, E を X 上の複素解析 vector 束として $\mathcal{F} = \mathcal{O}_M(E)$ を E の解析切断の芽の層とする。

(1.1) の spectral 系列のうち $'E_2^{p,q}$ を与える。これは写像 $M_G \rightarrow BG$ に対応する spectral 系列である。

命題 1.2. (位相) Lie 代数 \mathfrak{g} の次の (a) ~ (d) のうちのいっつかであるとする。

(a) 有限次元 Lie 代数

(b) 有限次元複素多様体上の複素解析的 vector 場全体の可成 Lie 代数 (c). (b) の閉部分代数

(d) 後述の dI_p

さらに M, E および $n^{\text{th}} \mathfrak{g} \neq 0$ による n 次 cohomology 群

$H^n(M; \mathcal{O}_M(E))$ が可成有限次元であると仮定する。このとき

n 次の自然な同型が成立つ

$$'E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{O}_M; H^q(M; \mathcal{O}_M(E))) \quad \text{---}$$

∴ Lie 代数の条件を一般の形に述べることもできる。
 例は Künneth の公式 [Sw] を使えばよいに可るためのものである。

例 M は compact Kähler 多様体、 E は \mathbb{C} の m -束
 $\Lambda^m T^*M$ と可る。Lie 代数の $H^*(M; \mathcal{O}_M(\Lambda^m T^*M)) =$
 $H^{m,*}(M) \subset H^{m+*}(M)$ に自明に作用する (cohomology の
 homotopy 不変性!) から $E_2^{p,q} = H^p(\mathcal{O}) \otimes H^{m,q}(M)$ と可る。

∴ M は有限次元 Stein 多様体と可ると $E_2^{p,q}$ は \mathbb{C} と可るから
 E_2 項を考へて可る。Lie 代数の 命題 1.2 の (a)~(d)
 が可る可る可る。

命題 1.3 M は有限次元 Stein 多様体、 E は \mathbb{C} 上の
 有限次元複素解析 vector 束と可る。層 $\mathcal{O}_M(E)$ の可る可るの
 層と可る可る可る。∴ $H^*(\mathcal{O}; H^0(M; \mathcal{O}_M(E))) =$
 可る可る spectral 系列

$$E_2^{p,q} = H^p(M; H^q(\mathcal{O}; \mathcal{O}_M(E)))$$

可る可る。 M 上の層 $H^*(\mathcal{O}; \mathcal{O}_M(E))$ の $x \in M$ における基は

$$H^*(\mathcal{O}; \mathcal{O}_M(E))_x = H^*(\mathcal{O}; \mathcal{O}_M(E)_x)$$

に可る可る可る。 —

Rešetnikov [R] が C^∞ 多様体について tensor 係数の Gel'fand-Fuks cohomology を研究した際に導入した spectral 系列に因る。この spectral 系列は Rešetnikov spectral 系列 とよぶことができる。

II. 分解定理

本題に入る。以下 U は連結開 Riemann 面。

$b_1(U) < +\infty$ である $a \in L$, $S \subset U$ は a の有限部分集合とする。

$$L(U) \stackrel{\text{def}}{=} H^0(U; \mathcal{O}_U(TU)) = \{U \text{ 上の複素解析 vector 場}\}$$

$$L(U, S) \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in L(U); \forall \lambda \in S, X(\lambda) = 0\}$$

とあく。通常の bracket 積 $[,]$ により Lie 代数となる。

典型的な $L(U, S)$ 加群として、次の 3 種類を挙げる。

(1) $\nu \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in S$ について、 ν -余接空間 $(T_\lambda^*U)^{\otimes \nu}$ は複素 1 次元 $L(U, S)$ 加群である。実際 $\forall \omega \in (T_\lambda^*U)^{\otimes \nu}$ について ω の局所拡大 $\tilde{\omega} : \tilde{\omega}(\lambda) = \omega$ をとる。 $X \in L(U, S)$ について Lie 微分 $(\mathcal{L}_X \tilde{\omega})(\lambda)$ は $\tilde{\omega}$ のとり方によらない。 $X(\lambda) = 0$ だからである。 $X \cdot \omega := (\mathcal{L}_X \tilde{\omega})(\lambda)$ とおいて $L(U, S)$ 加群の構造を入れるのである。

(2) $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$, $S_1 \subset S$ により tensor 場の空間

$$T_{\nu}^{\lambda}(U, S_1) \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \theta: U \text{ 上の有理型 } \nu\text{-共変 tensor,} \\ \theta \text{ の極は } S_1 \text{ に含まれ, 位数 } \leq \lambda \end{array} \right\}$$

$$= H^0(U; \mathcal{O}_U((T^*U)^{\otimes \nu} \otimes \bigotimes_{\lambda \in S_1} [\lambda]^{\otimes \lambda}))$$

も $L(U, S)$ 加群である。 $\lambda = 0$, $S_1 = \emptyset$ のとき $T_{\nu}^{\lambda}(U, S_1) = T_{\nu}(U)$ と略記する。

(3) $\lambda, \nu \in \mathbb{Z}$, $\lambda \in S$ により λ における tensor 場の芽の空間

$$(T_{\nu}^{\lambda})^{\wedge} := \varinjlim_{\lambda \in V} T_{\nu}^{\lambda}(V, \lambda)$$

も $L(U, S)$ 加群である。 \therefore で右辺の V は S の U における開近傍全体を走る。 $\lambda = 0$ ならば $\lambda \in M - S$ により

$$(T_{\nu})^{\wedge} := \varinjlim_{\lambda \in V} T_{\nu}(V) \text{ と考へることもできる。}$$

我々が計算したいのは、これらの tensor 積 $\bigotimes_{i=1}^m T_{\nu_i}^{\lambda_i}(U, S_1)$ ($\lambda_i, \nu_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq m$) に係数をもつ $L(U, S)$ の cohomology である。この話を通してつねに、tensor 積は完備 tensor 積 [G.PTT] と考へる。 \therefore で核定理 (ibid) により $\bigotimes_{i=1}^m T_{\nu_i}^{\lambda_i}(U, S_1)$ は直積空間 U^m 上の非対称型の有理型 tensor 場全体の空間となる。

よって、Behnke - Stein [BeSt] により、開 Riemann 面 U は Stein であり、直積空間 U^m も Stein である。

したがって, Rešetnikov spectral 系列 (命題 1.3) により,
 tensor 場の芽 = 係数をもち L(U, S) の cohomology を
 求めることに帰着する.

つまり次のような状況を考へればよい: $T \subset M$ と $S \cap T$
 $= \emptyset$ なる有限集合とし, 各 $\Delta \in S$ および $t \in T$ について

L(U, S) 加群 N^Δ および N^t が

$$N^\Delta = (T_\Delta^* U)^{\otimes \nu_{0,\Delta}} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^{\rho_\Delta} (T_{\nu_{\lambda,\Delta}}^{\lambda_{\lambda,\Delta}})^\Delta \quad (\Delta \in S)$$

$$N^t = \bigotimes_{\lambda=1}^{\rho_t} (T_{\nu_{\lambda,t}})^\Delta \quad (t \in T)$$

$$\nu_{0,\Delta}, \lambda_{\lambda,\Delta}, \nu_{\lambda,\Delta}, \nu_{\lambda,t} \in \mathbb{Z}, \quad \rho_\Delta, \rho_t \in \mathbb{N}_{\geq 0}$$

により与えられている.

ここでこれを対応に付随して

$$W_1 = L(\mathbb{C}), \quad L_0 = L(\mathbb{C}, \{0\})$$

$$N_0^\Delta := (T_0^* \mathbb{C})^{\otimes \nu_{0,\Delta}} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^{\rho_\Delta} T_{\nu_{\lambda,\Delta}}^{\lambda_{\lambda,\Delta}}(\mathbb{C}, \{0\})$$

$$N_0^t := \bigotimes_{\lambda=1}^{\rho_t} T_{\nu_{\lambda,t}}(\mathbb{C})$$

とあわせて次の結果が知られる

分解定理 ([Ka]) U は $b_1(U) < +\infty$ なる連結開

Riemann 面とすると, 同型

$$H^*(L(U, S); \bigotimes_{u \in S \cup T} N^u)$$

$$= \Lambda^*(\Sigma^3 H_1(U, S^v T)) \otimes_{A \in S} H^*(L_0; N_0^A) \otimes_{T \in T} H^*(W_1; N_0^T)$$

が成立する。ただし、右辺第1項は、次数線型空間

$$\Sigma^3 H_1(U, S^v T) = \begin{cases} H_1^{\text{singular}}(U, S^v T; \mathbb{C}) & \text{if } g = 2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

が生成する次数可換自由代数を表現する。尚、この cohomology 類は U 上の複素共変微分を用いて explicit に与えることができる。——

証明の中心は、Bott-Segal 加法定理 [BS] (= Gel'fand-Fuks cohomology における Mayer-Vietoris 定理) を我々の場合に番羽記述することである。この際、Stein 性が本質的に働く。

III. Hartogs の定理の応用.

かくして、問題の焦点は $U = \mathbb{C}$, $S = \phi$ 又は $\{0\}$ の場合には絞られて来た。記号 $\nu = \lambda$ の ν, λ に定める

$$W_1 = L(\mathbb{C}), \quad L_0 = L(\mathbb{C}, \{0\}), \quad T_\nu := (T_0^* \mathbb{C})^{\otimes \nu}$$

$$T_\nu^\lambda := T_\nu^\lambda(\mathbb{C}, \{0\}), \quad T_\nu := T_\nu(\mathbb{C})$$

L_0 加群 $1_{V_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^m T_{V_i}^{\lambda_i}$ に伴う Rešetnikov spectral 系列
 (命題 1.3.) を考へても, 原点 $0 \in \mathbb{C}^m$ の上に $H^*(L_0; 1_{V_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^m T_{V_i}^{\lambda_i})$ が自身で載っているために何の伸展も期待できない. 1つだけ原点 $0 \in \mathbb{C}^m$ を除去してしまふことを考へる. そのときにお釣りに出て来る項が制御できればよい訳である.

ところが有難いことに次のような定理がある. 参考のため一般的な形で引用する.

定理 (Scheja [S]) X を複素多様体とし, $A \subset X$ の解析的部分集合で余次元が少なくとも n あるとする.

このとき任意の解析的局所自由層 \mathcal{F} について制限

$$H^q(X; \mathcal{F}) \rightarrow H^q(X-A; \mathcal{F}) \quad 0 \leq q \leq n-2$$

は同型である —

$q=0, n \geq 2$ の場合が古典的な Hartogs の定理である. 今我々に必要なのは, $X = \mathbb{C}^m, A = \{0\}, \mathcal{F} = 1_{V_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m} \left(\bigotimes_{i=1}^m (T^*\mathbb{C})^{\otimes \lambda_i} \otimes [0]^{\otimes \lambda_i} \right) \left(\cong_{\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n}} \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m} \right)$ の場合だけである.

この L_0 加群の層 \mathcal{F} について, 次の L_0 加群の同型が成立する.

$$H^g(\mathbb{C}^m - \{0\}; \mathcal{F}) = \begin{cases} 1_{V_0} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^n T_{V_\lambda}^{\lambda_\lambda} & \text{if } g=0 \\ 1_{V_0} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^n (T_{V_\lambda}^x / T_{V_\lambda}^{\lambda_\lambda}) & \text{if } g=m-1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

$\therefore T_{V_\lambda}^x := T_{V_\lambda}(\mathbb{C} - \{0\})$ とおいた。

同変 cohomology $H_{L_0}^*(\mathbb{C}^m - \{0\}; \mathcal{F})$ に命題 1.2.2 を
殆んどそのままの意義論を施して cohomology 完全列

$$(3.1) \quad \cdots \rightarrow H^{g-m}(L_0; 1_{V_0} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^n (T_{V_\lambda}^x / T_{V_\lambda}^{\lambda_\lambda})) \xrightarrow{d_m} H^g(L_0; 1_{V_0} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^n T_{V_\lambda}^{\lambda_\lambda}) \\ \rightarrow H_{L_0}^g(\mathbb{C}^m - \{0\}; 1_{V_0} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{C}^m}(\bigotimes_{\lambda=1}^n (T^*(\mathbb{C})^{\otimes \lambda_\lambda} \otimes [0]^{\otimes \lambda_\lambda})) \rightarrow \cdots$$

とする。これは L_0 加群 $1_{V_0} \otimes \bigotimes_{\lambda=1}^n T_{V_\lambda}^{\lambda_\lambda}$ の 基本完全列 とおいて
こゝに可る。[Ka1]

この完全列は言わねえみれば当り前 (言わねえ前から
当り前?) であるが、存外には威力を發揮する。

(3.1) の第 1 項は $\mathbb{Z} \frac{d}{dz} (\in L_0)$ 不変成分を考へることによ
り、有限次元複体の言計算に帰着する。また、第 3 項は
II で述べた分解定理を使えば、変数の個数の異なる
ものに帰着するから、帰納法に持ち込んで色々と言計算が出来る。

応用例 (1) W_1 加群 $F(\mathbb{C}^m) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \mathbb{C}^m \text{ 上の複素解析関数} \} \cong (T_0)^{\otimes m}$

$$H^*(W_1; F(\mathbb{C}^m)) = H^*(p_m: \mathbb{C}) \otimes \mathbb{C}[v_2, \dots, v_m] \otimes \wedge^*(v_0^1, \dots, v_0^m)$$

と求まる。すなわち $P_m := \mathbb{C}^m - \bigcup_{i \neq j} \{z_i \neq z_j\}$ とあり、 $v_i \in$

$H^2(W_1; F(\mathbb{C}^m))$ は $\xi_1(z) \frac{d}{dz}, \xi_2(z) \frac{d}{dz} \in W_1$ に対応して

$$v_i(\xi_1(z) \frac{d}{dz}, \xi_2(z) \frac{d}{dz}) := \int_{z_1}^{z_2} \det \begin{pmatrix} \xi_1'(z) & \xi_2'(z) \\ \xi_1''(z) & \xi_2''(z) \end{pmatrix} dz$$

によって定まる。また $\nabla_0^j \in H^1(W_1; F(\mathbb{C}^m))$ は

$$\nabla_0^j(\xi_1(z) \frac{d}{dz}) := \xi_1'(z_j) \quad \xi_1(z) \frac{d}{dz} \in W_1$$

によって定まる。

応用例 (2) $L_0^{alg} := z \mathbb{C}[z] \frac{d}{dz}$

$$T_\nu^{X, alg} := \lim_{\lambda \uparrow \infty} \frac{1}{z^\lambda} \mathbb{C}[[z]] dz^\nu$$

とあくと、同型

$$H^*(L_0; \mathbb{1}_{\nu_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^m T_{\nu_i}^X) = H^*(L_0^{alg}; \mathbb{1}_{\nu_0} \otimes \bigotimes_{i=1}^m T_{\nu_i}^{X, alg})$$

が成立し、解析的 cohomology と代数的 cohomology が一致であり、GAGA の一種と言えらることも示す。——

Riemann 面の moduli の応用で重要な例としてある。

$Q = T_2 = T_2(\mathbb{C})$, $Q' = T_2' = T_2'(\mathbb{C}, \{0\})$ とおく。

定理 3.2. (1) $H^q(W_1; \Lambda^p Q) = 0$ if $q < p$

(2) $H^q(L_0; \Lambda^p Q') = 0$ if $q < p$.

証明は基本完全列 (3.1) の交代成分 Σ より、 $H^0(L_0: 1_2 \otimes S^{m-1}(Q^X/Q)) = H^0(L_0: 1_1 \otimes S^m(Q^X/Q)) = 0$ を示すことによる。

$\therefore S^m$ は m 重対称 tensor 積 \mathbb{C} を表すものとする。

IV. Riemann 面の moduli の応用.

以上の結果を種数 g compact Riemann 面 M_g の位相への応用する。まず、Harer の安定性定理 [H] により $g < g/3$ のとき、第 g 有理 cohomology 群 $H^g(M_g; \mathbb{Q})$ は種数 g に依存しない。よって Riemann 面の moduli 空間の安定 cohomology 代数 $\lim_{g \rightarrow \infty} H^*(M_g; \mathbb{Q})$ といったものを考えることができる。森田 [Mo] と Miller [Mi] が独立に示した定理により、この安定 cohomology 代数には可算無限変数 e_n の多項式代数が埋め込まれている:

$$(4.1) \quad \mathbb{Q}[e_n; n \geq 1] \hookrightarrow \lim_{g \rightarrow \infty} H^*(M_g; \mathbb{Q})$$

よって $e_n \in H^{2n}(M_g; \mathbb{Q})$ (すなわち $H^{n,n}(M_g)$) は第 n 森田 Mumford 類であり、次のように定義される。 $C_g \rightarrow M_g$ は種数 g compact Riemann 面の普遍族とし、

$$e := c_1(T C_g / M_g) \in H^2(C_g; \mathbb{Q}) \text{ すなわち } H^{1,1}(C_g)$$

とある. \Rightarrow e の中に fiber 積分を施す

$$(4.2) \quad e_n := \int_{\text{fiber}} e^{n+1} \in H^{2n}(M_g; \mathbb{Q}) \text{ 又は } H^{n,n}(M_g)$$

と定義する. [Mo][Mu]. 普遍族 C_g については. 同様に安定性が成立す. 埋め込み

$$(4.3) \quad \mathbb{Q}[e, e_n; n \geq 1] \hookrightarrow \lim_{g \rightarrow \infty} H^*(C_g; \mathbb{Q})$$

が存在する. 埋め込み (4.1)(4.2) の同型性が問題になる訳である.

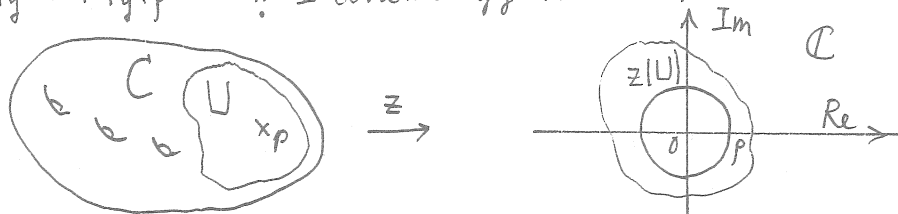
Beilinson Manin Schechtman [BMS] による moduli M_g を膨らませる. \Rightarrow 又は Arbarello, DeConcini, Kac, Procesi [ADKP] に近い流儀をとる. 実数 $\rho \geq 0$ を固定する.

dressed moduli $M_{g,\rho}$ を

$$M_{g,\rho} := \left\{ \begin{array}{l} (C, p, z); \quad C: \text{種数 } g \text{ compact Riemann 面} \\ p \in C_{\text{reg}} \subset C \\ z: (U, p) \rightarrow (C, 0) \text{ 座標} \\ \text{条件 } z(U) \supset \{|z| \leq \rho\} \end{array} \right\}$$

によって定義する. Harer 安定性 [H] により. 実数 $< 2/3$ の

M_g と $M_{g,\rho}$ の有理 cohomology は一致する



また $(C, p, z) \in M_{g,p}$ により $C_p := C - \{z \mid |z| \leq p\}$ とおき

$$C_{g,p} \stackrel{\text{def}}{=} \coprod_{(C,p,z) \in M_{g,p}} C_p = \left\{ (C,p,z,p_1) \mid (C,p,z) \in M_{g,p}, p_1 \in C_p \right\}$$

$\pi_{g,p} \downarrow$
 $M_{g,p}$

と定める。この fiber 空間には Lie 代数

$$d|_p \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{r \downarrow p} L(\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < r\})$$

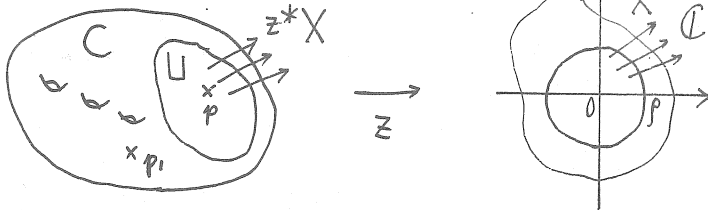
が無限小作用する。つまり準同型

$$d|_p \xrightarrow{\mu} \text{Vect}(C_{g,p}) \quad \text{および} \quad d|_p \xrightarrow{\bar{\mu}} \text{Vect}(M_{g,p})$$

と射影 $\pi_{g,p}$ と compatible なものが与えられる。実際 $X \in d|_p$

$(C, p, z, p_1) \in C_{g,p}$ により \square のように vector 場 z^*X に沿って

\sqcup をずらして行くのである。



ことが、 p は \sqcup の一番にズラして行く。 p_1 は $C - \{p\}$ 上に与えられる。

また任意の点 $x = (C, p, z) \in M_{g,p}$ あるいは $(C, p, z, p_1) \in C_{g,p}$

をとり考へることにする。

命題 4.4.

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} d|_p \xrightarrow{\bar{\mu}} \text{Vect}(M_{g,p}) \xrightarrow{e|_x} T_x M_{g,p} \\ d|_p \xrightarrow{\mu} \text{Vect}(C_{g,p}) \xrightarrow{e|_x} T_x C_{g,p} \end{array} \right\} \text{これら} = \text{全射.}$$

(2) isotropy 代数 (i.e., (1) の合成写像の核) は

$$(d\rho)_x = L(C^x) \quad \text{但. } C^x := C - \{p\} \quad (x \in M_{g,p})$$

$$(d\rho)_x = L(C^x, \{p, \gamma\}) = \{X \in L(C^x) : X|_{p_1} = 0\} \quad (x \in C_{g,p})$$

$$(3) T_x^* M_{g,p} = (d\rho / (d\rho)_x)^* = Q(C_p)$$

$$T_x^* C_{g,p} = (d\rho / (d\rho)_x)^* = Q'(C_p, \{p, \gamma\})$$

$\therefore T_x^* Q(\cdot) = T_2(\cdot) = \cdot$ 上の 2-次微分 $Q'(\cdot) = T_2'(\cdot)$ である。

(3) は (1), (2) と Serre 77 補性 から分る。

定理 3.2, 分解定理 $\S 12$ Rešetnikov spectral 系 3.1 (1.3) による

命題 4.5.

$$(1) H^q(L(C^x); \Lambda^p Q(C_p)) = \begin{cases} 0 & \text{if } q < p \\ H^p(W_1; \Lambda^p Q) & \text{if } q = p \end{cases}$$

$$(2) H^q(L(C^x, \{p, \gamma\}); \Lambda^p Q'(C_p, \{p, \gamma\})) = \begin{cases} 0 & \text{if } q < p \\ H^p(L_0; \Lambda^p Q') & \text{if } q = p \end{cases}$$

加成性 7. 他方 $\kappa_m \in H^m(W_1; \Lambda^m Q) (m \geq 1), \varepsilon \in H^1(L_0; Q')$ が存在する。

定理 4.6.

$$(1) \bigoplus_{p \geq 0} H^p(W_1; \Lambda^p Q) = \mathbb{C}[\kappa_m : m \geq 1] / \text{relations}$$

$$(2) \bigoplus_{p \geq 0} H^p(L_0; \Lambda^p Q') = \left(\bigoplus_{p \geq 0} H^p(W_1; \Lambda^p Q) \right) [\varepsilon]$$

が成立。 類 κ_m は fiber 積分の代数的類似物を作つて、
 (4.2) に依つて構成可る

$\zeta = 2$ 次は 点 $x \in M$, $M = C_{g,p}$ 又は $M_{g,p} \subseteq M$ 全域
 の上で走らせて考へる。 このとき cohomology 群 $H^p((dl_p)_x : \wedge^p T_x^* M)$ は M 上の自明な定数層となる。 また 類 κ_m
 および ε は ζ の層の nowhere zero section に括弧可る。 $\zeta = 2$ 。
 命題 4.5 ($g < p$) によつて自然な写像

$$D : H^0(M : H^p((dl_p)_x : \wedge^p T_x^* M)) \rightarrow H^{p,p}(M)$$

が定まる。 切断 κ_m および ε は D によつて 第 m 森田 Mumford
 類 e_m および Euler 類 e に写る。 かくして 前に述べた。

森田-Miller の定理 [Mo][Mi] から 類 κ_m たちの代数的
 独立性が知られる。

以上述べた事は I で導入した同変 cohomology に
 よつて解釈可る事ができる。 $M = M_{g,p}$ 又は $C_{g,p}$ と可る。
 dl_p の作用は複素解析的であるから n -形式の芽の層
 Ω_M^n は dl_p 加群の層となる。 $\zeta = 2$ 同変 cohomology

$$H_{dl_p}^{m,*}(M) \stackrel{\text{def}}{=} H_{dl_p}^*(M : \Omega_M^m)$$

が定まる。 上述の写像 D は (1.1) の 27 の spectral 系列の
 うち E_2 の方に関連可る。

ここで Γ の仮設を導入する。有限次元等質空間の研究 (例えば Bott [B]) を参考にすると $\forall x \in M$ について $d|_p$ 加群 $(\Omega_M^m)_x$ は $(d|_p)_x$ 加群 $\wedge^m T_x^* M$ の (余)誘導加群と考えることができる。ここで仮設

$$(4.7) \quad H^*(d|_p: \Omega_M^m)_x = H^*((d|_p)_x: \wedge^m T_x^* M) \quad (\forall x \in M)$$

を仮定することができる。これはつまり Frobenius の相互律 (又は Schapiro 同型定理) なのだから、おそろしく正しいと思われる。

(4.1. 現在筆者には $\forall x$ の証明を与えることができない。

(4.7) を仮定すると、これは Γ に示したことから 同型

$$H_{d|_p}^{m,m}(M) = H^0(M; H^m((d|_p)_x: \wedge^m T_x^* M))$$

が与えられる。上述の写像 D はこの同型に自然な写像

$$H_{d|_p}^{m,m}(M) \rightarrow H^{m,m}(M)$$

を合成したものに他ならない。

かくして

系 4.8. 仮設 (4.7) の下で

$$\bigoplus_{p \geq g} H_{d|_p}^{p,g}(M_{g,p}) = \mathbb{C}[e_n; n \geq 1]$$

$$\bigoplus_{p \geq g} H_{d|_p}^{p,g}(C_{g,p}) = \mathbb{C}[e, e_n; n \geq 1]$$

が成立する。

これは Riemann 面の moduli の安定 cohomology 代数が

木田 Mumford 類で生成される q 次元の h^1 か? と予想せよ
結果である。

参考文献

- [ADKP] E. Arbarello, C. DeContini, V.G. Kac, and C. Procesi, *Moduli spaces of curves and representation theory*, Commun. Math. Phys. 117 (1988), 1-36.
- [BeSt] H. Behnke und K. Stein, *Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen*, Math. Ann. 120 (1948), 430-461.
- [BMS] A. A. Beilinson, Yu. I. Manin and V. V. Schechtman, *Sheaves of Virasoro and Neveu-Schwartz algebras*, Lect. Note in Math. 1289 (1987), Springer, Berlin - Heidelberg - New York.
- [B] R. Bott, *Homogeneous vector bundles*, Ann. Math. 66 (1957), 203-248.
- [BS] R. Bott and G. Segal, *The cohomology of the vector fields on a manifold*, Topology 16 (1977), 285-298.
- [FT] B.L. Feigin and B.L. Tsygan, *Riemann-Roch theorem and Lie algebra cohomology I*, Suppl. ai Rend. Circ. Mat. Palermo 21 (1989), 15-52.
- [G,E] A. Grothendieck, *Éléments de géométrie algébrique III*, Publ. I.H.E.S. 11 (1973).
- [G,PTT] —————, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. 16 (1955).
- [H] J. Harer, *Stability of the homology of the mapping class group of orientable surfaces*, Ann. Math. 121 (1985), 215-249.
- [Ka] N. Kawazumi, *On the complex analytic Gel'fand-Fuks cohomology of open Riemann surfaces*, Anal. Inst. Fourier (to appear).
- [Ka1] —————, *An application of the second Riemann continuation theorem to cohomology of the Lie algebra of vector fields on the complex line*, (preprint UTYO-MATH 93-18).
- [Ka2] —————, *Moduli space and complex analytic Gel'fand Fuks cohomology of Riemann surfaces*, (preprint UTYO-MATH 93-).
- [Ka3] —————, *The invariant differential forms on the Teichmüller space under the Fenchel Nielsen flows*, J. Math. Soc. Japan 44 (1992), 217-237.

- [Mi] E.Y. Miller, *The homology of the mapping class group*, J. Diff. Geom. **24** (1986), 1–14.
- [Mo] S. Morita, *Characteristic classes of surface bundles*, Inventiones Math. **90** (1987), 551–577.
- [Mu] D. Mumford, *Towards an enumerative geometry of the moduli space of curves*, Arithmetic and Geometry., Progr. Math. **36** (1983), 271–328.
- [R] V.N. Rešetnikov, *On the cohomology of the Lie algebra of vector fields on a manifold with non trivial coefficients*, Soviet Math. Dokl. **14** (1) (1973), 234–240.
- [S] G. Scheja, *Riemannsche Hebbbarkeitssätze für Cohomologieklassen*, Math. Ann. **144** (1961), 345–360.
- [Sw] L. Schwartz, Séminaire L. Schwartz 1953/1954 Produits tensoriels topologiques d'espaces vectoriels topologiques (1954).

以上.

On the Convergence Problem of Cobar-type Spectral Sequences

Dai Tamaki
Department of Mathematics
Faculty of Science
Shinshu University
Matsumoto
Nagano Pref. 390
Japan

Abstract

In this talk, a new filtration on the spaces of little cubes of Boardman-Vogt is introduced. The stable splitting theorem of Snaith, then, gives a STABLE filtration on $\Omega^n \Sigma^n X$. For any homology theory $h_*(-)$, the spectral sequence defined by this filtration strongly converges to $h_*(\Omega^n \Sigma^n X)$. If $h_*(-)$ is a multiplicative homology theory and if $h_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X)$ is $h_*(*)$ -flat, then the E^2 -term is shown to be isomorphic to the E^2 -term of the Eilenberg-Moore spectral sequence. The construction of this spectral sequence can be thought of as a dual of the construction of the bar spectral sequence due to Rothenberg and Steenrod.

The aim of this talk is to give a new construction of a strongly convergent cobar-type Eilenberg-Moore spectral sequence of the path loop fibration

$$\Omega^n \Sigma^n X \longrightarrow P\Omega^{n-1} \Sigma^n X \longrightarrow \Omega^{n-1} \Sigma^n X$$

for any homology theory. Proofs are basically omitted. Details can be found in [19].

• Motivation

One of the most convenient computational tools for the mod p homology of loop spaces is the cobar-type Eilenberg-Moore spectral sequence (EMSS, for short), constructed in [9, 10]. The computation of $H_*(\Omega^n \Sigma^n X; \mathbb{F}_p)$ using the path loop fibration

$$\Omega^n \Sigma^n X \longrightarrow P\Omega^{n-1} \Sigma^n X \longrightarrow \Omega^{n-1} \Sigma^n X \tag{1}$$

illustrates the power of EMSS. In this case, the spectral sequence

$$E^2 = \text{Cotor}^{H_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X; \mathbb{F}_p)}(\mathbb{F}_p, \mathbb{F}_p) \implies H_*(\Omega^n \Sigma^n X; \mathbb{F}_p)$$

collapses at E^2 , reducing the calculation to that of elementary homological algebra. On the other hand, the Serre spectral sequence for the fibration (1) contains infinitely many nontrivial differentials and does not compute $H_*(\Omega^n \Sigma^n X; \mathbb{F}_p)$ directly.

It would be very useful, if we have an EMSS for any generalized homology theory, for example, Morava K -theory. In fact, shortly after the introduction of the original EMSS, Rector [14] and L. Smith [16, 17], independently from each other, generalized the construction of the EMSS for arbitrary homology theory. Unfortunately, however, it is not easy to apply their spectral sequences for practical computations.

• **Convergence problem**

One of the difficulties in using the EMSS is the convergence problem. Namely the EMSS does not necessarily converge to the homology we want to compute. For singular homology theory with \mathbb{F}_p coefficient, the condition for convergence is fairly mild. Dwyer proved in [7] that EMSS for a fibration

$$F \longrightarrow E \longrightarrow B$$

strongly converges to $H_*(F; \mathbb{F}_p)$ if and only if $\pi_1(B)$ acts nilpotently on $H_*(F; \mathbb{F}_p)$. Bousfield, recently, generalized this result to an arbitrary connective homology theory [2].

In the case of a non-connective homology theory, however, we can hardly expect the convergence of the EMSS, even when the base space is simply-connected. The computation of the Morava K -theory of the Eilenberg-Mac Lane spaces [1, 13] gives us an important counterexample.

Anderson-Hodgkin and Ravenel-Wilson used another kind of Eilenberg-Moore spectral sequence, i.e. the bar spectral sequence for the classifying space of an associative H -space. The fact that this bar-type spectral sequence converges for any homology theory enabled them, together with Hopf ring technology, to determine the Morava K -theory of the Eilenberg-Mac Lane spaces.

• **Comparison with the bar spectral sequence**

This nice behavior of the bar-type EMSS can be explained as follows.

Consider the simplicial bar construction of an associative H -space G , B_*G . This is a simplicial space with $(B_*G)_n = G^n$ and its geometric realization is the classifying space of G ,

$$\left(\coprod_n \Delta^n \times (B_*G)_n \right) / \sim = |B_*G| = BG.$$

The cosimplicial space Δ^* of the standard simplices has a filtration by skeletons.

$$(\Delta^*)^{(0)} \subset (\Delta^*)^{(1)} \subset \dots \subset \Delta^*. \tag{2}$$

By applying the functor $(\coprod_n (-) \times (B_*G)_n) / \sim$ to this filtration, one obtains a sequence of subspaces of BG ,

$$B_0G \subset B_1G \subset \dots \subset BG.$$

Under a mild condition on the topology of G , each successive inclusion $B_nG \subset B_{n+1}G$ is a cofibration. The bar-type EMSS is the spectral sequence obtained by applying homology theory $h_*(-)$ to this filtration. Since $BG = \bigcup_n B_nG$, the convergence of the spectral sequence follows from the standard argument.

The cobar-type EMSS is a kind of dual to this bar-type spectral sequence. For a pointed space X with nondegenerate base point, we have a cosimplicial cobar construction, Ω^*X

with $(\Omega^* X)^n = X^n$. (See [3] for various properties of cosimplicial spaces.) It is well-known that

$$\text{Map}_{\text{csSpaces}}(\Delta^*, \Omega^* X) = \text{Tot}(\Omega^* X) \simeq \Omega X$$

where csSpaces is the category of cosimplicial spaces. The cofibration sequence (2), then induces a tower of fibrations (not cofibrations!)

$$\Omega X \simeq \text{Tot}(\Omega^* X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \text{Tot}_1(\Omega^* X) \longrightarrow \text{Tot}_0(\Omega^* X)$$

where $\text{Tot}_s(\Omega^* X) = \text{Map}_{\text{csSpaces}}((\Delta^*)^{(s)}, \Omega^* X)$. Thus we cannot get an exact couple by applying homology. We have to modify this construction as follows. Let E be a spectrum. $\Omega^\infty(\Sigma^n E \wedge \Omega^* X)$ is a cosimplicial space for any interger n . As above, we obtain a tower of fibrations

$$\cdots \longrightarrow \text{Tot}_s(\Omega^\infty(\Sigma^n E \wedge \Omega^* X)) \longrightarrow \text{Tot}_{s-1}(\Omega^\infty(\Sigma^n E \wedge \Omega^* X)) \longrightarrow \cdots$$

By applying $\pi_*(-)$, we obtain an exact couple, hence a spectral sequence $\{E^r(n)\}$ for each n . The structure map of the spectrum E induces a (degree shifting) map of spectral sequences

$$\{E^r(n)\} \longrightarrow \{E^r(n+1)\}$$

for each n . Since colim is an exact functor, $\{\text{colim} E^r(n)\}$ is again a spectral sequence.

Rector proved in [14] that, if $E = HF_p$, the mod p Eilenberg-Mac Lane spectrum, this spectral sequence is isomorphic to the original EMSS constructed in [9, 10].

By the standard argument of homotopy spectral sequence (see [3]), the spectral sequence converges to $\text{colim} \lim \pi_{*+n}(\text{Tot}_s(\Omega^\infty(\Sigma^n E \wedge \Omega^* X)))$, which seems impossible to understand. When $E = HF_p$, [8] gives a complete understanding of the E^∞ -term in terms of the Bousfield-Kan F_p -completion, but if E is not connected, nothing is known. This is the difficulty of the convergence problem of cobar-type spectral sequences.

The most obvious way to avoid this difficulty is, of course, not to use the cosimplicial construction. In some cases, we might be able to find a completely different construction.

• Encouraging examples

There are some examples for which the EMSS converges with coefficient in ANY homology theory. One of such examples is the path loop fibration of a suspension,

$$\Omega \Sigma X \longrightarrow P \Sigma X \longrightarrow \Sigma X. \quad (3)$$

The James-Milnor theorem [12] tells us that, after a single suspension, $\Omega \Sigma X$ splits into a wedge of iterated smash products of X ,

$$\Omega \Sigma X \simeq \Sigma \left(\bigvee_{k=1}^{\infty} X^{\wedge k} \right). \quad (4)$$

For any homology theory, $h_*(-)$, satisfying the strong form of the Künneth isomorphism, there is an isomorphism

$$\tilde{h}_*(\Omega \Sigma X) \cong \bigoplus_{k=1}^{\infty} \tilde{h}_*(X)^{\otimes k}.$$

This is exactly the cobar construction, i.e. the E^1 -term of EMSS. In other words, the EMSS does converge and collapses at the E^1 -term. Together with the stable splitting theorem of Snaith [18] (see also [6], [4]),

$$\Omega^n \Sigma^n X \simeq \bigvee_{j=1}^{\infty} \mathcal{C}_n(j)_+ \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j}, \quad (5)$$

which is one of the generalizations of (4), this example suggests an attack on the convergence problem of the EMSS for the fibration

$$\Omega^n \Sigma^n X \longrightarrow P\Omega^{n-1} \Sigma^n X \longrightarrow \Omega^{n-1} \Sigma^n X \quad (6)$$

for $n > 1$.

There is another encouraging fact.

In the case of the bar-type spectral sequence, there is a construction due to Rothenberg and Steenrod [15]. Their idea is to use a quasifibration

$$G \longrightarrow EG \xrightarrow{\pi} BG$$

and to filter BG and EG so that the projection π is a filtration preserving map. Then by analyzing the E^1 -term of the spectral sequence for EG , they identified the E^2 -term for BG as Tor over $h_*(G)$ if $h_*(G)$ is $h_*(*)$ -flat for a multiplicative homology theory $h_*(-)$.

We also have a quasifibration model for (6) due to May [11]

$$C_n(X) \longrightarrow E_n(CX, X) \longrightarrow C_{n-1}(\Sigma X) \quad (7)$$

where CX is the reduced cone on X . If we could apply the idea of Rothenberg-Steenrod to this quasifibration by dualizing their procedure, we would get a new construction of the cobar spectral sequence for (6).

• Main theorem

In this talk, we introduce a new filtration on the spaces of little cubes $\mathcal{C}_n(j)$, called the gravity filtration, which induces a filtration on $\mathcal{C}_n(j)_+ \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j}$. Then the stable splitting (5) allows us to define a filtration on $\Omega^n \Sigma^n X$ in the STABLE HOMOTOPY CATEGORY. Applying homology theory, say $h_*(-)$, we obtain a spectral sequence abutting to $h_*(\Omega^n \Sigma^n X)$. The filtration is finite on each $\mathcal{C}_n(j)$ and thus the spectral sequence converges strongly.

If $h_*(-)$ is a multiplicative homology theory and if $h_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X)$ is $h_*(*)$ -flat, then we can identify the E^2 -term of our spectral sequence with the E^2 -term of the EMSS, i.e. Cotor over $h_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X)$. For any coalgebra C over a commutative ring R , $\text{Cotor}^C(R, R)$ has a natural algebra structure by the concatenation of the cobar resolution. If C is cocommutative and if $\text{Cotor}^{C \otimes_R C}(R, R) \cong \text{Cotor}^C(R, R) \otimes_R \text{Cotor}^C(R, R)$, then we can define a coalgebra structure on $\text{Cotor}^C(R, R)$ by

$$\text{Cotor}^C(R, R) \xrightarrow{\text{Cotor}^A} \text{Cotor}^{C \otimes_R C}(R, R) \cong \text{Cotor}^C(R, R) \otimes_R \text{Cotor}^C(R, R).$$

We prove that the identification of the E^2 -term with Cotor is compatible with these structures under some conditions. Thus we obtain a cobar-type strongly convergent spectral sequence of Hopf algebras.

Theorem For any homology theory $h_*(-)$ and a pointed space X such that $(X, \{*\})$ is a strong NDR pair, there is a spectral sequence, strongly converging to $h_*(\Omega^n \Sigma^n X)$. If $h_*(-)$ is multiplicative, this is a spectral sequence of algebras over $h_*(*)$. If $h_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X)$ is $h_*(*)$ -flat, then there is an isomorphism

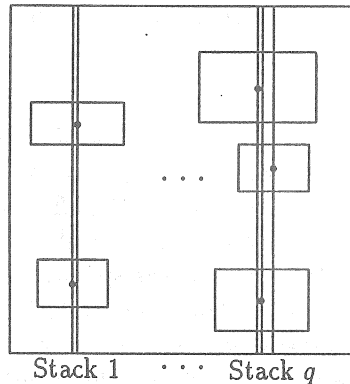
$$E^2 \cong \text{Cotor}^{h_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X)}(h_*(*), h_*(*)) \quad (8)$$

as algebras over $h_*(*)$, where Cotor has the standard algebra structure. Furthermore if X is a co- H space, e.g., $X = \Sigma Y$ for some space Y , and if $h_*(*)$ is a graded field, then this is a spectral sequence of coalgebras and the identification of the E^2 -term above (8) is an isomorphism of coalgebras, where Cotor has the standard coalgebra structure described above.

We say a graded ring R is a graded field if any graded module over R is free. Certainly this condition is not the weakest condition for the existence of the coalgebra structure, but the shortest condition to state. Weaker conditions can be read off from the proof of the existence of the coalgebra structure. An important example of a graded field is the coefficient ring of the Morava K -theory, $K(n)_* \cong \mathbb{F}_p[v_n, v_n^{-1}]$.

• **The gravity filtration**

The idea of the construction of the spectral sequence is as follows: In order to obtain the "right E^2 -term", i.e. Cotor , the most elementary method (which we do not use) would be to define a filtration $\{F_{-q} \mathcal{C}_n(j)\}_{q=0,1,2,\dots}$ for each j so that the E^1 -term of the resulting spectral sequence is isomorphic to the tensor algebra of $\tilde{h}_*(\Omega^{n-1} \Sigma^n X)$ over $h_*(*)$. For this purpose, we can easily see, by the stable splitting theorem (5), that it is enough to identify the difference $F_{-q} \mathcal{C}_n(j) - F_{-q-1} \mathcal{C}_n(j)$ as a set of q "vertically aligned stacks" of cubes.



We want these "stacks" to be "stable under gravity" for the ease of handling. Thus, to define a filtration, we first define a sequence of functions

$$u_q : \mathcal{C}_n(j) \longrightarrow [0, 1]$$

for $q = 0, 1, 2, \dots$ and $j = 1, 2, 3, \dots$ which measure the stability of cubes under gravity, i.e. the overlapping of cubes, and then define

$$F_{-q} \mathcal{C}_n(j) = u_q^{-1}(\{0\}).$$

Then we have a decreasing filtration

$$\phi = F_{-j-1}\mathcal{C}_n(j) \subset F_{-j}\mathcal{C}_n(j) \subset \cdots \subset F_{-1}\mathcal{C}_n(j) = F_0\mathcal{C}_n(j) = \mathcal{C}_n(j).$$

Since the filtration on each $\mathcal{C}_n(j)$ is finite, the spectral sequence defined by this filtration converges strongly.

It turns out that the E^1 -term of the resulting spectral sequence is not the tensor algebra on the contrary to our intention.

But we don't need the cobar construction to identify the E^2 -term with Cotor . In the quasifibration (7), we have a stable splitting of the total space

$$E_n(CX, X) \simeq_s \bigvee_{j=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{E}}_n(j; CX, X)$$

which is compatible with the stable splitting of the fiber (5) under the inclusion of the fiber

$$C_n(X) \longrightarrow E_n(CX, X).$$

We define a stable filtration on $E_n(CX, X)$ by a filtration $\{F_{-q}\tilde{\mathcal{E}}_n(j; CX, X)\}$ on $\tilde{\mathcal{E}}_n(j; CX, X)$ for each j with the following properties:

(i) The inclusions

$$C_n(j)_+ \wedge_{\Sigma_j} X^{\wedge j} \hookrightarrow \tilde{\mathcal{E}}_n(j; CX, X)$$

are filtration preserving.

(ii) Let $h_*(-)$ be a multiplicative homology theory and suppose that $h_*(\Omega^{n-1}\Sigma^n X)$ is $h_*(*)$ -flat. If $\{E^r(C_n)\}$ and $\{E^r(E_n)\}$ denote the spectral sequences for $C_n(X)$ and $E_n(CX, X)$ defined by the above stable filtrations, respectively, then we have

$$E^1(E_n) \cong h_*(\Omega^{n-1}\Sigma^n X) \otimes E^1(C_n)$$

as differential graded modules and $(E^1(E_n), d^1)$ is acyclic.

Thus $(E^1(E_n), d^1)$ is a cofree resolution of $h_*(*)$ over $h_*(\Omega^{n-1}\Sigma^n X)$ and we have, by definition of Cotor ,

$$E^2(C_n) \cong \text{Cotor}^{h_*(\Omega^{n-1}\Sigma^n X)}(h_*(*), h_*(*)).$$

Finally we obtain a strongly convergent spectral sequence

$$E^2(C_n) \implies h_*(\Omega^n \Sigma^n X)$$

with the desired E^2 -term.

• Remarks

In the case of singular homology theory, the E^∞ -term of the cobar-type EMSS can be described in terms of the Bousfield-Kan completion of the fiber with respect to the coefficient ring. It is very likely that, for homology theory defined by a spectrum E , the E^∞ -term of the cobar-type spectral sequence could be described in terms of a certain completion of the fiber with respect to E . If that is the case, the convergence of our

spectral sequence might imply some properties of the completion of $\Omega^n \Sigma^n X$ with respect to a spectrum E .

The space of j little n -cubes $\mathcal{C}_n(j)$ is Σ_j -equivariantly homotopy equivalent to the configuration space of j points in \mathbb{R}^n $F(j, \mathbb{R}^n)$. Since $F(j, \mathbb{R}^n)$ is related to braid groups, mapping class groups and other geometric objects (see [5], for example), the gravity filtration might have interesting geometric applications.

• Acknowledgement

The result of this talk is a part of my Ph.D. thesis in the University of Rochester, supervised under Fred Cohen.

In particular, the idea of constructing EMSS by filtering $\mathcal{C}_n(j)$ by using the first coordinate is due to Fred Cohen. I would like to thank him for providing this idea and constant help especially on NDR pairs and little cubes. I would also thank him for trying to convince me that this filtration gives rise to a cobar spectral sequence. Without his encouragement, I would have given up very easily.

References

- [1] D.W. Anderson and L. Hodgkin. The K -theory of Eilenberg-MacLane complexes. *Topology*, 7:317–329, 1968.
- [2] A.K. Bousfield. On the homology spectral sequence of a cosimplicial space. *American J. of Math.*, 109:361–394, 1987.
- [3] A.K. Bousfield and D.M. Kan. *Homotopy Limits, Completions and Localizations*. Lecture Notes in Mathematics 304. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [4] F.R. Cohen. The unstable decomposition of $\Omega^2 \Sigma^2 X$ and its applications. *Math. Z.*, 182:553–568, 1983.
- [5] F.R. Cohen. Artin's braid groups, classical homotopy theory, and sundry other curiosities. In *Braids*, Contemporary Mathematics vol.78. American Mathematical Society, 1988.
- [6] F.R. Cohen, J.P. May, and L.R. Taylor. Splitting of certain spaces CX . *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 84:465–496, 1978.
- [7] W.G. Dwyer. Strong convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Topology*, 13:255–265, 1974.
- [8] W.G. Dwyer. Exotic convergence of the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Illinois Journal of Math.*, 19:607–617, 1975.
- [9] S. Eilenberg and J.C. Moore. Homological algebra and fibrations. In *Colloque de Topologie (Brussels, 1964)*. Librairie Universitaire, Louvain, 1966.

- [10] S. Eilenberg and J.C. Moore. Homology and fibrations I. Coalgebras, cotensor product and its derived functors. *Comment. Math. Helv.*, 40:199–236, 1966.
- [11] J.P. May. *The Geometry of Iterated Loop Spaces*. Lecture Notes in Mathematics 271. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1972.
- [12] J.W. Milnor. On the construction of FK . In *Algebraic Topology – A Student Guide*, by J.F. Adams, pages 119–136. Cambridge University Press, 1972.
- [13] D.C. Ravenel and W.S. Wilson. The Morava K -theories of Eilenberg-MacLane spaces and the Conner-Floyd conjecture. *Amer. J. Math.*, 102:691–748, 1980.
- [14] D.L. Rector. Steenrod operations in the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Comment. Math. Helv.*, 45:540–552, 1970.
- [15] M. Rothenberg and N.E. Steenrod. The cohomology of classifying spaces of H -spaces. preprint.
- [16] L. Smith. *Lectures on the Eilenberg-Moore Spectral Sequence*. Lecture Notes in Mathematics 134. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1970.
- [17] L. Smith. On the Künneth theorem. I the Eilenberg-Moore spectral sequence. *Math. Z.*, 116:94–140, 1970.
- [18] V.P.A. Snaith. Stable decomposition for $\Omega^n S^n X$. *J. London Math. Soc. (2)*, 7:577–583, 1974.
- [19] D. Tamaki. A dual Rothenberg-Steenrod spectral sequence: A construction of a cobar spectral sequence for $\Omega^n \Sigma^n X$. preprint, July 1992.

実代数的集合族の modified Nash triviality について

兵庫教育大学 小池敏司

今回の話の目標は、擬斉次多項式で定義された実代数的集合族の大域的な意味での modified Nash triviality についての結果を述べ、その結果や証明の考察を通して得られる一般的な実代数的集合族の局所的な意味での modified Nash triviality についての展望を述べることにある。

§1 では、前者の結果のみを述べる。

modified Nash triviality は、解析的集合族に対する strong C^0 triviality の研究 ([7], [9])、特にその族が擬斉次多項式で定義された実代数的集合族の場合の研究の中で現われた概念である。その両者の関係については、話をする余裕は無いと思われるので、その概略を §2 でまとめておいた。

§1. 結果

最初に、Nash manifold の定義を述べる。 \mathbb{R}^n の semi-algebraic set とは、次の形をした集合の有限和として表されるものをいう:

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0, g_1(x) > 0, \dots, g_m(x) > 0\}$$

但し、各 f_i, g_j は \mathbb{R}^n 上定義された多項式関数とする。 \mathbb{R}^n の semi-algebraic set が Nash manifold とは、それが \mathbb{R}^n の C^ω (正則) 部分多様体の時いう。Nash manifold $M \subset \mathbb{R}^m, N \subset \mathbb{R}^n$ の間の C^ω 写像が Nash mapping とは、graph f が $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ の semi-algebraic set になる時いう。

本稿では、 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ は自然数の n 個の組とする。今、 n 変数実多項式関数 $f: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を

$$f(x) = \sum_{\beta} A_{\beta} x_1^{\beta_1} \dots x_n^{\beta_n} \quad (A_{\beta} \neq 0, \beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{N} \cup \{0\})$$

とする。この時、 f が weighted homogeneous of type $(\alpha_1, \dots, \alpha_n; L)$ とは、任意の $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ に対し、

$\alpha_1 \beta_1 + \dots + \alpha_n \beta_n = L$ になる時いう。

次に、 $P = \alpha_1 \dots \alpha_n$, $p_i = P/\alpha_i$ ($1 \leq i \leq n$) とし、

$$S_1(\alpha) = \{(X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n \mid X_1^{2p_1} + \dots + X_n^{2p_n} = 1\}$$

とおく。写像 $\pi_\alpha: S_1(\alpha) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ を

$$\pi_\alpha(X_1, \dots, X_n; u) = (u^{\alpha_1} X_1, \dots, u^{\alpha_n} X_n)$$

で定義する。 $E = S_1(\alpha) \times \mathbb{R}$, $E_0 = \pi_\alpha^{-1}(0) = S_1(\alpha) \times \{0\}$ とおくと、 E は Nash manifold、 E_0 は Nash submanifold、 π_α は Nash mapping になる。その時、写像 $\pi_\alpha|_{E-E_0}: E-E_0 \rightarrow \mathbb{R}^n - \{0\}$ は、2:1 写像になる。従って、 $\pi_\alpha: (E, E_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ は finite Nash modification である。

J を開区間、 $t_0 \in J$ とする。 $f_t: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ ($t \in J$) を各成分 $f_{t,i}$ が weighted homogeneous of type $(\alpha_1, \dots, \alpha_n; L_i)$ ($1 \leq i \leq p$) である多項式写像の族とする。この時、写像 $F: (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$ を $F(x, t) = f_t(x)$ で定義する。 F を多項式写像 (又は Nash mapping) と仮定する。

定義 $(\mathbb{R}^n \times J, F^{-1}(0))$ が π_α -modified Nash trivialization を許容するとは、次を満足する t -level preserving Nash diffeomorphism

$\Phi: (E \times J, E_0 \times J) \rightarrow (E \times J, E_0 \times J)$ が存在する時いう:

Φ は t -level preserving Nash homeomorphism

$\phi: (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J)$ を誘導し、

$$\phi((\mathbb{R}^n \times J, F^{-1}(0))) = (\mathbb{R}^n \times J, f_{t_0}^{-1}(0) \times J)$$

となる。

この時、次の結果を得る:

定理 ([8] Theorem) 任意の $t \in J$ に対し、 $f_t^{-1}(0) \cap \Sigma f_t = \{0\}$ ならば、 $(\mathbb{R}^n \times J, F^{-1}(0))$ は π_α -modified Nash trivialization を許容する。ここで、 Σf_t は f_t の特異点集合を表す。

注意 定理と同じ仮定のもとに、 $(\mathbb{R}^n \times J, F^{-1}(0))$ の位相自明性が成立することはよく知られている ([2], [6])。

これ迄に、解析的集合族に関する多くの位相自明性定理が示されてきた (あまりに多いので、文献には挙げていない)。上記の結果から、次の事が自然に問題になる。

問題 解析的集合族に関する位相自明性定理に対し、同じ仮定 (又は極めて弱い条件を加えた) のもとに、代数的集合族に対する modified Nash trivality が成立するか。

一般的な実代数的集合族の局所的な意味での modified Nash trivality を示していくことは、この問題の方向にある。そのための方針を、上の結果の証明の考察をもとに述べる予定である。

§2. Strong C^0 equivalence と Modified Nash trinity

最初にいくつか記号を準備し、strong C^0 equivalence の概念を定義する。

記号 (1) 解析写像芽 $\lambda: [0, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 、但し、 $\lambda(0) = 0$ 、 $\lambda(s) \neq 0$ ($s > 0$) の集合、即ち、 $0 \in \mathbb{R}^n$ での解析弧の集合を $\Delta(\mathbb{R}^n, 0)$ で表す。

(2) $\Delta(\mathbb{R}^n, 0) \ni \lambda, \mu$ に対し、 $0(\lambda, \mu) > 1$ (又は $0(\lambda, \mu) = 1$) とは、 λ と μ が $0 \in \mathbb{R}^n$ で接する (又は交わるか接しない) ことを意味する。

(3) $\mathcal{E}_{[w]}(n, 1)$ は、解析関数芽 $:(\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ の集合を表す。

(4) $S(\mathbb{R}^n, 0)$ は、 \mathbb{R}^n と部分集合の対の $0 \in \mathbb{R}^n$ での集合芽の集合を表す。

定義 解析関数 $f, g \in \mathcal{E}_{[w]}(n, 1)$ が与えられた時、 $(\mathbb{R}^n, f^{-1}(0)), (\mathbb{R}^n, g^{-1}(0)) \in S(\mathbb{R}^n, 0)$ が strongly C^0 equivalent であるとは、次を満足する局所同相写像 $\sigma: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ が存在する時いう:

$$(I) \quad \sigma(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0).$$

(II) $\lambda \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, 0)$ 、但し、 $\lambda \subset f^{-1}(0)$ (又は $g^{-1}(0)$) に対し、 $\sigma(\lambda)$ (又は $\sigma^{-1}(\lambda)$) $\in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, 0)$ である。

(III) 任意の $\lambda, \mu \in \mathcal{A}(\mathbb{R}^n, 0)$ 、但し、 $\lambda, \mu \subset f^{-1}(0)$ に対し、 $0(\lambda, \mu) = 1$ であるための必要十分条件は、 $0(\sigma(\lambda), \sigma(\mu)) = 1$ である。

J を開区間、 $f_t: (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ($t \in J$) を孤立特異点を持つ type $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ の擬斉次多項式関数とする。この節では、 $\{(\mathbb{R}^n, f_t^{-1}(0))\}_{t \in J}$ の π_α -modified Nash trivality と strong C^0 trivality の関係を議論する。

(A) $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$ の場合:

$\S 1$ と同様に、 $E = S_1(\alpha) \times \mathbb{R}$ 、 $E_0 = S_1(\alpha) \times \{0\}$ とする。 $(X, u) = (x_1, \dots, x_n; u)$ 、 $(Y, s) = (y_1, \dots, y_n; s) \in E$ は、

$$x_i = \pm y_i \quad (1 \leq i \leq n), \quad u = \pm s \quad (\text{複号同順})$$

の時、同値であるということにする。この時、

この同値関係による E, E_0 の商集合をそれぞれ \tilde{E}, \tilde{E}_0 で表すことにする。更に、 $\pi: (E, E_0) \rightarrow (\tilde{E}, \tilde{E}_0)$ はその商写像、 $\tilde{\pi}_\alpha: (\tilde{E}, \tilde{E}_0) \rightarrow (\mathbb{R}^n, 0)$ は $0 \in \mathbb{R}^n$ での blow up を表すことにする。

§1 で述べた定理により、 $(\mathbb{R}^n \times J, F^{-1}(0))$ は、 π_α -modified Nash trivialisization を許容した。

即ち、 t -level preserving Nash diffeomorphism $\Phi: (E \times J, E_0 \times J) \rightarrow (\tilde{E} \times J, \tilde{E}_0 \times J)$ が存在して、それは、 $(\mathbb{R}^n \times J, F^{-1}(0))$ の位相自明性を与える t -level preserving Nash homeomorphism $\phi: (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J) \rightarrow (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J)$ を誘導した。この時、 Φ は次の図式を可換にする t -level preserving Nash diffeomorphism $\tilde{\Phi}: (\tilde{E} \times J, \tilde{E}_0 \times J) \rightarrow (\tilde{E} \times J, \tilde{E}_0 \times J)$ を誘導する：

$$\begin{array}{ccccc}
 (E \times J, E_0 \times J) & \xrightarrow{(\pi, id)} & (\tilde{E} \times J, \tilde{E}_0 \times J) & \xrightarrow{(\tilde{\pi}_\alpha, id)} & (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J) \\
 \downarrow \Phi & & \downarrow \tilde{\Phi} & & \downarrow \phi \\
 (E \times J, E_0 \times J) & \xrightarrow{(\pi, id)} & (\tilde{E} \times J, \tilde{E}_0 \times J) & \xrightarrow{(\tilde{\pi}_\alpha, id)} & (\mathbb{R}^n \times J, \{0\} \times J)
 \end{array}$$

従って、この場合には、 π_α -modified Nash trivialisization は strong C^0 trivialisization を導く。

(B) $\alpha_1 = \dots = \alpha_s < \alpha_{s+1} = \dots = \alpha_n$ ($1 \leq s < n$) の場合:

問題 族 $\{(\mathbb{R}^n, f_t^{-1}(0))\}_{t \in J}$ は, strongly C^0 trivial か.

π_α -modified Nash triviality という概念は、この問題を解こうとする試みの中で現われたものである。

(C) $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ($n=3$) の場合:

補題 ([8] Proposition 3) $f, g : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を孤立特異点を持つ type $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ($\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$) の擬奇次多項式関数とする。 $(\mathbb{R}^3, f^{-1}(0)), (\mathbb{R}^3, g^{-1}(0)) \in S(\mathbb{R}^3, 0)$ が strongly C^0 equivalent と仮定する。この時、 $f^{-1}(0) \supset \{x=0\}$ ならば、 $g^{-1}(0) \supset \{x=0\}$ である。

例 1 $f_t : (\mathbb{R}^3, 0) \rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ ($t \in J$) を次式で定義された type $(1, 2, 3; 13)$ の擬奇次多項式関

数とする:

$$f_t(x, y, z) = x^3 + xy^6 + xz^4 + t y^5 z$$

この時、 f_t は孤立特異点を持つ。従って、§1
の定理により、 $(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, F^{-1}(0))$ は π_α -modified
Nash trivialization を許容する。一方、補題よ
り、それは $t=0$ で strongly C^0 trivial でない。

例 2 (Brieskorn-Speder family [1]) $f_t: (\mathbb{R}^3, 0)$
 $\rightarrow (\mathbb{R}, 0)$ を次式で定義された type $(1, 2, 3; 15)$
の擬斉次多項式関数とする:

$$f_t(x, y, z) = z^5 + t z y^6 + y^7 x + x^{15}$$

但し、 $J = (-1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ で $\varepsilon > 0$ は十分小とす
る。この時、 f_t は代数的孤立特異点を持つ。
従って、上と同様、 $(\mathbb{R}^3 \times J, F^{-1}(0))$ は π_α -modified
Nash trivialization を許容する。しかし、
 $(\mathbb{R}^3, f_0^{-1}(0)), (\mathbb{R}^3, f_{-1}^{-1}(0)) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3, 0)$ は、strongly
 C^0 -equivalent でない ([7] Theorem A 参照)。

上記の例からわかるように、weight が 3 種類以上の時には、 π_α -modified Nash triviality は必ずしも strong C^0 triviality を意味しない。

注意 strong C^0 equivalence は、blow-analyticity に関する研究の一環として、[7] の中で導入した概念である。孤立特異点を持つ 3 変数の擬斉次多項式関数族が strongly C^0 trivial になるための判定容易な必要条件を、[9] の中で定式化した。最近になって、一般の 3 変数多項式関数族の strong C^0 triviality について、toric resolution を用いて特徴付ける研究が、福井敏純氏によって始められている ([5])。

文 献

- [1] J. Briançon and J.P. Speder : La trivialité topologique n'implique pas les conditions de Whitney, C. R. Acad. Sci. Paris, 280 (1975), 365-367.
- [2] M. Buchner and W. Kucharz : Topological triviality of a family of zero-sets, Proc. Amer. Math. Soc., 102 (1988), 699-705.
- [3] M. Coste and M. Shiota : Thom's first isotopy lemma : a semialgebraic version with uniform bounds (to appear).
- [4] T. Fukui : The modified analytic trivialization of a family of real analytic mappings, Contemporary Math., 90 (1989), 73-89.
- [5] T. Fukui : Toric resolution and real function, preprint.
- [6] H. King : Topological type in families of germs, Invent. Math., 62 (1980), 1-13.
- [7] S. Koike : On strong C^0 -equivalence of real analytic functions, J. Math. Soc. Japan, 45 (1993), 313-320.
- [8] S. Koike : Modified Nash triviality of family of varieties of weighted homogeneous polynomial mappings, preprint.
- [9] S. Koike : Strong C^0 -triviality of family of weighted homogeneous polynomials (in preparation).
- [10] T.C. Kuo : On C^0 -sufficiency of jets of potential functions, Topology, 8 (1969), 167-171.
- [11] T.C. Kuo : Characterizations of v -sufficiency of jets, Topology, 11 (1972), 115-131.
- [12] T.C. Kuo : Une classification des singularités réelles, C.

- R. Acad. Sci, Paris, 288 (1979), 809-812.
- [13] T.C. Kuo : On classification of real singularities, Invent. Math., 82 (1985), 257-262.
- [14] B. Malgrange : Ideals of differentiable functions, Oxford Univ. Press, 1966.
- [15] M. Shiota : Classification of Nash manifolds, Ann. Inst. Fourier, 33 (1983), 209-232.
- [16] M. Shiota : Nash manifolds : Lect. Notes in Math., 1269, Springer, 1987.

ファイブレーションと有限性障害

福岡大学 理学部 角 俊雄
g78381g@kyu-cc.cc.kyushu-u.ac.jp

Introduction

問題. 空間が、有限 CW 複体のホモトピー型を持つ条件を求めよ。

これは、C.T.C. Wall によって発見された有限性障害にて判定されます ([14,15])。群の元として有限性障害が決まるために、空間は *finitely dominated* でないといけません。“*finitely dominated*” は 1940 年代に導入されており、*finitely dominated* 空間はいかなるホモトピー型を持つのか研究されています。幾つか紹介しましょう。

[Milnor, 1957]. 単連結 *finitely dominated* 空間は、有限 CW 複体のホモトピー型を持つ。

このとき、彼は *finitely dominated* 空間は有限 CW 複体のホモトピー型を持つだろうと予想しましたが、これは Wall によって否定されました。

[Mather, 1965]. *finitely dominated* 空間は、有限次元 CW 複体のホモトピー型を持つ。

有限性障害が定義された後でも、その元がゼロであることを求めるのが難しいこともあって、*finitely dominated* 空間にわかりやすい条件を加えることによって、有限 CW 複体のホモトピー型を持つことを示そうとされました。

[†]文章は、 AMS-TEX を、図は LAMS-TEX を用いました。

[Ferry, 1980]. コンパクト距離空間のホモトピー型を持つが、有限 CW 複体のホモトピー型を持たない *finitely dominated* 空間が存在する。（“空間”は“複体”ではありません。）

このように、*finitely dominated* 空間は、有限 CW 複体と似た性質を持っているにもかかわらず、“有限”でない“*finitely dominated*”空間が数多く存在します。本論では、*finitely dominated* 空間の有限性障害について議論します。（勿論、 CW 複体にて成立することもあります。そこまでは触れないことにします。）有限性障害の「同変版」は、70年代から研究対象にされ、様々な形で拡張されています。ここでは、Lückによって導入された「幾何学的」な定義 $w^G(X) \in Wa^G(X)$ を採用して、話を進めることにします。特に断らない限り、空間は *finitely dominated* とし、 G はコンパクトリー群と仮定します。

$G \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ をファイブレーションに対し、準同型 $p_*: Wa^{\{1\}}(B) \rightarrow Wa^{\{1\}}(E)$ が定義できます。これを“トランスファー”と呼ぶことにします。トランスファーは、有限性障害 $w^{\{1\}}(B)$ を $w^{\{1\}}(E)$ に写します。（よって、 B が有限 CW 複体であれば、 E も有限 CW 複体になります。）本論では、トランスファーの像について考察します。

§1 で、可換群 $Wa^G(X)$ 、その元である、有限性障害 $w^G(X)$ を定義します。§2 では、可換群 $Wa^G(X)$ の性質について述べます。§3 において、トランスファーについて議論します。最後に、§4 にて、トランスファーの像についての結果を述べたいと思います。

1 Finitely Dominated Spaces

ここでは、 G を（コンパクト）リー群とします。

定義. $r \circ s \cong id_X$ をみたす有限 G - CW 複体 Z が存在して、 G -写像 section $s: X \rightarrow Z$ と retraction $r: Z \rightarrow X$ が存在するとき、 G -空間 X は *finitely G -dominated* であるという。また、 Z は X を *dominate* するという。

すぐ分かりますが、*finitely G -dominated G -空間*で *dominate* される G -空間は *finitely G -dominated* です。また、“*finitely G -dominated*”は次のように言い換えることもできます。

- (2) $w^G(X)$ がゼロとなるのは、 X が有限複体のホモトピー型を持つときで、かつそのときに限る。
- (3) (Wa^G, w^G) は加法不変性を持つ。すなわち、次の可換図式において、 k が G -コファイブレーションのとき、

$$\begin{array}{ccc}
 X_0 & \xrightarrow{k} & X_1 \\
 \downarrow & \searrow j_0 & \downarrow j_1 \\
 X_2 & \xrightarrow{j_2} & X
 \end{array}$$

$$w^G(X) = j_{1*}(w^G(X_1)) + j_{2*}(w^G(X_2)) - j_{0*}(w^G(X_0))$$

が成立する。(この性質は L. Siebenmann によって発見されました。)

Lück [6] は、“finitely G -dominated” は次の 2 条件と同値であることを示しました。

- (a) 有限次元 G -CW 複体の G -ホモトピー型を持つ。
- (b) 有限骨格 G -CW 複体の G -ホモトピー型を持つ。

勿論、上の 2 つのホモトピー同値写像が同じものでとれるときに、有限 G -CW 複体の G -ホモトピー型を持つときです。Lück は、(a) (または (b)) を判定する障害を有限性障害のときと同様に定義しました。しかし、有限性障害が可換群に値を持つのにに対し、可換半群にしか値を持ってません。更に、どちらも障害も加法不変性を持ちえません。(可逆元とは限らないので、加法不変性は

$$w^G(X) + j_{0*}(w^G(X_0)) = j_{1*}(w^G(X_1)) + j_{2*}(w^G(X_2))$$

で定義します。) これは、この定義からは計算が難しいことを物語っています。(これより、ホモロジー群を見る方がよいと思われます。各固定点集合 (の各連結集合) V の $\mathbb{Z}[\pi_1(V)]$ -係数のホモロジー群によって比較できると思われます。)

その他の性質については、論文 [4]、もしくはレクチャーノート [6] を参照してください。

2 Finiteness Obstruction

まず、 $Wa^G(X)$ と同じようにして、群 $Wa_H^G(X)$ を定義します。

は同型写像である。

(2) 連結空間 Z の基本群が有限表示を持つならば、 $Wa^{\{1\}}(Z)$ は $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(Z)])$ と同型である。

射影 $p: X \rightarrow X/G$ は主 G -ファイブレーションです。定理 (1) の準同型の逆は、pull-back によって与えられます。

$$\begin{array}{ccc} & & X \\ & & \downarrow p \\ Z & \xrightarrow{k} & X/G \end{array}$$

また、定理 (1) において、“自由”を外しても、我々の定義を用いれば、

$$Wa_{\{1\}}^G(X) \rightarrow Wa^{\{1\}}(X/G); [f: Y \rightarrow X] \mapsto [f/G: Y/G \rightarrow X/G]$$

が同型であると言えます。

3 Restriction

$G \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ を G をファイバーにもつファイブレーションとし、 I を自明群とおきます。準同型 $p^*: Wa^I(B) \rightarrow Wa^I(E)$ を pull-back を利用して定義します。

$$[f: X \rightarrow B] \mapsto [\bar{f}: E_f \rightarrow E]$$

$$\begin{array}{ccc} E_f & \xrightarrow{\bar{f}} & E \\ \downarrow & & \downarrow p \\ X & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

この準同型を、トランスファーと呼びます。トランスファーは、有限性障害 $w^I(B)$ を有限性障害 $w^I(E)$ に写します。(より一般的な定義は、[13] を参照してください。) トランスファーは、 S^1 -ファイブレーション $S^1 \rightarrow E \rightarrow B$ に対して B が finitely dominated 空間であるとき、常に E は有限 CW 複体となるかという問題の反例があることの証明に使われました ([11])。(B が finitely dominated ならば、 $S^1 \times B$ は有限 CW 複体のホモトピー型を持っていたことを思い出してください。) この例は、“向き付け可能でない”ファイブレーションによって構成されました。そこで、“向き

付け可能な”ファイブレーションにおいてはどうか?という問題が自然に考えられます。

$G \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ を G をファイバーにもつファイブレーションとします。このとき、ファイブレーションに対し、どの程度同じトランスファーが誘導されるかが、E.K. Pedersen [10] によって示されました。それをいうために定義をします。

定義. 短完全系列

$$1 \rightarrow \text{Image}(\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(E)) \rightarrow \pi_1(E) \rightarrow \pi_1(B) \rightarrow 1$$

を、 p に関する基本データという。 $G \rightarrow E_1 \xrightarrow{p_1} B_1$ に関する基本データと $G \rightarrow E_2 \xrightarrow{p_2} B_2$ に関する基本データが同じであるとは、次の図式を可換にする同型写像 ϕ_j ($j = 1, 2, 3$) が存在するときをいう。

$$\begin{array}{ccccc} \text{Image}(\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(E_1)) & \longrightarrow & \pi_1(E_1) & \longrightarrow & \pi_1(B_1) \\ \downarrow \phi_1 & & \downarrow \phi_2 & & \downarrow \phi_3 \\ \text{Image}(\pi_1(G) \rightarrow \pi_1(E_2)) & \longrightarrow & \pi_1(E_2) & \longrightarrow & \pi_1(B_2) \end{array}$$

定理. ([10]) トランスファーは、 G および基本データのみで決まる。すなわち、ファイブレーション p_1, p_2 に対して、ファイバーがともに G で、同じ基本データを持つならば、次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccc} W a^I(B_1) & \xrightarrow{p_1^*} & W a^I(E_1) \\ \downarrow \phi_{3*} & & \downarrow \phi_{2*} \\ W a^I(B_2) & \xrightarrow{p_2^*} & W a^I(E_2) \end{array}$$

さて、向き付け可能なファイブレーションに対し、トランスファーはどうなるかを議論しましょう。

定義. $F \rightarrow E \rightarrow B$ をファイブレーションとする。このとき、 $\pi_1(B) \rightarrow [F, F]$ が定まるが、この写像の像が自明なとき、向き付け可能という。

主 G -ファイブレーション $G \rightarrow E \rightarrow B$ は、向き付け可能です。空間 E には、自然に G -作用が入り、 B が CW 複体であれば、その CW 構造をリフトした G - CW 複体になります。すなわち、 $B = E/G$ は CW 構造を保ちます。

命題. P を $\pi_1(G)$ の商である有限生成アーベル群とし, R は有限表示を持つ群とする。任意の中心拡大

$$1 \rightarrow P \rightarrow Q \rightarrow R \rightarrow 1$$

に対して、これを基本データに持つ主 G -ファイブレーション $G \rightarrow E \rightarrow B$ が存在する。(B は *finitely dominated* 空間としてとれる。) (逆に、向き付け可能なファイブレーションの基本データは中心拡大になっています。)

よって、向き付け可能なファイブレーションに関するトランスファーは、主 G -ファイブレーションにのみ考察すればよいことになります。

トランスファーを「同変版」へ拡張しましょう。まず、同変 G -ファイブレーションを定義します。

定義. E と B を G -CW 複体とする。 $F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ を G が同変 G -ファイブレーションとは、任意の G -CW 複体 X および任意の G -写像に対し、以下の図式を可換にする G -写像が存在するときという。

$$\begin{array}{ccc} X \times \{0\} & \longrightarrow & E \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow p \\ X \times I & \longrightarrow & B \end{array}$$

$p^{-1}(b)$ ($b \in B$) は、すべてホモトピー同値で、特に $p^{-1}(b)$ にはイソトロピー群

$$G_b = \{g \in G \mid g \cdot b = b\}$$

の作用を持つ。空間 F が、任意の $b \in B$ に対して、 G_b -作用を持ち、この作用の下で F は $p^{-1}(b)$ と G_b -ホモトピー同値になる性質を持つときに、同変 G -ファイブレーションは、ファイバー F を持つという。

簡単な例としては、射影 $\pi: G \rightarrow G/H$ (H は閉部分群。) は同変 G -ファイブレーションです。この G -写像は、ファイバーに H を持ちます。(ファイバー $F = H$ の G_{gH} -作用は

$$k \cdot h = g^{-1}kgh \quad (k \in G_{gH} = gHg^{-1}, h \in F)$$

で与えられます。) K を G の閉部分群をするとき、射影 π は同変 K -ファイブレーションです。ですが、イソトロピー群は互いに共役とは限りません。

同変 G -ファイブレーション $E \xrightarrow{p} B$ に対して、(ある条件の下で) トランスファー $p^*: Wa^G(B) \rightarrow Wa^G(E)$ が同様に定義できます。

先ほどの例の拡張として、一般に G/H 上の同変 G -ファイブレーションは、ある H -空間 F があって、 $G \times_H F \rightarrow G/H$ の形をとります。このことから、 $Wa^H(F)$ と $Wa^G(G \times_H F)$ は同型であることが分かります。

$G \rightarrow E \rightarrow B$ を主 G -ファイブレーションとします。作用を考えることによって、トランスファー $p^*: Wa^I(E/G) \rightarrow Wa^I(E)$ は、トランスファー $Wa^I(E/G) \rightarrow Wa^G(E)$ を経由します。

$$\begin{array}{ccc}
 Wa^I(E/G) & \xrightarrow{p^*} & Wa^I(E) \\
 \downarrow \text{直和因子} & \searrow \text{同型} & \uparrow Res_I^G(E) \\
 Wa^G(E/G) & \longrightarrow & Wa^G(E)
 \end{array}$$

ここに、 $Res_H^G(E): Wa^G(E) \rightarrow Wa^H(E)$ は、作用の制限によって誘導される準同型です。(G/H がコンパクトであれば定義できます。) そこで、より一般に、主 G -ファイブレーションを同変 G -ファイブレーションとみて、

$$p^*: Wa^G(E/G) \rightarrow Wa^K(E)$$

を考えることが出来ます。($K = G$ のときは、 p^* は同型です。) 分解定理により、このトランスファーは

$$p^*: Wa_H^G(E/G) \rightarrow Wa^K(E)$$

に分割されますが、これはより大きなコンパクトリー群の作用を経由します。

$$\begin{array}{ccccc}
 Wa_H^G(E/G) & \xrightarrow{p^*} & Wa^G(E) & \xrightarrow{Res_K^G(E)} & Wa^K(E) \\
 & \searrow p^* & \uparrow Res_{\hat{G}}^G(E) & \nearrow Res_K^{\hat{G}}(E) & \\
 & & Wa^{\hat{G}}(E) & &
 \end{array}$$

よって、 $p^*: Wa^I(E/G) \rightarrow Wa^K(E)$ のみを考察すればよいことがわかります。更に、 E の作用が自由のときは、トランスファーは制限写像 $Res_K^G(E)$ を考えることと同値です。

4 Images of Transfer

有限性障害の計算方法で、最初に考えられたのが、直積でした ([2,12])。空間 $X \times Y$ の有限性障害は、 X および Y の有限性障害とオイラー標数、および代数的 K -群の積で表せます。その後、ファイブレーションに関する有限性障害の関係が研究されてきた ([1,3,5,7,8,9] 等)。

$F \rightarrow E \xrightarrow{p} B$ をファイブレーションとします。空間 F と B は、連結とします。(よって、 E も連結。) Pedersen-Taylor [11] は、

$$p_* \circ p^*: \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(B)]) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(B)])$$

が $\chi^p(F)$ 倍写像であることを示しました。($\chi^p(F)$ は、“ $\pi_1(B)$ -module としてのオイラー標数”です。 $\pi_1(B) = I$ のときは、オイラー標数になります。) $F = S^3$ であっても、ファイブレーションによっては、 $\chi^p(F) \neq 0$ です。(球面ファイブレーションについて、 $p_* \circ p^*$ は、完全に分類されています [11]。これは、球面ファイブレーションでも、全空間 E は有限 CW 複体のホモトピー型を持たないものが存在することを言っています。今、我々が考えている“向き付けられた”ファイブレーションに関しては、 $p_* \circ p^*$ は、 $\chi(F) = 0$ 倍写像になってしまいます。特に、 F が単連結空間のときは、 p_* は同型写像になりますから、トランスファー p^* 自身 $\chi(F)$ 倍写像になっています。

以下、 $F = G$ は、コンパクトリー群とします。上では、連結の場合を議論しましたが、 F の連結性を仮定しないと、 $p_* \circ p^*$ は $\chi(G)$ 倍とは限りません。例えば、 G を有限群とすると、 $p: G \times B \rightarrow B$ に対して、トランスファー p^* は同型写像になります。更に、 E が連結であると仮定しても、 $p_* \circ p^*$ が $\chi(G)$ 倍とならない被覆写像 p が存在します。そこで、 G は連結であると仮定します。 X を finitely G -dominated 自由 G -空間、 $p: X \rightarrow X/G$ を射影とし、そのトランスファーを $p^*: Wa^{\{1\}}(X/G) \rightarrow Wa^H(X)$ に固定します。

定義. $n \in \mathbb{Z}$ とする。可換群 A の元 a が n -divisible とは、 $nb = a$ となる A の元 b があるときにいう。

命題. $\pi_1(G \rightarrow X)$ の像が $\pi_1(X)$ の直和因子になっていると仮定する。このとき任意の G の閉部分群 H に対し、 $p^*: Wa^{\{1\}}(X/G) \rightarrow Wa^H(X)$ の像は、 $\chi(G/H) \cdot Wa^H(X)$ に含まれる。特に、 $w^H(X)$ は $\chi(G/H)$ -divisible である。

系. H が G の真閉部分群のとき、 $p^* \circ p_*: Wa^{(1)}(X) \rightarrow Wa^H(X)$ の像は零である。

定理. $\pi_1(G/H \rightarrow X/H)$ が零写像とするとき、 $w^H(X)$ は $\chi(G/H)$ -divisible である。特に、 T を G の極大トーラスとすれば、 $w^T(X)$ は $\chi(G/T)$ -divisible である。

証明については、省略しますが、 G -作用をよく見て $Wa^G(X)$ の定義に用いた同値関係で G -写像を変形していき、“ $G/H \times ? \rightarrow X$ ” を作り出すことにより示します。

REFERENCES

1. D. R. Anderson, *The Wall invariant of certain S^1 -bundles*, Proc. Amer. Math. Soc. **31** (1972), 529–535.
2. S. Gersten, *A product formula for Wall's obstruction*, Amer. J. Math. **88** (1966), 337–346.
3. W. Lück, *The transfer maps induced in the algebraic K_0 - and K_1 -groups by a fibration I*, Math. Scand. **59** (1986), 93–121.
4. ———, *The geometric finiteness obstruction*, Proc. London Math. Soc. **54** (1987), 367–384.
5. ———, *The transfer maps induced in the algebraic K_0 - and K_1 -groups by a fibration II*, J. Pure Appl. Algebra **45** (1987), 143–169.
6. ———, *Transformation groups and algebraic K-theory*, Lecture Notes in Math. 1408, Springer-Verlag, 1989.
7. H. J. Munkholm and E. K. Pedersen, *On the Wall finiteness obstruction for the total space of certain fibrations*, Trans. Amer. Math. Soc. **261** (1980), 529–545.
8. ———, *Transfers in algebraic K- and L-theory induced by S^1 -bundles*, Canadian Math. Soc. Conference Proc. **2** (1982), 451–460.
9. H. J. Munkholm and A. A. Raniski, *The projective class group transfer induced by an S^1 -bundles*, Canadian Math. Soc. Conference Proc. **2** (1982), 461–484.
10. E. K. Pedersen, *Universal geometric examples for transfer maps in algebraic K- and L-theory*, J. Pure. Appl. Algebra **22** (1981), 179–192.

11. E. K. Pedersen and L. R. Tayler, *The Wall finiteness obstruction for a fibration*, Amer. J. Math. **100** (1978), 887–896.
12. L. Siebenmann, *The obstruction of finding a boundary for an open manifold of dimension greater than five*, Ph. d. thesis, Princeton Univ., 1965.
13. T. Sumi, *Finiteness obstructions of equivariant fibrations*, Publ. Res. Inst. Math. Soc. **27** (1991), 627–637.
14. C. T. C. Wall, *Finiteness conditions for CW complexes*, Ann. of Math. **81** (1965), 56–69.
15. ———, *Finiteness conditions for CW complexes II*, Proc. in the Royal Soc. A **215** (1966), 129–139.

3-次元多様体上の流れ

日大理工 松元重則

この報告では閉 3-多様体 M 上の非特異な流れ $\phi = \{\phi(t;)\}$ を考え、知られている結果と将来の問題を挙げて、この方面の研究の進展状況をお知らせしたい。ここでは、極小流、横断的に幾何構造を持つ流れ等、位相幾何学に深く関わる問題であり、しかも夏向きのものに話を絞る。

1. 極小流の例

流れ ϕ が極小であるとは、 ϕ の各軌道が M の中で稠密なることをいう。そのような流れの例で、著者の知るものを列挙してみよう。

1.1. T^2 の微分同相の懸垂 $f: T^2 \rightarrow T^2$ を、極小な（各軌道が T^2 上で稠密な）微分同相とする。このとき、 f をホロノミーとする S^1 上の T^2 -束（ f の写像トーラス） M を次にて定める。

$$M = T^2 \times \mathbf{R} / \sim \quad \text{ここに } (x, t+1) \sim (f(x), t).$$

いま μ を M 上で定義された正值関数としてベクトル場 $\mu \cdot (\partial/\partial t)$ を考えれば、これは M 上の流れ ϕ を定める。これを写像 f の懸垂という。部分多様体 $T^2 \approx T^2 \times \{0\}$ はこの流れの切断面であり、その回帰写像はもとの f と一致している。従って、 f の性質は、すべて ϕ に遺伝する。例えば、 f が極小ならば、 ϕ もそうである。

上記回帰時間が一定の時、特に ϕ のことを定時間懸垂と呼ぶ。

1.2. ホロサイクル流 $SL(2, \mathbf{R})$ 上に、1-径数部分群

$$T = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

の右移動により、流れが定まる。それを、普遍被覆 $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ へ持ち上げたものを $\tilde{\phi}$ としよう。いま、 Γ を $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ の任意の一様格子とすると、 $\tilde{\phi}$ は、多様体 $M = \Gamma \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ 上の流れを定める。これはホロサイクル流と呼ばれ、極小流となることが知られている。

1.3. Anosov 流に付随した強安定葉層 $\eta = \{\eta^t\}$ を M 上の Anosov 流とする. すなわち, 接ベクトル束 TM の一次元部分束への連続な分解 $TM = T\eta \oplus E^s \oplus E^u$ が存在し次を満たす.

a. $T\eta$ は流れ η に接する. E^s と E^u は, $D\eta^t$ で不変である.

b. $C > 0$ と $0 < \lambda < 1$ とが存在し次を満たす.

$$\|D\eta^t(v)\| \leq C\lambda^t \|v\| \quad \forall v \in E^s, \forall t > 0,$$

$$\|D\eta^t(v)\| \leq C\lambda^{-t} \|v\| \quad \forall v \in E^u, \forall t < 0.$$

Anosov 流 η に付随した強安定葉層 G^s が次の同値関係により定まる.

$$x \sim y \iff \text{dist}(\eta(t; x), \eta(t; y)) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

実は G^s は E^s の積分に他ならない. 同様にして強不安定葉層 G^u も, $t \rightarrow -\infty$ により定まる. これらは 1 次元葉層であり適当な時間径数の導入により, 流れとみなすことができる. 各点において, 三つの流れ η , G^s および G^u は一次独立である.

G^s および G^u は, η の時間径数の取り方に強く依存する. 一般に次が知られている.

1.3.1 定理 (Plante) つぎの条件がともに満たされるとき, G^s と G^u は極小である.

(1) η は位相推移的である. (即ち稠密な軌道が存在する.)

(2) η は T^2 の Anosov 微分同相の定時間懸垂でない.

例 1.2 のホロサイクル流も実はすべて例 1.3 に含まれる. 1-径数部分群

$$\left\{ \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{bmatrix} \right\} \subset SL(2, \mathbb{R})$$

は多様体 $\Gamma \backslash \widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ の上に流れを導くが, これは Anosov 流であり, それに付随した強安定流が例 1.2 のホロサイクル流である. これと T^2 の双曲的自己同型の定時間懸垂を併せて, 古典的 Anosov 流ということにしよう.

古典的なものの時間径数変換でない Anosov 流があるかということであるが、それは（推移的なものも、非推移的なものも）豊富に存在することが分かっている。また推移的なものは、境界をもつ曲面上の擬 Anosov 同相を用いて、ある種の懸垂として表わすことができることも知られている。それらは例えば双曲的 3-多様体の上にも存在し得る。

定義のみによれば、一般に G^s は C^0 級でしかない。実際古典的なものの、ジェネリックな時間径数変化に対し G^s は C^1 級でない。しかし古典的な例自体では G^s は C^∞ 級である。従って G^s の微分可能性が問題となるが、近年研究が進んでおり、次のような結果が得られている。

1.3.2 定理 (S. Hurder - A. Katok) $E^s \oplus E^u$ が C^1 級のコンタクト構造であるとき、 G^s および G^u は $C^{2-\epsilon}$ 級である。

1.3.3 注意 アノソフ流 η が負曲率（一定でなくてもよい）曲面の測地流ならば、標準的なコンタクト構造があるので、上の仮定は常に満たされる。

1.3.4 定理 (E. Ghys, S. Hurder - A. Katok) G^s かつ G^u が C^2 級ならば、アノソフ流 η は古典的なものか、またはそれを極めて特別の方法で時間径数変化させたものである。

3-多様体上の流れの定性論を築くのは極めて困難である。何もできていないといってよい。一般に、微分同相にせよ、流れにせよ、また葉層構造にせよ、満足のいく定性論の完成しているのは余次元 1 の場合だけである。（写像の場合、一次元多様体上のもは、ある意味で余次元 2 の現象の近似とみなすことができる。これについては現在猛スピードで研究が進展しており、将来的には余次元 2 の定性論は確立されるかもしれない。）

次が、極小流に関する基本的な問題であろう。

問題 1.4 ここに述べた方法以外に 3-多様体上の極小流の作り方はあるのか。

特に S^3 の上に極小流が存在しないという未解決の予想を **Gottshalk** 予想という。これについてはつい最近伊藤敏和他在が複素解析的な特

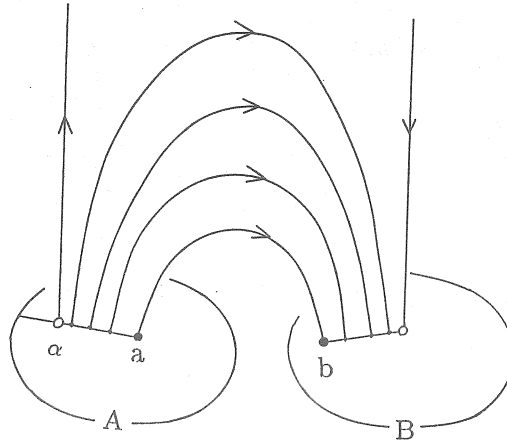


図 1: HLP を持たない流れ

別の条件のもとで解決したという。

2. HLP (ホモトピー持ち上げ性)

2.1 定義 (田村一郎) 多様体 M の上の流れ ϕ が HLP を満たすとは, 同一軌道上の 2 点 $a, b = \phi(t_0; a)$ を中心とする, 流れに横断的に埋め込まれた円板 A, B および A 上の単純曲線 α で, $\alpha(0) = a$, $\alpha(1) \in \partial A$ を満たすものが与えられたとき次のいずれかが成り立つこととする。

- (1) 連続関数 $\tau : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ が存在し, $\tau(0) = t_0$ かつ $\phi(\tau(s); \alpha(s)) \in B$ ($s \in [0, 1]$) を満たす。
- (2) ある $s_0 \in (0, 1)$ と連続関数 $\tau : [0, s_0] \rightarrow \mathbf{R}$ とが存在して, $\phi(\tau(s); \alpha(s)) \in B$ ($s \in [0, s_0]$) かつ $\phi(\tau(s_0); \alpha(s_0)) \in \partial B$ が成り立つ。

一見わかりにくいかも知れないが, 切断面 A のうえの曲線 α を切断面 B の上に流れ ϕ に沿って写そうとすると, 最後まで可能か, そうでなければ像の方が B からはずれてしまうといっている。つまり, 図 1 のようなことが起こらないという意味である。

この概念は流れの定性論を展開する際, 中心的な役割を果たすことになると思われる。しかし未だ研究が充分になされていない。調べるべきことは次の二つである。

(A) どの様な流れが HLP を持つか.

(B) 流れが HLP を持つとき何がいえるか.

(A) については次が分かっている. 流れ ϕ が測地化可能とは M 上のあるリーマン計量により軌道が皆測地線になることをいう. これは ϕ の時間径数変化で得られるある流れにより不変な横断的平面場が存在することと同値である. 従って特にコンタクト流 (コンタクト形式 ω に対して $\langle \omega, X \rangle = 1$, $L_X \omega = 0$ により定まるベクトル場 X による流れ, コンタクト形式の Reeb 流ともいう.) は測地化可能である. 測地化可能性は Sullivan により, カレントを用いて記述される同値条件が知られており, それより容易に次が従う.

2.2 定理 測地化可能な流れは HLP を持つ.

3-多様体上の任意のコンタクト流は閉軌道を有するかという問題があり, 定理 2.2 はその手がかりではなからうか.

前節の例のうち, 測地化可能なものは例 1.1 に限る. HLP を持つものは例 1.1 と例 1.2 であり, 例 1.3 の殆どについては, 流れの具体的構成法が与えられているにも関わらず, 不明である. 次がこの方面の最大の問題であろう. ことに Gottshalk 予想についての鍵となろう.

2.3 問題 (田村一郎) 極小流は HLP を持つか.

(B) も, 一般には難問である. しかし次節に見るように他に何らかの条件があるときはうまく行く.

3. 横断的に幾何構造をもつ流れ

G を $(n-1)$ -次元多様体 X (普通単連結開多様体) の上に効果的かつ推移的に作用しているリー群とする. また ϕ を閉 n -次元多様体 M の上の非特異な流れとする,

3.1 定義 ϕ が (横断的に) (G, X) -構造を持つとは, 族 $\{(U_i, p_i), g_{ij}\}$ が存在して次を満たすことである.

(1) $\{U_i\}$ は M の開被覆, $p_i : U_i \rightarrow X$ は沈め込み, g_{ij} は G の元である.

(2) $\phi|_{U_i}$ の各軌道は p_i により一点に写される。

(3) $x \in U_i \cap U_j$ に対し $p_i(x) = g_{ij}p_j(x)$ が成り立つ。

(G, X) -構造を持つ流れを幾何構造を持つということもある。 (G, X) -構造を持つ流れが与えられたとき、一つの沈め込み $p_i: U_i \rightarrow X$ を元にして、それに隣接する U_j の上では $g_{ij}p_j$ を考えれば定義域が拡張される。これを順次行なえば、大域的に定義された沈め込みが得られる。その定義域は M の普遍被覆 \bar{M} である。この写像 $\xi: \bar{M} \rightarrow X$ のことを展開写像という。これにともない、準同型 $\theta: \pi_1(M) \rightarrow G$ が定義され、

$$\xi(\gamma x) = \theta(\gamma)\xi(x) \quad \forall \gamma \in \pi_1(M), \forall x \in \bar{M}$$

を満たす。 θ をホロノミー準同型、その像をホロノミー群という。ホロノミー群は、このような流れの重要な指標である。

また逆に θ と ξ で上の関係を満たすものが与えられたとき、これから容易に流れを構成することができる。

もちろん、幾何構造をもつ流れは特殊である。しかし古典的な流れを数多く含んでおり、興味深い対象である。様々な (G, X) に対し分類が試みられている。以下に分類が成功した例を挙げよう。

3.2 成功例 (Y. Carriere)

$$(G, X) = (\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^2), \quad (\text{Affine}(\mathbf{R}), \text{Affine}(\mathbf{R})).$$

3.3 成功例 (D. B. A. Epstein)

$$(G, X) = (\text{Iso}(\mathbf{H}^n), \mathbf{H}^n), \quad (\text{Iso}(\mathbf{R}^n), \mathbf{R}^n), \quad (\text{Iso}(S^n), S^n).$$

3.4 成功例 (E. Ghys, 中山裕道)

$$(G, X) = (PSL(2, \mathbf{C}), \mathbf{C} \cup \{\infty\}).$$

このうち、例 3.2 と例 3.4 では X は 2次元であり、従って多様体 M は 3次元である。これらを眺めているうちに

僕もひとつおもちゃが欲しい

と思うに到った. そこで, $(\text{Affine}(\mathbf{R}^2), \mathbf{R}^2)$ 型の幾何構造を持つ流れを考えることにした. これを **アフィン流** と呼ぼう.

3.5 アフィン流の構成方法 単連結 3-次元リー群 G と準同型 $\bar{\theta}: G \rightarrow \text{Affine}(\mathbf{R}^2)$ および一様格子 $\Gamma \subset G$ を用意する. $\iota: \Gamma \rightarrow G$ で包含写像を表わす. また基準点 $x_0 \in \mathbf{R}^2$ をとり, 写像 $p_0: \text{Affine}(\mathbf{R}^2) \rightarrow \mathbf{R}^2$ を $p_0(g) = g \cdot x_0$ にて定める. いまもしも $p_0 \circ \bar{\theta}$ が沈め込みであれば,

$$(\bar{\theta} \circ \iota, p_0 \circ \bar{\theta}): (\Gamma, G) \longrightarrow (\text{Affine}(\mathbf{R}^2), \mathbf{R}^2)$$

により, 多様体 $\Gamma \backslash G$ の上にアフィン流が定まる. このように定まったアフィン流のことを **代数的アフィン流** といい, 有限被覆が代数的なものを, **準代数的アフィン流** という.

3.6 代数的アフィン流の例 上の G として実現可能なリー群は 4 つある. アーベルリー群 \mathbf{R}^3 , 巾零リー群 Nil , 一様格子をもつ可解リー群 $Solv$ および単純リー群 $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ である. ここに,

$$Nil = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}, \quad Solv = \left\{ \begin{bmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

3.6.1 $G = \mathbf{R}^3$ のとき 準同型 $\bar{\theta}$ は本質的に次の 2 通りであり.

$$\bar{\theta}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta}(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2/2 + y \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

展開写像は \mathbf{R}^2 上への \mathbf{R} 束写像である. 得られる流れ ϕ は Seifert 束か, または T^2 の上の楕円型アフィン変換の懸垂である.

3.6.2 $G = Nil$ のとき 準同型 $\bar{\theta}$ は恒等写像か, または次の何れかである.

$$\bar{\theta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\theta} \begin{bmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & z & z^2/2 + y \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

展開写像は \mathbf{R}^2 上への \mathbf{R} 束写像である. 得られる流れ ϕ は Seifert 束か, または T^2 の上の放物型アフィン変換の懸垂である.

3.6.3 $G = \text{Solv}$ のとき 準同型 $\bar{\theta}$ の選び方は次の3通りである。

$\bar{\theta}$ が包含写像のとき 展開写像は、 \mathbf{R}^2 の上への \mathbf{R} -束写像である。得られる流れは、 T^2 の双曲的自己同型の懸垂である。

$\bar{\theta}$ が次の写像のとき

$$\bar{\theta} \begin{bmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

このときも展開写像はやはり \mathbf{R}^2 の上への \mathbf{R} -束写像である。しかし、この場合の著しい特徴としてホロノミー群は \mathbf{R}^2 の標準的な面積を保存しない。得られる流れは、上の定時間懸垂に付随した強安定流である。

$\bar{\theta}$ が次の写像のとき

$$\bar{\theta} \begin{bmatrix} e^t & 0 & x \\ 0 & e^{-t} & y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-\frac{t}{2}} & 0 & 0 \\ -e^{-\frac{t}{2}}x & e^{\frac{t}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

この場合、展開写像は半平面 $\{x > 0\}$ の上への \mathbf{R} -束写像であり、得られる流れは第二の場合と同一である。

3.6.4 $G = \widetilde{SL}(2, \mathbf{R})$ の場合 このとき $\bar{\theta}$ は被覆写像 $\widetilde{SL}(2, \mathbf{R}) \rightarrow SL(2, \mathbf{R})$ と包含写像 $SL(2, \mathbf{R}) \subset \text{Affine}(2, \mathbf{R})$ との合成である。展開写像は $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ の上への $\mathbf{Z} \times \mathbf{R}$ -束写像であり、得られる流れは例 1.2 のホロサイクル流である。

3.7 注意 全てのアフィン流が準代数的ということではない。例えば $S^1 \times S^2$ を、空間 $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ を2倍の拡大写像で割ったものとみなし、 z -軸と平行な流れを考えると、容易に分かるようにこれはアフィン流であるが、準代数的ではない。

3.8 目標 我々の研究目標は、いつアフィン流が代数的ないしは準代数的であるか、そのための充分条件を捜し出すことである。

3.9 結果 次のいずれかの条件を満たすとき、アフィン流は準代数的である。

- (1) 展開写像が \mathbf{R}^2 の上への \mathbf{R} -束写像である.
- (2) ホロノミー群が \mathbf{R}^2 の標準的面積を保ち, かつ流れが HLP を持つ.
- (3) ホロノミー群が $SL(2, \mathbf{R})$ に含まれる.

3.10 反省 上記のうち, (2) のとき, 条件 HLP は不用ではないかと思われる. その形に定理を強化すべきであろう. もっとも今のところ, アイディアはない.

現在得られている証明は長すぎて, 発表が苦しい. 簡潔で優美な証明が欲しい.

葉層の有理性、非有理性

坪井 俊

(東大 数理)

$S^1 \times S^1$ の閉 1 形式 $adx + bdy$ を考え、その積分曲線を眺めると、 a/b が有理数であるか無理数であるかによって、その位相的性質は全く異なる。 a/b が有理数であればすべての積分曲線は円周であり $S^1 \times S^1$ のある直積構造においては積葉層となっていて“有理的”といっていよいであろう。 a/b が無理数であれば、すべての積分曲線は稠密である。さらに無理数の有理数との近さに依ってダイナミックスも異なってくるような“非有理的”な対象である。

これから説明することは、 $S^3 \times S^3$ の完全積分可能な微分 1 形式 ω にも、“有理的”なものとは“非有理的”なものがあること、“有理性”、“非有理性”の研究は余次元 1 葉層の研究をする上で避けて通れないと思われることである。

1. Godbillon-Vey 不変量。

余次元 1 葉層 (M, \mathcal{F}) が非特異微分 1 形式 ω で与えられているとする。完全積分可能条件は $\exists \eta, d\omega = \omega \wedge \eta$ と書かれる。ここに現れる η を使って、Godbillon-Vey 類は $GV(\mathcal{F}) = [\eta \wedge d\eta] \in H_{DR}^3(M)$ と定義される。 $\eta \wedge d\eta$ が閉形式であることは $d(\eta \wedge d\eta) = d\eta \wedge d\eta$ において、 $d\omega = \omega \wedge \eta$ を外微分した式から、 $\exists \zeta, d\eta = \omega \wedge \zeta$ となることに注意するとわかる。

向き付けられた 3 次元多様体上には任意の $H_{DR}^3(M)$ の元に対し、これを $GV(M, \mathcal{F})$ とする余次元 1 葉層 (M, \mathcal{F}) が存在する (Thurston の構成)。それでは高次元の多様体 M の任意の $H_{DR}^3(M)$ の元に対してはどうか。これは 4 次元多様体ならわかる (修士論文用の問題?)。5 次元多様体もわかりそうである (博士論文用の?)。6 次元多様体についてはこの問題が容易ならざる面をもっている。

2. Gelfand-Feigin-Fuks の観察。

\mathcal{F} の変形 \mathcal{F}_t について、

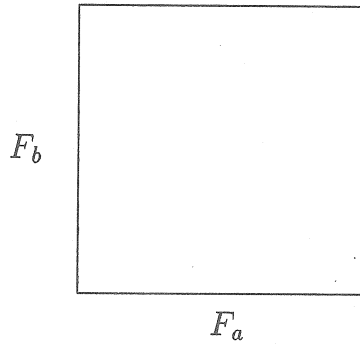
$$(\eta \wedge d\eta) \wedge \frac{d}{dt}(\eta \wedge d\eta) = 0$$

である ([1])。このことから $GV(M, \mathcal{F}_t) \in H_{DR}^3(M)$ について $GV(M, \mathcal{F}_t) \cup \frac{d}{dt}GV(M, \mathcal{F}_t) = 0 \in H_{DR}^6(M)$ である。

とくに $S^3 \times S^3$ 上の余次元 1 葉層 \mathcal{F} について、 $GV(\mathcal{F}) = (a, b) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \cong H^3(S^3 \times S^3)$ となるが、GFF の観察によれば、余次元 1 葉層構造を変形しても比 a/b は不変である。 a/b が有理数または無限大のとき、 \mathcal{F} を有理的、 a/b が無理数のとき、 \mathcal{F} を非有理的、と呼ぶことにすると、有理性、非有理性は葉層の変形で不変な性質である。

a/b が有理数または ∞ となる余次元 1 葉層構造の存在の証明は Γ_1 構造と余次元 1 葉層構造の存在定理の簡単な応用問題 (具体的構成は面白い問題) である。一方、 a/b が無理数となる滑らかな余次元 1 葉層構造の存在は知られていない。非有理的葉層が偶然発見される可能性もないではないが、今のところ、それを構成するには次のような手順を踏むことが必要になる ([3])。

3. $S^3 \times S^3$ の葉層の構成。



- (1) S^3 の葉層 F_t で $GV(F_t) = t$ なるものをとる。
- (2) $S^3 \times \{*\}$ 上に F_a , $\{*\} \times S^3$ 上に F_b という葉層を与える。
- (3) deformation retraction による引き戻しとして $S^3 \times \{*\} \cup \{*\} \times S^3$ の近傍 U 上に葉層 \mathcal{F} を定義する (普通は特異点を持つ葉層となる)。
- (4) 補空間 $S^3 \times S^3 - U \cong D^6$ への特異点を持つ葉層としての拡張の問題を解決する。
- (5) 特異点を持つ葉層とホモトピックな葉層を得る (Thurston の存在定理)。

4. 特異点を持つ葉層の拡張問題と森田茂之の * 積。

すべての横断的に向き付けられた余次元1葉層構造は分類空間 $B\bar{T}_1$ の葉層を引き戻して得られる。このことから特異点を持つ葉層の拡張問題はホモトピー群の元についての $[F_a], [F_b] \in \pi_3(B\bar{T}_1)$ に対し、Whitehead 積 $[[F_a], [F_b]] = 0$ か? という問題である。 $B\bar{T}_1$ は2連結であることがわかっている。余次元1葉層構造の分類空間 $B\bar{T}_1$ と葉層 \mathbf{R} 積構造の分類空間 $B\overline{\text{Diff}}_c(\mathbf{R})$ の位相についての Mather の定理 $H_*(B\overline{\text{Diff}}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong H_*(\Omega B\bar{T}_1; \mathbf{Z})$ を使って問題の言い換えができ

る。まず、次の図式は簡単にかける、

$$\begin{array}{ccc}
 \pi_3(B\bar{\Gamma}_1) \times \pi_3(B\bar{\Gamma}_1) & \longrightarrow & \pi_5(B\bar{\Gamma}_1) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\
 \pi_2(\Omega B\bar{\Gamma}_1) \times \pi_2(\Omega B\bar{\Gamma}_1) & \longrightarrow & \pi_4(\Omega B\bar{\Gamma}_1) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \\
 H_2(\Omega B\bar{\Gamma}_1) \times H_2(\Omega B\bar{\Gamma}_1) & \longrightarrow & H_4(\Omega B\bar{\Gamma}_1) \\
 \cong \downarrow & & \downarrow \\
 H_2(B\overline{\text{Diff}}_c) \times H_2(B\overline{\text{Diff}}_c) & \longrightarrow & H_4(B\overline{\text{Diff}}_c)
 \end{array}$$

森田茂之氏 ([3]) によると、一番下の準同型は

$$\begin{aligned}
 \pi_3(B\bar{\Gamma}_1) \ni [F_a] &\longmapsto [P_a] \in H_2(B\overline{\text{Diff}}_c(\mathbf{R})) \\
 [F_b] &\longmapsto [P_b]
 \end{aligned}$$

としたとき、

$$[[F_a], [F_b]] \longmapsto [P_a] * [P_b] - [P_b] * [P_a]$$

となる。ここで $*$ は次のように定義される。

$B\overline{\text{Diff}}_c(\mathbf{R})$ の n 次元サイクルは有限 n 次元複体 K 上の“葉層 \mathbf{R} 積構造” P である。すなわち、 $K \times \mathbf{R}$ 上の葉層であって、射影 $K \times \mathbf{R} \longrightarrow K$ のファイバーに横断的、かつ、あるコンパクト集合以外では水平な葉を持つものである。

2個のサイクルが、 K_1, K_2 上の葉層 \mathbf{R} 積 P_1, P_2 で与えられたとする。ファイバー方向に平行移動し、 K_1 については $K_1 \times (0, \infty)$ で葉は水平、 K_2 については $K_2 \times (-\infty, 0)$ で葉は水平とする。 $K_1 \times K_2 \times \mathbf{R}$

上の葉層を、 $K_1 \times K_2 \times (-\infty, 0]$ では $K_1 \times (-\infty, 0]$ への射影による引き戻し、 $K_1 \times K_2 \times [0, \infty)$ では $K_2 \times [0, \infty)$ への射影による引き戻しで定義する。

$$K_1 \times K_2 \times [0, \infty) \longrightarrow K_2 \times [0, \infty)$$

$$K_1 \times (-\infty, 0] \longleftarrow K_1 \times K_2 \times (-\infty, 0]$$

こうして、 P_1, P_2 に対し、 $K_1 \times K_2$ 上の葉層 \mathbf{R} 積が定義される。これが、ホモロジー群 $H_*(B\overline{\text{Diff}}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ に誘導する積を $*$ 積という。

$[[F_a], [F_b]] \longmapsto [P_a] * [P_b] - [P_b] * [P_a] = 0$ がいえれば $\pi_4(\Omega B\overline{\Gamma}_1) \longrightarrow H_4(\Omega B\overline{\Gamma}_1) \cong H_4(B\overline{\text{Diff}}_c(\mathbf{R}))$ の \ker の元の位数は有限で、 (a, b) の整数倍を GV としてもつ葉層の存在がいえたことになる。

$a/b \in \mathbf{Q}$ ならば、 $a = mc, b = nc$ となつて、

$$[P_a] * [P_b] - [P_b] * [P_a] = mn[P_c] * [P_c] - mn[P_c] * [P_c] = 0$$

従つて有理的葉層は存在し得るのである。

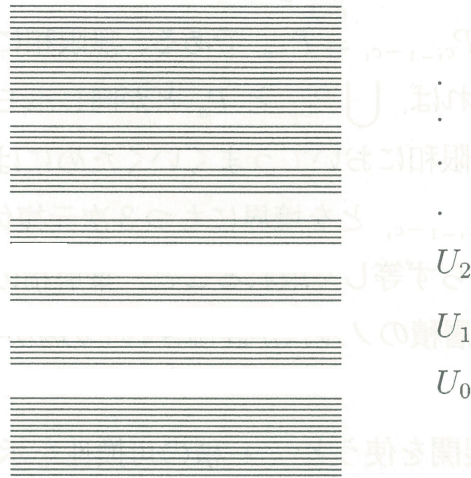
$a/b \notin \mathbf{Q}$ のとき、実際に $*$ 積の計算が必要とされることになる。これは葉層積の族 P_a で $GV(P_a) = a$ となるようなものの上で $*$ 積の可換性が示せれば葉層の存在が示される。(葉層の非存在をしめすためにはどのような葉層積 P_a, P_b をとつても $a/b \notin \mathbf{Q}$ のとき $*$ 積の非可換を示さなければならない。一般にはこれはずっと難しい。)

5. 葉層積の無限和と $*$ 積の可換性の十分条件。

有限複体上の葉層 \mathbf{R} 積 \mathcal{F} に対しては、その“台” $\text{Supp}(\mathcal{F}) \subset \mathbf{R}$ と、その“ノルム” $\|\mathcal{F}\| \in \mathbf{R}$ が定義される。

同じ有限複体 K 上の disjoint な台をもつ有限個の葉層 \mathbf{R} 積 P_i に対して、その和 $\bigcup P_i$ が定義される。可算個の葉層 \mathbf{R} 積 P_i に対して

も、 $\sum \|P_i\| < \infty$ かつ $\bigcup \text{Supp}(P_i)$ が相対コンパクトならば、和 $\bigcup P_i$ が定義される。



和 $\bigcup P_i$ の Godbillon-Vey 不変量は $\sum GV(P_i)$ である。次のような葉層 \mathbf{R} 積の族 P_a が我々の目的のためには有用である。同じ閉曲面上の葉層 \mathbf{R} 積の族 P_a で $GV(P_a) = a$ であり、 P_a, P_b の disjoint union と P_{a+b} が $H_2(\overline{BDiff}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ の同じホモロジー類に属する。このような葉層 \mathbf{R} 積を実際に構成することができ、それは $\|P_a\| \sim |a|^{1/2}$ を満たしている。

このような葉層 \mathbf{R} 積の族の中で、葉層積を 2 進展開することを考えてみる。 $0 < a < 1$ を $a = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ ($a_i = 0, 1$) と 2 進展開する。 U_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) を disjoint な开区間とし、 $\frac{1}{2^i}$ に対し、 U_i に台をもつ $P_{\frac{1}{2^i}}$ を考え、 $\bigcup P_{\frac{a_i}{2^i}}$ をつくることできる。

この $\bigcup P_{\frac{a_i}{2^i}}$ と元の P_a とが同じホモロジー類に属するかということとは次のような問題を解けばわかる。

$h(U_i) = U_{i+1}$ を満たす \mathbf{R} の微分同相があるとする。 U_i 上に P_{c_i} を考えた $\bigcup P_{c_i}$ と U_{i+1} 上に $h(P_{c_i})$ を考えた $\bigcup h(P_{c_i})$ とは葉層積としてはホモトピックで同じホモロジー類に属する。従って、 U_i 上に

$h(P_{c_{i-1}})$ と P_{c_i} があるが、この差は、 $P_{c_{i-1}-c_i}$ と同じホモロジー類に属する。実際 $c_i = \sum_{i+1}^{\infty} \frac{a_i}{2^i}$ とおくと $i \geq 1$ で $P_{c_{i-1}-c_i} = P_{\frac{a_i}{2^i}}$ であり、 $i = 0$ で $P_{c_{i-1}-c_i} = P_{-a}$ である。無限和において、この構成がうまくいっていれば、 $\bigcup P_{\frac{a_i}{2^i}}$ と P_a とが同じホモロジー類に属することがわかる。無限和においてうまくいくためには、 U_i 上の $h(P_{c_{i-1}})$ と P_{c_i} の差と $P_{c_{i-1}-c_i}$ とを境界にもつ3次元複体上の葉層積について、複体が i によらず等しく取れること、葉層積の台が U_i におさまっていること、葉層積のノルムが評価されその和が収束することがわかればよい。

この2進展開を使うと、* 積の可換性を示す戦略がつけられる。R の disjoint な开区間が $V_0 < W_0 < V_1 < W_1 < V_2 < W_2 < \dots$ となっているとする。* 積が可換かというのは次の問題である。

“ V_0 に台をもつ P_a と W_0 に台をもつ P_b とをとった時の $P_a \times 0 \cup 0 \times P_b$ と V_0 に台をもつ P_b と W_0 に台をもつ P_a とをとった時の $P_b \times 0 \cup 0 \times P_a$ が同じホモロジー類に属するか。” ここで 0 は自明な葉層積をあらわす。

$$\left| \begin{array}{c|c|c} 0 & W_0 & P_b \\ \hline P_a & V_0 & 0 \end{array} \right| \stackrel{?}{=} \left| \begin{array}{c|c|c} 0 & W_0 & P_a \\ \hline P_b & V_0 & 0 \end{array} \right|$$

底空間の第1成分と第2成分を入れ換える involution は(各成分の次元が偶数だから) ホモロジー類をかえないから、問題は次のように書き換えられる。

$$\left| \begin{array}{c|c|c} 0 & W_0 & P_b \\ \hline P_a & V_0 & 0 \end{array} \right| \stackrel{?}{=} \left| \begin{array}{c|c|c} P_a & W_0 & 0 \\ \hline 0 & V_0 & P_b \end{array} \right|$$

単位を取り換えて、 $b = 1$, $0 < a < 1$ としてもよい。また、 $P_b = P_1 = P_a + P_{1-a}$ として、* 積の双線型性を使うと次を得る。

$$\left| \begin{array}{c|c|c} 0 & W_0 & P_{1-a} \\ P_a & V_0 & 0 \end{array} \right| \stackrel{?}{=} \left| \begin{array}{c|c|c} P_a & W_0 & 0 \\ 0 & V_0 & P_{1-a} \end{array} \right|$$

さて、 $1 = \sum_1^{\infty} \frac{1}{2^i}$ であるから $1-a$ の 2 進展開は $1-a = \sum_1^{\infty} \frac{1-a_i}{2^i}$ となる。上の式の両辺を “2 進展開” していいかえると次のようになることが示せる。

$$\left| \begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & W_4 & \frac{1-a_4}{2^4} \\ \frac{a_4}{2^4} & V_4 & 0 \\ 0 & W_3 & \frac{1-a_3}{2^3} \\ \frac{a_3}{2^3} & V_3 & 0 \\ 0 & W_2 & \frac{1-a_2}{2^2} \\ \frac{a_2}{2^2} & V_2 & 0 \\ 0 & W_1 & \frac{1-a_1}{2^1} \\ \frac{a_1}{2^1} & V_1 & 0 \end{array} \right| \stackrel{?}{=} \left| \begin{array}{c|c|c} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{a_4}{2^4} & W_4 & 0 \\ 0 & V_4 & \frac{1-a_4}{2^4} \\ \frac{a_3}{2^3} & W_3 & 0 \\ 0 & V_3 & \frac{1-a_3}{2^3} \\ \frac{a_2}{2^2} & W_2 & 0 \\ 0 & V_2 & \frac{1-a_2}{2^2} \\ \frac{a_1}{2^1} & W_1 & 0 \\ 0 & V_1 & \frac{1-a_1}{2^1} \end{array} \right|$$

$P_{\frac{1}{2^i}}$ の代わりに、 $\frac{1}{2^i}$ を書いている。 $a_i = 0 \iff 1 - a_i = 1$ 、 $a_i = 1 \iff 1 - a_i = 0$ に注意すると $V_i \cup W_i$ のところでは、ただ一つ $P_{\frac{1}{2^i}}$ がありその位置が V_i と W_i になっており、残ったところは自明な葉層積となっている。従って、 $V_i \cup W_i$ を含む開区間に台をもつ 3次元複体上の葉層積で、その境界が V_i に台をもつ $P_{\frac{1}{2^i}}$ と W_i に台をもつ $P_{\frac{1}{2^i}}$ の差になっており、ノルムが然るべき評価式を満たすものがあればよい。

ここまですべてできると、* 積が P_a 、 P_b に対し可換であることがいえる。

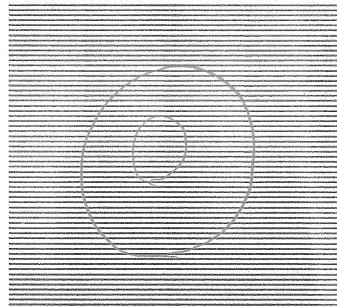
この戦略で成功するために最も重要な点は、 $P_a + P_b$ 、 P_{a+b} の差を境界とする 3次元複体上の葉層積のノルムの評価である。この部分

が滑らかな葉層に対してできていない。しかし、以下に述べる C^{L, ν_1} 級の葉層構造では P_a として扱いやすい区分線型葉層の族がとれ、上に述べた葉層積のノルムの評価がすべてうまくいく。

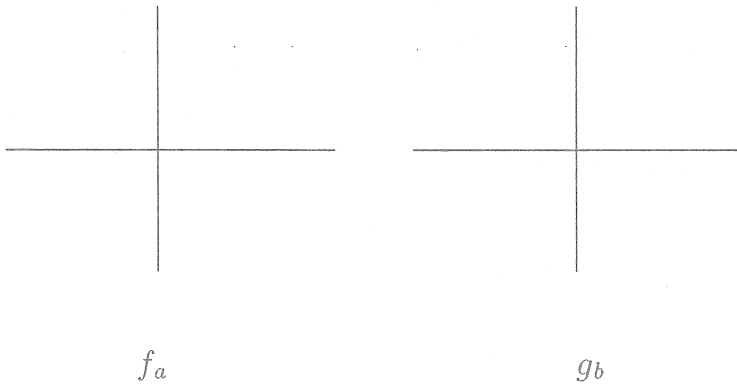
6. 区分線型同相群と横断的区分線型葉層。

微分同相群、余次元 1 葉層構造論では、滑らかなものだけでなく区分的に滑らかなものを考えるとよいことが最近わかってきた。特に、区分線型同相群と横断的区分線型葉層は Greenberg, Ghys, Sergiescu, 皆川, 橋口, ... により研究され、その分類空間、ダイナミクスなどがよくわかっている。その結果、付録に述べるように実は非有理的な横断的区分線型葉層は存在しないことがわかる。

横断的区分線型葉層としては次の例が最も基本的なものである。



$\mathbb{R}^3 - \{0\}$ の微分 1 形式 $\frac{dz}{r} (r^2 = x^2 + y^2 + z^2)$ は (もちろん水平な葉による葉層構造を与えるが) 相似変換 $e^a : (x, y, z) \mapsto e^a(x, y, z)$ で不変なので、この作用による商空間 $S^2 \times S^1$ の葉層構造を定義する。これは $D^2 \times S^1$ の境界が葉であり、内部の葉は平面と同相であるような葉層 \mathcal{R}_a (Reeb 成分) のダブルになっている。これ自身は横断的にアフィンであるが、二つの (Reeb 成分) を違う向きにはりつけた $S^3 = D^2 \times S^1 \cup S^1 \times D^2$ 上の Reeb 葉層 $\mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_b$ は横断的区分線型葉層となっている。コンパクト葉において横断的には折れ曲がっているのである。



Mather の定理のアナロジー $H_*(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong H_*(\Omega B\overline{F}_1^{PL}; \mathbf{Z})$ が成立し、 $\mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_b$ は次のような可換な区分線型同相 f_a, g_b により定まる T^2 上の葉層 \mathbf{R} 積に対応する。 f_a は $[-1, 0]$ に台を持つ \mathbf{R} の区分線型同相写像で $\log f'_a(-0) = a$ を満たすもの、 g_b は $[0, 1]$ に台を持つ \mathbf{R} の区分線型同相写像で $\log g'_b(+0) = b$ を満たすものである。横断的区分線型葉層にも Godbillon-Vey 不変量が定義され、上の葉層 $\mathcal{R}_a \cup \mathcal{R}_b$ あるいは葉層積 $\{f_a, g_b\}$ に対しては ab という値になる。 $\{f_{a_1}, g_{b_1}\}$ と $\{f_{a_2}, g_{b_2}\}$ は $a_1 \otimes_{\mathbf{Q}} b_1 = a_2 \otimes_{\mathbf{Q}} b_2$ の時、その時に限り横断的区分線型葉層積として同じホモロジー類に属する。しかし、すこし拡張した葉層積としては $a_1 b_1 = a_2 b_2$ の時、同じホモロジー類に属する。すなわち、 $G_c^{L, \nu_1}(\mathbf{R})$ を微分の対数が有界変動関数であるような台がコンパクトな \mathbf{R} のリプシッツ同相の群とすると、この群は $PL_c(\mathbf{R})$ を含み、2次元コホモロジー群の元として Godbillon-Vey 類をもっている。 $a_1 b_1 = a_2 b_2$ の時、 $\{f_{a_1}, g_{b_1}\}$ と $\{f_{a_2}, g_{b_2}\}$ は $G_c^{L, \nu_1}(\mathbf{R})$ 葉層積として同じホモロジー類に属する ([5])。

このことも葉層の“2進展開”を使って示される。 $P_a + P_b, P_{a+b}$ の差を境界とする3次元複体上の葉層積のノルムの評価という意味では、 $a = \frac{1}{2^n} \frac{a'}{2^n}, b = \frac{1}{2^n} \frac{b'}{2^n}$ ($a', b' \sim 1$) のとき、葉層積を常識的に

取れば、 $\{f_{\frac{1}{2^n}}, g_{\frac{a'}{2^n}}\} + \{f_{\frac{1}{2^n}}, g_{\frac{b'}{2^n}}\}$ と $\{f_{\frac{1}{2^n}}, g_{\frac{a'+b'}{2^n}}\}$ の差を境界とする
 3次元複体上の葉層積のノルムは $\frac{1}{2^n}$ で評価される。

* 積の可換性は区分線型葉層積の範疇ではできないが、無限和を許して、 $G_c^{L, \nu_1}(\mathbf{R})$ 葉層積として考えてやると、葉層積のノルムの評価ができて、可換であることがいえる。

従って、次の定理が得られる。

定理 ([6])、任意の $\rho \in \mathbf{R}$ に対し、 $S^3 \times S^3$ 上の余次元 1 横断的 C^{L, ν_1} 級葉層 \mathcal{F} で、 $GV(\mathcal{F}) = (a, b) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \cong H^3(S^3 \times S^3)$ 、 $a/b = \rho$ となるものが存在する。

付録 横断的区分線型葉層の有理性。

次の定理が成立する。

定理 ([4])、 $S^3 \times S^3$ 上の余次元 1 横断的区分線型葉層 \mathcal{F} に対し、 $GSGV(\mathcal{F}) = (a, b) \in \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \cong H^3(S^3 \times S^3)$ を考えると、 a/b は有理数または ∞ である。

定理の証明は Greenberg ([2]) による余次元 1 横断的区分線型葉層の分類空間の弱ホモトピー型の記述、森田茂之 ([3]) の discontinuous invariant を使って驚くほど簡単にできる。

森田茂之の discontinuous invariant の定義は以下のとおりである。向き付けられた $3k$ 次元閉多様体上の余次元 1 葉層 (M^{3k}, \mathcal{F}) に対し、 $GV(\mathcal{F}) \in H^3(M; \mathbf{R})$ が定義されている。 $\{x_1, \dots, x_n\}$ を $H^3(M; \mathbf{Q})$ の基底とすると、 $GV(\mathcal{F}) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$ ($a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}$) とかける。discontinuous invariant は

$$GV_k(\mathcal{F}) = \sum_{i_1 < \dots < i_k} (x_{i_1} \cup \dots \cup x_{i_k})[M] a_{i_1} \wedge_{\mathbf{Q}} \dots \wedge_{\mathbf{Q}} a_{i_k}$$

($\in \mathbf{R}^{\wedge k} = \overbrace{\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \dots \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}}^k$) と定義される。

森田茂之氏によると GV_k は特性類である。またこの区分線型葉層版も存在する。

Greenberg によると余次元 1 横断的区分線型葉層の分類空間の弱ホモトピー型は次のようなものである。

$$B\overline{\Gamma}_1^{PL} \simeq BR^\delta * BR^\delta \quad (\text{ジョイン})$$

ここで、 $BR^\delta = K(\mathbf{R}, 1)$ である。次の補題により、 $B\overline{\Gamma}_1^{PL}$ ではカップ積は自明であり、 GV_k ($k \geq 2$) は 0 となっている。

補題。2つの空間のジョインのコホモロジーにおいてはカップ積は自明である。

定理の場合、 $GV_2(\mathcal{F}) = a \wedge_{\mathbf{Q}} b = 0$ 、すなわち a/b は有理数または ∞ である。

では $*$ 積の可換性非可換性の問題はどこへ行ってしまったのだろうか。

前に述べた Mather の定理のアナロジー

$$H_*(\Omega B\overline{\Gamma}_1^{PL}; \mathbf{Z}) \cong H_*(B\overline{PL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$$

と、 $B\overline{\Gamma}_1^{PL}$ のループパスファイブレーションのホモロジースペクトル系列を使うと、 $H_*(B\overline{PL}_c(\mathbf{R}))$ が計算できる。

定理 ([4])。正整数 i, j に対し、

$$V^{i,j} = \left(\overbrace{\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \dots \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}}^i \right) \otimes_{\mathbf{Q}} \left(\overbrace{\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \dots \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}}^j \right)$$

とおくとき、

$$H_m(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong \sum V^{k_1^-, k_1^+} \otimes_{\mathbf{Q}} \dots \otimes_{\mathbf{Q}} V^{k_s^-, k_s^+}$$

ここで和は偶数個の正整数の組 $(k_1^-, k_1^+, \dots, k_s^-, k_s^+)$ で $k_1^- + k_1^+ + \dots + k_s^- + k_s^+ = m$ を満たすものについてとる。また、 $*$ 積はテンソル積と一致する。($\overline{BPL}_c(\mathbf{R})$ は $K(PL_c(\mathbf{R}), 1) = BPL_c(\mathbf{R})^\delta$ である。)

例えば、

$$H_1(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong 0 \quad (\text{Epstein})$$

$$H_2(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \quad (\text{Greenberg})$$

$$H_3(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong (\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \oplus \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} (\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R})$$

(Greenberg)

$$H_4(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z}) \cong (\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$$

$$\oplus (\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}) \otimes_{\mathbf{Q}} (\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R})$$

$$\oplus \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} (\mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \wedge_{\mathbf{Q}} \mathbf{R})$$

$$\oplus \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}.$$

前に述べた $\{f_a, g_b\}$ には $H_2(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ の元 $a \otimes_{\mathbf{Q}} b$ が対応し、 $*$ 積はテンソル積と一致するから、 $a_1 \otimes b_1, a_2 \otimes b_2 \in H_2(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ に対し、 $(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) = a_1 \otimes b_1 \otimes a_2 \otimes b_2$ であり、 $(a_1 \otimes b_1) * (a_2 \otimes b_2) = (a_2 \otimes b_2) * (a_1 \otimes b_1)$ となるのは $a_1/a_2, b_1/b_2$ が有理数または無限大となる時にかぎる。一方、 $a \otimes b \in H_2(\overline{BPL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ の Godbillon-Vey 不変量は ab であつたから、その比 $(a_1 b_1)/(a_2 b_2)$ が無理数ならば、 $*$ 積は可換でない。これが、 $S^3 \times S^3$ の横断的区分線型葉層はすべて有理的であることの $*$ 積による説明である。

$H_*(B\overline{PL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ の計算の仕方について述べておく。 $B\overline{\Gamma}_1^{PL}$ のループパスファイブレーションのホモロジースペクトル系列の E^2 term は $H_{p+1}(B\overline{\Gamma}_1^{PL}; \mathbf{Z}) \otimes H_q(\Omega B\overline{\Gamma}_1^{PL}; \mathbf{Z})$ である。 E^2 term の \otimes はループの積により定義される $H_*(\Omega B\overline{\Gamma}_1^{PL}; \mathbf{Z})$ の Pontrjagin 積にうつり、これは $H_*(B\overline{PL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ の $*$ 積に対応することに注意する。上の E^2 term が E^p term まで生き残り、 ∂_{p+1} により $H_{p+q}(\Omega B\overline{\Gamma}_1^{PL}; \mathbf{Z})$ に同型にうつされることを示すのだが、それには、 E^2 term の基底に対応する $B\overline{PL}_c(\mathbf{R})$ のサイクルが構成されていることと、このサイクルが $H_*(B\overline{PL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ のなかで 1 次独立であることが十分沢山のコサイクルを構成して示されることによる。

サイクルの構成の鍵となるのは次の補題である。(下の準同型にはセクションが存在しない。)

補題。 準同型

$$j_+ : PL_c([0, \infty)) \longrightarrow \mathbf{R}$$

$$j_+(f) \longmapsto \log f'(0)$$

は群のホモロジーで全射を誘導する。

これを使って、 $T^i * T^j$ の“一般化された Reeb 葉層”に対応する $V^{i,j} \in H_*(B\overline{PL}_c(\mathbf{R}); \mathbf{Z})$ の元を構成することができる。 $V^{k_1^-, k_1^+} \otimes_{\mathbf{Q}} \dots \otimes_{\mathbf{Q}} V^{k_s^-, k_s^+}$ の元は $*$ 積で構成する。

ここで“一般化された Reeb 葉層”は、次のように構成される。

$[0, \infty) \times [0, \infty) - (0, 0)$ 上の微分 1 形式 $\frac{dy}{r} (r^2 = x^2 + y^2)$ は原点を中心とする相似変換で不変である。($\log r, \theta$) 座標において $\mathbf{R} \times [0, \pi/2]$ 上の \mathbf{R} 方向の平行移動で不変な葉層を定義する。 $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R} \times [0, \pi/2])$ 上に $\mathbf{R} \times [0, \pi/2]$ 上への射影による引き戻しとして葉層を定義すると、

これは $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の平行移動で不変になる。 \mathbf{R} への射影のランクが $n+1$ であるような $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ の格子 L をとって $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R} \times [0, \pi/2])/L \cong T^{n+1} \times [0, \pi/2]$ の葉層が定義される。トーラス T^{n+1} とほかのトーラス T^{m+1} の錘 (cone) $C(T^{m+1})$ との直積 $C(T^{m+1}) \times T^{n+1}$ から錘の母線を $[0, \pi/2]$ とみなして、 $T^{n+1} \times [0, \pi/2]$ への射影をつくると、 $C(T^{m+1}) \times T^{n+1}$ 上に $T^{n+1} \times [0, \pi/2]$ 上への射影による引き戻しとして葉層が定義されるが、これを“一般化された Reeb 成分”という。 T^{m+1} と T^{n+1} のジョイン $T^{m+1} * T^{n+1}$ 上には二つの一般化された Reeb 成分をはりつけて得られる“一般化された Reeb 葉層”が存在する。

スマッシュ積などについてよく知られている公式 (教えて下さった皆様に感謝致します)

$$X * Y = S^1 \wedge X \wedge Y,$$

$$S^1 \wedge (X \times Y) = (S^1 \wedge X \wedge Y) \vee (S^1 \wedge X) \vee (S^1 \wedge Y)$$

($S^1 \wedge$ はサスペンションのことです) により、 $T^{m+1} * T^{n+1}$ は球面のブーケとなる。“一般化された Reeb 葉層”の帰納的極限が区分線型葉層の分類空間 $B\bar{\Gamma}_1^{PL}$ と同じ弱ホモトピー型をもつので、 $B\bar{\Gamma}_1^{PL}$ のカップ積が自明であるとともに Whitehead 積は非自明になっているのである。

一方、コサイクルを構成には tensor determinant というものを定義して使う。それは、 $(n \times n)$ 実行列 $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ に対し、

$$\det^{\otimes \mathbf{Q}}(a_{ij}) = \sum_{\sigma} \text{sign}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \otimes_{\mathbf{Q}} \dots \otimes_{\mathbf{Q}} a_{\sigma(n)n}$$

により定義され、値は $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \dots \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ にもつ。例えば、 $\det^{\otimes \mathbf{Q}} \begin{pmatrix} a & b \\ a & b \end{pmatrix} = 0$ であるが、 $\det^{\otimes \mathbf{Q}} \begin{pmatrix} a & a \\ b & b \end{pmatrix} = a \otimes_{\mathbf{Q}} b - b \otimes_{\mathbf{Q}} a = a \wedge_{\mathbf{Q}} b$ となる。

これを使うと \mathbf{R} 上の台がコンパクトな階段関数のなす線型空間 S 上の $V = V^{k_1^-, k_1^+} \otimes_{\mathbf{Q}} \dots \otimes_{\mathbf{Q}} V^{k_s^-, k_s^+}$ に値を持つ多重線型形式が

$$\begin{aligned} A &= A_{(k_1^-, k_1^+, \dots, k_s^-, k_s^+)}^m(\varphi_1, \dots, \varphi_m) \\ &= \sum_{x_1 < \dots < x_s} \frac{1}{m!} \det^{\otimes_{\mathbf{Q}}} \\ &\quad \underbrace{(\varphi(x_1 - 0) \dots \varphi(x_1 - 0))}_{k_1^-} \underbrace{(\Delta\varphi(x_1) \dots \Delta\varphi(x_1))}_{k_1^+} \\ &\quad \dots \underbrace{(\varphi(x_s - 0) \dots \varphi(x_s - 0))}_{k_s^-} \underbrace{(\Delta\varphi(x_s) \dots \Delta\varphi(x_s))}_{k_s^+} \end{aligned}$$

により定義される。ここで、 φ は縦ベクトル ${}^t(\varphi_1, \dots, \varphi_m)$ であり、 $\Delta\varphi(x) = \varphi(x+0) - \varphi(x-0)$ である。 S の定義から、和は実は有限和である。 A が、parameter change で不変であることから、

$$C : \overbrace{PL_c(\mathbf{R}) \times \dots \times PL_c(\mathbf{R})}^m \longrightarrow V$$

を

$$C(g_1, g_2, \dots, g_m) = A(\log g_1' \circ g_2 \circ \dots \circ g_m, \log g_2' \circ g_3 \circ \dots \circ g_m, \dots, \log g_m')$$

により、定義するとこれは $PL_c(\mathbf{R})$ の m コサイクルとなる。これらすべてが非自明で独立であることを上でもって構成したサイクルにおける値をみることで示すことができる。

Godbillon-Vey 不変量が何であったかという、

$$C_{(1,1)}^2(g_1, g_2) = \sum_{x \in \mathbf{R}} \frac{1}{2} \det^{\otimes_{\mathbf{Q}}} \begin{pmatrix} \log g_1' \circ g_2(x-0) & \Delta \log g_1' \circ g_2(x) \\ \log g_2'(x-0) & \Delta \log g_2'(x) \end{pmatrix}$$

$\in \mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R}$ とおいて、2 コサイクル $C_{(1,1)}^2$ に evaluation map $\mathbf{R} \otimes_{\mathbf{Q}} \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ を続けたものである。

また、* 積の非可換性を示す 4 コサイクルは $C_{(1,1,1,1)}^4$ と書かれる
 ものであり、それに対応する $A_{(1,1,1,1)}^4$ は

$$\begin{aligned} & A_{(1,1,1,1)}^4(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) \\ &= \sum_{x < y} \frac{1}{4!} \det^{\otimes \mathbb{Q}}(\varphi(x-0) \Delta\varphi(x) \varphi(y-0) \Delta\varphi(y)) \end{aligned}$$

($\in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$) により定義されるのである。

文献

1. I. M. Gel'fand, B. L. Feigin and D.B. Fuks, *Cohomologies of Lie algebra of formal vector fields with coefficients in its adjoint space and variations of characteristic classes of foliations*, *Funct. Anal.* **18** (1974), 99–112.
2. P. Greenberg, *Classifying spaces for foliations with isolated singularities*, *Transactions Amer. Math. Soc.* **304** (1987), 417–429.
3. S. Morita, *Discontinuous invariants of foliations*, *Advanced Studies in Pure Math.* **5, Foliations**, (1985), 169–193.
4. T. Tsuboi, *Rationality of piecewise linear foliations and homology of the group of piecewise linear homeomorphisms*, *Enseign. Math.* **38** (1992), 329–344.
5. 坪井 俊, *Godbillon-Vey 不変量の特徴付け*, 数学.
6. T. Tsuboi, *Irrational foliations of $S^3 \times S^3$* , preprint.

TOPOLOGY OF SPACES OF RATIONAL FUNCTIONS AND CONFIGURATION SPACES

KOHHEI YAMAGUCHI

Department of Mathematics
The University of Electro-Communications

§1. INTRODUCTION.

Recently the space of holomorphic maps between complex manifolds played an important role in differential geometry, topology and mathematical physics. In this note we should like to consider two objects: One is the topology of the space $\text{Hol}(S^2, X)$ of holomorphic maps from the Riemann sphere $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ to the (quasi-)projective variety $X \subseteq \mathbb{C}P^n$, and the other one is the topology of the related configuration spaces of particles. In particular, we shall generalize the results of Segal concerning the spaces of holomorphic maps ([S2]) and the configuration space $C^\pm(X)$ of positive and negative particles ([Mc]). We introduce the configuration space $C^k(X)$ of "particles of collisions of type A_k " for $k \geq 2$ and using it, we can give the finite dimensional models for the mapping space $\Omega^3 S^3$. We expect that it would be useful to study the generalized Atiyah-Jones conjecture (theorem) ([AJ]). These results are based on the recent joint works with M.Guest, A.Kozłowski and M.Murayama ([GKMY], [GKY], [GKY2]).

§2. THE SPACE OF HOLOMORPHIC MAPS

If $X \subseteq \mathbb{C}P^n$ is a complex projective variety and d is a non-negative integer, we denote by $\text{Hol}_d^*(S^2, X)$ ($\text{Hol}_d(S^2, X)$) the space of all based (non-based) holomorphic maps from S^2 to X of degree d , where S^2 is the Riemann sphere, $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Similarly, let $\text{Map}(S^2, X)_d$ ($\Omega_d^2 X$) denote the space consisting of all (based) continuous maps from S^2 to X of degree d . Let $C_d^\infty(S^2, S^2)$ denote the space of all smooth maps from S^2 to itself of degree d . Then it is well-known ([EW]) that when S^2 is given the usual Riemann metric, the energy function

$$E : C_d^\infty(S^2, S^2) \rightarrow \mathbb{R}$$

which is given by

$$E(f) = \frac{1}{2} \int_{S^2} \|Df(x)\|^2 d\text{vol}$$

has no critical points apart from the space $\text{Hol}_d(S^2, S^2)$ of holomorphic maps on which it attains its absolute minimum. So the analogy of the finite dimensional Morse theory might lead one to hope that $\text{Hol}_d(S^2, S^2)$ is a deformation retract of $C_d^\infty(S^2, S^2)$. Unfortunately this is false; In fact, $\text{Hol}_d(S^2, S^2)$ has the homotopy type of a finite dimensional CW complex. On the other hand, since $C_d^\infty(S^2, S^2) \simeq \text{Map}(S^2, S^2)_d$, it has the homotopy type of an infinite dimensional CW complex. However, this is approximately true if $d \rightarrow \infty$, and Segal showed the following result:

Theorem 1 ([S2]). *The inclusion maps*

$$j_d : \text{Hol}_d(S^2, S^2) \rightarrow \text{Map}(S^2, S^2)_d \text{ and } i_d : \text{Hol}_d^*(S^2, S^2) \rightarrow \Omega_d^2 S^2$$

are homotopy equivalences up to dimension d . \square

Here a map $f : X \rightarrow Y$ is called the *homotopy (homology) equivalence up to dimension d* if $f_* : \pi_j(X) \rightarrow \pi_j(Y)$ ($f_* : H_j(X) \rightarrow H_j(Y)$) is an isomorphism when $j < d$ and a surjection when $j = d$.

Similar method also proved more general result:

Theorem 2 ([S2]). *The inclusion maps*

$$j_d : \text{Hol}_d(S^2, \mathbb{C}P^n) \rightarrow \text{Map}(S^2, \mathbb{C}P^n)_d \text{ and } i_d : \text{Hol}_d^*(S^2, \mathbb{C}P^n) \rightarrow \Omega_d^2 \mathbb{C}P^n$$

are homotopy equivalences up to dimension $(2n - 1)d$. \square

However, because $\pi_1(\text{Hol}_d^*(S^2, \mathbb{C}P^n)) = \mathbb{Z}$ if $n = 1$ and 0 if $n \geq 2$, although Theorem 1 is the special case of Theorem 2 its proof is very different according to $n = 1$ or not. Indeed, the proof of the case $n = 1$ is more complicated than the case $n \geq 2$.

Let $X_n \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ be the quasi-projective variety defined by

$$(3) \quad X_n = \mathbb{C}P^{n-1} \setminus \cup_{1 \leq i < j \leq n-1} H_{i,j},$$

where

$$(4) \quad H_{i,j} = \{[x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{C}P^{n-1} : x_i = x_j = 0\}$$

It is easy to see that X_n is simply-connected and $\pi_2(X_n) = \mathbb{Z}$. In particular, if $n = 2$, $X_2 = S^2$.

More generally, let I be any collections of subsets of $\{1, 2, \dots, n-1, n\}$ with $|\Lambda| \geq 2$ for all $\Lambda \in I$. Similarly, let $X_I \subset \mathbb{C}P^{n-1}$ be the quasi-projective variety defined by

$$(5) \quad X_I = \mathbb{C}P^{n-1} \setminus \cup_{\Lambda \in I} H_\Lambda,$$

where

$$(6) \quad H_\Lambda = \{[x_1 : \dots : x_n] \in \mathbb{C}P^{n-1} : x_i = 0 \text{ for all } i \in \Lambda\}.$$

Then we obtain the another generalized version of Segal's results theorem 1 and 2:

Theorem 7 ([GKY]).

(a) *The inclusion maps*

$$j_d : \text{Hol}_d(S^2, X_n) \rightarrow \text{Map}(S^2, X_n)_d \text{ and } i_d : \text{Hol}_d^*(S^2, X_n) \rightarrow \Omega_d^2 X_n$$

are homotopy equivalences up to dimension d .

(b) *The inclusion maps*

$$j_d : \text{Hol}_d(S^2, X_I) \rightarrow \text{Map}(S^2, X_I)_d \text{ and } i_d : \text{Hol}_d^*(S^2, X_I) \rightarrow \Omega_d^2 X_I$$

are homotopy equivalences up to dimension d . \square

Remark. (a) It is not difficult to see that there is a fibration $T^{n-1} \rightarrow X_n \rightarrow \vee^n \mathbb{C}P^\infty$ and $\pi_j(\Omega_d^2 X_n) = \pi_{j+2}(\vee^n \mathbb{C}P^\infty)$.

(b) More generally, recently using the result of theorem 7, M.Guest ([G2]) investigated the topology of space $\text{Hol}_D(S^2, X)$ for a compact complex projective toric variety X and he obtained the similar results.

(c) The above results can be easily understood from the point of view of the Morse theoretical principle. But their proofs are heavily depend on the topological technique of Gromov-Segal. \square

Because $\pi_1(\text{Hol}_d^*(S^2, X_n))$ was first computed by Epshtein ([E]), we shall call X_n as the n -th *Epshtein space*. Similarly we call X_I as the generalized *Epshtein space*. At the same time, he also computed the fundamental group of the space $\text{Hol}_d(S^2, S^2)$:

Proposition 8 ([E]). $\pi_1(\text{Hol}_d(S^2, S^2)) = \mathbb{Z}/2d$. \square

As a generalization, we can also determine the some of higher homotopy groups of $\text{Hol}_d(S^2, S^2)$ as follows:

Proposition 9 ([GKMY]).

(1) For $k \geq 2$,

$$\pi_k(\text{Hol}_d(S^2, S^2)) = \begin{cases} \pi_k(S^3) & d = 1 \\ \pi_k(S^3) \oplus \pi_k(S^2) & d = 2 \\ \mathbb{Z}/2 & d \geq 3, k = 2 \end{cases}$$

(2) If $k \geq 3$ and $d \geq 3$, then $\pi_k(\text{Hol}_d(S^2, S^2)) = \pi_k(\text{Hol}_d^*(S^2, S^2)) \oplus \pi_k(S^3)$.

(3) In particular, if $d > k \geq 3$, then $\pi_k(\text{Hol}_d(S^2, S^2)) = \pi_{k+2}(S^2) \oplus \pi_k(S^3)$. \square

More precisely, we can investigate the homotopy type for the case $d = 2$:

Theorem 10 ([GKMY]). *The space $\text{Hol}_2(S^2, S^2)$ may be identified with a homogeneous space of the form $(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}))/H$, where H is isomorphic to $\mathbb{C}^* \rtimes \mathbb{Z}/4$. In this semi-direct product, the action of $\mathbb{Z}/4 = \langle \sigma : \sigma^4 = 1 \rangle$ is given by $\sigma \cdot \alpha = \alpha^{-1}$ for $\alpha \in \mathbb{C}^*$. In particular, $\text{Hol}_2(S^2, S^2)$ is homotopy equivalent to $(S^3 \times S^3)/(S^1 \rtimes \mathbb{Z}/4)$. \square*

Theorem 11 ([GKMY]).

- (1) *The universal cover of $\text{Hol}_2^*(S^2, S^2)$ is homotopy equivalent to S^2 .*
- (2) *The universal cover of $\text{Hol}_2(S^2, S^2)$ may be identified with a homogeneous space of the form $(SL_2(\mathbb{C}) \times SL_2(\mathbb{C}))/D$, where D is isomorphic to \mathbb{C}^* . In particular, it is homotopy equivalent to $S^3 \times S^2$. \square*

§3. CONFIGURATION SPACES.

We shall consider another finite dimensional model for mapping spaces. For this purpose, recall the following:

Definition. (a) For a connected space X and a positive integer d , let $F(X, d)$ be the *ordered* configuration space of d particles,

$$(12) \quad F(X, d) = \{(x_1, \dots, x_d) \in X^d : x_i \neq x_j \text{ if } i \neq j\}.$$

The symmetric group S_d of d letters acts on $F(X, d)$ freely by the usual manner and we define the *unordered* configuration space $C_d(X)$ of d particles by the the quotient space

$$(13) \quad C_d(X) = F(X, d)/S_d.$$

In particular, we take $C_0(X) = \{\emptyset\}$.

Let $C(X)$ be the disjoint union $C(X) = \coprod_{d \geq 0} C_d(X)$. Then we may identify $C(X)$ ($C_d(X)$) with the space consisting of all finite subset (of cardinality d) of X .

(b) Define the configuration space $C^\pm(X)$ of *positive and negative* particles by

$$(14) \quad C^\pm(X) = (C(X) \times C(X))/\approx$$

where the equivalence relation \approx is defined by the following:

$$(s_1, s_2) \approx (t_1, t_2) \Leftrightarrow s_i \setminus s_j = t_i \setminus t_j \text{ for } (s_1, s_2), (t_1, t_2) \in C(X) \times C(X), \{i, j\} = \{1, 2\}.$$

(c) More generally, for an integer $k \geq 2$, we define the configuration space $C^k(X)$ of particles with collisions of type A_k by the similar manner:

$$(15) \quad C^k(X) = (C(X))^k / \approx$$

where the equivalence relation \approx is induced from

$$(s_1, \dots, s_i, s_{i+1}, \dots, s_k) \approx (s_1, \dots, s_i \cup t, s_{i+1} \cup t, \dots, s_k) \text{ for any } t \in C(X).$$

The space $C^k(X)$ may be considered as the space of configurations of distinct points in X with the following property: there are k "types" of points, and a point of type i may collide with and annihilate a point of type $i + 1$.

In particular, if $k = 2$, then $C^k(X) = C^\pm(X)$. Similarly we can define $C^k(X, A)$ for a closed subspace $A \subset X$. \square

Recall the following famous result due to Segal:

Theorem 16 ([S1]). *For positive integers $d \geq 1$, there is a map*

$$E_d : C_d(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega_d^2 S^2$$

which is a homology equivalence up to dimension $[d/2]$. \square

Remark. (a) E_d is never a homotopy equivalence up to any positive dimension; In fact, the fundamental group $\pi_1(C_d(\mathbb{C})) = \text{Br}_d$, and on the contrary $\pi_1(\Omega_d^2 S^2) = \mathbb{Z}$, where Br_d denotes the Braid group of d strings.

(b) Consider two maps

$$\text{Hol}_d^*(S^2, S^2) \xrightarrow{i_d} \Omega_d^2 S^2 \simeq \Omega^2 S^3 \simeq \Omega_{2d}^2 S^2 \xleftarrow{E_{2d}} C_{2d}(\mathbb{C}) = K(\text{Br}_{2d}, 1).$$

It follows from theorems 1 and 16 that $\text{Hol}_d^*(S^2, S^2)$ is homotopy equivalent to $\Omega^2 S^3$ up to dimension d and $K(\text{Br}_{2d}, 1)$ is homology equivalent to it up to dimension d . So we expect that both spaces $\text{Hol}_d^*(S^2, S^2)$ and $K(\text{Br}_{2d}, 1)$ might be of similar homotopy types. This is "stably" true. In fact, F.Cohen, R.Cohen, B.Mann and R.Milgram showed that both spaces $\text{Hol}_d^*(S^2, S^2)$ and $K(\text{Br}_{2d}, 1)$ are stably homotopy equivalent ([C-M], [C-M2]). \square

From now on, we may identify $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ for convenience. Then it is well-known that

Lemma 17. $C_d(\mathbb{C}) \simeq K(\text{Br}_d, 1)$. \square

If we may consider $S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ and $\Omega_d^2 S^2 = \text{Map}_{\infty \rightarrow 1}(S^2, S^2)_d$, then the map $E_d : C_d(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega_d^2 S^2$ is given by the following explicit form:

For $c = \{z_1, \dots, z_d\} \in C_d(\mathbb{C})$ and $z \in S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$(18) \quad E_d(c)(z) = \begin{cases} 1 + \sum_{j=1}^d \frac{1}{z-z_j} & \text{if } z \in \mathbb{C} \\ 1 & \text{if } z = \infty \end{cases}$$

We can explain the map E_d from the physical point of view:

If we think of the finite subset $c \in C_d(\mathbb{C})$ of \mathbb{C} as a set of electrically charged d -particles which each has charge $+1$, then this induces the associated electric field $E_d(c) : \mathbb{C} - c \rightarrow \mathbb{C}$ and this can be continuously extended the map $E_d(c) : S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \rightarrow S^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Then McDuff expected that if the negative particles were added then there would be a homotopy equivalence $\tilde{E}_d : C^\pm(\mathbb{C})_d \rightarrow \Omega_d^2 S^2$ up to some dimension $n(d)$ such that $\lim_{d \rightarrow \infty} n(d) = \infty$. But this never happen and on the contrary, she obtained the following interesting result:

Theorem 19 ([Mc]). *There is a homotopy equivalence*

$$S : C^\pm(\mathbb{C}) \xrightarrow{\cong} \Omega^2((S^2 \times S^2)/\Delta)$$

where Δ denotes the diagonal subspace $\Delta = \{(x,x) : x \in S^2\}$. \square

We shall see soon that the space $C^\pm(\mathbb{C})$ is related to the space $\Omega^3 S^3$ (not $\Omega^2 S^2!$) and this may be easily understood if we add the several kinds of particles.

§4. CONFIGURATION SPACE MODEL FOR $\Omega^3 S^3$

Theorem 20 ([GKY2]). *For integers $k, n \geq 2$, there is a homotopy equivalence*

$$S : C^k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\cong} \Omega^n C^k(S^n, \infty) \quad \square$$

Using the the Mitchell-Segal filtration of the algebraic loop group $\Omega_{\text{alg}} SU_2$ ([Mi], [P], [PS], [S3]), we can prove:

Theorem 21 ([GKY2]). *If $k \geq 2$, there is a homotopy equivalence*

$$C^k(S^2, \infty) \simeq F_k,$$

where F_k denotes the k -th filtration of Mitchell-Segal filtration of $\Omega_{\text{alg}} SU_2$ and it is homotopy equivalent to the $(2k+1)$ -skelton of ΩS^3 . \square

Since the inclusion map $F_k \rightarrow \Omega S^3$ is a homotopy equivalence up to dimension $2k+1$, we also obtain:

Corollary 22 ([GKY2]). *If $k \geq 2$, then there is a map*

$$E_k : C^k(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^3 S^3$$

which is a homotopy equivalence up to dimension $2k - 1$. \square

The "model space" $C^k(\mathbb{C})$ has the homotopy type of an infinite dimensional CW complex. It is possible to obtain a model which is a *finite* CW complex. Let $C_d^k(X)$ be the subspace of $C^k(X)$ defined by

$$(23) \quad C_d^k(X) = \{[s_1, \dots, s_k] \in C^k(X) : \text{card}(s_j) \leq d \text{ for all } j\}.$$

It is easy to see that $C_d^k(\mathbb{C})$ has the homotopy type of a finite CW complex. Then we have the stabilization theorem:

Theorem 24 ([GKY2]). *The inclusion map*

$$j_d : C_d^k(\mathbb{C}) \rightarrow C_{d+1}^k(\mathbb{C})$$

is a homotopy equivalence up to dimension $[d/2]$. \square

As an application we also have:

Corollary 25 ([GKY2]). *There is a map*

$$E_d^k : C_d^k(\mathbb{C}) \rightarrow \Omega^3 S^3$$

which is a homotopy equivalence up to dimension $\min(2k - 1, [d/2])$. \square

REFERENCES

- [AJ] M. Atiyah and J.D.S. Jones, *Topological aspect of Yang-Mills theory*, Commun. Math. Phys. **61**, 97-118.
- [C-M] F. Cohen, R.Cohen, B. Mann and R.Milgram, *The topology of rational functions and divisors of surfaces*, Acta Math. **166** (1991), 163-221.
- [C-M2] F. Cohen, R.Cohen, B. Mann and R.Milgram, *The homotopy type of rational functions*, Math. Z. **213** (1993), 37-47.
- [CS] R.L. Cohen and D.H. Shimamoto, *Rational functions, labelled configurations and Hilbert schemes*, J. Lond. Math. Soc. **43** (1991), 509-528.
- [E] S.Epshtein, *Fundamental groups of spaces of coprime polynomials*, Functional Annal. and Appli. **7** (1973), 82-83.

- [EW] J. Eells and J. Wood, *Restrictions on harmonic maps of surfaces*, *Topology* **15** (1976), 263–266.
- [G] M. Guest, *Topology of spaces of absolute minima of the energy functional*, *Amer. J. Math.* **106** (1984), 21–42.
- [G2] M. Guest, *The topology of the space of rational curves on a toric variety*, in preparation.
- [GKMY] M. Guest, A. Kozłowski, M. Murayama and K. Yamaguchi, *The homotopy type of the space of rational functions*, preprint (1992).
- [GKY] M. Guest, A. Kozłowski and K. Yamaguchi, *The topology of spaces of coprime polynomials*, preprint (1992).
- [GKY2] M. Guest, A. Kozłowski and K. Yamaguchi, *A new configuration space model for $\Omega^3 S^3$* , in preparation.
- [May] J. P. May, *The geometry of iterated loop spaces*, *Lecture Notes in Math.* **271** (1972).
- [Mc] D. McDuff, *Configuration spaces of positive and negative particles*, *Topology* **14** (1975), 91–107.
- [Mi] S. Mitchell, *A filtration of the loops on $SU(N)$ by Schubert varieties*, *Math. Z.* **193** (1986), 347–362.
- [P] A. Pressley, *Decompositions of the space of loops on a Lie group*, *Topology* **19** (1980), 65–79.
- [PS] A. Pressley and G. Segal, *Loop groups*, *Oxford Math. Monographs*, 1986.
- [S1] G. Segal, *Configuration spaces and iterated loop spaces*, *Inventiones math.* **21** (1973), 213–221.
- [S2] G. Segal, *The topology of spaces of rational functions*, *Acta Math.* **143** (1979), 39–72.
- [S3] G. Segal, *Loop groups and harmonic maps*, *Advanced in homotopy theory*, vol. **139**, London Math. Soc. Lecture Notes, 1989, pp. 153–164.

結び目の最小種数ザイフェルト膜に付随する
finite depth foliation と Heegaard 分解

大阪大 理 合田 洋 (学振)

Gabai ([6], [14]) によって、結び目補空間に taut foliation が構成された後、そこにおける idea を応用して、結び目 及び 3次元トポロジーに関する多くの結果が得られた。本講演では、特に、結び目の最小種数ザイフェルト膜に関するものを報告する。

1 ザイフェルト膜

knot, 及び link は全て oriented とする。

定義 1.1. L を S^3 内の link とする。このとき、 R が L の ザイフェルト膜とは R が S^3 内の compact かつ closed component をもたない surface で orientation まで込めて $\partial R = L$ なること。

定理 1.2. 任意の link L に対して、 L の ザイフェルト膜 が存在する。

定義 1.3. link L の ザイフェルト膜 R が

$$\chi(R) = \max\{\chi(F) \mid F \text{ は } L \text{ の ザイフェルト膜}\}$$

となっているとき、 R は L の最小種数ザイフェルト膜という。

定義 1.4. ザイフェルト膜 R が 2つのザイフェルト膜 R_1, R_2 の $(2n)$ 村杉和であるとは、次のときいう。

- (1) $R = R_1 \cup_D R_2$, 但し $R_1 \cap R_2$ は $2n$ 角形 D で ∂D の辺を $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_n, \beta_n$ とすると α_i, β_i は $\partial R_1(\partial R_2)$ に含まれ $R_2(R_1)$ 内の properly embedded arc になっている。
- (2) S^3 内の 3-ball B_1, B_2 で次をみたすものがある。
 - (i) $B_1 \cup B_2 = S^3, B_1 \cap B_2 = \partial B_1 = \partial B_2 = S^2$
 - (ii) $B_i \supset R_i (i = 1, 2)$

$$(iii) \partial B_1 \cap R_1 = \partial B_2 \cap R_2 = D$$

[Figure 1.1]

2 Sutured manifold

以下、 M を境界をもつ compact oriented 3-manifold とする

定義 2.1. (M, γ) が *sutured manifold* とは 次のときいう。

- (1) γ は ∂M 内の互いに交わらないいくつかの annulus $A(\gamma)$ と torus $T(\gamma)$ の和
- (2) $A(\gamma)$ の各 component には orientation の与えられたその core となる simple loop が指定されている。(この simple loop を suture と呼び $s(\gamma)$ とかく。)
- (3) $R(\gamma) = \text{cl}(\partial M - \gamma)$ の各 component には orientation が入っている。特に、その normal vector が外向き (内向き) のもの全体の和を $R_+(\gamma)(R_-(\gamma))$ とかく。また、 $R_+(\gamma)(R_-(\gamma))$ の orientation は $s(\gamma)$ のそれと同調していなければならない。

例 2.2. S を $\partial S \neq \emptyset$ なる compact surface とする。このとき、 $M = S \times [0, 1], \gamma = \partial S \times [0, 1], R_+(\gamma) = S \times \{1\}, R_-(\gamma) = S \times \{0\}$ とすれば (M, γ) は sutured manifold になる。特に、この様な sutured manifold を *product sutured manifold* という。

例 2.3. R を S^3 内の link L の サイフェルト膜 とする。 $E(L) = S^3 - \overset{\circ}{N}(L), R_E = R \cap E(L)$ に対し、 $(P, \delta) = (N(R_E, E(L)), N(\partial R_E, \partial E(L)))$ は product sutured manifold になる。 $M = \text{cl}(E(L) - P), \gamma = \text{cl}(\partial E(L) - \delta)$ とし、 (M, γ) に $R_+(\gamma) = R_-(\delta), R_-(\gamma) = R_+(\delta)$ なる構造をいれた sutured manifold のことを特に *complementary sutured manifold for R* と呼ぶ。

定義 2.4. M を compact oriented 3-manifold, N を codimension-0 submanifold of M とする。このとき、 (M, N) における properly embedded connected surface S に対し

$$\chi_-(S) = \max\{0, -\chi(S)\}$$

と定める。また、一般には各 S_i が S の connected component のとき

$$\chi_-(S) = \sum \chi_-(S_i)$$

と定める。(但し、 $\chi(\cdot)$ はオイラー数)

定義 2.5. 上の notation のもと、 $H_2(M, N)$ の (Thurston) norm x を次の様に定める。

$$x(a) = \min\{\chi_-(S) \mid S \text{ は } a \in H_2(M, N) \text{ を実現する } (M, N) \text{ における properly embedded surface}\}$$

特に、 $\chi_-(S) = x([S])$ がなりたつとき S は (Thurston) norm minimizing という。

定義 2.6. sutured manifold (M, γ) が taut であるとは次の条件をみたすときいう。

- (1) M は irreducible
- (2) $R_+(\gamma), R_-(\gamma)$ は $H_2(M, \gamma)$ の元として (Thurston) norm minimizing
- (3) $R_+(\gamma), R_-(\gamma)$ は M で incompressible

定義 2.7. S を sutured manifold (M, γ) に proper に embedded された oriented surface とする。このとき、

$$(M, \gamma) \xrightarrow{S} (M', \gamma')$$

が sutured manifold decomposition であるとは次をみたすときいう。

$$M' = M - \overset{\circ}{N}(S)$$

$$R_+(\gamma') = (R_+(\gamma) \cap M') \cup S_+$$

$$R_-(\gamma') = (R_-(\gamma) \cap M') \cup S_-$$

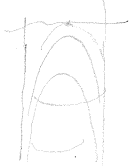
但し、 $S_+ = S \times \{0\}, S_- = S \times \{1\}$ if $N(S) = S \times [0, 1]$ and the normal direction to S points in along $S \times \{0\}$. また、この S を decomposing surface と呼ぶ。

[Figure 2.1]

定理 2.8. ([6],[34]) 任意の taut sutured manifold は sutured manifold hierarchy をもつ。すなわち、 (M, γ) を taut sutured manifold とすると sutured manifold decomposition の列: $(M, \gamma) \xrightarrow{S_1} (M_1, \gamma_1) \xrightarrow{S_2} \dots \xrightarrow{S_n} (M_n, \gamma_n)$ で M_n の各成分は taut sutured 3-ball になるようなものが存在する。

taut sutured 3-ball は $(D^2 \times [0, 1], \partial D^2 \times [0, 1])$ なる sutured manifold のことである。

この定理の証明は、Jaco ([44]) による Haken manifold の hierarchy を精密化して得られるもので、複雑である (と私は思う)。Gabai ([6])(Scharlemann ([34])) は 実質 9 個 (5 個) の成分からなる complexity を定義し、これを得ている。実際、genus 2 の handlebody に限っても、各 decomposing surface が disk だけでは sutured manifold hierarchy が得られないものが存在することが知られている ([19])。



3 最小種数ザイフェルト膜の決定

\mathcal{F} を M 上の transversely oriented codimension 1 foliation とする。

定義 3.1. \mathcal{F} が taut とは \mathcal{F} の各 leaf に対して、transverse circle もしくは properly embedded transverse arc が存在することである。

定義 3.2. F を \mathcal{F} の leaf とする。 F 及び \mathcal{F} の depth とは次で定められるものである。

- F が depth 0 $\stackrel{\text{def}}{\iff} F$ は compact.
- depth $j (\leq k)$ leaf が定まったとする。このとき、
 F が depth $k+1$ である $\stackrel{\text{def}}{\iff} \overline{F} - F$ が a union of depth $j (\leq k)$ leaves,
 $\overline{F} - F$ は depth k leaf を含む
- \mathcal{F} が depth k である $\stackrel{\text{def}}{\iff} k = \max\{\text{depth}(F) \mid F: \text{a leaf of } \mathcal{F}\}$

以上の notation のもと、次のことが知られている。

定理 3.3.([6], [8], [12]) R をある link L の ザイフェルト膜とする。 R の complementary sutured manifold (M, γ) が sutured manifold hierarchy をもてば、 $S^3 - \overset{\circ}{N}(L)$ 内に R を compact leaf にもつ taut finite depth foliation で $\partial N(L)$ に transverse に交わるものが存在する。特に、 decomposing surface が全て disk ならば、 depth が 1 以下の foliation が得られる。

この定理の証明に関しては、7 章を参照。

定理 3.4.([39]) \mathcal{F} を $S^3 - \overset{\circ}{N}(L)$ 内の taut foliation で、ある ザイフェルト膜 R を leaf にもつとする。このとき、この R は (Thurston) norm minimizing in $H_2(S^3 - \overset{\circ}{N}(L), \partial N(L))$ 。すなわち、 R は 最小種数 ザイフェルト膜になる。

上の定理より、与えられた ザイフェルト膜が最小種数かどうかを判定するには、その complementary sutured manifold が sutured manifold hierarchy をもつかどうか調べればよいことになる。Gabai は [8] で、10 交点以下の prime knot (cf.[42]) の ザイフェルト膜の最小種数をこの方法で決定している。また、 R を ザイフェルト膜 R_1, R_2 を 村杉和して得られる ザイフェルト膜とするとき、次のこともわかっている。

定理 3.5. ([7], [9]) R が 最小種数である必要十分条件は、 R_1, R_2 が共に最小種数になることである。

4 最小種数 ザイフェルト膜の分類

定義 4.1. L を link とし、 R_1, R_2 を L の ザイフェルト膜とする。このとき、 R_1 と R_2 が 同値とは R_1 と R_2 が $S^3 - \overset{\circ}{N}(L)$ 内の ambient isotopy で 移り合うときいう。

この同値関係にもと 最小種数 ザイフェルト膜の分類に関する研究が Hatcher, Thurston ([21]), 小林 ([26]), 垣水 ([23]), 作間 ([33]) 等によってなされている。この際、 ザイフェルト膜の 村杉和が重要な役割をはたしていることを注意しておく。特に、垣水は 10 交点以下の prime knot に対する最小種数 ザイフェルト膜の分類を完全に与える次の定理を得た。

定理 4.2.([23]) (I) 10 交点以下の prime knot に対する最小種数ザイフェルト膜は次の knot を除いて unique である。

7_4	8_3	9_5	9_{10}	9_{13}	9_{18}	9_{23}	10_3	10_{11}	10_{16}	10_{18}
2	2	2	4	2	3	2	2	2	4	3
10_{24}	10_{28}	10_{30}	10_{31}	10_{33}	10_{37}	10_{38}	10_{53}	10_{67}	10_{68}	10_{74}
3	2	2	3	4	2	2	2	2	2	3

(II) 表の各 knot の下の数が、同値でないザイフェルト膜の数である。

また、これらは具体的にどのようなザイフェルト膜であるかもわかっている。

5 Fiber surface の決定

定義 5.1. L を link とする。 L が fibered link であるとは、 $S^3 - \mathring{N}(L)$ があるザイフェルト膜を fiber とする S^1 上の fiber bundle になるときいう。また、そのザイフェルト膜を fiber surface という。

定理 5.2. R は fiber surface ならば、最小種数ザイフェルト膜である。

この定理から、4 章で述べた 10 交点以下の prime knot に対する最小種数ザイフェルト膜のうち、どれが fiber surface であるかという問題が考えられる。この解答は、金信 ([24]), Gabai ([10]) によって与えられている。ここにおいても村杉和が有用である。それは、Stallings ([37]) が示した次の事実による。

定理 5.3. ([37]) R をザイフェルト膜 R_1, R_2 を村杉和して得られるザイフェルト膜とする。このとき、 R_1, R_2 が共に fiber surface ならば R も fiber surface である。

また、[7] においてこの逆も成立することが知られている。

6 Sutured manifold の Heegaard 分解

定義 6.1. W が compression body であるとは、 W が a cobordism rel ∂ between surfaces $\partial_+ W$ and $\partial_- W$ such that $W \cong \partial_+ W \times [0, 1] \cup 2\text{-handles} \cup 3\text{-handles}$ and $\partial_- W$ has no 2-sphere components であるときいう。

見方を変えると、 W が connected で $\partial_-W \neq \emptyset$ のときは、 W は $\partial_-W \times [0,1]$ に $\partial_-W \times \{1\}$ 上の disks に沿って 1-handle をいくつか attach することで得られるものになる。 $\partial_-W = \emptyset$ ならば W は handlebody である。この attach した 1-handle の数を $h(W)$ と書くことにする。

[Figure 6.1]

以下、 R をザイフェルト膜とし、その complementary sutured manifold が irreducible なものを考える。

定義 6.2. (W, W') が complementary sutured manifold (M, γ) の Heegaard 分解である。

- $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ (1) W, W' は compression body,
 (2) $W \cup W' = M$,
 (3) $W \cap W' = \partial_+ W = \partial_+ W'$,
 (4) $\partial_-W = R_+(\gamma), \partial_-W' = R_-(\gamma)$.

定義 6.3. ザイフェルト膜 R に対して *handle number* とは 次の様に定義されるものである。

$$h(R) = \min\{h(W) \mid (W, W') \text{ は } R \text{ の complementary sutured manifold の Heegaard 分解}\}$$

このとき、次がわかる。

命題 6.4. (cf. [38], p.138) R が fiber surface $\iff h(R) = 0$.

この命題より、handle number は 与えられたザイフェルト膜が fiber surface からどの位離れているかを表す一つの尺度になっていることがわかる。この handle number の 村杉和のもとでのふるまいについて、次のことがわかっている。

R をザイフェルト膜 R_1, R_2 を $2n$ 村杉和して得られるザイフェルト膜とする。

定理 6.5. ([17]) $h(R_1) + h(R_2) - n + 1 \leq h(R) \leq h(R_1) + h(R_2)$.

定理 6.6. ([17]) R_1 が fiber surface $\implies h(R) = h(R_2)$.

これらの定理から、次の系が得られる。

系 6.7. (定理 5.3) $h(R_1) = h(R_2) = 0 \implies h(R) = 0$.

定理 6.8. ([18]) $(M_i, \gamma_i, A_i) (i = 1, 2)$ を R_1, R_2 の 4 村杉和に関する marked sutured manifolds とする。このとき、 M_1 内に a product disk with A_1 as an edge が存在するならば $h(R) = h(R_1) + h(R_2)$ が成立する。

marked sutured manifold に関しては、[18] もしくは [23] を参照。また、定理 4.2 で与えられた 1 0 交点以下の prime knot の最小種数ザイフェルト膜に対する handle number は 0, 1 もしくは 2 であることが [18] で示されている。

7 Depth of knots

Gabai は [6], [14] で次の定理を得ている。

定理 7.1. ([6], [14]) K を knot, R を K の最小種数ザイフェルト膜とする。このとき、 R を leaf にもつ $S^3 - \mathring{N}(K)$ 上の taut finite depth foliation \mathcal{F} で $\partial N(K)$ に transverse に交わるものが存在する。

R が最小種数ならば、その complementary sutured manifold は taut。よって、定理 2.8, 及び 定理 3.3 からこの定理を得る。ここで、定理 3.3 の 証明の大まかな idea を与える。 (M, γ) の sutured manifold hierarchy の taut sutured 3-ball に product foliation (depth は 0) を入れる。decomposing surface を 張り合わせる時に上手に foliation の拡張をしながら (このとき、一般に depth が 1 上がる) この hierarchy を逆にたどる。これで、 (M, γ) に taut foliation を構成し、最後に $R_+(\gamma)$ と $R_-(\gamma)$ を張り合わせて求める foliation を得る。hierarchy は有限なので、得られた foliation の depth も有限になる。

この定理 7.1 より、knot K 及び そのザイフェルト膜 R の depth という概念が次の様に定義できる。

定義 7.2. ([2]) $d(K) = \min\{ \text{depth}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } S^3 - \overset{\circ}{N}(K) \text{ 上の taut foliation で } \partial N(K) \text{ と transverse に交わる。} \}$

定義 7.3. $d(R) = \min\{ \text{depth}(\mathcal{F}) \mid \mathcal{F} \text{ は } S^3 - \overset{\circ}{N}(K) \text{ 上の } R \text{ を leaf にもつ taut foliation で } \partial N(K) \text{ と transverse に交わる。} \}$

この depth という概念は、handle number と同じ様に “ fiber surface との距離を計る ” という意味をもつ。すなわち:

命題 7.4. 次の 3 つは同値である。

- (1) R は fiber surface.
- (2) $d(R) = 0$.
- (3) $h(R) = 0$.

よって、 $d(\cdot)$ と $h(\cdot)$ の比較という問題が考えられるが、この試みが [16] でなされている。すなわち、次の事が知られている。

定理 7.5. ([16]) 任意の正整数 n に対して、 $d(R_n) = 1$, $h(R_n) = n$ となるザイフェルト膜 R_n が存在する。

また、定理 4.2 で与えられた 10 交点以下の prime knot の最小種数ザイフェルト膜に対する depth は 0 もしくは 1 であることがわかっている。一方、Cantwell と Conlon は $d(K)$ について次の結果を得ている。

定理 7.6. ([2]) 任意の整数 $n(\geq 0)$ に対して、 $d(K) = n$ となる knot K が存在する。

彼らは [3], [4] において、その補空間に taut depth 1 foliation で、ある最小種数ザイフェルト膜を唯一の compact leaf にもつ foliation が入る knot の族を定義し、その foliation の分類を行なっている。また、三好は [30] において S^3 内の depth 1 foliation の特徴付けを、中山は [31] において torus knot の補空間上のある条件を満たす foliation の分類を行なっている。

参考文献

- [1] J.Cantwell, L.Conlon: Poincaré-Bendixson theory for leaves of codimension one, Trans. A.M.S. 265 (1981) 181-209.
- [2] J.Cantwell, L.Conlon: Depth of knots, Topology and its Appl. 42 (1991) 277-289.
- [3] J.Cantwell, L.Conlon: Foliations of $E(5_2)$ and related knot complements, Proc.A.M.S. (to appear).
- [4] J.Cantwell, L.Conlon: Surgery and foliations of knot complements, preprint.
- [5] A.Casson, C.Gordon: Reducing Heegaard splitting, Topology and its Appl. 27 (1987) 275-283.
- [6] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds, J. Differential Geometry 18 (1983) 445-503.
- [7] D.Gabai: The Murasugi sum is a natural geometric operation, Contemp.Math. 20 (1983) 131-143.
- [8] D.Gabai: Foliations and genera of links, Topology 23 (1984) 381-394.
- [9] D.Gabai: The Murasugi sum is a natural geometric operation II, Contemp.Math. 44 (1985) 93-100.
- [10] D.Gabai: Detecting fibred links in S^3 , Comm.Math.Helv. 61 (1986) 519-555.
- [11] D.Gabai: Genera of the alternating links, Duke Math.J. 53 (1986) 677-681.
- [12] D.Gabai: Genera of the arborescent links, Mem.Amer.Math.Soc.,vol.59, No.339, 1986.
- [13] D.Gabai: Genus is superadditive under band connected sum, Topology 26 (1987) 209-210.
- [14] D.Gabai: Foliations and the topology of 3-manifolds.II, III, J. Differential Geometry 26 (1987) 461-536.
- [15] D.Gabai: Taut foliations of 3-manifolds and suspensions of S^1 , Ann.Inst.Fourier Grenoble 42 (1992) 193-208.
- [16] H.Goda: Seifert surface に基づいた knot 補空間の foliation と Heegaard splitting, 数理研講究録 813, 結び目の変形に関する研究 (1992) 79-88.
- [17] H.Goda: Heegaard splitting for sutured manifolds and Murasugi sum, Osaka J.Math. 29 (1992) 21-40.
- [18] H.Goda: On handle number of Seifert surfaces in S^3 , Osaka J.Math. 30 (1993) 63-80.
- [19] H.Goda: A construction of taut sutured handlebodies which are not disk decomposable, preprint.
- [20] J.Harer: How to construct all fibered knots and links, Topology 21 (1982) 268-280.
- [21] A.Hatcher, W.Thurston: Incompressible surfaces in 2-bridge knot complements, Invent. Math. 79 (1985) 225-246.
- [22] O.Kakimizu: Doubled knots with infinitely many incompressible spanning surfaces, Bull. London Math.Soc. 23 (1991) 300-302.

- [23] O.Kakimizu: Classification of the incompressible spanning surfaces for prime knots of ≤ 10 crossings, preprint.
- [24] T.Kanenobu: The Augmentation subgroup of a Pretzel link, Math.Seminor Notes, Kobe Univ. 7 (1979) 363-384.
- [25] T.Kobayashi : D.Gabai による, knot complement 上の foliation の構成, 数理研講究録 577, Foliations and K-theory (1985) 164-194.
- [26] T.Kobayashi: Uniqueness of minimal genus Seifert surfaces for links, Topology and its Appl. 33 (1989) 265-279.
- [27] T.Kobayashi: Fibered links and unknotting operations, Osaka J.Math. 26 (1989) 699-742.
- [28] T.Kobayashi: Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots, Kobe J.Math. 6 (1989) 53-62.
- [29] T.Kobayashi: Fibered links which are band connected sum of two links, Knots 90 (A.Kawauchi ed.) 9-23.
- [30] S.Miyoshi: On the placement problem of Reeb components, Comm.Math.Helv. 57 (1982) 260-281.
- [31] H.Nakayama: Codimension one foliations of S^3 with only one compact leaf, J.Fac.Sci. Univ.Tokyo Sect.IA, Math. 37 (1990) 189-199.
- [32] T.Nishimori: Behavior of leaves of codimension-one foliations, Tôhoku Math.J. 29 (1977) 255-273.
- [33] M.Sakuma: Minimal genus Seifert surfaces for special arborescent links, preprint.
- [34] M.Scharlemann: Sutured manifolds and generalized Thurston norms, J.Differential Geometry 29 (1989) 557-614.
- [35] M.Scharlemann, A Thompson: Unknotting number, genus, and companion tori, Math.Ann. 280 (1988) 191-205.
- [36] M.Scharlemann, A.Thompson: Link genus and Conway moves, Comm.Math.Helv. 64 (1989) 527-535.
- [37] J.Stallings: Constructions of fibred knots and links, Proc.Symp.Pure Math.A.M.S. 32 (1978) 55-60.
- [38] I.Tamura, T.Mizutani: 葉層構造の存在について, 数学 25 (1973) 134-147.
- [39] W.Thurston: A norm for the homology of three-manifolds, Mem.Amer.Math.Soc., vol.59, No.339, 1986.

教科書

- [40] G.Burde, H.Zieschang: Knots, De Gruyter Studies in Math. 5, Walter de Gruyter, Berlin and New York.
- [41] 河内 明夫: 結び目理論, Springer-Verlag Tokyo.
- [42] D.Rolfsen: Knots and links, Math.lecture Series 7, Publish or Perish Inc. Berkeley.

- [43] J.Hempel: 3-manifolds, Ann. of Math. Studies 86, Princeton Univ. Press.
- [44] W.Jaco: Lectures on three manifold topology, CBMS Regional Conf. Ser. in Math. 43.
- [45] C.Camacho, A.L.Neto: Geometric Theory of Foliations, BIRKHÄUSER.
- [46] G.Hector, U.Hirsch: Introduction to the Geometry of Foliations Part A,B, Braunschweig, Wiesbaden.
- [47] 田村 一郎: 葉層のトポロジー, 岩波書店.

$n=2$

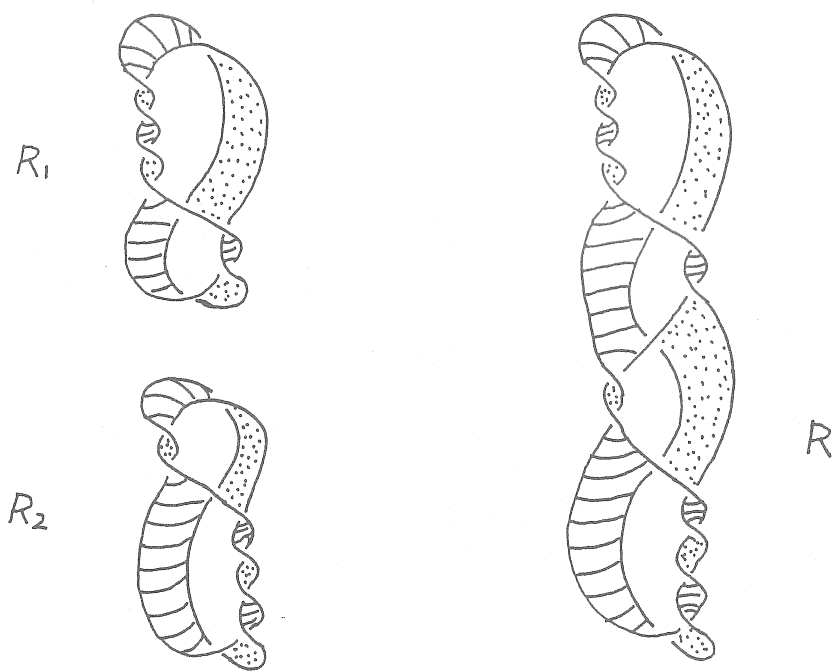


Figure 1.1

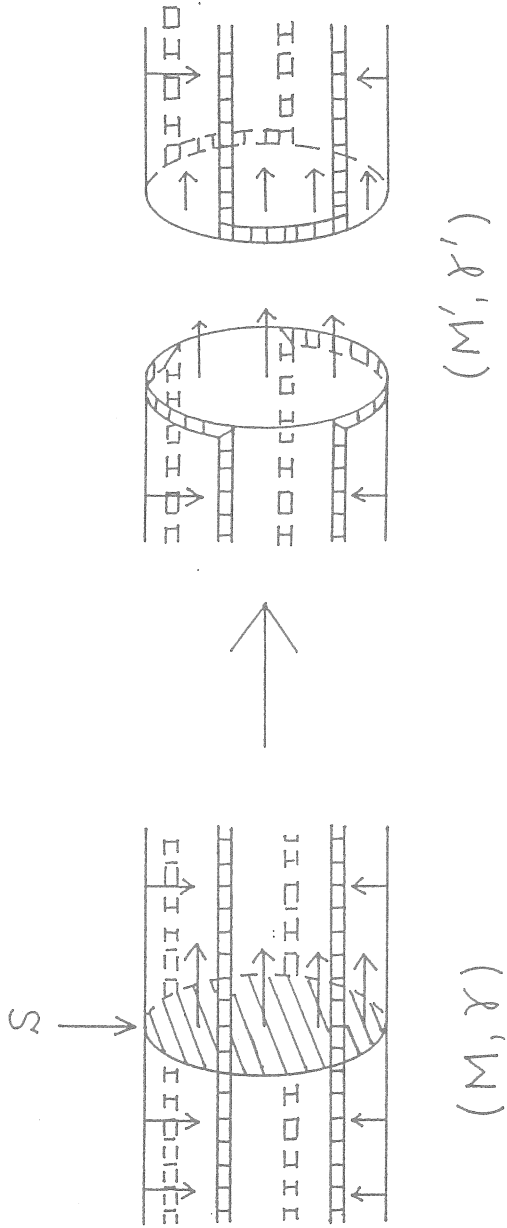


Figure 2.1

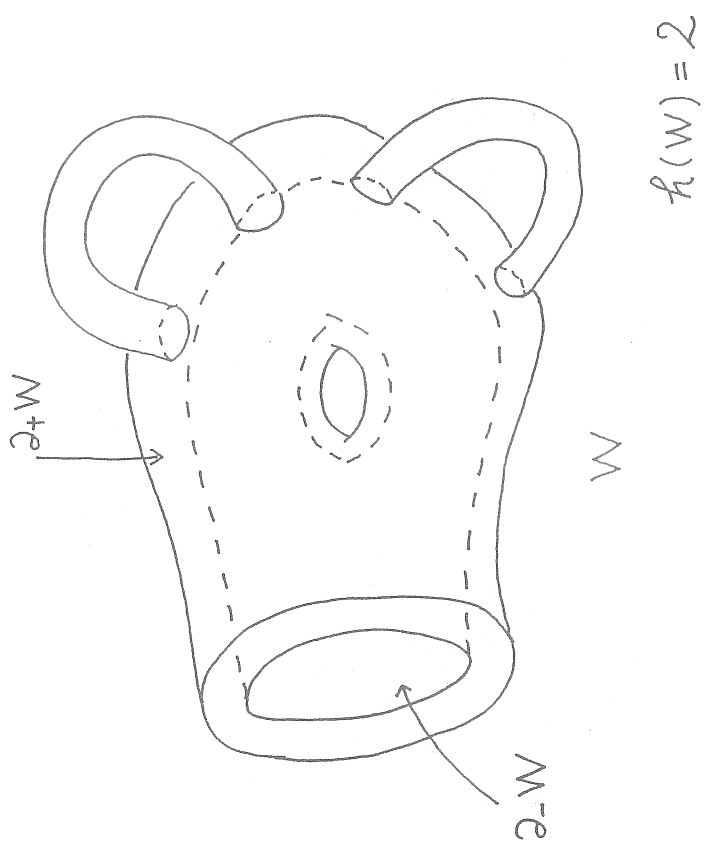


Figure 6.1

結び目のトンネル数と連結和

拓殖大学 森元勘治

序

3次元球面 S^3 内の結び目または絡み目に対して定義されたトンネル数が、連結和に関して加法的か？ また加法的でなければどのようなふるまいをするか？ という問題を考える。

トンネル数とは、結び目に付随した S^3 の Heegaard 分解の最小種数のことであり、一般の閉3次元多様体においては、Heegaard 種数の加法的性が成り立つことから (Haken [H]), 上記のような Heegaard 種数も加法的ではなからうかと思われていた。そしてその最初の結果は、Norwood ([N]) と Scharlemann ([S]) による、「トンネル数が1の結び目は、非自明な連結和には分解できない」というものであった。しかしその一方で、Norwood は同じ論文で、

トンネル数が1でありながら、非自明な連結和に分解される絡み目が存在する凸ということも示した。

上記の結果は、'80年代前半に得られたものであるが、昨年('92)講演者を含む人々によって、加法的でない絡み目の例が発見された。特に講演者は、トンネル数が2でありながら、どのような2橋絡み目と連結和をしても、再びトンネル数が2となるような絡み目を見出し([M2])、さらにそのような絡み目の特徴付けを行った([M3])。また絡み目に対しては、トンネル数が1でありながら、非自明な連結和分解を持つものの特徴付けを行った([M4])。一方小林毅氏は、講演者の発見をさらに発展させ、トンネル数は連結和のもとで、いくらでも退化し得ることを示した([K])。

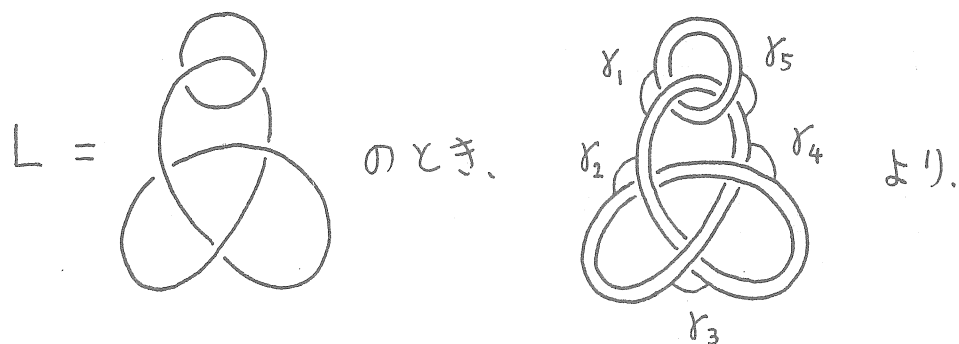
本講演ではこのようなことから、概観的に報告する。

1. トンネル数の定義

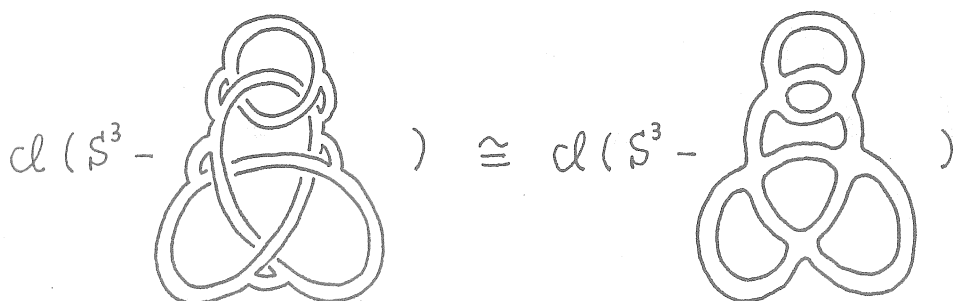
S^3 を 3次元球面とし、 L を S^3 内の結び目または絡み目とする。 $N(L)$ を その正則近傍とし、 $E(L) = \mathcal{C}(S^3 - N(L))$ とおく。 トンネル数は、 $E(L)$ に穴を掘って残りをハンドル体にする為の、穴の最小数として定義されるが、次の事実が重要である。

事実 1.1. $E(L)$ に proper に埋め込まれた arcs $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ で、その補空間 $\mathcal{C}(E(L) - N(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_t))$ がハンドル体になるものが存在する。 ここで $N(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_t)$ は、 $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_t$ の $E(L)$ における正則近傍である。

証明。 L の上下の指示のついた射影図において、各交点の上下も結ぶ arcs を $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t$ とする (この場合 t はその射影図の交点数となる)。このとき 下図の例でわかるように、 $\mathcal{C}(E(L) - N(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_t))$ はハンドル体となる。



$$\mathcal{A}(E(L) - N(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \dots \cup \gamma_5)) \cong$$



これは S^3 に標準的に埋め込まれたハンドル体の補空間故、ハンドル体である。 \square

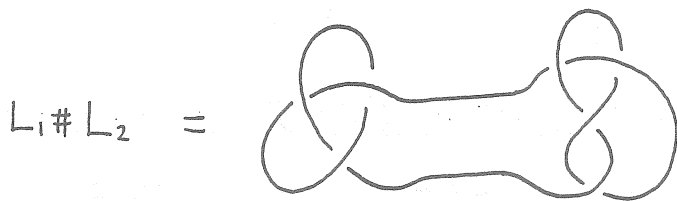
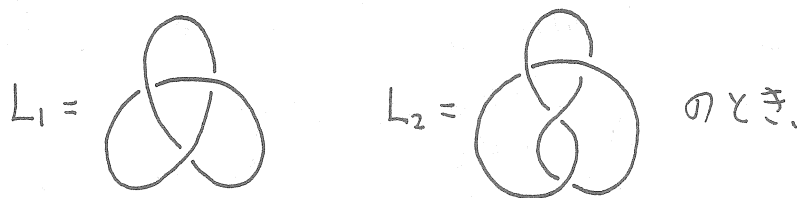
事実 1.1 における $\{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t\}$ を L の結び目解消トンネル系という。特に $t=1$ のときは、結び目解消トンネルという。この事実より、次の $t(L)$ が well-defined である。

$$t(L) = \begin{cases} \min \left\{ t \mid \begin{array}{l} \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_t\} \text{ は } L \text{ の} \\ \text{結び目解消トンネル系} \end{array} \right\} \\ 0 \quad L \text{ が平凡結び目のとき} \end{cases}$$

この $t(L)$ を、 L のトンネル数という。

次に連結和の定義を簡単に述べる。 L_1, L_2 を S^3 内の結び目または絡み目とし、その射影図が重ならないように描く。このとき、それらを下図のようにつないでできる新しい結び目または絡み目を、 L_1 と L_2 の連結和といい $L_1 \# L_2$ と書く。またこのとき、 $L_1 \# L_2$ は L_1 と L_2 の連結和に分解されるという。 L_1 または L_2 が平凡結び目のときは、自明な連結和といい、そうでないときは、非自明な連結和という。

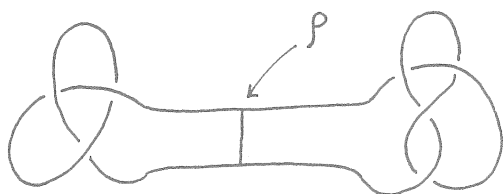
注意： L_1, L_2 が共に結び目の場合、 $L_1 \# L_2$ は一意に定まるが、少なくとも一方が複成分の絡み目の場合、それはつなぐ成分の選び方に依存する。



トンネル数と連結和に関して直ちにわかることは、次の事実である。

事実 1.3. $t(L_1 \# L_2) \leq t(L_1) + t(L_2) + 1$

証明. $\{r_1, r_2, \dots, r_{t_1}\}$, $\{r'_1, r'_2, \dots, r'_{t_2}\}$ をそれぞれ L_1, L_2 の結び目解消トンネル系とする。 $L_1 \# L_2$ に対して新たな arc ρ を下図のようにすると、 $\{r_1, r_2, \dots, r_{t_1}, r'_1, r'_2, \dots, r'_{t_2}, \rho\}$ が $L_1 \# L_2$ の結び目解消トンネル系になることがわかる。



□

以上でトンネル数の定義と連結和に関する最も基本的な性質の紹介を終わる。

2. 結び目のトンネル数と連結和

結び目のトンネル数については、次の2つのごとく予想されていた。

予想 A : 結び目のトンネル数は連結和によっては退化しないであろう。即ち、2つの結び目 K_1, K_2

に対して、次の不等式が成り立つであろう。

$$t(K_1) + t(K_2) \leq t(K_1 \# K_2)$$

予想 B：事実 1.3 の評価は最良であろう。即ち、次の等式を満たす結び目 K_1, K_2 が存在するであろう。

$$t(K_1 \# K_2) = t(K_1) + t(K_2) + 1$$

上記の予想は、共に '92 年に以下のように解決された。

予想 A は正しくない ([M2])。

予想 B は正しい (Moriah-Rubinstein [MR])。

注意：[MR] はイスラエルでの workshop における講演であり、 $t(K_1)=1, t(K_2)=1$ かつ $t(K_1 \# K_2)=3$ を満たす結び目の組が無限個存在することを示したと彼らは主張している。しかしながらきちんとした証明の書かれたものは、日本人はまだ誰の手にもしておらず、本講演でもこれ以上は立ち入らない。

本節では予想 A をめぐる諸結果について述べる。まず最初の結果は次の定理である。

定理 2.1 ([N], [S], [MS], [J]), トンネル数 1 の結び目は、非自明な連結和には分解できない。
即ち、平凡でない 2 つの結び目 K_1, K_2 に対して、 $t(K_1 \# K_2) \geq 2$ が成り立つ。

定理 2.1 は、 $K_1 \# K_2$ のトンネル数が 1 の場合、予想 A が正しいことを示している。そこで次に考えることはトンネル数が 2 の場合であるが、講演者は '91 年秋 次の結果を得た。

定理 2.2 ([M1]), K_1, K_2 を平凡でない 2 つの結び目とし、 $t(K_1 \# K_2) = 2$ とする。このとき次のいずれかが成り立つ。

(1) K_1, K_2 が「いずれも 2 橋結び目でないならば」、 $t(K_1) = t(K_2) = 1$ である。

(2) K_1, K_2 のうち少くとも一方が 2 橋結び目ならば (K_1 とせよ)、 $t(K_2) \leq 2$ である。また K_2 は、非自明な連結和には分解されない。

証明の概略。 $K_0 = K_1 \# K_2$ とおく。 $t(K_0) = 2$ より K_0 の結び目解消トンネル系 $\{t_1, t_2\}$ が存在

する。 $V_1 = N(K_0 \cup r_1 \cup r_2)$, $V_2 = \mathcal{C}(S^3 - V_1)$ とおくと、 (V_1, V_2) は S^3 の種数 3 の Heegaard 分解である。

S を K_0 の連結和分解を与える 2次元球面とする。このとき、 K_0 を重かきさない S^3 の isotopy で、 S と V_1 との交わりが、以下のうちの 1 つにできることを示す。

(I) $S \cap V_1$ は図 2.1-(1) のような 2 枚の円盤。

(II) $S \cap V_1$ は図 2.1-(2) のような 3 枚の円盤。

(III) $S \cap V_1$ は図 2.1-(3) のような 3 枚の円盤。

次に (I) (II) (III) それぞれを詳しく解析し、(I) では定理の (1) が、(II) (III) では定理の (2) が成り立つことを示す。

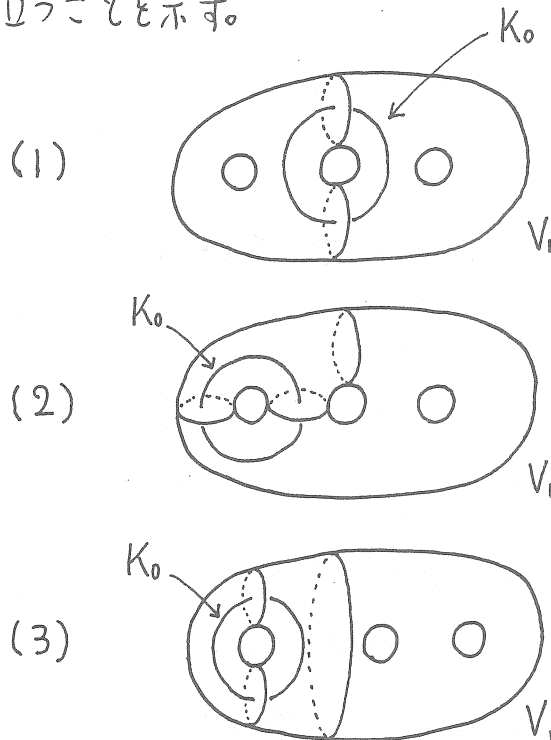


図 2.1

□

上記の定理より、次の系が従う。

系 2.3. トンネル数 2 の結び目は、高々 2 つの結び目の連結和にしか分解されない。即ち、平凡でない 3 つの結び目 K_1, K_2, K_3 に対して、 $t(K_1 \# K_2 \# K_3) \geq 3$ が成り立つ。

定理 2.1 と系 2.3 により、一般に $t(K_1 \# K_2 \# \dots \# K_n) \geq n$ が成り立ってであろうと予想される。この件については、 K_1, K_2, \dots, K_n がいずれも 2 橋系結び目でないならば、正しいことがわかる。

さて、定理 2.2 の (2) における評価 $t(K_2) \leq 2$ は最良評価であろうかという問題が生じる。講演者は '92 年春、 $t(K_1) = 1, t(K_2) = 2$ が $t(K_1 \# K_2) = 2$ を満たす結び目の組を発見し、最良評価であることを示した。これによって予想 A が正しくないことが示された。

宗は $n \neq 0, 1$ で OK

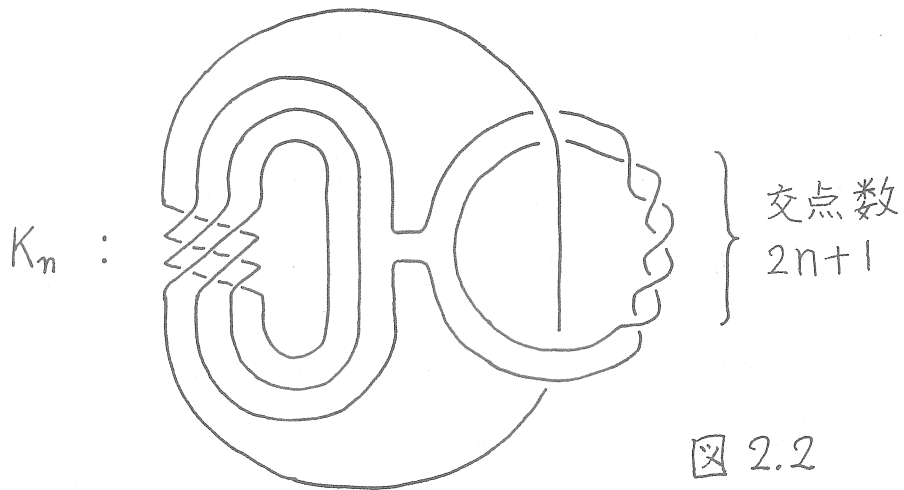
定理 2.4 ([M2]). $n (> 1)$ を自然数とし、 K_n を図 2.2 に描かれた結び目とする。このとき、次の

(1) ~ (3) が成り立つ。

(1) $t(K_n) = 2$

(2) 任意の 2 橋結び目 K に対して, $t(K_n \# K) = 2$

(3) $n \neq n'$ ならば K_n と $K_{n'}$ は異なる結び目型である。



証明の概略。任意の 2 橋結び目は、一般に図 2.3 のような射影図を持つので、 K_n の連糸知を図 2.4 のように描く。そして α_1, α_2 を図 2.4 で指示された arcs とする。このとき、例 1.2 のような変形で、 $(K_n \# K) \cup \alpha_1 \cup \alpha_2$ が図 2.5 になることがわかる。これは $\{\alpha_1, \alpha_2\}$ が $K_n \# K$ の結び目解消トンネル系であることを示しており、 $t(K_n \# K) \leq 2$ を得る。ここで K として平凡結び目を考えると

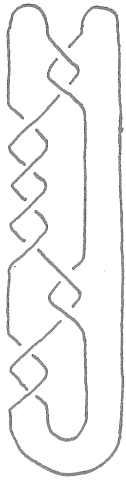


図 2.3

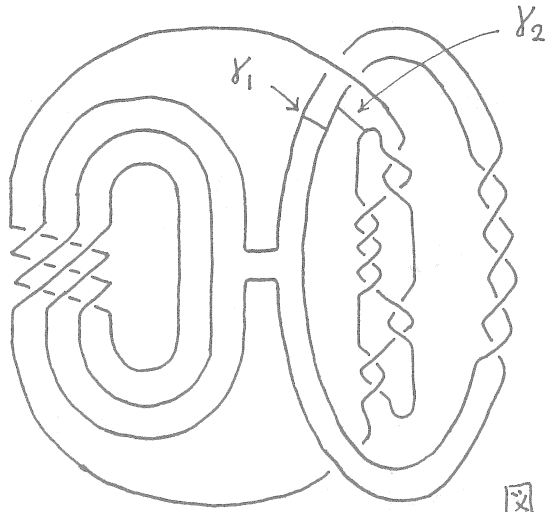


図 2.4

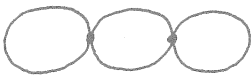


図 2.5

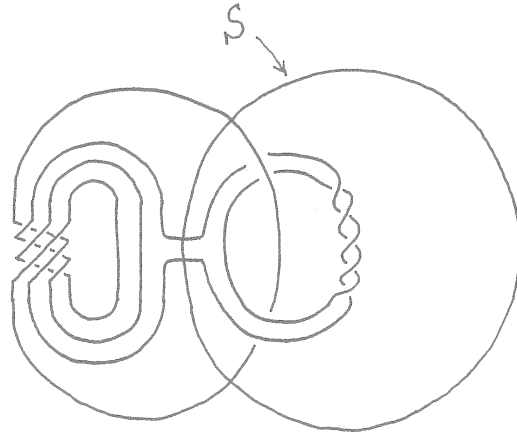


図 2.6

$\tau(K_n) \leq 2$ を得る。

次に K_n を図 2.6 のような 2次元球面 S で 2つに分ける。このような分解を tangle 分解と呼ぶ。一般にトンネル数 1 の結び目は強可逆であることが知られているが、この tangle 分解を用いて K_n が強可逆でないことを示し、 $\tau(K_n) \geq 2$ を得る。

即ち $t(K_n) = 2$ である。よって定理 2.1 より $t(K_n \# K) \geq 2$ であることもわかり、 $t(K_n \# K) = 2$ を得る。

K_n と K_n' が同じ結び目型でないことも、この tangle 分解を用いて示される。 \square

ここで $t(K_1) + t(K_2) - t(K_1 \# K_2)$ という量を考える。これは連結和を行う前と後のトンネル数の差であるが、 $[K]$ において初めて考察されており、連結和のもとでの、トンネル数の退化具合をはかる量と言える。事実 1.3 はこれが -1 以上であることを示している。また定理 2.4 における例は、それが 1 という値をとり得ることを示している。しかし '92 年秋、小林氏はこれが任意に大きな値をとり得ることを示した。これによって予想 A は大きく崩れ去ることになる。

定理 2.5 ($[K]$)。 任意の自然数 n に対して、次の不等式を満たす結び目 K_1, K_2 が存在する。

$$t(K_1) + t(K_2) - t(K_1 \# K_2) > n$$

証明の概略。 図 2.2 の結び目をもとにしてつくった結び目をたくさん連結和したものを K_1 とし、2 橋

結び目をたくさん連結和したものを K_2 とし、
 $t(K_1) + t(K_2) - t(K_1 \# K_2)$ がいくらでも大きくなることを示す。 \square

さて、再び定理 2.2 にもどる。この定理により、結び目 K_1, K_2 が $t(K_1 \# K_2) = 2, t(K_1) = 1, t(K_2) = 2$ を満たすならば、 K_1 は 2 橋結び目であることがわかる。では K_2 はどのような結び目であろうか？ 講演者は '93 年春、[M3] において K_2 の特徴付けを行った。以下でその結果を紹介する。

B を 3 次元球体、 t_1, t_2 を B に proper に埋め込まれた互いに交わらない arcs とする。このとき、 $(B, t_1 \cup t_2)$ を 2-string tangle という。 $(B, t_1 \cup t_2)$ が $(D^2 \times I, \{x_1, x_2\} \times I)$ に同相なとき、それを平凡 tangle という。但し D^2 は円盤、 I は単位区間、 x_1, x_2 は D^2 の内部の 2 点である。 λ を λ は 2 とする。 (B, t_i) が $(D^2 \times I, \{x\} \times I)$ に同相なとき、 t_i を糸きんでない成分という。但し x は D^2 の内部の点である。

$N(t_1 \cup t_2)$ を $t_1 \cup t_2$ の B における正則近傍とする。

$\mathcal{Q}(B-N(t_1, t_2))$ が「ハンドル体」のとき、 (B, t_1, t_2) を自由tangleという。自由tangleという言葉は小林氏 ([K]) による。図 2.7-(1) は、結んでない成分を持つ平凡でない自由tangleの例である。図 2.7-(2) は、系結んでない成分を持たない平凡でない自由tangleの例である。

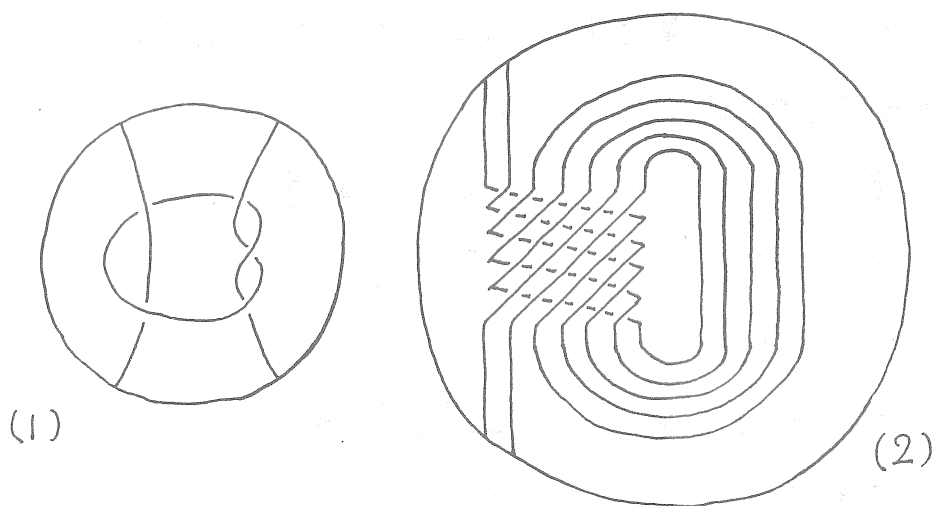


図 2.7

以上の言葉の準備のもとに、 K を S^3 内の系結び目 K で、次の条件 (*) を満たす 2-string tangle 分解 $(S^3, K) = (B, t_1, t_2) \cup (B', t'_1, t'_2)$ を持つもの全体の族とする。

(*) : $(B, t_1, t_2), (B', t'_1, t'_2)$ は共に平凡でない自由tangleであり、少なくとも一方のtangleは、系結んで

ない成分を 少なくとも 1つ 持つ。

このとき、前記の K_2 は 次のように 特徴付けられる。

定理 2.6 ([M3]). K を S^3 内の 結び目とする。

このとき、以下の (1)~(3) は 互いに 同値である。

(1) $t(K)=2$ かつ ある 2 橋 結び目 K' に対して $t(K\#K')=2$ 。

(2) $t(K)=2$ かつ 任意の 2 橋 結び目 K' に対して $t(K\#K')=2$ 。

(3) K は \mathcal{A} に 属する。

証明の概略。 (2) \Rightarrow (1) は 明らかである。


(1) \Rightarrow (3) は 定理 2.2 の 証明を さらによく 解析し、 K が \mathcal{A} に 属することを示す。(3) \Rightarrow (2) は 小林氏の 議論 ([K]) を 用いて $t(K\#K') \leq 2$ を示す。また Scharlemann の 次の 結果 □ トンネル数 1 の 結び目は、平凡でない 2-string tangle の 和には 分解されない □ ([S] の 定理 2.3) により $t(K)=2$ を得る。故に $t(K\#K')=2$ でもある。 □

注意：図 2.6 における K_n の tangle 分解は、 \mathcal{A} の元としての tangle 分解に対応している。



以上で予想 A をめぐる諸結果の紹介を終わる。



3. 絡み目のトンネル数と連結和

例 1, 2 を思い出そう。

$L =$  のとき $t(L) = 1$ であった。

ここで

$L =$  $\#$  より

$L_1 =$  $\quad L_2 =$  とおくと

$t(L_1) = 1$, $t(L_2) = 1$ かつ $t(L_1 \# L_2) = 1$ である。

故に絡み目の場合、2 節の予想 A に対応す

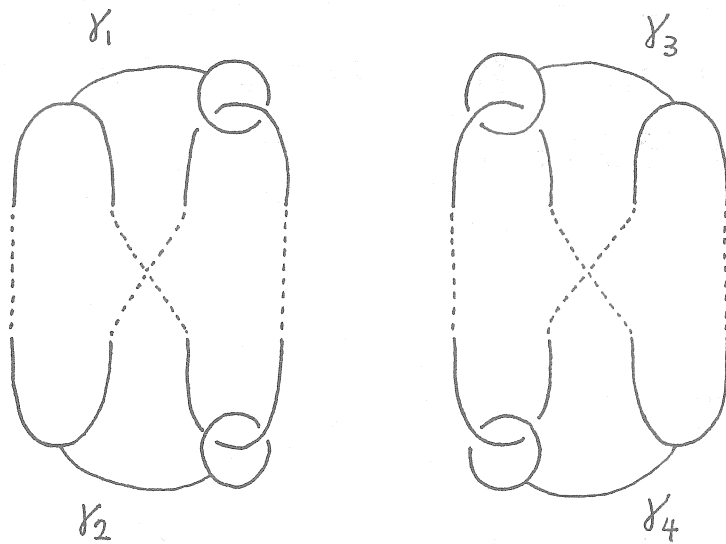
る不等式は、 $\tau(L_1 \# L_2) = 1$ の場合でも早くも成り立たないことがわかる。そこで、連結和を行ってトンネル数が1になる絡み目はどのような絡み目であろうか？ということが問題になるが、A.C. Jones は'92年春 次を示した。

定理3.1 ([JJ]). 非自明な連結和からなる絡み目がトンネル数1を持つば、それはホップ絡み目を連結和成分に持つ。ここでホップ絡み目とは下図の絡み目である。



Jones は上記の定理を、絡み目の補空間の基本群の表示から示した。そして実際は、基本群が2つの元で生成されるという仮定のもとに上記の結果を得たが、講演者は'92年夏、定理2.2の証明と同様の方法により、前記の問題を解決した。

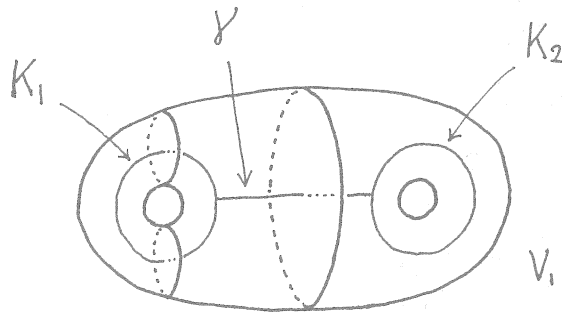
定理 3.2 ([M4]). 非自明な連結和からなる絡み目が、トンネル数 1 を持つ為の必要十分条件は、それが 2 橋結び目とホップ絡み目の連結和になることである。さらにそのときの結び目解消トンネルは、下図の $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$ のうちのいずれかに isotopic である。



証明の概略。第 1 節でのトンネル数の定義のあとの不等式より、非自明な連結和からなる絡み目がトンネル数 1 を持てば、それは 2 成分絡み目であることがわかる。よってある結び目 K とある 2 成分絡み目 L との連結和 $K \# L$ となり、さらに $K \# L = K_1 \cup K_2$ とおける。但し K_1, K_2 は結び目であ

る。 γ を $K \# L$ の結び目解消トンネルとし、 $V_1 = N(K_1 \cup K_2 \cup \gamma)$, $V_2 = \mathcal{Q}(S^3 - V_1)$ とおくと、 (V_1, V_2) は S^3 の種数 2 の Heegaard 分解である。

S を $K \# L$ の連結和分解を与える 2 次元球面とする。このとき、 $K_1 \cup K_2$ を動かさない isotopy V によって S と V_1 との交わりが下図のような 3 枚の円盤にできることを示す。そしてさらに詳しく解析し、 K が 2 橋結び目、 L がホップ絡み目であることを示す。このとき γ の位置も同時に示される。



□

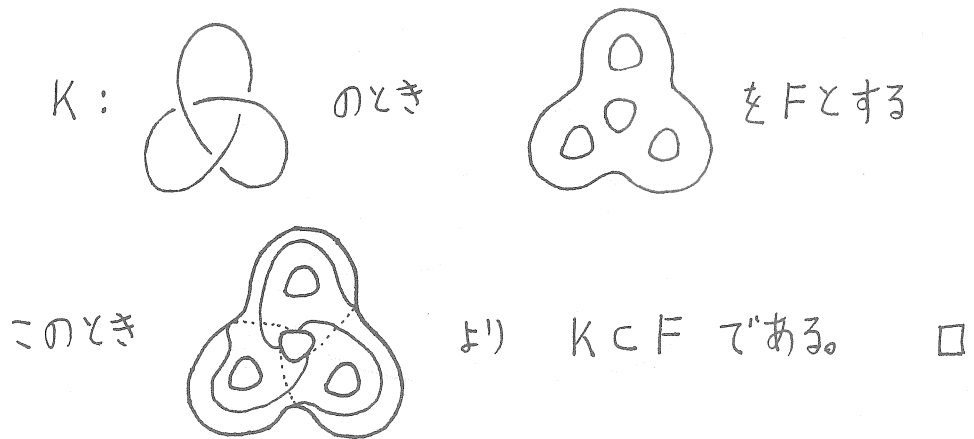
4. 結び目の丸一様数と連結和

本節では、与えられた結び目を含む Heegaard 曲面の最小種数と、トンネル数及び連結和との関係について述べる。

S^3 内の閉曲面 F が S^3 を 2つのハンドル体に分けるとき、 F を Heegaard 曲面という。

事実 4.1. K を S^3 内の結び目とする。 S^3 内の Heegaard 曲面で K を含むものが存在する。

証明。 K の 1つの射影図から下図のようにして得られる閉曲面 F は、 K を含む Heegaard 曲面である。



事実 4.1 より、次の $h(K)$ が well-defined である。

$$h(K) = \min \left\{ h \mid \begin{array}{l} K \text{ を含む種数 } h \text{ の } S^3 \text{ の} \\ \text{Heegaard 曲面が存在する} \end{array} \right\}$$

この $h(K)$ を、結び目 K の h -種数と呼ぶ。 K の定義より、次の不等式が直ちに従う。

事実4.2. $h(K_1 \# K_2) \leq h(K_1) + h(K_2)$

$h(K)$ と $t(K)$ の定義と簡単な議論により次の事実がわかる。このことはTexas大学の斎藤氏に教えていただいた。図4.1は、それが意味する包含関係を示している。

事実4.3. $t(K) \leq h(K) \leq t(K) + 1$

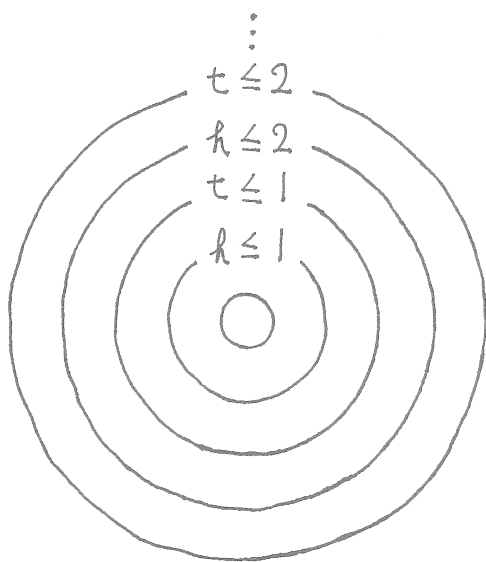


図4.1

さて、 $h(K)$ の定義より $h(K)=0$ ならば K は平凡結び目である。また $h(K)=1$ ならば K はトラス結び目である。よって $h(K) \leq 1$ ならば K は非自明な連結和には分解されないことがわかる。'92年夏

講演者はさらに次を示した。

定理 4.4 ([M5]). K_1, K_2 を平凡でない結び目とする。 $h(K_1 \# K_2) = 2$ ならば $h(K_1) = h(K_2) = 1$ である。

上記の定理により、 $h(K_1 \# K_2) = 2$ の場合 $h(K_1 \# K_2) = h(K_1) + h(K_2)$ という等式が成り立つことがわかる。そこで次に $h(K_1 \# K_2) = 3$ の場合を考えるのであるが、その前に言葉を一つ準備する。

K を S^3 内の結び目とする。種数 1 の S^3 の Heegaard 分解 (V_1, V_2) で、 $V_i \cap K$ が V_i 内の 1 本の平凡な arc ($i=1, 2$) となるものが存在するとき、 K は $(1, 1)$ -分解を持つという。

命題 4.5 ([M5]). K_1, K_2 を共に $(1, 1)$ -分解を持つような平凡でない結び目とする。さらに K_1, K_2 がいずれもトレス結び目でないならば、 $h(K_1) = h(K_2) = 2$ かつ $h(K_1 \# K_2) = 3$ が成り立つ。

注意： 2 橋結び目はすべて $(1, 1)$ -分解を持つ。

つので、命題4.5の仮定を満たす結び目は存在する。

命題4.6 ([M5]). K_n を図2.2に描かれた結び目とする。このとき以下が成り立つ。

(1) $h(K_n) = 3$

(2) 任意の2橋結び目 K に対して $h(K_n \# K) = 3$

上記の2つの命題により、 h -種数については“ $2+2=3$ ”, “ $3+1=3$ ”, “ $3+2=3$ ”という等式が成り立つことがわかる。しかしながら $h(K_1 \# K_2) = 3$ の場合、 $h(K_1)$, $h(K_2)$ がどのような値をとり得るかについては、講演者はまだ最終的な結論を得ていない。

参考文献

- [H] Haken, W., *Some results on surfaces in 3-manifolds*, Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Amer., Prentice-Hall 1968.
- [J] Jones, A. C., *Composite two-generator links have a Hopf link summand*, preprint.
- [K] Kobayashi, T., *A construction of arbitrarily high degeneration of tunnel numbers of knots under connected sum*, preprint.
- [M1] Morimoto, K., *On the additivity of tunnel number of knots*, to appear in Topology Appl.
- [M2] _____, *There are knots whose tunnel numbers go down under connected sum*, preprint.
- [M3] _____, *Characterization of tunnel number two knots which have the property " $2 + 1 = 2$ "*, preprint.
- [M4] _____, *On composite tunnel number one links*, to appear in Topology Appl.
- [M5] _____, *On the additivity of h -genus of knots*, to appear in Osaka J. Math.
- [MS] Morimoto, K. and Sakuma, M., *On unknotting tunnels for knots*, Math. Ann. vol 289 (1991) 143-167.
- [MR] Moriah, Y. and Rubinstein, H., Talk at the Workshop "Geometric Topology" at Technion, Haifa, 1992.
- [N] Norwood, F. H., *Every two generator knot is prime*, Proc. A.M.S. vol 86 (1982) 143-147.
- [S] Scharlemann, M., *Tunnel number one knots satisfy the Poenaru conjecture*, Topology Appl. vol 18 (1984) 235-258.

全測地的境界をもつ双曲的 3 次元多様体と

その構造変形について

藤井 道彦 (横浜市立大 文理)

1. 序

多様体 M がいたるところでの断面曲率が -1 となる Riemann 計量 d を許容するとき、 M は双曲的構造をもつといい、 (M, d) を双曲的多様体という。双曲的 3 次元多様体の全測地的境界は双曲的曲面になる。

種数 $g(\geq 2)$ の Riemann 面のモジュライ空間を M_g とし、コンパクト双曲的 3 次元多様体の全測地的境界の連結成分となり得る、 M_g の点からなる部分集合を S_g とする。部分集合 S_g は高々可算ではある ([9] [22]) が、circle packing をもつ双曲的曲面全体が M_g の dense な部分集合をなすという Brooks の定理 [2] により、 S_g が M_g の中で dense になることがわかり、 S_g が重要な研究対象であることがわかる。しかしながら、dense であること以上に S_g の元の特徴はほとんど知られていないのが現状である。ここでは、 S_g が M_g 内で dense であることの証明に、全測地的境界をもつ非コンパクト完備有限体積双曲的 3 次元多様体についての Thurston の双曲的 Dehn 手術の理論が用いられていることに注目してみる。

Thurston の双曲的 Dehn 手術の理論は、双曲的 3 次元多様体の双曲的構造の変形及び変形後のコンパクト化についての理論である ([1] [20] [22])。Thurston の一意化定理 [23] [24] (モンスター定理ともいう cf. [11] [19]) により、いくつかの位相的条件を満たした 3 次元多様体上に完備双曲的構造が入ることがわかるが、双曲的 Dehn 手術のコンパクト化では、その位相的条件を満たさないもの (つまり閉かつ non-Haken となるもの) で完備双曲的構造をもつものがたくさん組織的に構成される。つまり、一意化定理では扱えないような双曲的 3 次元多様体を数多く得られる点で有用なものである。また、双曲的 3 次元多様体の変形を押し進めていき、Gromov の幾何学的極限として存在が保証されている極限まで変形していったときの極限現象を幾何学的に説明することが、Poincaré 予想をも含む Thurston の幾何学化予想の証明方法の一つとなる ([15] [21] [23])。そういう点でも、双曲的 Dehn 手術理論は重要である。

そこで、この 3 次元多様体論において重要な双曲的 Dehn 手術理論の観点から、 S_g の元の特徴付けを与えられないかと考えてみたい。その特徴付けを与えるための第一段階として、次のことを示すことをこの講演では目標とする。

すなわち、全測地的境界をもつ非コンパクト完備双曲的 3 次元多様体 (M, d_0) (全

測地的境界上には end はなく、境界に沿って double をとると体積有限となるもの) を持ってきて、この3次元多様体 M の双曲的構造 d_0 を変形したときに、境界が全測地的に保たれることを示した後で、

” 3次元多様体の双曲的構造の変形空間 ” \longrightarrow ” モジュライ空間 ”

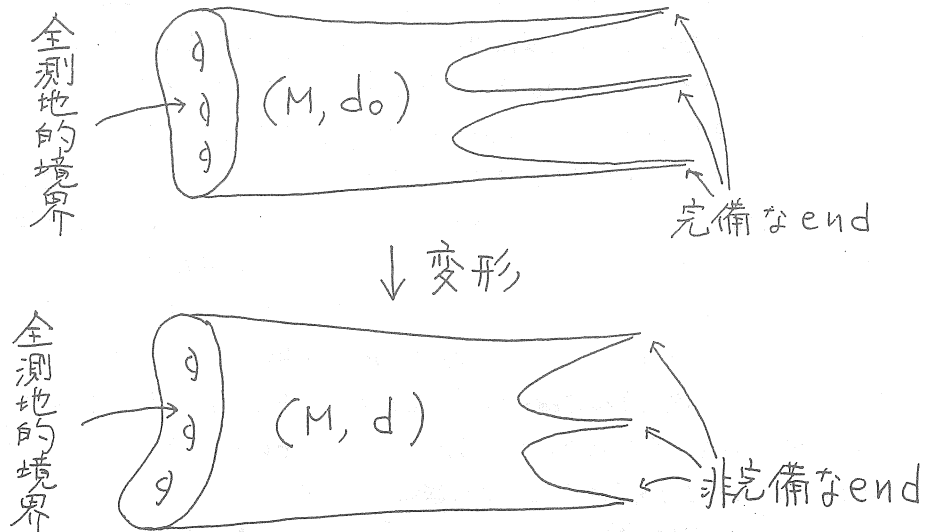
Ψ

Ψ

3次元多様体 M 上の双曲的計量 d

\longmapsto 構造変形にともない変形された双曲的3次元多様体 (M, d) の全測地的境界の連結成分

という写像を、 (M, d_0) をある種の多面体 (つまり truncated tetrahedron) に分解したときの多面体たちの変形のパラメーターで、具体的に書き下すことを目標とする。 $d \neq d_0$ のときは、 (M, d) は不完備な end をもつが、 d が適当な計量であるときには、双曲的 Dehn 手術理論により end に S^1 をつけ加えることで (M, d) の双曲的計量に関し自然なコンパクト化がえられることがわかるので、この写像の像が S_g の元を与えるとみなせる。よって、上の写像が書き下せたことにより、双曲的 Dehn 手術理論の観点から S_g の元 M_g 内での分布の様子が表示できたことになるのである。



2. 双曲的 3 次元多様体とその多面体による分割

多様体 M がいたるところでの断面曲率が -1 となる Riemann 計量 d を許容するとき、 M は双曲的構造をもつといい、 (M, d) を双曲的多様体という。

\mathbf{H}^2 を $\{(x, t) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R} \mid t > 0\}$ に計量 $dx^2 + dt^2/t^2$ を入れた空間とすると、これは単連結で完備な双曲的曲面である。 \mathbf{H}^2 の向きを保つ等長写像全体を $\text{Isom}_+ \mathbf{H}^2$ と表すと、 $\text{Isom}_+ \mathbf{H}^2$ は $PSL_2(\mathbf{R})$ と同一視される。

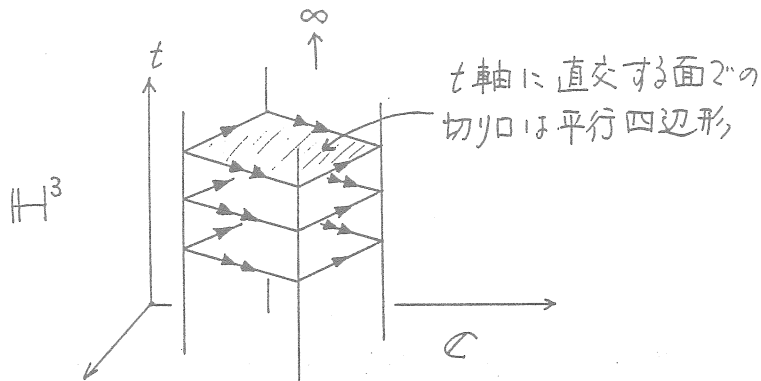
\mathbf{H}^3 を $\{(c, t) \in \mathbf{C} \times \mathbf{R} \mid t > 0\}$ に計量 $|dc|^2 + dt^2/t^2$ を入れた空間とする。これは、単連結で完備な双曲的 3 次元多様体であり、3 次元双曲的空間という。双曲的 3 次元多様体は局所的に \mathbf{H}^3 と等長的になる。 \mathbf{H}^3 の向きを保つ等長変換群を $\text{Isom}_+ \mathbf{H}^3$ と表すと、 $\text{Isom}_+ \mathbf{H}^3$ の各元にそれが誘導する $\partial \mathbf{H}^3 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 上の等角写像を対応させることにより、 $\text{Isom}_+ \mathbf{H}^3$ は $PSL_2(\mathbf{C})$ と自然に同一視される。

そこで、 $PSC_2(\mathbf{C})$ の torsion-free 離散部分群 Γ が与えられると、 \mathbf{H}^3 を Γ の作用で割ってできる空間 \mathbf{H}^3/Γ は双曲的 3 次元多様体であり、しかも完備である。逆に、完備双曲的 3 次元多様体 (M, d_0) が与えられると、これに対応して $PSL_2(\mathbf{C})$ の torsion-free なある離散部分群 Γ が存在し、 $(M, d_0) = \mathbf{H}^3/\Gamma$ となる。つまり、完備双曲的 3 次元多様体 (M, d_0) に対して、基本群 $\pi_1(M)$ から $PSL_2(\mathbf{C})$ の torsion-free 離散部分群 Γ の上への faithful な表現

$$\rho_0 : \pi_1(M) \longrightarrow \Gamma < PSL_2(\mathbf{C})$$

が対応している。

完備双曲的 3 次元多様体 (M, d_0) が体積有限で非コンパクトならば、Margulis の補題により、その end は torus cusp になることがわかる。但し、torus cusp とは \mathbf{H}^3 の中での ∞ へのびている「えんかつ」の境界面を向かい合う面どうし同一視してできあがるもの (位相的には $T^2 \times [1, \infty)$ である) と等長的になる (M, d_0) の部分のことをいう。

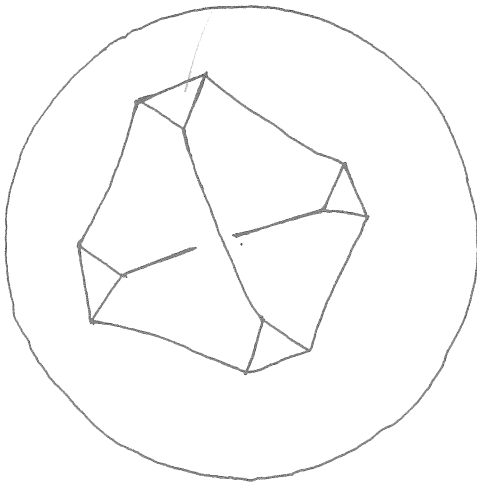


3次元多様体が完備双曲的構造をもつための十分条件は、Thurstonの一意化定理 [23] [24] により、その3次元多様体のいくつかの位相的性質によって述べることができる。この定理は双曲的構造の存在定理であり、構成的なものではない。そこで具体的に双曲的3次元多様体を扱うためには、わかりやすい部分に分割し、分割された部分部分のはりあわせられたものと思ってみるのが一つの方法であろう。Epstein-Penner [4] より、体積有限非コンパクト完備双曲的3次元多様体 (M, d_0) はいくつかの ideal polyhedron のはりあわせられたものとなることがわかる (ideal tetrahedron とは、無限遠球面 $\partial\mathbf{H}^3$ 上に頂点をもつ \mathbf{H}^3 内の測地的多面体のことをいう)。ただし、 (M, d_0) が ideal tetrahedron 分解をもつかどうかは明らかではない。しかし、 (M, d_0) が ideal tetrahedron 分解をもつことがわかっている場合もかなり存在し (S^3 内の多くの双曲的絡み目補空間については、絡み目を書くとその補空間の ideal tetrahedron 分解を見つけ出すという Macintosh 上で動くソフトが Weeks により開発されている [25])、Thurston は ideal tetrahedron による分解を用いて具体的に双曲的3次元多様体を扱うことにより、様々な幾何学的情報を引き出してきた。全測地的境界をもつ双曲的3次元多様体については、truncated tetrahedron 分解というものが考えられる。

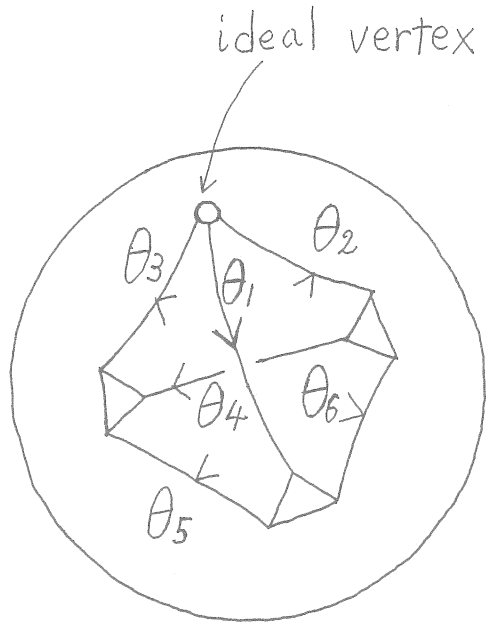
Truncated tetrahedron とは、 \mathbf{H}^3 内のある種の測地的多面体である。これには、ideal vertex の数に応じて4種類がある。図では \mathbf{H}^3 を Poincaré disk model (3次元球体 B^3 に完備双曲的計量を入れたもの) で表している。ここでは、 b のタイプしか扱わないことにする。 $\theta_1, \dots, \theta_6$ は面のなす角である。他の面角はすべて $\pi/2$ である。 b タイプの truncated tetrahedron の境界は、3つの直角5角形 (1つの ideal vertex をもつ)、1つの直角6角形、3つの3角形で構成される。面角 $\theta_1, \dots, \theta_6$ は

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi \\ \theta_2 + \theta_4 + \theta_6 < \pi \\ \theta_1 + \theta_5 + \theta_6 < \pi \\ \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 < \pi \end{array} \right.$$

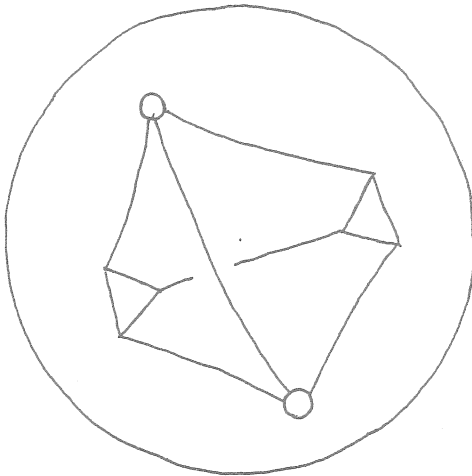
を満たす。



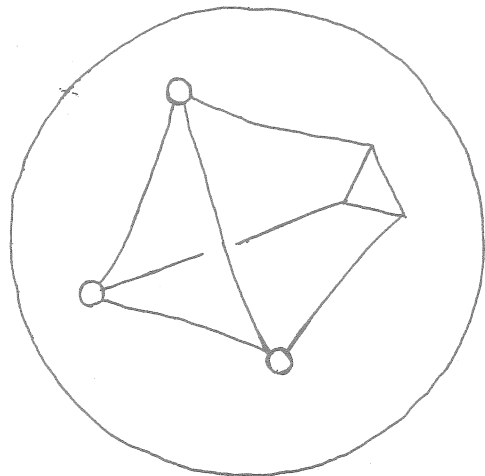
a



b



c



d

逆に、次がわかる。

Proposition [5]. 任意に (*) を満たす 6 つの実数 $\theta_1, \dots, \theta_6$ を与えればこれらを面角とする b タイプの truncated tetrahedron が等長類を除いて一意的に存在する。

(*) を満たす $\theta_1, \dots, \theta_6$ を truncated tetrahedron の変形のパラメーター という。パラメーター $\theta_1, \dots, \theta_6$ が与えられると、双曲的幾何学における余弦定理を用いることにより、truncated tetrahedron の境界上の有限の長さをもつ辺の長さが $\theta_1, \dots, \theta_6$ で書き表される。

Definition. 3次元多様体 M がいくつかの truncated tetrahedron のはりあわせで得られるとき、 M は truncated tetrahedron 分解されるという。但し、はりあわせは、5角形面と6角形面のすべてを pair にして orientation-reversing isometry で同一視し、境界3角形面たちで ∂M を成すように行なわれるものとする。このとき、 M は truncated tetrahedron の ideal vertex が集まってできる end をもち、 ∂M が全測地的になる双曲的構造をもつ (しかし end で完備とは限らない)。この双曲的構造に関し、 ∂M に沿っての double は体積有限になる。また、境界 ∂M 上には truncated tetrahedron 分解に付随した測地的3角形による cell 分割が存在している。この cell 分割の各辺は truncated tetrahedron の境界3角形の辺である。

Truncated tetrahedron のはりあわせで得られる双曲的3次元多様体を具体的に構成するのは一般的にあまり容易ではない。具体例については [5] [7] を参照せよ。Kojima-Miyamoto [14] や [6] では a タイプの truncated tetrahedron のはりあわせでできる双曲的3次元多様体を扱っている。Truncated tetrahedron と同様に、truncated polyhedron が考えられるが、truncated polyhedron 分解については次がわかっている。

Theorem (Kojima [11] [12]). 任意の全測地的境界をもつ完備な双曲的3次元多様体は、標準的な truncated polyhedron 分解をもつ。

Remark. Truncated tetrahedron 分解をもつかどうかはわかっていない。

全測地的境界をもつ双曲的 3 次元多様体については、Kojima-Miyamoto [14] や Miyamoto [17] [18] による面白い研究結果がある。Kojima-Miyamoto は、全測地的境界をもつコンパクト双曲的 3 次元多様体全体の中での最小体積を与える双曲的 3 次元多様体を、境界上の circle packing の local density について議論することで決定した。Miyamoto は、双曲的 3 次元多様体の体積とその全測地的境界である双曲的曲面の面積の比の下からの評価を与えることで、全測地的境界をもつ完備双曲的 3 次元多様体全体の中での最小体積を与える双曲的 3 次元多様体を決定した。これら最小体積を与える多様体は a タイプの truncated tetrahedron のはりあわせで得られる。

3. 双曲的構造の変形と多面体分解による変形の記述

種数 $g (\geq 2)$ の閉曲面を Σ_g とする。基本群 $\pi_1(\Sigma_g)$ の $PSL_2(\mathbf{R})$ への faithful な離散表現 ($PSL_2(\mathbf{R})$ への像が $PSL_2(\mathbf{R})$ の離散部分群になるような表現のこと) 全体を $PGL_2(\mathbf{R})$ による共役な作用で割った空間は、この曲面の Teichmüller 空間 \mathbf{T}_g である。

$$\mathbf{T}_g = \{\pi_1(\Sigma_g) \rightarrow PSL_2(\mathbf{R}); \text{faithful discrete representation}\} / PGL_2(\mathbf{R})$$

これは、 $Hom(\pi_1(\Sigma_g), PSL_2(\mathbf{R})) / PGL_2(\mathbf{R})$ の一つの連結成分であり、 \mathbf{R}^{6g-6} と同相になる。そこで、 Σ_g に入る双曲的計量に対応する離散表現を一つもってきたとき、この表現を \mathbf{T}_g 内で連続的に変形することにより、新たな双曲的計量をもつ双曲的曲面が得られる。

一方、第 2 章で述べたように体積有限の完備双曲的 3 次元多様体 (M, d_0) に対しても、 $\pi_1(M)$ の $PSL_2(\mathbf{C})$ への faithful な離散表現 ρ_0 が対応し、曲面のときと同じく

$$\{\pi_1(M) \rightarrow PSL_2(\mathbf{C}); \text{faithful discrete representation}\} / PSL_2(\mathbf{C})$$

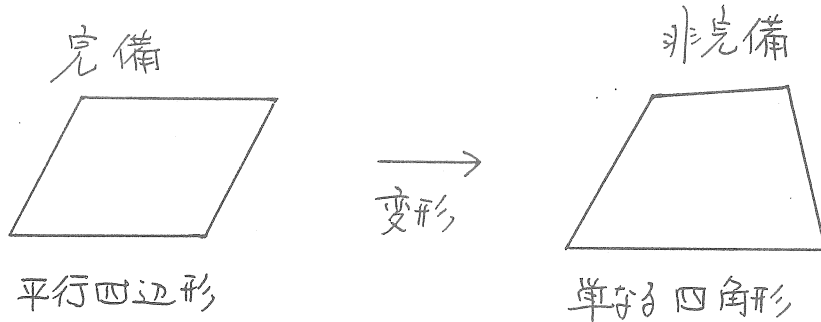
という空間が考えられるが、これは Mostow の剛性定理により一点になってしまうことがわかる。つまり、 $\pi_1(M)$ の $PSL_2(\mathbf{C})$ への離散表現を一つもってきたとき、この表現を異なる離散表現に連続的に変形し、 M 上の完備な双曲的構造を得ることができない。完備のまま体積有限の双曲的 3 次元多様体は変形することはできないのである。

そこで、 (M, d_0) に対応する離散表現 ρ_0 を

$$\text{Hom}(\pi_1(M), \text{PSL}_2(\mathbb{C})) / \text{PSL}_2(\mathbb{C})$$

の中で変形することができないかと考える。

多様体 M が非コンパクトのとき、 (M, d_0) が体積有限完備双曲的 3 次元多様体ということより、 (M, d_0) はいくつかの torus cusp を end にもつ。このときには、 ρ_0 を $\text{Hom}(\pi_1(M), \text{PSL}_2(\mathbb{C})) / \text{PSL}_2(\mathbb{C})$ の中で連続的に変形することができ、その変形の次元は torus cusp の数の 2 倍になることがわかっている ([22])。この場合の双曲的構造の変形を各 end の $(\mathbb{H}^3$ の t 軸に直交する面における) 切り口で見ると、変形は図のような現象を生じさせることに相当する。変形してしまうと、end で非完備になる。



全体 M の変形は end における変形で決まってしまうこともわかる。End における変形は次のようにもいえることができる。各 cusp は位相的に $T^2 \times [0, \infty)$ だから基本群は $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ である。これは、 $\pi_1(M)$ の中に単射で入っていて、その $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ への表現の像は $\partial\mathbb{H}^3$ 上同じ点を固定点にもつ 2 つの放物型元である。変形は、それらを双曲型元あるいは楕円型元に連続的に変えていくことに相当する。

厳密に双曲的構造の変形を扱おうとすると、 $\pi_1(M)$ の $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ への表現 (ホロミーという) の変形としてみるだけではならず、展開写像による定式化が必要であるが ([1] [3] [22])、ここでは小さな変形しか扱わないのでホロミーの変形としてみるだけで十分である ([1] [3] [10] [16] [22])。

さて、 (M, d_0) の変形で、非完備な双曲的 3 次元多様体 (M, d) を得るが、この多様体の非完備となる end のところで Dehn 手術を施すことにより双曲的 3 次元多様体として自然な (M, d) のコンパクト化が得られるということを保証するのが、Thurston の双曲的 Dehn 手術理論である ([1] [20] [22])。このコンパクト化により閉双曲的 3 次元多様体を組織的に構成でき、この理論によって、ある意味でほとんどの閉 3 次元多様体上に双曲的構造が入ることもわかる。さらに、双曲的構造を変形し、変

形の極限およびそのコンパクト化の幾何学的構造がすべて解明されてしまうと、Poincaré 予想をも含む Thurston の幾何学化予想が解けたことになる ([15] [21] [23])。

双曲的構造の変形を表現の変形としてみるだけでは扱いが難しいが、Thurston や Neumann-Zagier [20] は、体積有限非コンパクト完備双曲的 3 次元多様体の場合には、ideal tetrahedron 分解をもてば、ideal tetrahedron の変形のパラメーターで双曲的構造の変形が記述できることを示した。この変形の具体的記述を用いて、変形後コンパクト化して得られる 3 次元多様体の体積や η 不変量を Neumann-Zagier [20], Yoshida [26] は計算している。

この講演では、全測地的境界をもつ完備非コンパクト双曲的 3 次元多様体（境界について double をとると体積有限になるもの）が truncated tetrahedron 分解される場合に、双曲的構造の変形が truncated tetrahedron の変形のパラメーター θ_i を用いて記述できることを報告する。主結果は次である。

Theorem [8]. (M, d_0) を非コンパクト完備双曲的 3 次元多様体で境界 ∂M が全測地的となるもので、truncated tetrahedron 分解されるものとする。このとき、境界が全測地的に保たれたまま、 M の双曲的構造の変形が連続的に行なえる。さらに、双曲的構造の変形後の双曲的 3 次元多様体 (M, d) も変形前の (M, d_0) と組合的に同じ truncated tetrahedron 分解をもち、双曲的構造の変形は、truncated tetrahedron の変形のパラメーターを用いて記述される。

但し、

$n :=$ 分解に必要な truncated tetrahedron の数

$$W := \left\{ \begin{array}{l} (\theta_1, \dots, \theta_{6n}) \in \mathbb{R}^{6n} \\ \left. \begin{array}{l} \bullet \text{ truncated tetrahedron になるための } \theta_i \text{ の条件} \\ \bullet \text{ truncated tetrahedron のはり合わせ面が} \\ \text{等長的になるための } \theta_i \text{ の条件 (図参照)} \\ \bullet \text{ truncated tetrahedron の辺のまわりで} \\ \text{集まってくる角度が } 2\pi \text{ となる条件 (図参照)} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

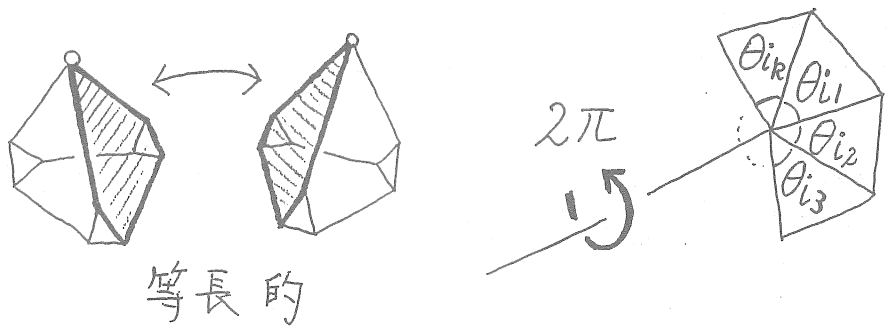
$\vec{\theta}_0 \in W : d_0$ に対応するパラメーター

としたとき、

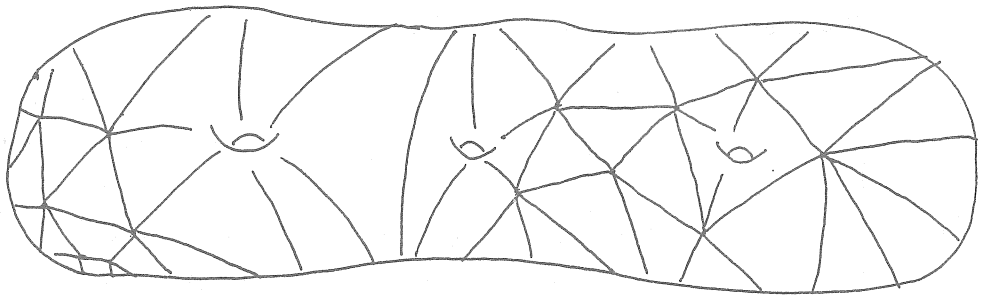
“ M の双曲的構造の変形空間 ”

$$\begin{array}{ccc}
 \cup & & \cup \\
 U & \xleftrightarrow[\text{diffeo}]{\cong} & O \\
 \psi & & \psi \\
 d_0 & \xleftrightarrow{\quad} & \theta_0
 \end{array}$$

という開近傍 U と O が存在するときに 双曲的構造の変形が truncated tetrahedron の変形のパラメーターを用いて記述される という。



変形後の双曲的 3 次元多様体 (M, d) の境界は双曲的曲面であるが、その曲面上には truncated tetrahedron 分解に付随した、測地的 3 角形による cell 分割が存在する。



この cell 分割の各辺は、truncated tetrahedron の境界 3 角形の辺でもあるので、その長さは truncated tetrahedron の変形のパラメーターで書き表される。つまり、 M の双曲的構造の変形空間から、 (M, d) の境界の連結成分上の cell 分割の辺の長さのなすパラメーター空間への写像が書き下せた。その上、cell 分割の辺の長さの、 M の双曲的構造の変形に関する微分が陰関数定理を用いて計算できる。

文献

1. R. Benedetti and C. Petronio : Lectures on Hyperbolic Geometry, Springer-Verlag, 1992.
2. R. Brooks : *Circle packings and co-compact extensions of Kleinian groups*, Invent. Math. **86** (1986), 461-469.
3. R.D. Canary, D.B.A. Epstein and P. Green : *Notes on notes of Thurston*, in "Analytical and Geometric Aspects of Hyperbolic Space (London Mathematical Society Lecture Notes 111)" (ed. D.B.A.Epstein), Cambridge University Press (1984), 3-92.
4. D.B.A. Epstein and R.C. Penner : *Euclidean decompositions of noncompact hyperbolic manifolds*, J. Differ. Geom. **27** (1988), 67-80.
5. M. Fujii : *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, Osaka J. Math. **27** (1990), 539-553.
6. M. Fujii : *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra*, Tokyo J. Math. **13** (1990), 353-373.
7. M. Fujii : *On totally geodesic boundaries of hyperbolic 3-manifolds*, Kodai Math. J. **15** (1992), 244-257.
8. M. Fujii : *Deformations of hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, in preparation.
9. M. Gromov : *Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jørgensen*, Lecture Notes in Math. **842** (1981), 40-53.
10. W.M. Goldman : *Geometric structures on manifolds and varieties of representations*, Contemporary Math. **74** (1989), 169-198.
11. S. Kojima : Thurston の '怪物定理' について, 数学 **34** (1982), 301-316.
12. S. Kojima : *Polyhedral decomposition of hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, Advanced Studies in Pure Math. **20** (1992), 93-112.
13. S. Kojima : *Polyhedral decomposition of hyperbolic manifolds with boundary*, to appear.

14. S. Kojima and Y. Miyamoto : *The smallest hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, J.Differ.Geom. **34** (1991), 175-192.
15. S. Kojima, K. Ohshika and T. Soma : *Towards a proof of Thurston's geometrization theorem for orbifolds*, 数理解析研究所講究録 **568** (1985), 1-72.
16. W.L. Lok : *Deformations of locally homogeneous spaces and Kleinian groups*, doctoral dissertation, Columbia University, 1984.
17. Y. Miyamoto : *On the volume and surface area of hyperbolic polyhedra*, Geom. Dedicata **40** (1991), 223-236.
18. Y. Miyamoto : *Volumes of hyperbolic manifolds with geodesic boundary*, preprint 1991.
19. J. Morgan : *On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds*, in "The Smith Conjecture" (ed. J. Morgan and H. Bass), Academic Press (1984), 37-125.
20. W. D. Neumann and D. Zagier : *Volumes of hyperbolic three-manifolds*, Topology **24** (1985), 307-332.
21. T. Soma : *Thurston の仕事と Gromov (3次元多様体上の双曲的構造の柔軟性について)*, in "Gromov と幾何学"(Reports on Global Analysis XI), 1986.
22. W.P. Thurston : *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Lecture Notes, Princeton: Princeton University Press, 1978/79.
23. W.P. Thurston : *Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. A.M.S. **6** (1982), 357-381.
24. W.P. Thurston : *Hyperbolic structures on 3-manifolds I : deformation of acylindrical manifolds*, Ann. of Math. **124** (1986), 203-246.
25. J.R. Weeks : "SNAPPEA" the Weeks hyperbolic 3-manifolds program, reviewed by C. Adams, Notices A.M.S. **37** (1990), 273-275.
26. T. Yoshida : *The η -invariant of hyperbolic 3-manifolds*, Invent. Math. **81** (1985), 473-514.

Quantum $SU(2)$ -invariants dominate Casson's $SU(2)$ -invariant

あるいは,

Quantum $SO(3)$ -invariants dominate Walker's $SU(2)$ -invariant

大阪市立大学理学部 村上 斉

M を向き付けられた閉3次元多様体, G をコンパクト単純 Lie 群, r を 2 以上の整数とする. E. Witten は, G に付随した不変量 (quantum G -invariant $\tau_r^G(M)$) を提唱した [19]. $G = SU(2)$ に対しては, その不変量の数学的な導入が N.Yu. Reshetikhin と V.G. Turaev によって, 量子群 $U_q \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ の表現を用いて与えられた [17]. quantum $SU(2)$ -invariant は, 他にもいくつかの定義が知られている. ([2], [3], [4], [5], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [16])

R. Kirby と P. Melvin [8] は, quantum $SU(2)$ -invariant の持つ対称性 (Symmetry Principle) に目を付け, r が奇数のときには, quantum $SO(3)$ -invariant が定義できることを示すと同時に

$$\tau_r^{SU(2)}(M) = \begin{cases} \tau_3^{SU(2)}(M) \tau_r^{SO(3)}(M) & (r \equiv 1 \pmod{4}) \\ \tau_3^{SU(2)}(M) \tau_r^{SO(3)}(M) & (r \equiv 3 \pmod{4}) \end{cases}$$

という関係式を得た. ([2], [4] も参照. $\tau_r^{SU(2)}, \tau_r^{SO(3)}$ は [8] でそれぞれ τ_r, τ'_r と書かれているものである. また, これらはすべて, 1 の r 乗根として $q = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{r}$ を選んだときの式である.) 特に, M が \mathbb{Z} -homology 3-sphere のときは, $\tau_r^{SU(2)}(M) = \tau_r^{SO(3)}(M)$ となる.

$SO(3)$ -invariant は $SU(2)$ -invariant に比べて, 計算量が格段に減っていることがわかる. 具体的な計算を通じて, 彼らは M が knot の $1/n$ -surgery で与

えられるような \mathbb{Z} -homology 3-sphere のときには, $\tau_5^{SU(2)}(M) = \tau_5^{SO(3)}(M)$ が Casson's $SU(2)$ -invariant $\lambda(M)$ ($\pi_1(M)$ から $SU(2)$ への表現を用いて得られる不変量 [1]) を mod 5 で決定するという結果を示した.

この結果を任意の \mathbb{Z} -homology 3-sphere M , 任意の奇素数 r に拡張したのが [14] である. $\mathbb{Z}[q]$ を cyclotomic integers ($\sum_k f_k q^k$ ($f_k \in \mathbb{Z}$) の形で表されるもの) として, $T: \mathbb{Z}[q] \rightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ を $T(\sum_k f_k q^k) = \sum_k f_k \pmod{r}$ で定義する [8] (T は環の準同型). 以下, r は奇素数とし, 特にことわらない限り合同式はすべて r を法とする. [14] の結果は次の通りである.

定理 1. M が \mathbb{Z} -homology 3-sphere のとき,

$$(1) \tau_r^{SO(3)}(M) \in \mathbb{Z}[q],$$

$$(2) T\left[\tau_r^{SO(3)}(M)\right] \equiv 1,$$

(よって $\tau_r^{SO(3)}(M) - 1$ は $q-1$ で割り切れる.)

$$(3) T\left[\frac{\tau_r^{SO(3)}(M) - 1}{q-1}\right] \equiv 3\lambda(M)$$

が成り立つ. ただし, ここでの Casson's $SU(2)$ -invariant は [1] で述べられているものの 2 倍である (よって $\lambda(M) \in 2\mathbb{Z}$).

注意 1. 定理 1 は, 大雑把に言うと

$$\tau_r^{SO(3)}(M) = 1 + 3\lambda(M)(q-1) + a_{r,2}(q-1)^2 + \dots + a_{r,i}(q-1)^i + \dots$$

と $q-1$ で展開できることを主張している. ここで, $\lambda(M)$ は r によらない "universal" な量であることに注意されたい. $(q-1)^i$ ($2 \leq i \leq (r-3)/2$) の係数 $a_{r,i}$ も "universal" な量 λ_i から得られることが, T. Ohtsuki によって

示された [15] .

Casson's $SU(2)$ -invariant は, K. Walker によって \mathbb{Q} -homology 3-sphere の不変量 (同じ $\lambda(M)$ で表す) に拡張された [18] . 上の結果が \mathbb{Q} -homology 3-sphere の場合に成り立つかと考えるのは自然であろう.

$$\tilde{\tau}_r(M) := |H_1(M; \mathbb{Z})| \left[\frac{|H_1(M; \mathbb{Z})|}{r} \right] \tau_r^{SO(3)}(M)$$

とおく. (絶対値記号は元の個数を, $\left[\frac{x}{r} \right]$ は Legendre 記号を表す.) 部分的な結果として, 次の定理を示すことができた.

定理 2. M が algebraically split link (linking number がすべて 0 である link) の整数係数 Dehn surgery で得られる $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ -homology 3-sphere のとき,

$$(1) \tau_r^{SO(3)}(M) \in \mathbb{Z}[q],$$

$$(2) T \left[\tilde{\tau}_r(M) \right] \equiv 1,$$

$$(3) T \left[\frac{\tilde{\tau}_r(M) - 1}{q-1} \right] \equiv 3\lambda(M)$$

が成り立つ.

注意 2. $3\lambda(M)$ は, 分母を $|H_1(M; \mathbb{Z})|$ として持つ有理数に値をとる. よって, 定理 2 の仮定の元で, $|H_1(M; \mathbb{Z})|$ は $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ において逆元を持ち, $3\lambda(M)$ を $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ で考えることができる. 定理 2 (3) の合同式はこの意味である.

注意 3. 任意の \mathbb{Z} -homology 3-sphere は、定理 2 のような方法で得られるので、定理 2 は定理 1 の拡張である。

ひとりごと. ~~おそらく~~一般の $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ -homology 3-sphere に対しても定理 2 が成り立っていると思われる。また、quantum invariant が $SO(3)$ で、Casson-Walker invariant が $SU(2)$ であるは気持ちが悪い。もっとも、私はなぜ $SU(2)$ や $SO(3)$ がでてくるのかよくわかっていないので、単に言葉の上の気持ち悪さであるのが情けない。

定理 2 は、定理 1 と全く同じ方針で示すことができる。以下、定理 2 の証明の概略を説明してみたい。なお、この原稿は 1993 年 3 月、津田塾大学で開かれた、津田トポロジーシンポジウム『結び目理論と低次元多様体のトポロジー』の講演集に提出した原稿（定理 1 の証明の概略）を元に作成したことをお断りしておく。

§ 1. 記号などの定義

この節では、記号といくつかの定義をする。

定数として、次のものを使う。

r : 奇素数

$$q = \exp \frac{2\pi \sqrt{-1}}{r}, \quad s = \exp \frac{\pi \sqrt{-1}}{r} \quad (\text{よって } q^r = 1, s^2 = q),$$

$$[k] = \frac{s^k - s^{-k}}{s - s^{-1}} = s^{k-1} + s^{k-3} + \dots + s^{-k+3} + s^{-k+1},$$

$$G(q) = \sum_{i=0}^{r-1} q^{i^2} \quad (\text{ガウス和}).$$

\mathbf{k} のような太字で、multi-index を表すことにする。演算などの規則は次のように定める。 $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_\mu)$, $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_\mu)$ を multi-index, x をスカラーとするとき、

$$\begin{aligned}
|\mathbf{k}| &= k_1 + \cdots + k_\mu, \\
[\mathbf{k}] &= [k_1] \cdots [k_\mu], \\
\begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_1 \\ j_1 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_\mu \\ j_\mu \end{pmatrix}, \\
\begin{pmatrix} \mathbf{k} \\ r \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} k_1 \\ r \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} k_\mu \\ r \end{pmatrix}, \\
\mathbf{k} + \mathbf{j} &= (k_1 + j_1, \dots, k_\mu + j_\mu), \\
\mathbf{k}\mathbf{j} &= (k_1 j_1, \dots, k_\mu j_\mu), \\
\mathbf{k} > \mathbf{j} &\Leftrightarrow k_1 > j_1, \dots, k_\mu > j_\mu, \\
\mathbf{x} &= (x, \dots, x), \\
\mathbf{x}\mathbf{k} &= x^{k_1} \cdots x^{k_\mu}, \\
\mathbf{x}\mathbf{k} = \mathbf{k}\mathbf{x} &= (xk_1, \dots, xk_\mu), \\
\mathbf{k} \langle x &\Leftrightarrow \mathbf{k} \langle \mathbf{x} \Leftrightarrow k_1 \langle x, k_2 \langle x, \dots, k_\mu \langle x.
\end{aligned}$$

向きの付いた link L の Jones polynomial $V(L; t)$ を

$$\begin{aligned}
V(\text{trivial knot}; t) &= 1, \\
tV(L_+; t) - t^{-1}V(L_-; t) &= (t^{1/2} - t^{-1/2})V(L_0; t)
\end{aligned}$$

で定義し,

$$X(L; t) = \frac{V(L; t)}{(t^{1/2} + t^{-1/2})^{\#(L)-1}}$$

とおく. ただし, L_+, L_-, L_0 は, 同じ link の交差を, それぞれ, \times, \times, \times に変えたものである. $X(L; t)$ は $\mathbb{Z}[\frac{1}{t+1}, t, t^{-1}]$ の元である. $q+1$ は $\mathbb{Z}[q]$ で可逆だから, $X(L; q) \in \mathbb{Z}[q]$ がわかる.

また, Conway polynomial $\nabla(L; z)$ を

$$\begin{aligned}\nabla(\text{trivial knot}; z) &= 1, \\ \nabla(L_+; z) - \nabla(L_-; z) &= -z \nabla(L_0; z)\end{aligned}$$

で定義し, $\nabla(L; z)$ の $z^{\#(L)+1}$ の係数を $\varphi(L)$ とおく.

§ 2. invariant の計算法

この節では, M が algebraically split link の整数係数 Dehn surgery で得られるとき, その quantum $SO(3)$ -invariant と Walker's $SU(2)$ -invariant を計算する方法を説明する.

$\mathcal{L} = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ を surgery 係数 $f = (f_1, \dots, f_\mu)$ も含めた link とする ($f_\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$). $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ で, surgery 係数を忘れた link を表す. $\sigma_+(\mathcal{L})$ ($\sigma_-(\mathcal{L})$) を $\{f_1, \dots, f_\mu\}$ に含まれる正の数 (負の数) の個数とし, $\sigma(\mathcal{L}) = \sigma_+(\mathcal{L}) - \sigma_-(\mathcal{L})$ とおく. また,

$$\tilde{\sigma}(\mathcal{L}) = \begin{cases} \sigma_+(\mathcal{L}) & (r \equiv 1 \pmod{4}), \\ \sigma_-(\mathcal{L}) & (r \equiv -1 \pmod{4}) \end{cases}$$

とする.

すると, M の, q に対応した quantum $SO(3)$ -invariant $\tau_r^{SO(3)}(M)$ は, [8] により

$$\tau_r^{SO(3)}(M) = \alpha(\mathcal{L}) \Sigma(\mathcal{L})$$

で与えられる. ただし,

$$\alpha(\mathcal{L}) = \left[\frac{q-1}{G(q)} \right]^\mu (-1)^{\tilde{\sigma}(\mathcal{L})} q^{3 \cdot 4^* \sigma(\mathcal{L}) - 2^* \mu},$$

$$\Sigma(\mathcal{L}) = \sum_{k=1}^{(r-1)/2} q^{4^* f(k^2-1)} \{k\}$$

$$\times \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \binom{k-j-1}{j} [2]^{k-2j-1} X(L^{k-2j-1}; q)$$

である。ここで、 x^* は、 $\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ における x の逆元を表す。(この記号の使い方は、[15] による。) また、 L^c は、 L の $\mathbf{0}$ -framing に対応する c -parallel (各 K_ξ に対して c_ξ 本の平行な loop をとることによって得られる link) である。

Walker's $SU(2)$ -invariant の計算には、J. Hoste の公式 [6] と同様にして証明できる次の公式を使う。

定理(右側)

補題 1. M が algebraically split link $L = K_1 \cup \dots \cup K_\mu$ の整数係数 Dehn surgery で得られるとき、

$$\lambda(M) = - \sum_{\xi=1}^{\mu} \frac{(|f_\xi| - 1)(|f_\xi| - 2)}{12 f_\xi} + 2 \sum_{\ell \subseteq L} \left[\prod_{K_\xi \in \ell} f_\xi^{-1} \right] \varphi(\ell).$$

ただし、 $f_\xi \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ は K_ξ の surgery 係数である。

§ 3. 証明の概略

この節では、定理の証明の概略を述べる。

まず、Gauss 和 $G(q)$ は、 $\mathbb{Z}[q]$ のある可逆元 u を使って、 $(q-1)^{(r-1)/2} \times u$ と書けることから [7]、

$$\alpha(\mathcal{L}) = \frac{u(\mathcal{L})}{(q-1)^{\mu(r-3)/2}} \quad (u(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q])$$

となる. $\Sigma(\mathcal{L})$ は $\mathbb{Z}[q]$ に入るので, $\tau_r^{SO(3)}(M) = \alpha(\mathcal{L})\Sigma(\mathcal{L})$ が $\mathbb{Z}[q]$ に入ること (定理 2(1)) を示すには, $\Sigma(\mathcal{L})$ が $q-1$ で $\mu(r-3)/2$ 回割り切れることをいえばよいことになる. そのために $\Sigma(\mathcal{L})$ を $q-1$ で展開してみる. まず $X(L; q)$ は

$$\begin{aligned} X(L; q) = & X^{(0)}(L) + X^{(1)}(L)(q-1) + \frac{1}{2}X^{(2)}(L)(q-1)^2 + \dots + \frac{1}{d!}X^{(d)}(L)(q-1)^d + \dots \\ & + \frac{1}{(\mu(r-3)/2 + 1)!}X^{(\mu(r-3)/2 + 1)}(L)(q-1)^{\mu(r-3)/2 + 1} \\ & + f(L)(q-1)^{\mu(r-3)/2 + 2} \quad (f(L) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q]) \end{aligned}$$

と展開できるので $X^{(d)}(L)$ は $t = 1$ における $X(L; t)$ の d 回導関数, これに従って $\Sigma(\mathcal{L})$ を

$$\begin{aligned} \Sigma(\mathcal{L}) = & \sum_{d=0}^{\mu(r-3)/2 + 1} \Sigma^{(d)}(\mathcal{L}) + F(\mathcal{L})(q-1)^{\mu(r-3)/2 + 2} \\ & (F(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q]) \end{aligned}$$

と分解する. ここで,

$$\begin{aligned} \Sigma^{(d)}(\mathcal{L}) = & \sum_{k=1}^{(r-1)/2} q^{4k} f(k^2-1) [k] \\ & \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{bmatrix} k-j-1 \\ j \end{bmatrix} [2]^{k-2j-1} \frac{1}{d!} X^{(d)}(L^{k-2j-1})(q-1)^d \end{aligned}$$

である.

上の式にでてきた $X^{(d)}$ に関して, 次の式が成り立つ. (証明は, [14] 参照.)

命題 1. L を, 成分数が μ の algebraically split link とする. そのとき

$$X^{(0)}(L) = 1,$$

$$X^{(d)}(L) = (-1)^{d+1} 12 \times d! 2^{-d} \sum_{\substack{\#(\ell) = d-1 \\ \ell \subseteq L}} \varphi(\ell) \\ + \sum_{\nu=1}^{d-2} (-1)^{d+\nu} \begin{bmatrix} \mu - \nu - 1 \\ d - \nu - 2 \end{bmatrix}_{\#(\ell) = \nu} \sum_{\ell \subseteq L} X^{(d)}(\ell) \quad (d > 0)$$

が成立する.

命題1の右辺にでてくる2つの項に対応して、 $d > 0$ のとき $\Sigma^{(d)}(\mathcal{L})$ をさらに2つに分解する.

$$\Sigma^{(d)}(\mathcal{L}) = \Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) + \Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}).$$

ただし,

$$\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) = (-1)^{d+1} 12 \times 2^{-d} (q-1)^d \sum_{k=1}^{(\tau-1)/2} q^{4^* f(k^2-1)} [k] \\ \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{bmatrix} k-j-1 \\ j \end{bmatrix} [2]^{k-2j-1} \sum_{\substack{\#(\ell) = d-1 \\ \ell \subseteq L}} \varphi(\ell) \\ (\in \mathbb{Z}[q]),$$

$$\Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) = \frac{1}{d!} (q-1)^d \sum_{k=1}^{(\tau-1)/2} q^{4^* f(k^2-1)} [k] \\ \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{bmatrix} k-j-1 \\ j \end{bmatrix} [2]^{k-2j-1} \\ \sum_{\nu=1}^{d-2} (-1)^{d+\nu} \begin{bmatrix} |k-2j-1| - \nu - 1 \\ d - \nu - 2 \end{bmatrix} \sum_{\substack{\#(\ell) = \nu \\ \ell \subseteq L}} X^{(d)}(\ell) \\ (\in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q])$$

である.

$\Sigma(\mathcal{L})$ の分解によって得られた $\tau_r^{SO(3)}(M)$ の分解は次のようになる.

$$\begin{aligned} \tau_r^{SO(3)}(M) &= \alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) \\ &+ \sum_{d=1}^{\mu(r-3)/2+1} \alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) + \sum_{d=1}^{\mu(r-3)/2+1} \alpha(\mathcal{L})\Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) \\ &+ \alpha(\mathcal{L})F(\mathcal{L})(q-1)^{\mu(r-3)/2+2}. \end{aligned} \quad \dots (*)$$

次の3つの補題を使って定理2を証明する. $H(\mathcal{L}) := \prod_{\xi=1}^{\mu} |f_{\xi}| \left(\frac{|f_{\xi}|}{r} \right)$

とおく.

補題2.

- (1) $\alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q]$,
- (2) $T \left[H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) \right] \equiv 1$,
- (3) $T \left[\frac{H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) - 1}{q-1} \right] \equiv - \sum_{\xi=1}^{\mu} 4^* f_{\xi}^* (|f_{\xi}| - 1)(|f_{\xi}| - 2)$.

補題3.

- (1) $\alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q]$,
- (2) $T \left[\alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) \right] \equiv 0$,
- (3) $T \left[\frac{H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L})}{q-1} \right] \equiv 6 \sum_{\substack{\#(\ell) \\ \ell \subseteq L}}^{d-1} \left[\prod_{\xi \in \ell} f_{\xi}^* \right] \varphi(\ell)$.

補題4.

- (1) $\alpha(\mathcal{L})\Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q]$,
- (2) $T \left[\alpha(\mathcal{L})\Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) \right] \equiv 0$,

$$(3) T \left[\frac{\alpha(\mathcal{L}) \Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L})}{q-1} \right] \equiv 0.$$

ただし, $T : \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q] \rightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ も $T : \mathbb{Z}[q] \rightarrow \mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ と同じように定義する.

補題 2, 3, 4 を使った定理 2 の証明.

$$\alpha(\mathcal{L}) = \frac{u(\mathcal{L})}{(q-1)^{\mu(r-3)/2}}$$

であったので,

$$\alpha(\mathcal{L}) F(\mathcal{L}) (q-1)^{\mu(r-3)/2+2} \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q],$$

$$T \left[\alpha(\mathcal{L}) F(\mathcal{L}) (q-1)^{\mu(r-3)/2+2} \right] \equiv 0,$$

$$T \left[\frac{\alpha(\mathcal{L}) F(\mathcal{L}) (q-1)^{\mu(r-3)/2+2}}{q-1} \right] \equiv 0$$

となる. つまり, (*) 式における最後の項は, 定理の主張に何も影響しないということである.

これに注意して, 補題 2 (1), 補題 3 (1), 補題 4 (1) を見ると定理 2 (1) が成立することがわかる. (実際は, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q]$ に入ることはわからないが, $\alpha(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{q-1}, q]$ により $\tau_r^{SO(3)}(M) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{q-1}, q]$ となり, $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q] \cap \mathbb{Z}[\frac{1}{q-1}, q] = \mathbb{Z}[q]$ より $\tau_r^{SO(3)} \in \mathbb{Z}[q]$ がわかる.)

定理 2 (2) は 補題 2 (2), 補題 3 (2), 補題 4 (2) からわかる.

最後に, 定理 2 (3) を示す. $r = 3$ のときは, 両辺とも 0 で正しい

$(\tau_3^{SO(3)})_r(M) = 1$ に注意). 補題 1, 補題 2 (3), 補題 3 (3), 補題 4 (3) を使くと

$$\begin{aligned}
 & T \left[\frac{\widetilde{\tau}_r(M) - 1}{q-1} \right] \\
 & \equiv - \sum_{\xi=1}^{\mu} 4^* f_{\xi}^* (|f_{\xi}| - 1)(|f_{\xi}| - 2) \\
 & \quad + 6 \sum_{d=1}^{\mu(r-3)/2+1} \sum_{\substack{(\ell) = d-1 \\ \ell \subseteq L}} \left[K_{\xi} \prod_{\xi \in \ell} f_{\xi}^* \right] \varphi(\ell) \\
 & \equiv 3 \left\{ - \sum_{\xi=1}^{\mu} 12^* f_{\xi}^* (|f_{\xi}| - 1)(|f_{\xi}| - 2) + 2 \sum_{\ell \subseteq L} \left[K_{\xi} \prod_{\xi \in \ell} f_{\xi}^* \right] \varphi(\ell) \right\} \\
 & \equiv 3\lambda(M)
 \end{aligned}$$

となり, 証明が完了する. ただし, 2 番目の合同式で $\mu(r-3)/2 \geq \mu$ という事実 ($r \geq 5$ より) を使った.

§ 4. 補題 2 の証明.

まず

$$\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) = \sum_{k=1}^{(r-1)/2} q^{4^* f(k^2-1)} [k] \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{bmatrix} k-j-1 \\ j \end{bmatrix} [2]^{k-2j-1}$$

を計算する.

$$[k] = \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{bmatrix} k-j-1 \\ j \end{bmatrix} [2]^{k-2j-1}$$

を使うと,

$$\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) = q^\mu \left(\frac{G(q)}{q-1} \right)^\mu q^{-4^* f} \left(\frac{f}{r} \right) \prod_{\xi=1}^{\mu} \left(\frac{q^{-f^* \xi} - 1}{q-1} \right)$$

がわかる.

$$\alpha(\mathcal{L}) = \left(\frac{q-1}{G(q)} \right)^\mu (-1)^{\widetilde{\sigma}(\mathcal{L})} q^{3 \cdot 4^* \sigma(\mathcal{L}) - 2^* \mu}$$

であったから,

$$\alpha(\mathcal{L}) \Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) = (-1)^{\widetilde{\sigma}(\mathcal{L})} q^{3 \cdot 4^* \sigma(\mathcal{L}) + 2^* \mu} q^{-4^* f} \left(\frac{f}{r} \right) \prod_{\xi=1}^{\mu} \left(\frac{q^{-f^* \xi} - 1}{q-1} \right)$$

となる. これから,

$$\alpha(\mathcal{L}) \Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q]$$

はすぐにわかる.

$$\frac{q^{-f^* \xi} - 1}{q-1} = q^{-f^* \xi - 1} + q^{-f^* \xi - 2} + \dots + 1$$

および

$$H(\mathcal{L}) = \prod_{\xi=1}^{\mu} |f_{\xi}| \left(\frac{|f_{\xi}|}{r} \right) = (-1)^{\widetilde{\sigma}(\mathcal{L})} \left(\frac{f}{r} \right) \prod_{\xi=1}^{\mu} (-f_{\xi})$$

を使うと

$$\begin{aligned}
& H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L}) \\
& \equiv \prod_{\xi=1}^{\mu} \left[-f_{\xi} \right] q^{4^*(3\sigma(\mathcal{L})+2\mu-|f|)} \prod_{\xi=1}^{\mu} \left[q^{-f_{\xi}^*-1} + q^{-f_{\xi}^*-2} + \dots + 1 \right]
\end{aligned}$$

となる. よって $T\left[H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L})\right] \equiv 1$ である. 上の式を $q=1$ で“微分”することによって,

$$\begin{aligned}
& T\left[\frac{H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma^{(0)}(\mathcal{L})-1}{q-1}\right] \\
& \equiv \prod_{\xi=1}^{\mu} \left[-f_{\xi} \right] \\
& \quad \left[4^*(3\sigma(\mathcal{L})+2\mu-|f|) \prod_{\xi=1}^{\mu} \left[-f_{\xi}^* \right] \right. \\
& \quad \quad \left. + \sum_{\xi=1}^{\mu} \left\{ 2^*(-f_{\xi}^*-1)(-f_{\xi}^*) \prod_{\zeta \neq \xi} \left[-f_{\zeta}^* \right] \right\} \right] \\
& \equiv 4^* \sum_{\xi=1}^{\mu} \{ 3 \operatorname{sign}(f_{\xi}) + 2 - f_{\xi} + 2(-f_{\xi}^* - 1) \} \\
& \equiv - \sum_{\xi=1}^{\mu} 4^* f_{\xi}^* (|f_{\xi}| - 1)(|f_{\xi}| - 2).
\end{aligned}$$

が得られる.

§ 5. 補題 3 の証明.

命題 1 から次のことがわかる.

まず, $d = \mu + 1$ とおくと

系 1. L が algebraically split なら

$$\varphi(L) = \frac{2^{\mu}}{6(\mu+1)!} \sum_{\ell \subseteq L} (-1)^{\#(\ell)} X^{(\mu+1)}(\ell).$$

algebraically split link の Jones polynomial は成分の向きによらないので、

系2. L が algebraically split なら $\varphi(L)$ は、 L の成分の向きによらない。

系2を使って、 $\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L})$ を計算する。まず

$$\sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \varphi(\ell) = \sum_{\substack{\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_\mu) \\ |\mathbf{c}|=d-1}} \binom{\mathbf{k}-2\mathbf{j}-1}{\mathbf{c}} \varphi(L^{\mathbf{c}})$$

である。ところで、 $c_\xi > 1$ となる ξ があれば、parallel の1つの成分の向きを逆にすることによって $L^{\mathbf{c}}$ を boundary link にできる。boundary link の Conway polynomial は 0 だから、系2より $\varphi(L^{\mathbf{c}}) = 0$ となる。つまり、上の式は

$$\sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \left\{ \prod_{K_\xi \in \ell} (k_\xi - 2j_\xi - 1) \right\} \varphi(\ell)$$

になる。よって、

$$\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L})$$

$$= (-1)^{d+1} 12 \times 2^{-d} (q-1)^d \sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \varphi(\ell) \\ \times \prod_{K_\xi \in \ell} \left\{ \sum_{k_\xi=1}^{(r-1)/2} \frac{4^{*j_\xi} (k_\xi^2 - 1)}{q} [k_\xi] \right. \\ \left. \sum_{j_\xi=0}^{(k-1)/2} (-1)^{j_\xi} \binom{k_\xi - j_\xi - 1}{j_\xi} [2]^{k_\xi - 2j_\xi - 1} (k_\xi - 2j_\xi - 1) \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \prod_{K_\zeta \notin \ell} \left\{ \sum_{k_\zeta=1}^{(\tau-1)/2} q^{4^* f_\zeta (k_\zeta^2 - 1)} [k_\zeta] \right. \\
& \quad \left. \sum_{j_\zeta=0}^{(k-1)/2} (-1)^{j_\zeta} \begin{bmatrix} k_\zeta - j_\zeta - 1 \\ j_\zeta \end{bmatrix} [2]^{k_\zeta - 2j_\zeta - 1} \right\} \\
& = (-1)^{d+1} 12 \times 2^{-d} (q-1)^d \sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \varphi(\ell) \\
& \quad \times \prod_{K_\xi \in \ell} \left\{ 2 f_\xi^{*2} \left[\frac{f_\xi}{r} \right] \frac{G(q)}{(q-1)^2} + v_\xi (q-1)^{(\tau-3)/2} \right\} \\
& \quad \times \prod_{K_\zeta \notin \ell} \left\{ -f_\zeta^* \left[\frac{f_\zeta}{r} \right] \frac{G(q)}{(q-1)} + v'_\zeta (q-1)^{(\tau-1)/2} \right\} \\
& = 6 \times \frac{G(q)^\mu}{(q-1)^{\mu-1}} \left[\frac{f}{r} \right] \prod_{\xi=1}^{\mu} \left[-f_\xi^* \right] \sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \left[\prod_{K_\xi \in \ell} f_\xi^* \right] \varphi(\ell) \\
& \quad + v''(\mathcal{L}) (q-1)^{\mu(\tau-3)/2 + 2} \quad (v_\xi, v'_\zeta, v''(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q])
\end{aligned}$$

が得られる.

$$\begin{aligned}
\alpha(\mathcal{L}) & = (-1)^{\widetilde{\sigma}(\mathcal{L})} \left[\frac{q-1}{G(q)} \right]^\mu + w(\mathcal{L}) (q-1)^{-\mu(\tau-3)/2 + 1} \\
& \quad (w(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q])
\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
& \alpha(\mathcal{L}) \Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) \\
& = 6 (q-1) (-1)^{\widetilde{\sigma}(\mathcal{L})} \left[\frac{f}{r} \right] \prod_{\xi=1}^{\mu} \left[-f_\xi^* \right] \sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \left[\prod_{K_\xi \in \ell} f_\xi^* \right] \varphi(\ell) \\
& \quad + V(\mathcal{L}) (q-1)^2 \quad (V(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q])
\end{aligned}$$

となる. この式から

$$\alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[q],$$

$$T\left[\alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L})\right] \equiv 0$$

がわかる. また,

$$T\left[\frac{H(\mathcal{L})\alpha(\mathcal{L})\Sigma_1^{(d)}(\mathcal{L})}{q-1}\right] \equiv 6 \sum_{\substack{\#(\ell)=d-1 \\ \ell \subseteq L}} \left[K_{\xi \in \ell} \prod_{\xi \in \ell} f_{\xi}^* \right] \varphi(\ell)$$

となる.

§ 6. 補題 4 の証明

まず $\Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L})$ を計算する.

$$\sum_{\substack{\#(\ell)=\nu \\ \ell \subseteq L}} X^{(d)}(\ell) = \sum_{\substack{\mathbf{c}=(c_1, c_2, \dots, c_\mu) \\ |\mathbf{c}|=\nu}} \binom{\mathbf{k}-2\mathbf{j}-1}{\mathbf{c}} X^{(d)}(L^{\mathbf{c}})$$

であるから

$$\begin{aligned} & \Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) \\ &= \frac{1}{d!} (q-1)^d \sum_{\nu=1}^{d-2} (-1)^{d+\nu} \sum_{|\mathbf{c}|=\nu} X^{(d)}(L^{\mathbf{c}}) \\ & \quad \times \left\{ \sum_{\mathbf{k}=1}^{(\tau-1)/2} q^{4^*} f(\mathbf{k}^2-1) \begin{bmatrix} \mathbf{k} \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} \sum_{\mathbf{j}=0}^{(\mathbf{k}-1)/2} (-1)^{\mathbf{j}} \begin{bmatrix} \mathbf{k}-\mathbf{j}-1 \\ \mathbf{j} \end{bmatrix} \right. \\ & \quad \left. \begin{bmatrix} |\mathbf{k}-2\mathbf{j}-1| - \nu - 1 \\ d - \nu - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}-2\mathbf{j}-1 \\ \mathbf{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{k}-2\mathbf{j}-1 \\ [2] \end{bmatrix} \right\} \end{aligned}$$

となる.

$$\begin{pmatrix} |g| + x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{e=0}^M \begin{pmatrix} g \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y - |e| \end{pmatrix} \quad (0 \leq g \leq M)$$

という式を使うと, 上の式の $\left\{ \begin{matrix} \\ \end{matrix} \right\}$ の中は,

$$\begin{aligned} & \sum_{e=0}^{(r-3)/2} \begin{pmatrix} -\nu-1 \\ d-\nu-2-|e| \end{pmatrix} \sum_{k=1}^{(r-1)/2} q^{4^*} f(k^2-1) [k] \\ & \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{pmatrix} k-j-1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-2j-1 \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-2j-1 \\ c \end{pmatrix} [2]^{k-2j-1} \\ & = \sum_{e=0}^{(r-3)/2} \begin{pmatrix} -\nu-1 \\ d-\nu-2-|e| \end{pmatrix} \prod_{\xi=1}^{\mu} \\ & \left\{ \sum_{k_{\xi}=1}^{(r-1)/2} q^{4^*} f_{\xi}(k_{\xi}^2-1) [k_{\xi}] \sum_{j_{\xi}=0}^{(k_{\xi}-1)/2} (-1)^{j_{\xi}} \begin{pmatrix} k_{\xi}-j_{\xi}-1 \\ j_{\xi} \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} k_{\xi}-2j_{\xi}-1 \\ e_{\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_{\xi}-2j_{\xi}-1 \\ c_{\xi} \end{pmatrix} [2]^{k_{\xi}-2j_{\xi}-1} \right\} \\ & \dots (**) \end{aligned}$$

と変形できる.

ここで, 大槻知忠氏によって証明された命題を使う ([15] 参照).

命題 2. 任意の奇素数 r に対して

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{(r-1)/2} q^{4^*} f(k^2-1) [k] \\ & \sum_{j=0}^{(k-1)/2} (-1)^j \begin{pmatrix} k-j-1 \\ j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-2j-1 \\ e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k-2j-1 \\ c \end{pmatrix} [2]^{k-2j-1} \end{aligned}$$

は $\mathbb{Z}[q]$ において $(q-1)^{(r-3)/2 - e - c}$ で割り切れる.

この命題を使うと (**) は,

$$(q-1)^{\sum_{\xi=1}^{\mu} \left\{ (r-3)/2 - e_{\xi} - c_{\xi} \right\}}$$

で割り切れることがわかる. ところが, (**) の先頭にでてくる 2 項係数

$\binom{-\nu-1}{d-\nu-2-|e|}$ は $d-\nu-2-|e| < 0$ のとき 0 になるので,
 $-|e| \geq -d+\nu+2$ を仮定できる. また, $|c| = \nu$ だから,

$$\begin{aligned} \sum_{\xi=1}^{\mu} \left\{ (r-3)/2 - e_{\xi} - c_{\xi} \right\} &= \mu(r-3)/2 - |e| - |c| \\ &\geq \mu(r-3)/2 - d + \nu + 2 - \nu \\ &= \mu(r-3)/2 - d + 2 \end{aligned}$$

となり, (**) は $(q-1)^{\mu(r-3)/2 - d + 2}$ で割り切れることがわかる.

さて,

$$\alpha(\mathcal{L}) = \frac{u(\mathcal{L})}{(q-1)^{\mu(r-3)/2}}$$

であったので, 結局

$$\alpha(\mathcal{L}) \Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) \in \mathbb{Z}[\frac{1}{2}, q],$$

$$T \left[\alpha(\mathcal{L}) \Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L}) \right] \equiv 0,$$

$$T \left[\frac{\alpha(\mathcal{L}) \Sigma_2^{(d)}(\mathcal{L})}{q-1} \right] \equiv 0$$

がわかる.

References

- [1] S. Akbulut and J.D. McCarthy: Casson's Invariant for Oriented Homology 3-spheres. An Exposition, Math. Notes, 36, Princeton Univ. Press, Princeton, 1990.
- [2] C. Blanchet: Invariant of three-manifolds with spin structure, Comm. Math. Helv. 67 (1992), 406-427.
- [3] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, and P. Vogel: Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket, Topology, 31 (1992), 685-699.
- [4] C. Blanchet, N. Habegger, G. Masbaum, and P. Vogel: Topological quantum field theories derived from the Kauffman bracket, Preprint, Université de Nantes, 1993.
- [5] L. Crane: 2D physics and 3D topology, Comm. Math. Phys. 135 (1991), 615-640.
- [6] J. Hoste: A formula for Casson's invariant, Trans. Amer. Math. Soc. 297 (1986), 547-562.
- [7] 河田敬義: 数論 - 古典数論から類体論へ - (岩波基礎数学選書), 岩波書店, 東京, 1992.
- [8] R. Kirby and P. Melvin: The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$, Invent. math. 105 (1991), 473-545.
- [9] T. Kohno: Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I, Topology 31 (1992), 203-230.

- [10] 河野俊丈: Topological quantum field theory - 3次元多様体への応用を中心 -, 数学, 44 (1992), 29-43.
- [11] M. Kontsevich: Rational conformal field theory and invariants of 3-dimensional manifolds, Preprint, Centre de Physique Theorique Marseille, 1988.
- [12] W.B.R. Lickorish: Calculations with the Temperley-Lieb algebra, Comm. Math. Helv. 67 (1992), 571-591.
- [13] W.B.R. Lickorish: The skein method for three-manifold invariants, Preprint.
- [14] H. Murakami: Quantum $SU(2)$ -invariants dominate Casson's $SU(2)$ -invariant, Math. Proc. Camb. Phil. Soc., to appear.
- [15] T. Ohtsuki: A polynomial invariant of integral homology spheres, Preprint, Univ. of Tokyo, 1993.
- [16] S. Piunikhin: Reshetikhin-Turaev and Crane-Kohno-Kontsevich 3-manifold invariants coincide, J. Knot Theory and its Ramifications 2 (1993), 65-95.
- [17] N.Yu. Reshetikhin and V.G. Turaev: Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, Invent. math. 103 (1991), 547-597.
- [18] K. Walker: An Extension of Casson's Invariant, Ann. of Math. Studies, 126, Princeton Univ. Press, Princeton, 1992.
- [19] E. Witten: Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121 (1989), 351-399.

Association scheme, Spin model, Invariant of links

九大理 坂内 悦子

§0. 序

V.F.R. Jones は link の不変量を作るために Spin model を定義した [13]。Jones による定義は対称性を仮定していたが、川越-宗政-綿谷によりその条件を落した generalized spin model が定義された [14]。generalized spin model から link の不変量がつくれる。Jones が spin model を定義した時点においては具体的な例として Potts model と Gaussian model しかほとんど知られていなかった。具体的に spin model を構成するにあたり F. Jaeger は symmetric spin model のある class が symmetric self-dual commutative association scheme の Bose-Mesner algebra と密接な結びつきを持つ事を見つけた [11]。

この Jaeger の定理はさらに坂内-坂内-Jaeger により generalized spin model と self-dual commutative association scheme の場合に一般化された [7]。この様な一般化の方向の中で Jaeger [11], 坂内-坂内-生田-川越 [6],

坂内-坂内 [2], 野村 [15], 脇本 [17], 等により種々の例が作られた。

この spin model の概念はさらに一般化されて 4-weight spin model (generalized generalized spin model) が坂内-坂内により定義された [4]。4-weight spin model の中で特に 2-weight spin model になるものは大きく分けて 3 種類あるがそのうちのひとつにこれまでの spin model とか generalized spin model が含まれている。4-weight spin model の例としては山田による Hadamard 行列を使った構成 [16], 脇本による Lie 環, \mathbb{Z} -bilinear form を使ったもの [17] 等がある。

§1 では Jones type の generalized spin model の定義を与える。§2 では association scheme の定義, §3 では association scheme と spin model の関係を述べる。§4 では 4-weight spin model を定義し, link の不変量の構成法を一般の形で与える。

§1. Generalized spin model of Jones type.

定義 1.1. (川越-宗政-綿谷による定義) 有限集合 X と $X \times X$ 上の複素数値関数 w_+, w_- が任意 $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対して次の条件 (1), (2), (3) をみたす時 (X, w_+, w_-, D) を

generalized spin model of Jones type と呼ぶ。 \therefore
 $\therefore D$ は $|X| = n = D^2$ と 4 成分数である。

$$(1) \quad W_+(\alpha, \beta) W_-(\beta, \alpha) = 1, \quad W_+ \circ W_- = J$$

$$(2) \quad \sum_{x \in X} W_+(\alpha, x) W_-(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta}, \quad W_+ W_- = n J$$

(3) (Star triangle relations)

$$\sum_{x \in X} W_+(\alpha, x) W_+(x, \beta) W_-(x, \gamma) = D W_+(\alpha, \beta) W_-(\alpha, \gamma) W_-(\beta, \gamma)$$

定義 1.2 (Jones による定義) 定義 1.1 で与えられた

(X, W_+, W_-, D) に対して 次の条件を満たす時 symmetric spin model of Jones type と呼ぶ。

(0) $W_+(\alpha, \beta) = W_+(\beta, \alpha), \quad W_-(\alpha, \beta) = W_-(\beta, \alpha)$
 が任意の $\alpha, \beta \in X$ に対して成立する。

X を index set とし $n \times n$ 行列 $W_+ = (w_+(\alpha, \beta))_{\substack{\alpha \in X \\ \beta \in X}}$
 $W_- = (w_-(\alpha, \beta))_{\substack{\alpha \in X \\ \beta \in X}}$ 及び n 成分関数 $Y_{\alpha\beta}^{+-}(x) =$

$W_+(\alpha, x) W_-(x, \beta)$ で与えられる n 次元縦ベクトル $Y_{\alpha\beta}^{+-}$ を各 $\alpha, \beta \in X$ に対して定義すると、定義 1.1 及び定義 1.2. の条件 (0), (1), (2), (3) はそれぞれ次の (0)', (1)', (2)', (3)' の形で表わされる。

$$(0)' \quad {}^t W_+ = W_+, \quad {}^t W_- = W_-$$

$$(1)' \quad {}^t W_+ \circ W_- = J$$

$$(2)' \quad W_+ W_- = nI$$

$$(3)' \quad {}^t W_+ Y_{\alpha\beta}^{+-} = D W_- (\alpha, \beta) Y_{\alpha\beta}^{+-}$$

ここで \circ は行列の Hadamard 積 (成分ごとの積)

J はすべての成分が 1 の $n \times n$ 行列, I は $n \times n$ 単位行列とする. 以後 (X, w_+, w_-, D) と書くかわりに (X, W_+, W_-, D) と書くことにする.

命題 1.3 (X, W_+, W_-, D) を Jones type の generalized spin model とすると 次の条件を満たす複素数 $a \neq 0$ が存在する.

$$(4) \quad W_+ \circ I = aI, \quad W_- \circ I = a^{-1}I,$$

$$(5) \quad W_+ J = {}^t W_+ J = a^{-1}DJ$$

$$W_- J = {}^t W_- J = aDJ.$$

行列 W_+, W_- に対する条件 (4), (5) は一般に commutative association scheme の Bose-Mesner algebra の中の行列によつて常に満たされている事知られている.

§2. Association scheme

association scheme に関するさらに詳しい性質は [8] を参照されたい。ここでは極簡単な説明を与える。

定義 2.1. X を n 個の元からなる有限集合とする。 X の中の関係 $R_i \subset X \times X$, $i = 0, 1, \dots, d$, が次の条件をみたしている時に $\mathcal{A} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ を class d の commutative association scheme と呼ぶ。

$$(1) \quad R_0 = \{(x, x) \mid x \in X\},$$

$$(2) \quad X \times X = R_0 \cup R_1 \cup \dots \cup R_d,$$

$$R_i \cap R_j = \phi, \quad i \neq j,$$

(3) ${}^t R_i = R_{i'}$ となる i' が $\{0, 1, \dots, d\}$ の中にある。ここで ${}^t R_i = \{(x, y) \mid (y, x) \in R_i\}$ 。

(4) 任意の $i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\}$ に対し集合 $\{z \in X \mid (x, z) \in R_i, (z, y) \in R_j\}$ の元の数は任意の $(x, y) \in R_k$ に対して一定の値 p_{ij}^k をとる。(すなわち i, j, k のみにより定まる。)

$$(5) \quad p_{ij}^k = p_{ji}^k, \quad i, j, k \in \{0, 1, \dots, d\},$$

さらに \mathcal{A} が次の条件をみたす時に \mathcal{A} は symmetric であるという。

$$(6) \quad i' = i.$$

各関係 R_i に対し adjacency 行列 A_i を次の様に定義する.

$$(A_i)_{xy} = \begin{cases} 1 & (x, y) \in R_i \\ 0 & (x, y) \notin R_i \end{cases}$$

この時定義 2.1 の条件 (1), (2), ..., (5) 及 W symmetric condition (6) はそれぞれ次の (1)', (2)', ..., (5)' 及 $W'(6)'$ と同値である.

$$(1)' \quad A_0 = I$$

$$(2)' \quad A_0 + A_1 + \dots + A_d = J \quad \left(\begin{array}{l} J \text{ は } \mathbb{R}^n \text{ の成分が } 1 \\ \text{の } n \times n \text{ 行列} \end{array} \right)$$

$$A_i \circ A_j = \delta_{ij} A_i, \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$$

$$(3)' \quad {}^t A_i = A_{i'} \quad \text{と} \text{なる } i' \in \{0, 1, \dots, d\} \text{ が} \text{ある.}$$

$$(4)' \quad A_i A_j = \sum_{k=0}^d P_{ij}^k A_k, \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$$

$$(5)' \quad A_i A_j = A_j A_i, \quad \forall i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$$

symmetric condition

$$(6)' \quad {}^t A_i = A_i, \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, d\}.$$

次に $\mathcal{X} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ に対して A_0, A_1, \dots, A_d が \mathbb{C} 上生成する algebra $\mathcal{A} = \langle A_0, A_1, \dots, A_d \rangle$ を \mathcal{X} の Bose-Mesner algebra と呼ぶ. \mathcal{A} は primitive idempotents E_0, E_1, \dots, E_d からなる base をも

が事知られている[9]. (この base は順序をのぞくと一意的に定まる.) すなわち $E_0 + E_1 + \dots + E_d = I$,
 $E_i E_j = \delta_{i,j}$, $\forall i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$, $E_0 = \frac{1}{|X|} J$.
 Base A_0, \dots, A_d と E_0, \dots, E_d の間の変換行列 P と Q を
 それぞれの第一及び第二固有行列という. すなわち.

$$A_j = \sum_{i=0}^d P_j(i) E_i, \quad P = (P_j(i))_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}$$

$$E_j = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^d Q_j(i) A_i, \quad Q = (Q_j(i))_{\substack{0 \leq i \leq d \\ 0 \leq j \leq d}}.$$

従って $PQ = QP = nI$.

定義 2.2 適当な base の並べ方をとると $P = \bar{Q}$ が
 成立つ時 \mathcal{A} は self-dual であるという. (ただし
 $A_0 = I$, $E_0 = \frac{1}{n} J$ は固定する.)

命題 2.3. \mathcal{A} を commutative association scheme の
 Bose-Mesner algebra とすると、任意の行列 $M \in \mathcal{A}$ に
 対して $MJ = {}^t M J = c(M) J$ となる積乗数 $c(M)$ が
 存在する.

§3. Association scheme と spin model.

Association scheme と spin model の関係は次の定理
達によつて知られる ([3], [7] 参照.)

定理 3.1. (X, W_+, W_-, D) を Jones type の generalized spin
model とする. \mathcal{M} を $J, W_+, {}^tW_+$ により \mathbb{C} 上普通の
行列の積で生成される algebra, \mathcal{H} を $I, W_-, {}^tW_-$ により
 \mathbb{C} 上 Hadamard 積により生成される algebra とする. こ
の時次の条件が成立する.

- (1) \mathcal{M} は commutative である,
- (2) $I, W_-, {}^tW_- \in \mathcal{M}$ かつ $J, W_+, {}^tW_+ \in \mathcal{H}$,
- (3) $\exists \psi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{H}$ algebra isomorphism
s.t. $\psi(J) = nI, \psi(W_+) = DW_-, \psi({}^tW_+) = D{}^tW_-,$
 $\psi(I) = J, \psi(W_-) = D{}^tW_+, \psi({}^tW_-) = DW_+.$

定理 3.2 定理 3.1 の仮定のもとでさらに \mathcal{M} が Hadamard 積
に関して閉じているとする. この時 \mathcal{M} はある self dual
commutative association scheme の Bose-Mesner
algebra である.

この定理 3.1, 3.2 は最初 Jaeger によつて symmetric
な場合に証明され [11] さらに坂内-坂内-Jager によつて

一般化された。

この等の定理にもとついていくつかの self-dual な association scheme の Bose-Mesner algebra の中に spin model が構成された。具体的に構成にあたっては次の定理が有効である ([3], [7] 参照)。これもやはり symmetric な場合にはじめ Jaeger によって証明された [11]。さらに 坂内-坂内-Jaeger により一般化された。

定理 3.3 Self dual commutative association scheme の Bose-Mesner algebra の a 元 $W_+ = \sum_{i=0}^d t_i A_i$ 及 $W_- = D \sum_{i=0}^d t_i E_{i^c}$, $t_i \neq 0$, $i=0, 1, \dots, d$ に対して (X, W_+, W_-, D) が

Jones type の generalized spin model に存在するための必要十分条件は次で与えられる。

- (1) $Q\Pi = D\Pi_-$
- (2) $P\Pi = D\Pi'_-$
- (3) $E_j Y_{\alpha\beta}^+ = 0$, $\forall \alpha, \beta \in X, j \in \{0, 1, \dots, d\}$
s.t. $(\alpha, \beta) \in R_i$, $t_j \neq t_{i^c}$. $i=0$

$$\Pi = \begin{pmatrix} t_0 \\ t_1 \\ \vdots \\ t_d \end{pmatrix}, \quad \Pi_- = \begin{pmatrix} t_0^{-1} \\ t_1^{-1} \\ \vdots \\ t_d^{-1} \end{pmatrix}, \quad \Pi'_- = \begin{pmatrix} t_0^{-1} \\ t_1^{-1} \\ \vdots \\ t_d^{-1} \end{pmatrix}.$$

(\mathcal{A} が self-dual であるとは ${}^t E_i = E_{i'}$ が成立つ.)

定理 3.3 の条件 (1) 及び (2) をみたす複素数 t_0, t_1, \dots, t_d を見つけるためには association scheme の modular invariance property が重要な役割を果たす ([18] 参照).

定義 3.4. Symmetric self dual commutative association scheme $\mathcal{A} = (X, \{R_i\}_{0 \leq i \leq d})$ に対し

$$(PT)^3 = DP^2$$

をみたす対角行列 $T = \text{diag}(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_d)$ が存在する時 \mathcal{A} は modular invariance property をみたすと言う.

ここで $|X| = n = D^2$ である. (注: この場合 $P = Q$, $P^2 = nI$ が成立つ.)

命題 3.5. Symmetric self dual commutative association scheme \mathcal{A} が対角行列 $T = \text{diag}(\alpha_0, \dots, \alpha_d)$ に関する modular invariance property をみたすならば

$t_0^2 = \alpha_0^3$, $t_i = t_0 \alpha_i / \alpha_0$ なる t_0, t_1, \dots, t_d に関して $P\Pi = D\Pi$ が成立つ.

(注: この場合 $P = Q$, $i' = i$, for $i = 0, 1, \dots, d$.)

さらに一般に次の定理が示された ([5], [7] 参照).

定理 3.6. Self dual association scheme の Bose-Mesner algebra の 行列 $W_+ = \sum_{i=0}^d t_i A_i$, $W_- = \sum_{i=0}^d t_i^{-1} A_i$, $t_i \neq 0$, $i=0, 1, \dots, d$, に対して (X, W_+, W_-, D) が Jones type の generalized spin model であるかつ $J, W_+, {}^t W_+$ が \mathcal{A} の ε algebra として成り立つと仮定する. この時次の互い同値な条件が成立つ.

$$(1) \quad P T Q T P T' = t_0 D^3 I$$

$$(2) \quad P T Q T Q T = t_0 D P^2$$

$$(3) \quad (Q T)^3 = t_0 D^3 I$$

$$(4) \quad (P T^{-1})^3 = t_0^{-1} D^3 I,$$

ここで $T = \text{diag}(t_0, t_1, \dots, t_d)$ である.

(注: $P = \bar{Q}$, $PQ = nI$ であるから $P^2 = nI$ とは限らない.)

一般の self-dual association scheme の modular invariance property は定理 3.6 の条件により定義された.

命題 3.7 Self dual association scheme に対して定理 3.6 の条件 (1) 又は (2) 又は (3), 又は (4) とみたす可逆行列 $T = \text{diag}(t_0, t_1, \dots, t_d)$ が存在するならば

$$Q \Pi = D \Pi \quad \text{及び} \quad P \Pi = D \Pi' \quad \text{が成立つ.}$$

実際 Hamming association schemes とか cyclic group association schemes はこの性質をみたしそこ
から spin models (Jones type a generalized spin models も) の例が作られたのである ([6], [2] 参照). 定理 3.6 の逆は一般には成り立たない.

§ 4. 4-weight spin model と link の不変量
generalized spin model of Jones type と link の不変量との関係を調べて行くと自然に次の 4-weight spin model (generalized generalized spin model) の定義がでて来る. ([4] 参照.)

定義 4.1. 有限集合 X と $X \times X$ 上に定義された複素値関数 w_1, w_2, w_3, w_4 が任意の $\alpha, \beta, \gamma \in X$ に対し下記の条件をみたす時 $(X, w_1, w_2, w_3, w_4, D)$ を 4-weight spin model と呼ぶ.

$$(1) \quad w_1(\alpha, \beta) w_3(\beta, \alpha) = 1, \quad w_2(\alpha, \beta) w_4(\beta, \alpha) = 1,$$

$$(2) \quad \sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_3(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta},$$

$$\sum_{x \in X} w_2(\alpha, x) w_4(x, \beta) = n \delta_{\alpha, \beta},$$

$$(3a) \quad \sum_{x \in X} w_1(\alpha, x) w_1(x, \beta) w_4(\gamma, x) = D w_1(\alpha, \beta) w_4(\gamma, \alpha) w_4(\gamma, \beta),$$

$$(3b) \sum_{x \in X} w_1(x, \alpha) w_1(\beta, x) w_4(x, \gamma) = D w_1(\beta, \alpha) w_4(\alpha, \gamma) w_4(\beta, \gamma)$$

ここで $|X| = n = D^2$ である。

この定義からすぐに次の命題が得られる。

命題 4.2. 次の条件をみたす複素数 $a \neq 0$ が存在する。

$$(4) \quad W_1 \circ I = aI, \quad W_3 \circ I = a^{-1}I,$$

$$(5) \quad W_2 J = {}^t W_2 J = D a^{-1} J$$

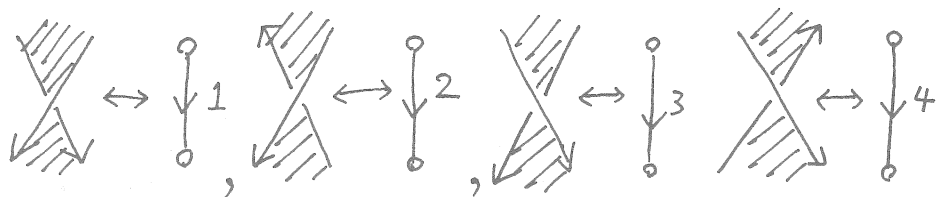
$$W_4 J = {}^t W_4 J = D a J.$$

ここで W_i は $w_i(\alpha, \beta)$ を (α, β) 成分とする $n \times n$ 行列である。

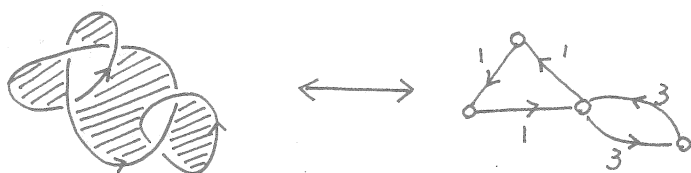
この時、向きづけられた link の不変量が次の様に定義される。

L を向きづけられた link の diagram とする。(すなわち \mathbb{R}^3 の中の向きづけられた link の \mathbb{R}^2 への projection である。) L は平面をいくつかの領域に分割している。これ等の領域を黒と白の2色で塗り分ける。この時、有界でない領域は白、となり合った領域は異なる色になる様にする。つぎに各黒い領域には頂点を、交点には辺を対応させてグラフを作る。この時、交点は diagram の向きと黒白の色づけ

により4種類のものにわかぬる。その各々に対応するグラフの辺に向きと番号をつけておく。すなわち



以上の様にして向きづけられた link の diagram から番号づけられた有向グラフを得る。



この番号づけられた有向グラフと 4-weight spin model から partition function Z_L を次の様に定義する。

$$Z_L = D^{-v(L)} \sum_{\substack{\sigma \\ \text{states}}} \prod_{\substack{\alpha \rightarrow \beta \\ \text{edges}}} W_{c(\alpha \rightarrow \beta)}(\sigma(\alpha), \sigma(\beta))$$

ここで $v(L)$ = 頂点の個数, $c(\alpha \rightarrow \beta)$ = edge に与えられた番号 $\in \{1, 2, 4\}$, σ はグラフの頂点全体からなる集合から X への写像, $\alpha \rightarrow \beta$ はすべての edge にくわて, 2 動く。この時次の定理が成立つ ([4] 参照)。

定理 4.3 4-weight spin model から作られた partition function Z_L は type II 及 W type III の Reidemeister move によらず不変である。

命題 4.2 は Z_L を normalize して type I の Reidemeister move に関しても不変なものにする事ができる事を保証している ([11], [13] 参照)。

4-weight spin model は Jones type の generalized spin model を含む。 $X \times X$ 上の 2 つの複素数値関数 w_+, w_- が与えられた 4-weight spin model

$(X, w_1, w_2, w_3, w_4, D)$ の関数達が $w_1, w_2 \in \{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ かつ $w_3, w_4 \in \{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ である時、(ただし $\{\varepsilon, \varepsilon'\} = \{+, -\}$, ${}^t w_\varepsilon(\alpha, \beta) = w_\varepsilon(\beta, \alpha)$ である。)

(X, w_+, w_-, D) は Jones type の generalized spin model 又はその転置した形のものになる事が示される。

この場合を 2-weight spin model of Jones type と呼ぶ。 逆に (X, w_+, w_-, D) が Jones type の generalized spin model である時 例えは $(X, w_+, w_+, w_-, w_-, D)$ は 4-weight spin model である。

次に $w_1, w_4 \in \{w_\varepsilon, {}^t w_\varepsilon\}$ かつ $w_2, w_3 \in \{w_{\varepsilon'}, {}^t w_{\varepsilon'}\}$ である時 w_+ 及び w_- は 対称条件

この場合 (X, W_+, W_-, D) は pseudo-Jones type の 2-weight spin model と呼ぶ。

最後に $W_1, W_3 \in \{W_\varepsilon, {}^t W_\varepsilon\}$ かつ $W_2, W_4 \in \{W_\varepsilon, {}^t W_\varepsilon\}$ の場合 (X, W_+, W_-, D) は Hadamard type の 2-weight spin model といい、この場合行列 W_+ 又は W_- は Hadamard 行列になる。

2つの 4-weight spin model $(X_i, W_1^{(i)}, W_2^{(i)}, W_3^{(i)}, D_i)$ $i=1, 2$ を与えられた時 $X = X_1 \times X_2$, $W_j = W_j^{(1)} \otimes W_j^{(2)}$, $j=1, 2, 3, 4$, $D = D_1 D_2$ とすると $(X, W_1, W_2, W_3, W_4, D)$ は 4-weight spin model である。この時 2つの異なる type の 2-weight spin model にとりかえればできあがり、たまたま 2-weight spin model になるとは限らない。このようにして spin model の例を沢山作ることもできる。

4-weight spin model は一般には commutative association scheme の Bose-Mesner algebra の中に入るとは限らない。それでは 4-weight spin model はどんな所に属しているのだろうか。non-commutative な association scheme とは association scheme の Terwilliger algebra を考

之3事によ、7 答之は得られんかも知らない。

文 献

1. E. Bannai and E. Bannai, Modular invariance of the character table of the Hamming association scheme $H(d, q)$, to appear in *J. Number Theory*.
2. E. Bannai and E. Bannai, Spin models on finite cyclic groups, preprint.
3. E. Bannai and E. Bannai, Generalized spin models and association schemes, to appear in *Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ.*
4. ^{E. Bannai and E. Bannai,} Generalized generalized spin models (Four-weight spin models), preprint.
5. Etsuko Bannai, Modular invariance property of association schemes and spin models on finite cyclic groups (tentative title), in preparation.
6. E. Bannai, E. Bannai, T. Ikuta and K. Kawagoe, Spin models constructed from the Hamming association schemes $H(d, q)$, 第10回代数的組合せ論シンポジウムの報告集 (1992), 89-106.

7. E. Bannai, E. Bannai and F. Jaeger, in preparation.
8. E. Bannai and T. Ito, Algebraic Combinatorics: Association Schemes, Benjamin/Cummings, Menlo Park CA, 1984.
9. A.E. Brouwer, A.M. Cohen and A. Neumaier, Distance Regular Graphs, Springer-Verlag, 1989.
10. P. de la Harpe, Spin models for link polynomials, strongly regular graphs and Jaeger's Higman-Sims model, to appear in Pac. J. Math.
11. F. Jaeger, Strongly regular graphs and spin models for the Kauffman polynomial, Geom. Dedicata 4 (1992), 23-52.
12. F. Jaeger, On spin models, triply regular association schemes and duality, preprint.
13. V.F.R. Jones, On knot invariants related to some statistical mechanical models, Pac. J. Math. 137 (1989), 311-334.
14. K. Kawagoe, A. Munemasa and Y. Watatani, Generalized spin models, preprint.
15. K. Nomura, Spin models constructed from Hadamard

matrices, to appear in J. of Combinatorial Theory (A).

16. M. Yamada, in preparation.
17. M. Wakimoto, in preparation.
18. Eiichi Bannai, Association schemes and fusion algebras (an introduction), to appear in J. of Algebraic Combinatorics.

On Finitely Generated Subgroups of 3-Manifold Groups

東京電機大学 理工学部 相馬輝彦

3次元多様体における非圧縮曲面 (incompressible surface) の研究により, Haken 多様体に関する多くの重要な結果が得られた (Haken [Ha], Waldhausen [W1], [W2], Jaco-Shalen [JS], Johannson [Jo], Thurston [T2] 等参照). Haken 多様体とはコンパクト, 連結, 向き付け可能で既約な 3次元多様体で種数 1 以上の非圧縮曲面を含むものをいう. しかし, 基本群が無限である既約なコンパクト 3次元多様体で非圧縮曲面を含まないような例は数多く知られている. このような多様体 M は種数 g が 1 以上の閉曲面 S からの π_1 -単射な immersion $f: S \rightarrow M$ を持つと予想されている. これらの immersion f を up to homotopy で研究することは, $\pi_1(M)$ 中の曲面群 ($\pi_1(S)$ と同型な群) の共役類を研究することに他ならない.

この講演では, まず最初に, 論文 [S2]-[S4] で発表した $\pi_1(M)$ の部分群 (特に曲面群), および M に π_1 -単射に immersed された曲面に関する結果の復習をする. 次に, 最近それらの結果の一部が一般化されたので, それを紹介する ([S6]). [S1], [S5] でも関連する topics を扱っているので, 興味のある方は参考にしてほしい.

§1. 有限生成交叉性を持つ 3次元多様体群

この節では, 3次元多様体の基本群 $\pi_1(M)$ の有限生成部分群の交叉について考えてみる. 群 G が有限生成交叉性 (finitely generated intersection property) または FGIP を持つとは, G の任意の 2 つの有限生成部分群 H, K に対し, その交叉 $H \cap K$ が有限生成群になることをいう. 任意の曲面群が FGIP を持つことはよく知られている (Greenberg [Gr]). FGIP を持

たないような群の簡単な例として, $G = (\mathbb{Z} * \mathbb{Z}) \times \mathbb{Z}$ がある. 実際, この G は (2 つ穴の開いた円板) $\times S^1$ の基本群と同型であるが, 一般には次のことが知られている (Jaco [Ja, V 章] 参照).

命題 1. $p: M \rightarrow S^1$ を Euler 標数が負のコンパクト曲面を fiber に持つ surface bundle とする. このとき, M の基本群 $\pi_1(M)$ は FGIP を持たない.

有限体積の双曲的 3 次元多様体に関して, W. Thurston は次のような予想をしている.

予想 1. (Thurston [T2], Gabai [Ga]) 任意の有限体積の双曲的 3 次元多様体 M の有限被覆で, S^1 上の surface bundle になるものが存在するであろう.

群 G が FGIP を持てば, 任意の有限指数の部分群も FGIP を持つ. したがって, 次の J. Hempel の予想が予想 1 に含まれることは, 命題 1 より明かである.

予想 2. (Hempel [He]) 有限体積の双曲的 3 次元多様体 M の基本群は FGIP を持たないであろう.

この予想は未解決であるが, 有限体積の双曲的構造以外の幾何的構造を持つ 3 次元多様体に関しては次が成り立つ. (iii) は, Hempel [He, Theorem 1.3] の簡単な応用である.

命題 2. ([S4]) (i) S^3 , $S^2 \times E^1$, E^3 , Nil, Sol-構造を持つ任意の 3 次元多様体に対し, $\pi_1(M)$ は FGIP を持つ.

(ii) $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{E}^1$, $\widetilde{\text{SL}}_2(\mathbb{R})$ -構造を持つ 3 次元多様体 M に対し, M が有限体積を持つならば $\pi_1(M)$ は FGIP を持たない. M が無限体積を持つ場合は, $\pi_1(M)$ が FGIP を持つ例もあるし, 持たない例もある.

(iii) 任意の無限体積の双曲的 3 次元多様体 M に対し, $\pi_1(M)$ は FGIP を持つ.

§2. 3 次元多様体群の中の virtual fibers

M を向き付け可能な 3 次元閉多様体とし, $f: S \rightarrow M$ を π_1 -単射な immersion とする. このとき, immersed surface $f(S)$ が virtual fiber であるとは, 有限被覆 $p: \tilde{M} \rightarrow M$ で \tilde{M} が S^1 上の surface bundle の構造を持つものがあり, かつ f の \tilde{M} 上へのリフト $\tilde{f}: S \rightarrow \tilde{M}$ で, $\tilde{f}(S)$ が \tilde{M} の fiber とホモトピックであるものが存在することをいう. このとき, $f(S)$ は \tilde{M} において fiber として実現されるといい, $f_*(\pi_1(S))$ を $\pi_1(M)$ の virtual fiber subgroup または VF-subgroup という. この f にホモトピックな写像 $g: S \rightarrow M$ で, 像 $g(S)$ が M の部分多様体になり, $g: S \rightarrow g(S)$ が被覆写像になるようなものが存在するとき, $f(S)$ を non-singular virtual fiber といい, $f_*(\pi_1(S))$ を $\pi_1(M)$ の non-singular virtual fiber subgroup または NVF-subgroup という. このような g が存在しないときは, $f(S)$ を singular virtual fiber といい, $f_*(\pi_1(S))$ を $\pi_1(M)$ の singular virtual fiber subgroup または SVF-subgroup という. M が双曲的 3 次元多様体のときは, $\pi_1(M)$ は $\text{PSL}_2(\mathbb{C})$ の離散部分群であるので, $\pi_1(M)$ の任意の部分群は Klein 群である. $\pi_1(M)$ の曲面群 A が quasi-Fuchs 群または QF-subgroup であるとは, Klein 群 A の極限集合が無限遠球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ の単純閉曲線になることをいう. Thurston [T1, Theorem 9.2.2] および Bonahon [B] より, $\pi_1(M)$ 内の曲面群は VF-subgroup または QF-subgroup のいずれか

になる。したがって、 $\pi_1(M)$ 内の曲面群は次のように分類される。

$$\text{曲面群} = \begin{cases} \text{VF-subgroups} \\ \text{QF-subgroups} \end{cases} = \begin{cases} \text{NVF-subgroups} \\ \text{SVF-subgroups} \end{cases}$$

曲面群を自己交叉を利用して判定する。 $\pi_1(M)$ の部分群 H および $\pi_1(M)$ の元 γ に対して、次のような 2 種類の自己交叉を定義する：

$$H(\gamma) = A \cap \gamma H \gamma^{-1}, \quad H[\gamma] = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n H \gamma^{-n}.$$

群 G に対し、 $|G|$ で G の階数、すなわち G の最小生成元の個数を表す。

定理 1. ([S2]) M を向き付け可能で、連結な双曲的 3 次元閉多様体とする。このとき、 $\pi_1(M)$ 内の曲面群 A に対して、次が成り立つ。

(i) A は QF-subgroup $\iff |A(\gamma)| = 0$ であるような $\gamma \in \pi_1(M)$ が存在する。

(ii) A は NVF-subgroup \iff 任意の $\gamma \in \pi_1(M)$ に対して、 $2g \leq |A(\gamma)| \leq 2(g-1)^2 + 2$ 。

(iii) A は SVF-subgroup $\iff |A(\gamma)| = \infty$ であるような $\gamma \in \pi_1(M)$ が存在する。

$\pi_1(M)$ の部分集合 \bar{A} を、 $\bar{A} = \{\gamma \in \pi_1(M); \text{ある } n \in \mathbb{N} \text{ に対して } \gamma^n \in A\}$ で定義すると、定理 1 の系として次が得られる。

系 1. ([S2]) M および $A \subset \pi_1(M)$ は定理 1 と同じ条件をみたすものとする。このとき、 $|A[\gamma]| \neq 0$ であるような $\gamma \in \pi_1(M) - \bar{A}$ が存在する $\iff A$ は $\pi_1(M)$ の VF-subgroup である。

§3. 3次元多様体群の中の曲面群の共役類 (その1)

この節では、 M はつねに向き付け可能で連結な双曲的3次元閉多様体とし、 M の体積 $\text{vol}(M)$ の上界 V および M の単射半径 $\text{inj}(M)$ の正の下界 s が与えられているとする。Thurston [T1, Corollary 8.8.6] より、任意の整数 $g > 1$ に対して、 $\pi_1(M)$ の中の種数 g の曲面群の共役類の個数は有限であることが分かる。Thurston の証明はある種のコンパクト性を利用しているので、共役類の個数の評価を与えることができない。ここでは、 V, s を用いてこの個数の評価を与える。ある関数 $r(x_1, \dots, x_n)$ ($x_i \in \mathbb{R}$ または $x_i \in \mathbb{N}$) が初等関数の結合として明確に表現されていて、任意に与えられた (x_1, \dots, x_n) に対して、値 $r(x_1, \dots, x_n)$ の近似値がいくらでもよい精度で得られるとき、 $r(x_1, \dots, x_n)$ を確定数 (definite number) ということにする。 $f: S \rightarrow M$ を双曲的閉曲面 S から M への連続写像とする。 S が lamination Λ を持ち、 $S - \Lambda$ の各連結成分 Δ に対し、制限 $f|_{\Delta}$ が全測地的かつ等長的 immersion であり、かつ Λ の各 leaf l に対して、 $f(l)$ が M の geodesic であるとき、 f を pleated 写像という。

定理 2. ([S3]) 次のような確定数 $n_1(g, s) \in \mathbb{N}$ が存在する： f_k ($k = 1, \dots, [n_1(g, s)V]$) を種数 g の双曲的閉曲面 Σ_k から M への π_1 -単射 pleated 写像とすると、種数 g の閉曲面 S_0 から Σ_k への同相写像 $h_k: S_0 \rightarrow \Sigma_k$ が存在し、 $f_k \circ h_k: S_0 \rightarrow M$ のうち、少なくとも2個は部分的 s -近似ホモトピックである。

部分 s -近似ホモトピーの定義は§5 で与える。任意の種数 g の閉曲面から M への π_1 -単射写像は、pleated 写像にホモトピックであるから ([T1, §8.7])、次の系は定理 2 より明かである。

系 2. ([S3]) $\pi_1(M)$ の中の種数 g の曲面群の共役類の個数は $[n_1(g, s)V]$

以下である。

次のように、定理 2 は virtual fiber の研究にも応用できる。

系 3. ([S3]) 次のような確定数 $n_2(g, s) \in \mathbb{N}$ が存在する: M 中の種数 g の virtual fiber S に対して、被覆度が $n_2(g, s)$ 以下のある M の被覆 \tilde{M} において、 S は fiber として実現される。

系 3 より、 M が種数 g の virtual fiber を持っているかどうかは、 M の $n_2(g, s)$ 以下の被覆度を持つ被覆空間の中に種数 g の fiber を持つ surface bundle があるかどうかを検証すればよい。Waldhausen [W2], Jaco-Oertel [JO] 等の結果を利用することにより、この検証を実行するアルゴリズムの存在が示される。次の定理 3, 4 において、 M は単体的複体として与えられていると仮定する。

定理 3. ([S3]) もし $s \leq \text{inj}(M)$ であるような $s > 0$ が知られているならば、与えられた種数の M 中の virtual fibers を up to homotopy ですべて得るアルゴリズムが存在する。

定理 4. ([S3]) もし $s \leq \text{inj}(M)$ であるような $s > 0$ が知られているならば、単体的 immersion $f: S \rightarrow M$ の形で与えられている閉曲面 S が virtual fiber かどうかを判定するアルゴリズムが存在する。

§4. 3次元多様体群の中の曲面群の共役類 (その 2)

前節では、双曲的 3次元閉多様体 M に対して、 $\text{vol}(M) < V, \text{inj}(M) > s > 0$ であるような V, s が知られているとき、定理 3-4 が成り立つことを示した。Thurston の一意化定理 (幾何学化定理) ([T2], [Mo]) や双曲

的 Dehn 手術定理 ([T1, Theorem 5.9]) などにより, 適当な位相的条件をみたす 3 次元多様体は双曲的構造を持つことが保証されている. そのような多様体 M の体積を上から評価することはそれほど困難でない場合が多い. 例えば, M が n 個の 3 次元単体からなる単体的複体の構造を持つならば, $\text{vol}(M) < nv_3$ である. ただし, $v_3 = 1.0149 \dots$ は \mathbb{H}^3 内の正則イデアル単体の体積である. M がある 3 次元閉多様体 N 中の双曲的絡み目 L の Dehn 手術によって得られる場合は, $\text{vol}(M) < \text{vol}(N - L)$ が成り立つ. 一方, $\text{inj}(M)$ を下から評価するのはそれほど容易なことではないように思える. したがって, §3 の結果を $\text{inj}(M)$ の評価を必要としない形に改良するのは意味がある. この節でも, 前節同様 M は向き付け可能で連結な双曲的 3 次元閉多様体と仮定しておく. \bar{V} を §5 で定義される M 内の互いに素な solid tubes の和集合とする.

定理 5. ([S6]) $\varepsilon = 0.104$ とおくと, 次のような確定数 $n_3(g) \in \mathbb{N}$ が存在する: $\text{vol}(M) < V$ であるとき, f_k ($k = 1, \dots, [n_3(g)V^{2g-2}]$) を種数 g の双曲的閉曲面 Σ_k から M への \bar{V} -単純, π_1 -単射 pleated 写像とする. このとき, 一つの種数 g の閉曲面 S_0 から Σ_k への同相写像 $h_k: S_0 \rightarrow \Sigma_k$ が存在し, $f_k \circ h_k: S_0 \rightarrow M$ のうち, 少なくとも 2 個は部分的 $\varepsilon/2$ -近似ホモトピックである.

任意の π_1 -単射写像 $f: S_0 \rightarrow M$ は \bar{V} -単純な pleated 写像にホモトピックであるので (§5, 補題 2), 次の系が成り立つ.

系 3. ([S6]) $\text{vol}(M) < V$ であるとき, $\pi_1(M)$ の中の種数 g の曲面群の共役類の個数は $[n_3(g)V^{2g-2}]$ 以下である.

§5. 定理 5 の証明の概略

S を向き付け可能で連結な閉曲面で、種数 $g > 1$ であるものとする。2つの連続写像 $f, g: S \rightarrow M$ の間のホモトピー $H: S \times I \rightarrow M$ で、ある点 $x_0 \in S$ に対して、 $H(\{x_0\} \times I)$ が M 内の長さが s 以下の rectifiable arc であるとき、 f と g は部分的 s -近似ホモトピックであるという。

$\varepsilon > 0$ に対し、 M の ε -薄部 (ε -thin part) $M_{(0, \varepsilon]}$ とは、次のような点 $x \in M$ の集合である: x を基点とする、 M 内の可縮でない rectifiable loop で長さが ε 以下であるものが存在する。 $M - M_{(0, \varepsilon]}$ の M における閉包 $M_{[\varepsilon, \infty)}$ を M の ε -厚部 (ε -thick part) という。Margulis の補題より、 M によらない正数 ε が存在し、 $M_{(0, \varepsilon]}$ の各連結成分は solid torus と同相になる (これを solid tube という)。

次の、Meyerhoff による M の薄部の研究が定理 5 の証明で重要な役割を果たしている。

定理. (Meyerhoff [Me]) g を M の閉測地線とする。

(i) もし、 g の長さ l が

$$\frac{\sqrt{3}}{4\pi} \log^2(\sqrt{2} + 1) \approx 0.107$$

より小さければ、次のように定義された $r = r(l) > 0$ に対し、 M における g の r -近傍は (埋め込まれた) solid tube である。

$$\sinh^2 r = \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{1 - 2k}}{k} - 1 \right) - 1 \quad \text{ただし } k = \cosh \left(\sqrt{\frac{4\pi l}{\sqrt{3}}} \right) - 1.$$

(ii) (i) の条件をみたす M 内の 2 つの solid tubes は一致するか、または互いに素である。

(iii) $\varepsilon = 0.104$ とおくと、 M の ε -薄部 $M_{(0, \varepsilon]}$ の各成分は、(i) の条件をみたすある solid tubes に含まれる。

以下、 $\varepsilon = 0.104$ と固定する。この定理の条件をみたす solid tube を M 型の solid tube ということにする。 $M_{(0, \varepsilon]}$ の各連結成分 V に対し、 \bar{V} を V

を含む M 型の solid tube とし, それら全体の和集合を $\bar{\mathcal{V}}$ とおく. pleated 写像 $f: \Sigma \rightarrow M$ が $\bar{\mathcal{V}}$ -単純であるとは, f それ自身または f を $f^{-1}(\partial\bar{\mathcal{V}})$ の近傍でわずかに変位して $\bar{\mathcal{V}}$ に横断的になるようにした写像が次の (i), (ii) をみたすことをいう.

(i) $f^{-1}(\bar{\mathcal{V}})$ の各連結成分 U は円板であるか, または annulus である.

(ii) U が annulus の場合, $\text{int}U$ は単純閉測地線 l を含み, $f(l)$ は M の測地線である.

補題 1. 任意の π_1 -単射写像 $f: S \rightarrow M$ は $\bar{\mathcal{V}}$ -単純な pleated 写像にホモトピックである.

S と同相な双曲的平面 Σ 上の互いに素な単純閉測地線の和集合を \mathcal{G} とする. $\Sigma - \mathcal{G}$ の各連結成分 Δ_i の完備化 $\bar{\Delta}_i$ (Δ_i の各 end に測地的円周を貼り付けたもの) に対し, $\text{int}\bar{\Delta}_i = \Delta_i$ の一点 x_i を固定する. $\bar{\Delta}_i$ は, それとホモトピー同値な完備な (面積無限の) 双曲的平面 N_i に埋め込まれる. $p: \mathbb{H}^2 \rightarrow N_i$ を普遍被覆とすると, $p^{-1}(x_i)$ 内の一点 \tilde{x}_i を中心とした N_i の Dirichlet 領域を D_i とする. すなわち,

$$D_i = \{y \in \mathbb{H}^2; \text{任意の } \gamma \in \pi_1(N_i) \text{ に対して } d(\tilde{x}_i, y) \leq d(\tilde{x}_i, \gamma y)\}.$$

1次元グラフ $p(\partial D_i)$ を, N_i の x_i に関する Dirichlet グラフといい, $G_i = \bar{\Delta}_i \cap p(\partial D_i)$ を x_i に関する $\bar{\Delta}_i$ の Dirichlet グラフということにする. また, Σ における \mathcal{G} の充分小さな正則近傍を $N(\mathcal{G})$ とするとき,

$$H = (G_1 \cup \dots \cup G_n - \text{int}N(\mathcal{G})) \cup \partial N(\mathcal{G})$$

を (\mathcal{G} に関する) Σ の Dirichlet グラフ組とよぶ. Σ_1, Σ_2 それぞれの Dirichlet グラフ組 H_1, H_2 に対し, 向きを保つ同相写像 $h: \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ で $h(H_1) = H_2$ であるものが存在するとき, H_1 と H_2 は同値であるという.

次の補題は, [S3, Lemma 1.4] の一般化である.

補題 2. 次のような確定数 $m(g)$ が存在する: 種数 $g > 1$ の閉曲面上の Dirichlet グラフ組の同値類の個数は $m(g)$ 以下である.

定理 5 の証明の概略: 確定数 $n_3(g)$ を

$$n_3(g) = \left[(m(g) + 1) \frac{n_2(g, \frac{1}{2}\varepsilon)^{12(2g-1)}}{VB(\frac{1}{8}\varepsilon)^{2(g-1)}} \right]$$

で定義する. ただし, $n_2(g, \varepsilon/2)$, $VB(\varepsilon/8)$ 等は, [S3] で与えられたものと同一の確定数とする. $f: \Sigma_k \rightarrow M$ ($k = 1, \dots, [n_3(g)V^{2(g-1)}]$) を \bar{V} -単純, π_1 -単射な種数 g の pleated 写像とする. $f_k^{-1}(\bar{V})$ の各 annulus 成分全体の和集合を \mathcal{A}_k とおき, \mathcal{A}_k 内の単純閉測地線全体の和集合を \mathcal{G}_k とおく. $\Sigma_k - \mathcal{G}_k$ の各連結成分 Δ_i の完備化 $\bar{\Delta}_i$ に対し, $\text{int}\bar{\Delta}_i$ 内の一点 x_i に関する $\bar{\Delta}_i$ の Dirichlet グラフを G_i とする. これらの G_i を使って, \mathcal{G}_k に関する Dirichlet グラフ組 H_k が定義される. $\chi(\bar{\Delta}_i) \leq -1$ であるから, $\Sigma_k - \mathcal{G}_k$ の連結成分の個数は $2(g-1)$ 以下である. したがって, 相異なる $k, l \in \{1, \dots, [n_3(g)V^{2(g-1)}]\}$ に対し, S_0 上の Dirichlet グラフ組 H_0 と同相写像 $h_k: S_0 \rightarrow \Sigma_k$, $h_l: S_0 \rightarrow \Sigma_l$ が存在して $h_k(H_0) = H_k$, $h_l(H_0) = H_l$ となるものが存在する. このとき, $h_k^{-1}(\mathcal{A}_k) = h_l^{-1}(\mathcal{A}_l) (= \mathcal{A}_0)$ と仮定してよい. その上, [S3, Theorem 0.1] と全く同様の議論により, 各 $\bar{\Delta}_i$ に対し $\bar{L}_i = \bar{\Delta}_i - \text{int}\mathcal{A}_0 \cap \bar{\Delta}_i$ とおくと, $f_k \circ h_k|_{\bar{L}_i}$ と $f_l \circ h_l|_{\bar{L}_i}$ とは部分的 $\varepsilon/2$ -近似ホモトピックであると考えてよい. また, これらのホモトピーは明らかに, $f_k \circ h_k|_{\mathcal{A}_0}$ と $f_l \circ h_l|_{\mathcal{A}_0}$ の間のホモトピーに拡張されるので, $f_k \circ h_k$ と $f_l \circ h_l$ も部分的 $\varepsilon/2$ -近似ホモトピックになる. (終)

参考文献

- [B] F. Bonahon, Bouts des variétés hyperboliques de dimension 3, *Ann. of Math.* **124** (1986) 71-158.
- [Ga] D. Gabai, On 3-manifolds finitely covered by surface bundles, in: D. B. A. Epstein, ed., *Low-Dimensional Topology and Kleinian Groups*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 112 (Cambridge University Press, London, 1986) 145-155.
- [Gr] L. Greenberg, Discrete groups of motions, *Canad. J. Math.* **12** (1960) 415-426.
- [Ha] W. Haken, Theorie der Normalflächen, *Acta Math.* **105** (1961) 245-375.
- [He] J. Hempel, The finitely generated intersection property for Kleinian groups, *Knot Theory and Manifolds*, Lecture Notes in Mathematics Vol 1144 (ed. D. Rolfsen, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1985) 18-24.
- [Ja] W. Jaco, Lectures on three-manifold topology, C.B.M.S. Regional Conf. Ser. in Math. no. 43 (Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1980).
- [JO] W. Jaco and U. Oertel, An algorithm to decide if a 3-manifold is a Haken manifold, *Topology* **23** (1984) 195-209.
- [JS] W. Jaco and P. Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, *Mem. Amer. Math. Soc.* no. 220 (1979).
- [Jo] K. Johannson, Homotopy equivalences of 3-manifolds with boundaries, *Lecture Notes in Mathematics Vol. 761* (Springer, Berlin Heidelberg New York, 1979).
- [Me] R. Meyerhoff, A lower bound for the volume of hyperbolic 3-manifolds, *Canad. J. Math.* **34** (1987) 1038-1056.
- [Mo] J. Morgan, On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds, *The Smith Conjecture* (eds. J. Morgan and H. Bass, Academic Press, New York London, 1984).
- [S1] T. Soma, Intersection of finitely generated surface groups, *J. Pure Appl. Algebra* **66** (1990) 81-95.
- [S2] _____, Virtual fibre groups in 3-manifold groups, *J. London Math. Soc.* **43** (1991) 337-354.
- [S3] _____, Virtual fibers in hyperbolic 3-manifolds, *Topology Appl.* **41** (1991) 179-192.
- [S4] _____, 3-manifold groups with the finitely generated intersection property, *Trans. Amer. Math. Soc.* **331** (1992) 761-769.

- [S5] _____, Function groups in Kleinian groups, *Math. Annalen* **292** (1992) 181-190.
- [S6] _____, in preparation.
- [T1] W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture Notes, (Princeton University, Princeton N.J. 1978).
- [T2] _____, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry, *Bull. Amer. Math. Soc.* **6** (1983) 357-381.
- [W1] F. Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, *Ann. of Math.* **87** (1968) 56-88.
- [W2] _____, The word problem in fundamental groups of sufficiently large irreducible 3-manifolds, *Ann. of Math.* **88** (1968) 272-280.

結び目群の表現

奈良女子大学理学部情報科学科
和田 昌昭

結び目を調べるのに結び目群をよく知られた群に表現して結び目のさまざまな情報を取り出すという方法は、結び目研究の中心的な役割をはたしてきた手法の一つである。これら結び目群の表現は、結び目の不変量として考えた場合 Jones 多項式を初めとする多項式不変量が多数発見された今日でも結び目群の最も強力な不変量であることに変わりはない。


筆者は1989年頃から結び目群の表現について研究してきたが、ここでは現在までに興味を持った問題などを中心に述べてみたい。

1. 基礎概念.

三次元球面内の結び目 $K \subset S^3$ に対してその補空間の基本群 $\pi_1(S^3 - K)$ を結び目群といい πK で表す。結び目群 πK の Wirtinger 表示を

$$\pi K = \langle x_1, \dots, x_s \mid r_1, \dots, r_{s-1} \rangle \quad (1.1)$$

としよう。たとえば三葉結び目 (trefoil) の場合


$$\begin{aligned} \pi K &= \langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2 \rangle \\ r_1 &= x_1 x_3 x_2^{-1} x_3^{-1} \\ r_2 &= x_2 x_1 x_3^{-1} x_1^{-1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

となっている。

結び目群 πK の表現とは準同型

$$\rho: \pi K \rightarrow G$$

のことである。ここで $G = GL(V)$ はある体 F 上の有限次元ベクトル空間 V の上の一般線型群であるが、以後 V の基底を一つ固定し $V = F^n$, ($n = \dim V$) として

$$\rho: \pi K \rightarrow GL_n(F)$$

と考える. 表現 $\rho \in \text{Hom}(\pi K, G)$ に対して G の内部自己同型

$$c_g : G \rightarrow G, \quad c_g(h) = ghg^{-1} \quad (h \in G)$$

を合成することにより $c_g \circ \rho$ はまた πK の表現になるが, このとき表現 ρ と $c_g \circ \rho$ は同値であるという.

結び目群 πK の Wirtinger 表示 (1.1) を考えれば表現 ρ は πK の生成元 x_1, \dots, x_s の像 $(X_1, \dots, X_s) \in G^s$ で決まる. 逆に任意に $(X_1, \dots, X_s) \in G^s$ を与えたときそれらが表現を定めるためにはそれらの元が関係式

$$r_i(X_1, \dots, X_s) = 1 \quad (i = 1, \dots, s-1) \quad (1.3)$$

を満たしていることが必要充分であるから, 表現の空間 $R(K) = \text{Hom}(\pi K, G)$ は直積 G^s の部分集合

$$\{(X_1, \dots, X_s) \in G^s \mid r_i(X_1, \dots, X_s) = 1 \ (i = 1, \dots, s-1)\}$$

と同一視できる. この同一視によって $R(K) \subset G^s \subset F^{4s}$ には F 上の (実は \mathbb{Z} 上の) 特異アフィン代数多様体の構造が入る. 結び目群 πK の表示を取り替えるとアンビエント空間の次元は変わるが $R(K)$ に入る代数多様体としての構造は同型なものである. この同一視のもとでは同値な表現は X_i を一斉に PX_iP^{-1} で取り替えることにより得られる. 表現の同値類のつくる空間 $R(K)/\sim$ は表現のモジュライ空間と呼ばれよく研究されているがここでは触れない.

結び目群の表現に関しては次のような見方もできる. すなわち結び目群の表現とは結び目の図式の各上道に行列 $X_i \in GL_n(F)$ が対応していて各交点で Wirtinger の関係式 (1.3) が成り立っているものであると考えるわけである. このように考えたものを表現付き結び目と呼ぶことにしよう.

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1.4)

2. 可換表現の変形.

結び目群の表現

$$\rho_0 : \pi K \rightarrow GL_n(F)$$

の像が可換になっているとすると ρ_0 は合成

$$\pi K \xrightarrow{\alpha} \langle \tau \rangle \xrightarrow{\beta} GL_n(F)$$

に分解する。ここで α は結び目群 πK の可換化準同型で

$$\alpha(x_i) = \tau \quad (i=1, \dots, s)$$

で与えられる。従って可換な表現はメリディアン像の像 $\beta(\tau) = \rho(x_i) \in GL_n(F)$ により一意的に決まる。結び目群の可換表現は $R(K)$ で考えれば G^s の対角線集合の元ということになる。

さて、可換表現 ρ_0 を非可換表現に変形することができるかという問題を考えよう。これについて Klassen はまず次のことを示した。Long も少し違った見地から同様の結果を得ている。

定理 (Klassen[K], Long[Lo])

結び目群 πK の可換表現 $\rho_t \in \text{Hom}(\pi K, G)$ が

$$X_i = \rho_t(x_i) = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

によって与えられているとき ρ_t を非可換表現にする無限小変形が存在するための必要充分条件は結び目 K のアレクサンダー多項式が

$$\Delta_K(t) = 0$$

を満たすことである。

この定理は可換表現 ρ_t を非可換表現に無限小変形するための obstruction がアレクサンダー多項式であることを述べている。

それでは t がアレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ の根のとき可換表現 ρ_t は本当に非可換表現に変形可能であろうか。答えは肯定的である。 $\Delta_K(t) = 0$ ならばアレクサンダー行列の核に属するベクトル ${}^t(a_1, \dots, a_s) \in F^s$ で $a_1 = \dots = a_s$ とはならないものが存在する。このとき

$$X_i = \begin{pmatrix} t & a_i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

とおけば Wirtinger の関係式 (1.3) がなりたち結び目群 πK の非可換表現が得られる。このことは実は de Rham が何と 1960 年代にアレクサンダー多項式に関する概説論文 [D] のなかで示している。

ただしこのようにして得られる非可換表現は明らかに可約であるから本当の問題は t がアレクサンダー多項式の根のとき表現 ρ_t は既約表現に変形可能か、というものであろう。これは未解決問題である。これに関して Frohman と Klassen は次のような部分的解答を得ている ([FK]).

定理 (Frohman-Klassen)

アレクサンダー多項式 $\Delta_K(t)$ が絶対値 1 の単根 $t = e^{2i\theta}$ を持つならば

$$X_i = \rho_0(x_i) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$$

で与えられる可換表現 ρ_0 は非可換な $SU(2)$ 表現 (従って既約表現) に変形できる。

筆者はこの問題に関して直接の寄与は何もできなかったが、非可換な表現に対しても非自明な無限小変形ができるための obstruction を構成するという観点からひねりアレクサンダー多項式を定義した。

3. ひねりアレクサンダー多項式。

$$F_s = \langle x_1, \dots, x_s \rangle$$

を階数 s の自由群とする。語 $r \in F_s$ の自由微分係数 $\frac{\partial r}{\partial x_i} \in \mathbb{Z}F_s$ は性質

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(uv) = \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad (u, v \in F_s)$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}, \quad \frac{\partial}{\partial x_j}(x_i^{-1}) = -x_i^{-1} \delta_{ij}$$

によって求めることができる。

結び目群の Wirtinger 表示 (1.1) に現われる関係子 r_i の自由微分係数 $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ において各 x_i を t に置き換えて得られる Laurent 多項式 $\alpha\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right)$ を (i, j) -成分とする $(s-1) \times s$ 行列 A の一つの列、例えば第 s 列を取り除いて得られる正方行列を A_s とするとき

$$\Delta_K(t) \equiv \det A_s$$

を結び目 K のアレクサンダー多項式とよぶのであった。

いま表現 $\rho \in \text{Hom}(\pi K, G)$ が $(X_1, \dots, X_s) \in G^s$ により与えられているとしよう。自由微分係数 $\frac{\partial r_i}{\partial x_j}$ の各 x_i を tX_i に置き換えて得られる行列

$$\Phi\left(\frac{\partial r_i}{\partial x_j}\right) \in M_n(F[t^{\pm 1}])$$

を (i, j) -成分とする $(s-1) \times s$ 行列を A^ρ 、その第 k 列を取り除いて得られる正方行列を A_k^ρ と書いてこれを $n(s-1) \times n(s-1)$ 行列と考える。このとき結び目 K のひねりアレクサンダー多項式は次で定義される。

$$\Delta_{K,\rho}(t) \equiv \frac{\det A_k^\rho}{\det(1 - tX_k)} \quad (3.1)$$

定理. ひねりアレクサンダー多項式は体 F の非零元と t^{ne} ($e \in \mathbf{Z}$) を掛けることを除き表現付き結び目の不変量である. すなわち $\Delta_{K,\rho}(t)$ は K の Wirtinger 表示や k のとりかたによらない. さらに ρ が $SL_n(F)$ 表現のときにはひねりアレクサンダー多項式 $\Delta_{K,\rho}(t)$ は n が奇数ならば $\pm t^{ne}$ を, n が偶数ならば t^{ne} を掛けることを除き well-defined になる.

注 1. Lin [Li] はひねりアレクサンダー多項式をザイフェルト曲面を用いて定義した. 彼は (2.1) の分子をひねりアレクサンダー多項式の定義としている. 最近 Jiang と Wang は表現を用いていろんな位相不変量を「ひねる」方法を研究しその例としてひねりアレクサンダー多項式を考察している ([JW]).

注 2. 結び目に対しては X_i はすべて互いに共約なので定義式 (2.1) の分母は実は k によらない. しかしこのようにしておくとも link に対しても同様にひねりアレクサンダー多項式を定義することができる. 詳しくは [W2] を見よ.

注 3. 同値な表現 ρ, ρ' に対しては

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \Delta_{K,\rho'}(t)$$

となるのでひねりアレクサンダー多項式は表現のモジュライ空間上の関数と考えられる.

注 4. 北野晃朗氏によれば (2.1) の定義式によるひねりアレクサンダー多項式は $S^3 - K$ のある種の表現付き Reidemeister torsion とも考えられるということである.

具体例として (1.4) の表現付結び目に対してひねりアレクサンダー多項式を計算してみよう. まず (1.2) の Wirtinger 表示より

$$\begin{aligned} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} &= 1, & \frac{\partial r_1}{\partial x_2} &= -x_1 x_3 x_2^{-1} = -x_3, \\ \frac{\partial r_2}{\partial x_1} &= x_2 - 1, & \frac{\partial r_2}{\partial x_2} &= 1, \end{aligned}$$

であるから

$$A_3^\rho = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2t & -t \\ 0 & 0 & t & 0 \\ t-1 & 0 & 1 & 0 \\ -t & t-1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

従って

$$\det A_3^\rho = (1-t)^2(1+t^2)$$

となり、ひねりアレクサンダー多項式は

$$\Delta_{K,\rho}(t) = \frac{\det A_3^\rho}{\det(1-tX_3)} = 1+t^2$$

になる。この場合表現 ρ はユニモジュラ表現だからひねりアレクサンダー多項式 $\Delta_{K,\rho}(t)$ は t^2 の冪をかけることをのぞいて well-defined である。

4. 素体上の表現.

基礎体を素体 $F = \mathbb{F}_p$ とすれば $G = GL_n(p)$ は有限群だから表現の全体 $R(K)$ は有限集合であり、原理的にはすべての元をリストアップすることができる。すなわち具体的には G^s のすべての組合せについて関係式 (1.3) が成り立つかどうかを調べればよい。

ただし、これをまともにとやったら約 p^{n^2s} 通りの調べ上げをすることになる。これでは例えば $n=2, p=5, s=3$ ぐらいでも普通のコンピュータには手に負えなくなり、 $n=2, p=11, s=4$ ならばはっきり無理である。そこで実際には調べる場合の数を減らすことが大切になる。

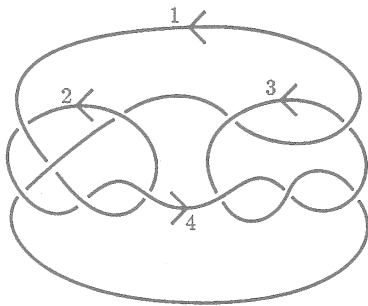
まず結び目群の表現に関してはすべての X_i が G で互いに共役であることに注目すれば、 G^s のすべての組合せについて関係式を調べるのではなく、 G の共役類 E ごとに E^s の各組について調べるようにすれば調べる場合の数はずっと下がる。

表現の空間 $R(K)$ の全体像を知るのが目的でなく結び目の不変量として表現を調べるのならば、表現の像を $GL_n(p)$ の適当な部分群、例えば $SL_n(p)$ に制限してしまってもよい。これで例えば $G = SL_2(p)$ として共役類 E を指定したとき $X_i \in E$ となる表現をリストアップするには p^{2s} のオーダーの場合について調べればよいことになる。

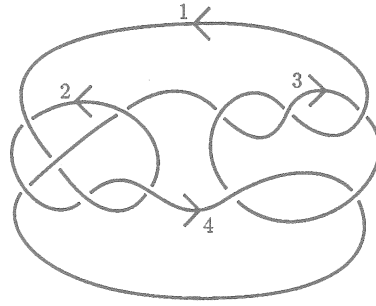
ここでもう一つ問題がある。というのはこの方法では一つ表現があったとするとそれに同値な表現もすべてリストアップされてしまうがその数は表現が既約とすると $SL_2(p)$ の位数すなわち $p(p^2-1)$ である。例えば $p=11$ とすると既約表現の同値類ごとに 1320 個もリストアップされてしまうわけである。これでは得られたデータを処理するのが大変である。もちろんこうして得られた表現を更にコンピュータで同値類に分ければよいわけだが、そうするぐらいならば初めから同値類ごとに一回だけ調べるようにすればよい。例えば X_1 は共役類 E の代表元に指定してしまえばよいわけである。ただし X_2 以降をどのように動かせばよいかは少しややこしくなる。これで $SL_2(p)$ の共役類 E を定めるとき表現は p^{2s-3} のオーダーの場合の調べ上げでリストアップできることになる。

実際にコンピュータを用いて結び目群の有限体上の表現を調べたのは Riley が最初であろう ([R]). 彼は結び目群の $PSL_2(p)$ におけるパラボリック表現, すなわちメリディアン像が行列 $(1, 1; 0, 1)$ (以下第 1 行が (a, b) で第 2 行が (c, d) の行列を $(a, b; c, d)$ のように表す.) に共役なものに限って詳しく調べた. パラボリック表現は計算の技巧上調べるのが最も易しいものである. また結び目の補空間が双曲構造を持つ場合その双曲構造から定まるホロノミー表現がパラボリック表現であることなどから幾何的にも意味がある.

論文 [R] の最後で Riley は樹下寺阪 11 交点結び目 KT とコンウェイの結び目 C について考察している. 結び目 KT はアレクサンダー多項式が自明だがそれ自身は自明ではない結び目の例としてよく知られたものである ([KT]). 結び目 C は後にコンウェイが 11 交点までの結び目テーブルを作成した時に見つけた自明なアレクサンダー多項式を持つもう一つの結び目である ([C]).



樹下寺阪結び目 KT



コンウェイの結び目 C

これらの結び目は互いにミュータントであることから Jones 多項式を初めとする多くの代数的不変量が一致する.

さて Riley が結び目群 πKT と πC の $PSL_2(p)$ パラボリック表現の同値類の数を調べたところ $p \leq 31$ の範囲では常に等しかった. そこで Riley は $PSL_2(7)$ における非可換パラボリック表現 (それらは πKT と πC に対して 2 つずつある) を用いて非可換被覆空間を構成しそれらの 1 次元ホモロジー群を計算することにより πKT と πC が区別できることを示した.

ここに πKT の $SL_2(7)$ 非可換パラボリック表現とそれらに付随するひねりアレクサンダー多項式を示す.

$$\theta_1(x_1) = (1, 1; 0, 1), \quad \theta_1(x_2) = (1, 0; 6, 1), \quad \theta_1(x_3) = (3, 1; 3, 6), \quad \theta_1(x_4) = (3, 4; 6, 6),$$

$$\Delta_{KT, \theta_1}(t) = 6 + 3t + 4t^2 + 6t^3 + 4t^4 + 3t^5 + 6t^6$$

$$\theta_2(x_1) = (1, 1; 0, 1), \quad \theta_2(x_2) = (1, 1; 0, 1), \quad \theta_2(x_3) = (1, 0; 6, 1), \quad \theta_2(x_4) = (3, 4; 6, 6),$$

$$\Delta_{KT, \theta_2}(t) = 6 + 2t^2 + 5t^3 + 2t^4 + 6t^6$$

また πC については次のようになっている。

$$\theta'_1(x_1) = (1, 1; 0, 1), \theta'_1(x_2) = (1, 0; 6, 1), \theta'_1(x_3) = (1, 0; 5, 1), \theta'_1(x_4) = (3, 4; 6, 6),$$

$$\Delta_{KT, \theta'_1}(t) = 6 + 2t + 6t^3 + 4t^4 + 3t^5 + 4t^6 + 6t^7 + 2t^9 + 6t^{10}$$

$$\theta'_2(x_1) = (1, 1; 0, 1), \theta'_2(x_2) = (1, 1; 0, 1), \theta'_2(x_3) = (1, 0; 3, 1), \theta'_2(x_4) = (4, 2; 6, 5),$$

$$\Delta_{KT, \theta'_2}(t) = 6 + 5t + 6t^2 + 3t^4 + 2t^5 + 3t^6 + 6t^8 + 5t^9 + 6t^{10}$$

これはひねりアレクサンダー多項式によっても群 πKT と πC が区別できることを示している。

ところで Riley は論文中 πKT と πC のパラボリック表現の数は常に等しいであろうと予想している。筆者は1990年頃 Macintosh 上で $SL_2(p)$ パラボリック表現を調べ上げるためのプログラムを書き $p \leq 181$ までこの Riley の予想が正しいことを確かめた。その後次を証明した。

定理. 群 πKT の $SL_2(F)$ パラボリック表現全体と πC のパラボリック表現全体との間に1対1写像が存在する。

従って πKT と πC は素体だけでなくすべての有限体上でパラボリック表現の数が等しいわけである。

こう聞くとすべてのミュータントな結び目に対してパラボリック表現の数が等しくなることを予想したくなるかも知れないが、実はミュータントだがパラボリック表現の数が異なる結び目が存在する。たとえば $(7, 4, 3, 3)$ プレッツェル結び目と $(7, 3, 4, 3)$ プレッツェル結び目は互いにミュータントだが $SL_2(7)$ パラボリック表現の数が異なっている。

最後に筆者が最近になってから作成した結び目群の $SL_2(p)$ 表現をすべてリストアップするプログラムによる結果を載せておく。これらの表で2行目の文字列 "n1 ..." は結び目の n-data と呼ばれるもので、これから結び目の図式を復元できる ([W1])。可換な表現には先頭に * 印がついている。また各行最後の "1=..." と書いてある行列は第1生成元のメリディアンと可換なロンジチュードの像である。これを見ると結び目の amphicheirality がわかる。ただし invertibility については $SL_2(p)$ の内部対称性のためによくわからない。表現の同値類ごとに1行ずつ出力してあるが、すべての X_i を同時に -1 倍したものについては省略してある。

この結果を見ると πKT と πC では例えば $SL_2(7)$ や $SL_2(13)$ で表現の数が異なることがわかる。つまり πKT と πC を区別するだけならばひねりアレクサンダー多項式はいらなかったことになる。

References

- [C] J. H. Conway, An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, *Computational Problems in Abstract Algebra*, Pergamon Press, New York, 1970, pp.329–358.
- [D] G. de Rham, Introduction aux polynomes d'un noeud, *Enseignement Math.* (2) **13** (1967), pp.187–194.
- [FK] C. D. Frohman and E. P. Klassen, Deforming representations of knot groups in $SU(2)$, *Comment. Math. Helvetici* **66** (1991), pp.340–361.
- [JW] B. Jiang and S. Wang, Twisted topological invariants associated with representations, preprint (1993).
- [K] E. P. Klassen, Representations of knot groups in $SU(2)$, Thesis, Cornell University (1987).
- [KT] S. Kinoshita and H. Terasaka, On unions of knots, *Osaka Math. J.* **9** (1957), pp.131–153.
- [Li] X-S. Lin, Representation of knot groups and twisted Alexander polynomials, preprint (1990).
- [Lo] D. D. Long, On the linear representation of braid groups, *Trans. A.M.S.* **311** (1989), pp.535–560.
- [R] R. Riley, Homomorphisms of knot groups on finite groups, *Math. Comp.* **25** (1971), pp.603–619.
- [W1] M. Wada, Coding link diagrams, to appear in *J. of Knot Theory and its Ramifications*.
- [W2] _____, Twisted Alexander polynomial for finitely presentable groups, to appear in *Topology*.

trefoil
n1 n3 12 r1 12 2u1

SL₂(3)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1, 0; 0,-1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(5)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-2)(2, 0; 0,-2) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-2)(-1,-1; 2, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1, 1; 0,-1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(0, 2; 2, 1) l=(-1, 0; 0,-1)

SL₂(7)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-3)(2, 0; 0,-3) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-3)(1, 1;-3,-2) l=(-1, 0; 0,-1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1,-1; 0,-1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0, 2; 3, 0) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 3)(0,-2;-3, 3) l=(1,-3; 3,-1)

SL₂(11)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-5)(2, 0; 0,-5) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-5)(-2, 1; 1,-1) l=(-5, 0; 0, 2)
*(3, 0; 0, 4)(3, 0; 0, 4) l=(1, 0; 0, 1)
(3, 0; 0, 4)(5,-1; 2, 2) l=(-4, 0; 0,-3)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1,-5; 0,-1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(1, 4; 5,-1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(2, 2; 4,-1) l=(-1, 0; 0,-1)
*(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(13)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-6)(2, 0; 0,-6) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-6)(2, 1; 0,-6) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-6)(2, 0; 1,-6) l=(1, 0; 0, 1)
*(3, 0; 0,-4)(3, 0; 0,-4) l=(1, 0; 0, 1)
(3, 0; 0,-4)(-6,-1; 5, 5) l=(-1, 0; 0,-1)
*(5, 0; 0,-5)(5, 0; 0,-5) l=(1, 0; 0, 1)
(5, 0; 0,-5)(4, 1;-4,-4) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1, 6; 0,-1)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 3)(3, 3; 4, 0) l=(0, 1;-1, 3)
*(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 5)(0,-1; 1, 5) l=(0, 1;-1, 5)
*(0, 1;-1, 6)(0, 1;-1, 6) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 6)(0, 2; 6, 6) l=(0, 1;-1, 6)

figure8

n1 n3 l2 r1 2l2 2u1

SL₂(3)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1, 0; 0,-1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(5)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-2)(2, 0; 0,-2) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-2)(2, 1; 0,-2) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-2)(2, 0; 1,-2) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(0, 2; 2, 1) l=(-1, 0; 0,-1)

SL₂(7)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-3)(2, 0; 0,-3) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-3)(1, 1;-3,-2) l=(-1, 0; 0,-1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-2, 1) l=(-1, 3; 0,-1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1) l=(-1,-3; 0,-1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 3)(0,-1; 1, 3) l=(3,-1; 1, 0)
(0, 1;-1, 3)(3,-2;-3, 0) l=(0, 1;-1, 3)

SL₂(11)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-5)(2, 0; 0,-5) l=(1, 0; 0, 1)
*(3, 0; 0, 4)(3, 0; 0, 4) l=(1, 0; 0, 1)
(3, 0; 0, 4)(3, 1; 0, 4) l=(1, 0; 0, 1)
(3, 0; 0, 4)(3, 0; 1, 4) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0,-2;-5, 0) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0, 3;-4, 0) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(2, 2; 4,-1) l=(-1, 0; 0,-1)
*(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(13)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0,-6)(2, 0; 0,-6) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0,-6)(-5,-1; 6, 1) l=(-6, 0; 0, 2)
(2, 0; 0,-6)(6,-1;-4, 3) l=(2, 0; 0,-6)
*(3, 0; 0,-4)(3, 0; 0,-4) l=(1, 0; 0, 1)
(3, 0; 0,-4)(-6,-1; 5, 5) l=(-1, 0; 0,-1)
*(5, 0; 0,-5)(5, 0; 0,-5) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-3, 1) l=(-1, 1; 0,-1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 4, 1) l=(-1,-1; 0,-1)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 5)(5,-2;-6, 0) l=(-5, 1;-1, 0)
(0, 1;-1, 5)(5, 2; 6, 0) l=(0,-1; 1,-5)
*(0, 1;-1, 6)(0, 1;-1, 6) l=(1, 0; 0, 1)

Kinoshita-Terasaka
n1 n2 n4 r5 14 11 13 r2 11 2r2 u3 312 2u1

SL₂(3)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1; -1, 0)(0, 1; -1, 0)(0, 1; -1, 0) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(5)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1; -1, 1)(0, 1; -1, 1)(0, 1; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1; -1, 1)(0, -1; 1, 1)(0, 1; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(7)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -3)(-1, 1; -1, 0)(2, 3; 0, -3) l=(-2, 0; 0, 3)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0; -1, 1) l=(1, -2; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; -1, 1)(3, 1; 3, -1) l=(-1, 1; 0, -1)
*(0, 1; -1, 0)(0, 1; -1, 0)(0, 1; -1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1; -1, 3)(0, 1; -1, 3)(0, 1; -1, 3) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(11)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -5)(2, 0; 0, -5)(2, 0; 0, -5) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -5)(-5, -1; 0, 2)(1, -5; 1, -4) l=(-5, 0; 0, 2)
*(3, 0; 0, 4)(3, 0; 0, 4)(3, 0; 0, 4) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, -2; 0, 1)(1, 0; 2, 1) l=(1, 3; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; -5, 1)(1, 5; 0, 1) l=(1, -4; 0, 1)
*(0, 1; -1, 0)(0, 1; -1, 0)(0, 1; -1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1; -1, 1)(0, 1; -1, 1)(0, 1; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1; -1, 1)(0, 2; 5, 1)(0, 1; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1; -1, 1)(1, -2; -5, 0)(0, 1; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1; -1, 5)(0, 1; -1, 5)(0, 1; -1, 5) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(13)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -6)(2, 0; 0, -6)(2, 0; 0, -6) l=(1, 0; 0, 1)
*(3, 0; 0, -4)(3, 0; 0, -4)(3, 0; 0, -4) l=(1, 0; 0, 1)
*(5, 0; 0, -5)(5, 0; 0, -5)(5, 0; 0, -5) l=(1, 0; 0, 1)
(5, 0; 0, -5)(5, 1; 0, -5)(0, -4; -3, 0) l=(-6, 0; 0, 2)
(5, 0; 0, -5)(5, 0; 1, -5)(0, -3; -4, 0) l=(2, 0; 0, -6)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1; -1, 3)(0, 1; -1, 3)(0, 1; -1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1; -1, 3)(0, 1; -1, 3)(3, 3; 4, 0) l=(-5, -3; 3, -1)
(0, 1; -1, 3)(3, 3; 4, 0)(5, -3; -5, -2) l=(3, -1; 1, 0)
*(0, 1; -1, 5)(0, 1; -1, 5)(0, 1; -1, 5) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1; -1, 5)(0, 1; -1, 5)(0, -1; 1, 5) l=(-2, -5; 5, -1)
(0, 1; -1, 5)(0, -1; 1, 5)(3, -1; -5, 2) l=(5, -1; 1, 0)
*(0, 1; -1, 6)(0, 1; -1, 6)(0, 1; -1, 6) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1; -1, 6)(0, 1; -1, 6)(0, 2; 6, 6) l=(-4, -6; 6, -1)
(0, 1; -1, 6)(0, 2; 6, 6)(1, -5; -6, 5) l=(6, -1; 1, 0)

Conway's

n1 n2 n4 r5 214 11 13 r2 11 2r2 u3 212 2u1

SL₂(3)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) 1=(1, 0; 0, 1)

SL₂(5)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2) 1=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(0, -1; 1, 1)(-2, -2; 1, -2) 1=(1, 0; 0, 1)

SL₂(7)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3) 1=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -3)(0, -1; 1, -1)(3, 2;-3, 3) 1=(-2, 0; 0, 3)
(2, 0; 0, -3)(-1, 1;-1, 0)(2, -3; 0, -3) 1=(-2, 0; 0, 3)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1) 1=(1, -2; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1)(1, 0;-2, 1) 1=(-1, 1; 0, -1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) 1=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) 1=(1, 0; 0, 1)

SL₂(11)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -5)(2, 0; 0, -5)(2, 0; 0, -5) 1=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -5)(-5, -1; 0, 2)(5, -2; 4, 3) 1=(-5, 0; 0, 2)
*(3, 0; 0, 4)(3, 0; 0, 4)(3, 0; 0, 4) 1=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, -2; 0, 1)(1, 0; 2, 1) 1=(1, 3; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0;-5, 1)(-5, 3;-1, -4) 1=(1, -4; 0, 1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) 1=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(0, 2; 5, 1)(3, 1; 4, -2) 1=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(1, -2;-5, 0)(-2, 5; 3, 3) 1=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5) 1=(1, 0; 0, 1)

SL₂(13)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -6)(2, 0; 0, -6)(2, 0; 0, -6) 1=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -6)(0, -1; 1, -4)(4, -3;-2, 5) 1=(1, 0; 0, 1)
*(3, 0; 0, -4)(3, 0; 0, -4)(3, 0; 0, -4) 1=(1, 0; 0, 1)
*(5, 0; 0, -5)(5, 0; 0, -5)(5, 0; 0, -5) 1=(1, 0; 0, 1)
(5, 0; 0, -5)(5, 1; 0, -5)(-4, -3;-3, 4) 1=(2, 0; 0, -6)
(5, 0; 0, -5)(5, 0; 1, -5)(-4, -3;-3, 4) 1=(-6, 0; 0, 2)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) 1=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) 1=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, -2;-6, 3) 1=(-5, -3; 3, -1)
(0, 1;-1, 3)(3, 3; 4, 0)(-3, 3;-2, 6) 1=(3, -1; 1, 0)
*(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5) 1=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 5)(0, 1;-1, 5)(1, -6; 6, 4) 1=(-2, -5; 5, -1)
(0, 1;-1, 5)(0, -1; 1, 5)(-1, -4; 5, 6) 1=(5, -1; 1, 0)
*(0, 1;-1, 6)(0, 1;-1, 6)(0, 1;-1, 6) 1=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 6)(0, 1;-1, 6)(5, -1;-4, 1) 1=(-4, -6; 6, -1)
(0, 1;-1, 6)(0, 2; 6, 6)(-3, 6; 4, -4) 1=(6, -1; 1, 0)

(7,4,3,3)-pretzel
 n1 n2 n4 n6 7r1 4r3 3r5 3r7 3u2 u1

SL₂(3)-representations.

* (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 * (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 0; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 * (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(5)-representations.

* (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 * (2, 0; 0, -2) (2, 0; 0, -2) (2, 0; 0, -2) (2, 0; 0, -2) l=(1, 0; 0, 1)
 (2, 0; 0, -2) (2, 0; 0, -2) (2, 0; 0, -2) (-1, -1; 2, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 * (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, -1, 1) l=(1, -2; 0, 1)
 * (0, 1; -1, 1) (0, 1; -1, 1) (0, 1; -1, 1) (0, 1; -1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 1) (0, 1; -1, 1) (0, 1; -1, 1) (0, 2; 2, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 1) (0, 1; -1, 1) (1, -2; -2, 0) (-2, -1; 2, -2) l=(0, -1; 1, -1)

SL₂(7)-representations.

* (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) (1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 * (2, 0; 0, -3) (2, 0; 0, -3) (2, 0; 0, -3) (2, 0; 0, -3) l=(1, 0; 0, 1)
 (2, 0; 0, -3) (2, 0; 0, -3) (2, 0; 0, -3) (1, 1; -3, -2) l=(1, 0; 0, 1)
 (2, 0; 0, -3) (-1, 1; -1, 0) (-3, 3; 0, 2) (1, -2; -2, -2) l=(3, 0; 0, -2)
 (2, 0; 0, -3) (-1, 1; -1, 0) (-3, 0; -3, 2) (1, 2; 2, -2) l=(3, 0; 0, -2)
 * (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 0; -1, 1) l=(1, 2; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 0; -2, 1) (-1, -3; -1, 3) l=(1, 1; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 1; 0, 1) (1, 0; -2, 1) (3, -3; -1, -1) l=(1, 1; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; -1, 1) (1, 1; 0, 1) l=(1, 2; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; -1, 1) (1, 0; -1, 1) l=(1, 2; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; -1, 1) (0, 1; -1, 2) l=(-1, -3; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; -1, 1) (2, 1; -1, 0) l=(-1, -3; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; -2, 1) (-1, -3; -1, 3) l=(-1, -3; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; -2, 1) (3, -3; -1, -1) l=(-1, -3; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; 3, 1) (-3, 2; -1, -2) l=(-1, -2; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (1, 0; 3, 1) (-2, -2; -1, -3) l=(-1, -2; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (2, -3; -2, 0) (0, 1; -1, 2) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (2, -3; -2, 0) (3, -3; -1, -1) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (0, -3; -2, 2) (2, 1; -1, 0) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (0, -3; -2, 2) (-1, -3; -1, 3) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-1, -3; -1, 3) (1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-1, -3; -1, 3) (0, 1; -1, 2) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-1, -3; -1, 3) (-1, -3; -1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-1, -3; -1, 3) (-2, 2; -1, -3) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (3, -3; -1, -1) (1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (3, -3; -1, -1) (2, 1; -1, 0) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (3, -3; -1, -1) (3, -3; -1, -1) l=(1, 0; 0, 1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (3, -3; -1, -1) (-3, 2; -1, -2) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-2, -3; 3, -3) (-1, -3; -1, 3) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-2, -3; 3, -3) (-2, 2; -1, -3) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-3, -3; 3, -2) (3, -3; -1, -1) l=(-1, -1; 0, -1)
 (1, 1; 0, 1) (1, 0; 3, 1) (-3, -3; 3, -2) (-3, 2; -1, -2) l=(-1, -1; 0, -1)
 * (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (0, 2; 3, 0) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (2, 3; 3, -2) (0, 2; 3, 0) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 0) (0, 1; -1, 0) (2, 3; 3, -2) (-2, 1; 2, 2) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 0) (0, -1; 1, 0) (-1, -1; 2, 1) (0, -2; -3, 0) l=(2, 2; -2, 2)
 (0, 1; -1, 0) (0, -1; 1, 0) (-1, -1; 2, 1) (2, 2; 1, -2) l=(2, -2; 2, 2)
 * (0, 1; -1, 3) (0, 1; -1, 3) (0, 1; -1, 3) (0, 1; -1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
 (0, 1; -1, 3) (0, 1; -1, 3) (0, 1; -1, 3) (0, -2; -3, 3) l=(-1, 0; 0, -1)
 (0, 1; -1, 3) (0, 1; -1, 3) (3, -1; 1, 0) (0, -2; -3, 3) l=(-1, 0; 0, -1)

(7,3,4,3)-pretzel
n1 n2 n4 n6 7r1 3r3 4r5 3r7 3u2 u1

SL₂(3)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1)(1, 0;-1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)

SL₂(5)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -2)(2, 0; 0, -2)(-1, -1; 2, 1)(-1, -1; 2, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1)(1, 0;-1, 1) l=(1, -2; 0, 1)
*(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1)(0, 2; 2, 1)(0, 2; 2, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 1)(0, 1;-1, 1)(0, 2; 2, 1)(-2, -1; 2, -2) l=(0, -1; 1, -1)

SL₂(7)-representations.

*(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1)(1, 0; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
*(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -3)(2, 0; 0, -3)(1, 1;-3, -2)(1, 1;-3, -2) l=(1, 0; 0, 1)
(2, 0; 0, -3)(-1, 1;-1, 0)(2, -3; 0, -3)(1, -2;-2, -2) l=(3, 0; 0, -2)
(2, 0; 0, -3)(-1, 1;-1, 0)(2, 0; 3, -3)(1, 2; 2, -2) l=(3, 0; 0, -2)
*(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1)(1, 0;-1, 1) l=(1, 2; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1)(-3, 2;-1, -2) l=(1, 1; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 1; 0, 1)(1, 0;-1, 1)(-2, 2;-1, -3) l=(1, 1; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 2; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(0, 1;-1, 2) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(2, 1;-1, 0) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(-1, -3;-1, 3) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(3, -3;-1, -1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(-3, 2;-1, -2) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 2; 0, 1)(-2, 2;-1, -3) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 0;-1, 1) l=(1, 2; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 0; 3, 1)(-1, -3;-1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(1, 0; 3, 1)(3, -3;-1, -1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(0, 2; 3, 2)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(0, 2; 3, 2)(-1, -3;-1, 3) l=(-1, -3; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(0, 2; 3, 2)(-3, 2;-1, -2) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(2, 2; 3, 0)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(2, 2; 3, 0)(3, -3;-1, -1) l=(-1, -3; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(2, 2; 3, 0)(-2, 2;-1, -3) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(3, 2;-2, -1)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(3, 2;-2, -1)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(3, 2;-2, -1)(2, 1;-1, 0) l=(-1, -3; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(3, 2;-2, -1)(3, -3;-1, -1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-1, 2;-2, 3)(1, 1; 0, 1) l=(1, 0; 0, 1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-1, 2;-2, 3)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-1, 2;-2, 3)(0, 1;-1, 2) l=(-1, -3; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-1, 2;-2, 3)(-1, -3;-1, 3) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-3, 2;-1, -2)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-3, 2;-1, -2)(0, 1;-1, 2) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-3, 2;-1, -2)(-3, 2;-1, -2) l=(-1, -2; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-2, 2;-1, -3)(1, 0;-1, 1) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-2, 2;-1, -3)(2, 1;-1, 0) l=(-1, -1; 0, -1)
(1, 1; 0, 1)(1, 0; 3, 1)(-2, 2;-1, -3)(-2, 2;-1, -3) l=(-1, -2; 0, -1)
*(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 2; 3, 0)(0, 2; 3, 0) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 2; 3, 0)(2, 1; 2, -2) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0, 1;-1, 0)(0, 2; 3, 0)(-2, 1; 2, 2) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 0)(0, -1; 1, 0)(0, 2; 3, 0)(-1, -3; 3, 1) l=(2, 2;-2, 2)
(0, 1;-1, 0)(0, -1; 1, 0)(0, 2; 3, 0)(1, -3; 3, -1) l=(2, -2; 2, 2)
*(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3) l=(1, 0; 0, 1)
(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, -2;-3, 3)(0, -2;-3, 3) l=(-1, 0; 0, -1)
(0, 1;-1, 3)(0, 1;-1, 3)(0, -2;-3, 3)(3, 2; 3, 0) l=(-1, 0; 0, -1)

Handwritten text at the top of the page, possibly a title or header.

Handwritten text in the upper middle section.

Handwritten text in the middle section.

Handwritten text in the lower middle section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

Handwritten text in the lower section.

