

第 3 9 回

トポロジー・シンポジウム

講 演 集

1 9 9 2 年 7 月 2 1 日 ~ 2 4 日

於 岩 手 大 学

平成 4 年度科学研究費補助金・総合研究

課題番号 0 4 3 0 2 0 0 2

第一、... 第二、... 第三、... 第四、... 第五、... 第六、... 第七、... 第八、... 第九、... 第十、...

... 等處均有代售

目 次

位相的性質を導く距離関数について	服部泰直(山口大)	1
葉層構造のexpansion growth	江頭信二(東大)	2 0
Milnor-number-link invariant for Real Singularities	福田拓生(東工大)	3 0
Toward effective algebraic topology	F. Sergeraert(グルノーブル大)	3 2
Topology of singular Lagrange varieties	大本 亨(東工大)	4 5
最も単純な非線形の微分同相写像: Hénon map をめぐって	三波篤郎(北大)	5 6
『幾何的』な代数的トポロジー	山崎正之(城西大)	6 8
$M^3 \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンと pseudo-holomorphic curve	吉田朋好(都立大)	8 9
楕円曲面上の微分構造と関連話題	上 正明(京大)	1 0 3
空間内のグラフの分岐被覆	張替俊夫(関学大)	1 1 3

代数的K理論と変換群

	島川和久(岡山大)	1 2 6
The Topological Symmetry Group of Special Graphs		
	鳥羽智佳子(東京女大)	1 3 2
Topological imitations of 3-manifolds and the quantum invariant		
	河内明夫(阪市大)	1 4 3
K理論と巡回コホモロジーのトポロジーへの応用について		
	森吉仁志(東工大)	1 5 2
(続)超単純結び目のタングル分解について		
	林忠一郎(東大)	1 6 2
ファイバー結び目のリボン同境		
	宮崎 桂(津田塾大)	1 7 0
配置写像を伴うK-理論とその応用		
	森本雅治(岡山大)	1 8 4

位相的性質を導く距離関数について

山口大・教育 服部 泰直

§1 序

距離化可能空間において、ある特殊な距離関数がその空間の位相的性質を特徴付けることがある。たとえば、完備な距離空間、位相完備を、そして、全有界な距離空間可分性などをこれによって特徴付けることは、よく知られてゐる。ここでは、次元論に現われる位相的性質を特徴付ける特殊な距離関数について述べていく。

特にことわりなく限り、単に空間と書いたらそれは、距離化可能空間を意味するものとする。また、空間 X 上の距離関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ が X 上の *original topology* を導くとする。このとき、距離(関数) d を持つという。

§2 距離空間における次元と距離関数

J. de Groot [G₁] より、空間 X が $\dim X = 0$ であるためには、non-Archimedean な距離 d が持つことが必要十分であ

ることが証明された。ここで距離関数 d が non-Archimedean
とす。 X の任意の 3 点 x, y, z に対し、

$$d(x, z) \leq \max \{ d(x, y), d(y, z) \}$$

が成り立つことである。

更に 1 次元ユークリッド空間 \mathbb{R} においては、任意の 4 点 x, y_1, y_2, y_3 に対して $|y_i - y_j| \leq |x - y_j|$ とする $i \neq j$ が存在する。これらのことから J. Nagata と P. A. Ostrand は、空間の次元を特殊な距離関数により特徴付けた。

2.1 定理 ($[N_2], [O]$) 空間 X が $\dim X \leq n$ であることと、 X が次の条件 $(1)_n$ を満たす距離 d を持つこととは、同値である。

$(1)_n$ X の任意の $n+3$ 点 x, y_1, \dots, y_{n+2} に対し、

$$d(y_i, y_j) \leq d(x, y_j)$$

となる $i \neq j$ が存在する。

X がコンパクトの時、 X の次元は $(1)_n$ より弱く、 $(1)_n$ の条件で特徴付けられる。

2.2 定理 ($[G_2]$) コンパクト空間 X が $\dim X \leq n$

であるためには、次の条件 $(2)_n$ を満たす距離 d を持つことが必要十分である。

$(2)_n$ X の任意の $n+3$ 個の点 x, y_1, \dots, y_{n+2} に対し

$$d(y_i, y_j) \leq d(x, y_k)$$

となる i, j, k , ただし $i \neq j$, が存在する。

定理 2.2 の一般の空間に対して成り立つか否かは、未解決である。次に $(1)_n, (2)_n$ を拡張した条件 $(1)_w, (2)_w$ について考える。

$(1)_w$ X の任意の点列 x, y_1, y_2, \dots に対し、

$$d(y_i, y_j) \leq d(x, y_j)$$

となる $i \neq j$ が存在する。

$(2)_w$ X の任意の点列 x, y_1, y_2, \dots に対し、

$$d(y_i, y_j) \leq d(x, y_k)$$

となる i, j, k , ただし $i \neq j$, が存在する。

2.3 定理 ($[N_3]$) すべての空間 X は、 $(2)_w$ を満たす距離 d を持つ。従って、条件 $(2)_w$ は、特別な位相的性質を導かない。

2.4 問題 ($[N_3]$) すべての空間 X は、 $(1)_w$ を満たす

距離 d を持つか?

この問題は今のところ完全には解決されてはいないけれど、その部分解として次がある。

2.5 定理 ($[H, J]$) 空間 X は、次をみたす距離 d を持つ。

(*) $\lim_{i \rightarrow \infty} d(x, y_i) \neq 0$ なる X の点列 x, y_1, y_2, \dots に対して、 $d(y_i, y_j) \leq d(x, y_j)$ となる $i \neq j$ が存在する。

(1)_w \Rightarrow (*) \Rightarrow (2)_w であるので、定理 2.5 は、定理 2.3 を改良してやる。

さて、(1)_w, (2)_w より若干強い次の条件 (1)_∞, (2)_∞ を考へる。

(1)_∞ X の任意の点 x に対して、以下の条件をみたす自然数 $n(x)$ が存在する:

$n(x)+2$ 個の X の任意の点 $y_1, \dots, y_{n(x)+2}$ に対し、 $d(y_i, y_j) \leq d(x, y_j)$ となる $i \neq j$ が存在する。

(2)_∞ X の任意の点 x に対して、以下の条件をみたす自然数 $n(x)$ が存在する:

$n(X)+2$ 個の X の任意の点 $y_1, \dots, y_{n(X)+2}$ に対し、 $d(y_i, y_j) \leq d(x, y_k)$ となる i, j, k に対し $i \neq j$ が存在する。

空間 X は、有限次元閉集合の可算和で表わされるとき、強可算次元空間とよばれる。

2.6. 定理 ($[N_3]$) 空間 X について、次は同値である。

- (i) X は、強可算次元空間である。
- (ii) X は、 $(1)_\infty$ をみたす距離を持つ。
- (iii) X は、 $(2)_\infty$ をみたす距離を持つ。

以上の定理の証明は、ある性質を持つ order $\leq n$ なる閉被覆の正規列を使うことにより為される。同様な方法により、次も証明された。

2.7 定理 ($[N_1]$) 空間 X が $\dim X \leq n$ であることと、次の条件 $(0)_n$ をみたす距離を持つことと (1) 、同値である。

$(0)_n$ 任意の $\varepsilon > 0$ と X における任意の点 x ，そして

$$d(S_{\varepsilon/2}(x), y_i) < \varepsilon, \quad i=1, \dots, n+2$$

をみたす $n+2$ 個の点 y_1, \dots, y_{n+2} に対し

$$d(y_i, y_j) < \varepsilon$$

となる $i \neq j$ が存在する。

さて、 $\varepsilon = \varepsilon/2$ 上に従い、 $(0)_n$ の拡張 $(0)_\omega$, $(0)_\infty$ を示す。

$(0)_\omega$ 任意の $\varepsilon > 0$ と、 $d(\delta_{\varepsilon/2}(x), y_i) < \varepsilon$, $i=1, 2, \dots$ を満たす X の点列 x, y_1, y_2, \dots に対し、 $d(y_i, y_j) < \varepsilon$ なる $i \neq j$ が存在する。

$(0)_\infty$ X の任意の点 x に対し、次の条件を満たす自然数 $n(x)$ が存在する：

任意の $\varepsilon > 0$ と $d(\delta_{\varepsilon/2}(x), y_i) < \varepsilon$ を満たす $n(x)+2$ 個の点 $y_1, \dots, y_{n(x)+2}$ に対し、

$d(y_i, y_j) < \varepsilon$ となる $i \neq j$ が存在する。

$(0)_\omega, (0)_\infty$ に関し、次を得る。

2.8 定理 ([H, 7]) (1) すべての空間 X は、 $(0)_\omega$ を満たす距離を持つ。

(2) X が強可算次元空間であることと、 X が $(0)_\infty$ を満たす距離を持つこととは、同値である。

$(0)_\omega$ の若干の変更は、次元とは直接関係のない位相的性質を決定する。

2.9. 定理 ([H, J]) X が 次の条件をみたす距離を持つことは、 X が *strongly metrizable* であることは、同値である:

任意の $\varepsilon > 0$ と $d(S_\varepsilon(x), y_i) < \varepsilon$ をみたす X の点列 x, y_1, y_2, \dots に対し、 $d(y_i, y_j) < \varepsilon$ なる $i \neq j$ が存在する。

次に、L. Janos によつて始められた別のタイプの距離関数について述べる。

2.10 定義 距離空間 (X, d) の二点 a, b ($a \neq b$) に対し、 $B(a, b) = \{x \in X \mid d(a, x) = d(b, x)\}$ を a と b の *bisector* とする。

2.11 定理 ([JM]) 空間 X に対し、次は同値である。

- (1) X は、 $\dim X \leq n$ である可分空間である。
- (2) X は、すべての *bisector* B に対し、 $\dim B \leq n-1$ となる全有界な距離を持つ。

2.12 定義 A, B を距離空間 (X, d) の二つの部分集合とする。 A から B への距離を保つ全単射が存在すると

き、 A と B は合同であるという。そして、 $\text{con}(X, d) = \max\{|A| \mid A \subset X, A \text{ と異なる } B \subset X \text{ で } A \text{ と合同なものが存在する}\}$ とおく。

2.13 定理 ([J₁]) 可分距離空間 $X (\neq \emptyset)$ に対して、 $\text{dim } X = 0$ なることと、 $\text{con}(X, d) = 1$ となる距離を持つこととは、同値である。

2.14 定理 ([J₂]) 局所コンパクトな可分空間 X が、 $\text{con}(X, d) \leq 2$ なる距離 d を持つならば、 $\text{dim } X \leq 1$ である。

定理 2.14 において、定理 2.13 のときのように、逆は成立しない。実際、定理 2.14 の仮定のもとでは、 X は \mathbb{R} の部分空間と同相になってしまう。これについては、次節で詳しく述べる。定理 2.14 における仮定「 $\text{con}(X, d) \leq 2$ 」が次に及ぼす影響の本質は次である。

2.15 定理 ([H₂]) 空間 X が $\text{con}(X, d) \leq 2$ なる距離 d を持つならば、 $\text{ind } X \leq 1$ である。

一般に距離空間 (X, d) について、 $\text{con}(X, d) \leq n$ とすると、 X の任意の bisector B に対し $|B| \leq n-1$ となる。故に、定理 2.11 より (X, d) がコンパクトで、 $\text{con}(X, d) \leq n$ ($n < \infty$) ならば、 $\dim X \leq 1$ である。従って、定理 2.14 をより高い次元に拡張することはできない。また、定理 2.13, 2.14 と関連して、次の問題がある。

2.16 問題 (L. Janos) " $\text{con}(X, d) = 1$ " を拡張して、1次元可分距離空間を特徴付けよ。

§3 空間を決定する距離関数

この節では位相的性質よりもむしろ、空間とれ自身を特徴付ける、特に1次元空間における距離関数について述べる。さて、コンパクト空間 (X, d) が $\text{con}(X, d) \leq 2$ を満たすならば、 X は2次元平面 \mathbb{R}^2 の部分空間と同相である。実際、 $|X| \geq 2$ とし、 $x_1 \neq x_2 \in X$ を固定する。として、 $i: X \rightarrow \mathbb{R}^2$ を $i(x) = (d(x, x_1), d(x, x_2))$, $x \in X$ と定めると、 i は埋め込みである。他方、Janos [J₂] は、1次元ユークリッド空間 \mathbb{R} が $\text{con}(\mathbb{R}, d) = 2$ を満たす距離 d を持つことを示した。これは、 \mathbb{R} を平面 \mathbb{R}^2 の部分空間 $X = \{(x, x^2) \mid x > 0\}$ とみなし、 \mathbb{R}^2 のユークリッド距離 d を X に制限した

もろもろであることによりわかる。従って、 \mathbb{R} の部分空間 X は $\text{con}(X, d) \leq 2$ なる距離 d を持つ。これらのことから、 $\text{con}(X, d) \leq 2$ を満たす距離空間 (X, d) が \mathbb{R} の部分空間と同相になるかということは、自然に思われる。そこで、この問題を考えるために、より「自然」な性質 (a), (b) を考える。

(a) (X, d) の任意の bisector は高々 1 点。

(b) (X, d) の任意の点 x と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、

$$|\{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}| \leq 2$$

まず、条件 (a) について調べる。

3.1 定理 ([B]) 非退化な連結距離空間 (X, d) が (a) を満たすならば、 X は \mathbb{R} におけるある区間と同相である。
(可分性を仮定して十分なことに注意する。)

位相空間 X がある linearly ordered space と同相のとき、 X は、orderable と呼ばれ、linearly ordered space の部分空間と同相になるとき、suborderable と呼ばれる。

3.2 定理 ([HO]) 局所コンパクトな距離空間 (X, d) が (a) を満たすならば、 X は suborderable である。

ところで, Lutzer [Lu] は, *suborderable* な可分空間は, 可分な *linearly ordered space* の部分空間に存ることを示した。ところが, 可分な *linearly ordered space* は, \mathbb{R} の部分空間に存ることが知られてゐる ([E, Problem 6.3.2] を見よ) 従つて, 次のようになる。

3.3. 定理 ([HO]) 局所コンパクトな可分距離空間

(X, d) が (a) を満たすならば, X は \mathbb{R} の部分空間と同相に存る。

距離空間 (X, d) が $\text{lon}(X, d) \leq 2$ を満たすならば, (a) を満たす。従つて, 次のを得る。

3.4. 系 ([HO]) 局所コンパクトな可分空間 X に対し

て, 次の条件は互いに, 同値である。

- (i) X は, \mathbb{R} のある部分空間と同相である。
- (ii) X は, $\text{lon}(X, d) \leq 2$ なる距離 d を持つ。
- (iii) X は, (a) を満たす距離 d を持つ。

明らかに, \mathbb{R} の部分空間に存る為に必ずしも局所コンパクト性は必要でないので, 定理 3.2, 3.3 及び系 3.5 において

X の局所コンパクト性が本質的であろうか定かるところである。次の例は、上の定理において局所コンパクト性が本質的であることを示している。

3.5 例 ([H0]) 条件 (A) をみたし suborderable である可分距離空間が存在する。

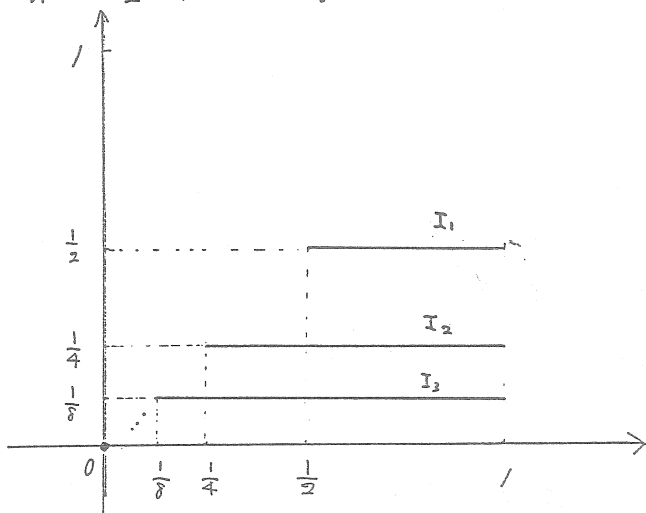
実際、このように空間 (X, d) は以下のように構成される。 \mathbb{N} を自然数の集合とする。 $\infty \in \mathbb{N}$ の上限とし、 $\mathbb{N}^\# = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ とおく。更に、 $2^{-\infty} = 0$ とする。任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し、

$$I_n = \{(x, 2^{-n}) \mid 2^{-n} \leq x \leq 1\}$$

と置き、 $I_\infty = \{(0, 0)\}$ とおく。そして、

$$X = \cup \{I_n \mid n \in \mathbb{N}^\#\}$$

を、 \mathbb{R}^2 の部分空間とする。



このとき、 I_∞ は open base を持たないので、Purisch の定

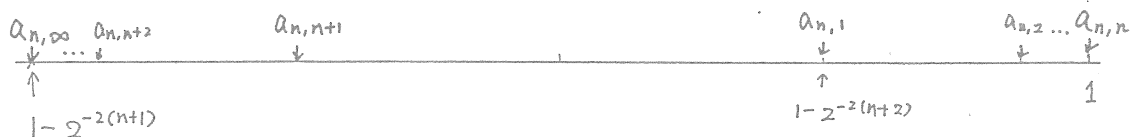
理 [P] より X は suborderable ではない。さて、次に (A) をみたす X の距離 d を定義しよう。(ユークリッドの距離は (A) をみたさない!) 任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $b_n = 1 + 2^{-n}$ とおく。任意の $n \in \mathbb{N}^\#$ に対し、点列 $\{a_{n,k} \mid k \in \mathbb{N}^\#\}$ を次のように定める:

$n = \infty$ のときは、任意の $k \in \mathbb{N}^\#$ に対し、 $a_{\infty,k} = 0$ とする、

$n \neq \infty$ のときは、 $a_{n,\infty} = 1 - 2^{-2(n+1)}$ とし、

$$a_{n,k} = \begin{cases} a_{n,\infty} + 2^{-2(k+1)}, & k = n, n+1, \dots \\ 1 - 2^{-2(n+k+1)}, & k = 1, 2, \dots, n-1. \end{cases}$$

とおく。



とす。 X の 2 点 $p = (x, 2^{-m})$, $q = (y, 2^{-n})$, 互に

$m \leq n$, に対し

$$d(p, q) = \begin{cases} |x - y|, & m = n \text{ のとき} \\ a_{m,n} x + b_m (2^{-m} - 2^{-n}) + a_{n,m} y, & m < n \text{ のとき} \end{cases}$$

と定めると、 d は (A) をみたし X の original topology と等しく。

例 3.5 の (X, d) の $\text{con}(X, d) \leq 2$ をみたすか。どうかわからない。それ故、局所コンパクトの仮定なしで可分距離

空間 (X, d) が $\text{con}(X, d) \leq 2$ ならば X が \mathbb{R} の部分空間と同相になるかどうかは、わかっていない。次の例は、定理 3.3 において、可分性を落とせなければ示してゐる。(定理 3.1 と比較せよ。)

3.6. 例 ($[H_0]$, $[H_2]$) $\text{con}(X, d) \leq 2$ を満たす局所コンパクト距離空間 (X, d) で可分でないものがある。存在する。実際、 $X = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ とし、 X の 2 点 p, q に対し、

$$d(p, q) = \begin{cases} p+q & , \text{ if } p \neq q \\ 0 & , \text{ if } p = q \end{cases}$$

とする。このとき、 X は非可算な離散空間であるから可分でない。(従って、 \mathbb{R} に埋め込めない。) として、 (X, d) が局所コンパクトで、 $\text{con}(X, d) \leq 2$ を満たすことは容易に確かめられる。

さて、定理 3.1 より bisector が 1 点になるような非退化な連結空間は、 \mathbb{R} の区間と同相であった。次に、各 bisector が 2 点であるような空間について考へる。

3.7 定義 距離空間 (X, d) の任意の bisector B が 2 点

のとき、 (X, d) は、double midset property (略して、DMP) を持つという。

明らかに、circle S^1 は DMP を持つ。これらのことから Loveland - Wayment [LW], Berard - Nitka [BN] 等は、次を予想した。

3.8 予想 ([LW], [BN]) DMP を持つ連続体は、

simple closed curve である。より一般に、DMP を持つ非退化な連結距離空間は、simple closed curve である。

上の予想は、連続体の場合についてさへまだ解決されてい
ないのれども、最近次のような部分解が得られた。

3.9 定理 ([Lo]) 2次元平面内の連続体 X が、ユークリッドの距離に関して DMP を持つならば、 X は simple closed curve である。

次に、条件 (b) について考えよう。距離空間 (X, d) の点 x と $\varepsilon > 0$ に対し、 $H(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) = \varepsilon\}$ とおく。このとき、条件 (b) は、

(b) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $|H(x, \varepsilon)| \leq 2$ と書ける。また、距離空間 (X, d) は、任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し、 $|H(x, \varepsilon)| = n$ のとき、metric order が n であることがわかる。ユークリッドの距離に関して、 \mathbb{R} は metric order が 2 である。

3.10 定理 ($[C_2]$) 可分な距離空間 (X, d) が、完備、局所連結であり、かつ metric order が 2 であるならば、 X は \mathbb{R} の子空間 $S^1 \times \mathbb{N}$ と同相である。

次は、定理 3.3 と同様に空間が *suborderable* であることとを示すことにより証明される。

3.11 定理 ($[HO]$) 可分距離空間 (X, d) は、条件 (a), (b) の双方向のみならず、 \mathbb{R} の部分空間と同相である。

metric order が 1 となる距離空間については、次の知られている。

3.12 定理 ($[C_1]$) 可分空間 X は、metric order が 1 である完備距離を持つことと、無理数空間と同相であることと

は、同値である。

3.13 定理 ([H₂]) 距離空間 (X, d) が、

(*) 任意の $x \in X$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対し $|H(x, \varepsilon)| \leq 1$

をみたすならば、 $\text{ind } X = 0$ である。従って、特に X が可分
のことは、(*) をみたす距離を持つことと、 X が無理数の部分
空間と同相になることと、同値である。

3.14 問題 ([JM]) 空間 X が $\text{ind } X = 0$ で $|X| \leq \mathfrak{c}$ なら

ば、 X は (*) をみたす距離 d を持つか？

ここでは、次元論に関する距離関数について述べてきた
が、特殊な距離関数に関する他の話題については、[HN] を参
照されたい。

参考文献

- [B] A. D. Berard, Jr., Characterizations of metric spaces by use of their midsets: intervals, *Fund. Math.* 73 (1971) 1-7.
- [BN] _____ and W. Nitka, A new definition of the circle by use of bisectors, *Fund. Math.* 85 (1974) 49-55.
- [C₁] M. R. Currie, A metric characterization of the irrationals via a group operation, *Topology Appl.* 21 (1985) 223-236.
- [C₂] _____, Metric characterizations and integers, *Topology Appl.* 22 (1986) 123-129.
- [E] R. Engelking, *General Topology*, PWN (1977).
- [G₁] J. de Groot, Non-Archimedean metrics in topology, *Proc. Amer. Math. Soc.* 7 (1956) 948-953.
- [G₂] _____, On a metric that characterizes dimension, *Canad. J. Math.* 9 (1957) 511-514.
- [H₁] Y. Hattori, On special metrics characterizing topological properties, *Fund. Math.* 126 (1986) 133-145.
- [H₂] _____, Congruence and dimension of non-separable metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 108 (1990) 1103-1105.
- [HN] _____ and J. Nagata, A survey of special metrics, preprint.
- [HO] _____ and H. Ohta, Metric spaces homeomorphic to a subspace of the real line, preprint.
- [J₁] L. Janos, A metric characterization of zero-dimensional spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 31 (1972) 268-270.
- [J₂] _____, Congruence and one-dimensionality of metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 103 (1988) 1268-1270.
- [JM] _____ and H. Martin, Metric characterizations of dimension for separable metric spaces, *Proc. Amer. Math. Soc.* 70 (1978) 209-212.

- [Lo] L. D. Loveland, The double midset conjecture for continua in the plane, *Topology Appl.* 40 (1991) 117-129.
- [LW] ————— and S. G. Wayment, Characterizing a curve with the double midset property, *Amer. Math. Monthly* 81 (1974) 1003-1006.
- [Lu] D. J. Lutzer, On generalized ordered spaces, *Dissertationes Math.* 89 (1971).
- [N₁] J. Nagata, Note on dimension theory for metric spaces, *Fund. Math.* 45 (1958) 143-181.
- [N₂] —————, On a special metric and dimension, *Fund. Math.* 55 (1964) 181-194.
- [N₃] —————, Topics in dimension theory, *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra V*, Proc. fifth Prague Topology Symposium 1981, Heldermann Verlag, Berlin (1982) 497-506.
- [N₄] —————, *Modern Dimension Theory*, revised edition, Heldermann Verlag, Berlin (1983).
- [O] P. A. Ostrand, A conjecture of J. Nagata on dimension and metrization, *Bull. Amer. Math. Soc.* 71 (1965) 623-625.
- [P] S. Purisch, The orderability and suborderability of metrizable spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.* 226 (1977) 59-76.

葉層構造の Expansion growth

東京大学・数理科学 江頭 信二

§0 Introduction

R. Bowen により、離散力学系に対する位相的エントロピーが次のように定義された。 (X, d) をコンパクト距離空間、 $f: X \rightarrow X$ を連続写像とする。 $S \subseteq X$ が (n, ε) -separating set ($n \in \mathbb{N}, \varepsilon > 0$) であるとは、 $\forall x, y \in S$ に対し、 $\text{Max}_{0 \leq i \leq n-1} d(f^i(x), f^i(y)) \geq \varepsilon$ が成立するときをいう。 $S_n(\varepsilon)$ を (n, ε) -separating set の最大濃度で定義する。

$$S_n(\varepsilon) = \text{Max} \{ \#S ; S \text{ は } (n, \varepsilon)\text{-separating set} \}$$

この時、エントロピー $h(f)$ は、

$$h(f) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n(\varepsilon)$$

で定義される。

Ghys, Langevin, Walczak は、エントロピーの概念を葉層構造に次のように拡張しました。 (M, \mathcal{F}) をコンパクト多様体上の余次元 q の葉層とする。finite foliation cover \mathcal{U} を一つ固定する時、 \mathbb{R}^q 上の local homeomorphisms の pseudogroup \mathcal{H} を得る。 \mathcal{H} に関する (n, ε) -separating set

を考えることができ、同様にして $S_n^H(\varepsilon)$ を (n, ε) -separating set の最大濃度で定義するとき、エントロピー $h(\mathcal{F}, \mathcal{U})$ は

$$h(\mathcal{F}, \mathcal{U}) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log S_n^H(\varepsilon)$$

で定義されます。

今、最大濃度を与える (n, ε) -separating set に着目する時、その点の分布及び濃度は葉層構造の複雑さをよく反映していることに気づきます。十分小さい $\varepsilon > 0$ を固定して n を大きくしていく時、点の分布は minimal set に集中していきます。また、葉層が拡大的であればあるほど濃度 $S_n^H(\varepsilon)$ の n に関する増大性は大きくなっていきます。ここで n についての単調増加関数 $S_n^H(\varepsilon)$ の growth を考えると foliation cover \mathcal{U} の取り方によらず、葉層構造の位相共役に関して不変になることが示されます。この growth を葉層構造の Expansion growth と呼びます。Expansion growth は、葉層構造の拡大性をよく反映しており、多くの典型的な葉層では典型的な growth になっています。

§1 Growth

本論の前に非負単調増加関数のgrowth (を拡張したものを)を定義する。Expansion growthはこのgrowth setの元として定義されます。

\mathcal{L} を非負単調増加関数の集合とします。

$$\mathcal{L} = \{g: \mathbb{N} \rightarrow [0, +\infty]; g(n) \leq g(n+1) \text{ for } \forall n \in \mathbb{N}\}$$

$\tilde{\mathcal{L}}$ を \mathcal{L} の元の単調増加列とします。

$$\tilde{\mathcal{L}} = \{(g_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}; g_i(n) \leq g_{i+1}(n) \text{ for } \forall i, n \in \mathbb{N}\}$$

写像 $\mathcal{L} \ni g \mapsto (g, g, g, \dots) \in \tilde{\mathcal{L}}$ において \mathcal{L} は $\tilde{\mathcal{L}}$ の部分集合とみなします。

$(h_k)_{k \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{L}}$ が $(g_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{L}}$ を支配する。

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} \exists B \in \mathbb{N}, \forall i, \exists k, \exists A > 0 \text{ s.t. } g_i(n) \leq A h_k(Bn) \text{ for } \forall n \in \mathbb{N}$$

$(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ と $(h_k)_{k \in \mathbb{N}}$ が互いに支配しあう(これは同値関係)時に、同じgrowth typeをもちといいます。 $(g_i)_{i \in \mathbb{N}}$ のgrowth type (同値類)を $[g_i]_{i \in \mathbb{N}}$ と書くことにします。

$$\tilde{\mathcal{E}} = \{[g_i]_{i \in \mathbb{N}}; (g_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{L}}\}$$

$\tilde{\mathcal{E}}$ には、支配性という関係によって半順序 \geq がinduceされます。また、 $g \in \mathcal{L} \subset \tilde{\mathcal{L}}$ に対しては、 g のgrowth typeを $[g]$ で表わし、 \mathcal{E} を

$$\mathcal{E} = \{[g]; g \in \mathcal{L}\} \subset \tilde{\mathcal{E}}$$

とおきます。この時 \mathcal{E} は通常の意味での growth set と同じものになり、 $\tilde{\mathcal{E}}$ はその拡張とみなせます。

$[n^k], [e^n] \in \mathcal{E}$ をそれぞれ exactly polynomial growth of degree k , exactly exponential growth と呼びます。例えば以下の関係が成立します。

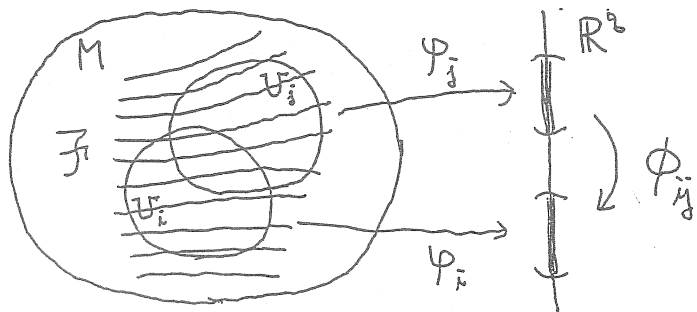
$$[0] \preceq [1] \preceq [n] \preceq [n^2] \preceq \dots \preceq [1, n, n^2, \dots] \\ \preceq [2^n] = [3^n] \preceq [1, 2^n, 3^n, \dots]$$

§2 葉層構造の Expansion growth

この section では葉層構造の Expansion growth を定義します。

\mathcal{F} をコンパクト多様体 M 上の C^0 級余次元 q の葉層とする。
 $\mathcal{U} = (\{ (U_i, \varphi_i) \}_{i=1}^A, \{ \phi_{ij} \}_{i,j=1}^A)$ を (M, \mathcal{F}) の finite foliation cover とします。すなわち

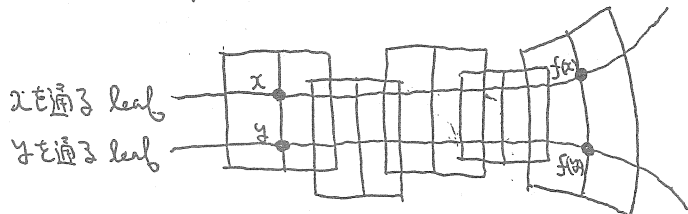
$$\left\{ \begin{array}{l} \{ U_i \}_{i=1}^A \text{ は } M \text{ の open covering} \\ \varphi_i: U_i \rightarrow \mathbb{R}^q, C^0 \text{ 級 submersion} \\ (\text{ただし } \overline{\varphi_i(U_i)} \text{ はコンパクトで } \overline{\varphi_i(U_i)} \cap \overline{\varphi_j(U_j)} = \emptyset (i \neq j) \text{ としておく)} \\ \phi_{ij}: \varphi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_i(U_i \cap U_j), \text{ homeo. s.t. } \varphi_i = \phi_{ij} \circ \varphi_j \end{array} \right.$$



$T = \bigcup_{i=1}^A \varphi_i(U_i) \subset \mathbb{R}^0$, $\mathcal{H}_1 = \{\phi_{ij}\}_{i,j=1}^A \cup \{\text{id}_T\}$ とおく。
 $n \in \mathbb{N}$ に対し、 $\mathcal{H}_n = \{f_1 \circ \dots \circ f_n \mid f_i \in \mathcal{H}_1\}$ とおく。
 (ただし写像の合成 $f_1 \circ f_2$ は、 $\text{domain}(f_2) \cap f_2^{-1}(\text{domain}(f_1))$ で定義されます)
 $\mathcal{H} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{H}_n$ を \mathcal{U} によって induce された \mathbb{R}^0 上の local homeomorphisms の pseudogroup と呼びます。
 $x, y \in T$ に対し、 $d_n^{\mathcal{H}_1}(x, y)$ を次のように定義します。

$$d_n^{\mathcal{H}_1}(x, y) = \text{Max}_{f \in \mathcal{H}_n \text{ \& \; domain}(f) \ni x, y} |f(x) - f(y)|$$

大ざっぱに言って $d_n^{\mathcal{H}_1}(x, y)$ は、2点 x, y を各 leaf 上 (開ヒワク) の n -chain をたけできるだけ離れないように動かした時、最大でどれだけ離れたかを表します。



$K' \subset T$, $\varepsilon > 0$ とする。

$S \subset T$ が $(n, \varepsilon, \mathcal{H}_1, K')$ -separating set である。

$$\stackrel{\text{def}}{\iff} S \subset K' \text{ \& \; } \forall x, y \in S \text{ に対し } d_n^{\mathcal{H}_1}(x, y) \geq \varepsilon$$

$R \subseteq T$ が (n, ε, H, K') -spanning set である。

$\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in K' \text{ に対し, } \exists y \in R \text{ s.t. } d_n^{H_1}(x, y) < \varepsilon$

$S_n^{H_1}(\varepsilon, K') = \text{Max. } \{ \#S ; S \text{ は } (n, \varepsilon, H_1, K')\text{-separating set} \}$

$r_n^{H_1}(\varepsilon, K') = \text{min } \{ \#R ; R \text{ は } (n, \varepsilon, H_1, K')\text{-spanning set} \}$

ここで $S_n^{H_1}(\varepsilon, K'), r_n^{H_1}(\varepsilon, K')$ は、有限値で n について単調増加、 ε について単調減少になります。そこで $(\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ を 0 に収束する単調減少正数列とすると、 $(S_n^{H_1}(\varepsilon_j, K'))_{j \in \mathbb{N}}, (r_n^{H_1}(\varepsilon_j, K'))_{j \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{E}}$ となります。

定理

(M, \mathcal{F}) をコンパクトな様体上の C^0 級余次元 l の葉層、 $K \subseteq M$ とする。

$U, (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ は、上のとおりとし、 $K' = \bigcup_{i=1}^A \varphi_i(U_i \cap K)$ とおく。この時

$[S_n^{H_1}(\varepsilon_j, K')]_{j \in \mathbb{N}} = [r_n^{H_1}(\varepsilon_j, K')]_{j \in \mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{E}}$

となり、この growth は $U, (\varepsilon_j)_{j \in \mathbb{N}}$ の取り方によらず、葉層構造について位相(共役)不変になる。

この growth を $\eta(K, \mathcal{F})$ (or $\eta(K)$) $\in \tilde{\mathcal{E}}$ と書き、Expansion growth と呼ぶ。

\mathcal{F} の leaf L に対して、 $\eta(L)$ は L の $M \cap$ の

はめ込まれ方によって決定し、 L の holonomy によらない。

次のようにして Expansion growth から葉層構造の数の位相不変量を無数に得ることができる。

$$\eta_m^l(K, \mathcal{F}) = \lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{\underbrace{\log \circ \dots \circ \log}_{l \text{ times}} (S_n^{H_1}(\mathcal{E}_j, K'))}{\underbrace{\log \circ \dots \circ \log}_{m \text{ times}} n}$$

↓ $r_n^{H_1}(\mathcal{E}_j, K')$ と同じ

($l, m \in \mathbb{N}$)

また、エントロピー $h(\mathcal{F}, \mu)$ は、

$$h(\mathcal{F}, \mu) = \lim_{j \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log(S_n^{H_1}(\mathcal{E}_j, K'))$$

で定義され、 $h(\mathcal{F}, \mu)$ が 0 か正か $+\infty$ であるかは μ の取り方によらず決定します。

Expansion growth の簡単な性質を幾つか以下に掲げます。

- $K \subseteq K' \Rightarrow \eta(K) \leq \eta(K')$
- $K = \phi \Leftrightarrow \eta(K) = [0]$
- $\eta(\overline{K}) = \eta(K)$
- L が compact leaf $\Leftrightarrow \eta(L) = [1]$
- $\eta(M, \mathcal{F}) \leq [e^{e^n}]$ であるが、 \mathcal{F} が C^1 級なら $\eta(M, \mathcal{F}) \leq [e^n]$

§3 例

例1 バンドル葉層

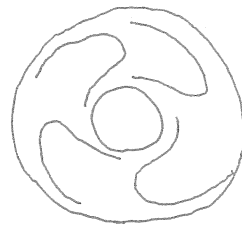
ファイバーバンドルで各ファイバーを leaf とする葉層 (M, \mathcal{F})

に対して $\eta(M, \mathcal{F}) = [1]$

例2 Reeb foliation 等

$\mathbb{R}^m - \{0\}$ に $\mathbb{R}^p \times \{*\}$ ($* \in \mathbb{R}^{m-p}$) ($1 \leq p \leq m-1$) を leaf とする葉層を考える。この時、 $S^{m-1} \times S^1 = \mathbb{R}^m - \{0\} / x \sim \lambda x$ 上の葉層子を得る。(p=m-1の時 Reeb foliation)

$\eta(S^{m-1} \times S^1, \mathcal{F}) = [n]$

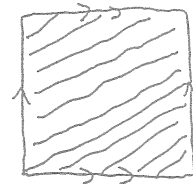


Reeb component

例3 T^m 上の linear foliation

\mathbb{R}^m 内の p 次元線型部分空間を一つ固定し、これを平行移動したものを leaf にすることにより、 p 次元葉層を得る。

この時 $T^m = \mathbb{R}^m / \mathbb{Z}^m$ 上の葉層子を induce するが、 $\eta(T^m, \mathcal{F}) = [1]$ となる。



T^2 上の linear foliation

例4 T^2 上の Denjoy foliation

T^2 上の Denjoy foliation 子に対しては、 $\eta(T^2, \mathcal{F}) = [n]$

例5

$A = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix} \in SL(m; \mathbb{Z})$ に対し、

total automorphism $A: T^m \rightarrow T^m$ から、 S^1 上の foliated T^m -bundle を構成できるが、この Expansion growth は $\lceil n^{\frac{m+1}{2}} \rceil$

例6 Anosov foliation

Anosov flow が与えられた時、flow の orbit を leaf とする foliation \mathcal{F} weak (un-)stable foliation に対する Expansion growth は $\lceil e^n \rceil$ である。strong (un-)stable foliation については一般にはわかっていない。Anosov diffeomorphism の (un-)stable foliation についても一般にはわかっていないが、hyperbolic total automorphism の場合は、例3より $\lceil 1 \rceil$ である。

§4 余次元1の場合

以下、 \mathcal{F} は横断的に向きづけ可能な余次元1葉層とする。

定理

$g \in \mathcal{L}$ とし、 $g(n+1) \leq 2g(n)$ for $\forall n \in \mathbb{N}$ に対し、
 $\eta(M, \mathcal{F}) = \lceil n^2 g(n) \rceil$ となるような葉層 (M, \mathcal{F}) が存在する。

この結果より、 $\eta_2^q(K, \mathcal{F})$, $\eta_2^{q+1}(K, \mathcal{F})$ ($q \in \mathbb{N}$) は、自明でない葉層構造の数の位相不変量であることがわかる。例えば

$g(n) = (2^{n\alpha} \text{の整数部分})$ ($0 \leq \alpha \leq 1$) とおけば、 $\eta_1^2(M, \mathcal{F}) = \alpha$ となる。

\mathcal{F} が C^0 級なら Expansion growth は 非可算無限個の値を取り得るのに対し、 \mathcal{F} が C^2 級なら 可算個の値、しかもほとんどが典型的な growth にしかならないことが示されます。

定理

\mathcal{F} を C^2 級とし、 $K \subseteq M$ を \mathcal{F} -partitioned set とする時

$$\eta(K, \mathcal{F}) = \begin{cases} [e^n] & \bar{K} \text{ が resilient leaf を含む時} \\ [n^l] & \bar{K} \text{ が resilient leaf を含まず、} l < +\infty \text{ の時} \\ [1, n, n^2, \dots] & \text{" } l = +\infty \text{ の時} \end{cases}$$

ただし $l = \sup \{ \text{level}(L); L \text{ は } K \text{ に含まれる leaf} \}$ &

$\text{level}(L) = \sup \{ l; \bar{L}_0 \subsetneq \bar{L}_1 \subsetneq \dots \subsetneq \bar{L}_l = \bar{L} \text{ \& } L \text{ は leaf} \}$

References

- S. Egashira, Expansion growth of foliations, preprint
- " , Expansion growth of smooth codimension one foliations, 準備中
- E. Ghys, R. Langevin, P. Walczak, Entropie geometrique des feuilletages, Acta. Math. 168 (1988), 105-142
- S. Hurder, Ergodic theory of foliations and a theorem of Sacksteder, Springer Lecture Notes in Math. 1342 (1988), 291-328

実特異点 に対して ミルナー数に似た
よき 不変量

福田 拓生

東工大・理

$f = (f_1, \dots, f_p) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $n > p$, を実解析写像芽
とする。 f の零点集合の位相に興味を持つ。零点集合芽
 $f^{-1}(0)$ の解析的型は局所環 $\mathcal{O}_n / (f)$ で定まる。但し

$\mathcal{O}_n :=$ 解析的関数芽 $\alpha : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ の局所環
 $(f) := f$ の成分関数 f_1, \dots, f_p で生成されるイデアル。

$f^{-1}(0)$ の位相型を決定するには、 $\mathcal{O}_n / (f)$ は詳しく知る。
更に $\mathcal{O}_n / (f)$ は \mathbb{R} 上のバナッハ空間であるか、 $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_n / (f)$
 $= \infty$ なのか、一般に $\mathcal{O}_n / (f)$ は moduli を持つ。
そこで次の条件をみたす \mathcal{O}_n のイデアル $\mathcal{I}(f)$ をみつける
ことと(最終)目標とする。

- (1) $\mathcal{I}(f) \supset (f)$ (2) $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{O}_n / \mathcal{I}(f) < +\infty$
- (3) $\mathcal{O}_n / \mathcal{I}(f)$ は $f^{-1}(0)$ の位相型を決定する。
- (4) $\mathcal{O}_n / \mathcal{I}(f)$ から $f^{-1}(0)$ のいっさいの位相不変量
が求まらせる。

候補として次のイデアルを考える。

f に対して写像 $(f, x_1^2 + \dots + x_n^2) : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^{p+1}, 0)$ の

ヤコビ行列 $\begin{pmatrix} \partial f / \partial x_j \\ 2x_1, \dots, 2x_n \end{pmatrix}$ を考え

$$\left\{ \begin{array}{l} J(f, x_1^2 + \dots + x_n^2) : \text{上のヤコビ行列の } (p+1) \times (p+1) \text{ 小行列} \\ \text{式で生成されるイデアル} \\ (f, J(f, x_1^2 + \dots + x_n^2)) : (f) \text{ と } J(f, x_1^2 + \dots + x_n^2) \text{ で生成される} \\ \text{イデアル.} \\ \nu(f) = \dim_{\mathbb{R}} \sigma_n / (f, J(f, x_1^2 + \dots + x_n^2)) \text{ とおく.} \end{array} \right.$$

$(f, J(f, x_1^2 + \dots + x_n^2))$ は上の条件 (1), (2) をみたし, 特殊

な次元対 $p = n - 1$ に対しては (3) (4) をみたす。(A-F-N)

一般の次元対 (n, p) に対して (3), (4) をみたすかどうかは

が $\nu(f)$ に対して, 数 $\mu(f)$ に対して LE -Ramanujan

-Timourian 型の定理が成立することを発見した。

定理 A $f_t : (\mathbb{R}^n, 0) \rightarrow (\mathbb{R}^p, 0)$, $t \in [a, b]$, $n > p$, Σ

実解析写像の (t) -対し (解析的) 族とする。 $\forall t \in \Sigma$

$$\nu(f_t) = \text{const} < +\infty \Rightarrow f_t^{-1}(0) \text{ の位相型は不変}$$

定理 B $p = 1$ のとき, $\nu(f_t) = \text{const} < +\infty$, $\mu(f_t)$

$$= \text{const} < +\infty \Rightarrow f_t \text{ の位相型は不変.}$$

Effective homology, a survey.

Francis Sergeraert

Institut Fourier, BP 74, 38402 St Martin d'Hères Cedex
Laboratoire de Modélisation et Calcul, 46, avenue Félix Viallet, 38031 Grenoble Cedex

1 Introduction.

Algebraic topology consists in associating to topological spaces *algebraic invariants* in order to describe their essential properties. In some (exceptional) cases, it is possible in this way to *classify* a particular topological space inside a more or less large set of spaces or equivalence classes of spaces, for example up to homotopy equivalence. In the most important cases, a *functor* is defined, capable of working on some topological spaces to produce an algebraic object. And very frequently, if this functor works on a “finite” topological space, then the result is also a “finite” algebraic object. The meaning of the adjective “finite” is the following : an object is *finite* if it can be “reasonably” coded on a theoretical or actual machine.

For example a finite simplicial complex can be easily implemented on a machine, and such a topological space is therefore considered as finite. A Serre theorem asserts that, if such a space is simply connected, then its homotopy groups are of *finite type*, and therefore are “finite” with respect to our point of view. Consider in this way the 4-sphere S^4 and the functor π_7 (seventh homotopy group); a table of sphere homotopy groups shows that $\pi_7 S^4 = \mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}$; if we decide to code by the list $(d_1 \ d_2 \ \dots \ d_m)$ the group $\mathbb{Z}_{d_1} \oplus \mathbb{Z}_{d_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{d_m}$, then the group $\pi_7 S^4$ is coded by the list $(12 \ 0)$, a finite object.

The main problem solved by effective homology is to make *available algorithms* capable of computing finite algebraic objects associated to finite topological spaces according to the various functors of algebraic topology. The problem makes sense because the initial datum (input) can be coded on a machine and also the final datum (output) so that the challenge is, given some “reasonable” functor of algebraic topology, to prove the existence of a theoretical algorithm constructing the output, starting from the input.

The problem makes sense but also is not trivial : it is *easy*, using Novikov's theorem about the *word problem*, to give examples where such a problem has a negative answer. Let us consider for example the following problem : we define the functor *ISP* (Is Simply Connected) on the topological space category as having the value 0 on some topological space if this space is simply connected, and the value 1

otherwise. This functor is in particular defined for the *finite* simplicial complexes and its value is also a *finite* object; the question of the existence of an *algorithm* implementing the *ISP* functor (for finite simplicial complexes) makes sense but has a negative answer. As a matter of fact, because any first homotopy group of a finite simplicial complex has a finite presentation, and conversely any finitely presented group is the first homotopy group of some finite simplicial complex, the algorithmic problem for the *ISP* functor is equivalent to the problem of finding an algorithm capable of working on any finitely presented group to determine whether this group is null. But, using Novikov's theorem about the word problem, Rabin proved [15] this problem has no solution.

There are many examples of positive answers. The simplest one is the computation of the usual homology groups (\mathbb{Z} -coefficients) of finite simplicial complexes; it is quite elementary to write such an algorithm; a simplicial complex determines a finite simplicial chain complex and the homology groups come from a simple normalization process of the boundary operators. See [6] for an interesting study of the related complexity problem. A more difficult problem is to compute the homotopy groups of a finite simplicial complex. Firstly it is better to only consider the simply connected case because of the Novikov obstacle. For the rational case, in other words to determine the groups $\pi_n \otimes \mathbb{Q}$, Sullivan gave in the seventies his famous solution [20] based his on the *minimal models* theory. For the (\mathbb{Z})-homotopy groups themselves, Edgar Brown published [3] a solution based on the Postnikov tower (a tool used by Sullivan too) and finite approximations of infinite simplicial sets.

By the way Edgar Brown's solution has a larger scope than Sullivan's one. Why did the latter obtain so much success with his "weaker" solution? Because Sullivan's solution is much more efficient. The theoretical existence of some algorithm is of course important but the complexity of such an algorithm is not less. From this point of view, the complexity of computing usual homology groups is quite good (polynomial, see [6]); Sullivan's algorithm is relatively efficient; it has been concretely used in many situations, see for example [10]. However there is also a negative result by David Anick about the problem of calculating rational homotopy groups [1]; this problem is $\#P$ -hard, that is, if, as it is generally thought, $P \neq NP$ [8], no algorithm can be extensively used because the computing time will necessarily become unreasonably large. But the situation for Edgar Brown's algorithm is much worse: Edgar Brown himself quoted in his paper that his algorithm has no practical use: even for very simple situations where human beings succeeded in computing homotopy groups by hand, the Brown algorithm cannot be used because of enormous space and time complexity, even with the most powerful computer it is possible to imagine!

We present in this paper the *effective homology* method to solve these problems. It is an adaptation of Hirsch's method to construct finite chain complexes [11] which compute homology groups of possibly complicated spaces. Using the modern sophisticated programming tools (functional programming), Hirsch's method becomes a real computing tool for homology and homotopy groups. For example a

simple and elegant solution has been found in this way by Julio Rubio for Adam's problem about the computation of homology groups of iterated loop spaces [17]. Among others ([2], [18], [21]), it is at this time the unique solution that has been concretely implemented on computer, giving many interesting results, allowing us in certain cases to compute homology groups for which there did not exist previously even theoretical algorithms [16].

2 Is a spectral sequence an algorithm ?

The simplest general methods to calculate homology and homotopy groups are the various exact sequences and spectral sequences. For example the Serre spectral sequence gives information about the homology groups of the total space of a fibration, which can be considered as a *twisted* product. Conversely, the Eilenberg-Moore spectral sequence gives information about the homology groups of the base space (resp. the fiber space) when you know the homology of the total space and of the fiber space (resp. the base space); this is a sort of *twisted division*.

But are these spectral sequences *algorithms* ? Are the various classical exact sequences (that are in fact particular cases of spectral sequences) *algorithms* ? The answer is negative for two main reasons.

The first reason is the computing problem for the *differentials*. Nothing is explained in spectral sequence theory about computing the differentials. We shall see that in fact a good solution can be given using *functional programming*. Another quite different problem is the extension problem at abutment. A spectral sequence process gives you a filtration :

$$H_n E = H_{n,0} E \supset H_{n-1,1} E \supset \dots \supset H_{0,n} E \supset 0$$

and some groups traditionally denoted by $E_{p,q}^\infty = H_{p,q} E / H_{p-1,q+1} E$ and the extension problem is to guess, knowing these groups, the group $H_n E$ you are looking for. Nothing is said about this problem so that usually people prefer to wisely work with coefficients in some field. We shall see that the *perturbation lemma* gives a perfect solution for this problem.

Carefully combining functional programming methods and perturbation lemma gives the *effective homology theory*.

To convince the reader that computing the differentials of a spectral sequence is hard, we quote two paragraphs extracted from McCleary's book *User's guide to spectral sequences* [13]:

(p. 6) "THEOREM". *There is a spectral sequence with*

$$E_2^{*,*} \cong \text{"something computable"}$$

and converging to H^ , something desirable.*

The important observation to make about the statement of the theorem is that it gives an E_2 -term of the spectral sequence but says nothing about the successive differentials d_r . Though $E_r^{*,*}$ may be known, without d_r or some further structure, it may be impossible to proceed.

[...]

(p. 28) It is worth repeating the caveat about differentials mentioned in chapter 1: knowledge of $E_r^{*,*}$ and d_r determines $E_{r+1}^{*,*}$ but not d_{r+1} . If we think of a spectral sequence as a black box, then the input is a differential bigraded module, usually $E_1^{*,*}$, and, with each turn of the handle, the machine computes a successive homology according to a sequence of differentials. If some differential is unknown, then some other (any other!) principle is needed to proceed. From chapter 1, the reader is acquainted with several algebraic tricks that allow further calculations. In the non-trivial cases, it is often a deep geometric idea that is caught up in the knowledge of a differential.

Computing the differentials of a spectral sequence consists in considering the sequence :

$$E_{p-r, q+r-1}^r \xleftarrow{d} E_{p, q}^r$$

???

and to find what is dx for some $x \in E_{p, q}^r$. You must choose some representant z of x in the chain group C_{p+q} , then compute its boundary $dz \in C_{p+q-1}$ and finally determine its equivalence class $y = dx \in E_{p-r, q+r-1}^r$; the plan is quite clear but the chain groups such that C_{p+q} are in general highly infinite. Two main solutions are possible; the first one consists in working in such a way that all chain complexes are "finite"; this is frequently theoretically possible, but the finite complexes will usually be so enormous that such a solution is not of practical use. The other solution, in fact much more elegant is *functional algorithmic*. But what is functional algorithmic? This is sketched in the following section.

3 Functional algorithmic, a survey.

Frequently a mathematical object is a (possibly) *infinite* set provided with algorithms. For example a *ring* is a 4-tuple $R = (S, A, O, M)$ where:

- the S component is a *type*, in other words the underlying set;
- the A component is the addition algorithm;
- the O component is the opposite algorithm;
- the M component is the mutiplication algorithm.

The type component could be the *integer* type if the ring is the integer ring, or some appropriate type for other situations such that polynomial rings, power series rings, etc.

Producing and using such objects (a type and a set of algorithms defined on this type) is *functional algorithmic*. Using such objects is not hard, but producing them needs sophisticated tools that are not available in ordinary programming languages (Pascal, C, etc.). If you intend to use functional methods, you must use a functional programming language, the most efficient one being at this time *Common-Lisp*.

To give an idea of what is possible using functional algorithmic, we give some typical examples of functor implementations.

Theorem 1 — *An algorithm can be implemented:*

$$\text{Poly} : \mathbf{R}_1 = (S_1, A_1, O_1, M_1) \mapsto \mathbf{R}_2 = (S_2, A_2, O_2, M_2)$$

constructing from the ring \mathbf{R}_1 the polynomial ring $\mathbf{R}_2 = \mathbf{R}_1[X]$.

Note that the “Poly” algorithm is a *unique* object able to work on *any* ring to construct the corresponding polynomial ring. By a simple iterative use of such an algorithm, starting from any ring \mathbf{R} , it is possible to construct the ring of polynomials with two variables $\mathbf{R}[X, Y]$, and the ring of polynomials with any number n of variables $\mathbf{R}[X_1, \dots, X_n]$. This is a classical work with a symbolic computation system such as *Axiom* (ex-Scratchpad), and is usually the first step of a functional programming course mathematically oriented.

Theorem 2 — *An algorithm can be implemented:*

$$\text{IndLim} : \Phi = (\mathbf{R}_0 \xrightarrow{\phi_0} \mathbf{R}_1 \xrightarrow{\phi_1} \mathbf{R}_2 \xrightarrow{\phi_2} \dots) \mapsto \mathbf{R} = (S, A, O, M)$$

where the input Φ is an inductive ring system and the output \mathbf{R} is the inductive limit ring of this system.

Combining the algorithms of theorems 1 and 2, it is easy for example to construct, starting from a ring \mathbf{R} , the polynomial ring with an infinite number of variables $\mathbf{R}[X_i]_{i \in \mathbb{N}}$. The following algorithm of this type is more oriented homological algebra, but it is essentially analogous.

Theorem 3 — *An algorithm can be implemented:*

$$\text{TensorAlgebra} : \mathbf{C} = (S, A, O, d) \mapsto \mathbf{C}' = (S', A', O', M', d')$$

where $\mathbf{C} = (S, d)$ is a chain complex, and $\mathbf{C}' = (S', d')$ is the tensor algebra of \mathbf{C} : $\mathbf{C}' = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathbf{C}^{\otimes n}$ with the usual grading, multiplication and differential.

The “TensorAlgebra” algorithm is one of the numerous algorithms constantly used in the actual effective homology program.

Theorem 4 — An algorithm can be implemented:

$$\text{LoopSpace} : \mathbb{E} = (S, \partial, \eta) \longmapsto \mathbb{E}' = (S', \partial', \eta')$$

where \mathbb{E} is a simplicial set (∂ is its face operator defined on $N \times S$, η its degeneracy operator), and $\mathbb{E}' = \Omega\mathbb{E}$ is its loop space.

A simplicial set is a kind of algebraic object (S, ∂, η) where S is the underlying simplex set, ∂ and η are the face and degeneracy operators, defined for every pair (n, σ) such that $n \leq \dim(\sigma)$. As previously, the “LoopSpace” algorithm is a unique object able to work on any simplicial set, maybe a simplicial set which is already a loop space, and so on. So that it is easy to build an algorithm $(n, \mathbb{E}) \mapsto \Omega^n \mathbb{E}$. And combining with a suspension algorithm and an inductive limit algorithm, a new algorithm $\mathbb{E} \mapsto \Omega^\infty S^\infty \mathbb{E}$ can be implemented, etc.

It is frequent that a coding for an infinite simplicial set does not allow the user to reach *global* information about this object such that its homology groups. In fact such a coding only allows you for example to find some face of a simplex *which is known* to be in the simplicial set, but is quite unable to give you the list of all simplices in some dimension, a list which is in general infinite! This is well described by the following terminology: such a coding is called *locally effective*, because it is able to give you only *local* informations; on the contrary, if supplementary information is available giving global information, then the coding is called *effective*; such an object is necessarily of finite type.

The history of computer science is fairly amazing. Hilbert stated the completeness problem of formal mathematics and also the existence question for a universal algorithm solving any mathematical problem. Gödel proved in 1934 his famous incompleteness theorem, and, directly guided by Gödel’s proof, Church and Turing also gave a negative answer to the second question of Hilbert (1936). The main ingredient of Gödel’s proof was a mathematical statement capable of saying something about itself, and in the same way, Church and Turing used programs capable of working on themselves. This is not obvious in ordinary programming, because of the traditional splitting between *programs* and *data*. But Turing proved that after all a program can be also considered as a datum, and in this way a program may work on itself; Turing created his famous theoretical machine to define such an organization, which is the source of classical computer science (universal machines with recorded programs): Von Neumann, Fortran, Algol, Pascal, C, Ada, etc. Church’s proof has the symmetric organization: any “object” is a function (program), even a datum! This is the functional organization of computer science. It is only in the fifties that computer scientists, essentially McCarthy [14], understood that Church’s ideas could also be at the origin of another organization of practical computer science; it is the creation of the Lisp programming language, which is not yet totally ended (see [22]). And because of the very functional nature of Lisp, this language is particularly well designed to create and manipulate function sets, such that the various objects considered in the theorems of this section.

4 Objects with effective homology.

Definition 5 — A *reduction* is a 5-tuple (\hat{C}, C, f, g, h) :

$$\begin{array}{ccc} \hat{C} & \xrightarrow{h} & {}^s\hat{C} \\ f \downarrow & \uparrow g & \\ C & & \end{array}$$

where \hat{C} and C are chain complexes, f and g are chain complex morphisms, h is a homotopy operator; ${}^s\hat{C}$ is \hat{C} shifted, in other words h has degree 1; these data must satisfy the following relations:

- 1) $fg = 1_C$;
- 2) $fh = 0$;
- 3) $hg = 0$;
- 4) $1_{\hat{C}} - gf = hd + dh$.

The morphisms f and g and the homotopy operator h describe the (big) chain complex \hat{C} as a direct sum of the (small) chain complex C and an acyclic direct summand.

Definition 6 — A *homotopy equivalence* between two chain complexes C and EC is a pair of reductions:

$$\begin{array}{ccc} & \hat{C} & \\ \rho_1 \swarrow & & \searrow \rho_2 \\ C & & EC \end{array}$$

If C and EC are free \mathbb{Z} -chain complexes, a usual chain equivalence between them can be organized in this way. Frequently the chain complexes C and \hat{C} are *locally effective* and on the contrary, the chain complex EC is *effective*. So that EC can be understood as a description of the homology of C , more precisely as a tool allowing one to compute the homology of C . The chain complex \hat{C} is only an intermediate object.

Definition 7 — An *object with effective homology* is a 4-tuple (X, C, EC, h) where:

- 1) X is an object ;
- 2) C is the chain complex canonically associated to X ;
- 3) EC is an *effective* chain complex ;
- 4) h is a homotopy equivalence between C and EC .

For example X could be a simplicial set (and $C = C_*X$), or a group (and $C = C_*(BX)$), or even a chain complex (and $C = X$).

Evidence 8 — An algorithm can be implemented, where the input is an object with effective homology (X, C, EC, h) and an integer n , the output being the group $H_n(X)$.

This algorithm takes the EC component from (X, C, EC, h) , computes the boundary matrices d_{n+1} and d_n and, normalizing these matrices, computes the homology group which is looked for. Computing the boundary matrices is possible because the chain complex EC is *effective*, in particular of finite type in every dimension. So that the complex EC simply describes the homology of X (of C); the proof this description is correct is the homotopy equivalence h . But, and this is the case in the interesting situations, the complex C could be highly infinite.

Meta-theorem 9 — Let F be a “reasonable” functor. Then an algorithm F_{EH} can be implemented such that if $O_{EH} = (X, C, EC, h)$ is an object with effective homology where $F(X)$ is defined, then $F_{EH}(O_{EH}) = (X', C', EC', h')$ is an object with effective homology where $X' = F(X)$.

An algorithm is “reasonable” if it does not meet the Novikov obstacle, in other words if some connectivity hypothesis is satisfied. A typical example is Rubio’s solution to Adam’s problem:

Theorem 10 — An algorithm can be implemented:

$$\text{Omega}_{EH}^- : (X, C, EC, h) \longmapsto (X', C', EC, h')$$

where $X' = \Omega X$ is the loop space of X , a simply connected space.

It is important to understand in this statement that it is neither possible to construct EC' from C' , because C' is only locally effective and no global information is available from it, nor it is possible to construct EC' from EC because the information in EC is too poor; mainly EC does not contain the coalgebra structure of C . But combining the *whole* information available in (X, C, EC, h) , it is possible to construct EC' (and h').

Corollary 11 (Solution to Adam’s problem) — An algorithm can be implemented:

$$\text{IteratedOmega}_{EH} : (n, (X, C, EC, h)) \longmapsto (X_n, C_n, EC_n, h_n)$$

where $X_n = \Omega^n X$ is the n -th loop space of X , an n -connected space.

In fact previous theorem’s algorithm constructs an object with effective homology, so that the process can be trivially iterated.

5 Perturbation lemma machinery.

The main tool to prove the various instances of the effective homology meta-theorem is the *perturbation lemma* which should be called the *fundamental theorem of homological algebra*.

Theorem 12 (Perturbation lemma [19] [5]) — Let $\rho = (\hat{C}, C, f, g, h)$ a reduction and $\hat{\delta}$ a perturbation of $d_{\hat{C}}$, that is an operator defined on \hat{C} of degree -1 satisfying the relation $(d_{\hat{C}} + \hat{\delta}) \circ (d_{\hat{C}} + \hat{\delta}) = 0$. Furthermore, the composite function $h \circ \hat{\delta}$ is assumed locally nilpotent, that is, for every $x \in \hat{C}$, $(h \circ \hat{\delta})^n x = 0$ for n sufficiently large. Then a new reduction $\rho' = (\hat{C}', C', f', g', h')$ can be constructed where:

- 1) \hat{C}' is the complex obtained from C replacing the old differential d_C by $(d_C + \hat{\delta})$;
- 2) the new complex C' is obtained from the complex C only by adding to the old differential d_C a perturbation δ ;
- 3) (analogous statements for f' , g' and h').

It is essentially an implicit function theorem. A *reduction* is a fixed relation set between several maps; if the differential perturbation is sufficiently small (nilpotency condition), then there is a unique way to modify the other data to keep the reduction hypotheses. It is important to note that the *graded modules* \hat{C} and C remain unchanged in the process, only the *maps* are modified.

6 Rubio's solution to Adam's problem.

As a typical example, we roughly describe Rubio's solution to Adam's problem (theorem 10) [17]. It is a tricky assembly of three different applications of the perturbation lemma. Two of them were already known, the third one, due to Julio Rubio, completes the process giving the solution to Adam's problem.

6.1 Step 1: Shih's theorem.

If X is a simplicial set, Kan defined [12] a simplicial model for the loop space ΩX of X . He defined too a *twisted product* $X \times_{\tau} \Omega X$ playing the role of the usual contractible path space of X . Applying the Eilenberg-Zilber theorem to the trivial product $X \times \Omega X$ gives a reduction $\rho_{EZ} : C_*(X \times \Omega X) \implies C_*(X) \otimes C_*(\Omega X)$. Kan's twisted product induces a differential perturbation in the top complex of this reduction, and, applying the perturbation lemma, we get a new reduction $\rho_{SH} : C_*(X \times_{\tau} \Omega X) \implies C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X)$ where the bottom chain complex is

now a twisted tensor product. This is Shih's version [19] of Edgar Brown's twisted Eilenberg-Zilber theorem [4].

Furthermore the space $X \times_{\tau} \Omega X$ is contractible, and therefore a canonical reduction $\rho_{KM} : C_*(X \times_{\tau} \Omega X) \implies \mathbb{Z}$ ($KM = \text{Kan-Moore}$) is defined, and the pair (ρ_{SH}, ρ_{KM}) can be considered as the effective homology of $C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X)$.

Theorem 13 — *An algorithm can be implemented:*

$$\text{Shih} : X \longmapsto (C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X), C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X), \mathbb{Z}, h).$$

where the output is a chain complex with effective homology.

6.2 Step 2: Hirsch's complex.

If A is a differential graded coalgebra (DGC), B a differential graded left comodule over A (DGLCM) and C a differential graded right comodule over A (DGRCM), then the $\text{Cobar}^A(B, C)$ differential bigraded module can be defined, which is the heart of the Eilenberg-Moore spectral sequence. We will assume A simply connected, that is $A_0 = \mathbb{Z}$ and $A_1 = 0$. The augmentation ideal \bar{A} of A is the quotient A/A_0 . The (p, q) -component of $\text{Cobar}^A(B, C)$ is $(B \otimes \bar{A}^p \otimes C)_q$. This Cobar has two differentials, a *vertical* one d_v , which is simply the tensor product of the differentials of the components, and a *horizontal* one d_h coming from the coalgebra and comodule structures. If we remove the horizontal differential d_h , we get a poorer object which we call $\text{PreCobar}^A(B, C)$, and the usual $\text{Cobar}^A(B, C)$ is obtained from the Precobar by *perturbation* of the differential.

Theorem 14 — *An algorithm can be implemented, where the input is a triple (A, B, C) , A a DGC_{EH} (with effective homology), B a $DGLCM_{EH}$, C a $DGRCM_{EH}$, and the output is a differential graded module with effective homology $\text{Cobar}^A(B, C)$.*

Simply stated, the effective homology of A , B and C allows this algorithm to determine the effective homology of $\text{Cobar}^A(B, C)$. The proof is a simple application of the perturbation lemma from Precobar to Cobar. Ronnie Brown observed [5] that Hirsch's method to process the Serre spectral sequence [11] is nicely presented with the help of the perturbation lemma. This organization can be applied also to the Eilenberg-Moore spectral sequence (see for example [9]) but the situation is much more intricate, and functional programming theory is necessary to obtain the statement of the previous theorem.

6.3 Step 3: the missing link.

If A is a differential graded coalgebra, and Z the trivial A -comodule, then it is well known that $\text{Cobar}^A(Z, A)$ is acyclic. More precisely a reduction

$$\text{Cobar}^A(Z, A) \implies \mathbb{Z}$$

is canonically defined. In particular, if X is a simplicial set, and $C_*(X)$ the canonical DGC associated, we have a reduction:

$$\text{Cobar}^{C_*(X)}(\mathbb{Z}, C_*(X)) \Longrightarrow \mathbb{Z}$$

Applying the “ $\otimes C_*(\Omega X)$ ” functor to this reduction, we obtain a new reduction:

$$\text{Cobar}^{C_*(X)}(\mathbb{Z}, C_*(X) \otimes C_*(\Omega X)) \Longrightarrow C_*(\Omega X)$$

The tensor product in this formula is not twisted. Applying for the third time the perturbation lemma, we can perturb the differential of the top complex to replace the non-twisted tensor product by $C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X)$. In this case, a careful examination proves the differential of the bottom complex $C_*(\Omega X)$ remains unchanged.

Theorem 15 (Rubio) — *An algorithm can be implemented where the input is a simplicial set X and the output is a reduction:*

$$\text{Cobar}^{C_*(X)}(\mathbb{Z}, C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X)) \Longrightarrow C_*(\Omega X)$$

In the classical treatment of the Eilenberg-Moore spectral sequence [?], filtering carefully both complexes allows to prove they have the same homology. Here we (effectively) construct a homotopy equivalence between them.

6.4 Step 4: assembling the puzzle.

Let X be a simply connected simplicial set with effective homology. In other words, $C_*(X)$ is a chain complex with effective homology. The step 1 has constructed the effective homology of $C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X)$. Using the step 2, we can construct the effective homology of $\text{Cobar}^{C_*(X)}(\mathbb{Z}, C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X))$. This is essentially a pair of reductions:

$$\rho_1 : \hat{C} \Longrightarrow \text{Cobar}^{C_*(X)}(\mathbb{Z}, C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X))$$

and

$$\rho_2 : \hat{C} \Longrightarrow EC$$

where \hat{C} is some locally effective chain complex and EC is an *effective* one.

The step 3 gives another reduction:

$$\rho_3 : \text{Cobar}^{C_*(X)}(\mathbb{Z}, C_*(X) \otimes_t C_*(\Omega X)) \Longrightarrow C_*(\Omega X).$$

There is a natural way to compose ρ_1 and ρ_3 to obtain another reduction:

$$\rho_4 : \hat{C} \Longrightarrow C_*(\Omega X).$$

The pair (ρ_4, ρ_2) is a homotopy equivalence between $C_*(\Omega X)$ and the *effective* chain complex EC . This proves the theorem 10.

7 A program.

Theorem 10 is not only a theoretical theorem. The algorithm the existence of which is proved has been actually written and used. It is a 5000 lines Common-Lisp program which has already given numerous results. As a typical example, no algorithm was previously known to compute the homology groups of $X = \Omega(\Omega S^3 \cup_2 D^3)$ where the 3-disk D^3 is glued to the loop-space ΩS^3 by a degree 2 map $S^2 \rightarrow \Omega S^3$. But using Rubio's theorem, ΩS^3 is a simplicial set with effective homology; it is very easy to prove $\Omega S^3 \cup_2 D^3$ is also with effective homology (cone construction) and applying again Rubio's theorem, a version with effective homology of X can be constructed. Our program does that and computes in less than one hour $H_i X$ for $i \leq 7$. For example:

$$\begin{aligned}H_5 X &= \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2^6 \\H_6 X &= \mathbb{Z}_2^{13} \oplus \mathbb{Z}_3 \\H_7 X &= \mathbb{Z}_2^{20}.\end{aligned}$$

References

- [1] David J. Anick. *The computation of rational homotopy groups is #P-hard*. In *Computers in geometry and topology*, Martin Tangora ed., Lecture Notes in Pure and Applied mathematics, vol. 114; Decker, New-York, 1989.
- [2] Billera, Kapranov, Sturmfels. *Convex geometry and a conjecture of Baues in the theory of loop spaces*. Preprint.
- [3] Edgar H. Brown Jr.. *Finite computability of Postnikov complexes*. *Annals of Mathematics*, 1957, vol. 65, pp 1-20.
- [4] Edgar H. Brown Jr.. *Twisted tensor products, I*. *Annals of Mathematics*, 1959, vol. 69, pp 223-246.
- [5] Ronnie Brown. *The twisted Eilenberg-Zilber theorem*. *Celebrazioni Arch. Secolo XX, Simp. Top.*, 1967, pp 34-37.
- [6] Bruce R. Donald, David R. Chang. *On computing the homology type of a triangulation*. Preprint, Computer Science Department, Cornell University.
- [7] Samuel Eilenberg, J. A. Zilber. *On products of complexes*. *American Journal of Mathematics*, 1959, vol. 75, pp 200-204.
- [8] Michael R. Garey, David S. Johnson. *Computers and intractability, a guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman and Company, New-York, 1979.
- [9] V.K.A.M. Gugenheim. *On a perturbation theory for the homology of the loop space*. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 1982, vol. 25, pp 197-205.

- [10] Stephen Halperin. xxx.
- [11] G. Hirsch. *Sur les groupes d'homologie des espaces fibrés*. Bulletin de la Société Mathématique de Belgique, 1954, vol. 6, pp 79-96.
- [12] Daniel M. Kan. *A combinatorial definition of homotopy groups*. Commentarii Mathematici Helvetici, 1958, vol. 67, pp 282-312.
- [13] John McCleary. *User's guide to spectral sequences*. Publish or Perish, Wilmington DE, 1985.
- [14] J. McCarthy. *A basis for a mathematical theory of computation*. In *Computer programming and formal systems*, North Holland, 1963.
- [15] Michael O. Rabin. *Recursive unsolvability of group theoretic problems*. Annals of Mathematics, 1957, vol. 67, pp 172-194.
- [16] Julio Rubio, Francis Sergeraert. *A program computing the homology groups of loop spaces*. SIGSAM Bulletin, 1991, vol. 25, pp 20-24.
- [17] Julio Rubio Garcia. *Un algorithme de calcul de l'homologie des espaces de lacets itérés*. A paraître.
- [18] Rolf Schön. *Effective algebraic topology*. Memoirs of the American Mathematical Society, 1991, vol. 451.
- [19] Weishu Shih. *Homologie des espaces fibrés*. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1962, vol. 13.
- [20] Dennis Sullivan. *Infinitesimal calculations in topology*. Publications Mathématiques de l'Institut des Hautes Etudes Scientifiques, 1977, vol. 47, pp 269-331.
- [21] V.A. Smirnov. *On the chain complex of an iterated loop space*. Mathematics of the USSR, Izvestiya, 1990, vol. 35, pp 445-455.
- [22] Guy L. Steele Jr.. *Common Lisp, the language*. Digital Press, 1990.

Topology of singular Lagrange varieties

東工大理 大本 亨

§0 序.

以下, $L \in m\text{-dim } \mathbb{C}^{\infty}\text{ manifold}$, $(M, \omega) \in 2m\text{-dim}$
 symplectic manifold (i.e., ω : non-degenerate closed 2-
 form on M .) とする. \mathbb{C}^{∞} map $f: L \rightarrow M$ が
 isotropic であるとは, $f^*\omega = 0$ と満たすこととし, 特に
 f が isotropic である immersion とすれば, 普通 f を
 Lagrange immersion と呼ぶ。

よく知られているように, Lagrange immersion は 古典
 力学, 幾何光学, Maslov 理論 等 での 重要な 道具 と して 用い
 られ, 以下 での topology につ いて は 多 くの 研究 が 成 果 上
 いる。一方 での '80年代 中 頃 には Arnold と その 周辺 の
 人々 により isotropic map の 特異点, (その 像 は "singular
 Lagrange variety") に関する 研究 が 始 まり, 新しい 豊かな 特異
 点論 の 分野 が 形 成 さ れ て くる。([A], [G]) 以下
 には 主に 局所理論 での あり, 大域的 な 結果 は §1 で
 紹介 する Givental' の 仕事 が あり 下 述 の 様 に 思 っ て いる。

$\S 2$ 本講では, Givental' の結果の一般化として, isotropic map $f: L \rightarrow M$ の特異点集合 Σ L, M の特性類 ξ の関係により得られる結果 (isotropic map の "Riemann-Hurwitz 公式" 及び Thom 多項式と呼ぶ) に関する報告をする。

$\S 1$ Motivation (Givental' [G]).

$\S 1$ 章では $m=2$ の場合を扱う。

(1.1) local Maslov index. ([G], [II])

oriented closed surface L 上の 4-dim. symplectic manifold

(M, ω) の isotropic map $f: L \rightarrow M^4$ を考える。

任意 $p \in L$ は f の孤立特異点であるとする。 p の周りの f の様子として以下のように指数を計ることは自然である。

V は p の周りの contractible 近傍 $V-p$ 上の f の Lagrange immersion である。 f^*TM の symplectic vector bundle として、自明化 $\sigma: f^*TM|_{V-p} \cong V \times \mathbb{R}^4$ を勝手にはり、 σ を通じて Gauss map $\sigma_{f,p}: V-p \rightarrow \tilde{\Lambda}(2)$ を得る。 ($\tilde{\Lambda}(2)$ は oriented Lagrange grassmannian $\cong V(2)/SO(2)$.) $\mu \in H^1(\tilde{\Lambda}(2), \mathbb{Z})$ は生成元 (Maslov class) であり、 $\mathbb{Z} \subset H_1(V-p, \mathbb{Z}) \cong L$ の向きに適合する生成元である。 したがって $m(f,p) := \langle \sigma_{f,p}^* \mu, \mathbb{Z} \rangle \in \mathbb{Z}$ は σ のとり方によらず一意に定まる (したがって $V-p$ の向きによらず) f の p に関する local Maslov index と呼ぶ。

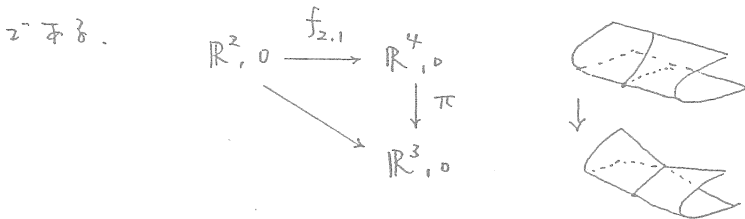
(1.2) open Whitney umbrella

Givental' は \mathbb{R}^4 の local model として \mathbb{R}^2 から \mathbb{R}^4 への isotropic map の 特異点
 — open Whitney umbrella として — を考察. $f_{2,1}$:

$$f_{2,1} : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^4, 0 \quad (x, y) \mapsto (p_1, q_1, p_2, q_2) = \left(\frac{x^2}{2}, xy, y, \frac{x^3}{3} \right)$$

(\mathbb{R}^4 の symplectic structure は $\omega_0 = \sum_{i=1}^2 dp_i \wedge dq_i$.)

これは $\ker \text{rank} = 1$ の 孤立特異点, である. $\pi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を
 \mathbb{R}^2 軸に沿った projection として $\pi \circ f_{2,1}$ の image は Whitney umbrella
 である.



$|\det(df_{2,1}, 0)| = 1$ であることは open Whitney umbrella を Lagrange
 immersion として近似するに役立つ。さらに, Givental' は \mathbb{R}^4
 での結果を示す。

Thm. (1.3) ([G]) open Whitney umbrella $f_{2,1}$ は isotropic map の
 特異点 として安定である。

(つまり安定な特異点 は open Whitney umbrella であり, \dots)
 これは Givental' の conjecture として提示されている。

[G] の中で以下の公式が示されている。

Thm (1.4) ([G]) isotropic map $f : L^2 \rightarrow (M^4, \omega)$ は 特異点
 として open Whitney umbrella であり得る。つまり $V = f(L)$ の

self-intersection is Transverse ≤ 73 . $\Rightarrow \exists$ $\lambda \neq 0$ 成立 :

$$-V \cdot V = \chi(L) - 2\delta + I.$$

$\Rightarrow \exists$ $V \cdot V : [V] \in H^2(M, \mathbb{Z})$ a intersection index ;

$\chi(L) : L$ a Euler number ,

$\delta : V$ a self intersection pts a 同 $\exists \lambda \neq 0$ 成立 ,

$I : \text{open Whitney umbrella}$ a 個數 .

(L is non orientable a \exists is 公式 mod. 2 成立 .)

\exists 1 :

Thm (1.5) ([47]) (M, ω) is ≤ 17 (\mathbb{R}^4, ω_0) is \exists . $L : \text{orientable}$ is .

$f : L \rightarrow \mathbb{R}^4 : \text{isotropic}$ is 特異点 is open Whitney umbrella a \exists is .

$$\Rightarrow \exists \sum_{p: \text{特異点}} m(f, p) = 0 \quad (f \text{ 特異点 a 同 } \exists \lambda \neq 0 \text{ 成立 } \cap 0.)$$

Remark (1.6) Thm 1.4 is $M = \mathbb{R}^4$ a 場合, $I \equiv \chi(L) \pmod{2}$.

(1.5), (1.6) a 公式 is \exists is 一般 a $2\pi m$, symplectic manifold is \exists is 拡張 is .

また, (1.4) is \exists is local invariant is (\exists is 定義 is) a V is \exists is 場合公式 is is 見直 is .

§2. Isotropic Thom polynomials.

我々が扱っている isotropic map $f: L \rightarrow (M^{2n}, \omega)$ は次の性質を制限している: $\forall \alpha \in L$ に対して, df_α の kernel rank ≤ 1 .

これは kernel rank ≥ 2 以上の isotropic map の特異点, の解析は非常に困難である. 全くこれに等しいものを $n=0$ の状況下で示す.

Thm 1.3 の注意事項を逆にして Givental' の conjecture の困難さについては依りておく.

一方 $n=0$ の kernel rank 1 の特異点, に関しては以下の結果が成り立つ.

$\mathbb{I}(L, M) := \{ f: L \rightarrow M \text{ isotropic, Ker-rank } df_\alpha \leq 1 (\forall \alpha \in L) \}$
 $\subseteq \mathbb{I}(L, M)$ に $\mathcal{C}^k(L, M)$ の \mathcal{C}^k topology による誘導された topology を与える. 以下,

Def (2.1) 2×2 の isotropic map-germ $f: L, \alpha \rightarrow M, y \subseteq$

$g: L', \alpha' \rightarrow M', y'$ と \forall symplectic equivalent である

$\exists \sigma: L, \alpha \rightarrow L', \alpha'$ diffeo, $\exists \tau: M, y \rightarrow M', y'$ symplectic diffeo. s.t. $\tau \circ f = g \circ \sigma$, である.

Thm (2.2) (Ishikawa II)

$\mathbb{I}(L, M)$ の open dense subset \mathcal{G} として \mathcal{G} は満たす $\forall f \in \mathcal{G}$ に対して:

(*) $\forall f: L \rightarrow M \in \mathcal{G}$, $\forall \alpha \in L$ に対して, isotropic map-germ $f: L, \alpha \rightarrow M, f(\alpha)$ は $f_{n,k}: \mathbb{R}^n, 0 \rightarrow \mathbb{R}^{2n}, 0$ ($1 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$) と symplectic equivalent.

∴ 2ⁿ f_{m,k} 是 2ⁿ 定义的子集。R^{2m} 的 symplectic structure 是 ∫_{i=1}^m dp_i ∧ dq_i 是 2ⁿ 定义的子集 (α₁, ..., α_n) ∈ Rⁿ 的 coordinate 是 }。

$$\left\{ \begin{aligned} f_i \circ f_{m,k} &= \alpha_i \quad (1 \leq i \leq m-1), \\ u &= f_m \circ f_{m,k} = \frac{x_n^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \frac{x_n^{k-i}}{(k-i)!}, \\ v &= p_n \circ f_{m,k} = \sum \alpha_{k+i} \frac{x_n^{k-i}}{(k-i)!}, \\ p_j \circ f_{m,k} &= \int_0^{\alpha_n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_m} - \frac{\partial v}{\partial x_m} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) dx_m \quad (1 \leq j \leq m-1) \end{aligned} \right.$$

Lem (2.3): f ∈ G 是 对 1, ..., 1 type 的 Thom-Boardman 特異集合 的 定义子集, submanifold 的 系列

$$L \supset \Sigma_1(f) \supset \Sigma_{1,1}(f) \supset \dots$$

≡ 待 3. 即 3, Σ₁(f) := { α ∈ L | Ker rank df_α = 1 },

Σ_{1,1}(f) := Σ₁(f|Σ₁(f)), ... ≡ inductive 的 定义子集。

'Σ_{1^k}(f) 的 L 的 中 2ⁿ 的 余 2ⁿ 的 2k 的 子', 即 1 (L 的 orientable 的 子集), Σ_{1^k}(f) ≠ 不 的 orientable.

(Σ_{1^k}(f) ≡ Σ_{1^k}(f) ≡ 略 記 ...)

实际,

$$\Sigma_{1^k}(f) - \Sigma_{1^{k+1}}(f) \ni \alpha \iff \text{for } \alpha: \exists \text{ } \exists \text{ germ } \text{ is } f_{m,k} \text{ is symplectic equivalent.}$$

≡ 的 子集。

$\cong \mathbb{Z}$, $\Sigma_{2k}(f)$ を代表する L の homology class の Poincaré dual $\cong P_k(f) \in H^{2k}(L; \mathbb{R})$ を表すことができる。(係数環 \mathbb{R} は L の ori, non ori に従って \mathbb{Z}, \mathbb{Z}_2 である。)

以下 \mathbb{Z} (普通 \mathbb{Z}) \mathbb{C}^∞ -map の 特異点集合に關する Thom polynomial の \mathbb{Z} 係数表示, isotropic map f の 特異点集合 $\Sigma_{2k}(f)$ に關する Thom polynomial を与える。即ち $P_k(f) \in L, M$ の 特性類の 多項式 \mathbb{Z} 表示。

symplectic manifold (M, ω) は 対して $\omega(x, Jx) > 0$ である M の almost complex structure は up to homotopy \mathbb{Z} unique に決まる。今、 ξ の 球 J を 勝手 \mathbb{Z} として、 M の tangent bundle TM を \mathbb{C}^n -bundle とする。特に Chern class $c_i(TM)$ は symplectic structure ω の 対して 決まる (定理)。 J の 対して 決まる。

Thm(2.4) [O] $f: L^n \rightarrow M^{2m} \in \mathcal{G}$, $1 \leq k \leq [\frac{m}{2}]$,

L は orientable である。 $c_i(f^*TM - TL \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}) \in \mathbb{Z}$ を 略記する。

\mathbb{Z} を 示す 次, V 成り立つ。

(1) $2c_i = 0$ ($i \geq 2$) (これは La Pontrjagin class に 制約 される。)

(2) $P_k(f) = \sum_{s=1}^k \sigma_{s-1} c_1^{k-s} c_s$

(\Rightarrow \mathbb{Z}) $\sigma_s \in \mathbb{Z}$ 且 $k-1$ 重数 a s 次 a 阶环面数 $\tilde{\sigma}_s$ 是数值
 $1, \dots, k-1 \in \{ \lambda \in \mathbb{Z} : \sigma_s = \tilde{\sigma}_s(1, 2, \dots, k-1) \}$

特 $k=2$,

$$(2)' \quad P_k(f) = f^* \ell_1(TM)^k \quad \text{modulo 2-torsion.}$$

且 L 为 non-orientable 时 \mathbb{Z}_2 -reduction Σ 中 (2) 仍成立.

(\Rightarrow 同) $\ell_i \in W_2(f^*TM - TL \otimes TL)$ 是置换.

$m=2$ 的 \mathbb{Z}_2 -index 是 \mathbb{Z} 次 \mathbb{Z}_2 -index. ((1.5), (1.6) 的比较.)

Thm (2.5) ([0], [I-0]). $f \in$ closed oriented surface L 到 (M, ω)
 的 isotropic map Σ , 特異点 p 是 \mathbb{Z}_2 -isolated $\{ \lambda \in \mathbb{Z} : \lambda \leq \mathbb{Z} \}$. $\Sigma \in \mathbb{Z}$

$$(*) \quad \sum_{p \in L} m(f, p) = \langle f^* \ell_1(TM), [L] \rangle.$$

L 为 non-ori 的 \mathbb{Z}_2 -index 是 local Maslov index $m(f, p)$ 的定义. $\Sigma \in \mathbb{Z}_2$ -index
 $\Sigma \in \mathbb{Z}_2$ 是 $m(f, p)_2 \in \mathbb{Z}_2$ 的 $\langle \Sigma, \Sigma \rangle$ 的 \mathbb{Z}_2 -index

$$(*)' \quad \sum_{p \in L} m(f, p)_2 = \chi(L) + \langle f^* W_2(TM), [L]_2 \rangle \quad \text{mod. 2.}$$

注) p 为正则点时 $m(f, p) = 0$, 从而 Σ 在 p 点 Σ 为 \mathbb{Z}_2 .

Thm(2.5) 是 local invariant $m(f, p)$ 的 \mathbb{Z}_2 -index 的 global invariant Σ
 的 \mathbb{Z}_2 -index $\Sigma \in \mathbb{Z}_2$ 的 \mathbb{Z}_2 -index.

特 $k=2$ 的 p 为特異点, Σ 为 open Whitney umbrella 的 type Σ 的 \mathbb{Z}_2 -index

$m(f, p) = \pm 1$ である。ゆえに (1.5), (1.6) の Thm (2.5) の系として導かれる。

§3 local invariant $z(\gamma)$

$f: L^2 \rightarrow (M^4, \omega)$ isotropic $\subset L$, $V = f(L) \subset T^*M$.

V の特異点 γ は T^*M 上で孤立している。

V の各点 γ に対して $z(\gamma) \in \mathbb{Z}$ を以下の操作で定義する:

γ の近傍に symplectic chart $U \xrightarrow{\cong} \mathbb{R}^4 (= \mathbb{C}^2)$ を与える。

U 内の S^3 -sphere $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ を $\tilde{V} = \varphi(V \cap U)$ とし、 \tilde{V} は S^3 に transverse であるように、 $L = \tilde{V} \cap S^3$ を与える。このとき L は S^3 の Hopf fibration に tangent である。(このとき、Hopf fibre は coisotropic submanifold S^3 の特性曲線である) また \tilde{V} は S^3 と交わるように与えられる。) L' を Hopf fibre とし、 L と L' の linking number $lk(L, L') = z(\gamma)$ とする。

Def (3.1) $z(\gamma) := L$ と L' の linking number $lk(L, L')$

とする。

Remark (3.2)

L は一般に S^3 の 'Legendre knot (link)' である。また、 $lk(L, L')$ は、いわゆる Bennequin invariant の類似である。([B] 参照) また、Legendre knot には

$f \rightarrow$ 変数 γ invariant, winding number ν 付き. 上 γ

 L ν connected γ $\{ \gamma \} \subseteq \mathbb{R}$, L a 'winding number' には

 (1.1) γ 定義 $i\gamma =$ local Maslov index $m(f, p)$ \Rightarrow 相当 $i\gamma$ なる.

 ($\because \gamma \in L$ には $f(\gamma) = \gamma$.)

local Maslov index a '積分' ν Thm (2.5) γ 与えられた ν

 のに對し, invariant $i\gamma$ には γ なる \Rightarrow $i\gamma$ 成立する.

Thm (3.3). [I-O] L : closed oriented surface, $f: L \rightarrow (M, \omega)$

 isotropic γ $V = f(L) \subseteq X$. V の特異点 γ は γ 孤立 $i\gamma$

 なる \Rightarrow $\sum i\gamma = \chi(V) + V \cdot V$,

$$\sum_{\gamma \in Y} (i\gamma + 1) = \chi(V) + V \cdot V$$

($\gamma \in Y$ 正則点 $\Rightarrow i\gamma = -1$ に注意)

Thm (3.3) \Rightarrow Girardot' の公式 (1.4) ν 得られた.

 實際, 具体的に計算して

open Whitney umbrella には $i = -2$

transverse self-intersection p_1 には $i = +1$

$$\text{index} = +1 \Rightarrow i = 0,$$

$$\text{index} = -1 \Rightarrow i = 4. \quad \nu \text{ 付き}$$

(= index of M at ω intersection pt of γ in $2D$ plane τ is ± 1 if τ is transverse to M at ω and ± 1 if τ is tangent to M at ω .)

$\delta_{\pm} = \#$ self-intersection pt of index ± 1 $\in \mathbb{Z}$

$$\sum (\chi(\gamma_i) + 1) = \delta_+ - 3\delta_- + \mathbb{T}$$

$$\chi(V) + V \cdot V = \chi(L) - (\delta_+ + \delta_-) + V \cdot V$$

$$\therefore -V \cdot V = \chi(L) - 2\delta + \mathbb{T} \quad (\delta = \delta_+ - \delta_-)$$

REFERENCES

- [A] Arnol'd, V. I., "Singularities of Caustics and Wave fronts," Kluwer Academic Publishers, 1990.
- [G] Givental', A. B., *Lagrange imbeddings of surfaces and unfolded Whitney umbrella*, Funkt. Anal. Prilozhen 20-3 (1986), p. 35-41.
- [G'] ———, *Singular Lagrange varieties and their Lagrangian mappings*, Jour. Soviet Math. 52 (1990).
- [I] Ishikawa, G, *The local model of an isotropic map-germ arising from one-dimensional symplectic reduction*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 111 (1992), p. 103-112.
- [I'] ———, *Maslov class of an isotropic map-germ arising from one dimensional symplectic reduction*, preprint.
- [I-O] Ishikawa, G, and Ohmoto, T, *Local invariants of singular surfaces in an almost complex four-manifold*, preprint in Hokkaido univ. preprint series 143.
- [O] Ohmoto, T, *Thom polynomials for isotropic mappings*, preprint.
- [P] Porteous, I. R., *Simple singularities*, Lect. Notes in Math. 102 (1972), p. 286-307. (Springer - Verlag)
- [B] B. Bennequin, *Entrelacements et équations de Pfaff*, Astérisque 107-108 (1983), 87-161.

最も単純な非線形の微分同相写像 : Hénon map をめぐって

三波 篤郎 (北大 理)

力学系の理論における目的のひとつは、ある写像があたえられた時、その軌道の構造を求めようというものであり、さらに、その写像が変化した時に、その軌道構造の変化の仕方を記述しよう... というものである。

線形写像の orbit structure は良くわかるから、非線形の写像をその対象とすることにしよう。

最も単純な非線形の写像とは何か？ というのは簡単なようでいて難しい問題である。しかしここでは単純に、2次多項式であるとしよう。

\mathbb{R} または \mathbb{C} からそれ自身への2次多項式つまり2次関数は、1次関数による座標変換によって、

$$f_c(x) = x^2 + c$$

という形にできることが簡単にわかる。この単なる2次関数が、いかに複雑な軌道構造と分岐構造を持っているのかは、この10年くらいの間に多くの人たちによって作り上げられた、膨大な“実1次元力学系”や“複素力学系”の理論が物語っている。今ではすっかり有名になったマンデルブロート集合は、まさにこの2次関数の分岐の様子を表わしているのである。

さて、1次元の次は2次元に挑戦してみようというのは自然な発想なのだが、もうひとつの理由としては、1次元の2次多項式は diffeomorphism ではない、ということが挙げられる。力学系としての写像が考えられるのは、ベクトル場のポアンカレ写像として現われる場合が多い。ポアンカレ写像は diffeomorphism になる。Diffeomorphism となる2次多項式は2次元以上で存在する。

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$$

を f_1 と f_2 が2次多項式となっているような、 \mathbb{R}^2 からそれ自身への diffeomorphism とする。

実は単に diffeomorphism というだけでは、たとえ 2 次多項式であってもそれほどパラメーターを減らすことはできない。そこでとりあえずこの f は、多項式の逆写像を持つ、と仮定してみよう。そうすると f は \mathbb{C}^2 上の diffeomorphism に拡張できる。この Jacobian はやはり多項式で表わされ、更に non-zero であるから定数でなければならない。

簡単な計算から、2 次多項式で表わされる \mathbb{R}^2 または \mathbb{C}^2 からそれ自身への写像で Jacobian が constant なものは、affine map による座標変換によって、次のどちらかの写像に変換できることがわかる。

$$H(x, y) = (by + a - x^2, x).$$

$$E(x, y) = (\alpha x + y^2 + \beta, \gamma y + \delta).$$

E は、その形からわかるように、力学系としては単純なものである。 H を Hénon map という (そのパラメーター a, b をつけて、 $H_{a,b}$ と書くこともある)。従って、“ \mathbb{R}^2 上の 2 次多項式で表わされる diffeomorphism で、その逆写像も多項式であり、力学系として nontrivial なものは Hénon map となる” という事がわかる。 \mathbb{C}^2 上なら、“逆写像も多項式” という条件がなくとも同じ事が言える。

一般に、多項式で表わされる diffeomorphism であって、その逆写像もまた多項式となるようなものを polynomial automorphism という。

Friedland–Milnor [FM] は、 \mathbb{R}^2 及び \mathbb{C}^2 上の一般次数の polynomial automorphisms について、上と同様の分類定理を証明している。すなわち、

Theorem [FM]. \mathbb{R}^2 または \mathbb{C}^2 上の polynomial automorphism は、generalized Hénon map の有限個の合成となっている写像かまたは elementary map のどちらかに affine map によって共役になる。

Elementary map とは、

$$e(x, y) = (\alpha x + p(y), \beta y + \gamma)$$

という形をした写像であり、また *generalized Hénon map* とは、

$$g(x, y) = (y, q(y) - \delta x)$$

という形の写像である。

ここで $p(y)$ はある多項式であり、 $q(y)$ は $y^d + c_{d-2}y^{d-2} + \dots + c_1y + c_0$ という形の *monic polynomial* である。

[FM] には次のおもしろい未解決問題が書かれている。

Jacobian Conjecture. *polynomial mapping* が *constant* な *non-zero Jacobian* を持てば、それは *polynomial* の逆写像を持つであろう。

1. Hénon attractor.

Hénon map の力学系としての性質を最初に研究したのは M.Hénon である [H]。きわめて単純な形の非線形常微分方程式が、*non-trivial* な attractor を持つという事は、1963年頃に気象学者の E.N.Lorenz によってすでに発見されていたが、それが広く知られるようになったのは70年代の中頃であろう。

[H] において Hénon は、Lorenz attractor をはじめとする *strange attractor* の性質を研究するために、もっと単純なモデルをまず調べてみようという “*reductionist approach*” を提案している。そのためには微分方程式よりはむしろ、その *Poincaré map* として現われる平面上の *diffeomorphism* を調べる方が簡単であるとし、*strange attractor* を持つ最も単純な *diffeomorphism* を調べてみようという立場を取る。そして、(現在 Hénon map と呼ばれている) 最も単純な非線形 *diffeomorphism* がまさにあるパラメーターで *strange attractor* を持つということを数値計算によって見いだした。

Hénon は更にこの (現在 Hénon attractor と呼ばれている) attractor の微細構造を調べ、それが *scaling structure* を持つとし、attractor の *transversal* 方向の構造は *Cantor set* であろうと予想している (これはおそらく間違いである)。

パソコンを使えば Hénon attractor は簡単に描くことができる。しかしその non-trivial attractor の存在が厳密に証明されたのは、この [H] から 10 年以上も後のことである。

Benedics と Carlson は [BC] において、 $|b|$ が十分に小さい時、すなわち H が十分に 1 次元の 2 次関数に近い時、positive measure のパラメーター (a, b) に対して、Hénon map $H_{a,b}$ は non-trivial attractor を持つことを証明した。

しかし、小さくない b に対しては未だに証明されていないし、また [BC] によってその存在が保証された attractor であっても、その上の dynamics がどのようなものなのかは依然として知られていない。

2. Horse shoe 生成のモデルとしての Hénon map.

Hénon map $H_{a,b}$ の Jacobian は constant に $-b$ である。 $b = 0$ ならばその dynamics は 1 次元の 2 次関数と同じになってしまい、 $b < 0$ ならば orientation preserving, $b > 0$ ならば orientation reversing, $|b| = 1$ ならば area preserving となる。

Hénon map の dynamics は当然パラメーターによって変わる。簡単な計算から、 $a \geq -(b-1)^2/4$ というのが不動点が存在するための必要十分条件であることがわかるが、周期 2 の周期点を持つのは $a \geq 3(b-1)^2/4$ であり、Brouwer の translation theorem (\mathbb{R}^2 上の orientation preserving homeomorphism f が不動点を持たないなら、任意の $p \in \mathbb{R}^2$ に対し、 $f^n(p) \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \pm\infty$ である) より、 $a \geq -(b-1)^2/4$ というのは、 $\Omega(H_{a,b}) \neq \emptyset$ となる必要十分条件であることもわかる。つまり、 a がある程度小さい時には Hénon map は、translation の様なものになってしまい、周期点はもちろん、non-wandering point をいっさい持たない。

それでは a が十分大きな時にはどうなるだろうか？ これについては Devaney-Nitecki の次のような結果がある。

Theorem [DN]. $a > (5 + 2\sqrt{5})(1 + |b|)^2/4$ ならば $\Omega(H_{a,b})$ は hyperbolic set であり、2-shift と conjugate である。

つまり、Hénon map は、何も無いところから horse shoe map が形成されるプロセスを含んでいるということになる。

一般に、2次元以上の非線形の写像においては、その非線形性がある程度以上強いと、ある双曲型の周期点の安定多様体と不安定多様体が transversal に交わる。このような点を homoclinic point という。もし homoclinic point が存在すれば、そこには horse shoe map と同型なある invariant subset が存在することが知られている。そういう意味で horse shoe map の生成過程は、非線形力学系の分岐の、最も基本的な要素である。

horse shoe map の分岐を調べるためには、 \mathbb{R}^2 からそれ自身への写像の構造を何らかの方法で表現できなければならない。しかし今の所、そうするための適切な方法は見つかっていない。1次元の写像は critical point という特別な点を持っており、多くの場合その特別な点の軌道だけで全体の dynamics が決ってしまう。しかし平面上の diffeomorphism には特別な点がない。その dynamics を表現するような何らかの topological invariant を見つけることが、2次元以上の写像を考える上でのひとつの課題である。

上で述べたように、Hénon map は $b = -1$ の時は area preserving map の 1-parameter family となる。特に H は $-1 < a < 3$ では elliptic な fixed point を持つ。この間この fixed point のまわりでは、Hamiltonian system から得られる写像で見られるような、invariant circle や islands の発生、消滅が起きる。この意味で Hénon map は、area preserving map (あるいは symplectic map) の分岐の最も単純な paradigm である。

さらに Hénon map は a が大きくなると horse shoe map となることから、KAM theoretic なよくわからない分岐が、Bernoulli system というよくわかった単純なものに関係付けられるのではないか、という期待を持つこともできる。

宇敷は [U2] において、 $b = 1$ の場合、すなわち area preserving かつ orientation reversing の場合について、Hénon map は、最初の不動点が現われた直後からすぐ、無限個の周期点を持つことを証明している。 $b = -1$ でも同様である [D].

Hénon map の topological entropy については、まず Newhouse や Katok-Mendoza の結果によって、パラメーター a, b に対して連続である、ということが知られている。この事と上記の Devaney-Nitecki の結果から、任意に b を fix した時、 a を動かすことによって、Hénon map の topological entropy は、 $[0, \log 2]$ の中の全ての値をとることがわかる。

Milnor は [M] において、次の不思議な定理を証明している。

Theorem [M]. 任意の b に対してある可算集合 $\Sigma_b \subset [0, \infty]$ が存在し、 $H_{a,b}$ が expansive ならば $h(H_{a,b}) \in \Sigma_b$ である。

つまり b を fix した時、Hénon map が expansive となるような topological entropy の値は可算個しかないというのである。このなにやら Sard の定理を思わせる意外な結果を突然証明してしまうというところは、さすが Milnor である。

3. Complex Hénon map.

Hénon map は、全ての変数とパラメーターを複素数とした時、 \mathbb{C}^2 からそれ自身への diffeomorphism となる。

1次元の写像の場合、 \mathbb{C} あるいは $\widehat{\mathbb{C}}$ 上の正則関数の力学系としての性質は、すでに複素力学系の理論として美しく記述されている。これは、関数論やタイヒミュラー理論などがみごとに応用された結果でもある。そしてこの複素力学系の理論は、実1次元写像についてのいくつかの極めて重要な結果を証明するために、本質的に使われている。

同様の事が2次元の写像を扱うときにも起こり得る、と期待するのは自然だろう。実の2次元写像を扱うための有力な道具はほとんど知られていないが、複素なら、多変数複素関数論が使えるかも知れない。これを実際に実行したのが Bedford と Smillie である。彼らは多変数ポテンシャル論を使うことにより、complex Hénon map に関する多くの基本的な性質の証明に成功した [BS1-4].

$$K_{\pm} = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |H^{\pm n}(x, y)| \text{ does not tend to } \infty\}$$

$$J_{\pm} = \partial K_{\pm}, \quad K = K_+ \cap K_-, \quad J = J_+ \cap J_-$$

ときめる。この K_+ は 1 変数の時の filled in Julia set に対応し、 J は Julia set に相当する。

彼らの得た結果のいくつかを述べると、

- (i) K は perfect set である。
- (ii) K_{\pm}, J_{\pm} は連結である。
- (iii) Ω を $\text{int } K_+$ のある連結成分とすると $\partial\Omega = J_+$ である。
- (iv) p を sink, B をその basin とすると $\partial B = J_+$ である。
- (v) H が 2 つ以上の basin component を持てば、 J_+ は任意の点で embedded topological manifold とはならない。
- (vi) p を saddle とすると、その安定多様体 $W^s(p)$ は J_+ の中で dense である。
- (vii) p を sink, B をその basin とする。任意の 1 次元 algebraic variety $V \subset \mathbb{C}^2$ に対し、 $B \cap V \neq \emptyset$ かつ $V \not\subset \bar{B}$ となる。
- (viii) J が hyperbolic set ならば、周期点は J で dense である。

[BS1] で注意しているように complex Hénon map は strange attractor を持たない。すなわち attractor は必ず有限個の sink となってしまう。また Smillie が [Sm] で証明しているように、topological entropy はパラメーターに関係なく常に $\log 2$ である。このように real と complex ではだいぶ様子が異なる。しかし complex の場合だけとはいえ、Hénon map に関するこれほど強力な理論的枠組みはこれまでになかった。

Complex Hénon map を研究するもうひとつの motivation としては、Fatou-Bieberbach domain (\mathbb{C}^n と biholomorphic となる \mathbb{C}^n の真部分集合であって、その complement が内点を持つもの) の構造を詳しく調べたいという事があるようである。Hénon map が attractive periodic point を持つなら、その basin は必ず Fatou-Bieberbach domain となる事が知られている。

複素力学系の創始者の一人 Hubbard は、そのような motivation もあって、complex Hénon map の研究を開始した [Hu],[HuO]。しかし Fatou-Bieberbach domain 自身はやはり難しいらしく、ここではその complement とも言うべきものの構造が詳しく調べられている。

$$U_{\pm} = \mathbb{C}^2 \setminus K_{\pm}$$

ときめる。[HuO] ではこの U_{\pm} の構造と、その上の H の作用が詳しく説明されている。そのカギとなるのは、1変数の時のアナロジーから

$$h_{\pm}(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^n} \log_+ |H^{\pm n}(x, y)|$$

として定義される pluri-harmonic submersion $h_{\pm} : U_{\pm} \rightarrow \mathbb{R}_+$ である。ここで $\log_+(x) = \sup\{\log x, 0\}$ である。 S^3 の中の solenoid を Σ_0 とすると、 $h_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ は $S^3 \setminus \Sigma_0$ を fiber とする fibration であることが示される。また、 U_{\pm} の基本群は $\pi_1(U_{\pm}) \cong \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$ となり有限生成ではない。その他、関連するいくつかの命題が証明されている。

3. Hénon map の分岐構造。

以下では \mathbb{R}^2 上の Hénon map のみを考える事にしよう。

Hénon map は $b = 0$ の時は、その dynamics は1次元の2次関数と同じになり、kneading theory などによって、その構造と分岐はある程度よくわかっている。それでは b が 0 以外の所ではどうなっているのだろうか？

宇敷 [U1] と El.Hamouly– Mira [EM1],[EM2] はそれぞれ独立に Hénon map のパラメーター空間を数値計算によって調べ、その中に cusp connection と呼ばれる特徴的な構造が存在し、それによって standard な quadratic map のタイプの異なる周期点が Hénon map のパラメーター空間の中で関係を持っているという事実を発見している。また Hénon map のパラメーター空間の中にも、1次元の quadratic map のように self-similar structure が存在する事が指摘されて

いる。さらに [U1] では、cusp connection におけるある種の規則性も指摘されている。

[San1] ではこの [U1] の計算を更に多くの場合に行ない、cusp connection の規則性についてある予想を提出している。また [San2] では、[U1] や [EM1], [EM2] での数値計算で見つかった cusp connection の規則性を調べるため、Hénon map の周期点のあるクラスを topological type によって分類している。その結果、hyperbolic fixed point の安定多様体に似た、self-similar 状の関係性が見つかった。なお orientation preserving case については Holmes が、この [San2] の結果を含む、より広いクラスに対して同様の結果を証明している [Hol]。

Hénon map を PL 化して得られる Lozi map の cusp connection については、[Shi1],[shi2] の結果がある。また、Hénon map が generic bifurcation を持つと仮定した時の global bifurcation structure については Holmes-Whitley が [HW] で詳しく調べている。

Fournier-Kawakami-Mira は、[FKM1-3],[K] において、Hénon map の周期点を horse shoe map の周期点とみなすことによって、symmetric なものと互いに他の symmetric image となっているような pair とに分類できることを指摘し、それを使って global な分岐構造を調べている。

このように、Hénon map の大域的な分岐構造については、いろいろな方向から調べられてきたが、一見複雑に見える bifurcation diagram が、実はある簡単な規則に支配されているということがわかってきた [SS]。

$F_n : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ を次のように定義する。

$$F_n(x, y, a, b) = H_{a,b}^{n, \vee} (x, y). \quad (2.4)$$

そうすると、algebraic variety $F_n^{-1}(0)$ の各点 (x, y, a, b) は、 $H_{a,b}$ の (minimum とは限らない) 周期 n の周期点 (x, y) を表わすことになる。また、標準的な射影 π を $\pi(x, y, a, b) = (a, b)$ とすると、 $\pi|_{F_n^{-1}(0)}$ の critical value が bifurcation parameter となっているので、 $F_n^{-1}(0)$ の形がわかれば、Hénon map の global な分岐の構造がわかることになる。

Hénon map が持っている $|b| = 1$ に関する対称性、そして a が十分に大きな所では hyperbolicity がある事、および 2 次関数に関する kneading theory などを使うと、2 次関数の各周期点が $F_n^{-1}(0)$ の同じ連結成分上にあるための、ある簡単な十分条件を得ることができる。

4. Hyperbolicity in the Hénon map.

ある与えられた写像の周期点の個数を厳密に求めることは、たとえ 1 次元の 2 次関数や Hénon map のような、きわめて単純な写像であっても非常に難しい。その方法としてもふつう Newton 法 くらいしか思いつかないわけだが、それとやると周期はせいぜい 10 くらいであり、大型計算機などでかなりがんばっても 15 くらいが限界と思われる。またそこまでやったとしても Newton 法では、得られた数の確実性に不安が残る。しかし 1989 年頃、Biham と Wenzel という人たちが Hénon map に対してだけではあるが、画期的な方法を発見したのである。

それは基本的には Aubry–Mather の Lagrangian というものに基づいており、まず周期 p の周期点とその critical point に 1 対 1 に対応しているような \mathbb{R}^p 上のある gradient vector field を定義する。そしてその critical points を全て探し出す、ということを行なうのである。

$b = -1$ (area and orientatin preserving case) の場合に、この Biham–Wenzel の方法を使って a を変化させながら周期 20 までの周期点の個数を計算して行くと、あるけっこう広い a の区間で、周期点の個数が一定となるものがいくつか存在することがわかる。これはこれらのパラメーター領域で Hénon map が構造安定となることを示しているように見える。構造安定性定理より、それは non-wandering set が hyperbolic set となることを意味する。

[DMS] では数学的に厳密な証明はないものの、その hyperbolicity のメカニズムを説明し、そこから得られるマルコフ分割で計算した周期点の個数と、Biham–Wenzel の方法で計算した個数とが、周期 20 まで完全に一致するという結果を得ている (パラメーターによっても違うが、周期 20 までの周期点の個数は約

100万くらいにもなる)。

またここで調べられた3つの hyperbolic case は全て、missing block expression という方法でかなり簡単にその構造を表現できる。この結果は、horse shoe になる以前の Hénon map の構造が、2-symbol full shift の中の、ある特定の type の sub invariant set で表現できる。．．．という可能性を示唆している。

REFERENCES

- [BC]. Benedics M, Carleson L, *The dynamics of the Hénon map*, Ann. of Math. 133 (1991), 73-169.
- [BS1]. Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : currents, equilibrium measure and hyperbolicity*, Inv.Math. 103 (1991), 69-99.
- [BS2]. Bedford E, Smillie J, *Fatou-Bieberbach domains arising from polynomial automorphisms*, preprint.
- [BS3]. Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : Stable manifolds and recurrence*, preprint.
- [BS4]. Bedford E, Smillie J, *Polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2 : Ergodicity, exponents and entropy of the equilibrium measure*, preprint.
- [BW]. Biham O, Wenzel W, *Characterization of unstable periodic orbits in chaotic attractors and repellers*, Phys Rev Lett. 63 (1989), 819-822.
- [D]. Devaney R, *Homoclinic bifurcations and the area-conserving Hénon mapping*, J.Diff. Equ. 51 (1984), 254-266.
- [DMS]. Davis MJ, MacKay RS, Sannami A, *Markov shifts in the Hénon family*, Physica D 52 (1991), 171-178.
- [DN]. Devaney R, Nitecki Z, *Shift automorphisms in the Hénon mapping*, Comm Math Phys. 67 (1979), 137-146.
- [EM1]. El-Hamouly H, Mira C, *Lien entre les propriétés d'un endomorphisme de dimension un et celles d'un difféomorphisme de dimension deux*, Comptes rendus 293, série I (1981), 525-528.
- [EM2]. El-Hamouly H, Mira C, *Singularités dues au feuilletage du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bi-dimensionnel*, Comptes rendus 294, série I (1982), 387-390.
- [FKM1]. Fournier D, Kawakami H, Mira C, *Sur les bifurcations d'un difféomorphisme quadratique bi-dimensionnel. Situations homoclines et hétéroclines. Zone Morse-Smale*, Comptes rendus 298, Série I (1984), 253-256.
- [FKM2]. Fournier D, Kawakami H, Mira C, *Feuilletage du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bidimensionnel. Doublement de d'ordre (période) des zones sources et des zone échangeurs*, Comptes rendus 301, Série I (1985), 223.

- [FKM3]. Fournier D, Kawakami H, Mira C, *Séquences de Myrberg et communications entre feuilletés du plan des bifurcations d'un difféomorphisme bidimensionnel*, *ibid.*, 325.
- [FM]. Friedland S, Milnor J, *Dynamical properties of plane polynomial automorphisms*, *Ergodic Theory and Dyn Sys.* 9 (1989), 67-99.
- [H]. Hénon M, *A two-dimensional mapping with a strange attractor*, *Comm.Math.Phys.* 50 (1976), 69-77.
- [Hol]. Holmes P, *Knotted periodic orbits in suspensions of Smale's horseshoe: Extended families and bifurcation sequences*, preprint (1989).
- [HW]. Holmes P, Whitley D, *Bifurcations of one- and two-dimensional maps*, *Phil.Trans. R.Soc.Lond.A* 311 (1984), 43-102.
- [Hu]. Hubbard J, *The Hénon mapping in the complex domain*, *Chaotic Dynamics and Fractals* (ed. M.Barnsley and S.Demko) Academic Press 1986, 101-111.
- [HuO]. Hubbard J, Oberste-Vorth W, *Hénon mappings in the complex domain I: general results*, preprint.
- [K]. Kawakami H, *Table of rotation sequences of $x_{n+1} = x_n^2 - \lambda$* , *Dynamical Systems and Nonlinear Oscillations*(ed. G.Ikegami), World Scientific (1986), 73-92.
- [M]. Milnor J, *Non-expansive Hénon maps*, *Adv. Math.* 69 (1988), 109-114.
- [Mar]. Marotto FR, *Chaotic behavior in the Hénon mapping*, *Comm.Math.Phys.* 68 (1979), 187-194.
- [MV]. Mora L, Viana M, *Abundance of strange attractors*, preprint.
- [Sm]. Smillie J, *The entropy of polynomial diffeomorphisms of \mathbb{C}^2* , *Ergod.Th.Dyn.Sys.* 10 (1990), 823-827.
- [San1]. Sannami A, *On the structure of the parameter space of the Hénon family*, *Dynamical Systems and Applications*(ed. N.Aoki), World Scientific (1987), 143-157.
- [San2]. Sannami A, *A topological classification of the periodic orbits of the Hénon family*, *Japan J.Appl.Math.* 6, No.2 (1989), 291-330.
- [Shi1]. Shibayama K, *Connections of periodic orbits in the parameter space of the Lozi family*, *The study of dynamical systems* (ed. N.Aoki) World Scientific (1989), 10-25.
- [Shi2]. 柴山健伸, LOZ | 写像族における周期解のコネクション, *和歌山大学経済学会 経済理論* 227.228 (1989), 38-65.
- [SS]. Sannami A, Shibayama K, *On the configuration of periodic point surfaces of the Hénon map*, in preparation.
- [U1]. 宇敷重広, *Fine structure of bifurcation branches in Hénon's family of mappings*, *力学系理論の総合的研究 記録集* (ed. 白岩謙一) (1981).
- [U2]. Ushiki S, *Central difference scheme and chaos*, *Physica D* 4D No.3 (1982), 407-424.

「幾何的」な代数的トポロジー

城西大・理 山崎 正之

序. Connell-Hollingsworth [8], Chapman [6] そして Quinn [15], [16] らによって開拓された, いわゆる「制御トポロジー」の解説を行う. これにはいくつか流派ができており, Chapman によるものは「幾何的」トポロジーの道具を用い, 私のようなしろうとにはとっつきにくい. 一方 Connell-Hollingsworth や Quinn のものは常識的な代数的トポロジーの道具 (加群, 準同型写像, 鎖複体, ...) に「幾何的制御」を持ち込むもので, 私には扱い易い. この違いは, ちょうど, ホワイトヘッド群の定義が2種類 (カラプス等を用いる幾何的なものと行列を用いる代数的なもの) あることに対応している. もちろんどちらも重要であり, 本質的に同じものである. さらに代数的なやり方にもここで紹介する「 ϵ 制御トポロジー」と「有界制御トポロジー」のふたつの流派がある. 「有界制御」に関してはここでは一切ふれない. Ferry による解説がでるらしいのでそちらを見ていただきたい.

今回は次の2つのよく知られた事実の証明を紹介する:

1. 有限 CW 複体の間の同相写像は単純である. これはいわゆる「ホワイトヘッドの振れの位相不変性」であり, Chapman [3] により最初に証明された.
2. 任意のコンパクト ANR は有限 CW 複体のホモトピー型を持つ. これは「ボルスク予想」と呼ばれ, West [23] により最初に証明された.

ここで与える証明は山崎と A. Ranicki の共同研究 [21] によるものである. ホワイトヘッドの振れの「組合せ的不変性」の証明は Milnor [14] に見ることができる. その証明は帰納法により, 鍵となったのは Higman [12] による計算 $Wh(\{1\}) = 0$ であった. 1 に対するわれわれの帰納的な証明の鍵となるのも同様に Bass-Heller-Swan [2] の計算 $Wh(\mathbb{Z}^n) = 0$ である. 2 の証明も 1 の証明に密接に関連している.

構成は以下の通りである. §1 でまず Quinn による幾何加群およびそれらの間の幾何射の概念を復習し, 次に幾何加群を拡張して射影加群の概念を導入する. §2 では幾何的制御の概念を導入する. §3 では制御射影類群 $\tilde{K}_0(X, p_X, \epsilon)$ や制御振れの群 $Wh(X, p_X, \epsilon)$ を定義

する。§4 では同型射を「分割」するための障害類を調べる。§5 ではよく知られている単射 $\tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi]) \rightarrow Wh(\pi \times \mathbb{Z})$ (Bass [1]) の制御版の類似を得る。これは §6 で制御 K -理論不変量に関するピートリス型の性質を得るのに用いられる。上で述べた 1 および 2 は §7 で示される。

1. 幾何加群 (自由加群) と射影加群.

この節では F. Quinn [17] による幾何加群およびそれらの間の幾何射の概念を解説する。ただし、いくつかの記法は Connolly-Koźniewski [9] や Ranicki-Yamasaki [21] のものを用いている。さらに Quinn [15] の幾何的な射影加群およびそれらの間の射の概念を解説する。幾何加群は普通の意味での (基底付き) 自由加群に対応し、射影加群は、その名のとおり、普通の意味での射影加群に対応するものである。その対応は「アセンブリ」により与えられる。

M を位相空間とし、集合 $|S|$ 上の写像

$$S : |S| \longrightarrow M; |s| \longmapsto [s]$$

を考える。以下においては写像とそのグラフを同一視する。したがって S は写像自身とそのグラフ ($|S| \times M$ の部分集合) の両方を表す。要素 $s \in S \subset |S| \times M$ の第 1 成分を $|s| \in |S|$ で、また第 2 成分を $[s] \in M$ で表す。つまり写像 S は $|s|$ を $[s]$ に移す。

定義. グラフ S の点で生成される自由 \mathbb{Z} 加群を M 上の幾何加群といい、 $Z[S]$ と書く。 $|S|$ が有限集合であるとき、幾何加群 $Z[S]$ は有限生成 (f.g.) であるという。 M 上の幾何加群の族 $\{Z[S_\alpha]\}_{\alpha \in A}$ (A は添字集合) において、 $|S_\alpha|$ たちが互いに交わらないとき、その直和 $\bigoplus_{\alpha \in A} Z[S_\alpha]$ を $\bigsqcup_{\alpha \in A} S_\alpha : \bigsqcup_{\alpha \in A} |S_\alpha| \rightarrow M$ で定める。一般の場合には適当に「コピー」を作って、直和を定める。

例. (1) $|S|$ が空集合のとき、 $Z[S]$ を 0 と書く。

(2) M を CW 複体とし整数 $n \geq 0$ を固定する。 M の n 胞体全体の集合を $|S|$ とおき、各 n 胞体 $e \in |S|$ に対し、 $\varphi_e : D^n \rightarrow M$ をその特性写像とする。対応 $S : |S| \rightarrow M; e \mapsto \varphi_e(O)$ が M 上の幾何加群 $Z[S]$ を定める。ここで O は n 球体 D^n の中心とする。単なる可換群と思えばこれは M の通常の \mathbb{Z} 係数胞体的 n 鎖群である。

$\pi : \tilde{M} \rightarrow M$ を被覆写像としよう。 M 上の幾何加群 $Z[S]$ が与えられたとき、その「引き戻し」 $Z[\tilde{S}]$ を通常引き戻し $\tilde{S} : |\tilde{S}| = S^* \tilde{M} (\subset |S| \times \tilde{M}) \rightarrow \tilde{M}; (|s|, \tilde{m}) \mapsto \tilde{m}$ によって

定める。これは \widetilde{M} 上の幾何加群である。 π は正則被覆であると仮定しよう。 π の被覆変換群 Π は $|\widetilde{S}|$ に自由に作用し、 $Z[\Pi]$ 加群として $Z[\widetilde{S}]$ は各軌道からの代表元たちによって自由に生成される。この自由 $Z[\Pi]$ 加群 $Z[\widetilde{S}]$ のことを $Z[S]$ のアセンブリとよぶ。特に M が普遍被覆を持つときは、それに関するアセンブリとして自由 $Z[\pi_1 M]$ 加群 $Z[\widetilde{S}]$ を構成できる。一方、任意の自由 $Z[\pi_1 M]$ 加群は M 上のある幾何加群の普遍被覆に関するアセンブリと同型である。つまり M 上の幾何加群とは基底付き自由 $Z[\pi_1 M]$ 加群を幾何学的に実現したものだと思って良い。

定義. $Z[S]$ および $Z[T]$ を M 上の幾何加群とする。 S の要素 s , T の要素 t および $[s]$ から $[t]$ への M 上の道 $\rho: [0, \tau] \rightarrow M$ ($\tau \geq 0$, $\rho(0) = [s]$, $\rho(\tau) = [t]$) の組 (s, ρ, t) を考える。そのような組を s から t への道という。幾何射 $f: Z[S] \rightarrow Z[T]$ とは次のような $Z[S]$ の生成元から $Z[T]$ の生成元への道の形式的線形和のことをいう：

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda (s_\lambda, \rho_\lambda: [0, \tau_\lambda] \rightarrow M, t_\lambda).$$

ここに Λ はある添字集合であり、各生成元からできる道の数是有有限個であることを要求する。 $Z[S]$ から $Z[T]$ への二つの幾何射 $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda (s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda)$, $f' = \sum_{\gamma \in \Gamma} m'_\gamma (s'_\gamma, \rho'_\gamma, t'_\gamma)$ が等しい ($f = f'$) とは、係数が零の項を取り除いた後に、全単射 $\varphi: \Lambda \rightarrow \Gamma$ で次をみたすものが存在することをいう。

$$m'_{\varphi(\lambda)} = m_\lambda \quad \text{かつ} \quad (s'_{\varphi(\lambda)}, \rho'_{\varphi(\lambda)}, t'_{\varphi(\lambda)}) = (s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) \quad (\text{すべての } \lambda \in \Lambda).$$

二つの幾何射の和は二つの形式和を形式的にあわせることにより定める。幾何射の整数倍は各項を整数倍して定める。 f と g の差 $f - g$ は $f + (-1)g$ で定める。二つの連続する幾何射

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_\lambda (s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda): Z[S] \rightarrow Z[T], \quad g = \sum_{\gamma \in \Gamma} n_\gamma (t'_\gamma, \sigma_\gamma, u_\gamma): Z[T] \rightarrow Z[U]$$

の合成は

$$\sum_{\lambda \in \Lambda, \gamma \in \Gamma, t_\lambda = t'_\gamma} n_\gamma m_\lambda (s_\lambda, \sigma_\gamma \rho_\lambda, u_\gamma),$$

で定める。ただし連続した二つの道 $\rho_\lambda: [0, \tau_\lambda] \rightarrow M$, $\sigma_\gamma: [0, \tau'_\gamma] \rightarrow M$ ($\rho_\lambda(\tau_\lambda) = \sigma_\gamma(0)$) の合成 $\sigma_\gamma \rho_\lambda: [0, \tau_\lambda + \tau'_\gamma] \rightarrow M$ は

$$\sigma_\gamma \rho_\lambda(x) = \begin{cases} \rho_\lambda(x) & (0 \leq x \leq \tau_\lambda), \\ \sigma_\gamma(x - \tau_\lambda) & (\tau_\lambda \leq x \leq \tau_\lambda + \tau'_\gamma), \end{cases}$$

で定める。幾何射 $f = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_{\lambda}(s_{\lambda}, \rho_{\lambda}, t_{\lambda}) : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T]$ 中の道の始点と終点のみに注目すれば \mathbf{Z} 加群準同型写像：

$$|f| : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T] ; s \mapsto \sum_{s_{\lambda}=s} m_{\lambda} t_{\lambda}.$$

を得る。 M 上の幾何加群たちの間の幾何射の族 $\{f_{\alpha} : \mathbf{Z}[S_{\alpha}] \rightarrow \mathbf{Z}[T_{\alpha}]\}_{\alpha \in A}$ の直和は

$$\bigoplus_{\alpha \in A} f_{\alpha} = \sum_{\alpha \in A} f_{\alpha} : \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbf{Z}[S_{\alpha}] \longrightarrow \bigoplus_{\alpha \in A} \mathbf{Z}[T_{\alpha}]$$

で定める。ただし、 $f_{\alpha} : \mathbf{Z}[S_{\alpha}] \rightarrow \mathbf{Z}[T_{\alpha}]$ は包含関係 $S_{\alpha} \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} S_{\alpha}$, $T_{\alpha} \subset \bigsqcup_{\alpha \in A} T_{\alpha}$ により $\mathbf{Z}[\bigsqcup S_{\alpha}]$ から $\mathbf{Z}[\bigsqcup T_{\alpha}]$ の幾何射とみなす。

例. (1) 項のない空の幾何射を 0 と記す。 $|0|$ は普通の意味での零準同型写像である。

(2) $\mathbf{Z}[S]$ を M 上の幾何加群とし、 $s \in S$ から s 自身への「一点の道」 $c_s : \{0\} \rightarrow M$ を $c_s(0) = [s]$ で定める。このとき

$$\sum_{s \in S} 1(s, c_s, s) : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[S]$$

で定まる幾何射を $\mathbf{Z}[S]$ 上の恒等幾何射 といひ、 $1_{\mathbf{Z}[S]}$ または単に 1 と記す。任意の幾何射 $f : \mathbf{Z}[S] \longrightarrow \mathbf{Z}[T]$ に対し、等式 $f 1_{\mathbf{Z}[S]} = f = 1_{\mathbf{Z}[T]} f$ が成立する。 $|1_{\mathbf{Z}[S]}|$ は通常の意味での $\mathbf{Z}[S]$ 上の恒等写像である。

直和の間の幾何射を表すのに行列がしばしば用いられる。幾何射

$$f = \sum_{\lambda \in \Lambda} m_{\lambda}(s_{\lambda}, \rho_{\lambda}, t_{\lambda}) : \bigoplus_{j=1}^n \mathbf{Z}[S_j] \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^m \mathbf{Z}[T_i]$$

が与えられたとき、幾何射 $f_{ij} : \mathbf{Z}[S_j] \rightarrow \mathbf{Z}[T_i]$ ($1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$) を

$$f_{ij} = \sum_{\lambda \in \Lambda, s_{\lambda} \in S_j, t_{\lambda} \in T_i} m_{\lambda}(s_{\lambda}, \rho_{\lambda}, t_{\lambda})$$

で定める。 f は f_{ij} たちにより完全に決定される；実際 f は和 $\sum_{i,j} f_{ij}$ に等しい。ただし、 f_{ij} を包含関係 $S_j \subset \bigsqcup_{1 \leq j \leq n} S_j$, $T_i \subset \bigsqcup_{1 \leq i \leq m} T_i$ により、 $\mathbf{Z}[\bigsqcup S_j]$ から $\mathbf{Z}[\bigsqcup T_i]$ の幾何射とみなしている。 $m \times n$ 行列 $(f_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ により f を表す。例えば、直和 $\bigoplus_{i=1}^n f_i : \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[S_i] \rightarrow \bigoplus_{i=1}^n \mathbf{Z}[S_i]$ は f_1, \dots, f_n を対角成分とする対角行列でかける。

さて M は道連結で, $Z[\tilde{S}]$ および $Z[\tilde{T}]$ はそれぞれ正則被覆 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ に関する $Z[S]$ および $Z[T]$ のアセンブリであるとし, π の被覆変換群を Π とする. 道 (s, ρ, t) は要素 $\tilde{s} \in \tilde{S}$ から要素 $\tilde{t} \in \tilde{T}$ への道 $(\tilde{s}, \tilde{\rho}, \tilde{t})$ に持ち上がる. Π の作用だけの持ち上がり方がある. 従って, 幾何射 $f = \sum_{\lambda} m_{\lambda}(s_{\lambda}, \rho_{\lambda}, t_{\lambda}) : Z[S] \rightarrow Z[T]$ はアセンブリの間の幾何射:

$$\tilde{f} = \sum_{\lambda \in A} \sum_{g \in \Pi} m_{\lambda}(g\tilde{s}_{\lambda}, g\tilde{\rho}_{\lambda}, g\tilde{t}_{\lambda}) : Z[\tilde{S}] \rightarrow Z[\tilde{T}]$$

を誘導する. Z 加群準同型写像 $|\tilde{f}|$ は構成の仕方から $Z[\Pi]$ 加群準同型写像になっている. これを f のアセンブリと呼ぶ. 被覆 $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$ を固定するとき, アセンブリは M 上の (有限生成) 幾何加群と幾何射のつくる圏から (有限生成) 自由 $Z[\Pi]$ 加群と準同型写像のつくる圏への関手となる.

$Z[\tilde{S}]$ から $Z[\tilde{T}]$ への任意の $Z[\Pi]$ 加群準同型写像は $Z[S]$ から $Z[T]$ へのある幾何射のアセンブリとして実現することができる. さて (s, ρ, t) を幾何射 f 中の道とする. 道 ρ を両端を固定したまま (道の定義区間を連続的に変えながら) M 中のホモトピーで変形して, 道 (s, ρ', t) を得たとする. このようなホモトピーは \tilde{M} における両端を固定した道のホモトピーに持ち上がるので, f 中の道 (s, ρ, t) を (s, ρ', t) に取り替えても, 誘導するアセンブリは変わらない. 従って次のような定義をすると都合がよい. 道 (s, ρ, t) のホモトピーとは道 ρ の両端を固定し, 定義区間を連続的に変えるホモトピーのこととする. 端点 s および t は変えない. 幾何射のホモトピーとは次のふたつの操作の有限回の列のことをいう:

1. 道のホモトピー,
 2. 同類項 $m(s, \rho, t), n(s, \rho, t)$ をまとめて $(m+n)(s, \rho, t)$ にする操作, およびその逆操作.
- 例えば, 道 (s, ρ, t) が (s, ρ', t) にホモトピックならば, 幾何射 $(s, \rho, t) - (s, \rho', t)$ は零幾何射にホモトピックである:

$$(s, \rho, t) - (s, \rho', t) \stackrel{\text{操作1}}{\sim} (s, \rho, t) - (s, \rho, t) \stackrel{\text{操作2}}{\sim} 0(s, \rho, t) = 0.$$

互いにホモトピックな幾何射のアセンブリは等しい.

$\varphi: M \rightarrow N$ を連続写像とする. M 上の幾何加群 $A = Z[S]$ に対し, その順像 $\varphi_{\#}A$ を, N 上の幾何加群 $Z[\varphi S : |S| \rightarrow M \rightarrow N]$ で定める. S (グラフ) の元 $s = (|s|, [s])$ に対し, φS (グラフ) の元 $(|\varphi s|, \varphi[s])$ を φs と記す. $f = \sum m_{\lambda}(s_{\lambda}, \rho_{\lambda}, t_{\lambda}) : A \rightarrow B$ が M 上の幾何

加群 A, B の間の幾何射であるとき, 幾何射

$$\sum m_\lambda(\varphi s_\lambda, \varphi \rho_\lambda : [0, \tau_\lambda] \xrightarrow{\rho_\lambda} M \xrightarrow{\varphi} N, \varphi t_\lambda)$$

を $\varphi_{\parallel} f : \varphi_{\parallel} A \rightarrow \varphi_{\parallel} B$ と記す. もし $f \sim g$ ならば $\varphi_{\parallel} f \sim \varphi_{\parallel} g$ である.

定義. M 上の幾何加群 A から自分自身への幾何射 $p : A \rightarrow A$ が $p^2 \sim p$ をみたすとき, p は射影であるという. M 上の幾何加群 A と射影 $p : A \rightarrow A$ の対 (A, p) を M 上の射影加群という. (A, p) が有限生成 (f.g.) とは A が有限生成であることをいう. 二つの射影加群の間の射 $f : (A, p) \rightarrow (B, q)$ とは幾何射 $f : A \rightarrow B$ で $qf \sim f$ および $fp \sim f$ をみたすものをいう. 射影加群 (A_i, p_i) の直和 $\bigoplus_i (A_i, p_i)$ は $(\bigoplus_i A_i, \bigoplus_i p_i)$ で定める.

もし (A, p) が M 上の射影加群であるならば, 幾何射 $p : A \rightarrow A$ は (A, p) から自分自身への射となる. この射 p は (up to homotopy での) 「恒等」射である. M 上の射影加群と射のホモトピー類は圏をつくる. 射 $f : (A, p) \rightarrow (B, q)$ が同型射であるとは, 射 $g : (B, q) \rightarrow (A, p)$ で $gf \sim p, fg \sim q$ をみたすものが存在することをいう; このとき g を f の逆射という.

$(A, 1)$ という形の射影加群は幾何加群 A と同一視され, 自由加群と呼ばれる. 自由加群 $(A, 1), (B, 1)$ の間の射の全体と A, B の間の幾何射の全体は一致する.

2. 幾何的制御.

この節では, 前節で解説された諸概念に対して「幾何的制御」の概念を導入する.

距離空間 X への連続写像 $p_X : M \rightarrow X$ を制御写像とよぶ. M が特定な制御写像 p_X を与えられているとき, X 上の幾何加群 $Z[S]$ は p_X 上の幾何加群であるという. W は X の部分集合とする. $\epsilon \geq 0$ に対し, X における W の閉 ϵ 近傍を W^ϵ と書く. 明らかに $(W^\epsilon)^\delta \subset W^{\epsilon+\delta}$ が成り立つ. さらに, $\epsilon > 0$ に対して $W^{-\epsilon}$ は集合 $\{x \in W \mid d(x, X - W) \geq \epsilon\} \subset W$ を表すものとする.

制御写像 p_X が与えられたとき, 幾何射やそのホモトピーの「半径」を次のように定める. 幾何射 f の中で非零係数を持つ任意の道 $(s, \rho : [0, \tau] \rightarrow M, t)$ に対し, その M における像が $p_X^{-1}(\{p_X \rho(0)\}^\epsilon \cap \{p_X \rho(t_\rho)\}^\epsilon)$ に含まれるとき, f は半径 ϵ を持つという. 半径 ϵ の幾何射たち f, g の間のホモトピーに対し,

1. 操作1において、各道 (s, ρ, t) のホモトピーの像が $p_X^{-1}(\{p_X \rho(0)\}^\epsilon \cap \{p_X \rho(t_\rho)\}^\epsilon)$ に含まれ、
 2. 操作2において、同類項をまとめる（または同類項にわける）道 (s, ρ, t) の像が $p_X^{-1}(\{p_X \rho(0)\}^\epsilon \cap \{p_X \rho(t_\rho)\}^\epsilon)$ に含まれる
- とき、そのホモトピーは半径 ϵ を持つといい、 $f \sim_\epsilon g$ とかく。

命題 2.1. (1) $f \sim_\epsilon f'$ かつ $f' \sim_\delta f''$ ならば $f \sim_{\max\{\epsilon, \delta\}} f''$ である。

(2) $f \sim_\epsilon f'$ かつ $g \sim_\delta g'$ ならば任意の $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し $mf + ng \sim_{\max\{\epsilon, \delta\}} mf' + ng'$ である。

(3) 幾何射 f が半径 δ を持ち、幾何射 g が半径 ϵ を持つならば、その合成 g は半径 $\delta + \epsilon$ を持つ。

(4) $f \sim_\epsilon f'$ かつ $g \sim_\delta g'$ ならば $gf \sim_{\epsilon+\delta} g'f'$ である。

$p_X : M \rightarrow X$ を M の制御写像とする。次の定義では幾何加群はすべて p_X 上にあるとする。

定義. 射影 $p : A \rightarrow A$ が $p^2 \sim_\epsilon p$ をみたすとき、 p は ϵ 射影であるという。 p が ϵ 射影であるとき、射影加群 (A, p) は ϵ 射影加群であるという。射 $f : (A, p) \rightarrow (B, q)$ が ϵ 射であるとは、 f が半径 ϵ を持ち、さらに $qf \sim_\epsilon f$, $fp \sim_\epsilon f$ をみたすことをいう。 ϵ 射 $f : (A, p) \rightarrow (B, q)$ が ϵ 同型射であるとは、 $gf \sim_{2\epsilon} p$, $fg \sim_{2\epsilon} q$ をみたす ϵ 射 $g : (B, q) \rightarrow (A, p)$ が存在することをいう。このとき (A, p) と (B, q) は ϵ 同型であるという。

上の ϵ 射や ϵ 同型射の定義は、定義域・値域の射影加群の半径に無関係であることに注意せよ。また、上の定義で用いられる ϵ の係数は不統一であるように見える。実際この定義には恣意性がある。このような係数が選ばれたわけを簡単に説明する。まず第一に、 $p : A \rightarrow A$ が ϵ 射影であれば $p : (A, p) \rightarrow (A, p)$ は ϵ 射であることが望ましい。次に、半径は射や同型射の合成に関し良い振る舞いをしてほしい。（下の命題を見よ。） ϵ 射影の定義における要求を例えば $p^2 \sim_{2\epsilon} p$ に変えると、上の条件を満足させるためには ϵ 同型射の定義において $gf \sim_{3\epsilon} p$, $fg \sim_{3\epsilon} q$ を要求せざるを得なくなる。これはあまり望ましい定義とは思われない。ともかく、いろいろ考えられる定義の中で最も使いやすいと思われるものを選んだつもりである。あまり重要なことではないので、これで認めてほしい。

命題 2.2. δ 射 (resp. 同型射) $f : (A, p) \rightarrow (B, q)$ と ϵ 射 (resp. 同型射) $g : (B, q) \rightarrow (C, r)$ の合成 $gf : (A, p) \rightarrow (C, r)$ は $\delta + \epsilon$ 射 (resp. 同型射) である.

3. ホワイトヘッド群と射影類群.

この節では制御のついたホワイトヘッド群と射影類群を定義する. これらから通常のホワイトヘッド群・射影類群へ「制御を忘れる」アセンブリ写像が存在する. なおこの節では, 特に断らない限り, 幾何加群・射影加群はすべて有限生成とする. ただしこれが明示的に用いられるのは上記アセンブリ写像を構成する場合だけであり, 他の議論は無限生成の場合でも同様に成立する. この事実は §5 で用いられる.

距離空間 X への制御写像 $p_X : M \rightarrow X$ を固定する. まず制御ホワイトヘッド群 $Wh(X, p_X, \epsilon)$ を定義する.

定義. 幾何射 $f : Z[S] \rightarrow Z[S]$ が基本的であるとは, $Z[S]$ が二つの幾何加群 $Z[A], Z[B]$ の直和であり, f がその直和分解に関して

$$f = \begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : Z[A] \oplus Z[B] \rightarrow Z[A] \oplus Z[B]$$

の形に書けることをいう. 基本的な幾何射 f は同型射である. 逆射 $f^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ もやはり基本的である.

同じランクを持つ幾何加群の間の同型射 $f : Z[S] \rightarrow Z[S']$ が幾何的であるとは, ある全単射 $\varphi : S \rightarrow S'$ に関して次のことが成り立つことをいう: f の中には $s' = \varphi(s)$ でないかぎり $s \in S$ から $s' \in S'$ への道はなく, 各 $s \in S$ に対しちょうど 1 つ s から $\varphi(s)$ への係数 ± 1 を持つ道がある. その逆射 f^{-1} は道の向きを逆にすることにより得られる.

基本的な自己同型射および幾何的な同型射の列

$$D : Z[S_1] \xrightarrow{f_1} Z[S_2] \xrightarrow{f_2} \dots \xrightarrow{f_m} Z[S_{m+1}]$$

を變形という. 任意の部分的合成 $f_j f_{j-1} \dots f_1, f_i^{-1} f_{i+1}^{-1} \dots f_j^{-1}$ が半径 ϵ を持つとき, D は ϵ 變形であるという. D が ϵ 變形であるとき, 合成して得られる ϵ 同型射 $f = f_m f_{m-1} \dots f_1$ を ϵ 単純同型射という. 合成 $f^{-1} = f_1^{-1} f_2^{-1} \dots f_m^{-1}$ が f の ϵ 逆射を与える. ϵ 単純同型射と δ 単純同型射の合成は $(\epsilon + \delta)$ 単純同型射である.

定義. ふたつの同型射 $f : \mathbb{Z}[S] \rightarrow \mathbb{Z}[T]$, $f' : \mathbb{Z}[S'] \rightarrow \mathbb{Z}[T']$ は, ある幾何加群 $\mathbb{Z}[U]$, $\mathbb{Z}[U']$ と, ある ϵ 単純同型射

$$F : \mathbb{Z}[S] \oplus \mathbb{Z}[U] \longrightarrow \mathbb{Z}[S'] \oplus \mathbb{Z}[U']$$

$$G : \mathbb{Z}[T] \oplus \mathbb{Z}[U] \longrightarrow \mathbb{Z}[T'] \oplus \mathbb{Z}[U']$$

に対して

$$(f' \oplus 1)F \sim_{\epsilon} G(f \oplus 1) \quad (f \oplus 1)F^{-1} \sim_{\epsilon} G^{-1}(f' \oplus 1)$$

が成り立つ時, 安定 ϵ 同値であるという. f, f' が安定 ϵ 同値で, f', f'' が安定 δ 同値ならば, f, f'' は安定 $\epsilon + \delta$ 同値でしかないから, 固定した ϵ に対して安定 ϵ 同値は同値関係を与えない.

定義. p_X 上の幾何加群の間の ϵ 同型射の全体に, 安定 40ϵ 同値によって生成される同値関係をいれたものを $Wh(X, p_X, \epsilon)$ とかく. これは可換群になり (下の命題), p_X の ϵ 制御ホワイトヘッド群とよばれる.

命題 3.1. (Quinn [17]) 直和により $Wh(X, p_X, \epsilon)$ は可換群の構造を持つ. また, $[f] = [f'] \in Wh(X, p_X, \epsilon)$ ならば f と f' は安定 86ϵ 同値である.

逆元は逆同型射によりあたえられる. 定理の後半は, いわゆる Chapman のトリック [6, (3.5)] による.

次に, 制御 Wh 群の間の準同型写像を引き起こす「写像」について述べる. $p_X : M \rightarrow X$, $p_{X'} : M' \rightarrow X'$ を制御写像とする. p_X から $p_{X'}$ の写像とは, $p_{X'}\varphi = \bar{\varphi}p_X$ をみたす連続写像 $\varphi : M \rightarrow M'$, $\bar{\varphi} : X \rightarrow X'$ の組 $(\varphi, \bar{\varphi})$ のことをいう. 誤解の恐れがない限り, $\bar{\varphi}$ は省略して単に φ と書く. δ, ϵ を正の数, n を正の整数とする. $\bar{\varphi}$ に関する次の条件を考える:

$$C(\delta, \epsilon, k): \quad \text{もし } d(x, y) \leq k\delta \text{ ならば, } d(\bar{\varphi}(x), \bar{\varphi}(y)) \leq k\epsilon, \quad (x, y \in X).$$

さて $\bar{\varphi}$ が条件 $C(\delta, \epsilon, 1)$, $C(\delta, \epsilon, 2)$, $C(\delta, \epsilon, 20)$, $C(\delta, \epsilon, 40)$ をみたすならば $\varphi_{\#}$ は準同型写像 $\varphi_* : Wh(X, p_X, \delta) \rightarrow Wh(X', p_{X'}, \epsilon)$ を誘導する. 等式 $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ は容易に確かめられる. もし X がコンパクトならば, 任意の $\epsilon > 0$ に対して上の4条件をみたす $\delta > 0$ が存在する.

任意の $\epsilon > 0$ に対し, 写像 $(1 : M \rightarrow M, \text{射影} : X \rightarrow \{*\})$ は準同型写像 :

$$Wh(X, p_X, \epsilon) \longrightarrow Wh(\{*\}, M \rightarrow \{*\}, \epsilon)$$

を誘導する. これを「制御を忘れる」写像という. 右側の群 $Wh(\{*\}, M \rightarrow \{*\}, \epsilon)$ は ϵ に依存しない. M が連結かつ局所1-連結と仮定する. このとき Quinn [17] は, M の普遍被覆 \widetilde{M} に関するアセンブリ写像 $Z[S] \mapsto Z[\widetilde{S}]$ が, M 上の幾何加群と射のホモトピー類のつくる圏から基底付き自由 $Z[\pi_1(M)]$ 加群の圏への自然な同値を与えることを示した. 従って $Wh(\{*\}, M \rightarrow \{*\}, \epsilon)$ は $Wh(Z[\pi_1(M)])$ に同型となり, 上の写像は次のように書き換えることができる :

$$Wh(X, p_X, \epsilon) \longrightarrow Wh(\{*\}, M \rightarrow \{*\}, \epsilon) \stackrel{\text{アセンブリ}}{\cong} Wh(Z[\pi_1(M)]) .$$

適当な ϵ と δ に対し, δ ホモトピー同値写像 $f : L \rightarrow M$ は ϵ 制御振れ $\tau(f) \in Wh(X, p_X, \epsilon)$ を持ち, これは制御を忘れると普通のホワイトヘッドの振れ $\tau(f) \in Wh(\pi_1(M))$ にアセンブルする.

定義. p_X 上の二つの射影加群 $(A, p), (A', p')$ に対し, $(A, p) \oplus (E, 1)$ と $(A', p') \oplus (E', 1)$ が ϵ 同型となるような p_X 上の自由加群 $(E, 1), (E', 1)$ が存在するとき, (A, p) と (A', p') は ϵ 安定同型であるという. $\epsilon > 0$ を固定するとき, ϵ 安定同型は同値関係ではない. $(A, p), (A', p')$ が ϵ 安定同型で $(A', p'), (A'', p'')$ がやはり ϵ 安定同型ならば, (A, p) と (A'', p'') は 2ϵ 安定同型でしかない.

定義. p_X 上の ϵ 射影加群全体に, ϵ 安定同値で生成される同値関係を入れて得られる同値類 $[A, p]$ 全体の集合を $\widetilde{K}_0(X, p_X, \epsilon)$ と書く.

命題 3.2. 直和により $\widetilde{K}_0(X, p_X, \epsilon)$ は可換群の構造を持つ. さらに, もし $[A, p] = [A', p'] \in \widetilde{K}_0(X, p_X, \epsilon)$ ならば, (A, p) と (A', p') は 3ϵ 安定同型である.

$[A, p]$ の逆元は $[A, 1-p]$ で与えられる. 命題の後半はやはり Chapman の逆元キャンセルのトリックを用いて示される. この群を ϵ 制御射影類群という.

制御写像の間の写像 $(\varphi, \bar{\varphi}) : p_X \rightarrow p_{X'}$ が条件 $C(\delta, \epsilon, 1)$ および $C(\delta, \epsilon, 2)$ をみたすならば, $[A, p]$ に $[\varphi_1(A, p)] = [\varphi_1 A, \varphi_1 p]$ を対応させることにより準同型写像 $\varphi_* : \widetilde{K}_0(X, p_X, \delta) \rightarrow$

$\tilde{K}_0(X', p_{X'}, \epsilon)$ が得られる。等式 $(\varphi \circ \psi)_* = \varphi_* \circ \psi_*$ は容易に確かめられる。もし X がコンパクトならば、任意の $\epsilon > 0$ に対して上の2条件をみたす $\delta > 0$ が存在する。

制御ホワイトヘッド群の場合と同様に、 M が連結かつ局所1-連結のとき「制御を忘れる」アセンブリ写像がある：

$$\tilde{K}_0(X, p_X, \epsilon) \longrightarrow \tilde{K}_0(\{*\}, M \rightarrow \{*\}, \epsilon) \stackrel{\text{アセンブリ}}{\cong} \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(M)]) .$$

4. 分割のための障害 — マイヤー・ビートリス列.

この節では X は2つの閉部分集合 X_- と X_+ の和であると仮定し、その共通部分を $X_0 = X_- \cap X_+$ とかく。(X_- , X_+ が閉集合であるという仮定は本質的ではない。) 制御 K -理論においては次のようなマイヤー・ビートリス列：

$$Wh(X_0) \rightarrow Wh(X_+) \oplus Wh(X_-) \rightarrow Wh(X) \rightarrow \tilde{K}_0(X_0^\gamma) \rightarrow \tilde{K}_0(X_+^\gamma) \oplus \tilde{K}_0(X_-^\gamma)$$

がある。(制御写像, サイズは略記してある。また γ はある定数。) 有界制御の場合はすでに Ranicki [20] により研究されている。ここでは中央の項における「完全性」のみを調べることにする：大雑把に言えば、 X 上の同型射が X_+ , X_- 上の同型射の直和に同値になるための障害類が、 $\tilde{K}_0(X_0^\gamma)$ の中に定まるということを主張する。

障害類を定義するための準備を行う。 W を X の部分集合とする。 $p_W : p_X^{-1}(W) \rightarrow W$ は p_X を制限して得られる写像を表すものとする。 p_X 上の幾何加群 $A = \mathbb{Z}[S]$ の W への制限とは S の元 $([s], [s])$ で $[s] \in p_X^{-1}(W)$ をみたすものにより生成される p_W 上の幾何加群のことをいう。これを $A(W)$ とかく；すなわち

$$A(W) = \mathbb{Z}[S | S^{-1} p_X^{-1}(W) : S^{-1} p_X^{-1}(W) \longrightarrow p_X^{-1}(W)].$$

幾何射 $f = \sum m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) : A \rightarrow B$ の W への制限は次式で定義される：

$$f|W = \sum_{[s_\lambda] \in p_X^{-1}(W)} m_\lambda(s_\lambda, \rho_\lambda, t_\lambda) : A \rightarrow B.$$

f が半径 ϵ を持てば $f|W$ は幾何射 $f|W : A(W) \rightarrow B(W^\epsilon)$ を定める。 $f, g : A \rightarrow B$ を二つの幾何射とする。 $f|W = g|W$ が成り立つことを W 上で f と g は等しいといい、“ $f = g$ ”

over W ” とかく. 同様に $f|W \sim_\epsilon g|W$ であることを W 上で f と g はホモトピックである
 といい, “ $f \sim_\epsilon g$ over W ” とかく.

さて $Wh(X)$ の元 $[d: C_1 \rightarrow C_0]$ を考える. $\Gamma: C_0 \rightarrow C_1$ を d の逆射とする. (同型射
 を1次元の「鎖複体」, その逆射を「chain contraction」と考えている. 以下幾何加群・射影
 加群と幾何射の鎖複体の理論を用いなければならない. 厳密な定義を行わずとも類推は可能で
 あるから, 未定義の用語は「」で囲って用いることにする.) d を $X_+ - X_0$ に制限してみる:
 d は半径 ϵ だから, $d' = d|X_+ - X_0^\epsilon$ は $C'_1 = C_1(X_+ - X_0)$ から $C'_0 = C_0(X_+ - X_0)$ へ
 の幾何射である. 残念ながら d' は同型射とは限らない. $\Gamma' = \Gamma|X_+ - X_0^\epsilon$ とおくと

$$\Gamma' d' \sim_{2\epsilon} 1 \text{ over } X_+ - X_0^{2\epsilon}, \quad d' \Gamma' \sim_{2\epsilon} 1 \text{ over } X_+ - X_0^{2\epsilon}$$

が成り立つ. 幾何射 $F_1: C'_1 \rightarrow C'_1, F_0: C'_0 \rightarrow C'_0$ を

$$F_1 = (1 - \Gamma' d')|X_+ \cap X_0^{2\epsilon}, \quad F_0 = (1 - d' \Gamma')|X_+ \cap X_0^{2\epsilon}$$

で定める. Γ' は 1, $F = \{F_r\}: C'_* \rightarrow C'_*$ の間の「鎖ホモトピー」を与える. C'_* の「部分複
 体」 D_* を

$$D_1 = C'_1(X_+ \cap X_0^{4\epsilon}), \quad D_0 = C'_0(X_+ \cap X_0^{5\epsilon})$$

$$d_D = d'|X_+ \cap X_0^{4\epsilon}: D_1 \rightarrow D_0$$

で定め, $i: D_* \rightarrow C'_*$ を包含写像とすると, 作り方から $F = if$ をみたす「鎖写像」 $f: C'_* \rightarrow D_*$
 が存在する. (D_*, f, i, Γ') は C'_* の “domination” である. 一般論 ([18]) より C'_* は次の
 「射影的鎖複体」に「鎖ホモトピー同値」になる:

$$0 \longrightarrow (D_0 \oplus D_1, 1 - p) \xrightarrow{(1-f \quad d_D)} (D_0, 1) \longrightarrow 0.$$

ただし p は次式で与えられる 4ϵ 射影である:

$$p = \begin{pmatrix} fi & -d_D \\ -f\Gamma'i & 1 - fi \end{pmatrix}: D_0 \oplus D_1 \rightarrow D_0 \oplus D_1.$$

定理 4.1. 次をみたす定数 $\kappa > 0, \lambda > 0$ が存在する:

(1) $W \supset X_0^{\kappa\epsilon}$ かつ $\epsilon' \geq \kappa\epsilon$ ならば対応 $[d: C_1 \rightarrow C_0] \mapsto [D_0 \oplus D_1, p]$ は well-defined な準同型写像

$$\partial_+ : Wh(X, p_X, \epsilon) \longrightarrow \tilde{K}_0(W, p_W, \epsilon')$$

を誘導する.

(2) 次の合成は 0 である :

$$Wh(X_+, p_{X_+}, \epsilon) \oplus Wh(X_-, p_{X_-}, \epsilon) \rightarrow Wh(X, p_X, \epsilon) \xrightarrow{\partial_+} \tilde{K}_0(W, p_W, \epsilon').$$

ただし最初の写像は包含写像の誘導する写像の和である.

(3) 制御を緩める写像 $Wh(X, p_X, \epsilon) \rightarrow Wh(X, p_X, \hat{\epsilon})$ による $\ker \{\partial_+ : Wh(X, p_X, \epsilon) \rightarrow \tilde{K}_0(W, p_W, \epsilon')\}$ の元は, $\hat{X}_\pm \supset X_\pm \cup W^{\lambda\epsilon'}$ かつ $\hat{\epsilon} \geq \lambda\epsilon'$ のとき, 写像 :

$$Wh(\hat{X}_+, p_{\hat{X}_+}, \hat{\epsilon}) \oplus Wh(\hat{X}_-, p_{\hat{X}_-}, \hat{\epsilon}) \longrightarrow Wh(X, p_X, \hat{\epsilon})$$

の像にはいる.

(例えば, $\kappa = 10^5$, $\lambda = 10^{11}$ ならうまくいく.)

5. S^1 との直積.

$\pi \times \mathbf{Z}$ のホワイトヘッド群に関して分裂短完全列 :

$$0 \longrightarrow Wh(\pi) \xrightarrow{i_1} Wh(\pi \times \mathbf{Z}) \xrightarrow{B \oplus N_+ \oplus N_-} \tilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi]) \oplus \tilde{N}il_0(\mathbf{Z}[\pi]) \oplus \tilde{N}il_0(\mathbf{Z}[\pi]) \longrightarrow 0$$

が知られている (Bass [1, XII]). 従って $\tilde{K}_0(\mathbf{Z}[\pi])$ は $Wh(\pi \times \mathbf{Z})$ の部分群とすることができる. 制御付きの場合も次の類似が成り立つ. (Cf. [19])

定理 5.1. 制御写像 $p_X : M \rightarrow X$ に対し制御写像 p'_X を

$$p'_X : M \times S^1 \xrightarrow{\text{射影}} M \xrightarrow{p_X} X,$$

で定める. このとき任意の $\delta > 0$ および $\epsilon \geq 2\delta$ に対し, 次の可換図式がある :

$$\begin{array}{ccc}
Wh(X, p'_X, 2\delta) & \xleftarrow{\bar{B}} & \tilde{K}_0(X, p_X, \delta) \\
\downarrow & & \downarrow \\
Wh(X, p'_X, \epsilon) & \xrightarrow{B} & \tilde{K}_0(X, p_X, \kappa\epsilon)
\end{array}$$

ただし縦の写像は制御を緩める写像で κ は 4.1 の定数.

B の構成を述べる. 射影 $\mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}/\mathbf{Z} = S^1$ を π で表す. p'_X 上の ϵ 同型射 $d: C_1 \rightarrow C_0$ を被覆 $1_M \times \pi: M \times \mathbf{R} \rightarrow M \times S^1$ で引き戻して $M \times \mathbf{R}$ 上の同型射 $\tilde{d}: \tilde{C}_1 \rightarrow \tilde{C}_0$ を作る. \tilde{C}_* は有限生成ではない. また, \tilde{d} は X 上で計ると ϵ 同型射であるが, $p_X \times 1_{\mathbf{R}}: M \times \mathbf{R} \rightarrow X \times \mathbf{R}$ を用いた場合は必ずしもそうではない. K を正の数とし, 1 次関数 $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto x/K$ を考える. もし K が十分大ならば $\varphi_1(\tilde{d})$ は $p_X \times 1_{\mathbf{R}}$ 上の ϵ 同型射となる. 有限生成でないことは気にしないで, この元に ∂_+ を適応すると $\tilde{K}_0(X \times J, p_X \times 1_J, \kappa\epsilon)$ の元を得る. ここで J はある区間 $[-s, s]$ を表す. レトラクション $M \times J \rightarrow M \times \{0\} = M$ は同型写像

$$\tilde{K}_0(X \times J, p_X \times 1_J, \kappa\epsilon) \xrightarrow{\cong} \tilde{K}_0(X, p_X, \kappa\epsilon)$$

を誘導することがわかる. この写像を適用して得られる元を $B([d])$ と定める.

次に \bar{B} の構成を述べる. $P = \pi(0) \in S^1$ で生成される S^1 上の幾何加群 $D = \mathbf{Z}\{P\}$ を考える. 道 $t: [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ を $t(\theta) = \theta$ ($0 \leq \theta \leq 1$) で定め, z を P から P への道 $(P, \pi \circ t: [0, 1] \rightarrow S^1, P)$ とする. このとき準同型写像 \bar{B} を次式で定める:

$$\bar{B}([A, p]) = [(1-p) \otimes 1 + p \otimes z: A \otimes D \rightarrow A \otimes D].$$

幾何加群のテンソル積や幾何射のテンソル積は山崎 [25] に定義されている. 簡単に復習しておく. $\mathbf{Z}[R], \mathbf{Z}[S]$ をそれぞれ M および N 上の幾何加群とする. そのテンソル積 $\mathbf{Z}[R] \otimes \mathbf{Z}[S]$ は $\mathbf{Z}[R \times S: |R| \times |S| \rightarrow M \times N]$ で定める. $r = (|r|, [r]) \in R$ と $s = (|s|, [s]) \in S$ に対し, $R \times S$ の元 $((|r|, |s|), ([r], [s]))$ を $r \otimes s$ と書く. $r \in R$ から $r' \in R'$ への道 $(r, \rho: [0, \tau] \rightarrow M, r')$ と $s \in S$ から $s' \in S'$ への道 $(s, \sigma: [0, \tau'] \rightarrow N, s')$ に対し, それらのテンソル積 $(r, \rho, r') \otimes (s, \sigma, s')$ を道 $(r \otimes s, \rho \otimes \sigma, r' \otimes s')$ で定義する. 但し $\rho \otimes \sigma: [0, \tau + \tau'] \rightarrow M \times N$ は次の合成道とする:

$$\rho \otimes \sigma(x) = \begin{cases} (\rho(x), \sigma(0)) & (0 \leq x \leq \tau), \\ (\rho(\tau), \sigma(x - \tau)) & (\tau \leq x \leq \tau + \tau'). \end{cases}$$

幾何射のテンソル積はこれを双線形に拡張して定義する。一般に等式ではなく、ホモトピー $(f' \otimes g')(f \otimes g) \sim f'f \otimes g'g$ が成り立つ。

以上のことを用いて定理 4.1 を書き直す。 X, X_{\pm}, X_0 は 4 節のとおりとし、 κ, λ は定理 4.1 のようにとる。任意の $\epsilon > 0, \epsilon'' \geq 2\kappa\epsilon$, および $W \supset X_0^{\epsilon''}$ に対して、写像：

$$\bar{\partial}_+ : Wh(X, p_X, \epsilon) \xrightarrow{\partial_+} \tilde{K}_0(W, p_W, \epsilon''/2) \xrightarrow{\bar{B}} Wh(W, p'_W, \epsilon'')$$

を考える。

定理 5.2. (1) 次の合成は 0 である：

$$Wh(X_+, p_{X_+}, \epsilon) \oplus Wh(X_-, p_{X_-}, \epsilon) \rightarrow Wh(X, p_X, \epsilon) \xrightarrow{\bar{\partial}_+} Wh(W, p'_W, \epsilon'').$$

(2) 制御を緩める写像 $Wh(X, p_X, \epsilon) \rightarrow Wh(X, p_X, \hat{\epsilon})$ による $\ker \{\bar{\partial}_+ : Wh(X, p_X, \epsilon) \rightarrow Wh(W, p'_W, \epsilon'')\}$ の元は、 $\hat{X}_{\pm} \supset X_{\pm} \cup W^{\lambda\kappa\epsilon''}$ かつ $\hat{\epsilon} \geq \lambda\kappa\epsilon''$ のとき、写像：

$$Wh(\hat{X}_+, p_{\hat{X}_+}, \hat{\epsilon}) \oplus Wh(\hat{X}_-, p_{\hat{X}_-}, \hat{\epsilon}) \longrightarrow Wh(X, p_X, \hat{\epsilon})$$

の像にはいる。

6. ホワイトヘッド群の消滅定理.

K を有限多面体とし制御写像 $p_K : M \rightarrow K$ は iterated mapping cylinder structure (Hatcher [11]) を持つと仮定する。さらに各頂点 $v \in K$ に対し

$$Wh(\pi_1(p_K^{-1}(v)) \times \mathbb{Z}^k) = 0 \quad (k \geq 0)$$

と仮定する。各 $k \geq 0$ に対し $p_K^{(k)}$ を次の合成で定義する：

$$p_K^{(k)} : M \times T^k \xrightarrow{\text{射影}} M \xrightarrow{p_K} K.$$

ただし T^k は k -次元トーラス $(S^1)^k$ とする。すると $p_K^{(k)}$ も p_K のものから誘導された iterated mapping cylinder structure をもち、同様なホワイトヘッド群に関する仮定を満たす。

定理 6.1. p_K は上の仮定をみたすとする. 任意の $\epsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して制限を緩める写像

$$Wh(K, p_K^{(k)}, \delta) \longrightarrow Wh(K, p_K^{(k)}, \epsilon)$$

はすべての $k \geq 0$ に対し零写像となる.

証明は K の部分複体に対して同様の主張を帰納的に示すことにより行われる. 帰納法の第 1 ステップは各頂点に関するホワイトヘッド群の仮定から明らかである. 帰納法のステップは前節の定理 5.2 を用いて進行される.

以下にこの定理の系を述べる.

系 6.2. p_K を上と同じとする. 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して

$$\tilde{K}_0(K, p_K^{(k)}, \delta) \longrightarrow \tilde{K}_0(K, p_K^{(k)}, \epsilon)$$

がすべての $k \geq 0$ に対し零射像となる.

証明: 5.1 と 6.1 より直ちに得られる. □

次は Chapman [4], Ferry [10, Cor.3.2] の代数版である.

系 6.3. X はヒルベルト立方体 I^∞ に埋め込まれた連結コンパクト ANR 距離空間とする. 任意の $\epsilon > 0$ に対しある $\delta > 0$ が存在して制御を緩める写像

$$\tilde{K}_0(X, 1_X, \delta) \rightarrow \tilde{K}_0(X, 1_X, \epsilon) \quad , \quad Wh(X, 1_X, \delta) \rightarrow Wh(X, 1_X, \epsilon)$$

は共に零写像となる. 従ってある $\delta_X > 0$ に対し, 「制御を忘れる」アセンブリ写像

$$\tilde{K}_0(X, 1_X, \delta_X) \rightarrow \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)]) \quad , \quad Wh(X, 1_X, \delta_X) \rightarrow Wh(\pi_1(X))$$

は共に零写像である.

証明: X に対しある近傍 U とレトラクション $r: U \rightarrow X$ が存在する. I^N の余次元 0 の PL 部分複体 K が存在して, U が $K \times I^{\infty-N}$ という形をしていると仮定しても一般性を失わない. (ヒルベルト立方体の因子である区間は, 先に行けば行くほどどんどん短くなっていくから.) U のコンパクト性から, r はある $\gamma > 0$ に対して準同型写像

$$r_* : Wh(U, 1_U, \gamma) \longrightarrow Wh(X, 1_X, \epsilon)$$

を誘導する。 $Wh(\mathbb{Z}^k) = 0$ (Bass-Heller-Swan [2]) であるから $1_K: K \rightarrow K$ に対して 6.1 を適用できる。従って、ある $\delta > 0$ に対し準同型写像 $Wh(K, 1_K^{(k)}, \delta) \rightarrow Wh(K, 1_K^{(k)}, \gamma)$ はすべての $k \geq 0$ で零写像となる。 $r': U = K \times I^{\infty-N} \rightarrow K$ を射影, $i': K = K \times (0, 0, \dots) \rightarrow U$ を包含写像とする。これらは Wh において互いの逆写像を誘導することがわかる。次の図式は可換である。

$$\begin{array}{ccccc}
 Wh(X, 1_X^{(k)}, \delta) & \xrightarrow{i_*} & Wh(U, 1_U^{(k)}, \delta) & \xrightarrow[r'_*]{\cong} & Wh(K, 1_K^{(k)}, \delta) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow 0 \\
 Wh(X, 1_X^{(k)}, \epsilon) & \xleftarrow{r_*} & Wh(U, 1_U^{(k)}, \gamma) & \xleftarrow[i'_*]{\cong} & Wh(K, 1_K^{(k)}, \gamma)
 \end{array}$$

ここで縦の写像は制御を緩める写像である。ゆえに、縦の写像はすべて零射像である。

さて $\epsilon = 1$, $k = 0$ そして δ_X を対応する δ とする。アセンブリ写像 $Wh(X, 1_X, \delta_X) \rightarrow Wh(\pi_1(X))$ は $Wh(X, 1_X, 1)$ を経由するので、やはり零射像である。

\tilde{K}_0 の場合の主張 (おそらくさらに小さい δ_X を必要とする) は上の $k = 1$ の場合と 5.1 から示される。 □

次は Chapman [5, Theorem 1'] の代数版である。

系 6.4. 連結かつ局所単連結な空間 M から I^∞ に埋め込まれた連結コンパクト ANR 距離空間 X への制御写像 $p_X: M \rightarrow X$ を固定する。このときある $\delta > 0$ が存在し、「制御を忘れる」アセンブリ写像

$$\begin{array}{ccc}
 Wh(X, p_X, \delta) & \longrightarrow & Wh(\pi_1(M)) \\
 \tilde{K}_0(X, p_X, \delta) & \longrightarrow & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(M)])
 \end{array}$$

の像は

$$\begin{array}{ccc}
 (p_X)_* : Wh(\pi_1(M)) & \longrightarrow & Wh(\pi_1(X)) \\
 (p_X)_* : \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(M)]) & \longrightarrow & \tilde{K}_0(\mathbb{Z}[\pi_1(X)])
 \end{array}$$

のそれぞれの核に入る。

証明: δ_X を 6.3 のようにとる。ホワイトヘッド群に関する主張は次の可換図式から明らかである。

$$\begin{array}{ccc}
Wh(X, p_X, \delta_X) & \xrightarrow{(p_X)_*} & Wh(X, 1_X, \delta_X) \\
\downarrow & & \downarrow 0 \\
Wh(\pi_1(M)) & \xrightarrow{(p_X)_*} & Wh(\pi_1(X))
\end{array}$$

\tilde{K}_0 の場合も同様.

□

7. トポロジーへの応用.

前節の系 6.3 の応用を述べる.

定理 7.1. (振れの位相不変性) 有限 CW 複体の間の同相写像は単純である.

定理 7.2. (ボルスク予想) コンパクト ANR 距離空間は有限多面体とホモトピー同値である.

これらは最初 Chapman [3] および West [23] によりそれぞれ証明された.

7.1 の証明: $f: K \rightarrow L$ を有限 CW 複体の間の同相写像とする. そのホワイトヘッドの振れ $\tau(f)$ が 0 であることを示す. L はヒルベルト立方体に埋め込まれていると仮定しても一般性を失わない. さらに, ホワイトヘッドの振れは組合せ的に不変であるから (Whitehead [24], Milnor [14], Cohen [7]), K や L をその細分 K', L' でそれぞれ置き換えてもよい. ホワイトヘッドの振れの定義を注意して観察すると, 実は振れは $Wh(L, 1_L, \delta)$ の中に定まることがわかる. しかも上記の細分を十分細かくとり, 胞体写像近似を十分近くとると, この δ はいくらでも小さくすることができる. この制御された振れの「制御を忘れる」アセンブリの像が普通の振れ $\tau(f)$ であるから, 6.3 により $\tau(f)$ は 0 になる. □

7.2 の証明: X はヒルベルト立方体の部分空間としても一般性を失わない. X はある近傍のレトラクトになっている. そのレトラクションを $r: V \rightarrow X$ とする. 十分大きい N を選べば, $K \times I^{\infty-N}$ の形をしたより小さい近傍 $U \subset V$ がとれる. ただし K は I^N の余次元 0 の PL 部分多様体である. $j: X \rightarrow K$ を次の合成で定める:

$$j: X \xrightarrow{\text{包含写像}} U \xrightarrow{\text{射影}} K.$$

また, $f: K \rightarrow X$ を次の合成とする:

$$f: K = K \times 0 \xrightarrow{\text{包含写像}} U \xrightarrow{r} X.$$

すると $f: K \rightarrow X$ は X の finite domination であり, ホモトピー $: 1_X \simeq fj$ がある. $p: K \rightarrow K$ を jf の胞体写像による近似とすると, p はホモトピー射影である: $p^2 \simeq p$. もし N が十分大きかったら (すなわち $I^{\infty-N}$ が十分薄かったら), このホモトピーの直径はいくらでも小さくできる. X は局所可縮であることを用いると, N が十分大きいとき p は「鎖ホモトピー」的射影 $p_*: f_1C(K) \rightarrow f_1C(K)$ を誘導することがわかる. したがってある $\delta > 0$ に対し $\tilde{K}_0(X, 1_X, \delta)$ の元を定める. ([13]) その元の制御を忘れるアセンブリ写像による $\tilde{K}_0(Z[\pi_1(X)])$ での像は X の通常の Wall finiteness obstruction ([22]) である. δ は限りなく小さくできるので, 6.3 により X の finiteness obstruction は 0 でなければならない. \square

本稿ではホワイトヘッド群や射影類群に関する応用を述べたが, 手術理論に関しても, さまざまな応用がある. そのひとつとして, 以前紹介した generalized manifold が resolution を持つための障害類もある (Quinn). 最近 Bryant-Ferry-Mio-Weinberger の 4 人は Quinn の障害類が 0 でない例を構成したそうである. 詳しいことは本人達に聞いてほしい.

参考文献

- [1] Bass, H.
Algebraic K-theory
Benjamin (1968)
- [2] , Heller, A. , and Swan, R. G.
The Whitehead group of a polynomial extension
Publ. Math. I. H. E. S. 22, 61-79 (1964)
- [3] Chapman, T. A.
The topological invariance of Whitehead torsion
Amer. J. Math. 96, 488-497 (1974)
- [4] *Homotopy conditions which detect simple homotopy equivalences*
Pac. J. Math. 80, 13-46 (1979)
- [5] *Invariance of torsion and the Borsuk conjecture*
Can. J. Math. 32, 1333-1341 (1980)
- [6] *Controlled Simple Homotopy Theory and Applications*
Springer Lecture Notes, vol. 1009 (1983)
- [7] Cohen, M. M.
A Course in Simple-Homotopy Theory
Graduate Texts in Math. , vol. 10, Springer (1973)
- [8] Connell, E. H. and Hollingsworth, J.
Geometric groups and Whitehead torsion

- Trans. A. M. S. 140, 161–181 (1969)
- [9] Connolly, F. and Koźniewski, T.
Rigidity and crystallographic groups, I
 Invent. Math. 99, 25–48 (1990)
- [10] Ferry, S.
The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR
 Ann. of Math. 106, 101–119 (1977)
- [11] Hatcher, A. E.
Higher simple homotopy theory
 Ann. of Math. 102, 101–137 (1975)
- [12] Higman, G.
The units of group rings
 Proc. London Math. Soc. (2) 46, 231–248 (1940)
- [13] Lück, W. and Ranicki, A.
Chain homotopy projections
 J. of Alg. 120, 361–391 (1989)
- [14] Milnor, J.
Whitehead torsion
 Bull. A. M. S. 72, 358–426 (1966)
- [15] Quinn, F. S.
Ends of Maps I.
 Ann. of Math. 110, 275–331 (1979)
- [16] *Ends of Maps II.*
 Invent. Math. 68, 353–424 (1982)
- [17] *Geometric algebra*
 Proc. 1983 Rutgers Topology Conference, Springer Lecture Notes, vol. 1126,
 182–198 (1985)
- [18] Ranicki, A.
The algebraic theory of finiteness obstruction
 Math. Scand. 57, 105–126 (1985)
- [19] *Algebraic and geometric splittings of the K - and L -groups of polynomial extensions*
 Proc. Symp. on Transformation Groups, Poznań 1985, Springer Lecture
 Notes, vol. 1217, 321–364 (1986)
- [20] *Lower K - and L -theory*
 Math. Gott. 25 (1990)
- [21] , and Yamasaki, M.
Controlled K -theory
 (preprint)
- [22] Wall, C. T. C.
Finiteness conditions for CW complexes

- Ann. of Math. 81, 55-69 (1965)
- [23] West, J. E.
Mapping Hilbert cube manifolds to ANRs
Ann. of Math. 106, 1-18 (1977)
- [24] Whitehead, J. H. C.
Simple homotopy types
Amer. J. Math. 72, 1-57 (1950)
- [25] Yamasaki, M.
L-groups of crystallographic groups
Invent. Math. 88, 571-602 (1987)

$M^3 \times \mathbb{R}$ 上のインスタントンと pseudo-holomorphic curve

都立大理 吉田 朋好

§1. 自己双対 Yang-Mills 場の退化

自己双対 Yang-Mills 方程式の解のモジュライの研究は、3, 4次元トポロジーで本質的な役割を演ずるが、この方程式の性質を明らかにするための有効な方法の一つに、方程式の簡約化と退化を調べる方法がある。

Yang-Mills 場の方程式の簡約化とは、とくに方程式が定義される空間が、 \mathbb{R}^4 であるとか、 S^4 である場合に、群作用を用いて独立変数の個数を減らして変形することである。この方法により、自己双対 Yang-Mills 方程式から、他の多くの非線形方程式、例えば、K-dV 方程式、sin-Gordon 方程式、非線形 Schrödinger 方程式... 等が得られることが知られている ([1])。

一方、自己双対 Yang-Mills 場の方程式の退化とは次のようなことを意味する。4次元リーマン多様体 M と、その上の principal $SU(2)$ -バンドル

$P \rightarrow M$ があり P の上の接続 A に対して、
自己双対 Yang-Mills 方程式

$$F_A = *F_A \quad (1)$$

を考える。ここには $F_A = dA + A \wedge A$ は A の曲率
2-形式をあらわし、 $*$ は Hodge 作用素をあらわす。
今 M のリーマン計量が、あるパラメータのもとで
変化し、リーマン多様体として M が変形をする
場合を考える。 M の変形にともない、 P も変形
して、方程式 (1) とその解も又、何らかの意味で
動いてゆく。仮に M の変形がある極限 X
をもたとして、 $M \rightarrow X$ の退化がおこったとす
る。一般に X は M より次元が低くなっていきま
す。このような時、方程式 (1) は X の
上で定義された別の非線形方程式に退化
してゆくことが考えられる。こういう、いわば退
化の極限方程式を考え、もとの方程式の解のモ
ジュライと退化方程式の解のモジュライの比較を
行うのである。この比較は通常2つのステップ
で行われる。1つは退化に伴うもとの方程式の
解の極限を調べることであり、もう一つは極限

方程式の解から、もとの方程式の解を復元するとはである。一般には極限方程式はもとの方程式より簡約化(?) されているため、前のステップに比べると、後のステップの方がはるかにむづかしい場合が多い。

§2. Atiyah の問題

前§で自己双対 Yang-Mills 方程式の退化について述べたが、この講演で述べる退化は次の§に書く特別なものである。その前に、どのような退化を考える動機になった Atiyah の問題を紹介する (Atiyah [2])。

Σ を種数 g (≥ 2) の向きづけられた閉曲面とする。周知の如く、 Σ の基本群は

$$\pi_1(\Sigma) = \langle A_1, \dots, A_g, B_1, \dots, B_g \mid \prod_i [A_i, B_i] = 1 \rangle$$

で与えられる。 $\pi_1(\Sigma)$ の $SU(2)$ への表現の空間

$$\mathcal{M}_\Sigma = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), SU(2)) / \text{conj.}$$

(conj. は conjugation による同値類をあらわす)

は実代数多様体で次元は $6g-6$ である。 \mathcal{M}_Σ は Abel 表現 (像が $\mathfrak{S}' \subset SU(2)$ に入る) の Σ に特異点を持っている。

真 $[P] \in \mathcal{M}_\Sigma$ は $SU(2)$ -表現の同値類 $\rho: \pi_1(\Sigma) \rightarrow SU(2)$ をあらわす。 \mathcal{M}_Σ の $[P]$ での接空間 $T_{[P]} \mathcal{M}_\Sigma$ は \mathbb{R} -ホモロジー

$$H'_\rho(\Sigma, \mathfrak{m}(2)) \quad (2)$$

と同視される。 Σ に $\mathfrak{m}(2)$ は $SU(2)$ の Lie 環で、 \mathbb{R} -ホモロジーは $SU(2)$ -表現 $\rho: \pi_1(\Sigma) \rightarrow SU(2)$ と $SU(2)$ の $\mathfrak{m}(2)$ の adjoint 表現の合成による、 $\pi_1(\Sigma)$ の $\mathfrak{m}(2)$ の作用によって定義される局所係数 \mathbb{R} -ホモロジーをあらわす。 $H'_\rho(\Sigma, \mathfrak{m}(2))$ のカップ積と係数行列の trace をとる Σ により、 \mathcal{M}_Σ は非退化なシンプレクティック構造 ω をもつ。

さて、 M^3 を 3次元 \mathbb{Z} -ホモロジー球面とある。 M^3 の Heegaard 分解

$$M^3 = V_1 \cup_\Sigma V_2$$

を与える。 Σ は V_1, V_2 は種数 g のハンドル体で、 $\partial V_1 = \partial V_2 = \Sigma$ とする。

$$j_1: \Sigma \rightarrow V_1, \quad j_2: \Sigma \rightarrow V_2$$

を包含写像とすると。

$$j_1^*: \text{Hom}(\pi_1(V_1), \text{SU}(2)) / \text{conj.} \longrightarrow \mathcal{M}_\Sigma$$

$$j_2^*: \text{Hom}(\pi_1(V_2), \text{SU}(2)) / \text{conj.} \longrightarrow \mathcal{M}_\Sigma$$

という二つの写像が考えられる。

$$V_1 = \text{Image } j_1^* \hookrightarrow \mathcal{M}_\Sigma$$

$$V_2 = \text{Image } j_2^* \hookrightarrow \mathcal{M}_\Sigma$$

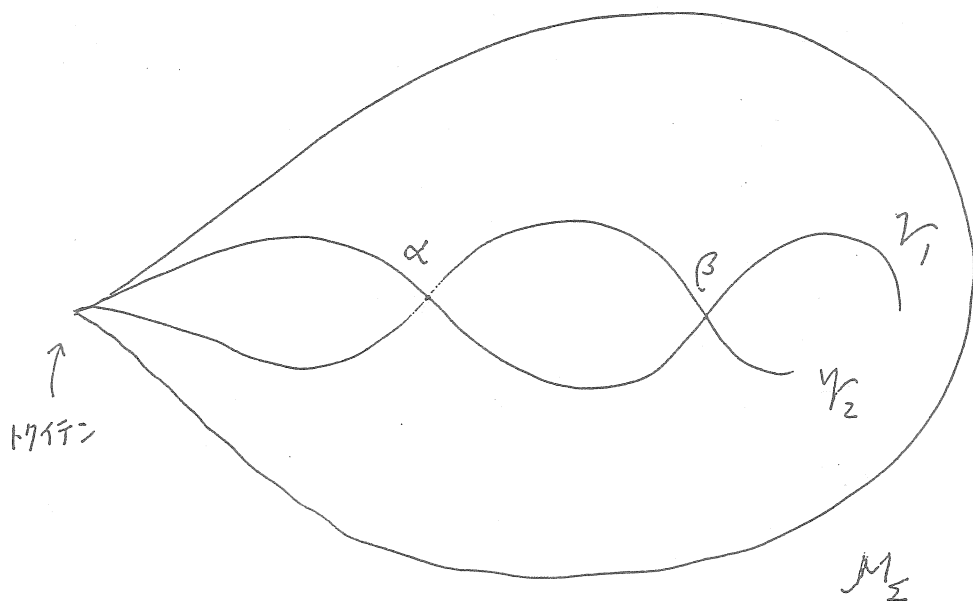
とすると、 V_1, V_2 は \mathcal{M}_Σ の二つの実部分代数多様体となり、次元はともに $3g-3$ である。

V_i の各点 $[p]$ に対し、 $T_{[p]}V_i \subset T_{[p]}\mathcal{M}_\Sigma$ 上で、 \mathcal{M}_Σ のシンプレクティック形式 ω は $\omega \equiv 0$ とする。

つまり V_1, V_2 はシンプレクティック多様体 \mathcal{M}_Σ の Lagrangians となる。

一般に V_1 と V_2 は横断的に交わるとは限らぬ。又、 $V_1 \cap V_2$ は有限個とも限らぬ。しかし、ここでは簡単のために、 V_1 と V_2

は横断的に交わり、しかも $\gamma_1 \cap \gamma_2$ は有限個の点より成る場合を考える。



各点 $\alpha \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ 付、van-Kampen の定理により、 $\pi_1(M^j)$ の $SU(2)$ -表現の同値類と同一視される。

さて、 $\alpha, \beta \in \gamma_1 \cap \gamma_2$ をとる。 M_Σ にシンプレクティック構造 ω と compatible な概複素構造 J を与える。 ω と compatible とは、

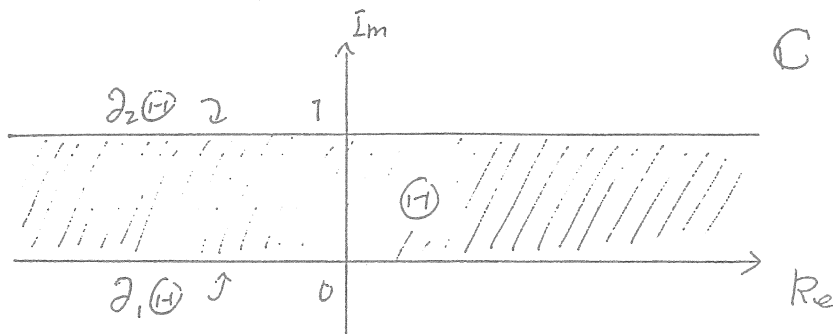
$$\omega(v, Jv) > 0 \quad \forall v \in TM_\Sigma$$

ということである。このような概複素構造は決

山ある。とくに、 Σ に一つ複素構造を入れる
と、それに伴って、 M_Σ に Kähler variety の構造を
入るとことが知られている。

$$\textcircled{1} = \{ z \in \mathbb{C} \mid 0 \leq \text{Im} z \leq 1 \}$$

とおく。



$\alpha, \beta \in V_1 \cap V_2$ を結ぶ pseudo-holomorphic
curve とし、写像

$$f: \textcircled{1} \longrightarrow M_\Sigma$$

次の条件を満たすものである

$$(i) \quad \begin{aligned} \partial_1 \textcircled{1} &= \{ z \in \textcircled{1} \mid \text{Im} z = 0 \} \\ \partial_2 \textcircled{1} &= \{ z \in \textcircled{1} \mid \text{Im} z = 1 \} \end{aligned} \quad (17)$$

$$f(\partial_1 \textcircled{1}) \subset V_1, \quad f(\partial_2 \textcircled{1}) \subset V_2$$

(ii) $z = t + is$ ($t, s \in \mathbb{R}$) とかいて

$$f(t + is) \longrightarrow \alpha \quad t \longrightarrow -\infty$$

$$f(t + is) \longrightarrow \beta \quad t \longrightarrow +\infty$$

(iii) 正則条件

$$\frac{\partial f}{\partial t} + J \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \quad (3)$$

(iv) エネルギー有限

$$\int_{\textcircled{H}} \left(\left| \frac{\partial f}{\partial t} \right|^2 + \left| \frac{\partial f}{\partial s} \right|^2 \right) < +\infty$$

(注. ω と J により M_2 には リーマン計量が与えらる)

(3) の条件は 丁寧に書くと.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + J(f(z)) \frac{\partial f}{\partial s} = 0$$

となり M_2 が 与えられた 多様体 であるため, 非線形 Cauchy-Riemann 方程式 と 与えられる.

pseudo-holomorphic curve の理論については [3]

[4] ... 等を参照されたい.

$$M^{\text{p.h.}}(\alpha, \beta) \equiv \left\{ \alpha \text{ と } \beta \text{ を 結ぶ pseudo-holomorphic curves の 集合} \right\}$$

とおく。本講では $M^{ph.}(\alpha, \beta)$ は $C=0$ -位相による位相空間と考える。

さて、いよいよ、Atiyah の問題に入る。 M^3 の基本群 $\pi_1(M)$ の $SU(2)$ -表現の同値類は、holonomy 表現による対応により $M^3 \times SU(2)$ 上の flat 接続のゲージ同値類と同一視される。4次元多様体 $M^3 \times \mathbb{R}$ 上の principal バンドル $M^3 \times \mathbb{R} \times SU(2)$ 上の接続 A に対する自己双対 Yang-Mills 方程式の解で、

$$(i) \quad \begin{aligned} A|_{M^3 \times \{t\}} &\longrightarrow \alpha & t \rightarrow -\infty \\ A|_{M^3 \times \{t\}} &\longrightarrow \beta & t \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$$(ii) \quad \int_{M \times \mathbb{R}} \|F_A\|^2 < +\infty$$

であるものを、 α と β を結ぶインスタントンとよぶ。

$$M^I(\alpha, \beta) = \left\{ \begin{array}{l} \alpha \text{ と } \beta \text{ を結ぶインスタントンの} \\ \text{ゲージ同値類} \end{array} \right\}$$

とおく。

問題 $M^{n,h}(\alpha, \beta)$ と $M^L(\alpha, \beta)$ を比較せよ。

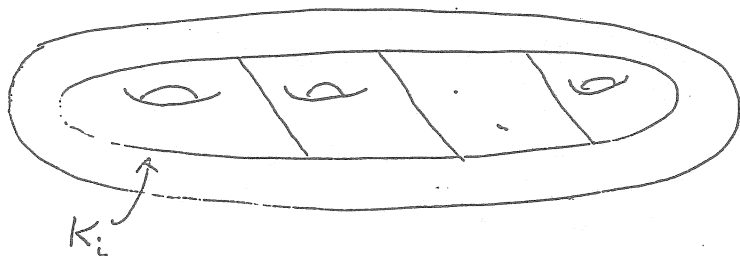
本来の Atiyah [2] の問題は Floer ホモロジーの言葉で述べられているが、ここでは上のような形で書いておく。

§3. M^3 状の退化

§2 で述べた問題を考えるために、以下のような M^3 状の退化を考え、問題に対する解答を与える。

$$M^3 = V_1 \cup V_2$$

を §2 で与えた Heegaard 分解とし、 V_1, V_2 に spine K_1, K_2 をとる。



K_1, K_2 は上図のような 1-complex である。

$M^3 - K_1 \cup K_2$ は $\Sigma \times (0, 1)$ と位相同型で

ある。 $M^3 - K_1 \cup K_2 \cong \Sigma \times (0, 1)$ と同一視して、 $(0, 1)$ の座標を s で与える。

M^3 上のリーマン計量 g_M で

$$g_M|_{\Sigma \times (0, 1)} = g_\Sigma^s + ds^2$$

となっているものを与える。ただし、 g_Σ^s は Σ のリーマン計量の 1パラメータ族である。このとき $\{g_\Sigma^s\}$ の共形類 $\{[g_\Sigma^s]\}$ は、 Σ 上の共形構造の 1パラメータ族となり、タイヒミュラー空間の中の curve とみなすことができる。

$M^3 \times \mathbb{R}$ のリーマン計量の $c > 0$ でパラメトライズされた 1パラメータ族を

$$c^2 g_\Sigma^s + ds^2 + dt^2 \quad (4)$$

(ただし t は \mathbb{R} の座標) と定め、対応するリーマン多様体を

$$M_c \times \mathbb{R}$$

とかく。このとき、自然に $M_c \times \mathbb{R}$ の $c \rightarrow 0$ での極限は §2 の (4) とみなしてよい。

我々は $C \rightarrow 0$ のときの $M_c^3 \times \mathbb{R}$ 上の自己双対 Yang-Mills 方程式の退化を調べるわけである。

このとき、(4) で与えたリーマン計量は Σ -成分が $0 < s < 1$ で変化するのので、§2 での pseudo holomorphic curve の定義を多少変更しなければならない。各 $0 < s < 1$ に対し、 g_s の共形類は Σ の複素構造を一意に定め、これは M_Σ の Kähler 構造を定める。この M_Σ 上の複素構造を J_s ($0 < s < 1$) とかく。§2 の pseudo holomorphic curve の定義において、(3) の式を

$$\frac{\partial f}{\partial t} + J_s \frac{\partial f}{\partial s} = 0 \quad (3)'$$

としたものを考える。このようにしても pseudo-holomorphic curve のモジュライ空間は同様に考えられる。

$\alpha, \beta \in \mathcal{K}_1 \cap \mathcal{K}_2$ に対し、上の意味での pseudo-holomorphic curve を J_s -curve とよび、 $s=1$ とし、 J_s -curve の集合を $M^{p.h.}(\alpha, \beta)$ とかくことにする。

又、 $c > 0$ に対し、 $M_c^J \times \mathbb{R} \times SU(2)$ 上のインスタントンで $c \rightarrow \pm\infty$ において α, β に収束する曲率の L^2 -ノルム有限なもの全体の集合を $M_c^I(\alpha, \beta)$ とおくことにする。

十分小さい $c > 0$ に対し $M^{p.h.}(\alpha, \beta)$ と $M_c^I(\alpha, \beta)$ を比較するのであるが、ここで $M^{p.h.}(\alpha, \beta)$ に次の条件をおく。

(正則性条件) 任意の J_c -curve $f \in M^{p.h.}(\alpha, \beta)$ に対し、tangent sheaf TM_Σ の引き上げ $f^*TM_\Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ は有界かつ L^2 -ノルム有限な anti-holomorphic 切断 s で $s(\partial: \mathbb{C}) \subset f^*TV_\Sigma$ となるものをもちろしい。

この条件のもとで次の定理を得る。

定理 (正則性条件) のもとで

$$M^{p.h.}(\alpha, \beta) \simeq M_c^I(\alpha, \beta)$$

が十分小さい c に対して $c > 0$ に対し成り立つ。

(注) 上記(正則性条件)は generic なリーマン計量 $\{g_t\}$ に対して成り立っていると思われそうだが、目下考察中である。

文献

- [1] Ablowitz - Clarkson : Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering ; London Math. Soc. L.N. Ser. 149
- [2] Atiyah, M.F. : New invariants of three and four dimensional manifolds ; Proc. Symp. Pure Math. 48 (1988)
- [3] Floer, A ; Morse theory for Lagrangian Intersections, J. Diff. Geom. 28 (1988) 513 - 547
- [4] Gromov, M. ; Pseudo-holomorphic curves in symplectic manifolds, Invent. Math 82 (1985), 307 - 347
- [5] Yoshida, T ; Floer homology and splittings of Manifolds, Ann. of Math 134 (1991) 277 - 323
- [6] Yoshida, T ; Floer homology and pseudo-holomorphic curves in representation spaces of surface groups, in preparation

楕円曲面の微分同相類と関連話題

上 正明

京都大学教養部数学教室

コンパクト複素曲面 S がリーマン面上への複素解析的射影 $\pi: S \rightarrow B$ で一般ファイバー (π の正則値の逆像) が非特異楕円曲線 (実 2 次元トーラス T^2) となるものを許容するとき, 楕円曲面 (elliptic surface) という. 楕円曲面は, 複素構造を忘れて 4 次元多様体と見た場合も 4 次元でしか起こらない微妙な現象を具現している. 例えばある種の楕円曲面は次の問に対する肯定的な解答を与える.

問題 1. 無限個の微分構造を持つ向き付けられた 4 次元閉多様体は存在するか?

問題 2. 与えられたコンパクトな複素曲面と同相だが, それ自身は複素曲面と微分同相でない 4 次元多様体が無数個存在するか?

以下この周辺の話について述べたい.

§1. 楕円曲面に関する定理

以下楕円曲面としては極小のもの (どのファイバーも第 1 種例外曲線を含まないもの) だけ考えると, 次のいずれかに分類される (以下常に微分同相なものは同一視するものとする). ただし b_i は i 次ベッチ数, e はオイラー数である.

- (1) $e > 0$ この時常に b_1 は偶数
- (2) $e = 0$ $\begin{cases} b_1 \equiv 0 \pmod{2} & (\text{超楕円曲面, トーラス etc.}) \\ b_1 \equiv 1 \pmod{2} & (\text{小平曲面, Hopf 曲面 etc.}) \end{cases}$

一般ファイバー以外の楕円曲面のファイバーを特異ファイバーという (そのタイプは小平により分類されている) が, 上記 (2) となるのは, 特異ファイバーとして多重トーラス (後述) しか含まないとき, (1) はそれ以外のときで, この時 $e = 12\chi(0)$ である (以下タイプ (1) のときは $k = \chi(0)$)

とかくことにする)。またタイプ(1)のとき全空間 S の基本群 $\pi_1 S$ は底空間 B を orbifold とみなしたときの基本群に等しい。 $\pi_1 S$ が有限群になるものは(1)のなかにしかない。

ちなみに b_1 が偶数のコンパクト複素曲面 (これらはすべて代数曲面に微分同相である) について次のことが知られている。

FACT 1. 楕円曲面以外の代数曲面は、位相型を固定すると高々有限個。

実際に2個以上になる例が沢山ある (Moisezon, Ebeling, Salvetti, Kotschick etc.)。また後述の Friedman-Morgan その他の定理によれば楕円曲面を除くことは不可欠である。また、楕円曲面に関しては

FACT 2 [M], [U1]. 2つの楕円曲面は、基本群が有限巡回群でなければ、同相なら微分同相である。

ところが基本群が有限巡回群のときは事情はまったく異なる。それを述べるために記号を準備する。

定義1. 楕円曲面 $\pi : S \rightarrow B$ のファイバー $F = \pi^{-1}(p)$ は p の円板近傍 Δ を十分小さくとると、 $\pi : \pi^{-1}(\Delta) \rightarrow \Delta$ が2次元円板 D^2 の原点中心の $2\pi/m$ 回転 σ を使って次の形に表されるとき、重複度 m の多重トーラスという。

$$\pi : (D^2 \times T^2) / Z_m \rightarrow D^2 / \sigma$$

ただし Z_m の生成元 σ の作用は σ の持ち上げで、 T^2 成分上はある方向への平行移動として働き π は自然な射影 $D^2 \times T^2 \rightarrow D^2$ から引き起こされる (F は $(\{0\} \times T^2) / Z_m$ に相当する)。

実際には多重トーラス以外の多重ファイバーもあるが、これは変形によりなくすることができる (Moisezon) のでこれ以後は考えない。

定義2. オイラー数 $12k$ ($k > 0$) の楕円曲面で、底曲面が種数0、即ち $\pi : S \rightarrow S^2$ なる射影を持ち、かつ多重ファイバーを持たないものを S_k とあらわす。この π は底空間の持ち上げ Σ を許容する。全空間 S_k は単連結で、その微分同相類は k のみで一意的に決まる (Kas, Moisezon)。

一般に多重ファイバーを持つ楕円曲面は、同じ底空間、同じオイラー数を持ち、多重ファイバーを持たない楕円曲面に有限回の "対数変換"

(logarithmic transformation) を行うことで得られる. ここでは複素構造を無視して対数変換を "Dehn 手術" として記述しよう.

定義 3. 楕円曲面 $\pi: S \rightarrow B$ に対し, その一般ファイバー f の近傍 $N(f) \cong D^2 \times T^2$ を S から抜いて, $D^2 \times T^2$ を新しく次のように張り付ける.

$$S' = (S - N(f)) \cup_{\varphi} D^2 \times T^2$$

ただし $\varphi: \partial D^2 \times T^2 \rightarrow \partial(S - N(f))$ は微分同相写像で, 同一視 $\partial(S - N(f)) \cong S^1 \times S^1 \times S^1$ を $q = S^1 \times * \times *$ が $\pi|_{\partial(S - N(f))}$ の持ち上げ, $* \times S^1 \times S^1$ が一般ファイバーに一致するよう指定したとき, $\ell = * \times S^1 \times *$, $h = * \times * \times S^1$ に対して $\varphi(\partial D^2 \times *)$ が $m q + a \ell + b h$ ($\gcd(m, a, b) = 1$) であらわされる閉曲線に一致するようなものである. もし $e(S) > 0$ ならば S' の微分同相類は S と m だけで決まる (φ, a, b によらない). この操作を "重複度 m の対数変換" とよび $m \geq 1$ ならば S' も B 上へのある射影 π' によって再び楕円曲面となる. このとき $\{0\} \times T^2 \subset D^2 \times T^2$ は π' に関する重複度 m の多重トーラスとなる.

定義 4. S_k に重複度それぞれ m_i ($i = 1, \dots, t$) の対数変換を行って得られる多様体を $S_k(m_1, \dots, m_t)$ とおく. この微分同相類は k, m_i ($i = 1, \dots, t$) を指定すれば一意的に定まる. (たとえば $m_1 = 1$ ならば $S_k(m_1, \dots, m_t) \cong S_k(m_2, \dots, m_t)$ である). また k, m_i は任意にとれることを注意しておく.

すると基本群が有限巡回群になるのは次のものに限る.

$$S = S_k(p, q) \quad (p, q \geq 1), \quad \pi_1 S = \mathbb{Z} / \gcd(p, q) \mathbb{Z}$$

THEOREM [FM1,2]. $k \geq 2$ のとき, $S_k(p, q)$ と $S_k(p', q')$ が微分同相なら $pq = p'q'$.

楕円曲面の微分同相類の完全な分類はまだなされていないが, この定理は同相類の分類との間に無限のひらきがあることを示している (問題 1 に対する肯定的例).

基本群が有限巡回群の場合の同相類の分類は次の Hambleton-Kreck の結果による.

THEOREM [HK]. 向き付けられた 4 次元閉多様体 X で $\pi_1 X = \mathbb{Z} / \mathbb{Z}_r$ となるものの同相類は, $H_2(X, \mathbb{Z}) / \text{Tor}$ 上の交点形式 q_X と Kirby-Siebenmann

不変量 $KS(X) \in \mathbb{Z}_2$ (および r が偶数のときはこれに加えて w_2 タイプと呼ばれるもの) で決まる.

PROPOSITION. $S_k(p_1, p_2)$ と $S_{k'}(p'_1, p'_2)$ が同相になる必要十分条件は $k = k'$, $\gcd(p_1, p_2) = \gcd(p'_1, p'_2)$ ($= r$ とおく), かつ

- (1) r, k とともに奇数 または
- (2) それ以外するとき $(p_1 + p_2)/r \equiv (p'_1 + p'_2)/r \pmod{2}$

となることである.

なお $S_k(p, q)$ ($\gcd(p, q) = 1$) の交点形式は次の直和分解を持つ.

$$qS_k(p, q) = kE_8^- \oplus (2k - 2)U \oplus U'$$

ここで E_8^- は階数 8, 負定値でタイプ II のユニモジュラーな 2 次形式, U, U' はそれぞれ次の行列で表される 2 次形式

$$U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad U' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -(pq)^2 k - (p+q)^2 \end{pmatrix}$$

この直和分解に対応して $S_k(p, q)$ はなめらかにうめこまれた Brieskorn ホモロジー 3 球面で分割できる ($[G], [U2]$). 特に U' に対応する (これを交点形式とする) 分割の切片 $N_k(p, q)$ は $\partial N_k(p, q) = -\Sigma(2, 3, 6k - 1)$ かつ多重ファイバーをすべて含むようにとれ, $[G]$ では楕円曲面の "nucleus" と呼ばれている.

一方問題 2 については Gompf-Mrowka [GM] は次のことを示した.

定理 [GM]. S_2 (これは $K3$ 曲面) と同相だが, 複素曲面とは微分同相でない 4 次元多様体が無限個存在する (実際は複素曲面の連結和と微分同相でないものが作れる).

彼らの例は次の予想の最初の反例を与えた.

予想 (THOM). 任意の単連結な可微分 4 次元閉多様体は有限個の複素曲面 (向きを変えてもよい) および S^4 の連結和と微分同相であろう

別の楕円曲面については次のことがいえる.

定理 [U2]. S を基本群 $\pi_1 S$ が有限で, $k = e(S)/12 \geq 2$ なる楕円曲面とする. ただし基本群が巡回群のときは, さらにその位数 r と k もともに奇数と

仮定する. このとき次の性質を持つ 4 次元可微分多様体 S_i^* , ($i = 1, 2, \dots$) が可算無限個存在する. 以下 \cong は向きを保って微分同相, $-X$ は X の向きを変えたものを意味する.

- (1) S_i^* は S と同相.
- (2) $i \neq j$ ならば $S_i^* \not\cong \pm S_j^*$.
- (3) すべての i について $S_i^* \not\cong \pm$ 複素曲面.
- (4) すべての i について, S_i^* の普遍被覆 \tilde{S}_i^* が $\tilde{S}_i^* \cong M \parallel N$ の形に書けるなら M または N はホモトピー 4 球面.

系 1. 任意の奇数 $k \geq 3$ に対し, S_k と同相だが, 複素曲面 (向きを変えてもよい) の連結和に微分同相でない多様体が無限個存在する.

一方楕円曲面 S の基本群が巡回群でない有限群になるのは次の場合にかぎる. このとき $\pi_1 S$ は $SO(3)$ の有限部分群である.

$$S = S_k(p, q, r) \quad p, q, r \geq 2, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

また逆に $SO(3)$ の任意の有限部分群は楕円曲面の基本群となれる. 従って上記の定理と Friedman-Morgan の定理より

系 2. $SO(3)$ の任意の有限部分群 G に対し, $\pi_1 X = G$ なる向き付けられた 4 次元閉多様体で, 無限個の微分構造をもつものがある.

なお Hambleton-Kreck [HK] は基本群が有限で, $k = e(S)/12 \geq 2$ なる楕円曲面 S と同相な 4 次元可微分閉多様体 X で, その普遍被覆 \tilde{X} が $\tilde{X} \cong X_1 \parallel X_2$ ($b_+(X_1) > 0, b_+(X_2) > 0$) となるものが存在することを示した (Donaldson の定理によりこの X は複素曲面に微分同相ではない).

§2. DONALDSON 不変量について

§1 の例において, 微分同相類はすべて "Donaldson 不変量" によって判別されるのでまず Donaldson 不変量の大きさばな定義を述べる. X を向き付けられた 4 次元可微分閉多様体で, $b_+ X = 1 + 2p > 1$ とする ($b_+ X$ は X の交点形式 q_X の正の固有値の数). (さしあたり X は単連結とするが, 後述の $w_2 P$ が消えないときはたとえば $\pi_1 X$ が奇数位数の巡回群でもよい.) $\pi: P \rightarrow X$ を X 上の $SO(3)$ 主バンドルとするとその同型類は $w_2(P) \in H^2(X, \mathbb{Z}_2)$ と $p_1(P) \in H^4(X, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ で決まる. ただし $w_2(P)$

の任意の $H^2(X, \mathbb{Z})$ への持ち上げ c に対して $p_1 \equiv c^2 \pmod{4}$ である。逆にこれをみたす w_2, p_1 はある $SO(3)$ バンドル $P \rightarrow X$ で実現できる。 X のリーマン計量 g をとって,

$$B_g(X, P) = \{P \text{ 上の接続} \} / \text{Aut } P$$

$$M_g(X, P) = \{A \in B_g(X, P) \mid A \text{ は反自己相対 (ASD) 接続} \} / \text{Aut } P$$

とおくと ($M_g = M_g(X, P)$ を ASD 接続のモジュライ空間と呼ぶ) Freed-Uhlenbeck の定理により一般の g に対しては, M_g はなめらかな多様体の構造をもち (特に M_g は可約な接続を含まず), その次元は

$$2d = -2p_1 - 3(1 + b_+ X) = 2(-p_1 - 3(p+1))$$

($w_2(P) = 0$ のときは P は $SU(2)$ バンドルに持ち上がり, M_g はそこでの ASD 接続のモジュライ空間とみなせる。) また M_g の各成分に一斉に向きが入る (正確には w_2 の持ち上げ c の取りかたと $H_+(X)$ の向きによる)。このときある写像 $\mu: H_2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(B_g, \mathbb{Z})$ があって次数 d の Donaldson (多項式) 不変量

$\gamma_{X, w_2}^d: S^d(H_2(X, \mathbb{Z})) \rightarrow \mathbb{Z}$ が次のように定義される ([DK]).

$$\gamma_{X, w_2}^d(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = \langle \mu(\alpha_1) \cup \dots \cup \mu(\alpha_d), [M_g] \rangle \quad (\alpha_i \in H_2(X, \mathbb{Z}))$$

(本当は各空間を完備化したり, M_g のコンパクト化を考えねばならない。) これは $b_+ > 1$ なら g のとりかたによらない。特に $d = 0$ となるときを simple invariant という ([DK])。このときは

$$C_X = \{ \eta \in H^2(X, \mathbb{Z}_2) \mid \eta \neq 0, \quad \eta \cdot \eta \equiv -3(p+1) \pmod{4} \}$$

とおくと SO_3 バンドル $P \rightarrow X$ で, $w_2(P) = \eta \in C_X, p_1(P) = -3(p+1)$ なるものと一般の計量 g に対して, $M_g(X, P)$ は有限個の点 (± 1 の符号つき) で, $\gamma_X(\eta) = \gamma_{X, \eta}^0 = \#M_g(X, P) \in \mathbb{Z}$ (代数和) によって $\gamma_X: C_X \rightarrow \mathbb{Z}$ が定義される。すると X と微分同相な多様体 X' と向きを保つ微分同相写像 $\varphi: X \rightarrow X'$ に対して

$$\gamma_X(\varphi^*(\eta')) = \pm \gamma_{X'}(\eta').$$

符号±はφが引き起こすモジュライ空間の間の写像がそれぞれの向きを保つか逆にするかによって決める。

特に X が代数曲面で、 $c \in H^2(X, \mathbb{Z}) \cap H^{1,1}$ なる $w_2(P)$ の持ち上げがあるとき、 g をその Hodge 計量、 L を対応する Ample 直線束とすると、 $M_g(X, P)$ は X 上の階数 2 の L -安定正則ベクトル束で、 $c_1 = c$, $c_2 = (c^2 - p_1(P))/4$ なるもののモジュライ空間と同一視され ($H_1(X, \mathbb{Z}_2) = 0$ のとき) 代数幾何的な計算にのせることが原理的に可能である (実際この場合以外はほとんど具体的に計算されていない)。ここで一般に Hodge 計量は "generic" でないが (M_g は特異点をもちうる) もし M_g のすべての成分が指数定理からきまる次元 ($2d$) をもっていれば、それぞれが complex space として "multiplicity" の分だけ γ_{X, w_2}^d に寄与する。Friedman-Morgan は $S_k(p, q)$ の $w_2 = 0$ の場合の次数の高い Donaldson 多項式不変量のある係数を決定して上記の定理を証明した ([FM1, 2])。 $S_k(p, q)$ の次数 0 の不変量 ($w_2 \neq 0$) に関する情報は次節でとりあげる。

§3. 定理の例の構成と SIMPLE INVARIANT の評価

以下定理 [U2] の例 S_k^* を $S = S_k$ (k は 3 以上の奇数) となる場合に限って構成する (他の場合も同様)。まず S_k から一般ファイバーの近傍 $N(f)$ を抜いたものを

$$S_k^0 = S_k - \text{int}N(f)$$

とおく。すると S_k は S_1^0 と S_{k-1}^0 のファイバー和 $S_k = S_1^0 \cup S_{k-1}^0$ の形に書け、射影 $\pi : S_k \rightarrow S^2$ は $\pi|_{S_1^0} : S_1^0 \rightarrow D^2$ と $\pi|_{S_{k-1}^0} : S_{k-1}^0 \rightarrow D^2$ の和に分解する。 ∂S_1^0 と ∂S_{k-1}^0 はともにこの π に付随する cross section $q = S^1 \times * \times *$ 、一般ファイバー内のループ $l = * \times S^1 \times *$ 、 $h = * \times * \times S^1$ で張られるような framing $\cong S^1 \times S^1 \times S^1$ を持つ。そこでこの 3 つの S^1 -成分を巡回置換で写す (したがってファイバー構造を保たない) 微分同相写像 $\sigma : \partial S_{k-1}^0 \rightarrow \partial S_1^0$ でねじってはりなおしたものを

$$S_k^\sigma = S_1^0 \cup_\sigma S_{k-1}^0$$

とおくと σ が引き起こす ∂S_1^0 の微分同相写像は S_1^0 全体のそれに拡張する (Matumoto) ことから、 $S_k^\sigma \cong S_k$ 。この微分同相写像により S_k の cross section Σ は $\Sigma^* \subset S_k^\sigma$ にうつる。さらに S_1^0 内の 2 つの一般ファイバーで重複度 p, q の対数変換を施したものを $S_1^0(p, q)$ とおき

$$S_k^\sigma(p, q) = S_1^0(p, q) \cup_\sigma S_{k-1}^0$$

と定義する (Σ^* は $S_k^\sigma(p, q)$ にも多重ファイバーと交わらないように入っている). この $S_k^\sigma(p, q)$ は前述の "nucleus" $N_2(p, q)$ を $S_1^0(p, q)$ 内の多重トーラスを内部に持つように含んでおり ($k \geq 2$ が必要) Freedman の定理から次のことがいえる.

PROPOSITION. 下の条件 (*) のもとで $S_k^\sigma(p, q)$ は S_k と同相.

$$(*) \quad \gcd(p, q) = 1, \quad p \equiv q \equiv 1 \pmod{2}$$

このような $S_k^\sigma(p, q)$ の中から求めるべき S_k^* を見いだすためにこれらの simple invariant (次数 0 の Donaldson 不変量) を, S_k の invariant の評価 (Donaldson [DK], 亀谷-佐藤 [KS]), $S_k \cong S_k^\sigma$ なる事実, および対数変換前と後の多様体の simple invariant の関係を与える Gompf-Mrowka の定理 ([GK]) を使って評価する ([KS] でこれらの中に互いに微分同相でないものが無限個あることが示されている). $k=2$ となる場合とその他の場合で事情は異なるので, それを比較して述べる. まず S_k の一般ファイバー f , cross section Σ に対して, $\eta_0 = PD_2(\Sigma - (k-2)f)$ とおくと $\eta_0 \in C_{S_k}$ ([KS] 定義は §2) である (PD_2 は Poincare 双対 mod 2). $S_k \cong S_k^\sigma$ を経由すると, $\eta_0^* = PD_2(\Sigma^* - (k-2)f) \in C_{S_k^\sigma}$ となる.

(I) $k=2$ の場合 (S_2 は K 3 曲面)

- (1) $\gamma_{S_2}(\eta_0) = 1$ ([DK], [KS]).
- (2) $\text{Diff } S_2$ は C_{S_2} 上に推移的に作用する ([Mt]).
- (3) 任意の $\eta \in C_{S_2}$ に対して $\gamma_{S_2}(\eta) = 1$. 従って任意の $\eta^* \in C_{S_2^\sigma}$ に対して $\gamma_{S_2^\sigma}(\eta^*) = 1$.
- (4) $\max_{\eta \in C_{S_2^\sigma(p, q)}} |\gamma_{S_2^\sigma(p, q)}(\eta)| = pq$ ([GM], ただし $\gcd(p, q) = 1$)

実は $S_2^\sigma(p, q) \cong S_2(p, q)$ であり, $\max_{\eta \in C_{S_2(p, q)}} |\gamma_{S_2(p, q)}(\eta)| = pq$ となり, Friedman-Morgan の結果を再現できる (このため S_2 と同相だが複素曲面と微分同相でないものを作るためにはもっと余分に (S_{k-1}^0 の方でも) 対数変換しなくてはならない [GK]).

(II) $k \geq 3$ かつ k が奇数の場合.

- (1) $\gamma_{S_k}(\eta_0) \neq 0$ ([KS]). この値の絶対値を γ_0 とおく.
- (2) $\text{Diff } S_k$ は C_{S_k} 上に推移的に作用する ([U2]).

(3) 任意の $\eta \in C_{S_k}$ について $\gamma_{S_k}(\eta) = \pm\gamma_0$ (任意の $\eta^* \in C_{S_k^*}$ についても $\gamma_{S_k^*}(\eta^*) = \pm\gamma_0$) .

(4) $\max_{\eta \in C_{S_k^*}(p,q)} |\gamma_{S_k^*}(p,q)(\eta)| = pq\gamma_0$ ([GM] の公式から).

ところが k が奇数のときは $S_k^*(p,q)$ は $S_k(p',q')$ とは一般に微分同相でない. これは次の事実による.

PROPOSITION [U2]. $S = S_k(p,q)$ ($\gcd(p,q) = 1, k \equiv 1 \pmod{2}$) に対して,

$$\gamma_S(\eta) = \begin{cases} \pm\gamma_0 & p \equiv q \equiv 1 \pmod{2} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

従ってこのときは Friedman-Morgan の結果は次数 0 の不変量だけでは再現されない. 一方 $k > 2$ で k が偶数のとき, 上のステップ (1) は (II) と同様になりつつ ([KS]) が, (2) はただしくない. 実際 C_{S_k} の部分集合 $C_{S_k}^i$ を

$$\begin{aligned} C_{S_k}^1 &= \{\eta \in C_{S_k} \mid \eta \cdot PD_2 f \neq 0\} \\ C_{S_k}^0 &= \{\eta \in C_{S_k} \mid \eta \cdot PD_2 f = 0\} \end{aligned}$$

と定めると, k が偶数のときはどちらも空でなく, $k > 2$ なら $C_{S_k}^0$ の元は $C_{S_k}^1$ の元に微分同相でうつり合わない ($k=2$ のときだけはうつる. また k が奇数なら $C_{S_k}^0 = \emptyset$). このため $k > 2$ なる偶数のときの simple invariant の評価は未定である.

いずれにせよ k が奇数のときは simple invariant の絶対値の取りうる最大値を比較することで $S_k^*(p,q)$ のなかから S_k^* の候補がとれる. これらが定理 [U2] の (3), (4) をみたすことを示すにはさらに, simple invariant の連結和公式 ([K], [GM]), 複素曲面の Enriques-Kodaira の分類, Miyaoka-Yau 不等式などが必要である.

最後に §1 で述べた楕円曲面の Brieskorn ホモロジー球面による分割に関して, その切片の (Instanton Homology を係数にもつ) 双対的 Donaldson 不変量の部分的評価が Ebeling-Okonek [EO] により (Fintushel-Stern, Friedman-Morgan の結果を経由して) なされていることを付け加えておく.

REFERENCES

- [DK] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer, "The Geometry of Four Manifolds," Oxford Math. Monographs, Oxford, 1990.
- [EO] W. Ebeling, C. Okonek, *Donaldson invariants, monodromy groups and singularities*, International J. of Math. 1 (1990), 233-250.
- [FM1] R. Friedman, J. Morgan, *Complex versus differentiable classification of algebraic surfaces*, Topology and its appl. 32 (1989), 135-139.
- [FM2] _____, "Smooth four-manifolds and complex surfaces" (to appear).
- [G] R. Gompf, *Nuclei of Elliptic surfaces*, Topology 30 (1991), 479-512.
- [GM] R. Gompf, T. S. Mrowka, *Irreducible Four Manifolds need not be complex*, (1991), preprint.
- [HK] I. Hambleton, M. Kreck, *Cancellation, elliptic surfaces and the topology of certain four-manifolds*, MPI preprint, (1991).
- [K] D. Kotschick, *$SO(3)$ -invariants for 4-manifolds with $b_2^+ = 1$* , Proc. London Math. Soc. (3) 63 (1991), 426-448.
- [KS] Y. Kametani, Y. Sato, *0-dimensional moduli spaces of stable rank 2 bundles and differentiable structures on regular elliptic surfaces*, preprint, (1991).
- [M] Y. Matsumoto, *Diffeomorphism types of elliptic surfaces*, Topology 25 (1986), 549-564.
- [Mt] T. Matsumoto, *On Diffeomorphisms of a K3 surface*, in "Algebraic and Topological Theories—to the memory of T. Miyata," Kikokuniya, 1985, pp. 616-621.
- [U1] M. Ue, *On the diffeomorphism types of elliptic surfaces with multiple fibers*, Invent. Math. 84 (1986), 633-643.
- [U2] _____, *A remark on the simple invariants for elliptic surfaces and their exotic structures not coming from complex surfaces*, preprint (1991).

§0. はじめに

3-sphere S^3 内にあるグラフ（空間グラフと呼ぶ）の位相的研究は knot theory の自然な拡張の一つと考えられ、最近化学や分子生物学との関連もあって注目されるようになってきた。knot の分岐被覆（branched covering）は knot の位相的性質を調べる上で有用な概念であり、また三次元多様体論とも結びついて発展してきたが、ここでは空間グラフに拡張し、特に θ -curve の branched covering について論じてみたい。

§1. 空間グラフ

ここでは、空間グラフについてのいくつかの概念を紹介する。

二つの空間グラフが互いに ambient isotopic になるとき、これらは equivalent であるという。 S^3 内のある平面上にあるグラフ（平面グラフ）と equivalent なグラフは trivial であるという。そこで S^3 に埋めこまれるグラフとしてはいろいろなものがあるが、一番簡単なものとして θ_n -curve がある。これは二つの頂点を n 個の辺で結んでできるグラフ（ $K_{2,n}$ グラフ）で、 $n=2$ のときは simple loop であり、 $n=3$ のときは単に θ -curve という。空間グラフ L にたいし、 L 上の任意の simple loop は S^3 内で knot をつくるが、このような knot を L の constituent knot という。また、いくつかの交わらない constituent knot の和を L の constituent link という。 θ -curve の上には三つの simple loop があるので、 S^3 内の θ -curve は三つの constituent knot をもつ。これら三つの constituent knot がいずれも trivial なら、もとの θ -curve も trivial か？という問が自然にできるが、この問にたいする答は否定的である（Figure 1 の樹下の θ -curve が例の一つ）。この例は θ_n -curve にも拡張され、 S^3 内に、そのすべての部

分 θ_{n-1} -curve は trivial だが，それ自身は trivial でない θ_n -curve が存在することがいえる．このように平面的グラフ（平面上に埋め込み可能なグラフ）と同型なグラフ L が S^3 内にあり，それ自身は trivial でないが L から任意の一つの辺を取り除いた部分グラフが trivial であるとき， L は almost trivial であるという．端点および孤立点のないすべての平面的グラフに対し，それと同型な almost trivial グラフが S^3 内に存在することが Kawauchi [8] によって示された．また almost trivial θ -curve についての詳細な研究が Wolcott [16] にある．一方 L と L の mirror image が equivalent でないとき， L は chiral であるという．空間グラフの chirality についての研究は Simon [15] などを参照されたい．

Figure 1

空間グラフ L に対して， $G = \pi_1(S^3 - L)$ を L の群と呼ぶ． L の群は L の topological invariant であるが，trivial でないグラフの群が trivial になることも起こり得る． θ -curve について言えば，Figure 2 の rational θ -curve や Figure 3 の pseudo-rational θ -curve の群は trivial である（これらの θ -curve については [3] を参照されたい）． Σ_n を n 次の対称群とし， μ を G の Σ_n への transitive な表現とする． μ を monodromy map と呼ぶ．この時， $S^3 - L$ の n -fold unbranched covering と G の Σ_n への monodromy map の同値類は 1 対 1 に対応することが知られている（Fox [2]）．本稿では $S^3 - L$ の unbranched covering の各々に付随した branched covering を考察することにする．これは monodromy map μ に付随したものであり， $\widetilde{M}_\mu(L)$ で表す（ L の n -fold branched covering という）． $S^3 - L$ の unbranched covering の基本群が G において normal であるとき covering は regular であるといい，そうでないとき irregular であるという． L が knot や link でない一般の空間グラフであるとき， $\widetilde{M}_\mu(L)$ は closed 3-manifold にならない場合がある（頂点のまわりの S^2 の lift が S^2 にならない場合である）．また Alexander [1] は任意の closed 3-manifold がある空間グラフの branched covering であることを示している．

Figure 2

Figure 3

§2. knot の 分岐被覆

この § は, [6], [5] を基にしたものである. [6] は神戸大学内田氏との共同研究である.

Hilden [7] と Montesinos [11] は任意の closed 3-manifold がある knot の 3-fold irregular branched covering であることを示した. そこで, これを拡張して knot group G の p 次の dihedral group への表現 (knot の D_p 表現) とそれに付随した knot の D_p -branched covering を考える. ここで p は奇素数とする. knot K に対して, $\widetilde{M}_2(K)$ を K の 2-fold branched covering とし, ν を $H_1(\widetilde{M}_2(K); Z_p)$ の rank とする.

定理 2.1 K の D_p 表現の同値類は $(p^\nu - 1)/(p - 1)$ で与えられる.

$\Delta_K(t)$ を K の Alexander 多項式とする.

系 2.2 K の D_p 表現が存在するための必要十分条件は $\Delta_K(-1) \equiv 0 \pmod p$ である.

今まで知られていることとして, K が 2-bridge knot $S(\alpha, \beta)$ なら, K の D_p 表現が存在するための必要十分条件は $\alpha \equiv 0 \pmod p$ であり, もし存在すれば $\widetilde{M}_\mu(K)$ は S^3 と同相になる. そこで bridge 数が 3 以上の knot の branched covering を考える. そのため Montesinos knot に着目する. Figure 4 で表される knot を Montesinos knot と呼び,

$$M(e; (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_r, \beta_r))$$

で表す. ただし (α_i, β_i) は rational tangle の Schubert 表示である. 今 $p = 5$ とする (p が他の奇素数の場合も同様の議論が可能). ν' を $\alpha_i \equiv 0 \pmod 5$ となる i の個数とする.

Figure 4

定理 2.3 K を Montesinos knot とする.

- (1) もし $\nu' = 0$ で K の D_5 表現が存在するなら, D_5 表現の同値類は一つで, 付随する D_5 -branched covering は S^3 と同相.
- (2) もし $\nu' = 1$ なら K の D_5 表現は存在しない.
- (3) もし $\nu' \geq 2$ なら K の D_5 表現の同値類は $(5^{\nu'-1} - 1)/4$ で与えられ, 付随した D_5 -branched covering は $L(p_i, q_i) \# L(p_i, q_i)$ または これらの空間の connected sum と同相. ただし, $(p_i, q_i) = (\alpha_j, \beta_j), 1 \leq j \leq r, (0, 1), (1, 1)$.

ρ_μ を $H_1(\widetilde{M}_\mu(K); Z_5)$ の rank とする.

系 2.4 もし Montesinos knot K が D_5 表現 μ を持てば

$$\rho_\mu = 2(\nu - 1).$$

かつて作間氏は次の定理が成り立つことを筆者に教示された.

定理 2.5 もし knot K が D_3 表現 μ を持てば

$$H_1(\widetilde{M}_\mu(K); Z_3) \oplus Z_3 \cong H_1(\widetilde{M}_2(K); Z_3).$$

この定理を受けて筆者は次の予想を立てた.

予想 もし knot K が D_5 表現 μ を持てば

$$H_1(\widetilde{M}_\mu(K); Z_5) \oplus Z_5 \cong H_1(\widetilde{M}_2(K); Z_5).$$

もし系 2.4 において $\nu \geq 2$ とすると, 予想の反例を与えることになる. しかし系 2.4 は Montesinos knot でない一般の knot (例えば $9_{40}, 9_{49}, 10_{103}, 10_{155}$ など) に対しては成立しない.

一方, G の 4 次の交代群 A_4 (正四面体群) への onto な表現とそれに付随した branched covering を考える. $\widetilde{M}_3(K)$ を K の 3-fold cyclic branched covering とし, β を $H_1(\widetilde{M}_3(K); Z_2)$ の rank とする.

定理 2.6 K の A_4 表現の同値類は $(2^\beta - 1)/3$ で与えられる.

系 2.7 K の A_4 表現が存在するための必要十分条件は $\Delta_K(\omega)\Delta_K(\omega^2) \equiv 0 \pmod{4}$ である. ただし ω は 1 の原始 3 乗根である.

さらに, K が 2-bridge knot でしかも A_4 表現 μ を持つならば, $\widetilde{M}_\mu(K)$ はあるレンズ空間と同相であることも得られる.

§3. θ -curve の分岐被覆

この § は, [4], [5] を基にしたものである.

L で S^3 内の θ -curve を表すことにし, L の頂点を v_1, v_2 , 辺を e_1, e_2, e_3 で表す. ここで L は v_1 から v_2 へ向きづけられているとする. L の群 G の表示は L の Wirtinger presentation を用いることで得られる. すなわち, G の generator の集合は L の diagram の overpass に対応する. $\{x_1, \dots, x_l\}, \{y_1, \dots, y_m\}, \{z_1, \dots, z_n\}$ をそれぞれ e_1, e_2, e_3 の overpass に対応する generator とする. そのとき, 例えば Figure 5 (i) で表される v_1 に対応する G の relator は $x_1 y_1 z_1$ であり, Figure 5 (ii) で表される L の crossing に対応する G の relator は $x_i y_j x_i^{-1} y_k^{-1}$ である. G の relator の数は $l + m + n - 1$ である. G の一つの relator は他の relator から得られるので, この表示の deficiency は 2 となる.

Figure 5

まず, G の Σ_3 への表現を考える. もしこの表現が onto なら, covering は irregular であり, しかも付随する branched covering (L の 3-fold irregular branched covering) は常に closed 3-manifold となる. 以下 onto

な表現のみを考える。 μ に対する条件として次の三つの場合がある。

$$(1) \quad \begin{cases} \mu(x_i) \in \{(12), (13), (23)\}, & i = 1, \dots, \ell, \\ \mu(y_j) \in \{(12), (13), (23)\}, & j = 1, \dots, m, \\ \mu(z_k) \in \{e, (123), (132)\}, & k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} \mu(x_i) \in \{(12), (13), (23)\}, & i = 1, \dots, \ell, \\ \mu(y_j) \in \{e, (123), (132)\}, & j = 1, \dots, m, \\ \mu(z_k) \in \{(12), (13), (23)\}, & k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

$$(3) \quad \begin{cases} \mu(x_i) \in \{e, (123), (132)\}, & i = 1, \dots, \ell, \\ \mu(y_j) \in \{(12), (13), (23)\}, & j = 1, \dots, m, \\ \mu(z_k) \in \{(12), (13), (23)\}, & k = 1, \dots, n. \end{cases}$$

これらはすべて同様に考えられるので (1) を仮定する。すると、連立方程式を解くことにより次の結果を得る。

定理 3.1 (1) を満たす L の Σ_3 表現の同値類は少なくとも一つある。

従って (1), (2), (3) を合わせて少なくとも計三つの L の Σ_3 表現の同値類が存在することになる。

L の Σ_3 表現 μ に付随した L の 3-fold irregular branched covering $\tilde{M}_\mu(L)$ についてはいくつかの結果を得ているが、ここではその代表的なものを一つ述べることにする。Figure 1 の樹下の θ -curve に対して、その 3-fold irregular branched covering は、その辺の対称性より三つのレンズ空間 $L(5, 2)$ が得られる。一方、Figure 6 の θ -curve に対して、その 3-fold irregular branched covering は、辺の対称性より $S^3, L(\overset{S^3}{7}, 2), L(7, 2)$ である。従ってこれらのことから、Figure 1 と Figure 6 の θ -curve はともに trivial でなく、しかもこれらは互いに equivalent でないことがわかる。chirality について言えば、Figure 6 の θ -curve は chiral であることがわかるが、Figure 1 の θ -curve は判定できない。

Figure 6

次に、 G の A_4 への onto な表現を考える。この表現に付随した covering は irregular である。この表現は二種類に分かれる。 A_4 の 12 個の元を次の三つの集合に分ける。

$$A = \{1, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$$

$$B = \{(123), (134), (243), (142)\}$$

$$C = \{(132), (234), (124), (143)\}$$

この時、もし A_4 表現 μ に対して $\mu(x_1), \mu(y_1), \mu(z_1)$ がすべて B に属するか、すべて C に属す時、 μ を pure A_4 表現と呼ぶ。また、 $\mu(x_1), \mu(y_1), \mu(z_1)$ がそれぞれ A, B, C の異なる一つに属す時、mixed A_4 表現と呼ぶ。ここでは pure な表現のみを考えることにする。 Σ_3 表現の場合と同様に連立方程式を解くことにより次の結果を得る。

定理 3.2 L の pure A_4 表現の同値類は少なくとも一つある。

Σ_3 表現と異なり、pure A_4 表現に付随した pure A_4 -branched covering は closed 3-manifold にならない場合がある。例えば前述の例で言えば、樹下の θ -curve に対しては五つの pure A_4 表現の同値類が存在するが、そのうちの一つに付随した branched covering は closed 3-manifold にならない。残りの四つの pure A_4 表現に付随した branched covering は三つの $P^3 \# (S^2 \times S^1)$ と prism manifold $M_{1,-2}$ である。この結果より樹下の θ -curve が chiral であることがわかる。ちなみに Figure 6 の θ -curve の pure A_4 -branched covering は $L(5, 4)$ である。

今までの 2 つの例はともに irregular branched covering であったが、Nakao [13] は G の $Z_2 \oplus Z_2$ への onto な表現に付随した $Z_2 \oplus Z_2$ branched covering を調べ（この covering は regular である）、次の結果を得ている。

定理 3.3 L の $Z_2 \oplus Z_2$ 表現 μ に対して

$$H_1(\widetilde{M}_\mu(L)) \cong \bigoplus_{i=1}^3 H_1(\widetilde{M}_2(K_i)).$$

ただし K_i は L の constituent knot.

§4. その他の空間グラフの分岐被覆

この §では θ -curve 以外の空間グラフの branched covering についての最近の結果を簡単に紹介する. 詳しい内容については, それぞれの文献を参照されたい.

まず Kinoshita [9] は θ_4 -curve の群の Σ_3 への onto な表現に付随した 3-fold irregular branched covering を調べた. この場合は θ -curve の時と異なり, branched covering として得られる空間が closed 3-manifold にならない場合がある. ここでは branched covering が closed 3-manifold になる場合に限定して, Wolcott の almost trivial θ -curve を拡張した Pretzel θ_4 -curve の branched covering を調べている.

また Nakao [14] は K_4 -graph の群の $Z_2 \oplus Z_2$ への onto な表現に付随した $Z_2 \oplus Z_2$ branched covering を調べた. そして $Z_2 \oplus Z_2$ branched covering の homology group について θ -curve の場合に類似した結果を得ている.

Naka [12] は θ_n -curve の群の Z_n への onto な表現に付随した n -fold cyclic branched covering を調べた. この場合, 頂点のまわりで S^2 をとり, その lift を調べると genus $(n-1)(n-2)/2$ の orientable surface である. 従って, $n \geq 3$ の時 branched covering は closed 3-manifold でない. ここでは, Litherland [10] が定義した θ_n -curve の topological invariant との関係が示されている.

参考文献

- [1] J. W. Alexander, *Note on Riemann spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 26 (1920), 370–372.
- [2] R. H. Fox, *A quick trip through knot theory*, in “Topology of 3-manifolds and related topics (ed. by M. K. Fort Jr.),” Prentice–Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1962, 120–167.
- [3] T. Harikae, *On rational and pseudo-rational θ -curves in the 3-sphere*, Kobe J. Math., 7 (1990), 125–138.
- [4] T. Harikae, *Three-fold irregular branched coverings of some spatial graphs*, Osaka J. Math., 28 (1991), 639–648.
- [5] T. Harikae, *Tetrahedral branched coverings of spatial theta-curves*, preprint, 1991.
- [6] T. Harikae and Y. Uchida, *Irregular dihedral branched coverings of knots*, preprint, 1992.
- [7] H. M. Hilden, *Every closed orientable 3-manifold is a 3-fold branched covering space of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 1243–1244.
- [8] A. Kawauchi, *Almost identical imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs*, Osaka J. Math., 26 (1989), 743–758.
- [9] S. Kinoshita, *On 3-fold irregular branched coverings of θ_4 -curves in a 3-sphere*, in “Knots, Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Related Topics (ed. by A. Kawauchi),” Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1991 (to appear).
- [10] R. Litherland, *The Alexander module of a knotted theta-curve*, Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 106 (1989), 95–106.

- [11] J. M. Montesinos, *A representation of closed, orientable 3-manifolds as 3-fold branched coverings of S^3* , Bull. Amer. Math. Soc., 80 (1974), 845–846.
- [12] H. Naka, *On n -fold cyclic branched coverings of spatial θ_n -curves* (in Japanese), Master Thesis, Kwansai Gakuin Univ., 1991.
- [13] M. Nakao, *On the $Z_2 \oplus Z_2$ branched coverings of spatial θ -curves*, Kobe J. Math. (to appear).
- [14] M. Nakao, *On the $Z_2 \oplus Z_2$ branched coverings of spatial K_4 -graphs*, in “Knots, Proceedings of the International Conference on Knot Theory and Related Topics (ed. by A. Kawauchi),” Walter de Gruyter & Co., Berlin–New York, 1991 (to appear).
- [15] J. Simon, *Topological chirality of certain molecules*, Topology, 25 (1986), 229–235.
- [16] K. Wolcott, *The knotting of theta curves and other graphs in S^3* , in “Geometry and Topology (ed. by C. McCrory and T. Shifrin),” Marcel Dekker, New York, 1987, 325–346.

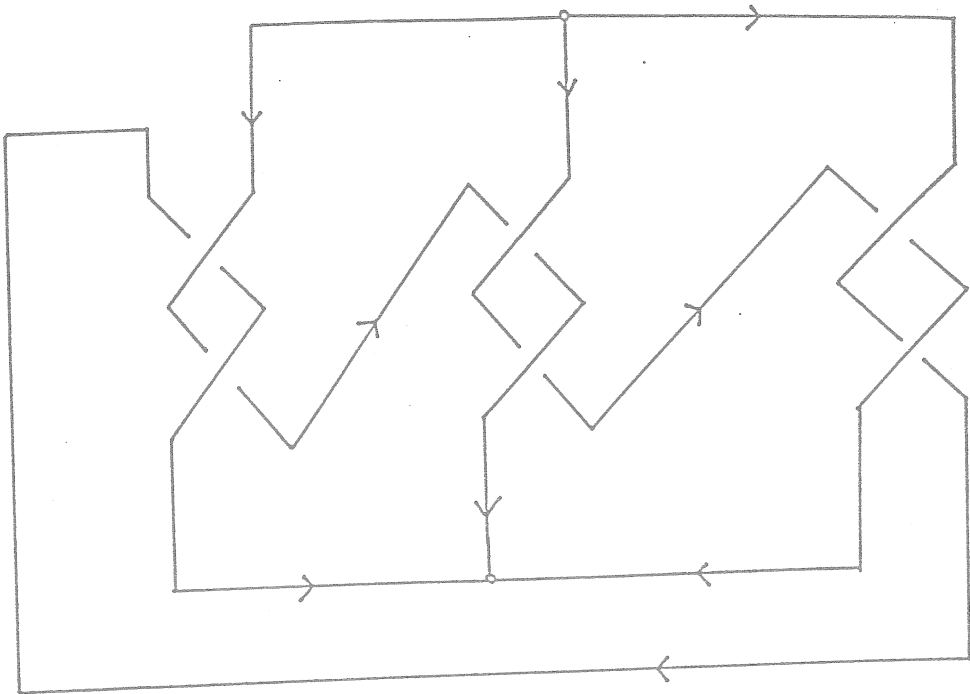
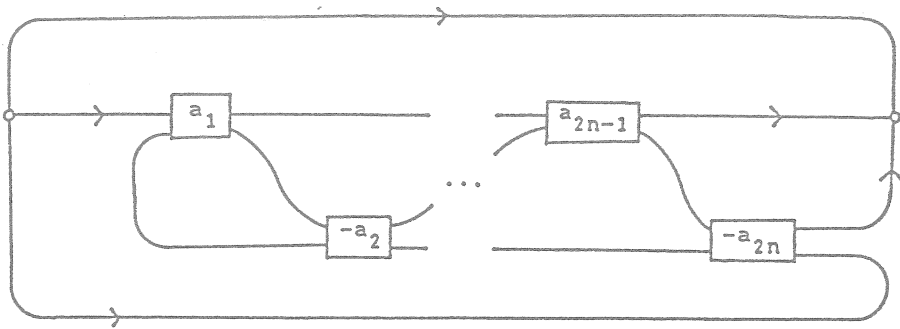


Figure 1



=



b-right hand half twists

Figure 2

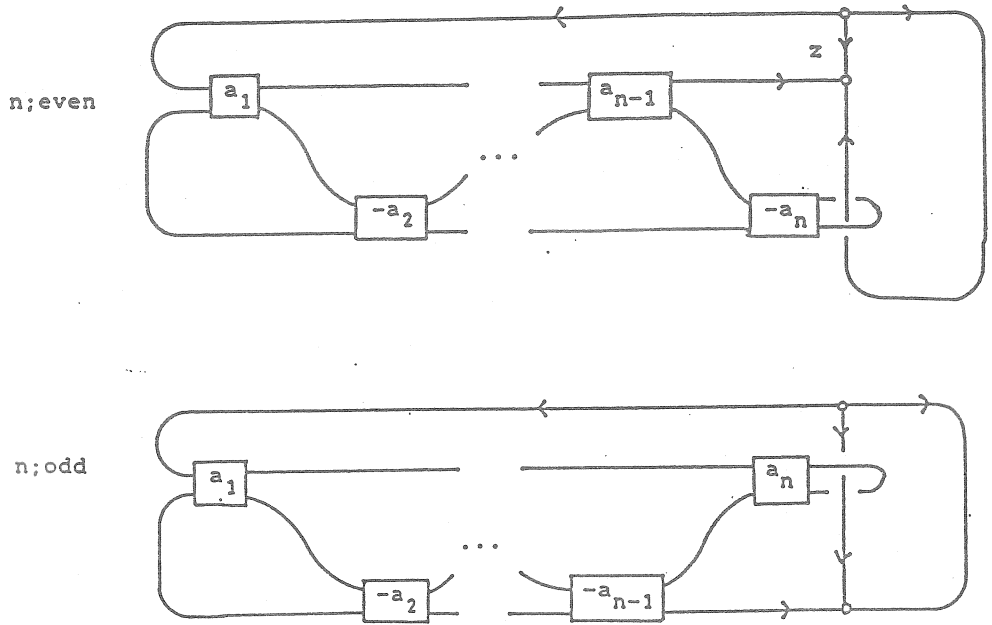
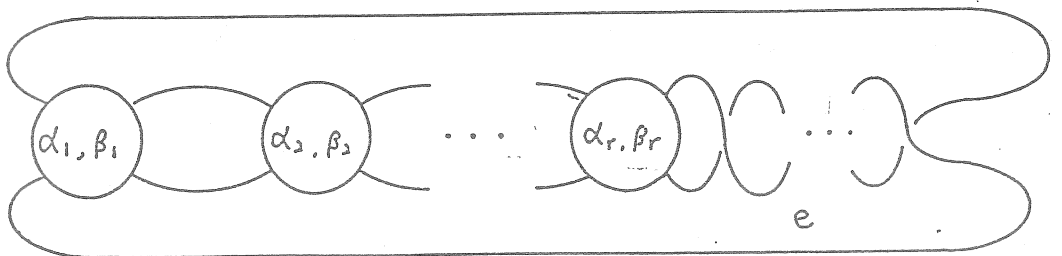
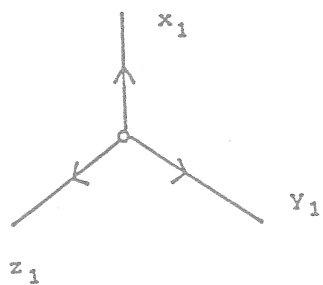
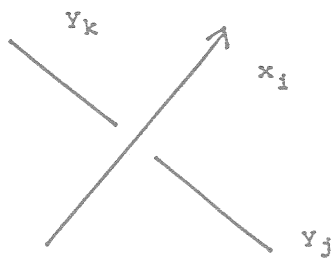


Figure 3



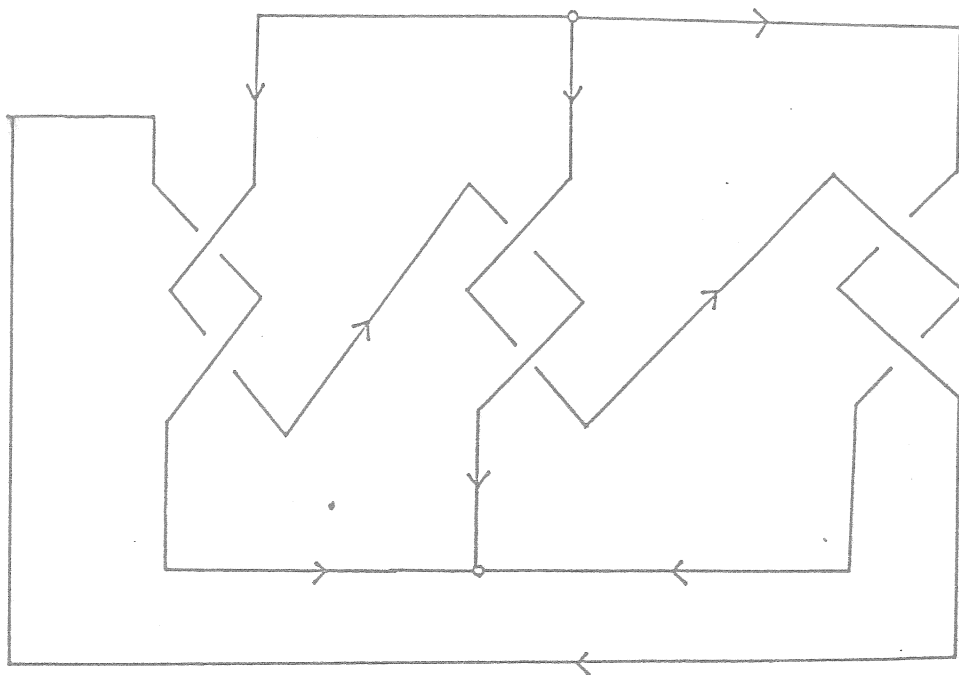


(i)



(ii)

Figure 5



125 Figure 6

代数的K理論と変換群

島川和久 岡山大学理学部

はじめに

(代数的) 同変K理論は1960年代終わりに Wall-Fröhlich [3, 12] がモノイド圏に対して定義し、その後、1980年代はじめに Dress-Kuku [1] および Fiedorowicz-Hauschild-May [2] がそれぞれ完全圏および環に対する定義を与えた。講演者は [7] において、Fröhlich-Wall 理論は一般同変コホモロジー理論(の係数対象)として構成できることを示し、さらに [8] で Dress-Kuku 理論および Fiedorowicz-Hauschild-May 理論は共に Fröhlich-Wall 理論の特別の場合と見なせることを示した。本講演では、[7], [8] および、その続編 [9] の主要な結果と若干の応用について解説する。

同変K理論の定義

まず、同変K理論の定義の概略を述べよう。

Fröhlich-Wall 理論 群 G の各元がモノイド関手として作用するモノイド圏 C を G モノイド圏と呼ぶ。 EG を G の translation category、すなわち $\text{obj } EG = G$ 、 $\text{mor } EG = G \times G$ で、 G 作用が

$$g(m, x) = (m, xg^{-1}), \quad (m, x) : x \rightarrow mx \in \text{mor } EG$$

で与えられるものとし、 EG から C への同変関手と自然変換のなすモノイド圏 $\text{Cat}_G(EG, C)$ を考える。 C の G 作用が自明であれば $\text{Cat}_G(EG, C) = \text{Rep}(G, C)$ は G の C における表現の圏に他ならない。Fröhlich-Wall [3, 12] は C の同変K群を $\text{Cat}_G(EG, C)$ の(直和に関する) K群として定義した。

G の各部分群 H に対し、

$$K_*^{\text{FW}}C(G/H) = K_*\text{Cat}_H(EH, C)$$

とおくと、部分群の列 $K < H$ に対し、自然な準同型

$$\begin{aligned} \text{res}_K^H &: K_*^{\text{FW}}C(G/H) \rightarrow K_*^{\text{FW}}C(G/K) \\ \text{ind}_K^H &: K_*^{\text{FW}}C(G/K) \rightarrow K_*^{\text{FW}}C(G/H) \end{aligned}$$

が定義され、対応 $K_*^{\text{FW}}C : G/H \mapsto K_*^{\text{FW}}C(G/H)$ は Mackey 関手となる。したがって、Fröhlich-Wall の同変K理論は G モノイド圏のカテゴリーから(次数付き) Mackey 関手のカテゴリーへの関手と見なすことが出来る。

Dress-Kuku 理論 Dress-Kuku [1] は完全圏 M の同変 K 理論を次のように定義した。任意の有限 G 集合 P に対し、その translation category を EP と書くと、函手圏 $\text{Cat}(EP, M)$ は自然に完全圏の構造を持つ。($P = G/H$ ならば、 $\text{Cat}(EP, M)$ は $\text{Rep}(H, M)$ に自然同値。) したがって、完全列に関する Quillen の K 群

$$K_*^{\text{DK}} M(P) = K_* \text{Cat}(EP, M) = \pi_{*+1} Q\text{Cat}(EP, M)$$

が定義される。Fröhlich-Wall の場合と同様、対応 $G/H \mapsto K_*^{\text{DK}} M(G/H)$ が Mackey 函手となることが示され、 K^{DK} 理論は完全圏のカテゴリリーから (次数付き) Mackey 函手のカテゴリリーへの函手となる。

Fiedorowicz-Hauschild-May 理論 単位元を持つ環 R および任意の整数 $n \geq 0$ に対し、 $(G, GL_n R)$ バンドルの分類空間を $B(G, GL_n R)$ で表す。(同変バンドルの分類空間の構成に関しては次節を参照されたい。) Fiedorowicz-Hauschild-May [2] は、 $B(G, GL_n R)$ の適当なモデルを選ぶと

$$GL(R, G) = \coprod_{n \geq 0} B(G, GL_n R)$$

が G ホモトピー可換な位相 G モノイド (積は Whitney sum) となることを示し、そのホモロジー論的群完備化 $\Omega BGL(R, G)$ の同変ホモトピー群として R の同変 K 理論を定義した。さらに、彼らは証明を与えてはいないが、 $\Omega BGL(R, G)$ が同変無限ループ空間の G ホモトピー型を持つことを主張した。したがって、対応

$$G/H \mapsto K_*^{\text{FHM}} R(G/H) = \pi_*^H \Omega BGL(R, G)$$

は、やはり Mackey 函手となる。

注 未刊ではあるが、西田氏も同様の方法で同変 K 理論を構成している。

主結果

G モノイド圏 C の同変 K 群は同変一般コホモロジー理論の係数対象として表される。すなわち

定理 1 任意の G モノイド圏 C に対し、 G スペクトラム $K_G C$ および Mackey 函手としての自然同型

$$\pi_*^H K_G C \cong K_*^{\text{FW}} C(G/H), \quad H < G$$

が存在する。

注 $K_*^{\text{FW}} C(G/H) \cong K_*(\text{Cat}(EG, C)^H)$ であるが、一般には G モノイド圏に対して、対応 $G/H \mapsto K_*(D^H)$ が Mackey 函手になるかどうかは判らない。

K^{FW} の構成と K^{DK} のそれとは形式的に似かよっており、互いに密接に関連していることが推測される。実際、次の定理 2 が証明される。(後半は '+ = Q' theorem [5] の同変版である。)

完全圏 M に対し、その同型射のなす部分圏を $\text{Iso}M$ と書く。 $\text{Iso}M$ および QM は共に M における直和に関してモノイド圏となる。

定理 2 $K_*^{DK}M$ は Mackey 関手として $K_{*+1}^{FW}QM$ に同型である。さらに自然変換

$$K_*^{FW}\text{Iso}M \rightarrow K_*^{DK}M$$

が存在し、 M の短完全列がすべて分裂するならば、これは自然同値となる。

一方、環 R 上の自由加群と同型射からなるモノイド圏を GLR で表し、 G は GLR に自明に作用するものとする、次が成り立つ。

定理 3 Mackey 関手としての自然同型

$$K_*^{FHM}R \cong K_*^{FW}GLR$$

が存在する。

この定理の証明 (および後述の応用) の鍵となるのは、次節で述べる同変普遍バンドルの構成である。

同変普遍バンドルの構成

いま A は位相群で、 G の A への作用が $\alpha: G \times A \rightarrow A$ で与えられているとする。つまり α は連続で、 $\alpha_g: a \mapsto \alpha(g, a)$ は位相群の同型である。

定義 4 (tom Dieck [11]) (G, α, A) バンドルとは A を構造群とする主バンドル $p: E \rightarrow B$ で次をみたすものである。

1. E, B は G 空間、 p は G 写像
2. $e \in E, g \in G, a \in A$ ならば $g(ea) = ge \cdot ga$

とくに G の A への作用が自明であれば、 G は E にバンドル写像として作用するが、このとき $p: E \rightarrow B$ を (G, A) バンドルと呼ぶ。

$p: EA \rightarrow BA$ を普遍バンドルとすると、 G は自動的にこれに作用している。

$$(EA, EA) = \bigcup_{a, b \in EA} \text{Hom}_A(p^{-1}(a), p^{-1}(b)) \cong (EA \times EA)/A$$

は BA 上のバンドルで、その (同変) 切断は (同変) バンドル写像と 1 対 1 に対応している。

$\mathcal{G}A$ を位相圏で、その対象全体 = BA で、射全体 = $\langle EA, EA \rangle \cong (EA \times EA)/A$,
 $\mathcal{S}A$ を位相圏で、その対象全体 = EA で、射全体 = $\langle EA, EA \rangle \times_{BA} EA \cong EA \times EA$
なるものとし、函手圏 $\text{Cat}(EG, \mathcal{S}A)$ に左 G 作用と右 A 作用をそれぞれ

$$(gf)(m, x) = g \cdot f(m, xg)$$

$$(fa)(x) = f(x) \cdot a$$

で与える。 $\text{Cat}(EG, \mathcal{G}A) = \text{Cat}(EG, \mathcal{S}A)/A$ であり、次が成り立つ。

定理 5 (村山・島川) 射影 $\mathcal{S}A \rightarrow \mathcal{P}A$ が誘導する函手

$$\text{Cat}(EG, \mathcal{S}A) \rightarrow \text{Cat}(EG, \mathcal{G}A)$$

の幾何学的実現は普遍 (G, α, A) バンドルである。

注 この定理は G がコンパクト Lie 群、あるいはもう少し一般的な位相群であっても成立する。

さて、環 R 上の有限生成自由加群と同型射からなるモノイド圏 GLR をとり、 G を自明に作用させよう。

$$\text{Cat}(EG, GLR) = \coprod_{n \geq 0} \text{Cat}(EG, GL_n R)$$

であり、各 $|\text{Cat}(EG, GL_n R)|$ は、定理 5 によって $(G, GL_n R)$ バンドルの分類空間となる。したがって、 $|\text{Cat}(EG, GLR)|$ は Fiedorowicz-Hauschild-May が定義した $GL(R, G)$ に同値であり、定理 3 が証明される。

応用と展望

同変手術理論への応用 Str_n で群 O_n 、 PL_n あるいは Top_n を表すことにする。定理 5 を Str_n に適用することにより、 (G, Str_n) バンドルの分類空間 $B(G, \text{Str}_n)$ が得られる。(局所線形な G 作用を考察対象とするときには $\text{Cat}(EG, \text{Str}_n)$ の代わりに、その充満部分圏 $B_G(\text{Str}_n, GL_n)$ をとる必要がある。詳細は [7] を見て戴きたい。) したがって $\text{Str} = \coprod_{n \geq 0} \text{Str}_n$ (G 作用は自明) とおくと、 $K_G \text{Str}$ は G 空間

$$B\text{Str}(G) = \Omega B \left(\coprod_{n \geq 0} B(G, \text{Str}_n) \right)$$

の同変無限デルーピングを与えることがわかる。構成の自然性より、還元写像 $B(G, O_n) \rightarrow B(G, PL_n) \rightarrow B(G, \text{Top}_n)$ は同変無限ループ空間の写像の列

$$BO(G) \rightarrow BPL(G) \rightarrow B\text{Top}(G)$$

を誘導することが直ちにわかる。さらに [9] の結果と併せて次の命題を得る。

定理 6 還元写像 $B(G, O_n) \rightarrow B(G, PL_n) \rightarrow B(G, \text{Top}_n) \rightarrow B(G, F_n)$ は同変無限ループ空間の写像の列

$$BO(G) \rightarrow BPL(G) \rightarrow B\text{Top}(G) \rightarrow BF(G)$$

を誘導する。ただし $B(G, F_n)$ は S^n をファイバーとする同変ファイブレーションの分類空間、 $BF(G)$ は G モノイド $\coprod_{n \geq 0} B(G, O_n)$ の群完備化を表す。

この定理の同変手術理論への応用に関しては [6] 等を見ていただきたい。

Lichtenbaum-Quillen 予想との関連 体 k_0 の有限次ガロワ拡大 k をとり、 G としてガロワ群 $\text{Gal}(k/k_0)$ をとる。 G は自然に $GLk = \coprod_{n \geq 0} GL_n k$ に作用するが、faithfully flat descent の理論によって、 H 不動点のなす圏 $\text{Cat}(EG, GLk)^H \simeq \text{Cat}_H(EH, GLk)$ の K 理論は中間体 k^H の K 理論に等しいことがわかる。すなわち

定理 7 G の各部分群 H に対して $K_*^{\text{FW}} GLk(G/H) = K_*(k^H)$ が成り立つ。

同変コホモロジー理論の係数として表されるということは、単に Mackey 函手になっているということより強力なことを述べている筈である。たとえば Carlsson [4] による Segal 予想の証明においては、 π_*^G が球面 G スペクトラムの同変ホモトピー群として与えられることが決定的な役割を果たしていたことを思い起こしていただきたい。(ちなみに、球面 G スペクトラムは有限集合の圏 Σ の同変 K スペクトラム $K_G \Sigma$ に同値である。)

Segal 予想に倣って、自然な写像

$$BGL(k^G) \simeq |\text{Cat}_G(EG, GLk)| \rightarrow \text{Map}_G(EG, BGLk)$$

が誘導するスペクトラムの写像

$$K(k_0) \rightarrow \text{Map}_G(EG, K(k))$$

を考えよう。これが、適当な完備化を施した上でホモトピー同値となるかどうか (Thomason [10] の用語に従えば homotopy limit 問題) が Lichtenbaum-Quillen 予想を解くための鍵であるが、定理 1 と Carlsson [4] の議論を用いることによって、homotopy limit 問題は G が基本アーベル群、ひいては巡回群の場合に帰着できることが示される。

なお Thomason [10] は Bott 要素の逆を形式的に付加すれば、Lichtenbaum-Quillen 予想は肯定的に解けることを証明している。

最後に、今後の課題として、定理 1 を G が一般の位相群、とくにコンパクト Lie 群あるいは profinite 群、の場合へ拡張する問題を挙げておこう。[7] で用いた方法はそのままでは一般化できないが、その代わりにどのような方法をとれば良いかは大体わかっている。

参考文献

- [1] A. Dress and A. O. Kuku. A convenient setting for equivariant higher algebraic K -theory. In R. Keith Dennis, editor, *Algebraic K-Theory*, pages 59–68, Springer-Verlag, 1982.
- [2] Z. Fiedorowicz, H. Hauschild, and J. P. May. Equivariant algebraic K -theory. In R. Keith Dennis, editor, *Algebraic K-Theory*, pages 23–80, Springer-Verlag, 1982.
- [3] A. Fröhlich and C. T. C. Wall. Foundations of equivariant algebraic K -theory. In R. M. F. Moss, editor, *Algebraic K-Theory and its Applications*, pages 12–27, Springer-Verlag, 1969.
- [4] G. Carlsson. Equivariant stable homotopy and Segal's Burnside ring conjecture. *Ann. Math.*, 120:189–224, 1984.
- [5] D. Grayson. Higher algebraic K -theory II (after D. Quillen). In M. R. Stein, editor, *Algebraic K-Theory, Evanston 1976*, pages 217–240, Springer-Verlag, 1977.
- [6] I. Madsen and M. Rothenberg. On the homotopy theory of equivariant automorphism groups. *Invent. Math.*, 94:623–637, 1988.
- [7] K. Shimakawa. Infinite loop G -spaces associated to monoidal G -graded categories. *Publ. RIMS, Kyoto Univ.*, 25:239–262, 1989.
- [8] K. Shimakawa. *Mackey Structures on Equivariant Algebraic K-Theory*. Preprint 662, RIMS, Kyoto University, 1989.
- [9] K. Shimakawa. *Mackey Systems of Monoidal Categories and G-Spectra*. Preprint 688, RIMS, Kyoto University, 1990.
- [10] R. W. Thomason. The homotopy limit problems. *Contemp. Math.*, 19:407–419, 1983.
- [11] T. tom Dieck. Faserbündel mit gruppenoperation. *Arch. Math.*, 20:136–143, 1969.
- [12] C. T. C. Wall. Equivariant algebraic K -theory. In G. Segal, editor, *New Developments in Topology*, pages 111–118, Cambridge University Press, 1974.

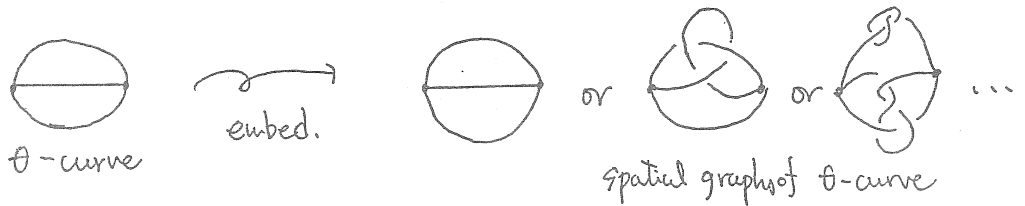
Topological Symmetry Group of Spatial Graphs

by ... , 鳥羽智佳子

30. spatial graph の概要

Knott theory が $S^1 \rightarrow S^3$ への embedding のある種の同値類の研究である様に、 S^1 の 1次元 CW複体 K に拡張したのが spatial graph になります。

例えば、

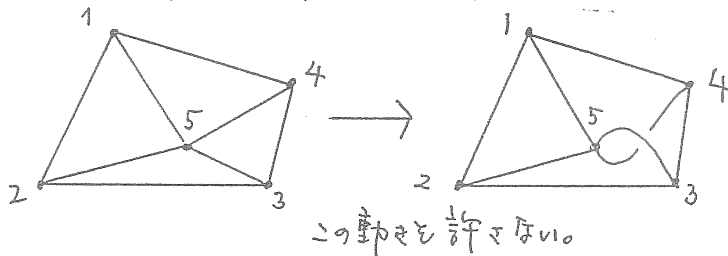


spatial graph は、

- 対象となる CW複体が無数個あり、全ての CW複体に通用する理論を作るのが難しい。
- また、適当な ambient isotopy invariant が見つからず、

唯一、flatly isotopy (平坦同位相) ambient isotopy より強い分類法として、一般のグラフに対して invariant とする Laurent polynomial (Axiomatic), Yamada Polynomial があります。

ie. flatly isotopy とは、大雑把に言うと、



乞山下中, 1991年6月に, J. Simon氏が春日の際, 東京女子大学で講演して下さった "Topological Symmetry Group" (通称TSG) について今回の記事をお話します。

Definition 0.1 (a graph)

graph: G とは,

$E(G)$: a set of edges

$V(G)$: a set of vertices の集合.

任意の edge e は, 2つの vertices v_i, v_j ($v_i = v_j$ とも可) が対応している。

等。

以後, graph G は finite とする (vertices数, edges数は有限個)

Definition 0.2 (spatial presentation)

G : a graph

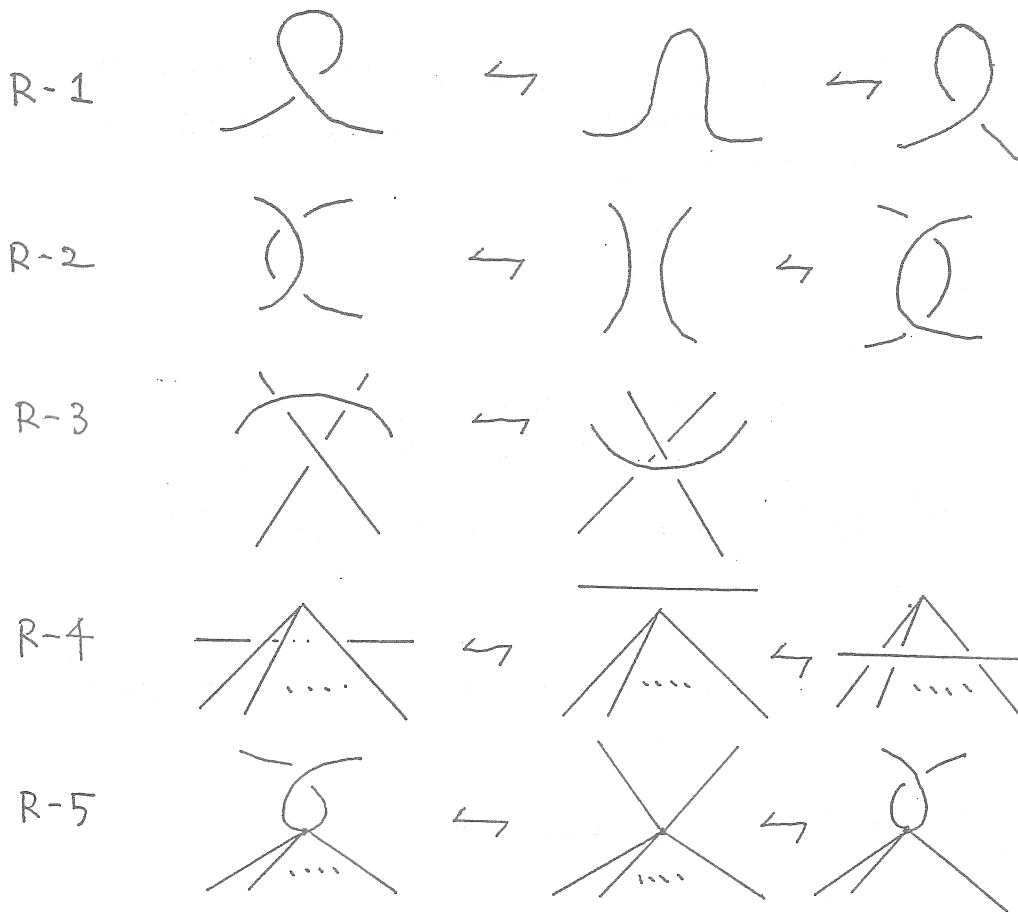
$f: G \rightarrow S^3$: embedding $\cup \text{VT} = \text{等}$.

$f(G) = \tilde{G}$ (in S^3) \cup , the spatial presentation of a graph G 又は, spatial graph of G とも。

(註) embedding は, PL-category, edgewise differentiable \cup , 仮定する。

ある, spatial presentations of G ; \tilde{G}_1, \tilde{G}_2 があり,
 $\tilde{G}_1 \approx \tilde{G}_2$ (ambient isotopy)
 であるならば, 次の事と同値である。

次を示す. S^3 の R -manifold \cup , 一方から他方へ移行可能。



§1. TSG

Definition 1.1 (TSG)

a graph G is n -complete, $\text{Aut}(G) = \{ \pi \mid \pi \text{ is } G \text{ automorphism} / \approx \}$

(注) K_n : n -complete graph $\Rightarrow \text{Aut}(G) = n$ -次对称群.

$\tilde{G} = f(G)$: a spatial presentation of G $\in \mathbb{R}^3 \neq \emptyset$.

$$TS_{G+}(\tilde{G}) = \{ \pi \in \text{Aut}(G) \mid \exists h: S^3 \rightarrow S^3 \text{ orientation preserving homeo} \\ \rightarrow f \circ \pi(G) = h \circ f(G) \}$$

$$TS_{G-}(\tilde{G}) = \{ \pi \in \text{Aut}(G) \mid \exists h: S^3 \rightarrow S^3 \text{ orientation reversing homeo} \\ \rightarrow f \circ \pi(G) = h \circ f(G) \}$$

Topological Symmetry Group of a spatial graph \tilde{G} is,

$$TS_G(\tilde{G}) \stackrel{\text{def.}}{=} TS_{G+}(\tilde{G}) \times \{0\} \cup TS_{G-}(\tilde{G}) \times \{1\}.$$

Remark

$TS_G(\tilde{G})$ is $\text{Aut}(\tilde{G}) \times \mathbb{Z}_2$ a subgroup is true.

Theorem 1.1

I $\forall G$ and $\forall \tilde{G}$ is true, \Rightarrow the following classification is possible.

$$(1) TS_{G+}(\tilde{G}) = TS_{G-}(\tilde{G}) \text{ or}$$

$$(2) TS_{G+}(\tilde{G}) \cap TS_{G-}(\tilde{G}) = \emptyset \text{ (} \Leftrightarrow TS_G(\tilde{G}) \text{ is } \text{Aut}(\tilde{G}) \text{ disjoint type)}$$

II $TS_G(\tilde{G})$ is (2) case, \Rightarrow 2 types classification is possible.

$$(i) TS_G(\tilde{G}) = TS_{G+}(\tilde{G})$$

$$(ii) |TS_G(\tilde{G}) : TS_{G+}(\tilde{G})| = 2$$

($\Leftrightarrow TS_{G+}(\tilde{G})$ and $TS_{G-}(\tilde{G})$ have same number of elements)

(proof)

I (i) 2つ目同様, $\pi \in TS_{G+}(\hat{G}) \cap TS_{G-}(\hat{G})$ 1つ目同様.

$$(\pi \times 0) \cdot (\pi \times 1)^{-1} = (\text{id} \times 1) \in TS_G(\hat{G})$$

$\forall \pi' \in TS_{G+}(G)$ 1つ目同様,

$$(\pi' \times 0) \cdot (\text{id} \times 1) = (\pi' \times 1) \in TS_{G-}(\hat{G}) \times \{1\}$$

$$\therefore TS_{G+}(\hat{G}) \subset TS_{G-}(\hat{G})$$

同様 1つ目同様,

$$TS_{G+}(G) \supset TS_{G-}(G)$$

例. (i) が成立する。

II (i) 2つ目同様, $TS_{G-}(\hat{G}) \neq \emptyset$.

$\pi, \pi' \in TS_{G-}(\hat{G})$ 1つ目同様,

$$(\pi \times 1) \cdot (\pi' \times 1) = (\pi \pi' \times 0) \in TS_{G+}(G) \times \{0\}$$

例.

$TS_G(\hat{G})$ は $TS_{G+}(\hat{G}) \times \{0\}$ 1つ目同様, 2つ目の剰余類に分かれる。

$$TS_G(\hat{G}) = \left(TS_{G+}(\hat{G}) \times \{0\} \right) + \pi \times 1 \cdot \left(TS_{G+}(\hat{G}) \times \{0\} \right)$$

例. (ii) が成立する。

これから non-planar graph (平面に埋め込み不可能なグラフ) 1つ目同様, TS_G の性質がわかる。

Proposition 1.1

G が non-planar なら, G の任意の spatial graph \hat{G} 1つ目同様, $TS_G(\hat{G})$ は $\text{Aut}(G)$ の部分群と同型 1つ目同様。

(proof)

G が non-planar なら, K_5 または $K_{3,3}$ を含む。(by Kuratowski's Th.)
1つ目同様, $K_5, K_{3,3}$ 1つ目同様. vertex index も含む, ambient isotopy invariant

これは Simov Invariant の定義から、 K_5 と $K_{3,3}$ の任意の spatial graph $\tilde{K}_5, \tilde{K}_{3,3}$ は vertex を preserve する amphichiral 2-グラフになる。

i.e. $(id \times 1) \in TS\mathcal{G}(\tilde{K}_5)$ $(id \times 1) \in TS\mathcal{G}(\tilde{K}_{3,3})$
 したがって Theorem 1.1(2) の $\gamma = \pi$ に相当する。

Theorem 1.2

$\tilde{K}_5, \tilde{K}_{3,3}$ を含む $K_5, K_{3,3}$ の standard Spatial Graph とする。

この時

$$TS\mathcal{G}(\tilde{K}_5) = \text{Aut}(K_5) = \Sigma_5 \quad (5\text{-dim. symmetry group})$$

$$TS\mathcal{G}(\tilde{K}_{3,3}) = \text{Aut}(K_{3,3}) = \Sigma_2 [\Sigma_3] \quad (\Sigma_2 \cup \Sigma_3 \text{ の composition})$$

group ALBJ (A, B は含む X, Y に作用する群) とする。

集合 $X \times Y$ は \mathbb{R}^n 上で作用する。

$\forall a \in A$ と \forall a sequence b_1, \dots, b_d ($d=|X|, b_i \in B$) に対して

$(a; b_1, \dots, b_d) \in \text{ALBJ}$ として、 $(a; b_1, \dots, b_d)(x, y) = (ax, b_i y_i)$ とする。

Note ALBJ の order は $|A||B|^d$

証明を行う前には standard spatial graph の定義を確認する。

Definition 1.2

S^3 内には a book $B_n = \bigcup_{i=1}^n P_i'$ と呼ばれるものを置く。

where as

$$P_i' = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z=0, y \geq 0\}$$

$$P_i = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{matrix} x_i = x, y_i = y \cos \theta - z \sin \theta, z_i = y \sin \theta + z \cos \theta \\ (x, y, z) \in P_i' \text{ and } \theta = 2(i-1)\pi/n \end{matrix} \}$$

Σ_i : a binder of $B_n = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = z = 0\}$ とし、

$P_i = P_i' - \Sigma_i$: i -th sheet of B_n

と置く。

この時、a book presentation 以下、Hamilton graph (全ての vertex を通る simple path が graph 上に存在するグラフ graph) に関する問題は次の3つの条件を満たす。 $B_n(CS^3)$ の埋め込みの事である。

$\psi: G \rightarrow B_n = \text{embedding}$ がある時。

(1) $\psi(\text{Hamilton path of } G) \subset \Sigma \subset B_n$
 (\Rightarrow Hamilton path 以下 G の全ての vertex を通る G 上の simple path の事。

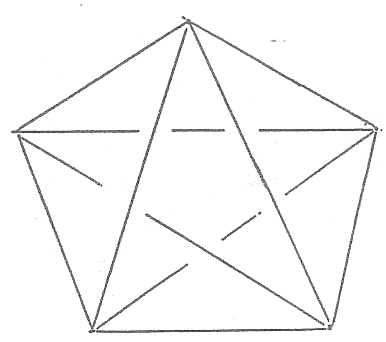
(2) $\forall e \in E(G) - \Sigma$ に対して、 $\psi(\text{Int}(e)) \subset P_i$ for some P_i

(3) $\forall P_i$ に対して、少なくとも1つの $e \in E(G)$ が $\psi(\text{Int}(e)) \subset P_i$ となる。

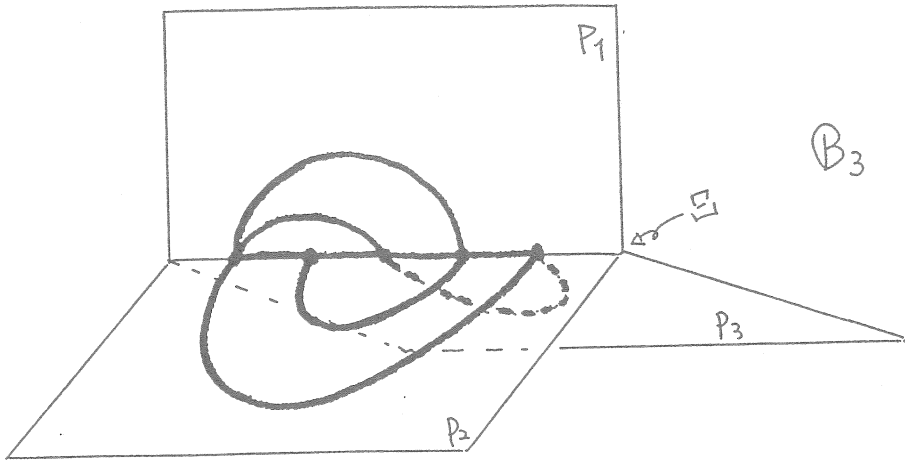
\Rightarrow $\tilde{G} = \psi(G)$ は、book presentation of G である。 spatial presentation of G , \tilde{G} が G の book presentation と ambient isotopy になる時、 $\Rightarrow \tilde{G}$ は book presentation である。

また、 G の book の埋め込みを、sheet 数が最小になる時 \Rightarrow 埋め込み \tilde{G} は G の ambient isotopy による spatial presentation である。 G の standard spatial presentation である。

例



standard spatial K_5



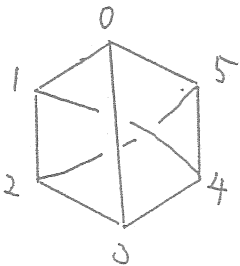
a book presentation of K_5 (= standard)

(proof of Th. 1.2)

- K_5 に関しては、去年、東京の修士課程で卒業した吉松さんが示した。
- $K_{3,3}$ について。 $K_{3,3}$ は non planar 図形、 $TSG(K_{3,3}) \subset \text{Aut}(K_{3,3})$
 また、全ての $K_{3,3}$ の standard spatial presentation は ambient isotopic である。 ある $K_{3,3}$ について、 $\text{Aut}(K_{3,3})$ の generator を $TSG(\hat{K}_{3,3})$ に入ること、実際、 \mathbb{R}^3 での実現について。

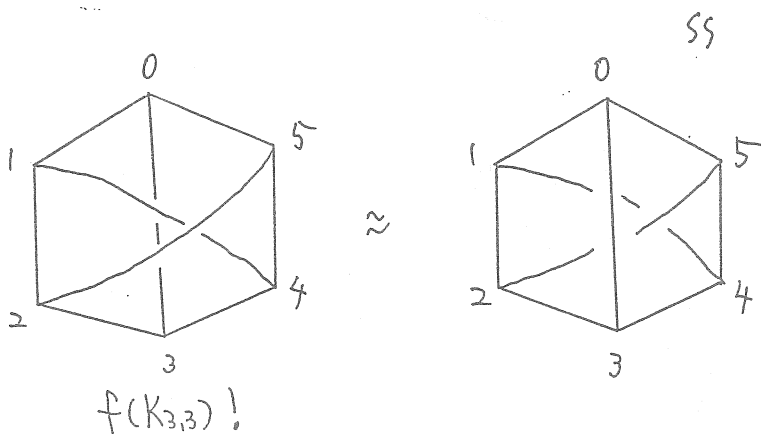
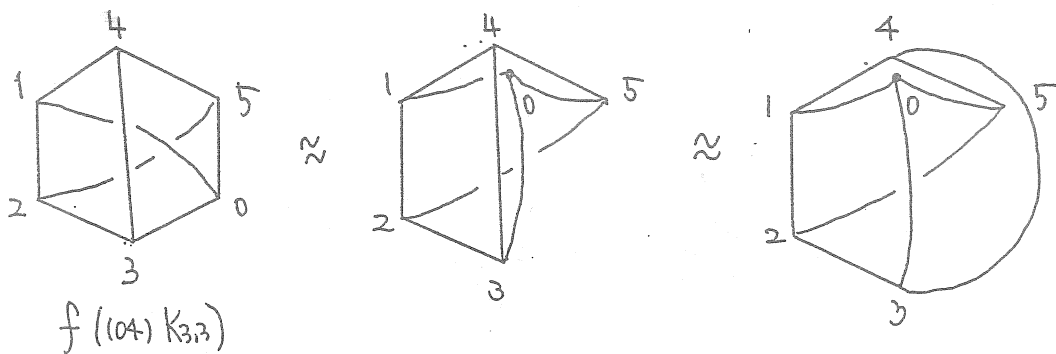
$$\text{Aut}(K_{3,3}) = \langle (02), (04), (13), (15), (01)(23)(45) \rangle \subset \Sigma_6$$

例



$$\text{standard } K_{3,3} : \hat{K}_{3,3} \cong \hat{K}_{3,3}$$

$$\text{" } f(K_{3,3})$$



$$f(104) K_{3,3} \approx f(K_{3,3})! \text{ (1)}. \quad (104) \in \text{TS}_G(\tilde{K}_{3,3})$$

Theorem 1.3

$f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$: a spatial presentation of G

$\tilde{G} = f(G) \subset \mathbb{R}^3$. 2011.

\exists G 2 disjoint sets of disjoint cycles $\{C_1, \dots, C_p\}, \{C'_1, \dots, C'_q\}$ and

$\exists \tau \in \text{Aut}(G)$

$\tau(C_1 \cup \dots \cup C_p) = C_1 \cup \dots \cup C'_1$

(2) $f(C_1 \cup \dots \cup C_p) \not\approx f(C'_1 \cup \dots \cup C'_1)$ and $f(C_1 \cup \dots \cup C_p) \neq f(C'_1 \cup \dots \cup C'_1)$

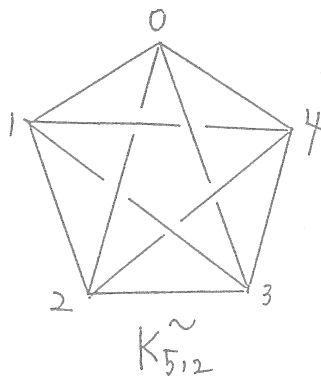
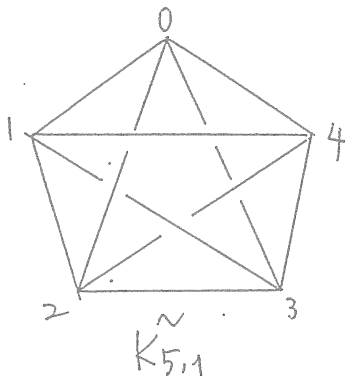
$\forall \tau \notin \text{TS}_G(\tilde{G})$

Proposition 1.2

次 $\sigma \in K_{5,1}, K_{5,2}$ 上の σ 。

$$TSG(\tilde{K}_{5,1}) \cong TSG(\tilde{K}_{5,2}) \cong D_5$$

where D_5 is a dihedral group of order 10.



(proof)

$K_{5,1}$ 上の σ 。

$K_{5,1}$ 上の 5-cycle σ , non-trivial knot を実現するものは;
left handed trefoil, $\tilde{\sigma} = [02413]$ 129 の σ 。

$$\forall \tau \in TSG(K_{5,1}) \text{ に対して, } f(\tau(\tilde{\sigma})) \approx f(\tilde{\sigma}) \text{ 又は } f(\tau(\tilde{\sigma})) \approx f(\tilde{\sigma})!$$

$$\text{よって } \tau \in TSG(\tilde{K}) \subset \text{Aut}(5\text{-cycle}) = \text{dihedral group of order 20} \\ (D_5)$$

後は Th 1.2 と同様にして。

$D_5 \subset TSG(K_{5,1})$ を証明すれば済む。

(注) D_5 の generator は $\{(01234), (14)(23)\} \subset \Sigma_5$ である。29279 generator 上の σ に対して $\tau \in TSG$ を実現する。

Theorem 1.4 (by Motokashi)

K_n : n -complete graph.

$n \geq 6$ の時, K_n の spatial presentation \tilde{K}_n について.

$$\text{TSG}(\tilde{K}_n) \subsetneq \text{Aut}(K_n) (= \Sigma_n)$$

(proof).

まず $n=6$ の場合を示す.

K_6 には 10 組の 2-component disjoint 3-cycle $(\Delta \Delta)$ が含まれている. (Conway-Gordon の Th. 5').

$$\sum_{\tilde{\ell} \in \tilde{K}_6} lk(\tilde{\ell}) \equiv 1 \pmod{2}.$$

よって $\tilde{\ell}$ は K_6 内の 2-comp. disjoint 3-cycles が実現する link.

よって $\text{TSG}(\tilde{K}_6) = \text{Aut}(K_6)$ となり, TSG の対称性より, 任意の 2つの 2-comp. links は同じ type (up to a.i.) となる.

$$\sum_{\tilde{\ell} \in \tilde{K}_6} lk(\tilde{\ell}) = 10 \cdot lk(\tilde{\ell}) \equiv 0 \pmod{2}$$

よって矛盾が生じる.

$n \geq 7$ の場合, K_n には subgraph K_6 が含まれるので, K_n が induce される subgraph K_6 の spatial presentation, \tilde{K}_6 について. 異なる type の 2-component links $\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2$ が含まれることが上の証明からわかる. $\tilde{\ell}_1, \tilde{\ell}_2 \in \tilde{K}_n$ は disjoint 2-comp. disjoint 3-cycles ℓ_1, ℓ_2 である. $\tau(\ell_1) = \ell_2$ となる. $\tau \notin \text{TSG}(\tilde{K}_n)$

$$\therefore \text{TSG}(\tilde{K}_n) \subsetneq \text{Aut}(K_n) \quad \square$$

Topological Imitations of
3-Manifolds and
the Quantum Invariants

河内明夫(大阪市立大学理学部)

3-manifold M により closed connected oriented 3-manifold を意味するものとする. 各整数 $r > 1$ に対し, M のある複素数値不変量が Witten. [Wi] により Quantum Field Theory の観点からの不変量として導入され(Walker[Wa]参照), Reshetikhin-Turaev[RT] は quantum group を使ってその数学的公式化を行った. ここでは Reshetikhin-Turaev の不変量を正規化した Kirby-Melvin[KM1] の不変量 $\tau_r(M)$ を考える.

このとき, $\tau_r(S^3)=1$, $\tau_r(M_1 \# M_2)=\tau_r(M_1) \cdot \tau_r(M_2)$,

$\tau_r(\bar{M})=\bar{\tau}_r(M)$ が成り立つ. 他にも Lickorish [L1] や Blanchet-

Habegger-Masbaum-Vogel [BHMV] による combinatorial approach での定式化や, Cappell-Lee-Miller [CLM] による conformal field Theory

からの定式化がある. さらに, [KM1] において, r が奇数のとき,

$\tau_r(M)$ は $\tau_3(M)$ (またはその共役)と M のある位相不変量

$\tau'_r(M)$ の積になることが示されているので, この不変量 $\tau'_r(M)$

も考えることにする. 我々は [KM2] に従い, これらの不変量

$\tau_r(M), \tau'_r(M)$ を quantum 不変量と呼ぶ. 本稿の主要目的は, 任意

に与えられた M からその quantum 不変量に近いような同じ quantum 不変量をもつ任意有限個の互いに同相ではない hyperbolic 3-manifold

$M_n, n=1, 2, \dots, N$, を構成した [K4] の結果についての概説である. こ

の構成には, Ruberman [R] による種数 2 の closed separating surface に関する mutation の概念と [K2] における topological

imitation theory を結んで得られた [K3]での topological imitation theory の結果を利用する. 実際, 我々の構成している M_n のどれもが

M の normal imitation であり, またどの2つも mutative となる.

topological imitation theory は, もとの 3-manifold から位相的にはそれに近いような新しい 3-manifold を構成する法を与えるという意味に

おいて、このアプローチは自然である。主定理にはさらに topological imitation theory と mutation theory から引き出される M_n についての情報も含まれる。hyperbolic 3-manifold M 内の closed separating surface が compressible となるならば、それに関する e-mutation は M の位相型を変えないことが知られている([K3, Lemmal.2]) ので、Ruberman [R], Meyerhoff-Ruberman [MR] の結果により、mutation は hyperbolic 3-manifold M の位相不変量である hyperbolic volume $\text{Vol}(M)$, η -invariant $\eta(M)$ および Chern-Simons invariant $\text{CS}(M)$ をもまた変えないことがわかる。 M が homology 3-sphere の場合には、mutation は Kirk [Ki] の結果から Casson invariant $\lambda(M)$ をも変えないことがわかる。こうして、 M_n の任意の2つは (あらかじめ与えた正数より大となる) 同じ hyperbolic volume, 同じ η -invariant, 同じ Chern-Simons invariant を持ち、また M が homology 3-sphere の場合には、各 n に対し、 $\lambda(M_n) = \lambda(M)$ となり、かつ Floer homology group $I_d(M_n)$ は Floer homology group $I_d(M)$ を真の direct summand として持つようにできることが示される。一方、[K3] における topological imitation theory の議論は hyperbolic isometry group $\text{Isom}M_n, n=1,2,\dots,N$, のある種の任意性を主張している。その結果、 $G_n, n=1,2,\dots,N$, をある任意の有限群 $G \subset \text{Diff}_+M$ の (同じでもよい) 部分群とするならば、 M_n は M の G_n -normal imitation で $\text{Isom}M_n \cong G_n$ となるように取れることも示される。

すべての r で τ_r が不変であるような 3-manifold の対の例は、筆者とは独立に Lickorish [L2] と Kania-Bartuzynska [KB] でも与えられた。いずれの例も mutative となることがチェックできる。

1. Topological Imitation Theory

定義([K1]) 3-manifold M に対し、 $M \times I$, $I = [-1, 1]$, 上の involution α で $\alpha(M \times 1) = M \times (-1)$ となり、かつ固定点集合 $M^* = \text{Fix}(\alpha, M \times I)$ が 3-manifold となるとき、 M^* は M の imitation である。

このような α を $M \times I$ における reflection という. 包含写像 $M^* \subset M \times I$ と第一因子への射影 $M \times I \rightarrow M$ の合成写像 $q: M^* \rightarrow M$ を imitation map という. 特に, $\alpha(x, 1) = (x, -1)$, $x \in M$, となるとき, この imitation は normal であるという. 有限群 $G \subset \text{Diff}_+ M$ を $M \times I$ 上に自然に作用させるときに, reflection α が G -equivariant となるならば, この imitation は G -imitation であるという. さらに, reflection α が $\alpha(x, t) = (x, -t)$, $(x, t) \in \partial(M \times I) \cup U_G \times I$ となるならば, この imitation は G -normal imitation であるという, ただし U_G は M での $F(G, M)$ の G -equivariant 近傍を表す. つぎの (1)-(3) は topological imitation theory の標準的な性質である (証明は [K1] を参照):

補題 1.1

- (1) すべての imitation map $q: M^* \rightarrow M$ は同型 $q_*: H_*(M^*) \cong H_*(M)$ および Kernel が perfect であるような全射準同型 $q_\#: \pi_1(M^*) \rightarrow \pi_1(M)$ を生成する,
- (2) すべての imitation map $q: M^* \rightarrow M$ の M 上の任意の有限連結被覆による lift はまた imitation map になり, もし q が normal なら, その lift も normal になる,
- (3) もし M^* が M の G -normal imitation で, M^{**} が M^* の G -normal imitation ならば, M^{**} は M の G -imitation になる.

M に埋め込まれた種数 2 の closed separating surface F と F 上の involution ρ で orbit space F/ρ が S^2 となるものを考える. M を F で切り裂いて, 再び ρ を使つてはりつけたときできる 3-manifold M' は M の e-mutation であるという (注. [R] では, これを mutation と呼ぶ). M は M' の e-mutation でもあるので, M, M' が e-mutative であると言っても混乱は生じない.

定義([K3]) 2つの 3-manifold M と M' に対し, 有限個の

3-manifold の列 M_i ($i=1, 2, \dots, s$) で, $M_1 = M$, $M_s = M'$ かつ各 i で M_i, M_{i+1} が e-mutative となるものが存在するとき, M' は M の mutation (または M, M' は mutative) である.

この定義において, mutation は 3-manifold の間に 1 つの同値関係を与える. この概念は knot における Conway mutation の一般化になり, mutative で同相でないような 3-manifold の対の例は Conway mutation である異なる knot の対から Dehn surgery により構成できるが, 簡単な 3-manifold の class の中には生じないと思われる.

つぎの補題は [K3, Theorem 3.2] で与えられている.

補題 1.2 任意の M と $\text{Diff}_+ M$ 内の任意の有限群 G の(同じでもよい)任意有限個の任意部分群 $G_n, n=1, 2, \dots, N$, と任意の正数 $C > 0$ に対して, 互いに mutative で互いに同相でないような hyperbolic 3-manifold $M_n, n=1, 2, \dots, N$, でつぎを満たすようなものがある: すなわち, M_n は M の G_n -normal imitation で $\text{Vol}(M_n) > C$ かつ $\text{Isom} M_n \cong G_n$ となる. さらに, M_n は M 内の trivial link の link imitation O_n にそつての M の $1/m$ -Dehn surgery から得られ, m には $|G|!$ で割り切れかつある定数より大となるような任意整数を与えてよい.

2. Quantum 不変量

任意の M はある integer framing をもつ oriented link L の surgery により S^3 から得られることはよく知られる. この link L を平面上に表された link diagram で 平面から自然に決まる framing をもつものとみなすことにする. L の成分数を $\#L$, signature を $\text{sign } L$ で表す. また, $L \cdot L$ で L の total crossing number (=writhe) を表す. L の各成分にある非負整数を対応させる関数 $k: L \rightarrow \mathbb{Z}$ を L の color という. L の 2 つの

color k, k' に対し, 各 L の knot 成分 K が $k(K) < k' (K)$ (または $k(K) \leq k' (K)$) 満たすとき, $k < k'$ (または $k \leq k'$) と表す.

k がある非負整数 n への定数関数ならば, k は n と同一視する. link diagram L の各 knot 成分 K に対し, それを $k(K)$ で指定される成分数の parallel link に置き直すことにより得られる link diagram を L^k によって表す. ただし, その向きは $k(K)$ が偶数ならば L で指定されたものとそうでないものを半々とし, 奇数ならば L で指定されたものがそうでないものより1つ多くする. link diagram L に対し, $J(L)$ をつぎで与える:

$$J(L) = (-i)^{L \cdot L} \langle L \rangle (i t)$$

ただし, $\langle \rangle$ は Kauffman bracket を表す: すなわち, 交点をもたない n 成分 link diagram $O(n)$ に対し $\langle O(n) \rangle = (-t^2 - t^{-2})^n$, および各交点において $\langle \diagdown \diagup \rangle = t \langle \diagup \diagdown \rangle + t^{-1} \langle \diagdown \diagdown \rangle$ であるような link diagram の regular isotopy 不変量を表す. color k をもつ framed link L の Jones polynomial $J_{L,k}$ はつぎの定義式で決まる環

$Z[t, t^{-1}]$ の元のことである. ただし, $t = \exp(2\pi i / 4r)$ (i は虚数単位) とおく:

$$J_{L,k} = \sum_{0 \leq j \leq (k-1)/2} (-1)^j \binom{k-1-j}{j} J(L^{k-1-2j})$$

このとき, Kirby-Melvin [KM1] による M の quantum 不変量 (各 $r > 1$ に対する) $\tau_r(M)$ と (各奇数 $r > 3$ に対する) $\tau_r^1(M)$ はつぎで与えられる:

$$\tau_r(M) = \alpha_L \sum_{0 < k < r} [k] J_{L,k}$$

$$\tau_r^1(M) = \alpha_L \sum_{0 < k < r/2} i^{rE(L,k) \cdot E(L,k)} [k] J_{L,k}$$

ここで, α_L, α'_L は $r, \#L, \text{sign } L$ のみで決まる複素数
 で, $E(L, k)$ は color k をもつ link L の even color からなる
 sublink を表す. $[k]$ は k と r できまるある実数を表す.

つぎの補題は Morton-Traczyk[MT]の Jones多項式計算法の類似的方法
 から得られる.

補題 2.1 M' が M の mutation であるならば, すべての(許容で
 ける) r で $\tau_r(M') = \tau_r(M), \tau'_r(M') = \tau'_r(M)$ となる.

つぎの補題は Kirby-Melvin[KM, (3.27)(b)] を使って得られる.

補題 2.2 K を M 内の null-homologous knot とし, M_n を
 K にそつての $1/n$ -Dehn surgery により M から得られたものとす
る. もし n が $4r$ で割り切れるならば,

$$\tau_r(M_n) = \tau_r(M), \tau'_r(M_n) = \tau'_r(M)$$

となる.

同様の考察から, つぎの命題も得られる:

命題 2.3 任意の 3-manifold M と任意の整数 $J > 5$ に対して,
 $H_1(M_{(J+1)}) \cong H_1(M) \oplus \mathbb{Z}_{J+1}$, かつ J 以下の(許容できる)す
べての r で, $\tau_r(M_{(J+1)}) = \tau_r(M)$, かつ $\tau'_r(M_{(J+1)}) =$
 $\tau'_r(M)$ となるような 3-manifold $M_{(J+1)}$ が存在する.

これは任意に与えられた正整数以下のすべての r に対する τ_r (ま
 たは τ'_r) によつては 3-manifold の homology は決定されないことを
 意味する.

3. Topological imitations of homology 3-spheres

homology 3-sphere M の Floer homology group $I_d(M)$, $d \in \mathbb{Z}_8$,
に対し, Casson invariant $\lambda(M)$ は

$$\lambda(M) = \sum_{d \in \mathbb{Z}_8} (-1)^d \text{rank } I_d(M)$$

と表される (Floer[F], Taubes[T]参照). つぎの二つの補題がここで利用される.

補題 3.1 もし M^* が homology 3-sphere M の imitation であるならば, $I_d(M^*)$ は $I_d(M)$ を direct summand として持ち, かつ $\lambda(M^*) \equiv \lambda(M) \pmod{2}$ となる.

補題 3.2 任意の整数 $m \neq 0$, $J > 5$, に対し, J 以下の (許容できる) r に対し, $\tau_r(M) = \tau_r'(M) = 1$ かつ $\lambda(M) = 2m \cdot J!$ となるような S^3 の imitation M がある.

4. 主定理

homology 3-sphere M に対し, $d \in \mathbb{Z}_8$ が奇数となるときの $\text{rank } I_d(M)$ の和を $\beta_-(M)$, 偶数となるときの和を $\beta_+(M)$ で表す. このとき, $\beta_+(M) - \beta_-(M) = 2\lambda(M)$ となる.

ここでの主定理は次のように述べられる:

定理 4.1 任意の整数 $J > 5, N > 1, \beta > 0$ と任意の正数 C をとる.
任意の 3-manifold M と任意の有限群 $G \subset \text{Diff}^+ M$ の (同じでもよい)

任意の部分群 $G_n, n=1, 2, \dots, N$, に対して, M の G_n -normal imitation であるような互いに同相でない hyperbolic 3-manifold $M_n, n=1, 2, \dots, N$, で, 次の (0)-(3) を同時に満たすものがある:

- (0) 各 n に対して, $\text{Vol}(M_n) > C$, $\text{Isom}(M_n) \cong G_n$,
- (1) 各(許容できる) r についての $\tau_r(M_n)$, $\tau'_r(M_n)$ は n に関し定数となり, $r \leq J$ であるすべての(許容できる) r で $\tau_r(M_n) = \tau_r(M)$, $\tau'_r(M_n) = \tau'_r(M)$ となる,
- (2) $\text{Vol}(M_n)$, $\eta(M_n)$, $\text{CS}(M_n)$ は n に関し定数となる,
- (3) M が homology 3-sphere ならば, 各 d と n で, $I_d(M_n)$ は $I_d(M)$ を direct summand として持ち,かつ $\lambda(M_n) = \lambda(M)$, $\beta_{\pm}(M_n) > \beta$ が成り立つ.

任意の有限群 G に対し, $G \subset \text{Diff} M$ となるような 3-manifold M を容易に構成できるから, 勝手に与えられた有限群 $G_n, n=1, 2, \dots, N$, に対し, それらを部分群としてもつような有限群 $G \subset \text{Diff} M$ をもっている 3-manifold M は必ず存在する.

参考文献

- [BHMV] C. Blanchet, N. Habegger, C. Masbaum and P. Vogel, Three-manifold invariants derived from the Kauffman bracket, preprint.
- [CLM] S.E. Cappell, R. Lee and E.Y. Miller, Invariants of 3-manifolds from conformal field theory, preprint.
- [F] A. Floer, An instanton-invariant for 3-manifolds, Commun. Math. Phys. 118(1988), 215-240.
- [KB] J. Kania-Bartoszyńska, Examples of different 3-manifolds with the same invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev, preprint.
- [K1] A. Kawauchi, An imitation theory of manifolds, Osaka J. Math. 26(1989), 447-464.
- [K2] A. Kawauchi, Almost identical imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs and the branched coverings, Osaka J. Math. (to

appear).

[K3] A.Kawauchi, Almost identical imitations of (3,1)-dimensional manifold pairs and the manifold mutation, preprint.

[K4] A. Kawauchi, Topological imitations of 3-manifolds and the quantum invariants, preprint.

[KM1] R. Kirby and P. Melvin, The 3-manifold invariants of Witten and Reshetikhin-Turaev for $sl(2, \mathbb{C})$, Invent. Math. 105(1991), 473-545.

[KM2] R. Kirby and P. Melvin, Quantum invariants of lens spaces and a Dehn surgery formula (preliminary report), Abstract Amer. Math. Soc. 12(1991), 435.

[Ki] P. Kirk, Mutations of homology spheres and Casson's invariant, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 105(1989), 313-318.

[Ko] T. Kohno, Topological invariants for 3-manifolds using representations of mapping class groups I, Topology (to appear).

[L1] W. B. R. Lickorish, Three-manifolds and the Temperley-Lieb algebra, Math. Ann. 290(1991), 657-670.

[L2] W. B. R. Lickorish, Distinct 3-manifolds with all $SU(2)_q$ invariants the same, preprint.

[MR] R. Meyerhoff and D. Ruberman, Mutation and the η -invariant, J. Diff. Geom. 31(1990), 101-130.

[MT] H. R. Morton and P. Traczyk, The Jones polynomial of satellite links around mutants, Contemp. Math. 78(1988), 587-597.

[RT] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, Invariants of 3-manifolds via link polynomials and quantum groups, Invent. Math. 103(1991), 547-597.

[R] D. Ruberman, Mutation and volumes of knots in S^3 , Invent Math. 90(1987), 189-215.

[T] C. H. Taubes, Casson's invariant and gauge theory, J. Diff. Geom. 31(1989), 547-599.

[Wa] K. Walker, On Witten's 3-manifold invariants, preprint.

[W] E. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Commun. Math. Phys. 121(1989), 351-399.

**CYCLIC COHOMOLOGY AND GRAPH PROJECTIONS
— ON TOPOLOGICAL APPLICATIONS OF
K-THEORY AND CYCLIC COHOMOLGY —**

HITOSHI MORIYOSHI

INTRODUCTION

This is a short expository paper about Noncommutative Differential Geometry due to A. Connes. In this paper we discuss the theory from the geometric point of view, particularly focusing on the cyclic cohomology and the pairing with the K -theory. Mainly we show examples which arise in geometric situations rather than proving general statements. For the reader who wants to know more about Noncommutative Differential Geometry we refer to the original papers [1] [2] [3].

1. K-THEORY FOR BANACH ALGEBARS

Let A be a Banach algebra with unit. We denote by $M_k(A)$ the algebra of all matrices whose components are elements in A . Then $M_k(A)$ is embedded into the upper left-hand corner of $M_{k+n}(A)$. We denote by $M_\infty(A)$ the direct limit of $M_k(A)$ with the above inclusions. Let $GL_k(A)$ denote the group of all invertible elements in $M_k(A)$. Then $GL_k(A)$ is embedded into the upper left-hand corner of $GL_{k+n}(A)$ with putting the identity matrix in the lower right-hand corner. We also denote by $GL_\infty(A)$ the direct limit of $GL_k(A)$. Let e_0 and e_1 be two idempotents in $M_\infty(A)$, i.e., $e_i^2 = e_i$ ($i = 0, 1$). We say that e_0 is equivalent to e_1 if and only if e_0 is connected with e_1 by a continuous path in the set of all idempotentes in $M_\infty(A)$. Let $P(A)$ denote the set of equivalense classes of idempotents $M_\infty(A)$. We note that $P(A)$ admits the direct sum operation given by

$$e_0 \oplus e_1 = \begin{pmatrix} e_0 & 0 \\ 0 & e_1 \end{pmatrix}$$

1.1. Definition. 1) The group $K_0(A)$ is defined to be the Grothendieck group for the semigroup $P(A)$. The addition in $K_0(A)$ is given by the direct sum operation.

2) The group $K_1(A)$ is defined to be the set of all connected components of $GL_\infty(A)$. The addition in $K_1(A)$ is given by the multiplication in $GL_\infty(A)$.

1.2. Example. Let A be the matix algebra $M_k(\mathbb{C})$ over \mathbb{C} . It is known that $K_0(A) = \mathbb{Z}$ and $K_1(A) = 0$. Elements in $K_0(A)$ are detected by the rank of matrices.

1.3. Relation to the topological K-theory. Let X be a compact Hausdorff space and $C(X)$ denote the Banach algebra of all continuous functions on X . We recall that the topological K -group $K^*(X)$ is defined as the Grothendieck group for the set of all isomorphism classes of vector bundles on X . Let E be a vector bundle on X . Since X is compact, we may assume that E is a subbundle of a trivial bundle $M \times \mathbb{C}^n$ for sufficiently large n . Choosing any metric on the trivial bundle, we can associate an idempotent $e \in M_n(C(X))$ with E by taking the orthogonal projection onto E . Here we identify an element in $M_n(C(X))$ with a function on X with values in $M_n(\mathbb{C})$. The projection e is the family of the orthogonal projections onto the fiber E_x at each $x \in X$. We note that this construction depends on the choice of the embedding into the trivial bundle. However, the correspondence is independent of the choice when we pass over to the K -theory, and it yields an isomorphism between them.

Theorem (Swan). *There is a natural isomorphism between $K_*(C(X))$ and the topological K -group $K^*(M)$.*

The relevance of the above theorem is that we can identify $K_*(C(X))$ with $K^*(M)$ naturally and therefore, the K -theory for Banach algebras contains the topological K -theory as a part of it. The spirit of Noncommutative Differential Geometry is to treat (generally noncommutative) Banach algebras as generalizations of topological spaces. We will be then interested in constructing the Chern character for the K -theory for Banach algebras, which has the beautiful description known as the Chern-Weil theory in ordinary Differential Geometry. It turns out that the cyclic cohomology, which we shall discuss in Section 2, is a suitable candidate as the receiver of the Chern character.

We show two examples here. Let $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ and $C(S^1)$ denote the algebra of all continuous functions on S^1 . The functions $e^{2\pi i k x}$ ($k \in \mathbb{Z}$) belong to $GL_1(C(S^1))$ and yield nontrivial elements in $K_1(C(S^1))$ for $k \neq 0$. In fact, we have $K_1(C(S^1)) = \mathbb{Z}$, and $e^{2\pi i k x}$ ($k \in \mathbb{Z}$) give all elements in $K_1(C(S^1))$, which are detected by the winding number k .

The second example is for $K_0(C(S^2))$. Let S^2 be the two-dimensional sphere obtained by the one-point compactification of \mathbb{C} . Put $e = (e_z)_{z \in S^2} \in M_2(C(S^2))$ such that

$$e_z = \frac{1}{1+z\bar{z}} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & z\bar{z} \end{pmatrix}.$$

It is easy to see that e_z is well-defined at $z = \infty$ and yields a family of idempotents. Then e gives a nontrivial element in $K_0(C(S^2))$, which is called the Bott projection.

1.4. The algebra of kernel functions. 1) Let M be a Riemannian manifold and $C_c^\infty(M \times M)$ denote the space of all compactly supported smooth functions on $M \times M$. Let $C_c^\infty(M \times M)$ act on the Hilbert space $L^2(M)$ of all L^2 -functions on M such that

$(k\xi)(x) = \int_M k(x,y)\xi(x)$ for $k \in C_c^\infty(M \times M)$ and $\xi \in L^2(M)$. Then $C_c^\infty(M \times M)$ is equipped with the multiplication given by the following convolution product:

$$(k * l)(x, z) = \int_M k(x, y)l(y, z) \quad k, l \in C_c^\infty(M \times M).$$

We then denote by \mathcal{K} the norm closure of $C_c^\infty(M \times M)$ in the space $\mathcal{L}(L^2(M))$ of all bounded operators on $L^2(M)$. When M is compact, the algebra \mathcal{K} is the set of all compact operators on $L^2(M)$, and its K -group is given by $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$ and $K_1(\mathcal{K}) = 0$.

2) Let M_o be a closed Riemannian manifold and M denote a covering space over M_o with the deck transformation group Γ . We suppose that M is equipped with the induced Riemannian metric from M_o . Then Γ acts on M by isometries. Let $C_c^\infty(M \times M)^\Gamma$ denote the set of smooth functions $k : M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ such that:

- i) k is invariant with the diagonal action of Γ on $M \times M$, i.e., $k(xg, yg) = k(x, y)$ for $(x, y) \in M \times M$ and $g \in \Gamma$;
- ii) k has a Γ -compact support, i.e., the image of the support of k is compact in $(M \times M)/\Gamma$.

Then $C_c^\infty(M \times M)^\Gamma$ acts on $(L^2(M))$ in the same way as in 1) and is equipped with the multiplication by the convolution product. The above condition i) implies that the action of k on $L^2(M)$ commutes with the action of Γ on $L^2(M)$. We then take the norm closure of $C_c^\infty(M \times M)^\Gamma$ in $\mathcal{L}(L^2(M))$ and denote it by \mathcal{K}_Γ . Let $\mathbb{C}[\Gamma]$ be the group algebra for Γ and act on $l^2(\Gamma)$ by left translations. We denote by $C^*\Gamma$ the closure of $\mathbb{C}[\Gamma]$ in $\mathcal{L}(l^2(\Gamma))$. It then follows that \mathcal{K}_Γ is Morita equivalent to $C^*\Gamma$ and that $K_*(\mathcal{K}_\Gamma)$ is isomorphic to $K_*(C^*\Gamma)$.

2. CYCLIC COHOMOLOGY

Let A be an algebra over \mathbb{C} with unit. Define $C_\lambda^n(A)$ to be the space of $(n+1)$ -linear maps τ on A into \mathbb{C} satisfying the following cyclic condition:

$$\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = (-1)^n \tau(a_n, a_0, \dots, a_{n-1}) \quad (a_i \in A).$$

We then have the coboundary map $b : C_\lambda^{n-1}(A) \rightarrow C_\lambda^n(A)$ such that

$$b\tau(a_0, a_1, \dots, a_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \tau(a_0, \dots, a_k a_{k+1}, \dots, a_n) + (-1)^n \tau(a_n a_0, \dots, a_{n-1}).$$

It is easy to see that $b^2 = 0$.

2.1. Definition. The cyclic cohomology $H_\lambda^*(A)$ is the cohomology group of the cochain complex (C_λ^*, b) .

2.2. Example. Let $A = M_n(\mathbb{C})$. A cyclic 0-cocycle τ on A is given by

$$\tau(a) = \text{Tr}(a),$$

where Tr means the trace map on $M_n(\mathbb{C})$. In fact, the cyclic condition is trivial, and the cocycle condition

$$b\tau(a, b) = \tau(ab) - \tau(ba) = 0$$

follows from the trace property for Tr . We also observe that a more general statement is true: for an arbitrary algebra A , a linear functional $\tau : A \rightarrow \mathbb{C}$ yields a cyclic 0-cocycle if τ satisfies the trace property $\tau(ab) = \tau(ba)$ ($a, b \in A$).

We further obtain a cyclic $2m$ -cocycle τ for $M_n(\mathbb{C})$ in the following way: let $a^{(k)} = (a_{ij}^{(k)}) \in M_n(\mathbb{C})$, where $a_{ij}^{(k)} \in A$ denotes the (i, j) -component of the matrix $a^{(k)}$; we then define τ such that

$$\begin{aligned} \tau(a^{(0)}, a^{(1)}, \dots, a^{(2m)}) &= \text{Tr}(a^{(0)}a^{(1)} \dots a^{(2m)}) \\ &= \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2m}} a_{i_0 i_1}^{(0)} a_{i_1 i_2}^{(1)} \dots a_{i_{2m} i_0}^{(2m)}. \end{aligned}$$

It is easily verified that τ is a cyclic cocycle.

2.3. Example. 1) Let $A = C^\infty(S^1)$ be the algebra of smooth functions on S^1 . A cyclic 1-cocycle τ on $C^\infty(S^1)$ is given by

$$\tau(a_0, a_1) = \int_{S^1} a_0 da_1 \quad (a_0, a_1 \in A),$$

where \int_{S^1} denote the integration over S^1 and d the exterior differentiation. The cyclic condition follows from the Stokes theorem:

$$\begin{aligned} 0 &= \int d(a_0 a_1) = \int a_0 da_1 + \int a_1 da_0 \\ &= \tau(a_0, a_1) + \tau(a_1, a_0). \end{aligned}$$

The cocycle condition is the result of skew-derivation property for d :

$$\begin{aligned} b\tau(a_0, a_1, a_2) &= \int a_0 a_1 da_2 - \int a_0 d(a_1 a_2) + \int a_2 a_0 da_1 \\ &= \int a_0 a_1 da_2 - \int a_0 (da_1) a_2 - \int a_0 a_1 da_2 + \int a_2 a_0 da_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

More generally, let $A = C^\infty(M)$ be the algebra of smooth functions on a closed manifold M . Given a k -cycle σ in M , we obtain a cyclic k -cocycle by the following formula:

$$\tau(a_0, a_1, \dots, a_k) = \int_\sigma a_0 da_1 \dots da_k \quad (a_i \in A).$$

Similarly by using the Stokes theorem and the skew-derivation property for d , it is verified that τ is a cyclic cocycle.

2) We also present a cyclic 2-cocycle on the algebra $C^\infty(T^2)$ of all smooth functions on the 2-dimensional torus T^2 . Since T^2 is an abelian Lie group, it admits invariant vector fields X and Y with $[X, Y] = 0$, and their dual 1-forms dx and dy . Note that the exterior differentiation is given by $d = dx\partial_X + dy\partial_Y$, where ∂_X and ∂_Y denote the differentiation along X and Y , respectively. We then obtain a cyclic 2-cocycle

$$\begin{aligned}\tau(a_0, a_1, a_2) &= \int_{T^2} a_0 da_1 da_2 \\ &= \int_{T^2} dx dy [a_0(\partial_X a_1)(\partial_Y a_2) - a_0(\partial_Y a_1)(\partial_X a_2)].\end{aligned}$$

We here observe that $\int_{T^2} dx dy$ has the trace property when it is viewed as a linear functional on $C^\infty(T^2)$.

2.4. Example. 1) Let A be the algebra $C_c^\infty(M \times M)$ with the convolution product as in Example 1.4 1). When M is compact, a cyclic 0-cocycle is given by

$$\tau(k) = \int_M dx k(x, x) \quad (k \in A).$$

We also denote the above cocycle by $Tr(k)$.

Let A be the algebra $C_c^\infty(M \times M)^\Gamma$ as in Example 1.4 2). Let \mathcal{D} denote the fundamental domain for the Γ -action on M . A cyclic 0-cocycle is given by

$$\tau(k) = \int_{\mathcal{D}} dx k(x, x) \quad (k \in A),$$

which is denoted by $Tr_\Gamma(k)$.

2) Let M be the one-dimensional Euclidean space \mathbb{R} and let $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ act on $L^2(\mathbb{R})$ as previously. We consider that $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ is a subalgebra of all bounded operators on $L^2(\mathbb{R})$. Let x and $\frac{d}{dx}$ be operators on $L^2(\mathbb{R})$ such that x is the multiplication by x and $\frac{d}{dx}$ is the differentiation in x , respectively. We then define derivations ∂_1 and ∂_2 on $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ such that

$$\begin{aligned}(\partial_1 k)\xi &= (xk - kx)\xi \\ (\partial_2 k)\xi &= \left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}k - k\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\right)\xi,\end{aligned}$$

where $k \in C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ and $\xi \in L^2(\mathbb{R})$. In other words, as operators on $L^2(\mathbb{R})$ we have

$$\partial_1 k = [x, k], \quad \partial_2 k = \left[\frac{1}{i}\frac{d}{dx}, k\right].$$

Note that ∂_1 and ∂_2 commute to each other. We then construct a cyclic 2-cocycle τ on $C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ by following the formula in the previous example:

$$\tau(a_0, a_1, a_2) = Tr[a_0(\partial_1 a_1)(\partial_2 a_2) - a_0(\partial_2 a_1)(\partial_1 a_2)].$$

The cyclic and cocycle conditions follow from the trace property for Tr and the derivation property for ∂_1 and ∂_2 observing that they commute to each other.

3. THE PAIRING BETWEEN K-THEORY AND CYCLIC COHOMOLOGY

3.1. Definition of the pairing. Let A be an algebra with unit as previously. In this section we shall discuss a pairing between $K_*(A)$ and $H_\lambda^*(A)$ obtained basically from evaluating cyclic cocycles with elements in A determined by given classes in $K_*(A)$. Let us begin with a simple case between $K_0(A)$ and $H_\lambda^{2m}(A)$. Take a class in $K_0(A)$ which is represented by an idempotent e in A . Given a cyclic $2m$ -cocycle τ on A . We define a pairing \langle, \rangle between them such that

$$\langle e, \tau \rangle = \tau(e, e, \dots, e).$$

A remarkable fact is that the above value depends only on the classes of e and τ . To extend the above pairing to the general case we exploit the cyclic $2m$ -cocycle given in 2.2. The precise statement is as follows:

Proposition. *There is a well-defined pairing \langle, \rangle between $K_*(A)$ and $H_\lambda^*(A)$ given by the following formulas:*

1) (Even case) Given $[e] \in K_0(A)$ and $[\tau] \in H_\lambda^{2m}(A)$, we have

$$\langle [e], [\tau] \rangle = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2m}} \tau(e_{i_0 i_1}, e_{i_1 i_2}, \dots, e_{i_{2m} i_0}),$$

where e_{ij} denotes the (i, j) -component of the idempotent $e \in M_k(A)$;

2) (Odd case) Given $[u] \in K_1(A)$ and $[\tau] \in H_\lambda^{2m-1}(A)$, we have

$$\langle [u], [\tau] \rangle = \sum_{i_0, i_1, \dots, i_{2m-1}} \tau(u_{i_0 i_1}^{-1}, u_{i_1 i_2}, \dots, u_{i_{2m-2} i_{2m-1}}^{-1}, u_{i_{2m-1} i_0}),$$

where u_{ij} and u_{ij}^{-1} are the (i, j) -components of u and u^{-1} , respectively.

Remark. In the above definition of pairing we omitted the normalizing constant in [1].

3.2. Example. Let $A = M_k(\mathbb{C})$ and $\tau = Tr$. We then have

$$\langle [e], [\tau] \rangle = \tau(e) = \text{rank } e.$$

3.3. Example. 1) For $A = C^\infty(S^1)$, we let $u = e^{2i\pi kx}$ as in 2.3 and let τ be the 1-cocycle on A in 3.3 1). We then have

$$\begin{aligned} \langle [u], [\tau] \rangle &= \tau(u^{-1}, u) = \int_{S^1} e^{-2i\pi kx} de^{2i\pi kx} \\ &= 2\pi i k. \end{aligned}$$

2) Let $A = C^\infty(T^2)$ and τ be the cyclic 2-cocycle given in 2.3 2). We first extend τ to a cyclic cocycle on $M_k(C^\infty(T^2))$ such that

$$\tau(a_0, a_1, a_2) = \int_{T^2} dx dy Tr [a_0(\partial_X a_1)(\partial_Y a_2) - a_0(\partial_Y a_1)(\partial_X a_2)]$$

for $a_i \in M_k(C^\infty(T^2))$. Here we consider that a_i is a smooth function on T^2 with values in $M_k(\mathbb{C})$. The derivations ∂_X and ∂_Y are extended naturally to act on such elements, and Tr means taking the trace at each point of T^2 . We also consider that a_i is an operator acting on the space $C^\infty(T^2, \mathbb{C}^k)$ of all \mathbb{C}^k -valued smooth functions on T^2 . The derivations are then given by the following form:

$$(\partial_X a)\xi = (Xa - aX)\xi, \quad (\partial_Y a)\xi = (Ya - aY)\xi$$

for $a \in M_k(C^\infty(T^2))$ and $\xi \in C^\infty(T^2, \mathbb{C}^k)$, where X and Y denote the differentiations considered as operators acting on $C^\infty(T^2, \mathbb{C}^k)$. In other words, we have

$$\partial_X a = [X, a], \quad \partial_Y a = [Y, a].$$

Let $e \in M_k(C^\infty(T^2))$ be an idempotent. It then follows that

$$\begin{aligned} \tau(e, e, e) &= \int_{T^2} dx dy Tr(e[X, e][Y, e] - e[Y, e][X, e]) \\ &= \int_{T^2} dx dy Tr(e(Xe - eX)(Ye - eY) - e(Ye - eY)(Xe - eX)) \\ &= \int_{T^2} dx dy Tr([eXe, eYe] - e[X, Y]e). \end{aligned}$$

When we put $eZe = \nabla_Z$ for vector fields Z on T^2 , we finally obtain

$$\begin{aligned} \tau(e, e, e) &= \int_{T^2} dx dy Tr([\nabla_X, \nabla_Y] - \nabla_{[X, Y]}) \\ &= \int_{T^2} dx dy Tr(R_{X, Y}), \end{aligned}$$

where R denotes the curvature tensor with respect to the connection $\nabla = ede$ on the vector bundle E on T^2 which is given by the image of e . Thus, recalling that the first Chern class $c_1(E)$ is represented by $Tr(\frac{i}{2\pi}R)$, the above equality amounts to

$$\langle [e], [\tau] \rangle = \tau(e, e, e) = \frac{2\pi}{i} \langle c_1(E), [T^2] \rangle.$$

3.4. Example. Let $A = C_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ and τ denote the cyclic cocycle on A given in 2.4 2). Let e be a projection in A of finite rank. For instance, if we take $\xi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ with the L^2 -norm $\|\xi\| = 1$, the function $p(x, y) = \xi(x)\overline{\xi(y)}$ yields a rank one projection in A . Recall that τ is given by

$$\tau(a_0, a_1, a_2) = Tr(a_0[x, a_1][\frac{1}{i}\frac{d}{dx}, a_2] - a_0[\frac{1}{i}\frac{d}{dx}, a_1][x, a_2]).$$

By a similar computation to the previous case, it follows that

$$\tau(e, e, e) = Tr([exe, e\frac{1}{i}\frac{d}{dx}e] - e[x, \frac{1}{i}\frac{d}{dx}]e).$$

Note that $Tr([exe, e\frac{1}{i}\frac{d}{dx}e]) = 0$ since $exe, e\frac{1}{i}\frac{d}{dx}e \in A$. Hence, observing the canonical commutation relation $[x, \frac{1}{i}\frac{d}{dx}] = i$, we obtain

$$\tau(e, e, e) = Tr(-ie) = -i \text{rank } e.$$

If we pursue the analogy to the previous example, we may consider that $\tau(e, e, e)$ is a invariant obtained from the curvature for the projection e given by the cyclic cocycle τ .

4. GRAPH PROJECTIONS

In this section we shall discuss a method to construct nontrivial projections under some geometric circumstances. Let V be a finite-dimensional vector space over \mathbb{C} with an inner product. For a linear map $T : V \rightarrow V$ we define the graph G_T of T such that

$$G_T = \{(v, Tv) \in V \oplus V : v \in V\}.$$

Obviously G_T is a subspace in $V \oplus V$.

4.1. Definition. The graph projection e_T is defined to be the orthogonal projection from $V \oplus V$ onto G_T . Explicitly, it is given by the following formula:

$$e_T = \begin{pmatrix} (1 + T^*T)^{-1} & (1 + T^*T)^{-1}T^* \\ T(1 + T^*T)^{-1} & T(1 + T^*T)^{-1}T^* \end{pmatrix} : \begin{matrix} V & V \\ \oplus & \rightarrow \oplus \\ V & V \end{matrix}.$$

4.2. Example. Let $V = \mathbb{C}$ and let $T = z$ denote the multiplication by a complex number $z \in \mathbb{C}$. We then obtain

$$e_z = \frac{1}{1 + z\bar{z}} \begin{pmatrix} 1 & \bar{z} \\ z & z\bar{z} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}).$$

If we consider e_z is a family of projections parametrized by z , we recapture the Bott projection in 1.3.

4.3. Example. 1) Let M be a closed spin manifold of even dimension. We have the spin bundle S on M , which splits into positive and negative spin bundles: $S = S^+ \oplus S^-$. The Dirac operator D is a differential operator of order 1 acting on the smooth sections of S , and also splits into the positive and negative Dirac operators. Let H^+ and H^- denote the space of all L^2 -sections on M for S^+ and S^- , respectively. The positive Dirac operator maps the smooth sections of S^+ into the smooth sections of S^- , and extends to a closed operator $D^+ : H^+ \rightarrow H^-$. We then define the graph G_{D^+} for D^+ such that

$$G_{D^+} = \{(\xi, D^+\xi) \in H^+ \oplus H^- : \xi \in \text{Dom}(D^+)\},$$

where $\text{Dom}(D^+)$ is the Sobolev space of order 1 for H^+ . Since the graph G_{D^+} is, by definition of closed operator, a closed subspace in $H^+ \oplus H^-$, it makes sense to

consider the orthogonal projection e_{D^+} onto G_{D^+} . The interesting point is that this projection yields a nontrivial element in some K -group and that it is related to a relevant geometric invariant as follows.

Let A be a (possibly nonunital) Banach algebra and A^+ denote the algebra A adjoined unit. Recall that an element of $K_0(A)$ is given by a pair (e_0, e_1) of idempotents in A^+ such that $e_0 - e_1 \in A$. We choose A as the set of all compact operators \mathcal{K} on $H^+ \oplus H^-$. It then follows that the pair $(e_{D^+}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ yields an element in $K_0(\mathcal{K}) = \mathbb{Z}$, and it turns out that the resulting integer is equal to the index of D^+ .

2) Let M be a Γ -covering space on a closed Riemannian manifold as in Example 1.4. We assume that M is of even dimension and has a Γ -invariant spin structure. We then have the Γ -equivariant Dirac operator on M , and obtain the graph projection e_{D^+} for the positive Dirac operator in a similar way. In this case the pair $(e_{D^+}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})$ yields an element of $K_0(\mathcal{K}_\Gamma)$ and it is considered as the index for the Γ -equivariant Dirac operator on M .

4.4. The Godbillon-Vey cyclic cocycle. Let Σ be a closed Riemann surface with genus more than one and M denote the universal cover of Σ . Let Γ be the fundamental group of Σ . We assume that there exists a Γ -action on S^1 by orientation preserving diffeomorphisms. For instance, Γ acts on S^1 by linear fractional transformations. We then construct a foliated bundle X on Σ such that $X = (M \times S^1)/\Gamma$ with the Γ -action $(m, x)g = (mg, xg)$ for $(m, x) \in M \times S^1$ and $g \in \Gamma$. Associated to X , an algebra \mathcal{A} is defined to be the set of all smooth functions $k : M \times M \times S^1 \rightarrow \mathbb{C}$ such that

- i) $k(mg, ng, xg) = k(m, n, x)$ for $(m, n, x) \in M \times M \times S^1$ and $g \in \Gamma$;
- ii) k has Γ -compact support.

We can consider that \mathcal{A} acts on the family of Hilbert spaces $(L^2(M \times \{x\}))_{x \in S^1}$ such that

$$(k\xi)(m, x) = \int_M dn k(m, n, x)\xi(n, x),$$

where $k \in \mathcal{A}$ and $\xi \in L^2(M \times \{x\})$. We denote by \mathcal{K}_X the norm closure of \mathcal{A} in the family of C^* -algebras $(\mathcal{L}(L^2(M \times \{x\})))_{x \in S^1}$. Note that this construction is applied similarly to the sections of $\text{End}(E)$ for a given Γ -equivariant vector bundle E on $M \times S^1$. We shall now construct a cyclic 2-cocycle on \mathcal{A} as follows. Let ω_0 and ω_1 be Γ -invariant volume forms on M and $M \times S^1$, respectively. We denote by dx the volume form on S^1 , which is not necessarily invariant for the Γ -action. Let ψ be a positive smooth function on $M \times S^1$ such that $\omega_0 \wedge dx = \psi\omega_1$ and put

$$\phi = \log\psi.$$

We then define a cyclic 2-cocycle τ on \mathcal{A} such that

$$\tau(a_0, a_1, a_2) = \int_{\mathcal{D} \times S^1} \omega_0 \wedge dx T\tau(a_0[\phi, a_1][\dot{\phi}_1 a_2] - a_0[\dot{\phi}, a_1][\phi, a_2]),$$

where $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial x}$ ($x \in S^1$), and \mathcal{D} denotes the fundamental domain for the Γ -action on M . Note that τ extends naturally to the algebra \mathcal{A}^+ .

Next we construct an element in $K_0(\mathcal{K}_X)$ exploiting the graph projection method in the following way. Let D_x be the Dirac operator along $M \times \{x\}$ and $e_{D_x^\pm}$ denote the graph projection for D_x^\pm . We denote by e_0 the family of graph projections $(e_{D_x^\pm})_{x \in S^1}$. It turns out that $e_0 - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{K}_\Gamma$ and hence it yields an element $e = (e_0, e_1) \in K_0(\mathcal{K}_\Gamma)$, where $e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. We then have the following:

Theorem ([4]). *Let e and τ as above. It then follows that*

$$\langle [e], [\tau] \rangle = \tau(e_0, e_0, e_0) - \tau(e_1, e_1, e_1) = \frac{1}{\pi i} \int_X gv,$$

where gv denotes the Godbillon-Vey class for the foliated bundle X .

We observe the similarity of the form of τ to that of the cyclic cocycle in Example 3.3. In this sense the above theorem shows a relationship between the Godbillon-Vey class and the curvature for the graph projection e in Noncommutative Differential Geometry.

REFERENCES

1. A. Connes, Non-commutative differential geometry, Part I and II, Publ. Math. IHES, 62(1986), 257-360.
2. A. Connes, Cyclic cohomology and the transversal fundamental class of a foliation, in *Geometric Method in Operator Algebras*, H. Araki and E. G. Effros, eds., Pitman Research Notes in Math. Series 123(1986), Longman Scientific and Technical, 52-144.
3. A. Connes and H. Moscovici, Cyclic cohomology, the Novikov conjecture and hyperbolic groups, *Topology*, 29(1990), 345-388.
4. H. Moriyoshi and T. Natsume, The Godbillon-Vey cyclic cocycle and longitudinal Dirac operators, preprint.

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEGURO, TOKYO 152, JAPAN

(続) 超単純結び目のタンクル分解

東大数理解 D1 林忠一郎

主定理 $n=1, 2, 3$ について以下が成り立つ。

「 n -simple knot は n 本以下の essential tangle 分解をもたない。」 \square

主定理の言葉を説明する。

定義 $M: 3$ -manifold, $M \supset F: \text{properly imbedded surface}$ について, F が incompressible とは, M 内に imbed された disc D で $D \cap F = \partial D$ なるもの全てに対して, ∂D は F 上で disc を bound すること。

$K: \text{knot} \subset S^3$ が n -simple とは, $E(K) \equiv S^3 - \text{int } N(K): \text{exterior}$ が $\partial E(K)$ 以外に closed incompressible surface で genus $\leq n$ のものを含まないこと。

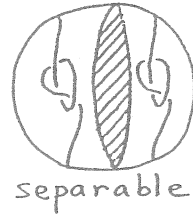
(B, t) が n -tangle とは, B が 3-ball で, t が B 内の n 本の proper arcs なることである。

n -tangle が trivial とは $(\text{disc}, n \text{ points}) \times I$ に homeomorphic なこと。

n -tangle (B, t) が inseparable とは, B 内の t と disjoint な disc で t の component を両側に分ける

ものが存在しないこと。

◦ $(S^3, \text{knot}) = (B, t) \cup (C, u)$:
 n -tangle 分解が essential とは、
 $(B, t), (C, u)$ とともに inseparable
 が \rightarrow non-trivial なること。

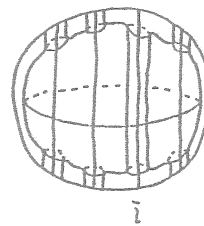


主定理は $n=1$ のときは既知で「simple な
 結び目は prime である。」となる。

相馬先生 & 中西先生は tangle 分解を使
 って simple 絡み目を構成する方法を与えたが、
 本稿はその逆の方向の話とみることもできる。(ISJCN)

定義 (B, t) : n -tangle, $t = t_1 \amalg t_2 \amalg \dots \amalg t_n$ が
tubed incompressible along t_i とは、穴あき球

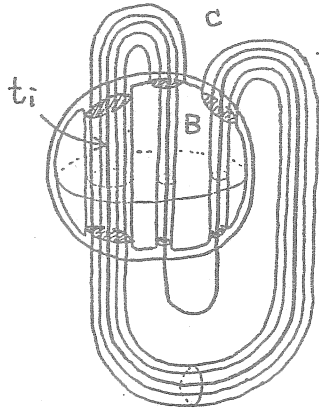
面 $\partial B - \text{int } N(\partial t)$ にアニュラス
 $\text{Fr}(B; N(t_i))$ を接着した曲面
 が incompressible であること。



Lemma 1 $(S^3, \text{knot}) = (B, t) \cup (C, u)$: essential
 n -tangle 分解。 (B, t) : tubed incompressible along
 t_i 。このとき knot exterior は genus = n の closed

incompressible surface を含む。

<証明>



穴あき球面 $\partial B - \text{int } \mathcal{N}(\partial t)$
一枚と

アニュラス $F_r(B; \mathcal{N}(t_i))$

n 枚用意する。

アニュラスたちを延長して

穴あき球面の穴に接続する。

左図のような曲面を得る。

この曲面は incompressible

である。証明は compression disc があつたと

して、それを $2n$ 個の discs $\mathcal{N}(\partial t)$ と disjoint

にとり直せることを示して、矛盾とすることによる。

この曲面を $\mathcal{N}(\partial t)$ との交叉で切ると、各ひもの

周りのアニュラス、 B の方から見て穴あき球面にア

ニュラス $F_r(B; \mathcal{N}(t_i))$ を接続した曲面、 C の方から見

て穴あき球面となっており、いずれも incompressible

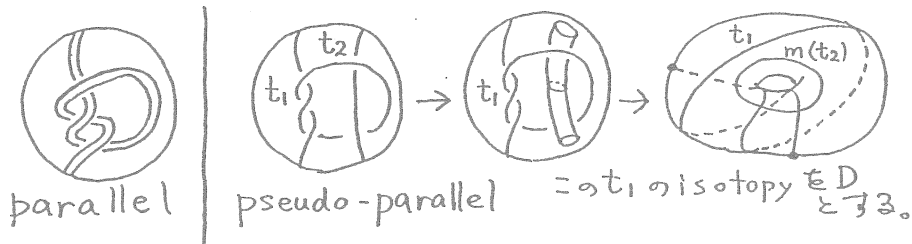
定義・ $(B, t) = n$ -tangle, t も t_1 と t_2 が parallel とは

ひもたちの exterior $E(B; t) \equiv B - \text{int } \mathcal{N}(t)$ が proper

disc D を含み、 $\partial D_{nm}(t_1) = \partial D_{nm}(t_2) = 1$ point,

$\partial D_{nm}(t - t_1 - t_2) = \emptyset$ なることである。ここで、

$m(\cdot)$ は ν の周りのメリディアンルー프を表わす。
 \circ ν も t_1 が t_2 に pseudo-parallel とは、 $E(B;t)$ が proper disc D を含み、 $\partial D \cap m(t_1) = 1 \text{ point}$,
 $\partial D \cap m(t_2) = \text{several points}$, $\partial D \cap m(t-t_1-t_2) = \emptyset$
 なることである。



(註) t_1 が t_2 に pseudo-parallel のとき、 (B,t) は tubed compressible along t_2 とする。



逆は、

Lemma 2 (B,t) : atomic な n -tangle, t_j に沿って tubed compressible とする。このとき、 $\exists t_i$ s.t. t_j に pseudo-parallel \square

上の lemma の "atomic" を説明する。

定義 (B,t) を n -tangle とする。

$\circ B \supset F$: imbedded surface $\wedge t$ が t -incompressible とは、 $\forall D$: imbedded disc s.t. $D \cap F = \partial D$,

$D \cap t = \emptyset$ に対して, ∂D は F 上で t と交わらない disc をはることである。

◦ (B, t) が non-atomic とは, $\exists S \subset B: t$ -incompressible sphere s.t. S が切りとる tangle は non-trivial かつ ν も n 本未満なること。



一方,

Lemma 3 E : orientable irreducible 3-manifold

∂E は genus = n の component をもつ。 E が closed incompressible surface で genus $\leq n$ なるものを含まないとする。 E は genus = n の handlebody (cube with 1-handles) である。 \square

Theorem (Gordon [G] の一部)

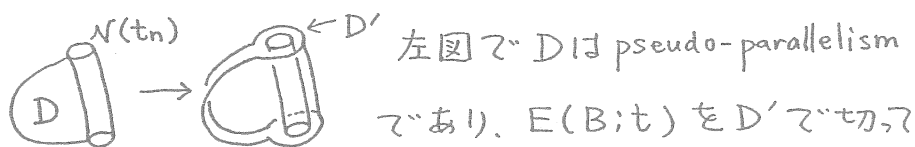
(B, t) : n -tangle \forall components $t' \subset t$ に対してその exterior $E(B; t')$ が handlebody ならば (B, t) は trivial.

Corollary 4 (B, t) : n -tangle, \forall pair t_i, t_j

について, t_i と t_j は互いに pseudo-parallel ならば exterior $E(B; t)$ が handlebody であるとき。

(B, t) は trivial である。

<証明> 例えは t_n は t_1 に pseudo-parallel



solid torus を分離すると, $N(t_n)$ を埋め立てる
 のとでは, 結局同じ結果になる。 ▣

以上をまとめると,

Theorem 5 $(S^3, \text{knot}) = (B, t) \cup (C, u)$: essential
 2-tangle 分解. 結ぶ目の exterior は genus ≤ 2
 なる closed incompressible surface Σ の $\partial \Sigma$ 以外
 のものを含む。

<証明> $\left\{ \begin{array}{l} (B, t): \text{non-atomic} \longrightarrow \text{non-prime knot} \\ E(B; t): \text{not a handlebody} \longrightarrow \text{Lemma 3} \\ (B, t): \text{tubed incompressible} \\ \text{along } t_1 \text{ と } t_2 \text{ のどちらか} \longrightarrow \text{Lemma 1} \end{array} \right.$
 → いずれでもないとき, Lemma 2 と 4 より.

$(B, t): \text{trivial}$ かつ separable ※

⑤ (B, t) , $t = t_1 \# t_2$ において, tubed compressi-
 ble along t_2 ならば t_1 は t_2 に pseudo parallel.
 さらに tubed compressible along t_1 ならば, t_1 と t_2 は
 互いに pseudo parallel になる。(2-tangle だから) ▣

3-tangle を考えるために...

Lemma 6 (B, t) : atomic n-tangle

v も t_1 と t_2 は互いに pseudo-parallel.

他の v も t_1 にも t_2 にも pseudo-parallel ではない。

~~$E(B, t_1 \cup t_2)$: handlebody ではない。~~

このとき, t_1 と t_2 は parallel. \square

Lemma 7 $(S^3, \text{knot}) = (B, t) \cup (C, u)$: essential

3-tangle 分解。 $t = t_1 \cup t_2 \cup t_3$ において,

t_1 と t_2 は互いに pseudo parallel. t_3 は t_1 にも

t_2 にも pseudo parallel ではない。さらに,

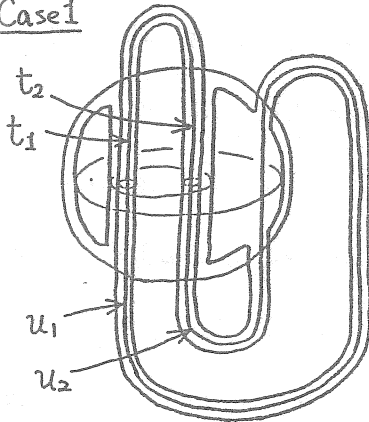
$(B, t), (C, u)$ とともに atomic 75 とき, 結び目の

の exterior は genus = 2 の closed incompressible

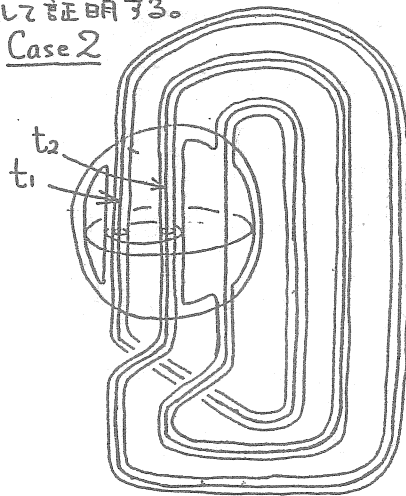
surface を含む。

<証明> Case 1 では, u_1 と u_2 が parallel なときと, そうでないときで場合分けして証明する。

Case 1



Case 2



Lemma 8 (B, t) : atomic 3-tangle

$E(B; t)$: handlebody, $t = t_1 \# t_2 \# t_3$

t_1 と t_2 は互いに pseudo parallel

t_2 は t_3 に pseudo parallel

(1) $E(B; t_1 \cup t_2)$: handlebody $\Rightarrow (B, t)$: trivial

(2) t_3 は t_1 又は t_2 に pseudo parallel $\Rightarrow (B, t)$: trivial

(3) otherwise $\Rightarrow t_1$ と t_2 は parallel \square

(註) pseudo parallelity は推移律を満たす。

Theorem 9 $(S^3, \text{knot.}) = (B, t) \cup (C, u)$: essential

3-tangle 分解. 結の目の exterior は genus ≤ 3

なる closed incompressible surface Σ . ∂E 以外

のものを含む。

<証明> さ～あ、みんなで考えよう！ \blacksquare

～参考文献～

[G] C. McA. Gordon, On primitive sets of loops in the boundary of a handlebody, Top. and its appl. 27 (1987)

[N] Y. Nakanishi, Prime and Simple links, Math. Sem. Notes Kobe univ. 11 (1983)

[S] T. Soma, Simple links and tangles, Tokyo J. of Math. 6 (1983)



ファイバー結び目のリボン同境

津田 塾大・宮崎 桂

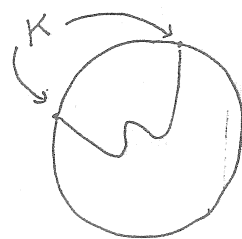
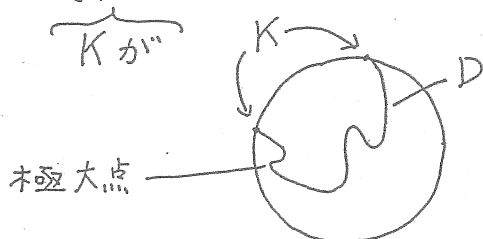
e-mail: miyazaki@tsuda.ac.jp

結び目 K とは 3次元球面 S^3 にうめこまれた有向単純閉曲線。結び目全体の集合は、連結和 $\#$ について群にならない (\because 逆元がない)。そこで4次元を通したゆるい同値関係 “同境 (concordant)” を考える。

DEF (Fox - Milnor) [F-M]

2つの結び目 K_0 と K_1 が同境とは、 $K_i \subset S^3 \times i$ ($i=0,1$) とみたとき K_0 と K_1 が $S^3 \times [0,1]$ にうめこまれた annulus C で結ばれていること。

\mathcal{C} で結び目同境類全体を表わす。結び目 K が \mathcal{C} の零元 (スライス結び目と呼ぶ) なら、 $K \subset \partial B^4$ とみたとき、4次元球体 B^4 内で円板 D を張っている。



リボン結び目

結び目がいつスライスになるか (i.e. \mathcal{C} で零元になるか)

知るのは G の構造を理解するのに重要である。

さて、 K がスライスで、さらに上の円板 D として

B^4 の半径関数について極大点を持たないものと
れるとき、 K を リボン結び目 といふ。(全てのスライス
結び目がリボンかどうか [Fox] は未解決問題。)

例 任意の結び目 k に対し、 \bar{k} で k の鏡像
をとってから向きを逆転させた結び目を
表わす。 $k \# \bar{k}$ はいつもリボン結び目
になる。故に、 G の各元 $[k]$ は逆元 $[\bar{k}]$
をもつので G は群。実はアーベル群。

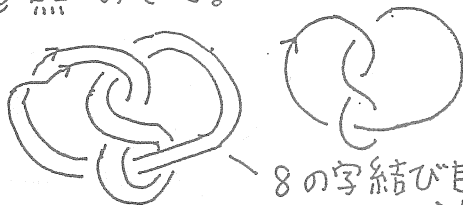


注 $K \subset \partial B^4$ が極大点を持たない円板 $D \subset B^4$
を張ると、包含写像から導かれた
 $\pi_1(\partial B^4 - K) \rightarrow \pi_1(B^4 - D)$ は全射。

リボン結び目がいつも $k \# \bar{k}$ の形にかければ、与え
られた結び目がリボンかどうか判定するのはたやす
いが、こうはならない。ただ、ファイバー結び目 K
($S^3 - \text{int } N(K)$ が S^1 上の曲面束になる結び目) がリ
ボンになる条件は、 K のモドロミーの言葉で言い表
わせる。(Casson-Gordon §2)。ここでは彼らの
[C-G]

定理を応用して、ファイバー結び目がリボンになるための幾何的条件、とくに ℓ の形に表わせるかを考える。簡単な例として、8の字結び目の $(2,1)$ ケーブルがリボンにならないことの証明の概略を §3 で与える。

★ 標題のリボン同境とは“方向づき同境”というべきもの。リボン同境について“極小”な結び目は \mathcal{C} の元の‘本質的代表元’と思える。リボン同境を用いて \mathcal{C} の構造をある程度調べることも可能だが、ここでは触れられなかった。解説 [M] を参照のこと。 8の字結び目



§1

出発点は次の問題。

問題1. K_1, \dots, K_m は素な結び目。

$K = K_1 \# \dots \# K_m$ がリボン結び目のとき、

$\{K_i\}_{i=1}^m$ を $K_{i_1} \cong \overline{K_{j_1}}$ となるような

pairs $\coprod_{i=1}^m \{K_{i_1}, K_{j_1}\}$ にできるか？

これが Yes なら、 m は偶数で $K = \ell \# \overline{\ell}$

ただし $\ell = \#_{i=1}^m K_{i_1}$ 。

しかし、素なリボン結び目が実在するので、一般には答は No. が、次のようにファイバー結び目のある族については正しい。

定理 1. \mathcal{L} を 次のファイバー結び目達からなる族とする。

- (1) iterated torus knots (2) アクサンダー多項式が $f(t)f(t^{-1})$ でわれない素なファイバー結び目、 $f(t)$ は t^k でない多項式 (3) (2) の結び目の iterated cable.

K_1, \dots, K_n を \mathcal{L} からとると、問題 1 の答は Yes.

この定理を用いると、代数的不変量ではスライスでないことを示せなかった様々な結び目が実はリボンにならないことが示せる。例えば δ の字結び目の $(2,1)$ ケーブル K は定理 1 よりリボンでないが、このことは代数的不変量、Casson-Gordon 不変量 (及び 多分その拡張) を使っては示せない。(K がスライスかどうかはまだわかっていない。)

次に ケーブルの形に書けるファイバー結び目がいつリボンになるか考えよう。

問 2 リボン結び目の (p, k) ケーブル はリボンだが、この逆はどうか？ つまり、結び目 k の

(p, φ) ケーブル K が リボン結び目になるのは、
 $\varphi = \pm 1$ で コンパニオン ℓ が リボンの時のみか？

次の定理は、 K が ファイバー結び目ならこの問の答が
おそらく Yes であることを示している。ただし $\ell =$ リボン
はわからず、 $\ell =$ ホモトピーリボン (定義は次節)
しかわからなかった。

定理 2 上の K が ファイバー結び目かつリボンなら
次の (1), (2) が 成立。

(1) $\varphi = \pm 1$; $p > 2 \Rightarrow \ell$ は ホモトピーリボン

(2) 3次元多様体の基本群が剰余有限

\Rightarrow (1) から $p > 2$ ははずせる。

★ ホモロジー球面の結び目では、ホモトピーリボン
でなくても $(2, 1)$ ケーブルをとるとホモトピーリボン
になるものがある。

§ 2

まず ホモロジー球面の結び目に対しホモトピーリボン
を定義する。 S^3 の結び目がリボンならホモトピーリボンだが、

ホモトピーリボン \Rightarrow リボンはわかっていない。

DEF. K をホモロジー球面 Σ 内の結び目とする
もし \exists ホモロジー 4-ball V と V にうめこまれた円板 D で次の性質をみたすものがあれば K はホモトピーリボン。

$$(1) (\partial V, \partial D) = (\Sigma, K)$$

(2) 包含写像から導かれた

$$\pi_1(\Sigma - K) \longrightarrow \pi_1(V - D) \text{ は全射。}$$

K をホモロジー球面内のファイバー結び目でファイバー F をもつとする。つまり、 $S^3 - \text{int } N(K)$ は mapping torus $F \times I / f$ 、ここで automorphism $f: F \rightarrow F$ は $f|_{\partial F} = \text{id}$ で $* \times I / f$ ($* \in \partial F$) が K の preferred longitude になるように選ぶ。
この f が K の モノドロミー。 f は自然に閉曲面 $\hat{F} = F \cup D^2$ 上の autom. \hat{f} に拡張する。この \hat{f} を K の 閉モノドロミー (closed monodromy) とよぶ。

定理 3 (Casson - Gordon) K をホモロジー球面のファイバー結び目とすると、

K がホモトピーリボン $\iff K$ の閉モノドロミーはあるハンドル体上の autom. に拡張する。

この定理を使うために Casson と Long は 閉曲面の自己同相が 3次元多様上の同相に拡張するかどう
かみる アルゴリズムを開発した。が、これは pseudo-Anosov
写像の研究としては実りが多いが、ファイバー結び目
がリボンかどうかみる手段としては非実用的。

定理 1, 2 のような 幾何的条件をだすには、
Johannson による ∂ -パターン付 3-mfd の 特性部分
多様体 (chara. submfd) の理論が威力を発揮す。
彼の理論を簡単にまとめてみる。

n -mfd M^n の ∂ -パターン \mathcal{M} とは、 ∂M の
 $(n-1)$ 次元 submfd の集合で、その内 i 々の共通部分
が $(n-i)$ 次元 submfd になるもの。

∂ -パターン付 mfd (M, \mathcal{M}) から (N, \mathcal{N}) への写像 f
が admissible とは、 $\coprod_{G \in \mathcal{N}} \{f^{-1}(G) \text{ の components}\}$ が
 \mathcal{M} の部分集合になること。つまり \mathcal{M} の各 piece は
 f で \mathcal{N} のどれかの中に収まり、 \mathcal{M} のとなりあつた
pieces は f で \mathcal{N} の同じ piece へは行かない。

K. Johannson は ∂ -パターン付 mfd's とその間の
admissible maps のカテゴリで Jaco-Shalen と同
じような chara submfd の理論を展開している。

∂ -irreducible に対応する 'useful' ∂ -11°タンを定義して...

定理 4 (Johannson) [Jo]

\mathcal{M} が irreducible 3-mfd M の 'useful' ∂ -11°タンなら (M, \mathcal{M}) は \exists ∂ -11°タン付の chara submfd X^3 を unique に持つ。 X は次の性質をみたすものの内 '極大' である。

$\left\{ \begin{array}{l} X \text{ は Seifert fibered spaces と } I\text{-bundle からなる。} \\ X \text{ の component } X_0 \text{ の } \partial\text{-11°タンは,} \\ X_0: \text{Seifert fibered} \Rightarrow \text{saturated annuli} \\ X_0: I\text{-bundle} \Rightarrow \text{その'ふた' と側面の annuli or disks} \\ \overline{M-X} \text{ は } \partial\text{-11°タン付 'simple' mfd} \end{array} \right.$

[Jo]

定理 5 (Johannson) ∂ -11°タン付 simple mfd の mapping class group は有限群

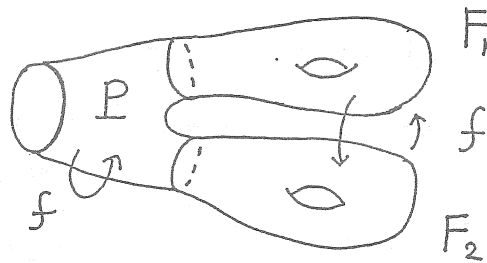
次節では、8の字結び目の $(2, 1)$ ケーブルがリボンでないことの証明を例にとり、Johannson の理論の有交か性をみよう。

§3「8の字結び目の(2,1)ケーブルKはリボン結び目ではない。」

(2,1) ケーブルは $S^1 \times D^2$ 内のファイバー結び目で、

ファイバーは穴の2つあいた円板 P 。

8の字結び目のファイバーは穴の1つあいたトーラス。よって K のファイバー F は、 P と 2枚の穴あきトーラス F_1, F_2 の和になる。



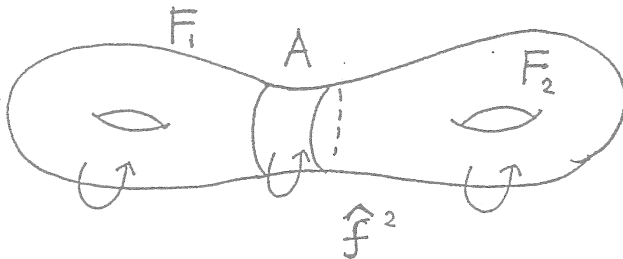
K のモノドロミー f は、 F_1 と F_2 を入れかえ、 $f(P) = P$ となるよう作用する。又、 $f^2|_{F_i}$ は 8の字結び目のモノドロミー。

$\hat{F} = D^2 \cup F$ は 種数 2 の閉曲面: F_1, F_2 と annulus $A = D^2 \cup P$ の和。(2,1) ケーブルのモノドロミーをよく調べてみると次がわかる。

補題1 \hat{f} をアイソトピーで調整すると.

(1) $\hat{f}^2|_{F_i} : F_i \hookrightarrow$ は 8 の字結び目のモドロシー

(2) $\hat{f}^2|_A$ は -4 -Dehn twist.



$\hat{f} : \hat{f} \hookrightarrow$ が種数 2 の \exists ハンドル体 H 上の \exists 自己同相 φ に拡張すると仮定して矛盾を導く.

(\hat{f} は ある 3-mfd 上の自己同相には拡張する)

補題2 F_1, A, F_2 は各々 H で incompressible

$\therefore (\hat{f}|_{F_i})_* : H_1(F_i) \hookrightarrow$ の特性多項式

(= 8 の字結び目のアレクサンダー多項式)
は既約。

これだけでは、 F_1, A, F_2 がハンドル体 H に対しどのように位置しているかわからない。

今の場合、実は

補題3 \exists 同相写像 $H \longrightarrow F_1 \times [0, 1]$
 s.t. $F_1 \xrightarrow{\text{id}} F_1 \times 1$
 $F_2 \longrightarrow F_1 \times 0$
 $A \longrightarrow \partial F_1 \times [0, 1]$

\therefore 補題2 を使うと、 $\mathcal{L} = \{F_1, A, F_2\}$ は H の useful ∂ -11°タン。

よって (H, \mathcal{L}) は chara submfd X をもつ。

φ は (H, \mathcal{L}) の autom. なので、 $\varphi(X)$ もやはり (H, \mathcal{L}) の chara submfd.

chara submfd の一意性より $\varphi(X) = X$ 。

よって $\widehat{\varphi}|_{H-X} : \overline{H-X} \ni$ は periodic autom に isotopic.

さて、今 δ の字結び目のモノドロミ $\widehat{\varphi}|_{F_2}$ は irreducible で nonperiodic なので F_2

は X で ∂ を ∂ 覆われねばならない。 X

の本極大性も考えあわせると結局 $H = X$

つまり、 H は F_1, F_2 を上下のふたとして

A を側面 annulus とする product I-bundle.

次は補題1 からでる。

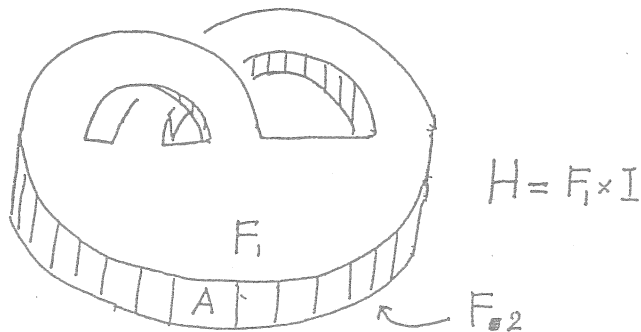
補題4 H の autom φ を アイソトピーで動かすと,

$\varphi^2|_{F_1}: F_1 \rightarrow F_1$ は 8の字結び目のモドロミ

$$\varphi^2|_A = \text{id}_A$$

$$\varphi^2|_{F_{\#2}} = \tau^{-4} \circ g : F_{\#2} \rightarrow F_{\#2}$$

ここで $\tau: F_{\#2} \rightarrow F_{\#2}$ は、 ∂F_0 に 平行な 曲線 につ
いての Dehn twist. g は 8の字結び目の
モドロミ。



ここから 矛盾 を 導く のには、結び目の 補空間
予想 or Cyclic Surgery Th or Property P が 必要。

H の 上 ぶた F_1 から 下 ぶた $F_{\#2}$ へ の 自然な
射影 $p: F_1 \rightarrow F_{\#2}$ は 向きを 逆転する ($\because F_1$ と
 F_0 の 向きは H から 決まる)。さらに、

$$p \circ (\varphi^2|_{F_1}) \circ p^{-1} = \varphi^2|_{F_{\#2}} \text{ と して よい。}$$

$\varphi^2|_{F_0}$ の mapping torus も $\varphi^2|_{F_1}$ の mapping

torus も \mathcal{S} の字結び目の exterior E に同相。

$\therefore P$ は E の orientation reversing automorphism

$P: E \rightarrow E$ を導く。

$\lambda, \mu \subset \partial E$ を \mathcal{S} の字結び目の

longitude-meridian pair とすると、

$$P(\lambda) = -\lambda \quad P(\mu) = -4\lambda + \mu.$$

つまり、 E の 2 通りの Dehn filling $E(\mu)$ と

$E(-4\lambda + \mu)$ で S^3 がえられることになるが、

μ と $-4\lambda + \mu$ の代数的交点数は 4 なので

Cyclic Surgery Th. etc に反する。 //

(注) 以上の議論は、次の性質^(*)をみたすファイバー結び目 \mathcal{S} の $(2, 1)$ ケーブルがリボンでないことも示している。

(*) \mathcal{S} のアレクサンダー多項式も、モノドロミーもそれぞれの意味で既約。

一般には、 \mathcal{S} のモノドロミーは既約でないので、以上のような議論を、モノドロミーの既約成分ごとに行う必要がある。

以上

References

- [C-G] A.Casson and C.Gordon, A loop theorem for duality spaces and fibred ribbon knots, Invent. Math. 74(1983), 119---137.
- [Fox] R.H.Fox, A quick trip through knot theory, Topology of Manifolds Prentice-Hall, 1962, 120---167.
- [F-M] R.H.Fox, J.Milnor, Singularities of 2-spheres in 4-space and cobordism of knots, Osaka J. Math. 3(1966), 257---267.
- [Jo] K.Johannson, Homotopy equivalence of 3-manifolds with boundary, Lect. Notes in Math. 761, Springer-Verlag, 1979.
- [M] K.Miyazaki, Fibered knots の ribbon concordance, 津田トポロジーシンポジウム報告集, 1992.

配置写像を伴う K-理論とその応用

岡山大学教養部 森本 雅治

1. はじめに

ここでは G は有限群としよう。トポロジーの歴史を振り返ってみると

$\mathbb{Z}[G]$ -加群のある圏 \mathcal{C} ,
その Grothendieck 群をとり $K_0(\mathcal{C})$, あるいは
同型写像の同値類から $K_1(\mathcal{C})$

を考えると、今では慣例化した手続きが大変重要だった。たとえば、

$$K_0(\mathbb{Z}[G]), K_1(\mathbb{Z}[G]), GW_0(\mathbb{Z}, G), L_n(G)$$

などはトポロジーの研究に大いに役立った。

これらの手法を次のような装飾を施した加群の圏にたいして新ためて考えてみるのが面白そうだ。

R は単位元を持つ可換環, $A = R[G]$ は群環, Θ は有限 G -集合とし, R -加群は (したがって A -加群も) R -上有限生成なものに限定する。

定義. (A, Θ) -加群 (M, α) とは A -加群 M と G -写像 $\alpha: \Theta \rightarrow M$ の対のこととする。この α を Θ -配置写像 (Θ -positioning map) と呼ぶことにする。特に Θ が唯 1 つの元からなるときには (M, α) を基点を持つ G -加群と呼ぶ。

直和. (A, Θ) -加群 $(M_i, \alpha_i), i = 1, 2$, があるとき, その直和

$$(M_1, \alpha_1) \perp (M_2, \alpha_2) = (M_1 \oplus M_2, \alpha_1 \perp \alpha_2)$$

を

$$\alpha_1 \perp \alpha_2(\gamma) = (\alpha_1(\gamma), \alpha_2(\gamma)) \in M_1 \oplus M_2 \text{ for } \gamma \in \Theta$$

により定義する。

このような配置写像を伴う A -加群でいろいろな K -理論的群を作り調べてみれば、それがトポロジーの研究に貢献するのでは—と期待できる。たとえば

$$K_0(\mathbb{Z}[G], \Theta), K_1(\mathbb{Z}[G], \Theta), GW_0(\mathbb{Z}, G, \Theta), L_n(G, \Theta)$$

などは定義されて、役に立つのでは—。

実際 4次元のトポロジーでも変換群論においても配置写像を伴う hermitian modules の研究が役立つことがわかってきた。4次元のトポロジーに関しては [LW1], [LW2], [HK] と付録を見られたい。

定義. X は n -次元の G -空間としよう。整数 l ($0 \leq l \leq n$) を1つ決めて、

$$\Theta(X, l) = X \text{ の } H\text{-不動点集合の } l\text{-次元の連結成分の全体}$$

とおく。ただし H は G の部分群のすべてを渡る。いま $\gamma \in \Theta(X, l)$ にたいして、 X_γ で γ に対応する X の部分空間を表すことにしよう。 $\Theta(X, l)$ 上の G -作用を $X_{g\gamma} = gX_\gamma$ をみたすように与えることができる。

話を簡単にするために、 X は n -次元の向き付けられた、連結、閉多様体で、 X_γ はすべて向き付けられていて、その上任意の $g \in G$ にたいして、

$$g: X_\gamma \rightarrow X_{g\gamma} \text{ は向きを保つ}$$

と仮定する。このとき、

$$\alpha: \Theta(X, l) \rightarrow H_l(X; \mathbb{Z})$$

を

$$\alpha(\gamma) = i_{\gamma*}([X_\gamma]) \in H_\ell(X)$$

により定義する。ただし、 $[X_\gamma] \in H_\ell(X_\gamma)$ は X_γ の向きを表す基本類で、 $i_\gamma : X_\gamma \rightarrow X$ は自然な包含写像である。この α は G -map になっている。こうして得られた G -加群と G -写像の組

$$(H_\ell(X), \alpha)$$

を取ると配置写像を伴う加群が得られる。特に、 $n = 2k, \ell = k$ の場合には交差形式 (Poincaré pairing)

$$\lambda : H_k(X) \times H_k(X) \rightarrow \mathbb{Z}$$

があるので同変交差形式

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : H_k(X) \times H_k(X) &\rightarrow \mathbb{Z}[G] \\ \langle x, y \rangle &= \sum_{g \in G} \lambda(x, g^{-1}y)g \end{aligned}$$

が得られる。これを加えた 3 つ組

$$(H_k(X), \langle , \rangle, \alpha)$$

(配置写像を伴う hermitian module) が興味深い。たとえば G -signature $Sign(G, X) \in K_0(\mathbb{C}[G])$ は 3 つ組の同値類

$$[H_k(X)/Tor, \langle , \rangle, \alpha] \in GW_{2k}(\mathbb{Z}, G, \Theta(X, k))$$

の準同型写像

$$GW_{2k}(\mathbb{Z}, G, \Theta(X, k)) \rightarrow GW_{2k}(\mathbb{Z}, G) \rightarrow K_0(\mathbb{C}[G])$$

の像として理解できる。もちろんこの 3 つ組の同値類は適当な意味の G -cobordism のもとで不変である。

2. G -手術障理論の拡張

ここでは多様体や作用は滑らかなもの限定し、 X の次元は $n = 2k \geq 6$ としよう。 X の特異集合 $S_G X$ は

$$S_G X = \bigcup_{g \in G \setminus \{1\}} X^g$$

で定義される。 G -手術理論は

- (1) $\dim S_G X \leq k - 2$ のとき、おもに T. Petrie により、
- (2) $\dim S_G X = k - 1$ のときは、筆者によって、
- (3) $\dim S_G X = k$ のときは、 $|G| = 2$ でしかも X^G が連結な向き付け可能多様体の場合に限り K. H. Dorvermann によって

与えられた。

$\dim S_G X = k$ ならば、一般的な有限群 G のときには、Wall 群を拡張して G -手術障害類群を得ることはできないだろう、と Petrie や Dovernann は予想していた。しかし、A. Bak と筆者は配置写像を伴う generalized quadratic modules の圏を用いて Wall 群を拡張し、さらにその中に G -手術障害類が存在することを発見した。

これを少し説明しよう。 Y も X と同様の G -多様体とし Y は単連結と仮定する。

枠付き G -写像. G -写像 $f: X \rightarrow Y$ とベクトル束の安定 G -同型写像 $b: T(X) \rightarrow f^* \xi$ の組 $f = (f, b)$ を枠付き G -写像という。ここで $T(X)$ は X の接ベクトル束であり、 ξ は Y 上の G -ベクトル束である。ここでは f は写像度 1 のものに限定する。

目標は $f: X \rightarrow Y$ を X の free part で G -手術して X を単連結、 f をホモトピー同値写像に直すことである。いま

弱ギャップ条件 $\dim S_G X \leq k$

が成り立っていると仮定する。すると $(k-1)$ -次元までの G -手術により $f: X \rightarrow Y$ は k -連結にできる。さらに

$$K_k(f) = \text{Ker}[f_* : H_k(X) \rightarrow H_k(Y)]$$

を Kill できれば, f はホモトピー同値写像になる。

次の状況になっていればこの $K_k(f)$ を Kill できるのだが—:

- (1) $K_k(f)$ は $\mathbb{Z}[G]$ 上の free basis $\{x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_m\}$ を持ち,
- (2) 各 x_i は normal bundle が trivial な埋め込み $h_i: S^k \rightarrow X$ で実現できて
- (3) gh_i と $g'h_j$ は $g = g'$ かつ $i = j$ でない限り交わらない, 特に
- (4) すべての h_i は $S_G X$ と交わらない。

したがって, 上の (1)-(4) を代数的条件に書換えれば良いというわけだ—。

今後簡単のため

G の任意の hyperelementary 部分群 $H \neq \{1\}$ にたいして $f^H: X^H \rightarrow Y^H$ は \mathbb{Z} -ホモロジー同値写像である

と仮定し, さらに

$$\dim(X_\gamma \cap X_\beta) \leq k-2 \quad (\forall \gamma \in \Theta(X, k), \forall \beta \in \Theta(X, k-1))$$

としよう。

定理 2.1. 枠付き G -写像 $f = (f, b)$, $f: X \rightarrow Y$, にたいして G -手術障害類群 $W_n(G, Y, S_G X)$ が定まる。すなわち, $\sigma(f) \in W_n(G, Y, S_G X)$ が f から一意的に定まり, $\sigma(f) = 0 \Leftrightarrow f$ を $S_G X$ を保ったまま G -手術してホモトピー同値写像にできる。この $W_n(G, Y, S_G X)$ は次の data のみに依存してきまる。

- (1) $n \bmod 4$,

- (2) $w : G \rightarrow \{\pm 1\}$ orientation homomorphism,
- (3) $G(Y, k-1) = \{g \in G \mid g^2 = 1, g \neq 1, \dim Y^g = k-1\}$,
- (4) $G(Y, k) = \{g \in G \mid g^2 = 1, g \neq 1, \dim Y^g = k\}$,
- (5) $\Theta = \Theta(X, k)$ with $\rho_G : \Theta \rightarrow \mathcal{S}(G)$.

ここで $\mathcal{S}(G)$ は G の部分群の全体で, ρ_G は

$$\rho_G(\gamma) = \bigcap_{x \in X_\gamma} G_x$$

で与えられる.

3. Induction Theory

上の定理 2.1 を実際に使おうとすると, いつ $\sigma(\mathbf{f}) = 0$ か知る術を持たなければならない. このために A. Dress 型の induction theory を考えてみる.

つぎの条件 (3.1) をみたすとき $S_G X$ は単純であるということにしよう.

(3.1) 各 $\gamma \in \Theta(X, k)$ にたいして, $\rho_G(\gamma)$ は unique nontrivial minimal subgroup を持つ.

定理 3.2. もし $S_G X$ が単純であれば

$$H \longmapsto W_n(H, Y, S_H X)$$

は Mackey 函手になる.

この節では \mathcal{H} は G の部分群からなるある集合で, つぎの条件をみたすものとする.

$$\left\{ \begin{array}{l} \bigcup_{H \in \mathcal{H}} (\Theta(\text{Res}_H^G X, k) \times \Theta(\text{Res}_H^G X, k)) = \Theta(X, k) \times \Theta(X, k), \\ \mathcal{H} \text{ は } G \text{ のすべての 2-hyerelementary 部分群を含む.} \end{array} \right.$$

$\Omega(G)$ は G の Burnside 環, すなわち $\Omega(G)$ は有限 G -集合のなす圏の Grothendieck 群とする. $\beta \in \Omega(G)$ が

$$\begin{cases} \beta = \sum_{H \in \mathcal{H}} a(H)[G/H] \quad (a(H) \in \mathbb{Z}) \\ \text{Res}_H^G \beta = 1 \text{ in } \Omega(H) \quad (\forall H \in \mathcal{H}) \end{cases}$$

をみたすときには β を \mathcal{H} 上の単位元と呼ぼう.

例 3.3. G は非可解群とし, $G(s) = \bigcap_i G_i$, $G_0 = G$, $G_{i+1} = [G_i, G_i]$ とおく. \mathcal{H} は $G(s)$ を含まない G の部分群の全体とする. このとき \mathcal{H} 上の単位元 $\beta \in \Omega(G)$ が存在する.

定理 3.4. $\Theta(H) = \Theta(\text{Res}_H^G X, k)$ とおく. もし $S_G X$ が単純であれば, 以下の性質を持つ Green 関手

$$H \mapsto GW_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H))$$

が存在する.

- (1) $W_n(H, Y, S_H X)$ は $GW_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H))$ 上の Green 加群である.
- (2) \mathcal{H} 上の単位元 $\beta \in \Omega(G)$ があるときには,

$$\text{Ind} : \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} GW_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H)) \rightarrow GW_0(\mathbb{Z}, G, \Theta(G)) \text{ は全射,}$$

$$\text{Res} : GW_0(\mathbb{Z}, G, \Theta(G)) \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} GW_0(\mathbb{Z}, H, \Theta(H)) \text{ は単射である.}$$

Green 加群の一般論からつぎの定理を得る.

定理 3.5. 上の定理の仮定のもとで,

$$\text{Ind} : \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} W_n(H, Y, S_H X) \rightarrow W_n(G, Y, S_G X) \text{ は全射,}$$

$$\text{Res} : W_n(G, Y, S_G X) \rightarrow \bigoplus_{H \in \mathcal{H}} W_n(H, Y, S_H X) \text{ は単射である.}$$

この定理から導かれる

$$(3.6) \quad (1 - \beta)\sigma(\mathbf{f}) = 0$$

という単純な結論が、変換群論に応用する際に重要である。

4. 球面上の滑らかな one fixed point actions

R. Oliver はどのような群 G が閉球 D (次元は問わない) に G -不動点を持たずに作用するかを研究し、

$$G \notin \mathcal{G}_p^q \quad (\forall p, q)$$

のときであることを示した。ここで p, q は素数または 1 で、 \mathcal{G}_p^q はつぎのような正規部分群の列 $P \triangleleft H \triangleleft K$ を持つ群 K からなる族である: H/P は巡回群で、 $P, K/H$ はそれぞれ p -べき、 q -べきの位数を持つ。そこで閉球に G -不動点をもたずに作用する群を Oliver 群と呼ぶことにしよう。たとえば非可解群は Oliver 群である。

球面 S 上の滑らかな G -作用で、 $|S^G| = 1$ をみたすもの (one fixed point action) を考えよう。明らかに G は Oliver 群でなければならない。つぎの問題は変換群論では classical なものである。

問題. すべての Oliver 群は球面上の滑らかな one fixed point action を持つか。

この問題にたいして Petrie は奇数位数の可換群に限ればそうであることを証明している。我々は (3.6) を応用すればつぎの定理を証明することができる。

定理 4.1 ([LMP]). 有限非可解群 G は球面上の滑らかな one fixed point action を持つ。

大ざっぱにアイデアを説明すると、まず X^G が唯 1 つの点からなるような枠付き G -写像 $f: X \rightarrow Y$ を作る。ここで Y は適当な線型作用を持つ球面 $Y = S(\mathbb{R} \oplus V)$, $|Y^G| = 2$, である。もし G -手術障害類

$$\sigma(f) \in W_n(G, Y, \mathcal{S}_G X)$$

に巡り会えば、(3.6) 式を思い出そう。まず

$$-\beta = \sum_{H \in \mathcal{H}} b(H)[G/H] \quad (b(H) \in \mathbb{Z})$$

と書いてみる。すると (3.6) 式の左辺は

$$(1 - \beta)\sigma(f) = \sigma \left(f \#_{H \in \mathcal{H}} \{b(H)(G \times_H \text{Res}_H^G f)\} \right)$$

と読み取れる。右辺の $\sigma(\)$ の $(\)$ の中身に正確な意味付けを与えて、 G -手術障害類の消える枠付き G -写像 $f': X' \rightarrow Y$, $X^G = X'^G$, を作ることができる。この f' を G -surgery して滑らかな one fixed point action を持つホモトピー球面 Σ を得る。さらに Σ の適当な G -連結和を取り標準球面上の滑らかな one fixed point action を得ることができる。

このアイデアをもっとナイーブに発展させると、つぎの定理を得ることができる。

定理 4.2. 有限べき零群 G に限れば、任意の Oliver 群 G は球面上の滑らかな one fixed point action を持つ。

また筆者にとって最大の目標であったつぎの定理を新しい G -手術理論を用いて証明できた。

定理 4.3 ([BM]). 5 次の交代群 A_5 は 8 次元の標準球面の上の滑らかな *one fixed point action* を持つ。したがって

S^n の上の滑らかな *one fixed point action* が存在する $\Leftrightarrow n \geq 6$

である。

付録. 4 次元のトポロジーから

N を単連結 4 次元位相多様体としよう。いま、どのようなホモロジー元

$$x \in H_2(N; \mathbb{Z})$$

が管状近傍を持つような埋め込み $S^2 \rightarrow N$ で実現できるかを考えてみよう。この問題は最近、R. Lee-D. M. Wilczyński [LW1], [LW2] と I. Hambleton-M. Kreck [HK] によって次のステップを踏んで解決された。

(1) まず $x \oplus 0$ を $N(k) = N \# k(S^2 \times S^2)$, ($k \gg 0$), の中の球面 S で実現する。(このための必要十分条件が

$$KS(N) = (1/8)(\sigma(N) - x \cdot x) \pmod{2} \text{ if } x \text{ is characteristic}$$

を証明する。ここで $KS(\)$ は Kirby-Siebenmann invariant.) このとき $N_0 = N(k) \setminus S$ の基本群が有限巡回群になるようにしておく。この巡回群を G とし、 $G \neq \{1\}$ として話を進める。 N_0 の普遍被覆 $p_0: X_0 \rightarrow N_0$ を拡張して分岐被覆 $p: X \rightarrow N(k)$ を作る。(G が X に semi-free に作用し $X \setminus X^G = X_0$, $X/G = N(k)$, $X^G = X^G/G = S$ が成り立っている。) こうして 3 つ組 $(H_2(X), \langle, \rangle, [X^G])$ を得る。これは $\Theta(X, 2)$ が唯 1 つの元から成る場合である。

(2) 次にこの pointed hermitian module を

$$(H_2(X), \langle, \rangle, [X^G]) = P \oplus H(A^k)$$

と直和分解する。(この分解のための必要十分条件が

$$b_2(N) \geq \left| \sigma(N) - 2j(d-j) \frac{x \cdot x}{d^2} \right| \quad (\forall j: 0 \leq j < d)$$

であることを証明する。ここで d は x の divisibility.)

(3) hyperbolic part の lagrangian の基底 $\{x_1, \dots, x_k\}$ に沿って X をその free part の中で G -surgery し, X' を得る。このとき X'/G は N と同相である。上の pointed hermitian module の分解を注意深く行って $(H_2(X'/G), \lambda_{X'/G}, [X^G])$ が $(H_2(N), \lambda_N, x)$ と同型になるようにしておく。この代数的同型写像を同相写像 f で実現すると $f(X^G)$ が求める球面である。

参考文献

- [BM] Bak, A. and Morimoto, M., *Equivariant surgery on compact manifolds with half dimensional singular sets*, preprint.
- [D] Dress, A., *Induction and structure theorems for Grothendieck and Witt rings of orthogonal representations of finite groups*, Bulletin Amer. Math. Soc. 79 (1973), 741-745.
- [HK] Hambleton, I. and Kreck, M., *Cancellation of hyperbolic forms and topological four-manifolds*, preprint (1991).
- [LMP] Laitinen, E., Morimoto, M., and Pawałowski, K., *Smooth actions of finite nonsolvable groups on spheres*, preprint.
- [LW1] Lee, R. and Wilczyński, D. M., *Locally flat 2-spheres in simply connected 4-manifolds*, Comment. Math. Helv. 65 (1990), 388-412.
- [LW2] Lee, R. and Wilczyński, D. M., *Representing homology classes by locally flat 2-spheres*, preprint (1991).
- [M] Morimoto, M., *Positioning map, equivariant surgery obstruction, and applications*, RIMS Kokyuroku 793 (1992), 75-93.
- [O] Oliver, R., *Fixed point sets of finite group actions on acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 155-177.
- [P] Petrie, T., *One fixed point actions on spheres, I*, Adv. Math. 46 (1982), 3-14.

この定理から導かれる

$$(3.6) \quad (1 - \beta)\sigma(f) = 0$$

という単純な結論が、変換群論に応用する際に重要である。

4. 球面上の滑らかな one fixed point actions

R. Oliver はどのような群 G が閉球 D (次元は問わない) に G -不動点を持たずに作用するかを研究し、

$$G \notin \mathcal{G}_p^q \quad (\forall p, q)$$

のときであることを示した。ここで p, q は素数または 1 で、 \mathcal{G}_p^q はつぎのような正規部分群の列 $P \triangleleft H \triangleleft K$ を持つ群 K からなる族である： H/P は巡回群で、 $P, K/H$ はそれぞれ p -べき、 q -べきの位数を持つ。そこで閉球に G -不動点をもたずに作用する群を Oliver 群と呼ぶことにしよう。たとえば非可解群は Oliver 群である。

球面 S 上の滑らかな G -作用で、 $|S^G| = 1$ をみたすもの (one fixed point action) を考えよう。明らかに G は Oliver 群でなければならない。つぎの問題は変換群論では classical なものである。

問題. すべての Oliver 群は球面上の滑らかな one fixed point action を持つか。

この問題にたいして Petrie は奇数位数の可換群に限ればそうであることを証明している。我々は (3.6) を応用すればつぎの定理を証明することができる。

定理 4.1 ([LMP]). 有限非可解群 G は球面上の滑らかな one fixed point action を持つ。

大ざっぱにアイデアを説明すると、まず X^G が唯 1 つの点からなるような枠付き G -写像 $f: X \rightarrow Y$ を作る。ここで Y は適当な線型作用を持つ球面 $Y = S(\mathbb{R} \oplus V)$, $|Y^G| = 2$, である。もし G -手術障害類

$$\sigma(f) \in W_n(G, Y, S_G X)$$

に巡り会えば、(3.6) 式を思い出そう。まず

$$-\beta = \sum_{H \in \mathcal{H}} b(H)[G/H] \quad (b(H) \in \mathbb{Z})$$

と書いてみる。すると (3.6) 式の左辺は

$$(1 - \beta)\sigma(f) = \sigma \left(f \#_{H \in \mathcal{H}} \{b(H) (G \times_H \text{Res}_H^G f)\} \right)$$

と読み取れる。右辺の $\sigma(\quad)$ の (\quad) の中身に正確な意味付けを与えて、 G -手術障害類の消える枠付き G -写像 $f': X' \rightarrow Y$, $X^G = X'^G$, を作ることができる。この f' を G -surgery して滑らかな one fixed point action を持つホモトピー球面 Σ を得る。さらに Σ の適当な G -連結和を取り標準球面上の滑らかな one fixed point action を得ることができる。

このアイデアをもっとナイーブに発展させると、つぎの定理を得ることができる。

定理 4.2. 有限べき零群 G に限れば、任意の Oliver 群 G は球面上の滑らかな one fixed point action を持つ。

また筆者にとって最大の目標であったつぎの定理を新しい G -手術理論を用いて証明できた。

定理 4.3 ([BM]). 5 次の交代群 A_5 は 8 次元の標準球面の上の滑らかな one fixed point action を持つ。したがって

S^n の上の滑らかな one fixed point action が存在する $\Leftrightarrow n \geq 6$

である。

付録. 4 次元のトポロジーから

N を単連結 4 次元位相多様体としよう。いま、どのようなホモロジー元

$$x \in H_2(N; \mathbb{Z})$$

が管状近傍を持つような埋め込み $S^2 \rightarrow N$ で実現できるかを考えてみよう。この問題は最近、R. Lee-D. M. Wilczyński [LW1], [LW2] と I. Hambleton-M. Kreck [HK] によって次のステップを踏んで解決された。

(1) まず $x \oplus 0$ を $N(k) = N \# k(S^2 \times S^2)$, ($k \gg 0$), の中の球面 S で実現する。(このための必要十分条件が

$$KS(N) = (1/8)(\sigma(N) - x \cdot x) \pmod{2} \text{ if } x \text{ is characteristic}$$

を証明する。ここで $KS(\)$ は Kirby-Siebenmann invariant.) このとき $N_0 = N(k) \setminus S$ の基本群が有限巡回群になるようにしておく。この巡回群を G とし, $G \neq \{1\}$ として話を進める。 N_0 の普遍被覆 $p_0: X_0 \rightarrow N_0$ を拡張して分岐被覆 $p: X \rightarrow N(k)$ を作る。(G が X に semi-free に作用し $X \setminus X^G = X_0$, $X/G = N(k)$, $X^G = X^G/G = S$ が成り立っている。) こうして 3 つ組 $(H_2(X), \langle, \rangle, [X^G])$ を得る。これは $\Theta(X, 2)$ が唯 1 つの元から成る場合である。

(2) 次にこの pointed hermitian module を

$$(H_2(X), \langle, \rangle, [X^G]) = P \oplus H(A^k)$$

と直和分解する。(この分解のための必要十分条件が

$$b_2(N) \geq \left| \sigma(N) - 2j(d-j) \frac{x \cdot x}{d^2} \right| \quad (\forall j: 0 \leq j < d)$$

であることを証明する。ここで d は x の divisibility.)

(3) hyperbolic part の lagrangian の基底 $\{x_1, \dots, x_k\}$ に沿って X をその free part の中で G -surgery し, X' を得る. このとき X'/G は N と同相である. 上の pointed hermitian module の分解を注意深く行って $(H_2(X'/G), \lambda_{X'/G}, [X^G])$ が $(H_2(N), \lambda_N, x)$ と同型になるようにしておく. この代数的同型写像を同相写像 f で実現すると $f(X^G)$ が求める球面である.

参考文献

- [BM] Bak, A. and Morimoto, M., *Equivariant surgery on compact manifolds with half dimensional singular sets*, preprint.
- [D] Dress, A., *Induction and structure theorems for Grothendieck and Witt rings of orthogonal representations of finite groups*, Bulletin Amer. Math. Soc. 79 (1973), 741-745.
- [HK] Hambleton, I. and Kreck, M., *Cancellation of hyperbolic forms and topological four-manifolds*, preprint (1991).
- [LMP] Laitinen, E., Morimoto, M., and Pawłowski, K., *Smooth actions of finite nonsolvable groups on spheres*, preprint.
- [LW1] Lee, R. and Wilczyński, D. M., *Locally flat 2-spheres in simply connected 4-manifolds*, Comment. Math. Helv. 65 (1990), 388-412.
- [LW2] Lee, R. and Wilczyński, D. M., *Representing homology classes by locally flat 2-spheres*, preprint (1991).
- [M] Morimoto, M., *Positioning map, equivariant surgery obstruction, and applications*, RIMS Kokyuroku 793 (1992), 75-93.
- [O] Oliver, R., *Fixed point sets of finite group actions on acyclic complexes*, Comment. Math. Helv. 50 (1975), 155-177.
- [P] Petrie, T., *One fixed point actions on spheres, I*, Adv. Math. 46 (1982), 3-14.

