

第38回

トポロジー・シンポジウム

講演集

1991年7月18日~20日

於 熊本大学

平成3年度科学研究費補助金・総合研究(A)

課題番号 02302003



## 序

この講演集は、1991年7月18日から20日の間、熊本大学で開催される第38回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して、研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

1991年7月

### シンポジウム世話人

神 島 芳 宣

大 嶋 秀 明

小 林 一 章

## 附記

この講演集は、

科学研究費・総合研究（A） 「位相幾何学の総合的研究」

（課題番号 02302003）

により作られたものであることを附記しておく。

研究代表者 加 藤 十 吉



## 目次

1. Topology via set theory  
加藤 昭男 (防衛大) …… 1
2. Standard Spatial Graph  
小林 一章 (東女大) …… 19
3. Orbifold models and 3-manifold invariants  
河野 俊丈 (九州大) …… 27
4. Margulis-Pesin のエントロピー等式をめぐって  
辻井 正人 (京大) …… 33
5. 同変 Serre 問題と線形性問題  
橋田 幹也 (阪市大) …… 41
6. Piecewise linear homeomorphisms of a circle and examples  
of exceptional homomorphisms  
皆川 宏之 (北大) …… 61
7. リーマン面の退化：非アーベルモノドロミーと一般商空間  
松本 幸夫 (東大) …… 73
8. 結び目の半順序とその応用  
谷山 公規 (早大) …… 81
9. 安定曲線のモジュライ空間におけるサイクルの構成  
大場 清 (東大) …… 97
10. 有限群の分類空間の Morava K 理論について  
田辺 理正 (京大) …… 117

1 1. 葉層構造の amenability と横断オイラー類

三松 佳彦 (中大) …… 1 2 1

1 2. 2次元ブレイドについて

鎌田 聖一 (阪市大) …… 1 4 1

1 3. 双曲的多様体とその境界の体積の関係

宮本 洋介 (佐賀大) …… 1 5 3

# TOPOLOGY VIA SET THEORY

防衛大 加藤昭男

1963年、Cohenが“forcing”を用いて連続体仮説の独立性を示して以来、公理的集合論は爆発的に発展し、数学の各分野にその影響を及ぼしてきている。特に、一般位相空間論への影響は多大であり、Set theoretic Topologyと呼ばれる新しい分野が花開いてきている。この講演では、次の5つの話題に的をしぼって、Set Theoryと位相空間論(及びその周辺分野)とのGive-and-Takeを観てみる。

- 1 マルタンの公理(MA)を仮定して、平面上のLebesgue measureの一性質を証明する。後にMAを取除く。
- 2 Product Measure Extension Axiom (PMEA)のもとで、Normal Moore space Problemを解決する。
- 3 Elementary Submodelを利用して、証明の簡易化、及び新しい定理を発見する。

4 Partition Calculus を topological space に導入する。

5 自然数の分割についての Hindman の定理を ultrafilter を用いて証明する。

Set-theoretic Topology の最近の動向については、次の文献を参照したい。

- "Handbook of Set-theoretic Topology" (ed. Kunen, Vaughan) North-Holland, 1984
- "Set Theory & its Applications" Lec. Notes in Math. No. 1401 (ed. Stepráns, Watson) Springer 1987
- "Open Problems in Topology" (ed. van Mill, Reed) North-Holland 1990

1 「 $A$  が、平面  $\mathbb{R}^2$  における Lebesgue measure  $\mu(A) > 0$  の任意の集合とする。このとき  $\mathbb{R}$  における Lebesgue measure が正であるような集合  $X, Y$  で  $X \times Y \subseteq A$  となるものが存在するかどうか？」 この問題を考えよう。



この問は、2次元の Lebesgue meas. を“理解”する上で最も基本的と思われるのであるが、私の近傍では誰も発しなかつたし、誰も答えを知らなかつた。あの有名な Fubini の定理から明らかならうか！ ねどと言わなうで欲しい。

$A_x \triangleq \{y \in \mathbb{R} : (x, y) \in A\}$  とすると、Fubini の定理から言えることは

$$\mu(X) > 0 \quad \text{where} \quad X \triangleq \{x \in \mathbb{R} : \mu(A_x) > 0\}$$

(1次元, 2次元の Lebesgue meas. を同じ  $\mu$  で表わしてゐるが混同の恐れはないと思う。) のみ

であつて、 $\bigcap_{x \in X} A_x$  の大きさについては何も言

つていないのである。実は、上の問の答えは NO である：  $N$  を  $I = [0, 1]$  における nowhere dense,  $\mu(N) > 0$  なる set とすれば

$$A = \{(x, y) \in I^2 : |x - y| \in N\}$$

が反例になる。(cf. Sikorski "On measures in Cartesian prod.s of Boolean alge.s" Coll. Math. 2 (1951) 124-129 及び

Steinhaus "Sur les distances des points des ensembles de mesure positive" Fund. Math 1 (1920) 93-104 )

$X \times Y \subseteq A$  となる  $X, Y$  の両方を  $\text{meas.} > 0$  にするのは不可能であるが、一方を perfect set としてとれることを示そう。

Theorem.  $\forall A \subseteq \mathbb{R}^2 (\mu(A) > 0 \rightarrow \exists X, \exists Y \subseteq \mathbb{R}$   
 $X \times Y \subseteq A$   
 $|X| > \omega \ \& \ \mu(Y) > 0)$

一般性を失うことなく、 $A$  は初めから closed set としてよいから、“ $X$  が perfect” ととれるといふことは、 $X$  が uncountable ととれる、といふことも同じである。この定理の証明は次のように実行できる。まず Martin's Axiom  $\text{MA}(\omega_1)$  を仮定して証明し、後にこの仮定が不要であることを示す。 $\text{MA}(\omega_1)$  とは、次の主張である：

“任意の c.c.c. (countable chain condition を満たすの意) partially ordered set  $(P, \leq)$ , 及  $\omega_1$  個の  $P$  の dense subsets から成る任意の collection  $F$ ,  $|F| \leq \omega_1$  に対し、 $F$  の各元と交わるような filter  $G \subseteq P$  が存在する。”

この  $MA(\omega_1)$  を本質的に利用すると、次の lemma が言える。

Lemma [ $MA(\omega_1)$ ]  $H$  を任意の collection of subsets of  $\mathbb{R}$  such that  $\forall A \in H \mu(A) > 0$  とする。  
 $H$  が "uncountable" なるは"

$\exists$  uncountable  $H' \subseteq H$  s.t.  $\mu(\cap H') > 0$ .

この Lemma を使うと、Fubini の定理により容易に Theorem が導かれる。よって、Theorem の中に述べられた 2 つの命題を  $\Phi$  とすれば"

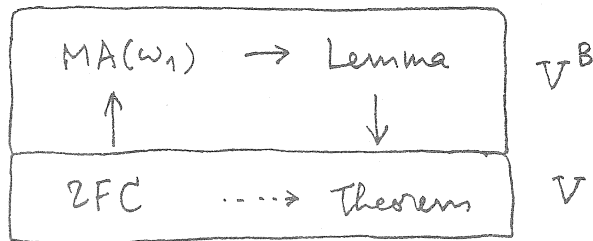
$ZFC \vdash "MA(\omega_1) \rightarrow \Phi"$

"である。と = 3 か。  $\Phi$  は  $\forall \dots \exists \dots \forall \dots$  の形であり、 $A, X, Y$  を closed sets とし 2 よりの 2" における  $\Pi_3^1$  の命題になる。Logic の方の議論から、 $\Pi_3^1$  は downward absolute であることは知られている。つまり、 $V$  を universe とし、 $V^B$  が  $V$  の Boolean valued extension の場合、

$V^B \models \Phi$  なるは"  $V \models \Phi$

が言える。 $V^B \models MA(\omega_1)$  となる Boolean algy.  $B$  の存在はよく知られているので、以上から

$V \vdash B$  すなわち Theorem が ( $MA(\omega_1)$  をして) 成立する  $\Rightarrow$   $\omega_1$  が結論で済むのである。



$MA$  を経由しない直接証明に  $\omega_1$  は、  
 Eggleston "Two measure properties of Cartesian product sets"  
 Quart. J. Math. Oxford (2), 5 (1954) 108-115  
 を見よ。Eggleston の証明は、かなり解析的であり、  
 上記の証明の方が、と smart である。

2 「Normal Moore space は metrizable か？」という  
 問題は、1930 年代に提出され、最近になって  
 ほぼ解決された。この 50 年間に、この問題に  
 対して  $\omega_1$  が  $\omega_1$  した Set theorists or topologists の  
 エネルギーは、莫大なものであり、お陰で、  
 set theoretic topology が爆発的に発展した。この  
 解決に決定的役割を果たしたのは  $\omega_1$  の  $\omega_1$  である。

すなわち, Product Measure Extension Axiom (PMEA) を仮定すれば, Normal Moore space problem は肯定的に解決されることを示した。

Bing のよ. 2. collectionwise normal, Moore space は metrizable となることが知られている。Moore space は, 1st countable であるから, 問題の核心部分は「1st countable, normal space は, collectionwise normal か?」となる。PMEA とは, 次の仮説のことをいう:  
“任意の cardinal  $\lambda$  に対し, product space  $2^\lambda = \{0,1\}^\lambda$  の上に通常定義される product measure は,  $\mathbb{C}$ -additive measure  $\mu: \mathcal{P}(2^\lambda) \rightarrow [0,1]$  に extend される。”

ここで,  $\mathbb{C}$  は連続体の濃度である。  $\mathcal{P}(2^\lambda)$  は,  $2^\lambda$  の powerset である。“ $\mathbb{C}$ -additive” とは,  $\mathbb{C}$  未満の sets に対して additive という意味である。

$\mu$  は,  $2^\lambda$  のある subset  $s$  に対してその値が定まる, というのだから非常に強力な仮説である。PMEA の consistency は, strongly compact card. と呼ばれる非常に大きい cardinal の存在を仮定すれば出てくる, ことが知られている。

空間  $X$  が normal であるとは、その中にある任意の 2 つの disjoint closed sets は disjoint open sets によつて separate されるということである。かゝる  $X$  が collectionwise normal とは、任意の discrete collection of closed sets が disjoint open sets によつて separate される、という意味である。



Theorem. PMEA を仮定するとき、

1-st countable, normal space は collectionwise normal である。

この定理の証明の outline は次のようである。  
 $X$  を 1-st countable, normal space とし、 $\{C_\alpha : \alpha < \lambda\}$  を  
 其中の任意の discrete collection of closed sets とする。  
 $\mu : \mathcal{P}(2^\lambda) \rightarrow [0, 1]$  を PMEA によつて保証される  
 $\sigma$ -additive measure とする。  $\mu$  は product measure  
 を extend したものであるから

$$B(\alpha, \varepsilon) \triangleq \{f \in 2^\lambda : (\alpha, \varepsilon) \in f\}, \quad \alpha < \lambda, \quad \varepsilon = 0 \text{ or } 1$$

と おく と .  $\mu(B(\alpha, \varepsilon)) = 1/2$

$$\mu(B(\alpha, 0) \cap B(\beta, 1)) = 1/4 \quad \forall \alpha \neq \beta$$

とある。各  $A \in \mathcal{P}(\lambda)$  に対し、 $C_A \triangleq \bigcup_{\alpha \in A} C_\alpha$  ; また

$\mathcal{C} \triangleq \bigcup_{\alpha < \lambda} C_\alpha$  とおく。  $X$  は normal  $T_2$  かつ collection

$\{U(A) : A \in \mathcal{P}(\lambda)\}$  of open sets である。

$$C_A \subseteq U(A), \quad U(A) \cap U(\lambda \setminus A) = \emptyset$$

なる性質をもつものかといえる。  $X$  は 1-st countable

である。各 point  $x \in X$  の周りには decreasing nbd base

$$\{U_n(x) : n \in \omega\}$$

をとれる。

$$a(x, n) \triangleq \{f \in 2^\lambda : U_n(x) \subseteq U(f^{-1}(0))\}$$

$$\text{or } U_n(x) \subseteq U(f^{-1}(1)) \}$$

と おく と .  $\forall x \in C \quad \bigcup_{n \in \omega} a(x, n) = 2^\lambda$ .

$\mu$  は countably additive, かつ  $\mu(2^\lambda) = 1$  とあるから

$$\forall x \in C \quad \exists n(x) \in \omega \quad \mu(a(x, n(x))) > 7/8.$$

$U_\alpha \triangleq \bigcup \{U_{n(x)}(x) : x \in C_\alpha\}$  とおけば、 $\{U_\alpha : \alpha < \lambda\}$

は disjoint かつ  $\sum \mu(U_\alpha) = 1$  であることが確かめられる。実際、

$\alpha \neq \beta$  とする。  $\forall x \in C_\alpha \quad \forall y \in C_\beta$  に対し

$$\mu(a(x, n(x)) \cap a(y, n(y))) > 3/4$$

$$\mu(B(\alpha, 0) \cap B(\beta, 1)) = 1/4$$

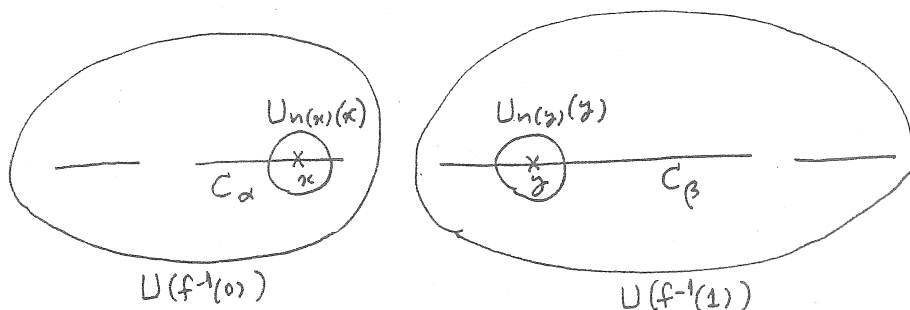
だから

$$\exists f \in \mathcal{A}(x, n(x)) \cap \mathcal{A}(y, n(y)) \cap B(\alpha, 0) \cap B(\beta, 1)$$

$$\Rightarrow \text{この } f \text{ に対して } U_{n(x)}(x) \subseteq U(f^{-1}(0))$$

$$U_{n(y)}(y) \subseteq U(f^{-1}(1))$$

$$\text{だから } U_{n(x)}(x) \cap U_{n(y)}(y) = \emptyset$$



$$\therefore U_\alpha \cap U_\beta = \emptyset \quad \text{😊}$$

上の如き  $f$  の存在を引出すために measure  $\mu$  が  
必要だったわけである。

3 "Elementary Submodel" の概念は D.J.G. にお  
いては本質的であるが、これは「ハッキリと  
General Topology」に適用したものは、きわめて  
最近である。York大学(カナダ)の Dow による。こ  
れは、彼による 2 つの例をとっている。



任意の formula  $\varphi$  及び  $\forall a_1, \dots, \forall a_n \in M$  に対し  
 $M \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$  iff  $N \models \varphi(a_1, \dots, a_n)$   
 が成立するとき、 $M$  は  $N$  の elementary submodel  
 である、という。 $M$  は  $N$  の性質を非常に良く  
 反映したものである。  $N$  としては通常、十分大  
 きな "set" をとるのであるが、こゝでは簡単の  
 ため  $N = V$  (universe) とする。 Elementary submodel  
 は、その size を必要に応じて小さくとれる、と  
 いうのが役に立つのである。

Theorem. 1-st countable, compact Hausdorff space  
 の cardinality は、 $\leq \aleph_1$  である。

これは、General Topology の中では大変 "non-trivial"  
 な定理であり、証明の簡易化が行われ始めた  
 のだが、こゝから elementary submodel を使うと、  
 ほとんど trivial になってしまうのである：

$(X, \tau)$  を 1-st countable, compact  $T_2$  space with topology  
 $\tau$  とする。 Elementary submodel  $M$  of  $V$  s.t.  
 $(X, \tau) \in M, |M| = \aleph_1, M^\omega \subseteq M$

をとる。このとき、 $X$  の 1-st countability と、 $M$  の条件  $M^\omega \subseteq M$  とから、 $X \subseteq M$  が言える。  
 $|M| = \mathfrak{c}$  であるからこれ"証明完了"である!!

Theorem. Compact Hausdorff space は、その任意の subspace of size  $\leq \omega_1$  が metrizable ならば、metrizable である。

これは新しいタイプの定理であり、次のように証明される。 $X$  を compact  $T_2$ , non-metrizable space とするとき、 $X$  の subspace of size  $\omega_1$  "non-metrizable なるものを探せばよい。Elementary submodel  $M$  of  $V$  s.t.

$X \in M$ ,  $|M| = \omega_1$ ;  $M$  has the  $\omega$ -covering prop.  
(i.e.  $\forall$  countable  $A \subseteq M \exists$  countable  $B \in M$  s.t.  $A \subseteq B$ )  
をとれば、 $X \cap M$  が求める non-metrizable subspace となることが言える。

4 Set theory の combinatorics " $\alpha \rightarrow (\beta)_\delta^\gamma$ " 即ち partition calculus は 広く研究されて いるか?  
 この partition を topological space において考えた "topological partition calculus" が 最近 話題 になって いる。特に, W. Weiss (Toronto 大学, カナダ), Malý (V. 連) の研究が 著しい。

$$[X]^k \doteq \{x \subseteq X : |x| = k\}$$

Topological spaces  $X, Y$ , cardinals  $k, \lambda$  に対し, 矢印の表現  $X \rightarrow (Y)_\lambda^k$  は, 次の意味とする:

「 $[X]^k$  を  $\lambda$  個に任意に分割し  $[X]^k = \bigcup_{i < \lambda} P_i$  したとき,  $\exists i < \lambda \exists Y' \subseteq X$  s.t.  $Y'$  is homeomorphic with  $Y$ , and  $[Y']^k \subseteq P_i$ 」

この意味は, 最も単純なケース  $k=1, \lambda=2$  を考える。  $X \rightarrow (Y)_2^1$  の意味は,

"Space  $X$  を, 任意に 2 つに分けた  $X = X_0 \cup X_1$  とき,  $Y \subseteq X_0$  or  $Y \subseteq X_1$  である。"

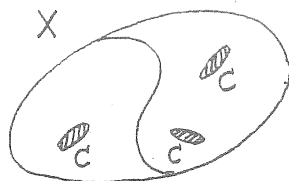
( $Y \subseteq Z$  は  $Y$  が homeomorphic に  $Z$  の中に embed できることを意味する。)

Example 1. 有理数空間  $\mathbb{Q}$  に対し,  $\mathbb{Q} \rightarrow (\mathbb{Q})_2^1$  となることは見易い。

$C$  を Cantor space  $\{0,1\}^{\omega}$ ,  $\mathbb{R}$  を real line とする。

Example 2.  $\mathbb{R} \rightarrow (C)_2^1$ , すなわち,  $\mathbb{R}$  の中の subset  $S$  2,  $S$  も  $\mathbb{R} \setminus S$  も Cantor set を含まないものが存在する, ということ 2, このような set  $S$  は, "Bernstein set" として知られている。

Example 3. Ordinal  $\omega_1$  の中の, stationary & co-stationary な set が存在するか, このことは  $\omega_1$  に interval topology を考えたとき,  $\omega_1 \rightarrow (\omega_1)_2^1$  と表現できる。



おもしろい未解決問題として,

$X \rightarrow (C)_2^1$  となる regular space  $X$  が存在するか? というのがある。つまり,  $X$  をどんな風か 2 つに分けても, 少なくとも一方は Cantor set を含むような, そういう空間  $X$  があるか? という問題 2 がある。上の Example 2 の方法により,  $|X| = \mathfrak{c}$  となるどんな space  $X$  に対しても  $X \rightarrow (C)_2^1$  2 がある。一般連続体仮説 GCH を仮定するとき, 上の問の答えは NO 2 がある

ことが知られてゐるか。この GCH を消去できるかどうかわかってゐない。  $X \rightarrow (C)_2^1$  を示すには、  $X$  の各点を赤と白で"色分け"して、  $X$  の中のどの copy of  $C$  も赤、白両方でぬらされてゐる状態になつてゐれば"よいのである。 Partition calculus は "色分け" と考えると colorful  $\kappa$  になつてくる。 😊

[5] 最後に、整数論と General Topology との融合の合ひについて述べる。  $N = \omega \setminus \{0\}$  を正の整数全体とし、 finite subset  $F \subseteq N$  に対し、  $F$  の元をすべて加えたものを  $\Sigma F \in N$  と表わす。たとえば " $F = \{2, 3, 5\}$  ならば"  $\Sigma F = 10$ 。 Hindman は combinatorial な手法により次の結果を得たが、 Glazer は "ultrafilter" を用いて非常に simplify された別証明を与えたので、これについて説明する。

Theorem.  $N = \bigcup_{k < \omega} A_k$  を任意の有限分割とするとき、  $\exists k < \omega \exists B \text{ infinite } \subseteq A_k \text{ s.t.}$   
 $\forall \text{ finite } F \subseteq B \quad \Sigma F \in A_k.$

いま、 $N$  の Stone-Čech compactification  $\beta N$  を考  
え、 $p, q \in \beta N$  に対して、 $p+q \in \beta N$  を  
$$A \in p+q \iff \{n \in N : A-n \in p\} \in q$$
  
により定める ( $A-n$  は、 $\{k \in N : k+n \in A\}$  を表す)  
と、 $+$  は、associative かつ

right-continuous (ie.  $\forall p \in \beta N \quad \beta N \ni q \mapsto p+q \in \beta N$  is  
continuous) となる。これは、一般に、compact  
space  $X$  上での定義した operation  $+$  が associative  
かつ right-cont. ならば idempotent となる。

$p+p=p$  となる  $p \in X$  が存在する :=  $e$  が与えら  
れる。よって、特に

$$\exists p \in \beta N \quad p+p=p.$$

このことを利用すると、次のようにして定理  
を証明できる。Theorem を示すには、 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(N)$  を

$$A \in \mathcal{A} \iff \exists \text{ infinite } B \subseteq A \quad \forall \text{ finite } F \subseteq B \quad \Sigma F \in A$$
  
と定めるとき、 $p \in \mathcal{A}$  となる  $p \in \beta N$  の存在を  
示せば十分である。  $p \in \beta N$  を上記の存在を  
確認した idempotent, i.e.  $p+p=p$  として、 $p \in \mathcal{A}$  を  
示す。  $A \in p$  に対して、 $A^* \stackrel{\circ}{=} \{n \in N : A-n \in p\}$  とおくと、  
 $p+p=p$  より  $A^* \in p$  となることに注意。

$\forall A \in \mathcal{P}$  をとり, fix する。  $A_0 \triangleq A$  とおき,

$k_0 \in A_0 \cap A_0^*$  を選ぶ。  $A_1 \triangleq A_0 \cap (A_0 - k_0)$

Induction により  $k_n \in A_n \cap A_n^*$ ,  $A_{n+1} \triangleq A_n \cap (A_n - k_n)$

としてゆく。  $B \triangleq \{k_n : n < \omega\}$  と定めれば, この

infinite set が  $A \in \mathcal{A}$  を保証するところが確認

される。 😊

この Hindman の定理は, Dynamical systems の観点  
から別証明が与えられている。この方面に  
関心のある人は, H. Furstenberg の本 "Recurrence in  
Ergodic Theory & Combinatorial Number Theory" を見て  
欲しい。

## 文献

- ①  $\kappa \cap \omega \neq \emptyset$ . Martin "The Use of Set-theoretic Hypotheses in the study of Measure & Topology" in "General Topology & Modern Analysis" (ed. McAuley & Rao.) Academic Press (1981) 417-429.
- ②  $\kappa \cap \omega \neq \emptyset$ . P. Nyikos "A provisional solution to the Normal Moore space problem" Proc. AMS 78 no.3 (1980) 429-435 & "Fleissner "The normal Moore space conjecture & large cardinals" in Handbook of Set-theoretic Topology, 733-760.
- ③  $\kappa \cap \omega \neq \emptyset$ . A. Dow "An introduction to Applications of Elementary submodels to Topology". Topology Proc. 13 (1988) 17-72.
- ④  $\kappa \cap \omega \neq \emptyset$ . W. Weiss "Weiss's Questions" in "Open Problems in Topology" (ed. van Mill & Reed) North-Holland (1990) 77-84 & "V. Mal'ugin "Results on Consistency in Topology" Trans. Moscow Math. Soc. (1987) 145-171.
- ⑤  $\kappa \cap \omega \neq \emptyset$ . Comfort "Ultrafilters: some old & some new results" Bull. AMS 83 no.4 (1977) 417-455 & "Graham-Rothschild-Spencer の本 "Ramsey Theory" John Wiley & Sons (1980) を見よ。



# Standard Spatial Graphs

東京女子大文理 小林一章

$G$  を有限グラフとし,  $G$  を位相空間と考えて埋め込み

$f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  (又は  $\mathbb{S}^3$ ) を考える.  $\tilde{G} = f(G)$  を  $G$  の spatial graph と呼ぶ. この時「ある  $G$  に対してどのような  $\tilde{G}$  を standard spatial graph (又はどのような  $f$  を standard) と呼んだら良いか?」 という問題を考えます.

例えば  $G \cong \mathbb{S}^1$  のときは standard  $\tilde{G}$  は trivial knot であるし,  $G \cong \bigcup_{i=1}^n \mathbb{S}^1$  のときは standard  $\tilde{G}$  は trivial link である.

又  $G$  が planar graph のときは standard  $\tilde{G}$  は plane graph となっているものである.

そこでこれを含んだ一般の有限グラフ  $G$  (特に non-planar graph) に対し standard  $\tilde{G}$  はどのようなものかということです.

ここで使われている standard という事は 結び目理論的の見方であって, グラフ理論の方でも勿論ある種の standard という概念はあります.

例えばグラフの (minimum) genus, maximum genus, thickness 等がそうです.

所がこれらは 結び目理論の立場から見ると殆んど standard としての役目を果たしていない事がわかります.

例をグラフの (minimum) genus に取ってみますと, グラフ  $G$  の genus  $\gamma(G)$  とは

$\gamma(G) \equiv \min \{g \mid \exists \text{埋め込み } f: G \rightarrow F_g; F_g: \text{ori. closed surface}\}$

ですが  $G = K_5$  (5頂点完全グラフ) の時  $\gamma(K_5) = 1$  という事が

わかっています. 所が 図1のように  $\gamma(K_5) = 1$  という事はトーラス上に埋め込まれる  $K_5$  の "knot type" をあまり制限していない

ことがわかります. そこで 結び目理論の立場から standard spatial graph を定義しようとする訳ですが 1つ 難かしい問題があります. それは 図1で示したように (a) 図の  $K_5$  は自明でない

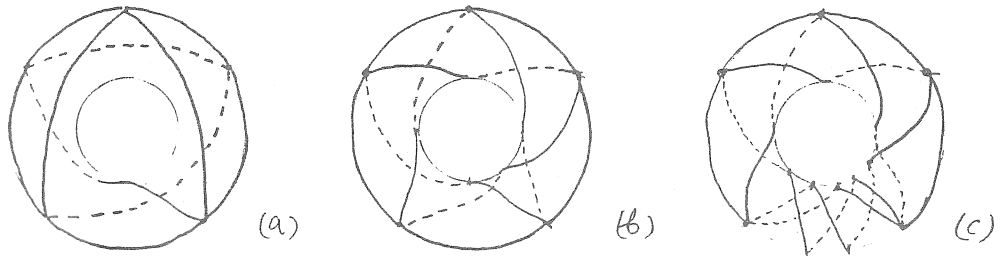


図 1

結び目を含まず, (b), (c) 図は自明でない結び目を含んでいるので (a) の方が (b), (c) 図より “standard”らしいので例えは  $\tilde{G}$  上の全ての cycle (=単純閉曲線) が自明な結び目となっているものを “standard” であると定義しようとする。例えは  $K_7$  (7頂点完全グラフ) では全ての spatial graph  $\tilde{K}_7$  が自明でない結び目となっている cycle を含むという Conway-Gordon の定理があるので簡単に standard ということも定義出来ないことがわかります。そこで “standard” spatial graph を定義する前に今迄わかっているものを参考にして “standard” spatial graph が満たすべき条件を上げてみることにします。次のような結果があります。

$$\text{knot } K \text{ が trivial} \iff \pi_1(S^3 - K) \cong \mathbb{Z} \quad (\text{Papakyriakopoulos})$$

$$\text{link } L \text{ が trivial} \iff \pi_1(S^3 - L) \cong \underbrace{\mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z}}_n \quad n = \#L.$$

planar graph  $G$  の spatial graph  $\tilde{G}$  が plane graph

$$\iff \tilde{G} \text{ の } \forall \text{ spatial subgraph } \tilde{H} \text{ } 1 \leq \#L$$

$$\pi_1(S^3 - \tilde{H}) = \text{free} \quad (\text{Scharleman \& Thompson}).$$

この最後の条件はこのまゝでは, 例えは  $K_7$  等には通用出来ません

$$\textcircled{1} \quad \forall \tilde{K}_7 \text{ は non-trivial knot となる cycle } C \text{ を含みますから}$$

$$\pi_1(S^3 - C) \neq \text{free}$$

以上のような standard なものは全て  $\mathbb{R}^3$  (または  $\mathbb{S}^3$ ) の同相写像  
 (或はもっと強く amb. isotopy) で互いに移り合うことがわかる  
 ように "standard" spatial graph が満足すべき性質として  
 次のものを上げておきます。

$G$  を有限グラフとし,  $\tilde{G}$  が  $G$  の "standard spatial graph"  
 とする

- $\Rightarrow$  (I)  $\pi_1(\mathbb{R}^3 - \tilde{G})$  は  $\text{rank } H_1(G; \mathbb{Z})$  に等しい rank の自由群  
 (II)  $\forall$  有限グラフは "standard" spatial graph  $\tilde{G}$  をもつ。  
 (III)  $G$  の2つの "standard" spatial graph  $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2$  は  
 何らかの意味で同値である。

以下では "standard" spatial graph を考えるのでグラフ  $G$  は次数  
 1, 2 の頂点をもたず又 cut edges を持たない simple graph  
 とする (cut edge をもつと cut edge かわるをとしてコントロール  
 が効かないので)。又埋め込みは wild embedding を排除  
 するために edgewise differentiable embedding とする。即ち  
 $f: G \rightarrow \mathbb{R}^3$  (または  $\mathbb{S}^3$ ) を edgewise differentiable embedding  
 とするとき  $\tilde{G} = f(G)$  を  $G$  の spatial graph とする。

定義  $G$  の spatial graph  $\tilde{G}$  が loc. unknotted とは

次の条件を満足する  $H_1(G; \mathbb{Z})$  の基  $\{\alpha_1, \dots, \alpha_\gamma\}$  と

写像  $\psi: \bigcup_{i=1}^{\gamma} D_i^2 \rightarrow \mathbb{S}^3$  が存在すると言ふ。

1)  $\psi(\partial D_i^2) = \tilde{C}_i$   $\tilde{C}_i$  は  $\alpha_i$  の表現閉曲線

2)  $\psi(\bigcup_{i=1}^{\gamma} \partial D_i^2) = \tilde{G}$

3)  $\psi|_{D_i^2}$  は埋め込み ( $i=1, 2, \dots, \gamma$ )

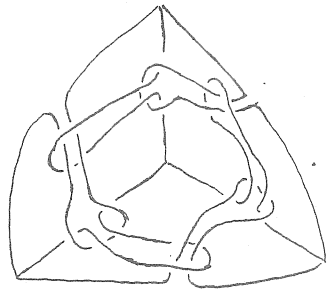
4)  $\psi(\text{Int } D_i^2) \cap \psi(\text{Int } D_j^2) = \emptyset$  ( $i \neq j$ )

5)  $\psi(D_i^2) \cap \tilde{G} = \psi(\partial D_i^2) \cap \tilde{G} = \tilde{C}_i$

定義 spatial graph  $\tilde{G}$  上の任意の simple closed curve  $\tilde{C}$  が  
自明な knot の時  $\tilde{G}$  は globally unknotted と言う。

定義 spatial graph  $\tilde{G}$  上の disjoint simple closed curves の  
任意の集合  $\{\tilde{C}_i\}$ ,  $i=1, 2, \dots, \mu$  に対し,  $\bigcup_{i=1}^{\mu} \tilde{C}_i$  が trivial link  
の時  $\tilde{G}$  は globally unlinked と言う。

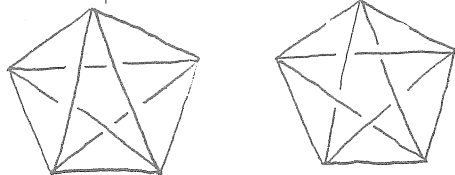
命題1.  $\tilde{G}$  を spatial graph とする.  $\tilde{G}$  の任意の spatial subgraph  
 $\tilde{H}$  に対し  $\pi_1(S^3 - \tilde{H})$  が free なら  $\tilde{G}$  は globally unknotted  
かつ globally unlinked.  
しかし 逆は 成立しない  
(鈴木 の例)



定理1.  $n$  頂点完全グラフ  $K_n$  は  
locally unknotted spatial  
graph をもつ。

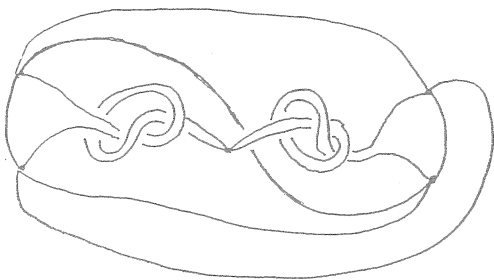
命題2. spatial graph  $\tilde{G}$  が loc. unknotted  $\Leftrightarrow \pi_1(S^3 - \tilde{G})$  は free.

従って "loc. unknotted" という概念は standard spatial graph  
の条件の (I) を満足しているがこれだけでは "standard" と言う  
には弱い事を示す例がある。

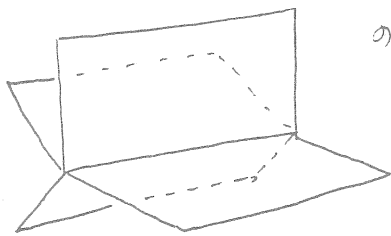


共に loc. unknotted だが右図  
は non-trivial knot を含む  
(globally knotted).

そこで更に条件を強めて "triangle base" 147 に loc. unknotted" という概念を導入すると右図は排除出来るがやはり non-trivial knot を含む  $K_5$  の例が作れてしまう。そこで triangle base とは全てが長さ3の cycles から成る base.



そこで最後に "n 枚のシートをもつ本への表現" という概念を導入する。まず n 枚のシートをもった本  $B_n$  とは左図



のようなもので、シートを束ねている部分を binder ということにする。□ とかく。

定義 有限グラフ  $G$  の本への表現とは次の条件を満足する埋め込み

$$\psi: G \longrightarrow B_n \text{ のことである.}$$

条件 (1)  $\psi(V(G)) \subset \square \subset B_n$   $V(G)$  は  $G$  の頂点集合.

(2)  $\forall \text{ edge } \tilde{e} = \psi(e)$  は唯一つのシートに含まれる.

(3) 各シート  $S_i$  は少なくとも1つの edge  $\psi(e)$  を含む.

又は  $\psi$  の像  $\tilde{G} = \psi(G)$  を  $G$  の本への表現ということもある.

命題 任意の有限グラフ  $G$  は本への表現をもつ.

しかし本への表現が有効に働くのは  $G$  が pseudo Hamilton graph の時である。グラフ  $G$  上には全ての頂点を含む道 (path) があるとき  $G$  を pseudo Hamilton graph という。そのような道を Hamilton path という。

定義  $G$  を pseudo Hamilton graph とし,  $\Delta$  を 1 つの Hamilton path とする  $G$  の 本 1 の 表現  $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}^n$  が  $\psi(\Delta) \subset \mathbb{S}^1$  を 満足するとき  $\tilde{G} = \psi(G)$  を Hamilton path  $\Delta$  に 1 対 1 対応する 本 1 の 表現 といい,  $\psi$  を B.P.H. $\Delta$  とかく

命題. 全ての pseudo Hamilton graph は B.P.H. $\Delta$  を もつ

定義.  $G$  を pseudo Hamilton graph とし,  $\Delta$  を 1 つの Hamilton path とし,  $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}^n$  を B.P.H. $\Delta$  とする.

$H$  を Hamilton path  $\Delta$  を 含む  $G$  の 任意の subgraph とす. このとき  $\tilde{H} = \psi(H)$  を  $G$  の B.P.H. $\Delta$  に 1 対 1 対応する spatial subgraph といい.

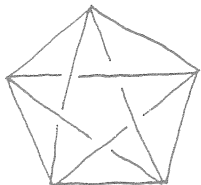
命題.  $G$  を pseudo Hamilton graph,  $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}^n$  を B.P.H. $\Delta$  とする. このとき  $G$  の B.P.H. $\Delta$  に 1 対 1 対応する 任意の spatial subgraph  $\tilde{H}$  に対し  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - \tilde{H})$  は rank が  $\text{rank } H_1(H; \mathbb{Z})$  に 等しい 自由群 である

注  $\tilde{H}$  が  $G$  の B.P.H. $\Delta$  に 1 対 1 対応する spatial subgraph で なければならぬ 上の 命題 は 成立 しない.

☹  $G = K_7$  とすると  $K_7$  の 全ての B.P.H. $\Delta$  は 自明 である knot を 含む. その cycle を  $H$  とすると  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - H)$  は free で ない

定理.  $G$  を pseudo Hamilton graph とし,  $\psi: G \rightarrow \mathbb{B}^n$  を B.P.H. $\Delta$  とする  $G$  の B.P.H. $\Delta$  に 1 対 1 対応する 任意の spatial subgraph  $\tilde{H}$  は locally unknotted である.

注 上の定理の逆は成立しない。



これは locally unknotted であるが  $S^1$  knot を含んでいるので 次の Proposition #1 B.P.H.  $\Delta$  をもたない

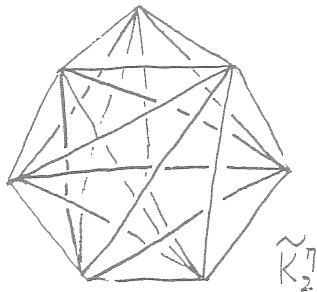
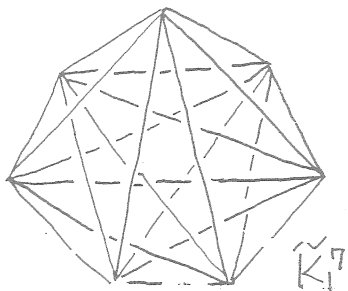
命題  $K_5$  のどの B.P.H.  $\Delta$  も non-trivial knot としては trefoil knot しか含み得ない

定理  $K_n$  を  $n$  頂点をもつ完全グラフとし  $\psi: K_n \rightarrow B_p$  を B.P.H.  $\Delta$  とすると  $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor \leq p \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  となり

もし  $p$  が minimum で  $n \geq 6$  なら  $p \leq n-3$  である。

命題  $K_5$  を 5 頂点完全グラフとし  $\psi: K_5 \rightarrow B_3$  を minimum sheets をもつ B.P.H.  $\Delta$  とすると  $\psi(K_5)$  は  $S^3$  (すなわち  $R^3$ ) の同相写像を除いて一意に決まる 更に  $\psi(K_5)$  は  $S^3$  の ambient isotopy を除いて一意に決まる

注 上の命題の 2 番目の結論は  $K_7$  には拡大出来ない







# Orbifold models and 3-manifold invariants

河野 俊 丈 (九大理)

Witten ([W]) により Chern-Simons 理論 にもとづいた 3次元多様体の 位相不変量が 提唱された後, 不変量の 数学的な基礎づけに関する 幾つかの 仕事 が なされた. 量子群の 1 の中根における表現と, 多様体の Dehn surgery による記述を用いたもの ([RT], [KM]), 2次元共形場 に関連した 閉曲面の 写像類群の表現と, Heegaard 分解 を用いたもの ([K]) など が あげられる. ここでは, まず これらの両者の アプローチを 組み合わせることにより, 3-manifold の Heegaard genus を, Witten 不変量を用いて 下から 評価することについて 報告したい. またこの方法は, 2次元 共形場理論の 他のモデルにも 拡張されることを 説明し とくに 有限群の シンメトリーと 関連した orbifold model について 議論したい.

## 1. Witten 不変量による Heegaard genus の評価

$M$  を closed oriented 3-manifold とし,  $S^3$  内の framed link  $L$  についての Dehn surgery で 実現されているとする.  $L$  の component を  $L_1, L_2, \dots, L_n$  とする. 正の整数  $K$  (以下  $h$  バル とよぶ) と 固定し Drinfeld, Jimbo の意味の 量子群  $U_q(\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C}))$  の  $\text{spin } j$  表現  $V_j$ ,  $j = 0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{K}{2}$  を考える. これは  $(2j+1)$ -次元の表現である.

$\lambda: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k}{2}\}$  により各成分に "color" を与えることにより framed colored link の不変量  $J(L, \lambda)$  が定義される. 各成分の color  $\frac{1}{2}$  を与えたものが, 本質的に Jones polynomial と一致する. 以降この不変量の  $q = \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{k+2}$  における特殊値を考える. [RT], [KM] により, 定式化された Witten invariant は次のように与えられる. ( $k+2=r$  とおく)

$$\tau_r(M) = C^6 \sum_{\lambda} S_{0\lambda(1)} \cdots S_{0\lambda(n)} J(L, \lambda), \quad r=3, 4, \dots$$

ここで, notation の意味は次のとおりである.

$\sigma$ :  $L$  の linking matrix の signature

$$S_{ij} = \sqrt{\frac{2}{k+2}} \sin \frac{(2i+1)(2j+1)\pi}{k+2}$$

$$C = \left( \exp \frac{2\pi\sqrt{-1}}{24} \cdot \frac{3k}{k+2} \right)^{-3}$$

また  $\Sigma$  は color  $\lambda: \{1, \dots, n\} \longrightarrow \{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{k}{2}\}$  可なりに関する和を示す.

とくに

$$J\left(\bigcirc^i\right) = \frac{S_{0i}}{S_{00}}$$

$$J\left(\bigcirc_i^j\right) = \frac{S_{ij}}{S_{00}}$$

また framing については,

$$J\left(\bigcirc^j\right) = \exp 2\pi\sqrt{-1} \cdot \frac{j(j+1)}{k+2} J\left(\bigcirc^j\right)$$

が成立している. また 不変量  $\tau_n$  については,

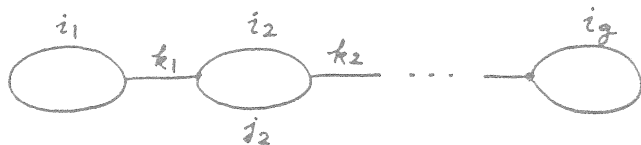
$$\tau_n(S^3) = 1 \quad \tau_n(S^1 \times S^2) = S_{00}^{-1}.$$

connected sum, 向きの変化について

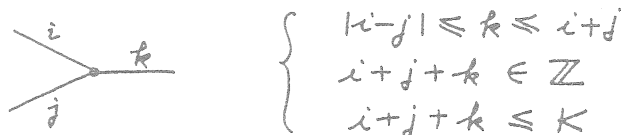
$$\tau_n(M_1 \# M_2) = \tau_n(M_1) \cdot \tau_n(M_2)$$

$$\tau_n(-M) = \overline{\tau_n(M)}$$

が成立している. 一方 この不変量を, 3-manifold 内の colored trivalent graph の不変量に拡張することにより, closed orientable surface  $\Sigma$  の mapping class group  $M_g$  の表現を得ることができ, これは  $C$  の中の不定性を除いて線形となる表現で, 表現空間  $\mathcal{H}_\Sigma$  の basis は下図に示す colored trivalent graph と 1対1 に対応している.



ここで color は  $\{0, \frac{1}{2}, \dots, \frac{K}{2}\}$  よりえらび, さらに各頂点で下 a admissibility をみたすとする



得られた  $M_g$  の表現  $\rho_K$

$$\rho_K : M_g \longrightarrow GL(\mathcal{H}_\Sigma) / \langle C \rangle$$

と書く (詳細は [K] を参照されたい).

不変量  $\tau_n(M)$  は この表現  $P_K$  ( $K=n+2$ ) と

$$|\tau_n(M)| = S_{00}^{-3} |P_K(h)_{00}|$$

で関連している. ここで  $M = H_g \cup_h -H_g$  は Heegaard splitting また  $P_K(h)_{00}$  は  $P_K(h)$  のすべての edge の color が 0 である basis についての成分を示す. 上式と表現  $P_K$  が unitary であることを用いると, 次の定理が得られる.

定理  $M$  は closed oriented 3-manifold  
 $M$  の Heegaard genus を  $g$  とすると

$$|\tau_n(M)| \leq S_{00}^{-3} \quad n=3, 4, \dots$$

が成立する.

## 2. orbifold models

1 で述べた Witten invariant は  $SU(2)$  Wess-Zumino-Witten model より得られるものであるが, 2次元共形場理論の他の model についても同様の構成が知られている例がある. ここでは Orbifold model と関連した Dijkgraaf-Witten による不変量 [DW] について議論することにする.  $G$  を有限群とし  $\alpha \in H^3(BG, U(1))$  を固定する.  $M$  は 1 と同様, closed oriented 3-mfd とする. このとき

$$Z(M) = \frac{1}{|G|} \sum_{\mu} \langle \mu^* \alpha, [M] \rangle$$

とある。ここで  $\mu$  は  $\mu: M \rightarrow BG$  の homotopy class すべてをわたるものとする。

[DW] では、この不変量に付随して "topological quantum field theory" を構成すること提案している。例として genus 1 の場合の  $\mathcal{H}_{\Sigma}$  について述べる。

$$S = \{ (g, h) \in G \times G ; gh = hg \}$$

$$\mathcal{V}_{\Sigma} = \text{Map}(S, \mathbb{C})$$

とある。  $K_A, K_B, \dots$  は  $G$  の共役類。

$\{\rho_i^A\}_i$  は  $g \in K_A$  の centralizer の irreducible projective representation  $\tau$  により決まる 2-cocycle

$$c_g(x, y) = \frac{\alpha(g, x, y) \alpha(x, y, g)}{\alpha(x, g, y)}$$

に対応したものである。  $\mathcal{H}_{\Sigma} \in (A, i)$  によって parameterized した basis  $\{v_i^A\}$  は vector space とし

$$\mathcal{V}_{\Sigma} \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{s} \end{array} \mathcal{H}_{\Sigma}$$

$$\pi e(g, h) = \frac{1}{|G|} \sum_i \chi_i^A(h^{-1}) v_i^A$$

$$s v_i^A = \sum_{\substack{g \in K_A \\ hg = gh}} \chi_i^A(h) e(g, h)$$

ここで  $\{e(g, h)\}_{gh=hg}$  は  $S$  の basis. また  $\chi_i^A$  は  $\rho_i^A$  の character を示す。実はこの section  $s$  により  $SL(2, \mathbb{Z})$  の  $\mathcal{H}_{\Sigma}$  への

作用が自然に構成され、これを character  
 { $\chi$ } であらわすことができる。応用として  
 $Z(M)$  の Dehn surgery による記述、Heegaard  
 分解による記述が得られ、とくに Heegaard genus  
 $g$  のついでには、不等式

$$|Z(M)| \leq |G|^{g-1}$$

が示される。

### References

- [DW] Dijkgraaf - Witten ; Topological gauge  
 theories and group cohomology, CMP 129, 393-429 (1990)
- [K] Kohno ; Topological invariants for 3-manifolds  
 using representations of mapping class groups, Topology (1991)
- [KM] Kirby - Melvin ; The 3-manifold invariant  
 of Witten and Reshetikhin-Turaev for  $sl(2, \mathbb{C})$ , preprint
- [RT] Reshetikhin - Turaev ; Invariants of 3 manifolds  
 via link polynomials and quantum groups, Invent. Math (1991)
- [W] Witten ; Quantum field theory and the Jones  
 polynomial, CMP 121 (1989), 351-399.

# Margulis-Pesin のエントロピー等式をめぐって

京都大 理 辻井 正人

## §0 はじめに

力学系理論は常微分方程式もしくはそれを含むより広い時間発展を記述する系に関する理論で、特に数値解析的な研究と対比して、長時間の質的な振舞いについての側面と指すことが多い。このような研究は制限3体問題に対する Poincaré に始まり 1960年代に Anosov や Smale によって微分トポロジ-的な手法がとり入れられて大きく発展した。しかし、彼らに続く人々の研究から、そこで扱われた Axiom A系と呼ばれる class の力学系は1つの典型をあたえるものの、力学系全体の中では小さな class であって、その外側に位置する系は一般に極めて複雑であることがわかってきた。今回取り上げたいのは、そのような非 Axiom A の力学系に対して、今までの力学系理論と工

ルゴード理論を融合させることで、その統計的な性質を研究するという話である。以下、力学系としては閉多様体  $M$  上の  $C^2$  diffeo  $f: M \rightarrow M$  または、 $C^2$  map  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  によって生成される離散力学系を考える。

### §1 極限集合 $\omega(x)$ と $\bar{\omega}(x)$

$x$  を  $M$  上の点とするとき点列  $x, fx, f^2x, \dots$  を  $x$  を初期値とする orbit と呼ぶ。orbit の集積点の全体  $\omega(x)$  は  $f$ -不変な集合で  $x$  の  $\omega$ -limit set と呼ばれる。一方、時刻  $(n-1)$  までの orbit  $x, fx, \dots, f^{n-1}x$  の分布を

$$\text{dist}(x, n) = \frac{1}{n} (\delta_x + \delta_{fx} + \dots + \delta_{f^{n-1}x}) \quad (\delta_x: \text{点測度})$$

で表わし、列  $\{\text{dist}(x, n)\}_{n=1}^{\infty}$  の  $M$  上の Borel 確率測度の空間  $\mathcal{M}$  中での集積点全体を  $\bar{\omega}(x)$  と書く。

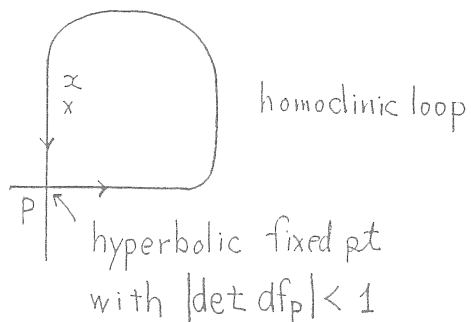
ただし  $\mathcal{M}$  には次のような等价相を考える：

$$\mu_n \rightarrow \mu \stackrel{\text{def}}{\iff} \int \phi d\mu_n \rightarrow \int \phi d\mu \quad \forall \phi \in C^0(M).$$

一般に  $\mu \in \bar{\omega}(x)$  なる  $\text{supp}(\mu) \subset \omega(x)$  であるが等しくはなさない。例えば次のような例を考えればそれはよくわかる。



例



$$\begin{cases} \omega(x) = D \\ \bar{\omega}(x) = \{\delta_P\} \end{cases}$$

この例からわかるように  $\omega(x)$  は orbit の全ての点をとらえるのに対し、 $\bar{\omega}(x)$  は orbit の統計的、平均的な振舞いを記述する。

**定義** (1)  $\mu \in \mathcal{M}$  が  $f$  下変  $\Leftrightarrow \mu(A) = \mu(f^{-1}(A)) \quad \forall A \subset M$   
(このような  $\mu$  全体を  $\mathcal{M}_f$  と書く。)

(2)  $\mu \in \mathcal{M}_f$  が ergodic である

$$\Leftrightarrow f^{-1}(A) = A \text{ ならば } \mu(A) = 0 \text{ or } 1$$

$\Leftrightarrow \mu$  が  $\mathcal{M}_f$  の中で non trivial な分解をたない。

**注** (1)  $\bar{\omega}(x) \in \mathcal{M}_f$

(2) 任意の  $\mu \in \mathcal{M}_f$  は ergodic なものに分解される。

## §2 Pesin の エントロピー - 等式

$x \in M$ ,  $0 \neq v \in T_x M$  に対して

$$L(x, v) = \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n(v)\|$$

とすると  $L(x, u+v) = \max(L(x, u), L(x, v))$  であるから、適当な重複度を考えると  $L(x, \cdot)$  はちょうど  $\dim M$  個の値,  $\chi_1(x) \leq \chi_2(x) \leq \dots \leq \chi_{\dim M}(x)$  をとる。

これらを点  $x$  における Lyapunov 指数と呼ぶ。

(注)  $\mu \in \mathcal{M}_f$  が ergodic ならば  $\chi_i(x) = \text{const.} (= \chi_i(\mu))$   $\mu$ -a.e.

$M$  上の  $x$  に対して  $I$  の local entropy を

$$I(x) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log (\mu \{y \in M \mid d(f^i x, f^i y) < \varepsilon, 0 \leq i < n\})$$

で定義し entropy  $h_\mu(f)$  を次で定義する。

$$h_\mu(f) = \int I(x) d\mu(x).$$

(注)  $h_\mu(f)$  は Kolmogorov-Sinai entropy と一致する。

正の Lyapunov 指数と local entropy  $I(x)$  はともに軌道に沿って近くの orbit の離れてゆく速さを記述していてその間には任意の  $\mu \in \mathcal{M}_f$  について

$$I(x) \leq \sum_{\chi_i > 0} \chi_i(x) \quad \mu\text{-a.e. } x$$

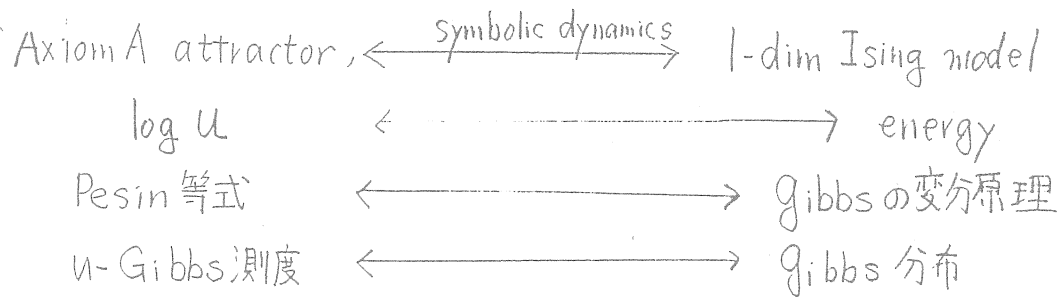
という関係がある。よって次の Ruelle 不等式と呼ばれる不等式が成立する。

$$\textcircled{*} \quad h_\mu(f) \leq \int \sum_{\chi_i > 0} \chi_i(x) d\mu$$

この不等式で等号が成立する場合, すなわち,

$$h_{\mu}(f) := \int \sum_{\chi_i > 0} \chi_i(x) d\mu(x)$$

を Pesin の entropy 等式と呼び、それをみたす  $\mu \in \mathcal{M}_f$  を  $U$ -Gibbs 測度と呼ぶ。ここで "Gibbs" は次のような Axiom A attractor の場合のでの対応がとけている。



### §3 Ergodic Attractors

**定義** (1)  $x \in M$  が  $\mu \in \mathcal{M}_f$  に対し  $z$  generic

$$\Leftrightarrow \bar{\omega}(x) = \{\mu\}$$

(2)  $x \in M$  が ergodic な  $\mu \in \mathcal{M}_f$  に対し  $z$  regular

$$\Leftrightarrow \bar{\omega}(x) = \{\mu\} \text{ かつ } \chi_i(x) = \chi_i(\mu) \quad \forall i$$

**定理**  $\mu$  が ergodic であるとき

(1) ([T])  $\text{Leb}\{x \mid x \text{ は } \mu \text{ に対し regular}\} > 0$  ならば  $\mu$  は Pesin 等式をみたす。

(2) ([L]) もし  $\mu$  が hyperbolic ( $\chi_i(\mu) \neq 0 \quad \forall i$ ) ならば逆も正しい。

**定理**  $\mu$  が ergodic  $u$ -Gibbs measure かつ hyperbolic ならば

- (1) ([L])  $(f, \mu) \sim$  Bernoulli系  $\times$  Periodic系
- (2) ([T]) ある hyperbolic periodic orbit  $\Theta(p)$  があって  
 $\text{supp}(\mu) = \text{closure of } W^u(\Theta(p))$

§4. 1次元 unimodal map について

$f: [0,1] \ni$  が unimodal であるとは  $f$  が唯1つの critical point をもたないことである。特別な unimodal map の family として quadratic family と呼ばれる次のようなものを考える。

$$Q_a: [0,1] \ni x \mapsto 4ax(1-x) \quad a \in [0,1].$$

このとき次のような事実が知られている。

**定理** 正のルベーグ測度  $A, B \subset [0,1]$  があって

- (1)  $a \in A$  のとき  $Q_a$  について唯1つの  $u$ -Gibbs 測度はある periodic sink 上の ergodic measure かつ  $[0,1]$  上ほとんど致る所の点に対して regular.
- (2)  $a \in B$  のとき  $Q_a$  について唯1つの  $u$ -Gibbs 測度はある  $\chi(\mu) > 0$  なる絶対連続な ergodic 測度 かつ  $[0,1]$  上ほとんど致る所の点に対して regular.

([BC])

この定理で  $[0,1] - A - B$  のルベ-グ測度が 0 か正かが問題になるがそれは難問である。  $a \in A$  のとき  $Q_a$  は位相安定,  $a \in B$  のとき位相不安定である。ただし,  $a \in B$  の場合にどのような種の値率論的安定性があることがわかっていない。  
より一般の class の unimodal map について次が得られる。

**定理** ([T2]) (1)  $U^{r,n} = \{ \{f_t\}_{t \in [0,1]^n} \mid \text{unimodal map の } C^r \text{ 族} \}$  とするとき  $\{t \mid f_t \text{ は弱正則でない}\}$  のルベ-グ測度が正になるような family 全体は  $C^r$  dense. ここで弱正則とは

$$(*) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \log |df(f_x^j)| = 0$$

$d(f_x^j, c) < \delta$

がほとんど致る所成立することとする。

(2) unimodal map  $f$  が弱正則ならば少なくとも 1 つの  $u$ -Gibbs 測度が存在する。特に  $f$  について  $\chi_1(u) = 0$  なる ergodic 測度が存在しないならば  $[0,1]$  上ほとんど致る所の点は periodic sink に近づくかまたは絶対連続な  $u$ -Gibbs 測度に対し regular になる。

- [BC] The dynamics of Hénon map  
Ann. of Math. 133 (1991)
- [L] Propriété ergodique des mesure de Sinai  
IHES Publ. 59 (1984) 163-188
- [T] Regular points for ergodic Sinai measures  
(to appear in Trans. AMS)
- [T2] Weak regularity of Lyapunov exponent in one  
dimensional dynamics (preprint)

# 同変 Serre 問題と線型性問題

阪大 理 科 田 幹 也

序

$G$  を 簡 約 複 素 代 数 群 と する。

線型性問題  $\mathbb{C}^n$  上 の 任 意 の 代 数 的  $G$  作 用 は  
線型作用 (つり表現) と 同 型 か。

1979年 上林氏 [Ka] は この問題の肯定的結論を  
予想し、最近まで部分的肯定的結果が得られていた。  
位相的カテゴリーでも同様の問題があるが、これは、  
古くから否定的に解決されている。例は

「 $\mathbb{R}^n$  ( $n: \text{十分大}$ ) 上  $C^\infty \mathbb{Z}_p$  作用 ( $p, q: \text{相異なる素数}$ ) 2  
固定点を持たないものがある」

この構成でのキーポイントの一つは、

「可縮で、エンドの基本群が自明な  $C^\infty$  開多様体は  
 $\mathbb{R}^n$  と 微合同相 ( $n \geq 5$ )」

という  $\mathbb{R}^n$  の 不変量による特徴づけである。これにより、  
 $\mathbb{C}^n$  ( $n \geq 3$ ) には このような不変量による特徴づけはない。  
これが線型性問題が最近まで未解決であった最大の  
理由と思われる。しかし、全くタイプの異なる  $\mathbb{C}^n$  の特徴  
づけがある。これが次の同変 Serre 問題を考える動機  
となった。

同変 Serre 問題 (Bass '85?)  $G$  加群 (=  $G$  表現空間) 上 の  
代数的  $G$  ハトリ束は 自明束と同型か。

位相的カテゴリーでは、底空間が  $G$  可縮であるから、  
 勝手な  $G$  バナッホ束は、自明束と同型である。しかし、代数的  
 カテゴリーでは、群作用を考慮しないときでは大問題であった。  
 群作用を考慮しないとき、上記の問題は Serre 予想と呼ばれて  
 いたもので、1976年、Quillen, Suslin (により) 独立に肯定的に  
 解決されている。今、 $E$  を  $G$  加群上の代数的  $G$  バナッホ束  
 の全空間としよう。  $E$  には  $G$  が代数的に作用しているが、  
 Serre 予想の解決により、群作用を忘れると、 $E$  は  $\mathbb{C}^n$  であ  
 る。よって  $E$  は  $\mathbb{C}^n$  上の代数的  $G$  作用を与える。  
 もし、 $E$  が非自明束の全空間なら、 $\mathbb{C}^n$  上のこの  $G$  作用は  
 非線型であるかも知れない。実際ある場合には、これが  
 本当に非線型であることを示せる。

1989年 G. Schwarz [S] は、このように同変 Serre 問題の  
 反例を与えることにより、線型性問題の反例を与えた。  
 彼の驚くべき結果は、単に反例を与えたのみならず、いくつか  
 興味ある問題を提示している。講演者は、T. Petrie,  
 L. Moser 氏と共同で、Schwarz とは異なる観点から、同変  
 Serre 問題に取り組んでいる。本講演では、我々の方法を  
 解説し、又、関連する未解決問題にも触れる予定である。

## 目次

§1	定義	§5	見直し
§2	線型性問題	§6	超曲面 (例)
§3	同変 Serre 問題	§7	超曲面 (一般化)
§4	2つの問題の関係	§8	問題



## §1 定義

この節では、以下で必要な用語の定義を述べる。

基礎体は  $\mathbb{C}$  とする。

定義  $\mathbb{C}^N$  上の  $1 \leq r \leq N$  の多項式の零点集合を アフィン代数多様体 (affine algebraic variety) といい、以後簡単のため 代数多様体 と呼ぶ。

注 アフィン代数的集合 (affine algebraic set) と呼ばれることもある。

定義  $X \subset \mathbb{C}^N$ ,  $Y \subset \mathbb{C}^M$  を代数多様体とする。

$f: X \rightarrow Y$  が  $\mathbb{C}^N$  から  $\mathbb{C}^M$  への多項式写像に拡張するとき、代数的写像 (algebraic map または morphism) という。

定義  $f: X \rightarrow Y$  が全単射で、 $f, f^{-1}$  共に代数的であるとき、同型写像 といい、 $X$  と  $Y$  は 同型 という。

特に  $Y = X$  のとき、 $f$  を 自己同型写像 という。

定義 群  $G$  が 複素代数群 (complex algebraic group)

$\Leftrightarrow$

$G$  は代数多様体で、写像  $G \times G \rightarrow G$ ,  $G \rightarrow G$   
 $(x, y) \mapsto xy$ ,  $x \mapsto x^{-1}$   
が共に代数的。

複素代数群の例 加群  $\mathbb{C}^n$

$$GL_n = \{(x, t) \in M_n(\mathbb{C}) \times \mathbb{C} \mid t \det x = 1\}$$

$SL_n$ ,  $SO_n$ ,  $Sp_n$ , 有限群,  $\mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^*$ , ...

以下,  $G$  は複素代数群とする。

定義 代数的写像  $\rho$  がある準同型  $: G \rightarrow GL_n \in$  表現,  
表現空間を  $G$  加群 とする。

定義  $X$  を代数多様体とする。作用  $\rho: G \times X \rightarrow X$  が  
代数的写像のとき 代数的作用 (algebraic action)  
とする。  $X$  を 代数  $G$  多様体 (algebraic  $G$  variety) とする。

例 表現  $\rho: G \rightarrow GL_n$  は  $G \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  ( $= \rho$ )  
 $(g, x) \mapsto \rho(g)x$

$\mathbb{C}^n$  上の代数的  $G$  作用  $\rho$  を与える。  $= \rho$  は 線型作用  
(linear action) と呼ぶ。

定義 複素代数群  $G$  が 簡約 (reductive)

$\Leftrightarrow G$  の極大  $u$ -単 (unipotent) 正規部分群が自明

注 これはいくつか同値な定義がある ([Sp] 参照)。例として  
任意の  $G$  表現が完全可約になるものとして簡約群は特徴づけ  
られる。

簡約複素代数群の例 前出の複素代数群の例の中で、

加群  $\mathbb{C}^n$  以外は簡約。半単純複素代数群は簡約。

一般に連結簡約複素代数群  $G$  は  $(G_s \times Z)/F$  と

同型。ここで  $G_s = [G, G]$  (半単純),  $Z = G$  の中心群 ( $\cong \mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^*$ )

$F$  は有限群。

## §2 線型性問題

以後  $G$  は簡約複素代数群とする。  $\mathbb{C}^m$  上の代数的  $G$  作用として、表現から得られる線型作用があることを思い出そう。

線型性問題  $\mathbb{C}^n$  上の任意の代数的  $G$  作用は、線型作用と共役か。

ここで「共役」とは次の意味。

$$\text{Aut}(\mathbb{C}^n) = \{ f: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \text{ 代数的自己同型写像} \}$$

とする。  $\mathbb{C}^n$  上の代数的  $G$  作用  $\varphi: G \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  は、 $g \rightarrow \varphi(g, \cdot)$  により準同型  $\bar{\varphi}: G \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{C}^n)$  を導く。 $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$  の中には  $GL_n$  が入っていることに注意。線型性問題は、 $\bar{\varphi}$  の  $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$  の中でのある共役か表現か、つまり、代数的自己同型の範囲で  $\mathbb{C}^n$  の座標変換を施して  $\varphi$  は線型作用かという問題である。

線型性問題の部分的肯定的結果については [B] を参照のこと。尚 [Kr] に  $\text{Aut}(\mathbb{C}^n)$  についての解説がある。

### §3. 同変 Serre 問題

定義  $E, X$   $\mathbb{C}$  代数多様体,  $\pi: E \rightarrow X$   $\mathbb{C}$  代数的写像とす。このとき  $\pi: E \rightarrow X$  を 代数的ベクトル束 (algebraic vector bundle)

$\Leftrightarrow$  (1)  $\pi^{-1}(x)$  ( $x \in X$ ) : ベクトル空間

(2) (局所自明性)  $\exists U_i: X$  の Zariski 開被覆

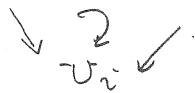
$$\pi^{-1}(U_i) \xrightarrow{\exists \varphi_i} U_i \times \mathbb{C}^n$$

$\varphi_i$ : 全単射

ファイバー上線型

$\varphi_i, \varphi_i^{-1}$  共に各座標

関数が有理関数



定義  $\pi: E \rightarrow X$  を 代数的  $G$  ベクトル束 (algebraic  $G$  vector bundle)

$\Leftrightarrow$  (1)  $E, X$  : 代数  $G$  の多様体

$\pi$  : 代数的  $G$  写像 (つり 代数的  $G$  写像)

(2)  $\pi: E \rightarrow X$  は作用を忘れると 代数的ベクトル束

(3)  $\forall g \in G: \pi^{-1}(x) \rightarrow \pi^{-1}(gx)$  は線型

後で、 $X$  が  $G$  加群の時、代数的  $G$  ベクトル束の別の解釈を与えるので、上の定義は直接には必要ない。

定義 2つの代数的  $G$  ベクトル束  $\pi: E \rightarrow X, \pi': E' \rightarrow X$  が 同型

$\Leftrightarrow$  代数的  $G$  写像  $\psi: E \rightarrow E'$  が各ファイバー上線型

$$\pi' \psi \downarrow \downarrow \psi \downarrow \pi$$

$X$

なものがあがる。

以下、 $X$  が  $G$  加群 の場合を考える。

$B, F$  :  $G$  加群 とする

定義  $VEC(B, F) = \{ \pi : E \rightarrow B \mid \pi^{-1}(0) = F \text{ とする代数的 } G\text{-ガリタ束} \} / \sim$   
同型

集合  $VEC(B, F)$  は自明束  $\mathbb{H}_F := B \times F \xrightarrow{\text{射影}} B$  を含む。

同変 Serre 問題  $VEC(B, F) = \{ \mathbb{H}_F \}$  か。

同変 Serre 問題 について は 次のように知られている。

定理 3.1 (Bass-Haboush [BH]).  $\forall E \in VEC(B, F)$  は安定的是に自明。つまり  $E \oplus \mathbb{H}_S$  が自明 ( $= \mathbb{H}_{F \oplus S}$ ) とする  $G$  加群  $S$  が存在する。

注  $S$  は一般に  $E$  による。

次の結果は Luna Slice Theorem ([B] 参照) と呼ばれている簡約複素代数群作用の基本定理の一つの帰結である。 $B$  上  $G$  不変な多項式全体を  $\mathbb{C}[B]^G$  と表わす。 $G$ : 簡約であるから、 $\mathbb{C}[B]^G$  は環として有限生成 (Hilbert)。

定理 3.2 (Luna).  $\mathbb{C}[B]^G = \mathbb{C}$  (つまり、 $B$  上  $G$  不変な多項式が定数値関数のみ) ならば、 $VEC(B, F) = \{ \mathbb{H}_F \}$ 。

#### §4. 2つの問題の関係

Serre予想の肯定的解決により  $E \in \text{VEC}(B, F)$  は  $G$ 作用を忘れると代数の環体としてある  $\mathbb{C}^n$  と同型である。よって  $E$  は  $\mathbb{C}^n$  上の  $G$ 作用を与えらる。もし  $E$  が非自明ならば、これにより得られる  $\mathbb{C}^n$  上の  $G$ 作用は線型性問題の反例の候補である。実際、いくつか有効な非線型性の判定条件がある。

命題 4.1 (Bass-Helmholtz [BH]).  $E \oplus \mathbb{H}_B$  が非自明ならば、 $E$  上の  $G$ 作用は線型作用と共役でない。

<証明>  $TE|_B = E \oplus TB$  に注意する。  $E$  上の  $G$ 作用が線型作用と共役ならば  $TE$  は自明、特に  $TE|_B$  もそうである。これは仮定に反する。  $\square$

$E$  には、各ファイバー上  $\mathbb{Z}_k (\subset \mathbb{C}^*)$  を掛けることにより得られる  $\mathbb{Z}_k$  作用がある。これは  $G$ 作用と可換故  $E$  は  $G \times \mathbb{Z}_k$  作用をもつ。

$$\text{Aut}(B) = \{ f: B \rightarrow B \text{ 代数的自己同型で } G\text{-写像} \}$$

とする。  $\sigma \in \text{Aut}(B)$  は  $E \rightarrow \sigma^*E$  ( $E$  の  $\sigma$  による引き戻し) により  $\text{VEC}(B, F)$  に作用する (注. ベクトル束の同型写像は、底空間上恒等写像と導くものであったから、 $\sigma^*E$  は代数的  $G$ -ベクトル束としては  $E$  とは異なるかも知れない)。明らかに  $E$  と  $\sigma^*E$  は代数  $G \times \mathbb{Z}_k$  の環体としては同型である。

又は 逆も言える。

命題 4.2 ([MP]).

$\{VEC(B, F)$  の元 の 代数  $G \times \mathbb{Z}_k$  ( $k \geq 2$ ) の 様体 と して の 同型類  $\}$

$\downarrow$  全単射

$$VEC(B, F) / Aut(B)$$

<証明>  $f: E' \rightarrow E$  を 代数  $G \times \mathbb{Z}_k$  の 様体 と して の 同型写像 と する。  $(E')^{\mathbb{Z}_k} = B = (E)^{\mathbb{Z}_k}$  から、  $f$  は 零切断  $B$  を 保つ。 よって  $df$  は  $E'$  における  $B$  の 法ベクトル束  $(E')$  を  $E$  における  $B$  の 法ベクトル束  $E$  に 移す。 よって  $VEC(B, F)$  の 元 と して、  $E' = (f|_B)^* E$ 。  $\square$

ある条件下では、 命題 4.2 における  $\mathbb{Z}_k$  因子 を 落とす ことが できる ([MP]) が、 一般 には 不明。 命題 4.2 を その 改良 と 用いて、 非可算個 の 非線型 作用 の 存在 が 示せる ([MHP])、 これ に 反して 命題 4.1 では、 非線型 作用 同値 の 区別 は でき ない。

§5 見直し。

定理 3.2 により、  $\mathbb{C}[B]^G = \mathbb{C}$  の とき には、  $VEC(B, F) = \{ \oplus_{\mathbb{F}} \}$  で あった。 Schwarz [S] (Kraft-Schwarz [KS]) は  $\mathbb{C}[B]^G$  が 一変数 の 項式環 である 場合 に、 代数的  $G$  ベクトル束 の 変換関数 を 詳しく 解析し、 ある  $B, F$  に対し  $\mathbb{C}$ 、  $VEC(B, F)$  が

非自明となり得ることを示している。これはある意味で局所的な見方である。一方、我々の立場は定理3.1に基づく。定理3.1により、 $E \in \text{VEC}(B, F)$  に対し、必ず " $E \oplus \mathbb{H}_S$  が自明となるある  $G$  加群  $S$  が" ある。  $E \oplus \mathbb{H}_S = \mathbb{H}_{F \oplus S}$  に注意すれば、 $E$  はある代数的全射準同型  $G$  写像  $L: \mathbb{H}_{F \oplus S} \rightarrow \mathbb{H}_S$  の核束 ( $\text{Ker } L$ ) とは表わされる。従って次の集合  $E$  を考えると都合がよい。

定義  $\text{VEC}(B, F; S) = \{ E \in \text{VEC}(B, F) \mid E \oplus \mathbb{H}_S = \mathbb{H}_{F \oplus S} \}$   
 $\text{sur}(F \oplus S, S) = \{ L: \mathbb{H}_{F \oplus S} \rightarrow \mathbb{H}_S \text{ 代数的全射準同型 } G \text{ 写像} \}$

$L \in \text{sur}(F \oplus S, S)$  に対し、 $\text{Ker } L \in \text{VEC}(B, F; S)$  と対応させることにより、 $\text{sur}(F \oplus S, S)$  から  $\text{VEC}(B, F; S)$  へ全射対応が得られる。しかし単射ではない。

定義  $\text{aut}(F \oplus S) = \{ A: \mathbb{H}_{F \oplus S} \rightarrow \mathbb{H}_{F \oplus S} \text{ 代数的 } G \text{ バトル束の自己同型} \}$

$\text{aut}(F \oplus S)$  は  $L \rightarrow L \cdot A$  により  $\text{sur}(F \oplus S, S)$  に作用する。容易にわかるように  $\text{Ker } L$  と  $\text{Ker}(L \cdot A)$  は同型の代数的  $G$  バトル束である。実は逆も言える。

定理 5.1 ([MP]).  $\text{VEC}(B, F; S) \xleftrightarrow{\text{全射}} \text{sur}(F \oplus S, S) / \text{aut}(F \oplus S)$   
 $\downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow$   
 $\text{Ker } L \qquad \longleftarrow \qquad L$

<証明>  $L, L' \in \text{sur}(F \oplus S, S)$  に対し  $\text{Ker } L \xrightarrow{\cong} \text{Ker } L'$  とする。



$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \rightarrow & \text{Ker } L' & \rightarrow & \mathbb{H}_{F \oplus S} & \xrightarrow{L} & \mathbb{H}_S \rightarrow 0 \\
& & \alpha \downarrow \cong & & \downarrow A & & \parallel \\
0 & \rightarrow & \text{Ker } L & \rightarrow & \mathbb{H}_{F \oplus S} & \xrightarrow{L} & \mathbb{H}_S \rightarrow 0
\end{array}$$

$G$  簡約より 上の 2つの 短完全列 は 分裂する。

従って 同型写像  $\alpha: \text{Ker } L' \rightarrow \text{Ker } L$  と 恒等写像:

$\mathbb{H}_S \rightarrow \mathbb{H}_S$  を用いて 上の 図式が 可換となるように

$A \in \text{aut}(F \oplus S)$  と定義するこができる。つまり  $L' = L \circ A$ .  $\square$

## §6 超曲面 (311)

$G$  加群  $M$  に対し、 $B$  から  $M$  への代数的  $G$  写像  
全体を  $\text{Mor}(B, M)^G$  と表わす。次に注意する。

$$\begin{aligned}
\text{sur}(F \oplus S, S) &\subset \text{Mor}(B, \text{Hom}(F \oplus S, S))^G \\
&\parallel \\
&\text{Mor}(B, \text{Hom}(F, S))^G \oplus \text{Mor}(B, \text{End}(S))^G
\end{aligned}$$

簡単のため 以後  $S = \mathbb{C}$  の場合を考える。この場合

$$\begin{aligned}
\text{Mor}(B, \text{Hom}(F, \mathbb{C}))^G &= \text{Mor}(B, F^*)^G \quad (F^* = \text{Hom}(F, \mathbb{C})) \\
\text{Mor}(B, \text{End}(\mathbb{C}))^G &= \mathbb{C}[B]^G
\end{aligned}$$

従って、 $\psi \in \text{Mor}(B, F^*)^G$ ,  $t \in \mathbb{C}[B]^G$  に対して、

$$L_{\psi, t}: \mathbb{H}_{F \oplus \mathbb{C}} \rightarrow \mathbb{H}_{\mathbb{C}} \quad \text{を}$$

$$L_{\psi, t}(u, v, z) = (u, \langle \psi(u), v \rangle + t(u)z) \quad (u, v, z) \in \mathbb{H}_{F \oplus \mathbb{C}} \parallel B \times F \times \mathbb{C}$$

に よつて 与えられる。こゝで  $\langle , \rangle$  は  $F^*$  と  $F$  の 通常の内積。  
容易にわかるように

$$(*) \quad L_{\psi, t} \text{ が 全射} \iff \psi^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) = \emptyset$$

従つて  $\psi^{-1}(0) \cap t^{-1}(0) = \emptyset$  を満たす対  $(\psi, t)$  には

$$E_{\psi, t} = \{(u, v, z) \in B \times F \times \mathbb{C} \mid \langle \psi(u), v \rangle + t(u)z = 0\}$$

と定義すると、 $E_{\psi, t} \xrightarrow{\text{射影}} B$  は  $VEC(B, F; \mathbb{C})$  の元を定める。

例  $R_n := \{x, y \text{ の 齊次 } n \text{ 次 多項式全体}\}$

$$(x, y) \rightarrow (z, y) \quad (g \in SL_2)$$

に對し、 $R_n$  は  $SL_2$  加群になる。よく知られているように、これは既約である。一方任意の既約な  $SL_2$  加群はある  $R_n$  と同型である。又、 $R_n^* = R_n$ 。

さて、 $B = R_2$ ,  $F = R_{2m}$ ,  $\mathbb{F} = \mathbb{C}$  とする。

$$\psi \in \text{Mor}(R_2, R_{2m})^{SL_2} \text{ である}$$

$$\psi(u) = u^m$$

と定める。  $\psi^{-1}(0) = 0$  である。一方  $\mathbb{C}[R_2]^{SL_2} = \mathbb{C}[\Delta]$ 。

こゝで

$$\Delta(ax^2 + bxy + cy^2) = b^2 - 4ac.$$

$t \in \mathbb{C}[R_2]^{SL_2}$  には

$$t(u) = f(\Delta(u))$$

となる一変数の多項式  $f$  が定まる。全射の条件 (\*) は  $f(0) \neq 0$  と同値である。

$$R = \{ f \in \mathbb{C}[\Delta] \mid f(0) \neq 0 \}$$

とある。上の構成により 対応

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\delta_\psi} & \text{sur}(R_{2m} \oplus \mathbb{C}, \mathbb{C}) / \text{aut}(R_{2m} \oplus \mathbb{C}) = \text{VEC}(R_2, R_{2m}; \mathbb{C}) \\
 \psi \downarrow f & \longmapsto & \downarrow \\
 & & L_{\psi, f(\Delta)} (= L_f \text{ とある})
 \end{array}$$

と得る。

主張1  $\delta_\psi$  は  $(R/(\Delta^m))/\mathbb{C}^*$  からの対応  $\varepsilon$  である。

<証明>  $A \in \text{aut}(R_{2m} \oplus \mathbb{C})$   $\varepsilon$

$$u \mapsto u$$

$$v \mapsto v + p(\Delta(u))u^m z \quad \left( \begin{array}{l} p: \text{一度書くと項式} \\ c \in \mathbb{C}^* \end{array} \right)$$

$$z \mapsto cz$$

と定めると、

$$L_f \circ A = L_h \quad z'' \quad h(\Delta) = cf(\Delta) + p(\Delta)\Delta^m,$$

これは主張1を意味する。

主張2  $(R/(\Delta^m))/\mathbb{C}^* \xrightarrow{\delta_\psi} \text{VEC}(R_2, R_{2m}; \mathbb{C})$  は単射。

<証明の概略> 二を示すには、 $\text{aut}(R_{2m} \oplus \mathbb{C})$  の元を解行列として表現

ならない。 $A \in \text{aut}(R_{2m} \oplus \mathbb{C}) \subset \text{Mor}(R_2, \text{End}(R_{2m} \oplus \mathbb{C}))^{SL_2}$  は、行列

表示すると 4つの部分に分解できる

$$\begin{pmatrix}
 A(R_{2m}, R_{2m}) & A(R_{2m}, \mathbb{C}) \\
 A(\mathbb{C}, R_{2m}) & A(\mathbb{C}, \mathbb{C})
 \end{pmatrix}$$

と二つ  $A(U, V)$  は  $\text{Mor}(R_2, \text{Hom}(U, V))^{SL_2}$  の元を表現する。



$$u \mapsto u$$

$$v \mapsto p_1(u) \langle u^m, v \rangle u^m + p_2(u) u^m z \quad \left( p_i \in \mathbb{C}[R_2]^{SL_2} \right)$$

$$z \mapsto p_3(u) \langle u^m, v \rangle + p_4(u) \langle u^m, u^m \rangle z$$

= 400  $\Delta_{\psi}$  単射を意味することは、主張1の証明と同様の議論でわかる。

主張3  $\Delta_{\psi} : (R/\langle \Delta^m \rangle) / \mathbb{C}^* \rightarrow \text{VEC}(R_2, R_{2m}; \mathbb{C})$  全射。

<証> 証明は初等的な代数的なことに省略。

この議論では、 $\mathbb{C}[R_2]^{SL_2}$  が一変数多項式環 (故、PID) であることが効く。

## §7. 超曲面 (一般化)

前節の1311のキーポイントは2つある。1つは適当な  $\psi \in \text{Mor}(B, F^*)^{\text{gr}}$  があったこと。もう一つは  $F(R_{2m}) \in H (= \mathbb{C}^*)$  加群と思ったとき、各既約成分が高々1回しか現れなかつたことである。これらのことが保証されれば、主張1, 2と同様のことが成立する。さらに  $\mathbb{C}[B]^{\text{gr}}$  が一変数多項式環ならば、主張3も成立する。

定義  $F: G$  加群から簡約部分群  $H$  に関して multiplicity free

$\Leftrightarrow F \in H$  加群として既約分解した時、各既約成分が重複して現れない。

前節の例の 2 方向への一般化を考える。以下  $G$  は連結半単純群とする。

[I]  $B^* = B$  かつ  $F = B^m$  の場合  $B$  の最高次歪位  $\lambda$  とした時  $m\lambda$  を最高次歪位に持つ  $G$  加群  $\mathcal{B}^m$  と書く。これは  $B$  の  $m$  次対称積  $S^m(B)$  の部分加群で、 $B$  の  $m$ -th Cartan power と呼ばれる。  $S^m(B)$  から  $B^m$  への射影  $\pi$  とする。  $u \in B$  に対し、  $u$  の  $m$  回の対称積の  $\pi$  による像  $u^m \in B^m$  と書く。

$$\begin{array}{ccc} \psi : B & \longrightarrow & B^m \\ \downarrow & & \downarrow \\ u & \longmapsto & u^m \end{array}$$

は  $\text{Mor}(B, B^m)^G$  の元  $\psi$  を定め、  $\psi^{-1}(0) = 0$  が示せる。

$B = \mathbb{R}_2$  のとき、  $B^m = \mathbb{R}_{2m}$  での  $\psi$  は前節の例の  $\psi$  と一致する。

定理 7.1 (HNPI)  $G$ : 連結半単純群,  $B^* = B$  とする。

ある簡約部分群  $H$  に対し

(1)  $\mathbb{C}[B^H]^{NH}$ :  $n$ -変数多項式環

(2)  $B^m$ :  $H$  に関して multiplicity free

$\Rightarrow$

$$\text{VEC}(B, B^m; \mathbb{C}) \supset \mathbb{C}^{m-1}$$

応用31

$G$	$SL_m (m \geq 2)$	$SO_m (m \geq 3)$		$Sp_m$	$G_2$	$F_4$	$E_6$	$E_7$	
$B$	$Ad$	$\varphi_1 (= \mathbb{C}^n)$	$Ad$	$Ad$	$\varphi_1$	$\varphi_1$	$Ad$	$\varphi_1^2$	$Ad$
$H$	$GL_{m-1}$	$SO_{m-1}$	$SO_{m-2} \times \mathbb{C}^*$	$Sp_{m-1} \times \mathbb{C}^*$	$SL_3$	$Spin(9)$	$D_5 \times \mathbb{C}^*$	$E_6 \times \mathbb{C}^*$	

"="

$Ad$  : 随伴表現

$\varphi_1$  : 非自明既約  $G$  表現の中で最も次数の低いもの

[II]  $\mathbb{C}[B]^G$  : 変数の項式環の場合,  $\Delta \in \mathbb{C}[B]^G$  を

生成元とする。  $\Delta$  は斉次項式である。  $\Delta: B \rightarrow \mathbb{C}$  は  $\mathbb{C}$ -101 上ではファイバー束になり、そのファイバーを一般ファイバーと呼ぶ。 今一般ファイバーが  $G/H$  で、かつ  $\dim F^H = 1$  とする。この時、Frobenius reciprocity より  $\text{Mor}(B, F)^G, \text{Mor}(B, F^*)^G$  は  $\mathbb{C}[B]^G$  加群として唯一つの生成元をもつ自由加群となる。  $\psi, \varphi$  をそれぞれ生成元とする。 これらは共に斉次。

$\langle \psi, \varphi \rangle \in \mathbb{C}[B]^G$  で 0 でないから、(定数倍を除いて)

$\langle \psi, \varphi \rangle = \Delta^m$  とかける。 (3.1)

$$(\deg \psi + \deg \varphi) / \deg \Delta = m$$

は自然数。

定理 7.2 (HMP) G: 連結半単純群,  $\mathbb{C}[B]^G = \mathbb{C}[\Delta]$  とする。

もし (1)  $\Delta: B \rightarrow \mathbb{C}$  の一般ファイバー  $G/H$

(2)  $F: H$  に関して multiplicity free かつ  $\dim F^H = 1$

$\Rightarrow$

$$\text{VEC}(B, F; \mathbb{C}) \stackrel{\text{全単射}}{=} \mathbb{C}^{m-1}$$

## 応用例]

$G$	$SL_n (n \geq 2)$		$SO_m (m \geq 3)$	$G_2$	$E_6$
$B$	$\varphi_1^2$	$\varphi_1 + \varphi_1^*$	$\varphi_1$	$\varphi_1$	$\varphi_1$
$F$	$\varphi_1^{2m}$	$\varphi_1^m$	$\varphi_1^m$	$\varphi_1^m$	$\varphi_1^m$
$H$	$SO_n$	$SL_{n-2}$	$SO_{n-1}$	$SL_3$	$F_4$
$\deg \Delta$	$m$	$2$	$2$	$2$	$3$

## §8. 問題

問題 I  $\Delta$  の簡約複素代数群  $G$  に対して、 $VEC(B, F)$  が非自明となるか。

- 注
- (1)  $G$  の連結成分が半単純のとき  $\Delta, K$ . ([ $K_n$ ]).
  - (2) ある種の非可換有限群 (例として、二面体群) に対しては  $\Delta, K$ . ([ $MP$ ]).
  - (3)  $G$  可換群に対しては不明。

問題 II  $VEC(B, F)$  または  $VEC(B, F; S)$  はハッシル空間か。

- 注
- (1)  $\mathbb{C}[B]^G$  が一変数多項式環のとき  $\Delta, K$ . ([ $S$ ]).
  - (2) 位相空間として可縮。

問題 III  $B$  上の正則  $G$  ベクトル束が非自明なものがあるか。



すなわち 正則  $G$  ハットル束 とは 自明 ( $[S]$ ).

問題IV 命題 4.2 において  $\mathbb{Z}_2$  因子を落とせるか.

注  $(B \oplus F)^H = B$  となる 部分群  $H$  が あるときは  $o.k.$  ( $[MP]$ ).

問題V (固定点問題)  $\mathbb{C}^n$  上の 代数的  $G$  作用は 固定点  
を持つか.

注 現在知られている  $\mathbb{C}^n$  上の 代数的  $G$  作用は すなわち  
 $VEC(B, F)$  の元から得られるものである。  $VEC(B, F)$  の元は  
位相的カテゴリーでは すなわち 自明であるから、そのような  
 $G$  作用は すなわち 線型作用と  $G$  微分同相である。特に  
固定点を持つ。

### 参考文献

[B] H. Bass, Algebraic group actions on affine spaces,  
Contemp. Math. 43, (1985), 1-23.

[BH] H. Bass, W. Haboush, Some equivariant K-theory of affine algebraic  
group actions, Comm. Alg. 15 (1987), 181-217.

[Ka] T. Kamoyashi, Automorphism group of a polynomial ring and  
algebraic group actions on affine space, J. Alg. 60 (1979), 439-451.

- [Kr] H. Kraft, Algebraic automorphisms of affine space,  
Progress in Math. 80 (1989), Birkhäuser, 81-105
- [Kn] F. Knop, Nichtlinearisierbare Operationen halbeinfacher  
Gruppen auf affinen Räumen, preprint 1990.
- [KS] H. Kraft, G. Schwarz, Reductive group actions with one  
dimensional quotient, preprint 1990.
- [MP] M. Masuda, T. Petrie, Equivariant algebraic vector bundles  
over representations of reductive groups: I, Proc. Nat. Acad. Sci.
- [MHP] ———, L. Moser, " : II,
- [S] G. Schwarz, Exotic algebraic group actions,  
C. R. Acad. Sci. 309 (1989), 89-94.
- [Sp] T. Springer, DMV Seminar 13, Birkhäuser.
- 石田, トポロジストから見た代数的群作用の一面, 数学 42 (1990).
- H. Kraft,  $G$  vector bundles and the linearization problem,  
CMS Conf. Proc. 10 (1989), 111-123.

PL homeomorphisms of a circle  
and  
examples of exceptional homomorphisms

北大・理 (学振)      皆川 宏之

1. Euler 数

$\Sigma_s$  を種数  $s \geq 1$  の有向閉曲面とする.  $\Sigma_s$  の基本群はつぎの表示をもつ.

$$\pi_1(\Sigma_s) = \langle \alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_s, \beta_s \mid [\alpha_1, \beta_1] \cdots [\alpha_s, \beta_s] = 1 \rangle$$

$S^1 = R/Z$  に  $R$  の自然な向きから決まる向きを入れておく.  $S^1$  の向きを保つ同相写像全体を  $G^0$  で表す. これはコンパクト開位相で位相群となる. 位相群  $G^0$  の普遍被覆を  $p: \tilde{G}^0 \rightarrow G^0$  と表すことにする. 群  $\tilde{G}^0$  は  $\{\tilde{f}: R \rightarrow R \mid \tilde{f} \text{ は向きを保つ同相写像, かつ } \tilde{f}(x+1) = \tilde{f}(x)+1\}$  と自然に同一視される. このとき, 次の完全列が成り立つ.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & Z & \longrightarrow & \tilde{G}^0 & \xrightarrow{p} & G^0 \longrightarrow 1 \\ & & \Downarrow & & \Downarrow & & \\ & & n & \longmapsto & T_n: x \rightarrow x+n & & \end{array}$$

また  $R$  と平行移動全体のなす群  $\{T_r \mid r \in R\}$  を同一視する事により普遍被覆  $R \rightarrow S^1$  の被覆写像も  $p$  で表すことにして良い.

さて  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  を準同型とする.  $\pi \circ \tilde{\phi} = \phi$  なる準同型  $\tilde{\phi}: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow \tilde{G}^0$  を  $\phi$  の持ち上げと呼ぶ. 与えられた  $\phi$  に対してその持ち上げが存在するとは限らない. 実際, 各元  $\phi(\alpha_i), \phi(\beta_i)$  の  $p$  による持ち上げ  $\tilde{\phi}(\alpha_i), \tilde{\phi}(\beta_i)$  を勝手に選び  $\tilde{\phi}(\alpha_i) = \tilde{\phi}(\alpha_i), \tilde{\phi}(\beta_i) = \tilde{\phi}(\beta_i)$  とおくと  $\tilde{\phi}$  が準同型になるための条件は

$$[\tilde{\phi}(\alpha_1), \tilde{\phi}(\beta_1)] \circ \cdots \circ [\tilde{\phi}(\alpha_s), \tilde{\phi}(\beta_s)] = id_R$$

で与えられる. この式の左辺は  $\phi(\alpha_i), \phi(\beta_i)$  の持ち上げのとり方によらずに定まり,  $T_n (n \in Z)$  の形をしている. この  $n$  を  $eu(\phi)$  とかき  $\phi$  の Euler 数 という.

命題 1.1     $\phi$  が持ち上げを持つ必要十分条件は  $eu(\phi) = 0$  となることである.

## 2. Milnor-Wood の不等式

Milnor[9], Wood[13] により次が示されている.

定理 2.1 準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  に対し

$$|eu(\phi)| \leq |\chi(\Sigma_s)| = 2s - 2$$

が成り立つ.

この不等式は Milnor-Wood の不等式 と呼ばれる.

定義 2.2 整数の組  $(m, s)$  が  $s \geq 1$  かつ  $|m| \leq 2s - 2$  を満たすとき MW対 という.

定義 2.3  $G$  を  $G^0$  の部分群とする. このとき, MW 対  $(m, s)$  が  $G$  で 実現可能である とは  $eu(\phi) = m$  なる準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G$  が存在する時をいう.

Milnor-Wood の不等式の実現に関しては Wood[13]により次の結果が知られている.

定理 2.4 任意の MW 対は  $PSL(2, R)$  で実現可能である.

この定理により, Milnor-Wood の不等式は  $C^\omega$  カテゴリーで実現できることがわかったわけである.

## 3. 極小集合

一口に準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  といってもさまざまである. 例えば  $Im(\phi)$  が可換群になるもの, 非可換になるもの, 非可換自由群を含むもの, 含まないもの 等々 ... ここでは,

$\phi$  を通しての  $\pi_1(\Sigma_g)$  の  $S^1$  への作用の極小集合によりを分類しておく.  $\gamma \in \pi_1(\Sigma_g), z \in S^1$  に対して  $\gamma \cdot z = \phi(\gamma)(z)$  とおくと  $\pi_1(\Sigma_g)$  の  $S^1$  への作用が定まる. これを  $\phi$ -作用 という.

$$O_z = \{\phi(\gamma)(z) \in S^1 \mid \gamma \in \pi_1(\Sigma_g)\}$$

を  $z$  の  $\phi$ -軌道 という.  $S^1$  の部分集合  $A$  は,  $\phi$ -軌道の和集合として書けるとき  $\phi$ -不変 であるという.

**定義 3.1** 次の 3 つの条件を満たす  $M$  を  $\phi$  の極小集合という.

- (1)  $M$  は  $S^1$  の空でない閉集合.
- (2)  $M$  は  $\phi$ -不変である.
- (3)  $M$  は (1), (2) の性質に関して極小である.

群  $\pi_1(\Sigma_g)$  が有限生成であることと,  $S^1$  への作用であることを使うと,  $\phi$  の極小集合  $M$  は次のいずれかである事がわかる.

- (1) 有限軌道,
- (2)  $S^1$ ,
- (3)  $S^1$  の Cantor 集合.

$\phi$  が (1) 型の極小集合を持つとき,  $\phi$  の任意の極小集合は (1) 型であり, それらは同じ数の点からなる.  $\phi$  が (2) または (3) 型の極小集合を持つとき,  $\phi$  の極小集合はただ一つである. (1), (2), (3) 型の極小集合を持つ準同型を順に 有限型, 極小型, 例外型 の準同型ということにする.

#### 4. Ghys の不等式

MW 対は常に実現可能であった. では, それはどのような準同型で実現されているのだろうか. そのためにまず記号を準備する.  $C^r$  を  $S^1$  の向きを保つ  $C^r$  級微分同相全体のなす

群とする。ここで、 $r = 1, 2, \dots, \infty, \omega, 1 + \alpha (0 \leq \alpha \leq 1), 1 + bdd.var., PL$  等々とする。ただし、 $G^{PL}$  は単に  $PL$  を意味するものとする。次はやさしい。

定理 4.1  $\phi : \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  が有限型であれば  $eu(\phi) = 0$ 。逆に、与えられた自然数  $n$  に対して、全ての軌道が  $n$  個の点からなる準同型  $\phi_0 : \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow SO(2)$  が存在する。

この定理により、有限軌道を持つ準同型の存在は完全にわかったことになる。次に、 $Im\phi$  が可換の時には次の二つの定理がある。このとき  $eu(\phi) = 0$  であることは Euler 数の定義より明らかであろう。

定理 4.2([1], [12])  $Im\phi$  が可換である準同型  $\phi : \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^{1+bdd.var.}$  または  $G^{PL}$  に対し、次のいずれかが起こる。

- (1)  $\phi$  は有限型である。
- (2)  $\phi$  は極小型である。

定理 4.3([1], [7]) 各  $0 \leq \alpha \leq 1$  に対し、例外型準同型  $\phi : \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^{1+\alpha}$  で  $Im\phi \cong Z$  であるものが存在する。

この 2 つの定理により、 $Im\phi$  が可換の場合、従って  $s = 1$  の時には、例外型準同型の存在が微分可能性により異なる事がわかる。 $Im\phi$  の非可換性を許すと次の定理が知られている。

定理 4.4 定理 2.4 の準同型  $\phi$  に対し、 $eu(\phi) \neq 0$  ならば  $\phi$  は極小型準同型である。

この定理は  $PSL(2, R)$  の Fuchs 群の構造を調べる事により得られる。従って、極小型準同型の存在については完全にわかった訳である。一方、例外型準同型については次の定理がある。

定理 4.5([11], [5]) MW 対  $(0, s)$  は  $G^\omega, G^{PL}$  において例外型準同型で実現される。

$G^{1+bdd.var.}, G^{PL}$  においては可換なものでは実現できなかった例外型準同型が非可換なところでは  $G^\omega, G^{PL}$  で実現された事になる。しかし, Euler 数が非自明な例外型準同型は  $C^0$  のものを除けば長い間発見されずにいた。実際, 与えられた準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  に対して, その軌道  $O_\phi$  の各点  $y$  を閉区間  $I_y$  で置き換えて新たな  $S^1$  を作る。このとき, 同相写像  $I_y \rightarrow I_{\phi(\gamma)(y)}$  ( $y \in O_\phi, \gamma \in \pi_1(\Sigma_s)$ ) を適当にえらぶと (例えば, アフィン同相)  $\phi$  を軌道  $O_\phi$  で膨らませた準同型  $\mathcal{D}\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  が定まる。この  $\mathcal{D}\phi$  を  $\phi$  の Denjoy変形 という。また,  $Im(\mathcal{D}\phi) \subset G^r$  となると  $G^r$  級の Dejoy 変形ということにする。

定理 4.6 定理 2.4 の準同型  $\phi$  に対し  $\phi$  が極小型ならば  $\mathcal{D}\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^0$  は  $eu(\mathcal{D}\phi) = eu(\phi)$  なる例外型準同型である。

Denjoy 変形が, 一般には滑らかなカテゴリーで行えない事に加え, 例外型準同型が構成しにくいことを表すと思われる次の定理がある。

定理 4.7([3])  $s \geq 2$  とする。  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^r$  ( $r \geq 2$ ) に対して,  $|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma_s)|$  ならば  $\phi$  は極小型準同型である。さらに,  $r = \omega$  の時には  $eu(\phi) \neq 0$  ならば極小型準同型である。

$G^{PL}$  に対しても同様の事が成り立つ。

定理 4.8([10])  $s \geq 2$  とする。  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^{PL}$  に対して,  $|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma_s)|$  ならば  $\phi$  は極小型準同型である。

即ち, 定理 4.2 に対応する事実が  $s \geq 2$  の場合にも成り立つ事になる。定理 4.7 の前半と定理 4.8 は次のようにいう事もできる。例外型準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^2$  または  $G^{PL}$  に対して, 不等式  $|eu(\phi)| < |\chi(\Sigma_s)|$  が成り立つ。この不等式は, Ghysの不等式 と呼ばれる。非自明な Euler 数を持つ例外型準同型の例は [4] のなかではじめて得られた。

定理 4.9 例外型準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_s) \rightarrow G^\infty$  で  $eu(\phi) = 1$  のものが存在する。

Ghys-Sergiescu は, この定理の証明において, ある 2 進 PL 同相写像の群 ' $G$ ' には  $C^\infty$

Denjoy 変形ができる事を示している。即ち、'G' への準同型  $\phi$  が有限軌道を持たなければ (特に Euler 数が 0 でなければ), その  $\phi$  は Euler 数を変えずに  $G^\infty$  への例外型準同型にする事ができる。そこで,

問 1. 'G' で実現される MW 対を決定せよ。

MW 対  $(0, s)$  は明らかに 'G' で実現可能。'G' には上で注意したように,  $C^\infty$  Denjoy 変形ができるから定理 4.7 により MW 対  $(\pm\chi(\Sigma_s), s)$  ( $s \geq 2$ ) は 'G' で実現できない。また, MW 対  $(m, s)$  が群  $H \subset G^0$  で実現できれば, 容易にわかるように MW 対  $(-m, s)$  も  $H$  で実現できる事がわかる。従って, 問 1 は次の問と同値である。

問 2. MW 対  $(m, s)$  ( $0 < m < 2s - 2, s \geq 2$ ) は 'G' で実現可能か?

### 5. $S^1$ の PL 同相写像群 $G_{k,m}$

$k \geq 2, b$  を自然数とする。このとき,  $Q_{k,b}$  を  $\frac{p}{k^q \cdot b}$  ( $p, q \in Q_{k,b}$ ) なる形の有理数全体のなす Abel 群。  $GA(k, b)$  を  $x \mapsto k^n \cdot x + a$  ( $n \in Z, a \in Q_{k,b}$ ) なる形のアフィン同相群とする。そこで,

$$PL_{k,b}(R) = \left\{ f : R \rightarrow R \left| \begin{array}{l} \exists \{x_n\}_{n \in Z} \subset Q_{k,b}, \exists \{\gamma_n\}_{n \in Z} \subset GA(k, b) \\ s.t. \\ (1) x_n < x_{n+1}, \\ (2) |x_n| \rightarrow \infty (n \rightarrow \pm\infty), \\ (3) f|_{[x_n, x_{n+1}]} = \gamma|_{[x_n, x_{n+1}]} \end{array} \right. \right\}$$

$$\widetilde{G}_{k,b} = \{f \in PL_{k,b}(R) \mid f \circ T_1 = T_1 \circ f\}$$

$$G_{k,b} = p(\widetilde{G}_{k,b})$$

と定める。Ghys と Sergiescu の記号に従うと 'G' =  $G_{2,1}$  である。積写像  $x \mapsto ax$  ( $a, x \in R$ ) を  $M_a$  で表す。



- 命題 5.1 (1)  $b_1|b_2$  ならば  $\tilde{G}_{k,b_1} \subset \tilde{G}_{k,b_2}$  が成り立つ.  
 (2) 任意の自然数  $m$  に対して  $M_m^{-1} \circ \tilde{G}_{k,b} \circ M_m \subset \tilde{G}_{k,mb}$  が成り立つ.

## 6. 結果

Ghys と Sergiescu による ‘ $G$ ’ のスムージングをまねる事により次の結果が得られる.

- 定理 6.1([4]を参照のこと) (1) 単射準同型  $\Phi_k : PL_{k,1}(R) \rightarrow PL_{2,1}(R)$  で  $\Phi_k(T_1) = T_1$  を満たすものが存在する.  
 (2) 単射準同型  $\Psi_n : PL_{2,n}(R) \rightarrow PL_{2,1}(R)$  で  $\Psi_n(T_1) = T_1$  を満たすものが存在する.

系 6.2 任意の自然数  $n$  に対し単射準同型  $\Phi_{k,n} : PL_{k,n}(R) \rightarrow PL_{2,n}(R)$  で  $\Phi_{k,n}(T_{1/n}) = T_{1/n}$  を満たすものが存在する.

証明  $\Phi_{k,n}(f) = M_n^{-1} \circ \Phi_k(M_n \circ f \circ M_n^{-1}) \circ M_n$  とおけば良い.  $\square$

系 6.3  $\Phi_{k,n}(\tilde{G}_{k,n}) \subset \tilde{G}_{2,n}$

平行移動の交換子による表現に関する補題を二つあげておく.

$$t_k = \frac{k^2 - 2k + 1}{k^2 - k + 1},$$

$$n_k = (k^2 + k + 1)(k^3 + 1)$$

とおく.

補題 6.4([10])  $T_{t_k}$  は  $\tilde{G}_{k,n_k}$  の交換子である.

補題 6.5 任意の自然数  $n$  に対して,  $T_{n_k/(k^2-k+1)}$  ( $k = 10n + 1$ ) が  $\tilde{G}_{2,m}$  の交換子となる自然数  $m$  が存在する.

また、次の補題は交換子による表現において基本的なものである。

**補題 6.6**  $H$  を群とし  $f, g$  をその元とする。このとき、任意の自然数  $n$  に対して  $[f, g]^{2n-1}$  は  $H$  の  $n$  個の交換子の積で表される。

以上の結果を合わせると次の定理を得る。これが、この論文における最も主要な結果である。

**定理 6.7** 任意の MW 対  $(m, s)$  ( $s \geq 2, |m| < 2s - 2$ ) は  $G_{2,1}$  で実現される。

**証明.** さきに述べたように  $m > 0$  の時に示せば良い。任意の自然数  $k$  に対して、

$$T_{i_k}^m \circ T_{mk/(k^2-k+1)} = T_m$$

が成り立つ事が容易に確かめられる。補題 6.4 と系 6.2 より、 $T_{i_k}$  は  $\tilde{G}_{2, n_k}$  の交換子である事がわかる。

- (1)  $m$  が奇数のとき、補題 6.6 により、 $T_{i_k}^m$  は  $\tilde{G}_{2, n_k}$  の  $\frac{m+1}{2}$  個の交換子の積で表される。
- (2)  $m$  が偶数のとき、補題 6.6 により、 $T_{i_k}^m$  は  $\tilde{G}_{2, n_k}$  の  $\frac{m}{2} + 1$  個の交換子の積で表される。

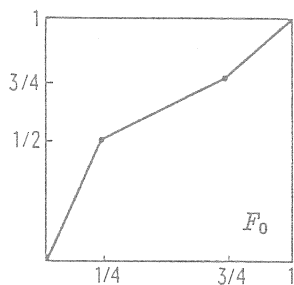
また、 $k = 10m + 1$  とおくと、補題 6.5 より  $T_{mk/(k^2-k+1)}$  は  $\tilde{G}_{2, n'}$  ( $\exists n' \in \mathbb{N}$ ) の交換子である。以上より、MW 対  $(m, s)$  ( $m$ : 奇数,  $s \geq \frac{m+1}{2} + 1$ ) は  $G_{2, n_k \cdot n'}$  で、また、MW 対  $(m, s)$  ( $m$ : 偶数,  $s \geq \frac{m}{2} + 2$ ) は  $G_{2, n_k \cdot n'}$  で実現可能である。従って、補題 6.1(2) により、任意の MW 対  $(m, s)$  ( $s \geq 2, 2s - 2 > m > 0$ ) は  $G_{2,1}$  で実現される。□

系 6.7 の準同型に Ghys と Sergiescu による  $C^\infty$  Denjoy 変形を施す事により次の結果が得られる。

**系 6.8** 任意の MW 対は  $(m, s)$  ( $s \geq 2, |m| < 2s - 2$ ) は  $G^\infty$  で例外型準同型により実現可能である。

## 7. Ghys-Sergiescu の例

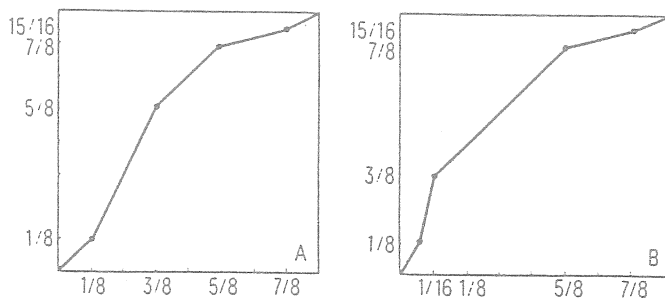
ここでは, Ghys と Sergiescu による準同型  $\phi: \pi_1(\Sigma_{12}) \rightarrow G_{2,1}$  の構成を紹介する. 今後, 特に断らない限り閉区間の同相写像は, そのグラフを巡回的につないで拡張した  $R$  の同相写像と思う事にする. [4] においては,  $\tilde{G}_{2,1}$  の元  $F_0$



が  $\tilde{G}_{2,1}$  の交換子であることを示し, この  $F_0$  を少しずつずらした (平行移動したもの) ものの合成により  $T_1$  を構成する. 実際,

$$((T_{1/2} \circ F_0 \circ T_{1/2}^{-1}) \circ (T_{1/4} \circ F_0 \circ T_{1/4}^{-1}) \circ F_0)^4 = T_1$$

であることが容易に確かめられる. また,



とおけば  $A \circ B \circ A^{-1} \circ B^{-1} = T_{1/8} \circ F_0 \circ T_{1/8}^{-1}$  となる. 従って,  $T_1$  は  $\tilde{G}_{2,1}$  の交換子 12 個

の積で表される。これが Ghys と Sergiescu による例である。

### 8. 非力学系的 Denjoy 変形

Denjoy 変形は、軌道の各点に区間を挿入する変形であった。従って、ある程度力学系を保存しているのであるが、次に定義する非力学系的 Denjoy 変形は単に写像の変形である。

定義 8.1  $a < b$  とする。写像  $f : [a, b] \rightarrow R$  に対し、 $\bar{I}_{d,n}(f) : [a, b + n|f(d) - d|] \rightarrow R$  ( $d \in (a, b)$ ,  $n \in Z$ ) を次のように定める。

$$\bar{I}_{d,n}(f) = \begin{cases} f(x) & (x \in [a, d]) \\ x + f(d) & (x \in [d, d + n|f(d) - d|]) \\ f(x - n|f(d) - d|) + n|f(d) - d| & (x \in [d + n|f(d) - d|, b + n|f(d) - d|]) \end{cases}$$

定義 8.2  $f \in \tilde{G}^0$  に対して、 $\tilde{I}_{y,n}(f)$  ( $y \in [0, 1]$ ,  $n \in Z$ ) を

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{y,n}(f)|_{[0, 1 + n|f(y) - y|]} &= \tilde{I}_{y,n}(f)|_{[0, 1]} \\ \tilde{I}_{y,n}(f) \circ T_{1 + n|f(y) - y|} &= T_{1 + n|f(y) - y|} \circ \tilde{I}_{y,n}(f) \end{aligned}$$

により定める。このとき、

$$I_{y,n}(f) = M_{1 + n|f(y) - y|}^{-1} \circ \tilde{I}_{y,n}(f) \circ M_{1 + n|f(y) - y|} \in \tilde{G}^0$$

を  $f$  の  $y$  における長さ  $n$  の 非力学系的 Denjoy 変形 という。

次の補題が補題 6.5 の証明において重要である。

補題 8.3 (1)  $f \in \tilde{G}_{k,m}$ ,  $x \in Q \cap [0, 1]$ ,  $n \in Z$  に対して、自然数  $m'$  が存在して  $I_{x,n}(f) \in \tilde{G}_{k,m'}$  が成り立つ。

(2)  $f, g \in \tilde{G}_{k,m}$  ( $Fix(f) \neq \emptyset$ ,  $Fix(g) \neq \emptyset$ ) が  $\tilde{G}_{k,m}$  で互いに共役ならば、 $n_1|f(x) - x| =$

$n_2|g(y) - y|$  を満たす任意の  $x, y \in Q \cap [0, 1]$ ,  $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$  に対して, ある自然数  $m'$  が存在して  $I_{x, n_1}(f), I_{y, n_2}(g) \in \tilde{G}_{k, m'}$  は  $\tilde{G}_{k, m'}$  で互いに共役となる.

### 9. 補題 6.5 の証明

$\tilde{G}^0$  の元を定義するときには, 長さが 1 の閉区間上で行えば十分である. このことに注意して,  $f, g, h \in \tilde{G}_{2, 9}$  を次のように定義する.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & (-\frac{2}{9} \leq x \leq \frac{4}{9}), \\ 2x - \frac{6}{9} & (\frac{4}{9} \leq x \leq \frac{7}{9}), \end{cases}$$

$$g(x) = T_{1/9} \circ f,$$

$$h(x) = T_{1/3} \circ f \circ T_{-2/9}.$$

このとき,

$$g = h \circ f \circ h^{-1} \quad \text{従って} \quad T_{1/9} = [h, f]$$

である事が容易に確かめられる. さて, 自然数  $l \geq 9$  に対して  $y = \frac{-2}{9l}$  とおくと,

$$f(y) - y = \frac{1}{9l}$$

$$g(y) - y = \frac{l+1}{9l}$$

となっている. 従って, 補題 8.3 により  $I_{1-(2/9l), l+1}(f)$  と  $I_{1-(2/9l), 1}(g)$  は, ある自然数  $m$  に対して  $\tilde{G}_{2, m}$  の中で共役である. また, 作り方より  $I_{1-(2/9l), 1}(g) = T_{9l/(10l+1)} \circ I_{1-(2/9l), l+1}(f)$  が成り立つ事がわかる. すなわち,  $T_{9l/(10l+1)}$  ( $9 \leq l \in \mathbb{N}$ ) は  $\tilde{G}_{2, m}$  の交換子である. ここで,  $l = nk$ ,  $k = 10n + 1$  とおくと,  $10n = k - 1$  であることより

$$\frac{l}{10l+1} = \frac{nk}{k^2 - k + 1}$$

が得られる. これで補題 6.5 は示された.  $\square$

参考文献

1. A.Denjoy, *Sur les courbes définies par les équations différentielles à la surface du tore*, J. Math. Pures Appl. 11 (1932), 333-375.
2. D.Eisenbud, U.Hirsch and W.Neumann, *Transverse foliations of Seifert bundles and self homeomorphisms of the circle*, Comment. Math. Helv. 56 (1981), 638-660.
3. E.Ghys, *Classe d'euler et minimal exceptionnel*, Topology 26 (1987), 93-105.
4. E.Ghys and V.Sergiescu, *Sur un groupe remarquable de difféomorphismes du cercle*, I.H.E.S., preprint (1985).
5. G.Hector, *Sur un théorème de structure des feuilletages de codimension un*, Thesis, Strasbourg, 1972.
6. R.Heim and R.Stöcker, *Covering of surfaces*, Arch. Math. 30 (1978), 181-187.
7. M.R.Herman, *Sur la conjugaison différentiable des difféomorphismes du cercle*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 49 (1979), 5-234.
8. W.S.Massey, *Finite covering spaces of 2-manifolds with boundary*, Duke Math. 41 (1974), 875-887.
9. J.Milnor, *On the existence of a connection with curvature zero*, Comment. Math. Helv. 32 (1957-58), 215-223.
10. H.Minakawa, *Examples of exceptional homomorphisms which have non trivial Euler number*, preprint.
11. R.Sacksteder, *On the existence of exceptional leaves in foliations of co-dimension one*, Ann. Inst. Fourier 14 (1964), 221-226.
12. C.L.Siegel, *Note on differential equations on the torus*, Ann. of Math. 46 (1945), 423-428.
13. J.W.Wood, *Bundles with totally disconnected structure group*, Comment. Math. Helv. 46 (1971), 257-273.

松本幸夫（東大・理）

リーマン面の退化とは次のような現象を指す。 $\{F_\xi\}_\xi$  を複素数  $\xi$  によってパラメトライズされた閉リーマン面の族とする。 $\xi$  がある  $\xi_0$  に近づくにつれ、 $F_\xi$  はしだいに形を変え、ついに、特異性のある曲面  $F_{\xi_0}$  になってしまう。

このような退化の現象は昔から研究されてきたが、ここでの目標は、退化という現象をトポロジーの観点から調べ、その機構を明らかにすることである。以下の話は、**J. M. Montesinos** との共同の仕事 [MM] である。

### §1 主な結果

$D = \{\xi \in \mathbf{C} \mid |\xi| < 1\}$  とし、 $M$  を（非コンパクト）複素曲面、 $\varphi : M \rightarrow D$  を‘上へ’の正則固有写像とする。任意の  $\xi \in D$  についてファイバーを  $F_\xi = \varphi^{-1}(\xi)$  は連結であると仮定する。また  $\xi \neq 0$  であれば、 $F_\xi$  は滑らかな閉リーマン面であるとしよう。したがって、中心ファイバー  $F_0$  のみが特異ファイバーである可能性がある。以上の諸条件を満たす三対  $(M, D, \varphi)$  のことをリーマン面の退化族という。一般ファイバー  $F_\xi (\xi \neq 0)$  の種数を  $(M, D, \varphi)$  の種数、または、 $F_0$  の種数と言うことにする。

以下、 $F_0$  は極小であると仮定する。すなわち、自己交叉数が  $-1$  であるような球面（リーマン球面）を含まないものとする。

**定義**  $F_0, F'_0$  を  $(M, D, \varphi), (M', D, \varphi')$  の中心ファイバーとするとき、それらが位相的に同値である（又は同じ位相形をもつ： $F_0 \stackrel{\text{TOP}}{\sim} F'_0$ ）とは、向きを保つ同相写像  $H : M \rightarrow M'$  と  $h : D \rightarrow D$  が存在して

- (i)  $h(0) = 0,$
- (ii)  $\varphi' H = h \varphi$

の2条件がなりたつことである。

種数  $g$  の極小ファイバー全体を  $\stackrel{\text{TOP}}{\sim}$  で分類した集合を  $S_g$  とおく：

$$S_g = \{ \text{極小ファイバー} \} / \stackrel{\text{TOP}}{\sim}$$

特異ファイバーの分類は  $g = 1$  の場合小平 [K] により、また  $g = 2$  の場合は浪川-上野 [NU] により、完全になされている。小平の場合は 8 ないし 9 個、浪川-上野の場合は約 120 個の型に分類している（それらの型のひとつひとつには一般に無限個の位相型が含まれる。）また  $g \geq 3$  の場合にも、Artin-Winters [AW], Winters [W] の結果がある。

さて、 $F_0$  を  $(M, D, \varphi)$  の中心ファイバーとすると、 $F_0$  のまわりのモノドロミー同相写像

$$f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$$

が通常のように定まる。ここに  $\Sigma_g$  は種数  $g$  の（向きづけられた）閉曲面であり、 $f$  は向きを保つ。

$M_g$  を  $\Sigma_g$  の写像類群とし、 $\widehat{M}_g$  をその共役類の集合とする。モノドロミー同相写像  $f$  はイソトピーと共役を除いて定まるから、

$$\text{モノドロミー}: S_g \rightarrow \widehat{M}_g$$

という写像が得られる。この写像を調べるのが主題である。

まず、モノドロミー同相写像  $f$  としてどんな同相写像が現われるかが問題であるが、その答えを述べる前に定義をひとつ与える。以下  $g \geq 2$  であるとする。

**定義 (Nielsen [N])**  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  が代数的に有限型であるとは、 $f$  が次の (i)(ii) を満たす同相写像  $f': \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  にイソトープなことである。

(i) 単純閉曲線の互いに交わらない集合  $C = C_1 \cup C_2 \cup \cdots \cup C_r$  が  $\Sigma_g$  上であって、 $f'(C) = C$ 。

(ii)  $f'|(\Sigma_g - C): \Sigma_g - C \rightarrow \Sigma_g - C$  は周期的写像にイソトープ。

簡単のため、代数的に有限型であるような同相写像  $f$  のことを擬周期的な写像とよぶことにする。上のような単純閉曲線の系  $C$  が概効果的であるとは、 $\Sigma_g - C$  の各連結成分  $b$  のオイラー数が負であること ( $\chi(b) < 0$ ) と定義する。与えられた擬周期的な写像  $f$  に対し、概効果的な  $C$  は必ず存在する。そのとき各  $C_i \in C$  について、 $C_i$  のまわりの  $f$  のねじれを表すスクリュース数  $s(C_i)$  という有理数が定まる (Nielsen [N])。任意の  $C_i \in C$  について  $s(C_i) \neq 0$  のとき、 $C$  は効果的であるという。概効果的な系  $C$  から  $s(C_i) = 0$  であるような  $C_i$  をとり除いて効果的な系  $C$  を得る。このような  $C$  は  $f$  に関して（イソトピーを除いて）一意に定まる。

**定義**  $f$  がマイナス型の擬周期的写像であるとは、 $f$  に付随する効果的な系  $C$  においてすべてのスクリュース数が負になることである。



今吉 [I] と Earle-Sipe [ES] の結果から次の事実が知られている（後者の論文を教えて下さった志賀啓成氏に感謝します。）

**定理 ([I],[ES])** モノドロミー同相写像  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  はマイナス型の擬周期写像である。

そこで、マイナス型の擬周期写像で代表される  $\widehat{\mathcal{M}}_g$  の部分集合を  $\mathcal{P}_g^-$  と書けば

$$\text{モノドロミー } \rho: \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{P}_g^-$$

という写像が得られる。

次が我々の主な結果である。

**定理 1**  $\rho: \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{P}_g^-$  は全単射である ( $g \geq 2$ )

Nielsen により  $\mathcal{M}_g \cong \text{Aut}(\pi_1 \Sigma_g) / \text{Inn}(\pi_1 \Sigma_g)$  が知られているから、次の系が得られる。

**系 1.1** 特異ファイバー  $F_0$  の位相形はそのまわりのモノドロミーの  $\pi_1(\Sigma_g)$  への作用で決まる。（注意： $H_1(\Sigma_g; \mathbf{Z})$  への作用では決まらない。[NU]）

**系 1.2** モノドロミーの  $\pi_1(\Sigma_g)$  への作用が内部自己同型なら、 $F_0$  は非特異である。

$F_0$  が「安定曲線」の場合、系 1.1, 1.2 は織田孝幸氏 [O] により独立に示されている。

**系 1.3** 任意のマイナス型擬周期写像  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  につき、 $f$  をモノドロミーとする種数  $g$  のファイバー  $F_0$  が存在する。

系 1.3 は Earle-Sipe [ES] の中の問題（モノドロミーの実現問題）の解決になっている。

## §2 一般商空間

定理 1 の証明は、 $\rho: \mathcal{S}_g \rightarrow \mathcal{P}_g^-$  の逆写像を構成することによりなされる。

**定義 (Bers[B])** ノード（結節点）に付きリーマン面  $S$  とは、連結な複素空間で、各点  $p \in S$  につき  $\{|z| < 1\} \subset \mathbf{C}$  又は  $\{|z| < 1, |w| < 1, zw = 0\} \subset \mathbf{C}^2$  のどちらかに同形ないくらかでも小さい近傍が存在することを言う。後者の形の近傍が存在するとき、 $p$  をノードという。

ノードを除いた部分の連結成分の  $S$  中での閉包を既約成分という。以下、各既約成分に重複度 ( $\geq 1$ ) をつけたものを考える。また、 $S$  の複素構造はある時点まで無視する。

マイナス型の擬周期的写像  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  が与えられると、 $f$  の一般商空間  $S_f$  が次のようにきまる。

$\Sigma_g = A \cup B$  と分解する。ここに  $A$  は効果的な閉曲線系  $C = C_1 \cup \dots \cup C_r$  のアニュラス形近傍の和集合であって  $f(A) = A$  なるものとする。 $f|_B: B \rightarrow B$  は周期的と仮定してよい。

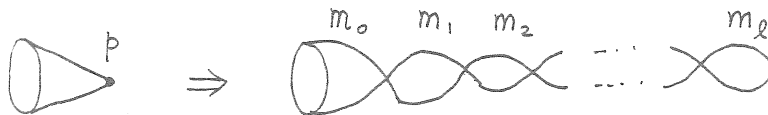
### 泡立て操作 (bubbling up)

$B/(f|_B)$  は  $V$ -多様体 (orbifold) の構造をもつ  $p$  をその錐点 (cone point) としよう。 $p$  の valency を  $(m, \lambda, \sigma)$  とする。すなわち  $x \in B$  を  $p$  の上にある点で、 $m$  は  $f^m(x) = x$  となる初めての  $m > 0$ 、また  $x$  を中心として  $f^m$  は  $\frac{2\pi\delta}{\lambda}$  回転になっているとし、 $(0 < \delta < \lambda$  で  $\gcd(\lambda, \sigma) = 1$ )、 $\sigma$  は  $\delta\sigma \equiv 1 \pmod{\lambda}$  であるような自然数 ( $0 < \sigma < \lambda$ ) であるとする。

このとき自然数の列  $n_0 > n_1 > \dots > n_l = 1$  を次のように決める (ユークリッド互除法)

$$n_0 = \lambda, n_1 = \lambda - \sigma, n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i}$$

そして  $m_i = mn_i (i = 0, 1, \dots, l)$  とおく。錐点  $p$  の bubble up とは、 $p$  の尖がった近傍を次のような (境界をもつ) ノード付きリーマン面で置き換える操作を言う。



この操作は複素平面曲線の blowing up の類似である。

ひねり操作

$A_j$  を  $C_j$  のアニュラス型近傍とする。 $A_j$  の両側の円周  $S_1, S_2$  についても、然るべく  $\text{valency}(m^{(1)}, \sigma^{(1)}, \lambda^{(1)}), (m^{(2)}, \sigma^{(2)}, \lambda^{(2)})$  が決まる。但し、 $S_1, S_2$  の向きは  $B$  の側から入れる。

定義 (Nielsen[N])  $A_j$  が amphidrome (両方向型) であるとは  $f^r(A_j) = A_j$  なる  $r > 0$  であって、 $A_j$  の両側の円周を入れ換えるものが存在することを言う。

$A_j$  が amphidrome でない場合を考える。両側の円周の  $\text{valency}$  を  $(m^{(1)}, \sigma^{(1)}, \lambda^{(1)}), (m^{(2)}, \sigma^{(2)}, \lambda^{(2)})$  とする。容易に  $m^{(1)} = m^{(2)}$  がわかる。この共通の値を  $m$  とする。

補題 次の i) ~ v) を満たす自然数の列  $n_0, n_1, \dots, n_l$  ( $l \geq 1$ ) が一意的に存在する。

- i)  $n_0 = \lambda^{(1)}, n_l = \lambda^{(2)}$
- ii)  $n_1 \equiv \sigma^{(1)} \pmod{\lambda^{(1)}}, n_{l-1} \equiv \sigma^{(2)} \pmod{\lambda^{(2)}}$ ,
- iii)  $n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i}, i = 1, 2, \dots, l-1,$
- iv)  $(n_{i-1} + n_{i+1})/n_i \geq 2, i = 1, 2, \dots, l-1,$
- v)  $\sum_{i=0}^{l-1} \frac{1}{n_i n_{i+1}} = |s(c_j)|$

自然数の列  $(m_0, m_1, \dots, m_l)$  を  $m_i = mn_i$  と定義する。このとき、 $A_j$  の  $f^m : A_j \rightarrow A_j$  による一般商空間は

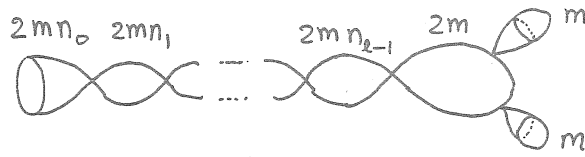


というノード付きリーマン面である。

次に  $A_j$  が amphidrome である場合を考える。この場合  $A_j$  の両側の円周の  $\text{valency}$  は共通で  $(2m, \lambda, \sigma)$  という型をしている。 $n_0 > n_1 > \dots > n_l = 1$  を自然数の列で

$$n_0 = \lambda, n_1 = \sigma, n_{i-1} + n_{i+1} \equiv 0 \pmod{n_i}$$

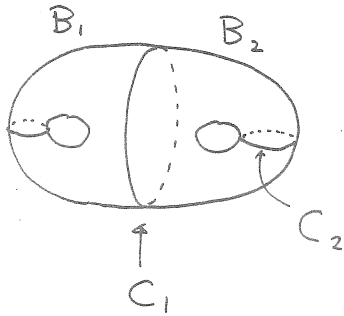
をみたすものとする。このとき  $A_j$  の  $f^m : A_j \rightarrow A_j$  による一般商空間を



と定義する。

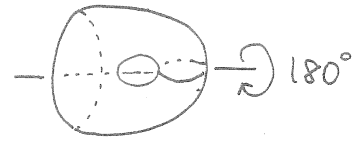
以上の操作を合わせて  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  の一般商空間  $S_f$  ができる。すなわち  $\Sigma_g = A \cup B$  の分解において、 $B/(f|B)$  の各錐点を bubble up しておき、boundary の間は  $f^m: A_j \rightarrow A_j$  に対応する「ソーセージ」でむすびつけるのである。

例



$$f|_{B_1} \simeq \text{id}$$

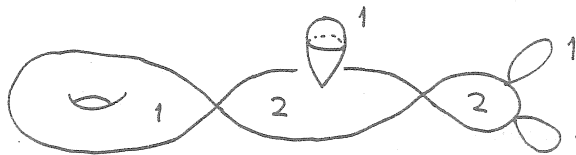
$$f|(B_2 - C_2) \simeq 180^\circ \text{回転}$$



$$C_2 \text{ は amphidrome で } s(C_2) = -2$$

$$s(C_1) = -\frac{1}{2}$$

このとき一般商空間  $S_f$  は



一般商空間  $S_f$  は  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  の情報を殆ど含んでいるが、たまに異なる  $f$  に同形の  $S_f$  が対応することがある。(これに対応する現象が種数 2 の特異ファイバーの場合に浪川-上野 [NU] により指摘されている。)

これを補正するため、 $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  の分割グラフ  $X_f$  を導入する。

まず プレ分割グラフ  $X'_f$  とは  $\Sigma_g - C$  の各連結成分と vertex が 1 対 1 に対応し、 $C_i \in C$  と edge が 1 対 1 に対応するようなグラフである。分割グラフ  $X_f$  は amphidrome な  $C_i$  に対応する edge を中点で 2 等分することによって得られる。 $f$  により、 $X_f$  に自然に周期的写像  $\Psi_f: X_f \rightarrow X_f$  が導びかれる。商グラフ  $Y_f = X_f / \Psi_f$  は各頂点に weight がきまっている。(すなわち  $Y$  の頂点上にある  $X_f$  の頂点の数) weighted graph のコホモロジー群

$$H^1(Y_f)$$

が然るべく定義され、 $(X_f, \Psi_f)$  は  $H^1(Y_f)$  の中の、あるコホモロジー類  $C_f \in H^1(Y_f)$  をきめる。

**定理 2** マイナス型の擬周期的写像  $f: \Sigma_g \rightarrow \Sigma_g$  のイソトピー・共役類と  $(S_f, Y_f, C_f)$  の同型類は bijective に対応する。 $(S_f, Y_f, C_f)$  を「設計図」として特異ファイバー  $F_0$  が構成される。こうして  $\rho: S_g \rightarrow \mathcal{P}_g^-$  の逆写像  $\mathcal{P}_g^- \rightarrow S_g$  が定義された。

参考文献


- [AW] M. Artin and G. B. Winters, Degenerate fibers and stable reduction of curves, *Topology* 10 (1971), 373-383.
- [B] L. Bers, Spaces of degenerating Riemann surfaces, *Ann. of Math. Studies* 79 (1974), 43-55.
- [ES] C. J. Earle and P. L. Sipe, Families of Riemann surfaces over the punctured disk, preprint.
- [I] Y. Iwayoshi, Holomorphic families of Riemann surfaces and Teichmüller spaces, *Ann. of Math. Studies* 97 (1981), 277-300.
- [K] K. Kodaira, On compact analytic surfaces, II, *Ann. of Math.* 77(1963), 563-626.
- [MM] Y. Matsumoto and J. M. Montesinos-Amilibia, Denegeration of Riemann surfaces and pseudo-periodic maps (in preparation).
- [NU] Y. Namikawa and K. Ueno, The complete classification of fibers in pencils of curves of genus two, *manuscripta math* 9 (1973), 143-186.
- [N] J. Nielsen, Surface transformation classes of algebraically finite type, *Mat.-fys. Medd. Danske Vid. Selsk.* 21 (1944)(Collected Mathematical Papers vol.2).
- [O] T. Oda, A note on ramification of the Galois representation of the fundamental group of an algebraic curve II, preprint.
- [W] G. B. Winters, On the existence of certain families of curves, *Amer. J. Math.* 96 (1972), 215-228.

(1991年5月26日記)

# 結び目の半順序 とその応用

谷山 公規 (早大理工)

## §.0 はじめに

昭和62年の秋に早大の大山氏が結び目の“ $n$ -trivial diagram”の研究 [1], [2] を始められた場に居合わせた筆者は、結び目の diagram の交差入れ換えに興味を覚えました。大山氏の研究では自明な結び目  $\bigcirc$  の diagram が登場しますが実際に試してみますとかなり多くの場合に三葉結び目  の diagram が出て来ます。そこで筆者は次の様な Question を思い付きました。

Q. 非自明な結び目のどんな diagram でもその交差の上下を適当に入れ換えれば三葉結び目の diagram になるか？

最初は面白い Quiz が出来たなあ  
くらいに考えてしばらく放, といたのですが  
ある時

Def. 結び目  $K_1, K_2$  について  $K_1$  のどんな  
diagram でも その交差の上下を適当に  
入れ換えて  $K_2$  の diagram にあることが  
出来るとき  $K_1 \cong K_2$  であると定義する。

ならば面白い半順序になるのではないかと考えたのが今回のお話の初まりです。この順序自体についてはあちこちで何回もお話しさせて頂きましたが、最近 Józef Przytycki 氏より 結び目の signature について若干の応用が存在することを教えて頂いたので合わせて報告致します。以下 (特に §1 は) ほとんど予備知識のいらない簡単なお話しです。

## §1. 結び目・絡み目の半順序

この § の内容について くわしくは [3], [4] を手軽には [5] をご参照下さい。




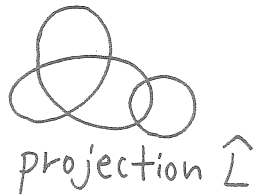
3次元 Euclid 空間  $\mathbb{R}^3$  内の smooth な compact 1-dim. submanifold  $L$  を絡み目 (link) と呼びます。  $L$  は  $\mu (\geq 1)$  個の単純閉曲線の集まりです。  $\mu = 1$  のとき特に結び目 (knot) といいます。

2つの絡み目  $L_1, L_2$  に対し

$$L_1 \cong L_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} \exists \text{ homeo. } h: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ s.t. } h(L_1) = L_2$$

$\cong$  による同値類を正式には絡み目型 (link type) といいますが普通はこれも絡み目と呼びます。

射影  $p: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$  ;  $p(x, y, z) = (x, y)$  による  $L$  の像  $p(L)$  の多重点が横断的な2重点  だけのとき  $\hat{L} = p(L)$  を  $L$  の正則射影 (regular projection) と呼びます。  $\hat{L}$  の各交差 (2重点) にもとの  $L$  の上下の情報 ( $z$ 座標の大小) を付加したものを  $\tilde{L}$  で表し 正則射影図 (regular diagram) と呼ぶことにします。



$PROJ(L)$  で 絡み目型  $L$  の regular projection 全体の集合,  $\mathcal{L}^\mu$  で  $\mu$ -成分絡み目型全体の集合を表すことにします。

☆ 順序関係の定義

$L_1, L_2 \in \mathcal{L}^\mu$  に対し

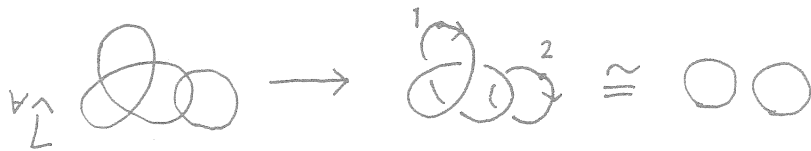
$L_1 \geq L_2 \stackrel{\text{def.}}{\iff} PROJ(L_1) \subseteq PROJ(L_2)$

これが §.0 の定義と一致することはすぐわかります。定義より  $L_1 \geq L_1$  (反射律)  
 $L_1 \geq L_2, L_2 \geq L_3 \Rightarrow L_1 \geq L_3$  (推移律)  
 が成立し  $(\mathcal{L}^\mu, \geq)$  は前順序集合 (pre-ordered set) となります。反対称律は一般には成立しません。これについては後で触れます。最初に次が成立します。

定理 1.  $\forall$  絡み目  $\geq$  自明な絡み目



これを示すには、全ての絡み目射影は自明な絡み目の射影として実現できることを示せばよい訳です。これは古くから知られている事実でして、図の様に最初に辿るとき上を通るように上下をつければよいのです。

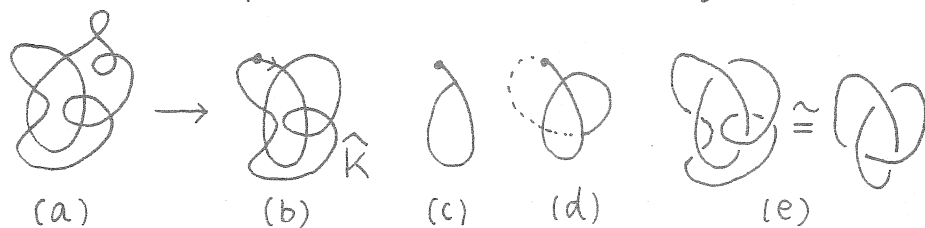


次に結び目について考えます。§0のQuestionに対する肯定的解答として

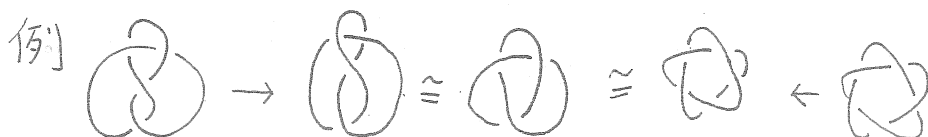
定理2.  $\forall$  非自明な結び目  $\cong$  三葉結び目

これは前出の大山氏によって次の様に証明されました。 $K$ を自明でない結び目、 $\hat{K}$ をその任意の射影とします。 $\hat{K}$ には図(a)の様な“自明な”交差はないと考えて構いません(b)  
 $\hat{K}$ 上に1点を選んで $\hat{K}$ を辿っていくと(c)の様  
 様に円板を囲みます。さうに辿っていけば、(自明な交点はないはずですから)(d)のよ  
 うに円板の中へ帰って来ます。この状況に注目

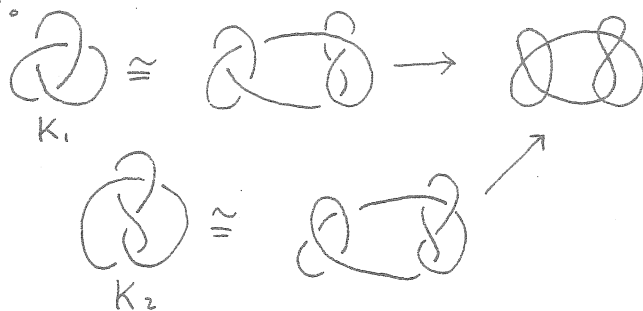
すれば三葉結び目が作れます。(e)



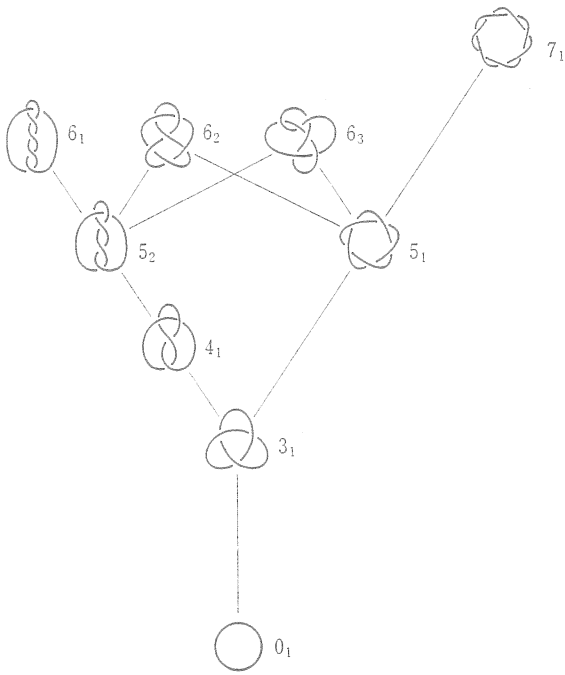
結局  $\hat{K}$  は三葉結び目の射影になり、定理2が示されました。



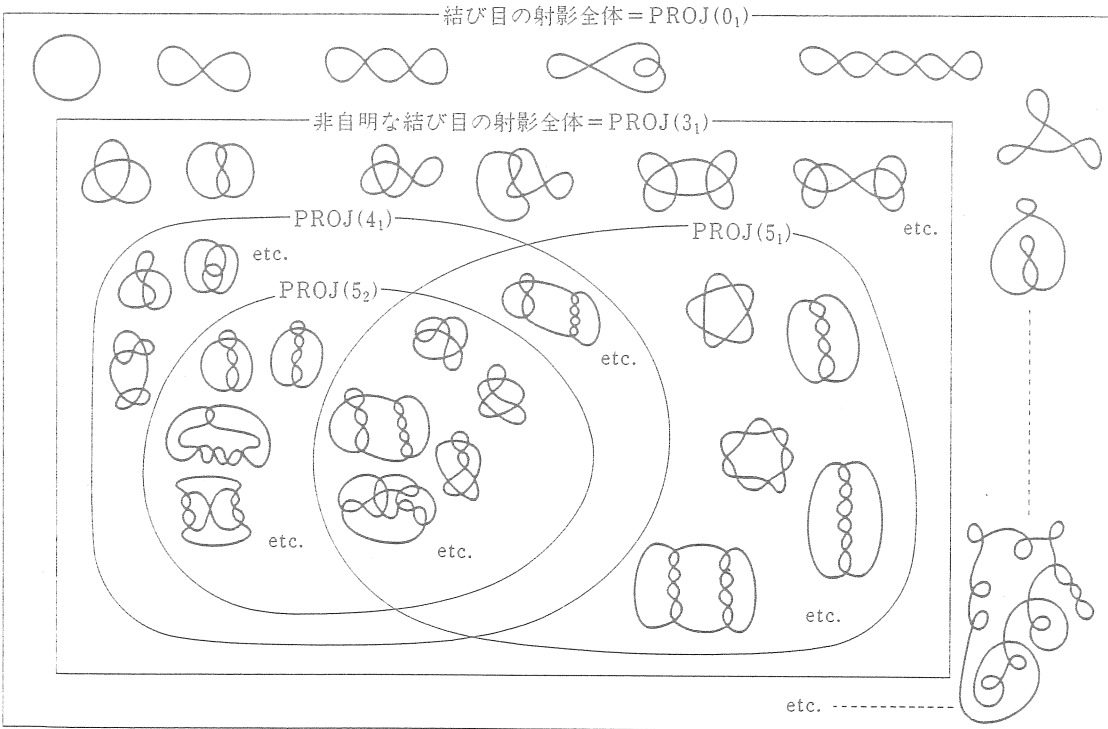
順序の定義で射影全体を考えることは本質的です。例えは  $\forall K_1, K_2$  について  $\text{PROJ}(K_1) \cap \text{PROJ}(K_2) \neq \emptyset$  です。



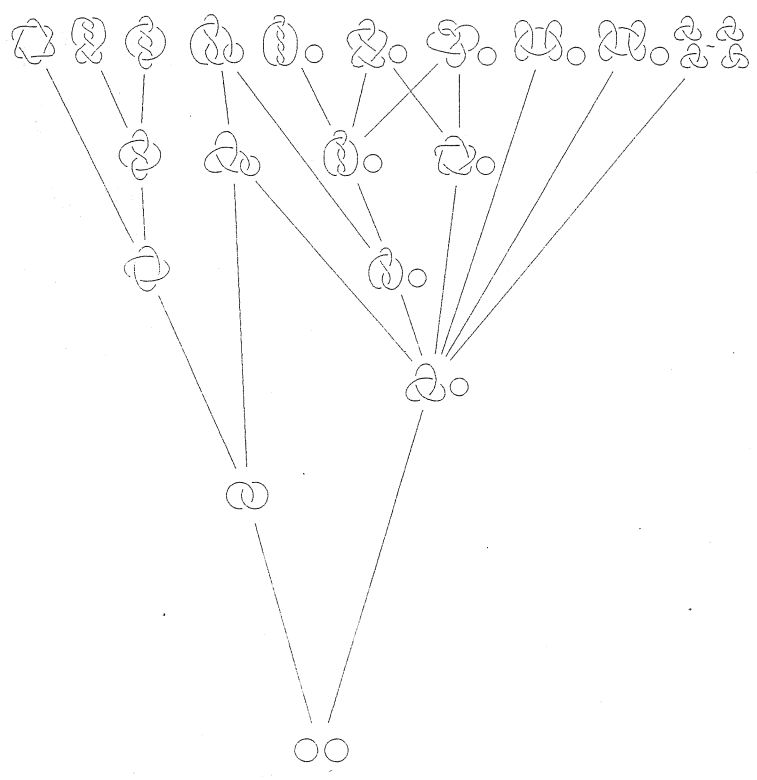
現在5交点までの結び目  $K_0$  に対しては、 $K \geq K_0$  となる  $K$  が決定されています。Hasse 図で示せば次図の様になります。



図の様に結び目が複雑になるにつれ、身動きがとりにくくなるので射影全体の集合は小さくなるという訳です。



2成分の絡み目についても図の様に6交点  
まで順序が決定されています。

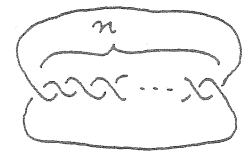


特に Erdős - Szekeres の定理 [6]  
を使うと

定理3.  $n: \text{even}$  ,  $L \in \mathcal{L}^2$ ,

$mc(L) \geq n^2 - 2n + 2$  ならば

$L \cong (2, n)$ -torus link



が証明できます。ここで  $mc(L)$  は  $L$  の

diagram における異なる成分による交点の最小数です。従来定理3のかわりに Ramsey の定理を使った存在定理を示していたのですが最近 早大理工の山下哲氏より Erdős - Szekeres の定理が使えることを教えて頂きました。

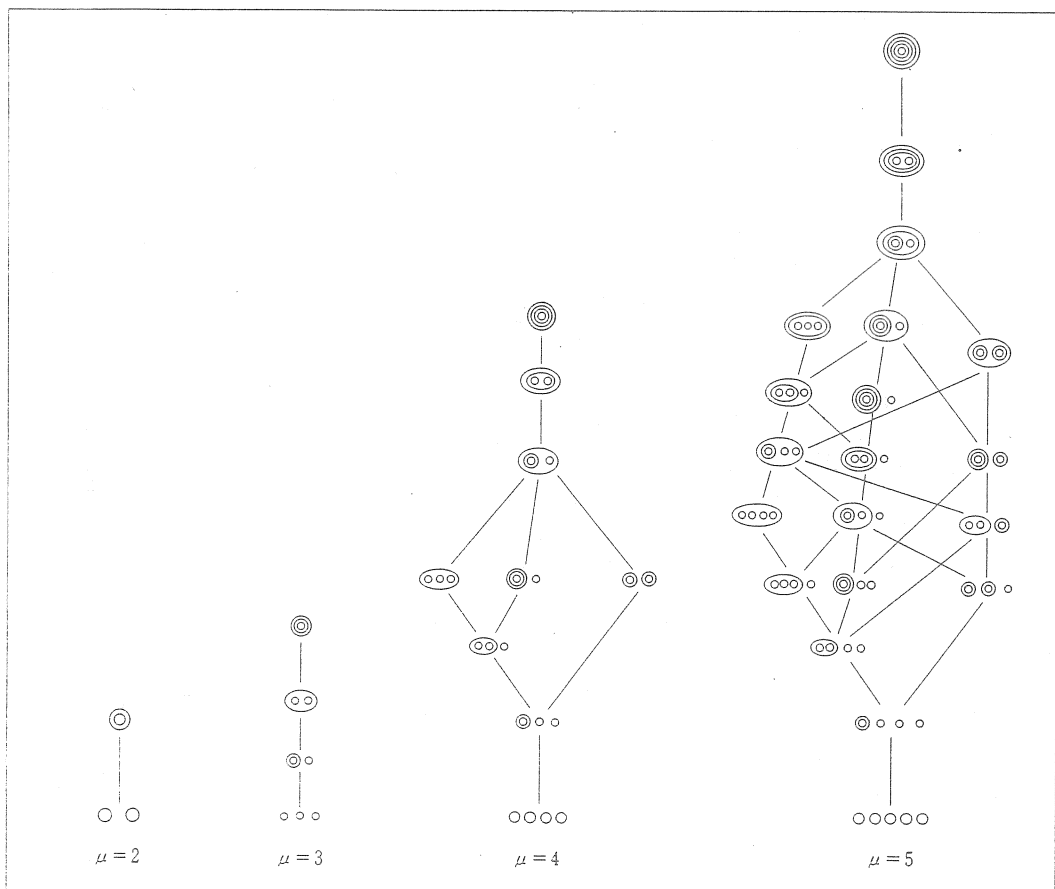
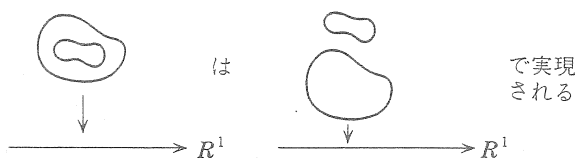
さてこの " $\leq$ " の定義では射影全体を考えているために一般には決定がとても難しく多くの Question を持っています。例えば  $(\mathcal{L}', \leq)$  に反対称律が成立するかどうかも解っていません。(  $\mu \geq 2$  では成立しないことが解っています。)

もと別の言葉で再定義できるとよいのですが……

しかしこの射影全体を考えるという方法は他の状況でも有効なことが多いのではと筆者は思います。例えば平面  $\mathbb{R}^2$  上の絡み目を考えます。つまり  $\mu (\geq 2)$  個の円周から  $\mathbb{R}^2$  への smooth embedding を絡み目と考え、 $\mathbb{R}^2$  の self diffeo. で像が重なるとき同じ絡み目と考えます。各絡み目に対し写像  $\mathcal{R}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ;  $\mathcal{R}(x, y) = x$  を合成することで  $\mu$  個の円周

から  $\mathbb{R}^1$  への smooth map を得ます。便宜上  
 これらのうち Morse function になるものだけを  
 絡み目の“射影”と考えることにすれば後は  
 同様に順序関係が定義できて、図の様  
 になります。

例

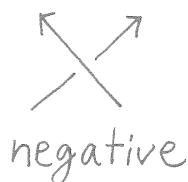




## §.2 Almost positive link の signature

この § の内容は Józef Przytycki 氏 (U.C.R.) との共同研究 [7] です。

この § では向きのついた絡み目を考え、絡み目型は  $\mathbb{R}^3$  の向きを保つ自己同相によって考えることにします。diagram の各交点は図の様に 2 種類に分かれます。



Def. link diagram  $\tilde{L}$  が  $n$ -almost positive である  $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$   $\tilde{L}$  の negative な交点は  $n$  点である

0-almost positive を 単に positive

1-almost positive を almost positive

と呼ぶことにします。

Def. link  $L$  が  $n$ -almost positive である  $\stackrel{\text{def.}}{\iff}$   $L$  の diagram で  $n$ -almost positive なものが存在する。

(注  $L$  が  $n$ -almost positive  $\Rightarrow (n+1)$ -almost positive)

絡み目  $L$  の signature  $\sigma(L)$  は  $L$  の (任意の) Seifert 行列  $V$  を使って

$$\sigma(L) = \text{sign}(V + V^t)$$

で定義される絡み目型不変数です。

Przytycki [8] は不等式

$$\sigma(L_+) \leq \sigma(L_-)$$

を使って定理 4 を証明しました。ここで

$L_+$  と  $L_-$  は局所的に図の様に異なる

絡み目です。



他は  
同じ

定理 4  $L$  が非自明な positive link ならば  $\sigma(L) < 0$  である。

$L$  が結び目の場合にこれを示します。

$\tilde{L}$  を  $L$  の positive diagram とします。定理

2 より 適当に  $\tilde{L}$  の上下を入れ換えることにより

三葉結び目が作れます。もとの  $\tilde{L}$  が

positive でしたから この間の変化は

$(L_+ \rightarrow L_-)$  の形の変化の列ですから。

不等式が使えて

$$\sigma(L) \leq \sigma(\text{図}) = -2 \quad //$$

絡み目の場合は

$$\sigma(\text{図}) = -1$$

を利用します。

尚 定理4 は古くから予想されていたこととして、[8]よりも少し早く Traczyk [9] によって別の手法で証明されています。

ここでは この Przytycki のアイデアに基づいて得られる以下の諸結果を報告致します。証明はここではしませんが、§1の結果と手法を用いてなされます。

- 定理5.  $L$  が非自明な positive link ならば  $\sigma(L) \leq -3$  または、次のいずれか
- (1)  $L \cong P(p_1, p_2, p_3)$  (と自明な成分  $\bigcirc \bigcirc \dots \bigcirc$ )  
 $p_i: \text{odd} \quad p_i > 0 \quad ; \quad \text{このとき } \sigma(L) = -2$
  - (2)  $L \cong P(q_1, q_2, q_3)$  (と  $\bigcirc \dots \bigcirc$ )  
 $q_i: \text{even} \quad q_i > 0 \quad ; \quad \text{このとき } \sigma(L) = -2$
  - (3)  $L \cong (2, 2k)$ -torus link (と  $\bigcirc \dots \bigcirc$ )

ただし各成分の向きは逆向き.

$$\text{このとき } \sigma(L) = -1$$

(4) (3)の link 2つの連結和もしくは分離和

$$\text{このとき } \sigma(L) = -2$$

(ここで  $P(\quad)$  は pretzel link を表す.)

系6. 結び目解消数 1 の positive link は  
twist knot または Hopf link ( $\infty$   $\circ \circ \dots \circ$ )  
に限る

定理7.  $L$  が非自明な almost positive  
link ならば  $\sigma(L) < 0$  である。

定理8.  $\tilde{L}$  が自明な絡み目の almost  
positive diagram で  $\tilde{L}$  に  $\gamma$ ,  $\gamma$   
がなれば  $\tilde{L}$  は



または



に

自明な円周を加えたもの

定理9.  $L$  が非自明な 2-almost positive

link ならば  $\sigma(L) < 0$  または

(1)  $L \cong \text{twist knot } (\cup \bigcirc \cdots \bigcirc)$

このとき  $\sigma(L) = 0$

(2)  $L \cong \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) (\cup \bigcirc \cdots \bigcirc)$

このとき  $\sigma(L) = +1$

(3)  $L \cong \left( \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \right) \cup (2, 2\frac{1}{2})\text{-torus link の連結和}$

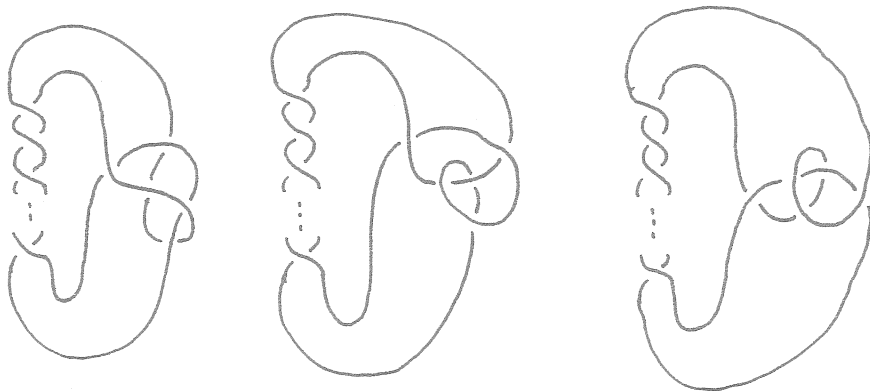
もしくは分離和  $(\cup \bigcirc \cdots \bigcirc)$

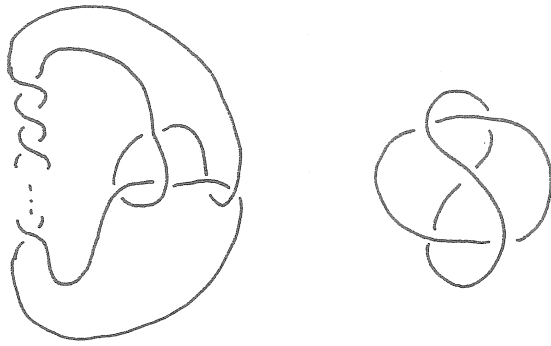
このとき  $\sigma(L) = 0$

定理10  $\tilde{L}$  が自明な絡み目の 2-almost

positive diagram で  $\tilde{L}$  に  $\curvearrowright$ ,  $\curvearrowleft$ ,

$\times$  がないならば  $\tilde{L}$  は





のいずれかに自明な円周を加えて得られる。  
参考文献

- [1] Y. Ohyaama : A new numerical invariant of knots induced from their regular diagrams, *Topology & its appl.* 37 (1990) 249-255
- [2] Y. Ohyaama & Y. Ogushi : On the triviality index of knots, *Tokyo. J. Math.* Vol.13 No.1 (1990) 179-190
- [3] 筆者 : A partial order of knots, *Tokyo. J. Math.* 12. (1989) no.1
- [4] " : A partial order of links, *Tokyo. J. Math.* 12 (1989) no.2
- [5] " : 結び目の半順序, *数理科学* 1990 12月号
- [6] P. Erdős - G. Szekeres : On some extremum problems in elementary geometry, *Ann. Univ. Sci. Budapest* 3-4, 53-62 (1960-61)
- [7] J. Przytycki & K. Taniyama : Almost positive links have negative signature (in preparation)
- [8] J. Przytycki : Positive knots have negative signature, *Bulletin of Polish Acad. of Sci. Math.* Vol. 37. No.7 1988
- [9] P. Traczyk : Nontrivial negative links have positive signature, *Manuscripta math.* 61, 279-284 (1988)

# 安定曲線のモジュライ空間におけるサイクルの構成

東大理 (学振) 大場 清

## § 0. 序

$M_g$  を種数  $g$  の閉リーマン面のモジュライ空間,  $\bar{M}_g$  を種数  $g$  の安定曲線のモジュライ空間とします。種数  $g$  の安定曲線  $C$  とは, 完備連結被約代数曲線で, i)  $C$  がたか通常 2 重点 (node) を特異点としてもち, ii)  $\dim H^1(C, \mathcal{O}_C) = g$  であり, iii) 既約成分中に  $P'$  があるときは  $P'$  は他の成分と 3 点以上で交わる, というものです。 $\bar{M}_g$  は Deligne - Mumford によつて与えられた  $M_g$  のコンパクト化です ([D-M])。以後この講演では  $g \geq 3$  とします。

$M_g, \bar{M}_g$  は  $3g-3$  次元の複素  $V$ -manifold (とくに, rational homology manifold) であることが知られていますが, そのトポロジカルな性質はあまり知られていません。Betti 数についていえば, Harer により  $M_g$  の 2 次元 Betti 数  $b_2(M_g)$  が 1 であることが知られており ([H], Mayer-Vietoris の exact seq を使うことにより),  $\bar{M}_g$  の 2 次元 Betti 数  $b_2(\bar{M}_g)$  は  $2 + [\frac{g}{2}]$  であることが

わかります。

5. Wolpert は  $H_2(\bar{M}_g; \mathbb{Q})$  をはる  $2 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$  個のサイクルを具体的に構成しました。又、その手法を使って  $2k$  次元 ( $k < g$ ) の 1 次独立なサイクルを構成し、Betti 数を下から評価しました [W]。しかし彼の評価は 0 次元から  $2g-2$  次元と、Poincaré duality による  $4g-4$  次元から  $6g-6$  次元の間であり、 $2g-2$  次元から  $4g-4$  次元の間の評価は何も与えられていません。事実、Wolpert の評価は大まかに言、2 次の不等式で与えられます。

$$b_{2k}(\bar{M}_g) = b_{6g-6-2k}(\bar{M}_g) \geq \frac{1}{2} \binom{g-1}{k}$$

今回の目標は、 $2g-2$  次元から  $4g-4$  次元の間の空白をうめ、全ての偶数次元の Betti 数に下からの評価を与えよことにあります。これは、0 次元から  $4g-4$  次元の 1 次独立なサイクルを構成することにより成功しました。結果としては大まかに言、2 次のような不等式がなりたちます。

$$b_{2k}(\bar{M}_g) = b_{6g-6-2k}(\bar{M}_g) \geq \frac{1}{2} \binom{g-1}{k} + \frac{1}{2} \sum_{k', l} \binom{k'-1}{l} \binom{k-2k'+1}{l+1} \binom{g-l-2}{k-k'}$$

これでわかるように Wolpert が評価を与えた次元にお



いとも大きく評価を改良してあります[0]。

## §1. サイクルの構成と $h$ -selection

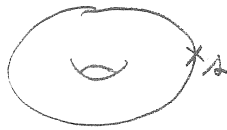
サイクルの構成のアイデアは次のようなものである。まず nodes を持つ安定曲線  $S$  で、 $S - \{\text{nodes}\}$  が連結でないものを考え、 $S - \{\text{nodes}\}$  のいくつかの component  $S_1, \dots, S_k$  を選ぶ。そして  $S - \bigcup_j S_j$  の conformal structure を固定させたまま、選ばれた各  $S_j$  の等角構造をそのモジュラ空間上表わされるすべての構造にわたって変形させることにより安定曲線を fiber とする analytic fiber space が構成され、従ってその base space から  $\overline{M}_g$  への写像、すなわちサイクルが構成されるという仕組みです。もちろん、base space がコンパクト化されてなければなりません。

Wolpert は 2次元のサイクルを構成する際には、 $S_j$  とし  $1$ -punctured torus 又は  $4$ -punctured sphere となるものを、高次元では、各  $S_j$  が  $4$ -punctured sphere となる場合を考えました。そこで彼は 2種の fibration

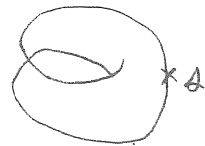
$$\pi_1: \mathcal{Q}_g \rightarrow \widehat{H/P_1} \quad (g \geq 3)$$

$$\pi_2: \mathcal{U}_g \rightarrow \widehat{H/P_2}$$

を用いました。  $\pi_1: Q_1 \rightarrow \widehat{H/P_1}$  は general fiber が elliptic curve で、有限個の点上で singular fiber となり、singular fiber は  $P'_1$  において  $0$  と  $\infty$  を同一視し、通常 2 重点となるようにしたものです。  $\pi_1: Q_1 \rightarrow \widehat{H/P_1}$  は 1 本の global analytic section  $s: \widehat{H/P_1} \rightarrow Q_1$  をもち、  $s$  は singular fiber では node を通りません。



$Q_1$  の general fiber



$Q_1$  の singular fiber

$\pi_2: U_2 \rightarrow \widehat{H/P_2}$  は general fiber が  $P'_2$  で、3 点上で singular fiber となり、それは  $P'_2 \vee P'_2$  で、互いに交わらない 4 本の global analytic sections  $s_1, s_2, s_3, s_4$  をもち、各  $s_i$  は singular fiber では node を通りません。



$U_2$  の general fiber



$U_2$  の singular fiber

この 2 つの fibration から、section をとり除いたものは

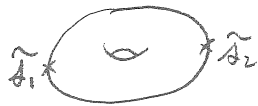
それぞれ 1-punctured torus, 4-punctured sphere 上の conformal structure の変形を与えておき、すべての conformal structure をおお、こります。又、singular fiber がかわ、こり子 = こにより、base space はコンパクト化され、閉リーマン面とな、こります。(詳しくは [W])

さて、我々は、高次元のサイクルを作用にあたり、各  $S_2$  が、1-punctured torus, 4-punctured sphere のみならず、2-punctured torus となるときも複合的に考えます。2-punctured torus のモジュライ空間は、上記の二つと異なり、複素 2次元となるときがポイントです。また次の fibration を用意します。

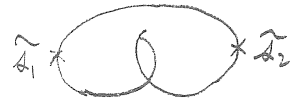
$$\hat{\pi}_g : \hat{Q}_g \rightarrow U_g$$

これは あるコンパクトな複素曲面  $U_g$  から  $\mathbb{H}/\Gamma_g$  への holomorphic な写像を利用して  $Q_g$  の fiber space の構造を引きもどしたものを  $\hat{\pi}_g : \hat{Q}_g \rightarrow U_g$  とします。これには global な analytic section が二本入りですが、二本が交わる箇所、singular fiber で node を通、こしまる箇所があり、そこで analytic modification により、これを解消したものが  $\hat{\pi}_g : \hat{Q}_g \rightarrow U_g$  です。

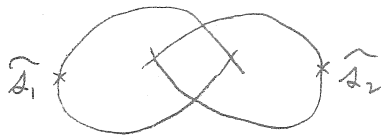
$\widehat{\pi}_e: \widehat{Q}_e \rightarrow U_e$  の general fiber は elliptic curve で、  
 $U_e$  の ある divisor 上で singular fiber と作り、  
 singular fiber の位相型は 4 type です。又、2本  
 の analytic section を  $\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2$  とします。



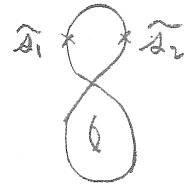
$\widehat{Q}_e$  の general fiber



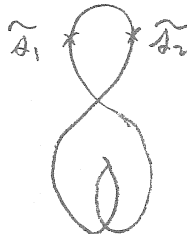
singular fiber 1



singular fiber 2



singular fiber 3



singular fiber 4.

$\Rightarrow$   $\widehat{Q}_e$  から  $\widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2$  をとり除くと、2-punctured  
 torus 上の conformal structure の変形を与えており、  
 $\Rightarrow$  これはすべての conformal structure をおお、 $\Rightarrow$  いる  
 $\Rightarrow$  ことに注意します。

以上3つの fibration において、section を取り除いたものを次のように表します。(l ≥ 3)

$$\pi_l: Q_l^0 \rightarrow \widehat{H}/\Gamma_l$$

$$\pi_2: U_2^0 \rightarrow \widehat{H}/\Gamma_2$$

$$\widehat{\pi}_l: \widehat{Q}_l^0 \rightarrow U_l$$

次に、下図のように曲面  $S$  と その上の曲線  $c_1, \dots, c_{g-1}, d_1, d_2, d_2', \dots, d_{g-1}, d_{g-1}', d_g$  を考え、 $k$ -selection と呼ぶものを定義します。

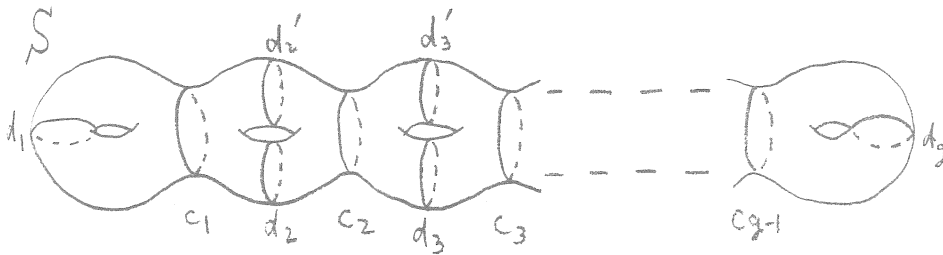


図 I

### 定義 1

$k$ -selection  $\sigma$  とは、自由ホモトピー-類  $[c_1], \dots, [c_{g-1}], [d_1], [d_2], [d_2'], \dots, [d_{g-1}], [d_{g-1}'], [d_g]$  の中から  $k$  個の類を選んだもので、以下の2つの条件を満たすものとする。

- 1)  $[d_i']$  は  $[d_i]$  が選ばれたとき、そのとき限り選ばれぬ。
- 2) もし、 $[d_i], [d_i']$  が選ばれていたら、 $[c_{i-1}]$  も  $[c_i]$  も選ばれない。(2 ≤ i ≤ g-1)

1つの  $g$ -selection  $\sigma$  を固定すると、1つの  $2g$ -サイクルと、1つの  $3g-3$ - $g$  Variety ( $6g-6-2g$  サイクル) が構成できます。まず  $2g$ -サイクルを構成します。

$\sigma$  にも  $d_j, d'_j$  ( $2 \leq j \leq g-1$ ) が選ばれていたら、 $C_{j-1}, C_j$  を node に collapse させ、 $d_j, d'_j$  を含むコンポーネントを  $\widehat{Q}_e^0$  の fiber でおきかえます。つまり、 $d_j, d'_j$  を含む component を取り除き、 $C_{j-1}$  が collapse してできた node に  $\widehat{\alpha}_1$  に由来する puncture を同一視させ、 $C_j$  が collapse してできた node に  $\widehat{\alpha}_2$  に由来する puncture を同一視させるといふことです。同様にもし  $\sigma$  に  $C_j$  ( $2 \leq j \leq g-2$ ) が選ばれていたら、 $d_j, d'_j, d_{j+1}, d'_{j+1}$  を node に collapse させ、 $C_j$  を含む component を  $U_2^0$  のファイバーでおきかえます。もし、 $d_1$  と  $C_1$  がともに選ばれていたら、 $d_2, d'_2$  を node に collapse させ、 $d_1, C_1$  を含む component を  $\widehat{Q}_e^0$  の fiber でおきかえます。 $d_g, C_{g-1}$  がともに選ばれていたときも同様に  $\widehat{Q}_e^0$  の fiber でおきかえます。もし  $\sigma$  に  $C_1$  が選ばれ、 $d_1$  が選ばれていない場合は、 $d_1, d_2, d'_2$  を node に collapse させ、 $C_1$  を含む component を  $U_2^0$  の fiber でおきかえます。 $C_{g-1}$  が選ばれ、 $d_g$  が選ばれていないときも同様に  $U_2^0$  の fiber

でおきかえます。もし、 $\sigma$  に  $d_1$  が選ばれ、 $c_1$  が選ばれていなければ、 $c_1$  を collapse させ、 $d_1$  を含む component を  $Q_2^0$  の fiber で置きかえます。 $d_2$  が選ばれ、 $c_{g+1}$  が選ばれなかつたときも同様に  $Q_2^0$  の fiber でおきかえます。

このようにして  $h$ -selection を 1 つ決めるとそれに対応して種数  $g$  の安定曲線を fiber とする analytic fiber space  $A_0$  が構成され、したがってその base space から  $\bar{M}_g$  への写像  $[A_0]$  が作られる。ここで base space は、適当な非負整数  $a, b, c$  ( $2a+b+c=h$ ) により直積  $(U_1)^a \times (\widehat{H/\Gamma_2})^b \times (\widehat{H/\Gamma_2})^c$  と表わされるコンパクトな  $h$  次元複素多様体であるから、これで  $\bar{M}_g$  の  $2h$  次元のサイクルが構成されたこととなります。

$$[A_0] : (U_1)^a \times (\widehat{H/\Gamma_2})^b \times (\widehat{H/\Gamma_2})^c \longrightarrow \bar{M}_g$$

一方、 $h$ -selection  $\sigma$  は  $\bar{M}_g$  の  $3g-3-h$  次元の subvariety  $V_\sigma$  を定めます。これは、曲面  $S$  において  $\sigma$  に選ばれた曲線を node に collapse させた曲面  $S_0$  に位相同型な安定曲線を表す全ての  $\bar{M}_g$  の点を集め、閉包をとるとにより、 $3g-3-h$  次元の subvariety  $V_\sigma$  が得られ、これは、 $6g-6-2h$  次元のサイクル  $[V_\sigma]$  を表します。

$$V_g := \left\{ p \in \overline{M}_g; (p \text{ の表す安定曲線}) \underset{\text{homeo}}{\cong} S_g \right\}$$

## §2. 一次独立性

図1における曲面  $S$  の homeomorphism の中には自由ホモトピー-類  $[c_1], \dots, [c_{g-1}], [d_1], [d_2], [d'_2], \dots, [d_{g-1}], [d'_{g-1}], [d_g]$  に置換を引き起こすものが存在します。そのような homeomorphism による置換は、 $k$ -selection の全体の集合に  $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  の action を引きおこします。自明でない元は  $[c_j]$  を  $[c_{g-j}]$  に、 $[d_j]$  と  $[d'_j]$  の組を  $[d_{g-j+1}]$  と  $[d'_{g-j+1}]$  の組にうつします。そこで次のように定義します。

### 定義 2

- (1)  $k$ -selection  $\sigma$  に対し、 $\sigma$  に共役な  $k$ -selection  $\bar{\sigma}$  とは  $\sigma$  が  $[d_{g-j+1}]$  (resp.  $[c_{g-j}]$ ) を含んでいるとき、そのとき限り、 $[d_j]$  (resp.  $[c_j]$ ) を含んでいるものとする。
- (2)  $k$ -selection  $\sigma$  が symmetric であるとは、 $\sigma = \bar{\sigma}$  となることをいう。
- (3)  $\alpha_{2,k}$  を、共役を法として異なる  $k$ -selection の数とする。



共役な2つの  $k$ -selection から構成される2次元のサイクルと複素  $3g-3-k$ 次元 subvariety はすぐわかるように同じものになります。したがって、 $\sigma$  で構成した2次元のサイクルの数,  $3g-3-k$ 次元の subvariety の数は  $\alpha_{g,k}$  個という = ことになります。以下、 $\alpha_{g,k}$ 個のサイクルと subvariety の intersection form を考え、一次独立であることの証明の概略を与えます。

まず、2つの  $k$ -selection  $\sigma, \tau$  に対し  $[A_\sigma]$  と  $[V_\tau]$  の intersection number  $[A_\sigma] \cdot [V_\tau]$  を考えるには、写像  $[A_\sigma]$  を perturb して  $V_\tau$  と  $\bar{M}_g$  の manifold pt においてのみ、transverse に交わるようにします。このように perturb したサイクルを  $[A_\sigma^\#]$  と表し、その fiber space を  $A_\sigma^\#$  と表す = こととします。

intersection number  $[A_\sigma] \cdot [V_\tau]$  を考えずには、 $\wedge$ -intersection number  $\widehat{[A_\sigma] \cdot [V_\tau]}$  を定義します。

定義 3  $k \geq 2$  に対し、 $k$ -selection の  $\sigma, \tau$  に関し、 $\wedge$ -intersection number  $\widehat{[A_\sigma] \cdot [V_\tau]}$  とは、 $[A_\sigma^\#]$  において、ちょうど  $\tau$  に選ばれた曲線が node に collapse した形の fiber を表す点において intersection number

のみを count したものとす。

次の補題1は容易にわかります。

### 補題1

$$(1) \widehat{[A_\sigma] \cdot [V_\tau]} = \widehat{[A_\sigma]} \cdot \widehat{[V_\tau]}$$

(2)  $\tau$  が symmetric でないとき

$$[A_\sigma] \cdot [V_\tau] = \widehat{[A_\sigma]} \cdot [V_\tau] = \widehat{[A_\sigma]} \cdot \widehat{[V_\tau]} + \widehat{[A_\sigma]} \cdot [V_\tau]$$

(3)  $\tau$  が symmetric であるとき

$$[A_\sigma] \cdot [V_\tau] = \widehat{[A_\sigma]} \cdot [V_\tau] = \widehat{[A_\sigma]} \cdot \widehat{[V_\tau]}$$

次の補題2は一次独立を示すための第1歩として重要です。

### 補題2

全ての  $k$ -selection によりつくられる  $\wedge$ -intersection matrix が非退化であれば、 $\alpha_{g,k}$  個のサイクル, subvariety による intersection matrix も非退化となる。 $(k \geq 2)$

証明) まず  $\sigma_1, \dots, \sigma_m$  をすべての symmetric な

$k$ -selection,  $\tau_1, \dots, \tau_n, \bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_n$  をする  $\mathbb{R}$  の symmetric でない  $k$ -selection とする  $k$ -intersection matrix は補題 1 の (3) により次のようになります。

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \\ \hline [\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \\ \hline [\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \end{array} \right)$$

これは基本変形により次のようになります。

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} + \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \\ \hline [\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} + \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \\ \hline [\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} + \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \end{array} \right)$$

補題 1 (2) によりこれは次と同じである。

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \\ \hline [\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \\ \hline [\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \widehat{[\mathcal{A}_{\bar{\tau}_i}] \cdot [V_{\bar{\tau}_i}]} \end{array} \right)$$

これは基本変形により次のようになります。

$$\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & * \\ \hline [\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & * \\ \hline 0 & 0 & * \end{array} \right)$$

==  $\left( \begin{array}{c|c|c} [\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\sigma_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \\ \hline [\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\sigma_i}] & \widehat{[\mathcal{A}_{\tau_i}] \cdot [V_{\tau_i}]} & \end{array} \right)$  が  $\alpha_{g, k}$  個の

サイクルと  $\alpha_g$  個の subvariety による intersection matrix であるから補題2が成り立つ。 //

補題2により  $\widehat{\phantom{x}}$ -intersection matrix が非退化である  $\Leftrightarrow$  を示せばよい  $\Leftrightarrow$  となります。  $k=1$  のとき、 $\widehat{\phantom{x}}$ -intersection は  $[V_{d_1}]$  または  $[V_{d_2}]$  を考えよと、well-defined ではなくなるが更宜上次のように定めます。

$$\widehat{[A_\sigma] \cdot [V_{d_1}]} := \begin{cases} [A_\sigma] \cdot [V_{d_1}] & (\sigma \neq d_2) \\ 0 & (\sigma = d_2) \end{cases}$$

$$\widehat{[A_\sigma] \cdot [V_{d_2}]} := \begin{cases} 0 & (\sigma \neq d_1) \\ [A_\sigma] \cdot [V_{d_2}] & (\sigma = d_1) \end{cases}$$

もし  $k$  行列表  $A_{k, d_i}$  を  $\{[d_1], [c_1], [d_2], [d_2'], [c_2], \dots, [d_i], [d_i']\}$  に含まれる  $k$ -selection 全体によつて作られる  $\widehat{\phantom{x}}$ -intersection matrix とし、行列表  $A_{k, c_i}$  を  $\{[d_1], [c_1], [d_2], [d_2'], [c_2], \dots, [d_i], [d_i'], [c_i]\}$  に含まれる  $k$ -selection 全体によつて作られる  $\widehat{\phantom{x}}$ -intersection matrix とし、すべての  $k, d_i, c_i$  についで  $A_{k, d_i}, A_{k, c_i}$  が非退化である  $\Leftrightarrow$  とを induction により証明する  $\Leftrightarrow$  ができます。(詳細は省略する。)

$\equiv \equiv$   $A_k, d_k$  は全ての  $k$ -selection によつて作られる  $\wedge$ -intersection matrix であるから  $\S 1$  で構成した  $\alpha_{g,k}$  個のサイクルは 1 次独立であることがわかりました。

### $\S 3$ 、異なる $k$ -selection の数と結果.

$\equiv \equiv$  では、まず、 $k$ -selection の共役類の数、すなわち、 $\alpha_{g,k}$  の算出法を示します。

最初に行列  $A, B, C \in M_2(\mathbb{Z}[x])$  を次のように定めます。

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x & 0 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x^2 & 0 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ x^4 & 0 \end{pmatrix}$$

$A, B, C$  を用いて多項式  $a_g(x), b_g(x), c_g(x), d_g(x)$  を定めます。

$$\begin{pmatrix} a_g(x) & b_g(x) \\ c_g(x) & d_g(x) \end{pmatrix}
 := \begin{cases} \frac{1}{2} \left\{ A(AB)^{g-2} A^2 + x^2 (AB)^{g-3} A^2 + x^2 A(AB)^{g-3} A \right. \\ \quad \left. + x^4 (AB)^{g-4} A + B(BC)^{\frac{g}{2}-1} A + x^4 (BC)^{\frac{g}{2}-2} A \right\} & (g: \text{even}) \\ \frac{1}{2} \left\{ A(AB)^{g-2} A^2 + x^2 (AB)^{g-3} A^2 + x^2 A(AB)^{g-3} A \right. \\ \quad \left. + x^4 (AB)^{g-4} A + B(BC)^{\frac{g-3}{2}} B^2 + x^4 (BC)^{\frac{g-5}{2}} B^2 \right\} & (g: \text{odd}) \end{cases}$$

$\Rightarrow$  で、 $X \in M_2(\mathbb{Z}[x])$ , 負の整数  $i$  に対し  $X^i \in M_2(\mathbb{Z}[x])$   
 となるが  $\begin{pmatrix} a_2(x) & b_2(x) \\ c_2(x) & d_2(x) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}[x])$  となることに注

意します。最後に多項式  $f_2(x)$  を定義します。

$$f_2(x) := a_2(x) + c_2(x)$$

すなわち  $\alpha_{2,k}$  は  $f_2(x)$  の  $x^k$  の係数として計算されます。  
 つまり次の命題がなりたちます。

### 命題 1

$$f_2(x) = \sum_k \alpha_{2,k} x^k$$

いま簡単のため、 $X = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}[x])$  に対し、  
 $a(x) + c(x)$  を  $f(X)$  と表すことにします。

命題の証明の概略)

まず (1)  $A(AB)^{j-1}A = \left( \sum_k g_{j,k} x^k, \sum_k g'_{j,k} x^k \right)$  ( $1 \leq j \leq g-1$ )  
 により  $g_{j,k}, g'_{j,k}$  を定めると、

$$g_{j,k} = \# \left\{ \sigma : k\text{-selection} \mid \{[d_1], [c_1]\} \neq \sigma \subseteq \{[d_1], [c_1], [d_2], [d_2], \dots, [c_j]\} \right\}$$

$$g'_{j,k} = \# \left\{ \sigma : k\text{-selection} \mid \{[d_1], [c_1]\} \neq \sigma \subseteq \{[d_1], [c_1], [d_2], [d_2], \dots, [d_j], [d_j]\} \right\}$$

となることが induction により示される。 $\Rightarrow$  で、  
 $[d_1]$  と  $[c_1]$  をともに含まず、 $[d_2]$  と  $[c_{g-1}]$  を共には

含まない  $h$ -selection の数を  $\alpha'_{g,h}$  とおくと

$\alpha'_{g,h} = \beta_{g-1,h} + \beta'_{g-1,h-1}$  となり 二つがわかるから、

$$(1,1)A(AB)^{g-2}A^2 = \left( \sum_h \alpha'_{g,h} x^h, \sum_h \beta_{g-1,h} x^h \right) \text{ となり}$$

二つがわかる。すなわち、

$$f(A(AB)^{g-2}A^2) = \sum_h \alpha'_{g,h} x^h \text{ となり。}$$

同様に  $[d_1]$  と  $[c_1]$  を共に含むか、 $[d_g]$  と  $[c_{g-1}]$  をともに含む  $h$ -selection の数は

$f(x^2(AB)^{g-3}A^2 + x^2A(AB)^{g-3}A + x^4(AB)^{g-4}A)$  の  $x^h$  の係数として得られ、symmetric な  $h$ -selection の数は

$$\begin{cases} f(B(BC)^{\frac{g}{2}-1}A + x^4(BC)^{\frac{g}{2}-2}A) & (g: \text{even}) \\ f(B(BC)^{\frac{g-3}{2}}B^2 + x^4(BC)^{\frac{g-5}{2}}B^2) & (g: \text{odd}) \end{cases}$$

により得られる二つがわかり命題が証明されます。//

更に  $[d_1]$  も  $[d_g]$  も含まない  $h$ -selection のみの数を算出するとそれは次のような式で与えられる。(証明は略)

$$\binom{g-1}{h} + \sum_{h',l} \binom{h'-1}{l} \binom{h-2h'+1}{l+1} \binom{g-l-2}{h-h'}$$

その共役類の数は半分以上であるから次がわかる。

$$(*) \alpha_{g,h} > \frac{1}{2} \binom{g-1}{h} + \frac{1}{2} \sum_{h',l} \binom{h'-1}{l} \binom{h-2h'+1}{l+1} \binom{g-l-2}{h-h'}$$

Betti 数の評価について結果をまとめると次のようになる。

### 定理

$k \geq 2$  のとき

$$b_{2k}(\bar{M}_g) = b_{6g-6-2k}(\bar{M}_g) \geq \max(\alpha_{g,k}, \alpha_{g,3g-3-k})$$

注意

- ①  $k=1$  のときはすでに Harer の結果により  $b_2(\bar{M}_g) = b_{6g-6}(\bar{M}_g) = 2 + \lfloor \frac{g}{2} \rfloor$  がわかっています。
- ②  $\alpha_{g,k}$  は  $k$ -selection の共役類の数であるから、 $1 \leq k \leq 2g-2$  に対し、 $\alpha_{g,k} \geq 0$  となり、すべての偶数次元の Betti 数に評価を与えたこととなります。
- ③  $\alpha_{g,k}$  の算出は命題 1 により行なうことができます。もっと大きくは前ページ (\*) を利用できます。

最後に計算例を付記します。

1)  $g=3$  のとき

$$f_3(x) = 1 + 2x + 5x^2 + 3x^3 + 2x^4 \text{ となり、}$$

$$b_2 = b_{10} = 3, \quad b_4 = b_8 \geq 5, \quad b_6 \geq 3 \text{ がわかる。}$$



2)  $g = 4$  のとき

$$f_4(x) = 1 + 3x + 7x^2 + 9x^3 + 7x^4 + 3x^5 + x^6 \text{ (など)}$$

$$b_2 = b_{16} = 4, \quad b_4 = b_{14} \geq 7, \quad b_6 = b_{12} \geq 9$$

$$b_8 = b_{10} \geq 7 \quad \text{がわかる。}$$

3)  $g = 5$  のとき

$$f_5(x) = 1 + 3x + 11x^2 + 16x^3 + 21x^4 + 13x^5 + 8x^6 + 2x^7 + x^8 \text{ (など)}$$

$$b_2 = b_{22} = 4, \quad b_4 = b_{20} \geq 11, \quad b_6 = b_{18} \geq 16$$

$$b_8 = b_{16} \geq 21, \quad b_{10} = b_{14} \geq 13, \quad b_{12} \geq 8 \quad \text{がわかる。}$$

### 参考文献

[Ab] W. Abikoff, "Topics in the Real Analytic Theory of Teichmüller Space," L.N.M. 820 Springer-Verlag, 1980.

[Ah] L.V. Ahlfors, Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces, Ann. of Math. 74 (1961), 171-191

[As] A. Ash et al., "Smooth Compactification of Locally Symmetric Varieties," Mass., Math. Sci. Press, 1975

[B] L. Bers, Spaces of Degenerating Riemann surfaces, in "Ann. of Math. Studies," 1974, pp 43-55

[D-M] P. Deligne - D. Mumford, The irreducibility of the space of curves of given genus, Publ. Math. IHES 36, 1969  
p75-109

- [H] J. Harer, The second homology group of the mapping class group of an orientable surface, *Invent. Math.* 72 (1982), 221-239
- [O] K. Ohba, Higher cycles of the moduli space of stable curves, preprint
- [P] D. Prill, Local classification of quotients of complex manifolds by discontinuous groups, *Duke Math. J.* 34 (1967) 375-386
- [S] I. Satake, On a generalization of the notation of manifold, *Proc. N.A.S.* 42 (1956), 359-363.
- [W] S. Wolpert, On the homology of the moduli space of stable curves, *Ann. of Math.* 118 (1983), 491-523

# 有限群の分類空間のMorava K理論について

田辺 理正

近年のホモトピー論の発展の中の一つとして, E. Devinatz, M. Hopkins, J. Smithによる, Ravenel予想を動機とする, 安定ホモトピー圏における中零性および $v_n$ -周期性の研究を挙げる事ができるのである。彼らの得た驚くべき成果から, 我々は安定ホモトピー圏の大域的な研究において,  $v_n$ -周期的コホモロジー理論が果たす重要な役割を学ぶ事ができる。

これらのコホモロジー理論は, 複素コホモロジー理論から Baas-Sullivan 構成または Landweber の Exact functor theorem によって得る事ができるが, 現在までのところこれに代わるより“幾何学的”もしくは“概念的”な定義を持つ  $v_n$ -周期的コホモロジーは  $n \leq 1$  に対してしか知られておらず ( $n=0$  の時は実係数常コホモロジー,  $n=1$  の時は複素 K 理論で,  $n=2$  の場合は橋田コホモロジーがその候補と考えられている),  $n \geq 2$  に対してこれを発見することは, chromatic filtration に基石礎を置くホモトピー論をより深める上での一つの重要な課題を提供していると考えてよいだろう。

この  $v_n$ -周期的コホモロジーの“幾何学的”な構成問題に密接に関連した問題に,  $v_n$ -周期的コホモロジーが有限群の分類空間の上で取る直を群論的に記述するというものが考えられるが, これに対しては最近 M. Hopkins, N. Kuhn, D. Ravenel によって目覚ましい進歩が成し遂げられた。

彼らの得た結果のうち最も重要なものは Atiyah の定理の拡張であるところの “generalized group character theory” であると思われるが, ここでは主に有限群  $G$  の分類空間  $BG$  の  $K(n)$ -Euler 標数  $\chi_{n,p}(G) = \dim K(n)^{\text{even}}(BG) - \dim K(n)^{\text{odd}}(BG)$  についての彼らの結果およびそれに関連した話題について簡単に述べることにする。

1. Morava K理論. 任意の素数  $p$  および自然数  $n (\geq 1)$  に対して  $K(n) = K_n(p)$  を  $p$  における  $n$  番目の Morava K 理論とすると,  $K(n)$  は結合的 ( $p > 2$  なる  $n$  に対して次数  $\neq 2$  の意味で可換) な積を持ち  $K(n)^* := K(n)^*(p, \alpha) = \mathbb{Z}/p[v_n, v_n^{-1}]$  ( $|v_n| = -2(p^n - 1)$ ) なる次数  $\neq 2$  の環の同型が成立する。従って

任意の  $K(n)^*$  上の次数つき加群  $M^*$  は自由であり  $M^*$  の  $K(n)^*$  上の次元  $\dim M^*$  を定義することができる。また  $K(n)^*$  は奇数次元の元を持たないので、 $M^{\text{even}}$  および  $M^{\text{odd}}$  はそれぞれ  $K(n)^*$  加群でもし  $\dim M^*$  が有限ならば、Euler 標数

$$(1.1) \quad \chi(M^*) := \dim M^{\text{even}} - \dim M^{\text{odd}}$$

を定義することができる。

2.  $\chi_{n,p}(G)$ . まず次の定理が成立する。

定理 2.1 (D. Ravenel).  $G$  を有限群とする。このとき  $\dim K(n)^*(BG)$  は有限。

上の定理より、(1.1) で特に  $M^* = K(n)^*(BG)$  として

$$(2.2) \quad \chi_{n,p}(G) := \chi(K(n)^*(BG))$$

が定義できる。この  $\chi_{n,p}(G)$  について次の定理が知られている。

$$(2.3) \quad C_{n,p}(G) := \text{Map}_G(\text{Hom}(\mathbb{Z}_p^n, G), \mathbb{F}_p)$$

とすると、

定理 2.4 (M. Hopkins - N. Kuhn - D. Ravenel). 任意の有限群  $G$  に対して、次の等式が成立する。

$$\chi_{n,p}(G) = \dim C_{n,p}(G).$$

ただし右辺の  $\dim$  は  $\mathbb{F}_p$ -ベクトル空間としての次元を表わす。

さらに次の予想がある。

予想 2.5 (M. Hopkins - N. Kuhn - D. Ravenel).  $K(n)^{\text{odd}}(BG) = 0$ . すなわち

$$\dim K(n)^*(BG) = \dim C_{n,p}(G).$$

上の予想の結果は、 $K(n)^*(BG)$ を群論的に記述するという問題を考える上で大きな指針を与えていると見て差支えないであろう。

3.  $K(n)^{\text{odd}}(BG)$ . Transfer argumentにより次は容易にわかる。

補題3.1.  $G$ を有限群、 $G_p$ をその  $p$ -Sylow 部分群 (の一つ) とする。この時もし  $K(n)^{\text{odd}}(BG_p) = 0$  なら  $K(n)^{\text{odd}}(BG)$  もまた零。

上の補題より  $G$  を有限  $p$  群とする。この時

定理3.2 (N. Kuhn). もし単純  $\mathbb{F}_p[\text{Out}(G)]$  (または  $A(G, G) \otimes \mathbb{F}_p$ ) 加群で、 $C_{n,p}(G)$  の組成因子として現われないものが存在するならば  $K(n)^{\text{odd}}(BG) \neq 0$ 。ただし  $A(G, G)$  は "inductions" と準同型の合成で生成される環。

注意3.3. J. Thompsonにより、上の条件を満たす  $\mathbb{F}_p[\text{Out}(G)]$  加群は存在しないことが示されている。

次に J. Hunton による unitary like embedding (ULE) の理論について述べる。  $X$  を位相空間とする。

定義3.4.  $X$  が ULE を持つとは次の (i), (ii) を満たす連続写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在することである。

(i)  $f^*: K(n)^*(Y) \rightarrow K(n)^*(X)$  は全射。

(ii)  $K(n)^*(Y)$  は中零元を持たない。

この時次の定理が (微細な技術的問題点を除いて) 成立する。

定理3.5 (J. Hunton).  $K(n) = K_n(p)$  で  $p$  を奇素数とすると、次の (i), (ii) は同値。

(i)  $K(n)^{\text{odd}}(X) = 0$ 。

(ii)  $X$  は ULE を持つ。

4. 特殊な  $G$  に対する  $K(n)^*(BG)$ . ある特別な型の有限群  $G$  に対する  $K(n)^*(BG)$  の研究としては主に以下に挙げるものがある。

- (i) 可換群 (D. Ravenel - S. Wilson)。
- (ii)  $p$ -Sylow 部分群が可換群 (N. Kuhn)。
- (iii)  $p$ -rank の低い群 (M. Tezuka - N. Yagita)。
- (iv)  $p$ -Sylow 部分群がある種の wreath 積になっている群 (対称群を含む)  
(J. Hutton, M. Hopkins - N. Kuhn - D. Ravenel, M. Tezuka - N. Yagita)
- (v) Lie 型の有限群 (M. Tanabe)

上記 (i) ~ (v) のいずれの場合にも結果の一部として  $K(n)^{\text{odd}}(BG) = 0$  が示されている。

# 葉層構造のAMENABILITY と特性類

三 松 佳 考(中央・理工)

§0. 序 葉層構造 (又は、より一般に力学系) に (横断的) 不変測度が存在すると、その力学的及び幾何学的挙動が制限される。この様な事態は、“測度”のみならず、“amenability (従順性)” という概念を通じて考察することから自然の様である。本稿では、葉層構造の力学的又は幾何学的な性質と、横断EULER類との関係を、測度や amenability の観点から調べる。

葉層構造の法束の特性類という観点に於いては、後に容易に分る通り、本稿の様な研究に於いては、

PONTRJAGIN類は、自明な結論しか得ない。一方、若干異なる立場からは、2次特性類と測度や amenability の関係については、[H-1,2], [H-K] において概ね研究がなされている。そこでEULER類を調べるが本稿では述べない結果が [MT-2,3] にある。

本稿で紹介する主要結果は §3, 4, 5. であるが, §3  
 の定理2を HIRSCH-THURSTONの定理 (§1) から導こうと  
 したのだが, §3~5の残りの部分, 特に §4で紹介する,  
葉層のAMENABILITY の概念の導入の発端である。

§1では HIRSCH-THURSTONの定理を含め, 葉層構造の  
 法束及び平坦束のEULER類の重要な基礎を復習する。

§2.3では, 横断的不変測度と法束のEULER類の  
 関係を調べる。

§4に於いて AMENABILITY の概念を紹介し, §5で  
擬不変の横断測度 に対するEULER類の挙動を調べる。

### 記号

$(M, \mathcal{F})$  :  $C^\infty$  foliation.

$\tau\mathcal{F}$  :  $\mathcal{F}$  の接束

$L\mathcal{F}$  :  $\mathcal{F}$  の法束

$\rho = \mathcal{F}$  の葉の次元

$\delta = \mathcal{F}$  の余次元

$e(\mathcal{F})$  :  $\mathcal{F}$  の Euler 類

$E(L\mathcal{F}, \mu)$  :  $(\mathcal{F}, \mu)$  の横断 Euler 類

$E(L\mathcal{F}, \mu)$  :  $(\mathcal{F}, \mu)$  の平均横断 Euler 類

$H^*(L\mathcal{F}, \mu)$  :  $(\mathcal{F}, \mu)$  の leafwise cohomology

$\mu$  : (擬)不変横断測度

$\lambda$  : 横断 Lebesgue 測度

$C$  : foliation cycle

$C_\mu$  : 不変測度  $\mu$  に対する  $C$

$\mathcal{P}(\mathcal{F})$  :  $\mathcal{F}$  の基本束

$\mathcal{R}(\mathcal{F})$  :  $\mathcal{F}$  の (可直交) 関係 (の束)

$E$  : Banach 空間

$E^*$  :  $E$  の双対 Banach 空間

$L(\mathcal{F})$  :  $\mathcal{F}$  の linear holonomy 束

$\hat{\mu} = \text{vol}_{\mathcal{F}} \times \mu$



# §1. 準備と動機

## (1.1) BOTT接続及びBOTTの消滅定理. ([B]参照)

余次元  $g$  foliation  $(M, \mathcal{F})$  の法束  $\perp \mathcal{F}$  には,  $GL(g; \mathbb{R})$  接続  $\nabla^B$  が葉方向に flat なものが存在し, これを BOTT接続 と呼ぶ. 従って  $\perp \mathcal{F}$  の Pontryagin 類  $P$  は, Chern-Weil 理論により  $\nabla^B$  の曲率  $\Omega^B$  を使って特性微分形式  $P(\Omega^B)$  により表せば, form として  $P(\Omega^B)|_{\text{葉}} \equiv 0$  を得る.

又,  $P$  は  $2g$  次不変同次多項式と考へると,  $k > g$  ならば  $P(\Omega^B) \equiv 0$ .

## (1.2) MILNORの不等式

MILNORの不等式 [ML]. 種数  $g$  の有向閉曲面  $\Sigma_g$  上の有向平坦  $\mathbb{R}^2$ -束  $\xi$  に対し,

$$|\langle e(\xi), [\Sigma_g] \rangle| \leq \frac{1}{2} |\chi(\Sigma_g)| = g-1.$$

これは, 以下の系に高次元化される.

MILNOR-SULLIVAN-GROMOV-SMILLIEの不等式 [GS].

有向平坦  $\mathbb{R}^g$ -束  $\xi$  の euler 類  $e(\xi)$  は, 有界 cohomology として得られ, この norm は,  $\|e(\xi)\| \leq 2^g$  なる評価がある. 有向閉  $g$ -多様体  $X$  上の束  $\xi$  に対しては, GROMOVの単体的体積  $\|X\|$  を使って

$$|\langle e(\xi), [X] \rangle| \leq 2^g \cdot \|X\|.$$

以上は葉層構造もしくは平坦構造による特性類への制限である.

(1.3) HIRSCH-THURSTON の定理.

平坦束に不変測度の存在を仮定すると更に強く以下が成り立つ。

HIRSCH-THURSTON の定理 [H-T]. 有向平坦  $S^0$  束  $\pi$ :

$$\begin{array}{c}
 S^0 \longrightarrow E \\
 \text{0次元球面} \quad \times \\
 \text{に} \text{対し, holonomy 不変測度 } \mu \text{ が} \\
 S^0 \text{ 上に存在するとき} \quad e(\eta) = 0 \in H^{g+1}(X; \mathbb{R}).
 \end{array}$$

これはより一般に以下の形で得られる。

平坦束  $\pi: E \rightarrow X$  の fibre  $F$  は compact な台をもち、holonomy 不変測度  $\mu$  が存在すれば、

$$\phi_*: H_*(E; \mathbb{R}) \longrightarrow H_*(X; \mathbb{R}) : \text{全射}$$

$$\phi^*: H^*(X; \mathbb{R}) \longrightarrow H^*(E; \mathbb{R}) : \text{単射}$$

$\mu$  の台が一点ならば水平切断を、 $\pi$  の台が有限集合ならば多重切断を指すことを意味し、 $\mathbb{R}$  係数では "transfer" (右の左逆写像、もしくは  $\phi^*$  の右逆写像) が構成できる。この定理は一般の  $\mu$  に対するように transfer が存在するというのである。

(1.4) 横断的不変測度 と foliation cycle ([5] 参照)

foliation  $(M, \mathcal{F})$  の foliation cycle  $C$  とは、葉に接した閉曲  $\gamma$  (  $p = \text{葉の次元}$  ) のことである。"葉に接する" とは、任意の葉  $L$  に制限して  $\omega|_L = 0$  とする勝手な  $p$ -形式  $\omega$  に対し  $\langle \omega, C \rangle = 0$  と

と示すことである。  $M$  が閉,  $\mathcal{F}$  が有向ならば (以後  $L$  が有向と  
 して仮定する) foliation cycle と 横断的不変測度は同値  
 の概念であり, 大雑把には, 測度  $\mu$  に対して foliation cycle  $C$  は

$$\langle \omega, C \rangle = \int_{M/\mathcal{F}} \left( \int_L \omega \right) d\mu(L)$$

により与えられる, 逆にこの逆で (つまり Radon-Nikodym で) 与えられる。  
 最も簡単 (しかし極端) な例として, compact 葉  $L_0$  なら, foliation cycle  
 " $\int_{L_0}$ " と表わすか, 横断測度としては,  $L_0$  の支切りに教える Dirac  
 測度を与えている。

法束  $L$  の特性種類は, 横断方向には制御しにくいので (葉層束の  
 fibre 区々) 葉方向への挙動を調べる。 (1.1) ~ (1.3) を見ればよく。  
 foliation  $(M, \mathcal{F})$  に横断不変測度  $\mu$  が存在し  $L$  と  $e(L, \mathcal{F})$  の  
 葉方向への挙動を調べるに使えるか。 このとき  $\mu$  に対応する  
 foliation cycle  $C = C_\mu$  があるので,  $\underline{e(L, \mathcal{F}) \cap C} \in H_{p-2}(M; \mathbb{R})$   
 という量を調べる。 これが本稿の第 1 の目標である。  $C$  が compact 葉  
 $L_0$  で与えられる場合,  $e(L, \mathcal{F}) \cap C = e(L, \mathcal{F}) \cap [L_0] = [L_0] \stackrel{\cong}{=} [C]^2$   
 が成立するので,  $\underline{\text{自己交差 } [C]^2}$  も調べることにする。

(1.5) Leafwise de Rham cohomology

さて  $e(L, \mathcal{F})$  を葉方向に制限することを精察に考へよう。 各葉上の

微分形式で、 $M$ 上横断方向にも  $C^\infty$  形式のと、葉方向の外微分  $d_F$  (つまり、複体  $(\Omega^*(F) = C^\infty(M; \Lambda^*(E^*F)), d_F)$ ) により得られる "leafwise cohomology"  $H^*(F)$  を考へる。  $H^*(M; \mathbb{R})$  からの自然な制限写像による  $e(\Omega^*(F))$  の像を  $\underline{E}(\Omega^*(F))$  と表す。

更に、葉に沿った holonomy に対し 擬不変 (quasi-invariant) の横断的測度の class  $\mu$  が与えられているとき、葉方向の  $C^\infty$  微分形式  $\varphi \in \Omega^*(F)$ 、横断方向には  $\varphi$  と  $d_F \varphi$  が共に  $\mu$ -可測で  $\mu$ -ess 有界形式の  $\varphi$  により得られる leafwise cohomology を  $H^*(F, \mu)$  と表し、 $\varphi \in \Omega^*(F)$  の制限を  $\underline{E}(\Omega^*(F), \mu)$  と表す。特に  $\mu = \lambda$  として、横断的 Lebesgue 測度の class を表す。 ([22], [H-M-2] 参照)

本稿の第2の目標は、 $\underline{E}(\Omega^*(F), \mu)$  と同値な  $\underline{E}(\Omega^*(F), \mu)$  を 横断 euler 類 と呼ぶ。  $\mu$  が 不変測度 の場合、 $\underline{E}(\Omega^*(F), \mu)$  は  $[C_\mu]$  と  $\cap$  して  $\underline{E}(\Omega^*(F), \mu) \equiv \underline{E}(\Omega^*(F), \mu) \cap [C_\mu] = e(\Omega^*(F)) \cap [C_\mu]$  が成立する。これを 平均横断 euler 類 と呼ぶ。 注: 不変測度  $\mu$  に対しては、平均横断 euler 類の消滅よりも、横断 euler 類の消滅の方が強い。(例えば、 $C_\mu$  が compact 葉で与えられた場合は、葉の Poincaré-双対性により同値である。)

1.6) foliation cycle に対して MILNOR の不等式、及び M-S-G-S の不等式の拡張が得られている。 ([MT-2] [MT-3] を参照)

## §2. 自己交叉の消滅.

横断的不変測度  $\mu$  は, atomic part  $\mu_a$  と non-atomic part  $\mu_c$  に一意的に分解して,  $\mu = \mu_a + \mu_c$  とする.

Foliation cycle の自己交叉について, 次の結果が得られる.

証明等については [H.M-1] あるいは [M-1] を参照.

**定理 1.** 1)  $Z$  の横断不変測度  $\mu$  及び  $\mu'$  に対し,

$$[C_\mu] \cdot [C_{\mu'}] = [C_{\mu_a}] \cdot [C_{\mu'_a}]$$

→ より non-atomic part は交叉しない.

2) 特に,  $\mu$  が non-atomic なら,  $[C_\mu]^2 = 0$ .

逆に atomic な場合の典型として, compact set  $L_0$  を考える.

$L_0/L_0$  は (1.1) にあるように平坦  $R^3$  束だから, M-S-G-S の不等式が直接適用でき,  $[L_0]^2$  に制限を与えることが出来る. 一方,

逆に,  $L_0$  上には  $e(\zeta) \neq 0 \in H^0(L_0; \mathbb{R})$  とする平坦  $R^3$  束  $\zeta$  を

与えると, 閉多様体上の foliation に変更することが出来る.  $L_0$

は,  $\zeta$  の 0-切断として実現される.

### §3. 平均横断EULER類 $E(L\pi, \mu)$ の消滅定理.

2つの特別なクラスの横断不変測度に対して 平均euler類の消滅を述べる。

(3.1) AVERAGING SEQUENCE ([S], [G-P], [P] 参照)

$(M, \pi)$  の葉  $\sigma$  上に定義された今領域 (つまり,  $M$  に "leaf topology" としたときの  $\sigma$ -次元領域) の列  $\{D_k\}$  で,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{vol } \partial D_k}{\text{vol } D_k} = 0$

と仮定する averaging sequence  $\{D_k\}$  において  $\sigma$ -次元の列  $C_k = \frac{1}{\text{vol } D_k} \int_{D_k}$  の弱収束極限  $C$  は, 非自明な foliation cycle と呼ぶ。これを averaging sequence  $\{D_k\}$  の asymptotic cycle と呼ぶ。成長度が 劣指数的 (subexponential) の葉の metric ball の列  $\{B(x_0, r)\}_{r \rightarrow \infty}$  が重要な列である。

**定理 2** [H-H] Averaging sequence  $\{D_k\}$  の asymptotic cycle  $C_\mu$  の台が有限枚の compact 葉の和であれば,  $E(L\pi, \mu) = 0$ .  
但し, 各  $D_k$  は,  $C_\mu$  の台とは交わらないとす。

(3.2) 第2の foliation cycle のクラスとして次の様子を考へる。葉と同じ次元の閉部分多様体  $N \subset M$  で,  $L\pi|_N$  が丁度  $N \hookrightarrow M$  の法線となるものの管状近傍  $U(N)$  を考へる。  $U(N) \rightarrow N$  の各 fibre は,  $\pi$  に横断的な  $g$ -次元円板  $D^g$  と仮定する。

定理3 [H+H2] の様な  $U(N)$  に台をもつ 横断不変測度  $\mu$  が  
横断的に non-atomic ならば,  $\int(Lf, \mu) = 0$

殆んど全く同値であるが, 次の系に言いかえらば,

定理3'  $X$  上の有向 foliated (open-)  $D^2$ -束  $\xi$  が non-atomic な不変測度  $\mu$  をもてば,  $e(\xi) \in H^2(M; \mathbb{R})$ .

(3.3) 定理2 は, 不変測度  $\mu$  は atomic だが, そのおりに  
"amenable" な object が存在することにより,  $\int(Lf, \mu)$  が  
消滅する. という主張である. 一方 定理3 は, non-atomic  
な不変測度  $\mu$  が自身から, 位相的な制約により "amenable  
な object となることを意味する.

定理3 の証明は 2通りあり, 第1には, 定理1 (52)  
系を見做すことが出来る. 第2には (こちらの方が先に見つかった  
以下に述べる "blow up は HIRSCH-THURSTON の定理  
適用可能" という 定理2 の証明の手法を, 更に巧妙に使う  
ものである. 筆者は気に入っているが詳しくは略.

以上述べた通り, 定理2 では averaging sequence を,  
定理3 では non-atomic な不変測度を amenable な  
object であると主張しようとしている. 従って 自然に以下が  
予想されている.

予想 1 横断不変測度  $\mu$  が non atomic ならば  $E(\nu_{\mathcal{F}}, \mu) = 0$ .

予想 2  $C_{\mu}$  が (発散する) averaging sequence の asymptotic cycle ならば,  $E(\nu_{\mathcal{F}}, \mu) = 0$ .

予想 3 予想 1, 2 共更に強く,  $E(\nu_{\mathcal{F}}, \mu) = 0$ .

### (3.4) BLOWING UP (CH-M-Z 参照)

$(M, \mathcal{F})$  の compact 葉  $L_0$  を blowup して  $\nu_{\mathcal{F}}|_{L_0}$  の射影線  $P = P(\nu_{\mathcal{F}}|_{L_0})$  におよびの拡大を  $\tilde{M}$ ,  $\phi: \tilde{M} \rightarrow M$  を blowing down とすると, 次の 1) ~ 3) が成り立つ。

1) 余次元  $q$  の  $C^{\infty}$  foliation  $\tilde{\mathcal{F}}$  が  $\tilde{M}$  上に存在し,  $\text{Id} = \phi|_{\tilde{M} \setminus P}: \tilde{M} \setminus P \rightarrow M \setminus L_0$  は foliation を保つ。

2)  $\tilde{\mathcal{F}}|_P$  は 余次元  $(q-1)$  foliation で, 平坦  $\mathbb{R}^2$ -束  $\nu_{\mathcal{F}}|_{L_0}$  の射影化に一致する。

3)  $\phi: \tilde{M} \rightarrow M$  は leafwise に quasi-isometric.

注) 定理 3 の証明では, 葉より高い次元の saturated の閉部分多様体の blowing up を考へるか. 2) のみ然るべく修正すればよい。

### (3.5) 定理 2 の証明

簡単の為,  $\mu$  の台は compact 葉  $L_0$  1 枚とする。従って,  $C_{\mu} = \int_{L_0}$  と考へてよい。

さて, (3.4) の操作で,  $C_{\mu}$  を定義する averaging sequence  $\{D_k\}$  は,  $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}})$  の averaging seq. になる。



この弱収束極限  $\hat{C}$  とすると,  $\phi_* \tilde{C} = C$  とおき得るから,  
 $\text{supp } \hat{C} \subset P$ . (念のため  $P$  の二重被覆  $\tilde{C}$  として,  $L\mathbb{F}/L_0$  に随伴  
 する平坦  $S^{g-1}$  束  $\eta \wedge \tilde{C}$  と対応付けて  $\hat{C}$  としておく  
 と.  $\hat{C}$  は  $\eta$  に対し holonomy 不変字測度を定義して,  
 HIRSCH-THURSTON の定理より

$$0 = e(\eta) = e(L\mathbb{F}/L_0) \in H^g(L_0; \mathbb{R}).$$

特に,  $\Sigma(L\mathbb{F}, \mu) = e(L\mathbb{F}/L_0) \wedge [L_0] = 0$ .  $\square$

## §4. 葉層構造の AMENABILITY

擬不変な横断測度のクラス  $\mu$  に対する横断euler類  $E(\mu)$  を調べる為 群の amenability の概念と, "affine cocycle" の言葉を使つて, 葉層の groupoid の amenability に拡張する. これは, ZIMMER による "群作用の amenability" ([Z-1]) の analogy である.

### (4.1) 群作用の AMENABILITY. [Z-1. Chap.4]

局所 compact 第2可算位相群 (つまり可算離散群ではない)  $G$  が amenable であるとは,  $G$  上の有界連続関数  $f$  に対する  $G$ -不変な 平均 が存在することである. (これは  $G$  が noncompact だと, non-compact support があり, 有限加法性が持たないので 測度とは言わないのが普通の様である)が 任意の affine  $G$ -空間  $A$  に不動点が存在することと同値である. 但し,

定義: affine  $G$ -空間  $A$  とは,  $G$  が連続等長線形群  $\Gamma$  に作用する可算 Banach 空間  $E$  の双対  $E^*$  の単位球  $E^*_1$  の弱\*-位相における compact convex  $G$ -不変部分集合 (空でない) のことである.

注) Banach 空間  $E$  は,  $L^1(X, \mu)$ , {有界連続関数} などの "函数空間" と,  $E^*$  は  $L^\infty(X, \mu)$ , {Radon 測度} の弱\*-閉包 等. 測度, 平均などの空間を想像すると分かりやすい.

次にこれを "作用" に拡張する.  $(S, \mu) \in G$  が <sup>左から</sup>作用する Borel 空間  $S$  と,  $S$  上の  $G$ -有限で  $G$ -擬不変な測度,  $E$  を可算 Banach 空間と可算.  $S$  上の自明な  $E$ -束  $S \times E \rightarrow S$  への  $G$ -作用で,  $\mu$  が  $G$ -不変かつ fibrewise に等長なものを与える. つまり,

Borel 写像  $\alpha: S \rightarrow \{G \rightarrow \text{Isom}(E): \text{連続準同形}\}$  が与えられ、 $\alpha$  は  $\alpha: S \times G \rightarrow \text{Isom}(E)$  と見做す。この時、

(cocycle 条件)  $\alpha(x, g \cdot h) = \alpha(x, g) \alpha(xg, h)$ .  $\mu$ -a.a.  $x \in S$ ,  $\forall g, h \in G$

は、 $\alpha$  が  $G$  作用  $\alpha$  と与えておけることと同じ直である。すなわち、 $S$  上の各点  $x$  に  $E_x^*$  の空でない compact 凸部分集合  $A_x$  を指定する Borel 場

$\mathcal{A} = \{A_x\}_{x \in S}$  に対して、 $\alpha$  の dual 作用  $\alpha^*$  により  $\mathcal{A} = \bigcup_{x \in S} A_x \subset S \times E_x^*$  が  $\alpha^*$ -不変 (すなわち  $\mu$ -a.a.  $x \in S$ ,  $\forall g \in G$ ,  $\alpha^*(x, g) A_{xg} = A_x$ ) となる。

定義:  $G$  の  $(S, \mu)$  への作用が amenable であるとは、上の様式で

任意の  $\alpha^*$ -不変な affine 空間の Borel 場  $\mathcal{A}$  に対し、 $\mathcal{A}$  内の通過する  $\alpha^*$ -不変な可測切断が存在することである。

可測切断の集合  $F(S, \mathcal{A})$  は、 $L^\infty(S, E^*)$  の compact 凸集合となるから、上の定義は、 $F(S, \mathcal{A})$  という形の  $(\alpha^*$ -twisted) affine  $G$ -空間には不動点が存在する といかえらばよい。特に  $S = \{pt\}$  の場合は、 $G$  の amenability と全く一致する。

又、切断  $\phi$  が不変であるとは、affine cocycle  $\alpha^*$  を使えば以下の通り。

$$\alpha^*(x, g) \phi(xg) = \phi(x) \quad (\mu\text{-a.a. } x \in S, \forall g \in G)$$

#### (4.2) 葉層構造の AMENABILITY

基本的には、 $G$  の  $S$  への作用  $\alpha$ 、葉層  $S \times G = \{(x, g) = (\alpha(x) + y = xg)\}$  (の  $S$  への作用) と考え、作用の amenability を foliation による可測切断の存在性として考える。 (M. 7) の葉層として基本的には

(1)  $\mathcal{R}(\mathcal{F}) \subset M \times M$  これは葉の走める同値関係で定義される。

自然に  $2p+q (=m+p)$ -次元多様体の位相が入る。  $g \in \mathcal{R}(\mathcal{F})$  の source  $\varepsilon x$ , target  $\varepsilon y$  とすると  $g = (x, y) = (x, g \circ y)$  と記す。

(2)  $\mathcal{P}(\mathcal{F}) = \{ \gamma = (x, t, y) \mid (x, y) \in \mathcal{R}(\mathcal{F}), \gamma \text{ は } x \text{ から } y \text{ へ終る葉の path の homotopy 類} \}$ . これは foliation の 基本群 という。

他に、幾何的に重要な [linear-] holonomy 群  $\mathcal{H}(\mathcal{F})$  [ $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ ] が

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{R}(\mathcal{F})$$

という全射の列の中に存在する。これらの群 (または  $\mathcal{G}$  と記す)

は, source map  $\mathcal{S}$  と target map  $\mathcal{T} : \mathcal{G} \rightarrow M$  が連続となる自然な位相により, 位相群, Borel 空間となる。

$\mathcal{F}$  に擬不変の横断測度  $\mu$  が与えられると MoRiemann 計量から走る葉の Lebesgue 測度  $d\text{vol}_{\mathcal{F}}$  を使って (局所的な)  $M$  上の測度のうち  $\hat{\mu} = d\text{vol}_{\mathcal{F}} \times \mu$  を定める。

可分の Banach 空間  $E$  に対し  $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \text{Isom}(E)$  が  $(\mu)$  cocycle であるとは,  $\hat{\mu}$ -a.a.  $x \in M$ , (合成可能な)  $\forall g, h \in \mathcal{G}$ ,

$$\alpha(x, g \circ y) \cdot \alpha(y, h \rightarrow z) = \alpha(x, gh \rightarrow z)$$

が成り立つことである。

定義:  $(M, \mathcal{F}, \mu)$  が  $\mathcal{G}$ -amenable であるとは,  $\mathcal{G}$  の任意の cocycle  $\alpha : \mathcal{G} \rightarrow \text{Isom}(E)$ , 任意の  $\alpha$  を不変な affine 空間の Borel 場  $A = \{A_x\}_{x \in M}$  (i.e.,  $\hat{\mu}$ -a.a.  $x \in M$ ,  $\forall (x, g \circ y) \in \mathcal{G}$ ,  $\alpha(g)A_y = A_x$ ) に対し,

$\mathcal{A}$  の  $\alpha^*$ -不変な Borel 切断が存在することである。特に  $\mathcal{G} = \mathcal{R}(F)$  の場合、単に amenable,  $\mathcal{G} = \mathcal{P}(F)$  の場合、completely amenable ということになる。

以下に、葉層束  $F \rightarrow \frac{M}{G}$  の場合の紹介を与える。

- 1) 葉層束の global holonomy が 群  $G$  の  $(F, \mu)$  への amenable な作用から得られているならば、 $(M, \mathcal{F}, \mu)$  は amenable。
- 2) 底空間  $B$  の基本群が amenable ならば、任意の擬不変横断測度に対し、completely amenable。
- 3) (1) の補足と (2) 群  $G$  が amenable ならば  $G$  の作用は amenable。更に、等質空間  $S = G/H$  への作用が amenable であることは、 $H$  が amenable 群であることと同値。

その他の紹介も含め、以上については、[H-M-2], [Z-1] を参照せよ。

追加 上述の群  $G_1$  の全射  $G_1 \rightarrow G_2$  において、 $(M, \mathcal{F}, \mu)$  が  $G_1$ -amenable ならば、 $G_2$ -amenable。

## §5. 横断EULER類 $E(LF, \mu)$ の消滅

以下に  $E(LF, \mu)$  の消滅定理を2つ述べよう (定理4.5). 一番弱い amenability だけを仮定すると,  $\mu$  のクラスを, 横断 Lebesgue 測度  $\lambda$  以下に1だけおぼやかし. 一般の  $\mu$  に対しては complete  $(L(F))$ - (で何か) amenability を仮定する. 証明は, HIRSCH-THURSTON の定理を leafwise cohomology を書き直した物 (5-2) を使えば容易に得られる (5-3).

### (5.1) 消滅定理. [H-M-2]

定理4.  $\lambda$  に対し絶対連続な  $\mu$  について  
 $(M, F, \mu)$  が "amenable" ならば  $E(LF, \mu) = 0$ .

系.  $(M, F, \lambda)$  が "amenable" ならば  $e(LF)^3 = 0 \in H^3(M; \mathbb{R})$

定理5.  $(M, F, \mu)$  が  $L(F)$ -amenable ならば  $E(LF, \mu) = 0$

注)  $e(LF)^3 \neq 0$  となる  $C^2$  foliation の存在は今のところ知られていない. 系の証明は以下の系に示せばよい.  $H^*(RF)$  として横断方向の volume  $g$ -form の生成する  $\Omega^*(M)$  の基底  $L\Omega^*(RF)$  のコホモロジーを表す. Poincaré duality より自然な同型写像  $\Phi$ :  
 $H^2(F, \lambda) \times H^*(RF) \rightarrow H^{*+2}(M; \mathbb{R})$  が  $\int_M \Phi(\varphi, \psi) \wedge \lambda = \int_M \varphi \wedge \psi$   
 として得られる. (1.1) より  $e(LF)^2 = P_1(LF) \in H^{2g}(RF)$  と表されるので  $e(LF)^3 = e(LF) \wedge e(LF)^2 = \Phi(e(LF), P_1(LF)) = \Phi(E(LF, \lambda), P_1)$  とおき, 定理4より  $E(LF, \lambda) = 0$  なるので消滅する  $\square$

(5.2) HIRSCH-THURSTON の定理.

$L\mathcal{F}$  は有向射影化  $S^{q-1}$ -束  $S(L\mathcal{F}) \xrightarrow{\pi} M$ , 各点  $x \in M$  の fibre を  $S_x$  と記す.  $S(L\mathcal{F})$  上の余次元  $q$  foliation  $\tilde{\mathcal{F}} = \pi^*\mathcal{F}$  には,  $\mathcal{F}$  と全く同様の擬不変横断測度  $\mu$  がある.  $\mathcal{F}$  と  $\tilde{\mathcal{F}}$  の leafwise cohomology  $H^*(\mathcal{F}, \mu)$  と  $H^*(\tilde{\mathcal{F}}, \mu)$  の間の写像  $\pi^*$  と同値である.

補題-1. (HIRSCH-THURSTON, [H-M-2]) 擬不変横断測度  $\mu$  に対し, 各  $S_x$  上の確率測度  $\tilde{\mu}_x$  の Borel 場  $\tilde{\mu} = \{ \tilde{\mu}_x \mid \tilde{\mu}\text{-a.a. } x \in M \}$  で, 葉に沿った linear holonomy の射影作用 (つまり,  $L(\mathcal{F})$  の射影作用) で不変対称が存在すれば,  
 $\pi^*: H^*(\mathcal{F}, \mu) \rightarrow H^*(\tilde{\mathcal{F}}, \mu)$  は単射.

系. このとき,  $E(L\mathcal{F}, \mu) = 0 \in H^0(\mathcal{F}, \mu)$

系の証明  $S(L\mathcal{F})$  上  $\tilde{\mathcal{F}}$  の法線  $L\tilde{\mathcal{F}}$  の球面束  $S(L\tilde{\mathcal{F}})$  は tautological な切断を持つので  $e(L\tilde{\mathcal{F}}) = 0 \therefore E(L\tilde{\mathcal{F}}, \mu) = 0$   
 $\pi^*$  は単射で  $\pi^*(E(L\mathcal{F}, \mu)) = E(L\tilde{\mathcal{F}}, \mu)$  だから  $E(L\mathcal{F}, \mu) = 0 \quad \square$ .

補題 1 の証明は, 1) leafwise には  $S(L\mathcal{F})$  は平坦束であること (C.T.) により,  $\tilde{\mu}$  は  $\tilde{\mu}$ -a.a. 葉  $L$  上の平坦束の不変測度を与えていること, 2)  $\tilde{\mu}$  により transfer map が構成出来ること, 上の原理に従って少し注意して書き下せばよい.

(5.3). 定理 4.5 の証明.

$\mathcal{L}\mathcal{F}$  の global な Borel-framing. により (測度論的には、注意の束は自明!)  $\mathcal{L}\mathcal{F}$  を自明束  $M \times \mathbb{R}^2$  と同一視し,  $S(\mathcal{L}\mathcal{F})$  の fibre  $S_x$  は標準的に  $S^1$  と見做す. このとき,  $E \in S^1$  上の連続関数全体の可算 Banach 空間とし,  $\text{Isom}(E)$  の cocycle を調べることにする.

先ず、かり易いので 定理 5 を先に示す.  $\beta: \mathcal{L}(\mathcal{F}) \rightarrow GL^+(\mathbb{R})$  とし, 上の自明化に従って得られる自然な cocycle とする. ( $\forall x \in M$ ,  $\forall (x_1 \xrightarrow{g} y), \forall (y_1 \xrightarrow{h} z) \in \mathcal{L}(\mathcal{F})$ ,  $\beta(g) \cdot \beta(h) = \beta(g \cdot h)$ ; この様子は  $\mu$ -a.a. として  $\forall x \in M$  に対成り立つため "strict cocycle" といふ.)  $\beta$  を  $GL^+(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Diff}(S^1) \rightarrow \text{Isom}(E)$  と合成した cocycle を  $\alpha$  とおく. 又  $A = A_x \subset E_x^*$  とし,  $S^1$  上の確率測度全体を  $\mathcal{P}(S^1)$  とし,  $A$  は  $E_x^*$  の compact 凸集合で、当然  $\alpha^*$ -不変 ( $\text{Diff}(S^1)$ -不変) とする.  $(M, \mathcal{F}, \mu)$  は  $\mathcal{L}(\mathcal{F})$ -amenable と仮定し、このとき、 $\alpha^*$ -不変の Borel 切断  $\{\mu_x \in A_x : x \in M\}$  が得られ、補題 1 (5.2) の仮定を満たし、系より  $E(\mathcal{L}\mathcal{F}, \mu) = 0$ .

定理 4 の証明は、横断 Lebesgue 測度  $\lambda$  に対し、上の  $\alpha$  が  $\mathcal{R}(\mathcal{F})$  上の  $\mu$ -cocycle と与えて (7.3) ことに注意すればよい.

これ詳しく説明する. holonomy が trivial である葉の和集合  $X \subset M$  は、比較的容易にわかる様に、可算葉の集合であるから  $\lambda$ -null とは限らない. しかし、"linear holonomy" が自明にである葉の和集合



$Y \subset X$  は、少し丁寧に見ておけば、 $\hat{\lambda}$ -null である [H-K].

従って、特に、 $\beta(x \mapsto y) \in GL(M; \mathbb{R})$  は、 $\hat{\lambda}$ -a.a.  $x \in M$  に  
対し、 $g$  によらず  $\alpha$  と  $\mu$  が一致して決まってくる。既に、MIV  
上で、 $\alpha$  は cocycle 条件を strict に満たし、 $\alpha$  は  $(M, \mathcal{F}, \lambda)$  の  
cocycle となる。  $\mu$  が  $\lambda$  に対し絶対連続であれば、当然  
 $\mu$ -cocycle になる。 あるいは定理 5 と同様である。  $\square$

### REFERENCES

- [B] BOTT, R. Lectures on characteristic classes of foliations.  
Springer Lect. Notes in Math. 279 (1972).
- [G] GROMOV, M. Volume and bounded cohomology. Publ. Math. I.H.E.S.  
56 (1982), 5-100.
- [G-P] GOODMAN, S. & J. PLANTE Holonomy and averaging in foliated  
sets. J. D. G. 14 (1979), 401-407.
- [H-1] HURDER, S. Global invariants for measured foliations.  
Trans. A.M.S. 280 (1983), 367-391.
- [H-2] HURDER, S. The Godbillon measure of amenable foliations.  
J. D. G. 23 (1986), 347-365.
- [H-K] HURDER, S. & A. KATOK Ergodic theory and Weil measures for  
foliations. Annals of Math. 126 (1987), 221-275.
- [H-M-1] HURDER, S. & Y. MITSUMATSU On the intersection product  
of transverse invariant measures. to appear.

- [H-M-2] HURDER, S. & Y. MITSUMATSU    The transverse euler class  
for amenable foliations. Preprint.
- [H-T] HIRSCH, M. & W. THURSTON    Foliated bundles, invariant  
measures, and flat bundles. *Ann. of Math.* 102 (1975), 369 ~ 390.
- [ML] MILNOR, J.    On the existence of a connection with curvature zero.  
*Comment. Math. Helv.* 32 (1958), 215 ~ 223.
- [MT-1] MITSUMATSU, Y.    On the self-intersection of foliation cycles. <sup>To appear.</sup>
- [MT-2] MITSUMATSU, Y.    Milnor's Inequality for 2-dimensional  
asymptotic cycles. Preprint.
- [MT-3] MITSUMATSU, Y.    Thesis. Univ. of Tokyo (1985).
- [P] PLANTE, J.    Foliations with measure-preserving holonomy.  
*Ann. of Math.* 102 (1975), 327 ~ 361.
- [S] SULLIVAN, D.    Cycles for the dynamical study of foliated manifolds  
and complex manifolds. *Inu. Math.* 36 (1976) 225 ~ 255.
- [Z-1] ZIMMER, R.    Ergodic Theory and Semisimple Groups.  
Birkhäuser, (1984).
- [Z-2] ZIMMER, R.    Global structure and measure theory: a new  
cohomology theory for foliations and ergodic Lie group  
actions. Preprint, (1979)

## 2次元ブレイドについて

阪市大・理 鎌田 聖一

1次元の結び目や絡み目を研究する手段として、それらをブレイド表示する方法はかなり有効である。その一つの例として、1次元の結び目や絡み目の群はブレイドを用いたある種の Wirtinger 表示群の言葉で特徴付けられることが知られている (Alexander-Artin の定理)。高次元 (3次元以上) の結び目や絡み目の群については、Kervaire 条件を満たすことが必要十分である。2次元結び目や絡み目の群については、リボン型を除けば、あまり知られていない。ここで論じる1次元ブレイドの拡張である2次元ブレイドの概念を用いるとき、2次元結び目や絡み目の群の特徴付けを、Alexander-Artin の定理の自然な類似として得ることができる。[K]を参照。

### § 1. 2次元ブレイドとは

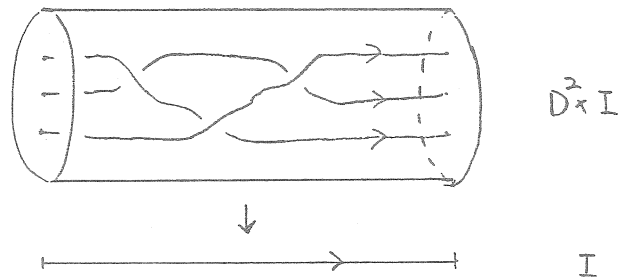
2次元ブレイドは1990年に O. Viro が1次元のブレイドの類似として導入した概念である。比較のため、1次元のブレイドの説明から始める。

$D^2$ を2次元円板、 $I$ を1次元円板、 $\widetilde{X}_m$ を $D^2$ 上のある  $m$  個の点から成る集合とする。

1次元  $m$ -ブレイドとは、 $D^2 \times I$  に滑らかに埋め込まれた有向コンパクト1次元多様体  $b$  で次を満たすものをいう。

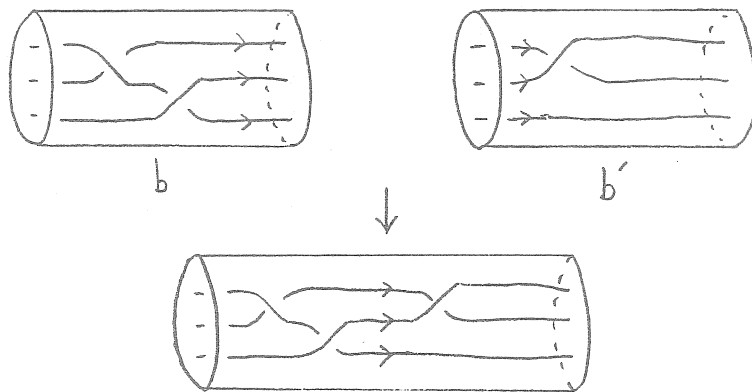
(1) 写像  $b \subset D^2 \times I \rightarrow I$  は  $I$  の  $m$ -fold covering map となっている。また、 $b$  の向きはこの写像により  $I$  の向きから誘導される。

$$(2) \partial b = \widetilde{X}_m \times \partial I$$



2つの1次元  $\mathfrak{m}$ -ブレイド  $b, b'$  が同値であるとは, fiber-preserving かつ  $D^2 \times \partial I$  上では恒等写像となる  $D^2 \times I$  の ambient isotopy で移りあうときをいう.

2つの1次元  $\mathfrak{m}$ -ブレイド  $b, b'$  の積は, 次の図のように定める. この積は同値関係を法として唯一定まる.



1次元  $\mathfrak{m}$ -ブレイドの同値類全体は, この積により群をつくる. この群を (1次元)  $\mathfrak{m}$ -ブレイド群と呼ぶ.

定義 1. 1. 2次元  $m$ -ブレイドとは、次の性質を満たす  $D^2 \times D$  ( $D$ は2次元円板) 内に滑らかに埋め込まれた有向コンパクト2次元多様体  $F$ をいう.

(1) 写像  $F \subset D^2 \times D \rightarrow D$  は  $D$  の  $m$ -fold branched covering map となっている. また,  $F$  の向きはこの写像により  $D$  の向きから誘導される.

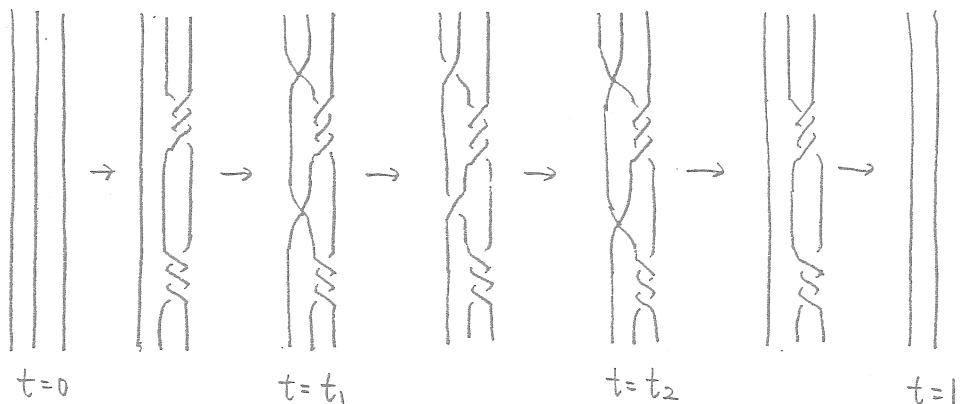
$$(2) \partial F = \widetilde{X}_m \times \partial D$$

(3)  $F \rightarrow D$  の各 branch point における branching indices は  $(2, 1, \dots, 1)$  である.

最後の条件 (3) は Viro の original な定義には含まれていないが, これを仮定することにより議論がかなり明快となるので我々は2次元ブレイドの定義にこれを含めることにする. 実際2次元結び目群の特徴付けに, この仮定が必要になる.

2次元円板  $D$ を適当に  $I_1 \times I_2$  と同一視し (パラメータを入れる),  $F$ を各  $I_1 \times \{t\}$  ( $t \in I_2$ ) 上に制限したものを  $b_t$  とする.  $\{b_t \mid t \in I_2\}$  は有限個の例外点  $t = t_1, \dots, t_n$ を除いて, 1次元  $m$ -ブレイドの連続的な列をつくっている.

例 1



ただし，例外点の付近では，以下のいずれかとする．

$$(ア) \quad || \rightarrow \rangle( \rightarrow X \rightarrow \sphericalangle \rightarrow \sphericalangle$$

$$(イ) \quad || \rightarrow \rangle( \rightarrow X \rightarrow \sphericalangle \rightarrow \sphericalangle$$

$$(ウ) \quad \sphericalangle \rightarrow \sphericalangle \rightarrow X \rightarrow \rangle( \rightarrow ||$$

$$(エ) \quad \sphericalangle \rightarrow \sphericalangle \rightarrow X \rightarrow \rangle( \rightarrow ||$$

もちろん  $D$  と  $I_1 \times I_2$  の同一視の仕方によって，1つの2次元ブレイド  $F$  から様々な列  $\{b_i\}$  が得られる．それらが同じ2次元ブレイドを表わすことを見るのは難しい．この問題点は § 5 で述べられる  $D$  上のグラフ (chart と呼ばれる) を用いる方法でかなり解決される．

## § 2. 2次元ブレイドの同値関係と sum

2次元ブレイドの同値関係や sum に関しても，1次元ブレイドのときと同様に定義される．

定義 2. 1. 2つの2次元  $m$ -ブレイドが同値であるとは，fiber-preserving かつ  $D^2 \times \partial D$  上では恒等写像となる  $D^2 \times D$  の ambient isotopy で移りあうときをいう．

注意. 2つの2次元  $m$ -ブレイドが同値であるとき, それらの branch points の数は等しい.

$F_1 \subset D^2 \times D_1$ ,  $F_2 \subset D^2 \times D_2$  を2次元  $m$ -ブレイドとする.  $D_1$ ,  $D_2$  をそれぞれ  $I \times [0, 1/2]$ ,  $I \times [1/2, 1]$  とする. 定義1. 1の(2)の条件に注意すると  $F = F_1 \cup F_2 \subset D^2 \times (D_1 \cup D_2) = D^2 \times D$  が2次元  $m$ -ブレイドであることがわかる. この  $F$  は,  $D_1, D_2$  のパラメータの取り方によらず, 同値関係を法として唯一定まる.

定義2. 2. 上の  $F$  を2次元ブレイド  $F_1$  と  $F_2$  の sum といひ,  $F_1 \cup F_2$  で表わす.

2次元  $m$ -ブレイドの同値類全体はこの sum により, 可換な半群をつくる. 単位元は自明な2次元  $m$ -ブレイド ( $\widetilde{X}_m \times D \subset D^2 \times D$  に同値なもの) である.

### § 3. 閉2次元ブレイド

$F \subset D^2 \times D$  を2次元  $m$ -ブレイドとする.  $\partial F = \widetilde{X}_m \times \partial D \subset D^2 \times \partial D$  より,  $F$  は  $D^2 \times S^2 = D^2 \times (D \cup D')$  内の有向閉曲面  $F^\wedge$  に自然に拡張される. ただし,  $F^\wedge$  の  $D^2 \times D'$  への制限は  $\widetilde{X}_m \times D'$  とする.

定義3. 1. 上の  $F^\wedge$  を  $F$  の closing in  $D^2 \times S^2$  又は, 閉2次元  $m$ -ブレイド in  $D^2 \times S^2$  という.

$D^2 \times S^2$  を  $R^4$  内に標準的に埋め込まれた2次元球面の正則近傍と同一視するとき,  $F^\wedge$  は  $R^4$  内に滑らかに埋め込まれた有向閉曲面とみなせる.

定義 3. 2. 上の  $F^{\wedge}$  を  $F$  の closing in  $R^4$  又は, 閉 2 次元  $m$ -ブレイド in  $R^4$  という.

$F^{\wedge}$  のオイラー標数は,  $F$  の branch points の数を  $n$  とするとき  $2m - n$  である. また,  $F^{\wedge}$  の連結成分の数は  $m$  以下である.

定理 3. 3 ( Viro ). 任意の  $R^4$  に滑らかに埋め込まれた有向閉曲面は, ある閉 2 次元ブレイド in  $R^4$  に ambient isotopic である.

これにより, 2 次元結び目や絡み目の研究を 2 次元ブレイドを通して行う事ができる.

定義 3. 4.  $S$  を  $R^4$  に滑らかに埋め込まれた有向閉曲面とする.  $S$  の braid index  $b(S)$  を次で定義する.

$$b(S) = \min \{ S \text{ と ambient isotopic となる閉 2 次元ブレイド in } R^4 \text{ の degree } m \}$$

#### § 4. 2 次元結び目群の特徴付け

$m \geq 2, n \geq 0$  を整数とする.  $W_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) を 1 次元  $m$ -ブレイド,  $f_i$  ( $i=1, \dots, n$ ) を  $W_i$  が導く階数  $m$  の自由群  $\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  上の (Artin の) 自己同型とする.

定義 4. 1. 次の群表示を  $(m, n)$ -表示と呼ぶ.

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid f_i(x_1) = f_i(x_2) \quad (i=1, \dots, n) \rangle$$

$(m, n)$ -表示は Wirtinger 表示である. 無限巡回群は  $(1, 0)$ -表示を持つとする.



定義 4. 2.  $n$  個の 1 次元  $m$ -ブレイド  $W_1, \dots, W_n$  が  $\partial$ -条件を満たすとは、次を満たす  $\varepsilon_i = 1$  又は  $-1$  が存在するときをいう。

$$\prod_{i=1}^n W_i^{-1} \sigma_1^{\varepsilon_i} W_i = 1$$

ここで  $\sigma_1$  は

$$\begin{array}{cccc} & 1 & 2 & \dots & m \\ & \diagdown & & & \diagup \\ \sigma_1 & & & & \end{array}$$

上の定義は  $e_1$  を  $\sigma_1$  が導く自由群上の自己同型とするととき、

$$\prod_{i=1}^n f_i^{-1} e_1^{\varepsilon_i} f_i = 1$$

と同じである。

定理 4. 3. 任意の整数  $c \geq 1, g \geq 0$  に対して、ある群  $G$  が  $c$  個の連結成分を持つ種数  $g$  の有向閉曲面の  $R^4$  への埋め込みの群となる必要十分条件は、 $G$  が次を満たすことである。

(1)  $G$  は  $\partial$ -条件をみたすある  $(m, n)$ -表示を持つ。ただし、 $m, n$  は  $2m - n = 2c - 2g$  を満たすある整数。

(2)  $G/[G, G]$  はランクが  $c$  の自由アーベル群。

系 4. 4. 群  $G$  が 2 次元結び目群となる必要十分条件は、

(1)  $G$  は  $\partial$ -条件をみたすある  $(m, 2m-2)$ -表示を持つ。

(2)  $G/[G, G]$  は無限巡回群。

この定理の必要性の証明は、与えられた  $R^4$  内の有向閉曲面を閉 2 次元ブレイドで表わすことで得られる。逆に十分性は、 $\partial$ -条件をみたす  $(m, n)$ -表示は、実際に 2 次元ブレイドで実現できることを示す。

#### § 5. 2 次元ブレイドの chart 表示

§ 1 で述べたように 1 次元ブレイドの列  $\{b_i\}$  によって 2 次元ブレイドを表わす方法では、 $D$  と  $I_1 \times I_2$  の同一視の仕方に大きく依存するた

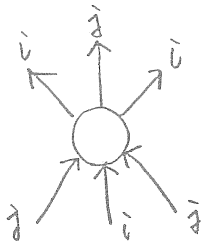
め、扱いやすいものではない。そこで chart と呼ばれる  $D$  上のグラフによって 2次元ブレイドを表示することを考える。

定義 5. 1.  $m \geq 2, n \geq 0$  を整数とする.  $(m, n)$ -chart とは,  $D$  の内部に immersed された有限グラフ  $\Gamma$  で次のようなものをいう.

(1)  $\Gamma$  の各頂点は黒又は白の色を持ち, 黒の頂点の個数が丁度  $n$  である. (白の頂点はいくつあってもよい)

(2)  $\Gamma$  の各辺やループには, 向きと  $\{1, \dots, m-1\}$  内の整数によるラベルが付けられている.

(3) 黒の頂点には丁度一本の辺が接続し, 白の頂点には丁度六本の辺が次のように接続している



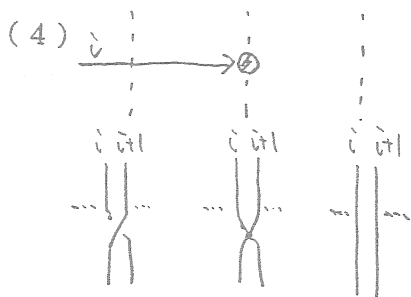
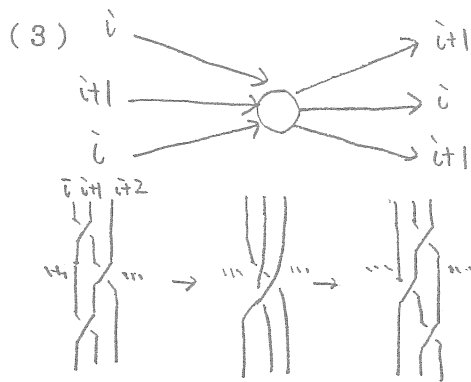
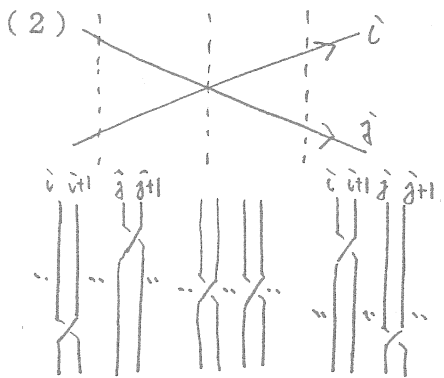
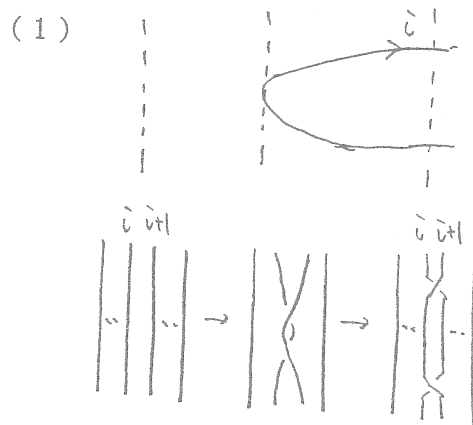
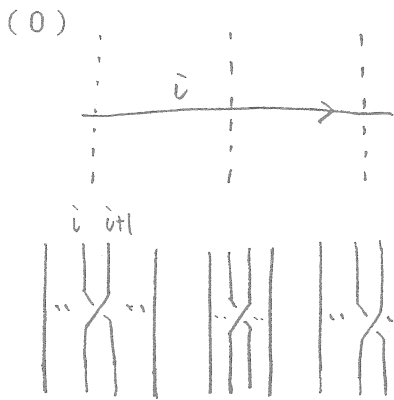
ただし  $j = i \pm 1$

(4)  $\Gamma$  の singularity は空又は double points からなり, それらはラベルの差が 2 以上である辺やループの交わりである.

定理 5. 2. 次の全射  $\rho$  が存在する.

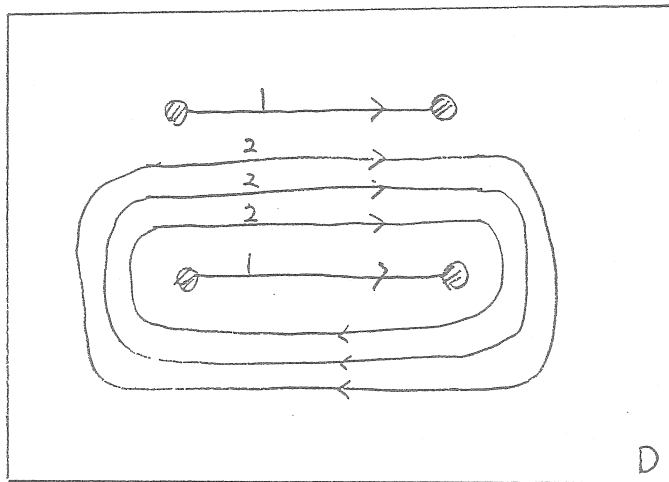
$$\rho : \{ (m, n)\text{-charts} \} \rightarrow \{ 2\text{次元 } m\text{-ブレイドで } n \text{ 個の branch points を持つもの} \} / \text{同値関係}$$

$\rho$  の正確な定義は述べないが、イメージは次のようなものである。  
 $\Gamma$  を  $(m, n)$ -chart とする。  $D$  と  $I_1 \times I_2$  の同一視を  $\Gamma \subset D \rightarrow I_2$  がモース関数となるようにとる。このとき  $\Gamma$  に対応する  $F = \rho(\Gamma)$  は局所的に次のようになっている。



次の例は、例 1 にある 3-ブレイドを (3, 4)-chart で表わしたものである。

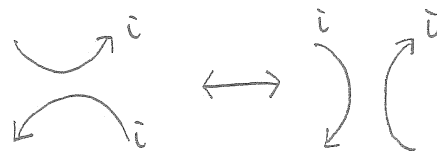
例 2



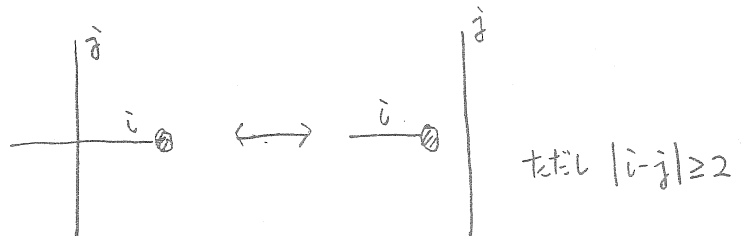
D のパラメータ ( $I_1 \times I_2$  との同一視) を変えても、容易に対応する  $\{b_i\}$  を得ることができる。

補題 5. 3. 次の 4 つの変形で移りあう 2 つの charts が表わす 2 次元ブレイドは同値である。

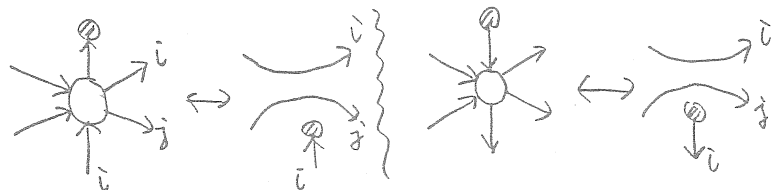
(1) 次の局所的な変形

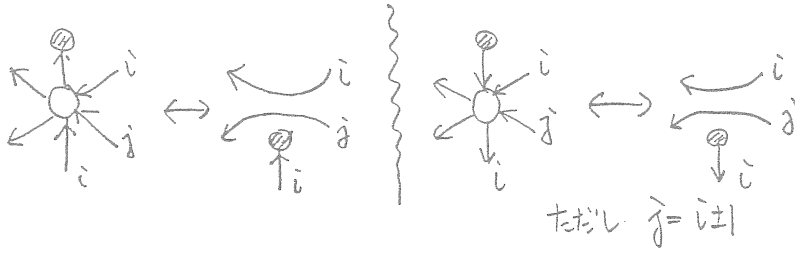


(2)

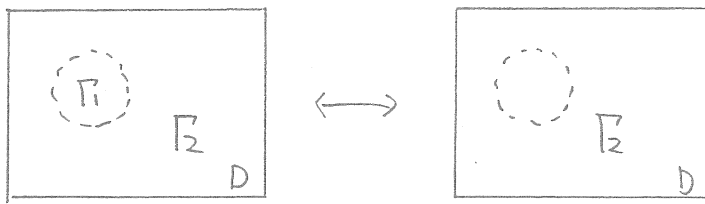


(3)





(4)  $\Gamma$ がある単純閉曲線 ( $\Gamma$ と交わらない) により2つの charts  $\Gamma_1$ と $\Gamma_2$ に分けられ, その曲線の内部にある chart ( $\Gamma_1$ とせよ) が黒の頂点を持たないとき,  $\Gamma$ から $\Gamma_1$ を取り除く, 又はその逆操作.



定義5. 4. 2つの charts が,  $D$ 上での ambient isotopy と補題5. 3の4つの操作を有限回適用して互いに移りあうとき, それらは  $C$ -変形同値であるという.

$\rho$ は全射  $\overline{\rho}$ を導く.

$$\overline{\rho} : \{ (m, n)\text{-charts} \} / C\text{-変形同値}$$

$$\rightarrow \{ 2\text{次元 } m\text{-ブレイドで } n \text{ 個の branch points を持つもの} \} / \text{同値関係}$$

この  $\overline{\rho}$  が単射であるかどうかはまだわかっていない.

### § 6. 最後に

2次元ブレイドは,  $D^2$ 上の  $m$  個の点から成る配置空間のある種のホモトピー空間を用いて記述できる.

参考文献

- [K]. S.Kamada, A characterization of groups of closed orientable surfaces in 4-space, preprint

0. はじめに

双曲的多様体とは断面曲率が定数  $-1$  である Riemann 多様体のことをいう。3次元多様体論においては普遍的な対象であり(たとえば [10] を参照)、多様な例が結び目補空間として、また結び目補空間に Dehn surgery を施すことによって得られている。

双曲的多様体  $N$  の境界  $\partial N$  が全測地的であるとは、 $N$  の  $\partial N$  に沿った Double  $DN$  が双曲的多様体で、 $\partial N$  が  $DN$  の中で全測地的であることをいう。境界を持つ多様体が全測地的境界を持つ双曲的構造を持つための条件は、境界の無い多様体が双曲的構造を持つための条件と同じ形で述べることができる。すなわち全測地的境界を持つ双曲的多様体は決して特殊な対象ではない。

双曲的多様体の体積は Mostow の rigidity により位相不変量である。完備な双曲的 3次元多様体の体積は、順序型が  $\omega^\omega$  である整列集合をなしていることが Jørgensen, Thurston [10] の仕事によって知られている。すなわち、compact な多様体の体積の最小値  $V_1$  が存在し、compact な多様体の体積で 2 番目に小さい体積  $V_2$  が存在し、 $\dots$ 、compact な多様体の体積の列の下からの集積点として cusp をひとつ持つ多様体の体積の最小値  $V_\omega$  が存在し、cusp をひとつ持つ多様体の体積で 2 番目に小さな値  $V_{2\omega}$  があり、 $\dots$ 、cusp を 2 個持つ多様体の最小体積  $V_{\omega^2}$  があって  $V_{\omega^2}$  には cusp を 1 個持つ多様体の体積が下から集積し、その列のおのおのの点には compact な多様体の体積が下から集積し、 $\dots$ 、cusp を  $n$  個持つ多様体の最小体積  $V_{\omega^n}$  には cusp を  $n-1$  個持つ多様体の体積が下から集積し、その列のおのおのの点には cusp を  $n-2$  個持つ多様体の体積が下から集積し、そのおのおのの点には  $\dots$ 。4次元以上の双曲的多様体の体積の分布に関しては Wang の定理から、任意の整数  $x$  に対して  $x$  以下の体積を持つ多様体の等長類は有限個しか存

在しないことが解る。

これらの事実からある種のクラスの多様体の体積に最小値が存在することがわかり、これまでの結果として向き付け可能な cusp 付き 3 次元 orbifold (Meyerhoff[8])、arithmetic な 3 次元 orbifold (Chinberg and Friedman[3])、cusp 付き 3 次元多様体 (Adams[1])、位数 6 の torsion をもつ 3 次元 orbifold (Gehring and Martin[6])、全測地的境界を持つ compact な 3 次元多様体 (Kojima and Miyamoto[7]) の最小体積が知られている。

双曲的  $n$  次元多様体  $N$  が全測地的境界  $\partial N$  を持てば、 $N$  の計量から誘導される Riemann 計量によって  $\partial N$  は双曲的  $n-1$  次元多様体になる。よって多様体  $N$  に対し、 $N$  の体積とその境界  $\partial N$  の  $n-1$  次元体積の比  $\text{vol } N / \text{vol } \partial N$  が定義される。この不変量の次元にのみ依存する下界が存在することは Fukaya が Margulis の lemma を使って解決していた。後ほどこの下界の具体的な値を与える。

## 1. Truncated 単体

完備な双曲的  $n$  次元多様体  $N$  は双曲的  $n$  次元空間  $H^n$  に局所的に等長である、すなわち  $N$  の普遍被覆空間  $\tilde{N}$  は  $H^n$  の部分空間であり、 $\pi_1 N$  の作用の基本領域である多面体に分割される。

$n$  次元 Euclid 空間の  $n$  次元単体は、一般の位置にある  $n+1$  個の超平面によって囲まれた領域であるが、 $H^n$  においては一般の位置にある  $n+1$  個の超平面によって囲まれた領域が有界であるとは限らない。各  $n$  個の超平面が  $H^n$  の中で交わらないため頂点を持たない場合があるからである。しかし頂点が無限遠球面  $S_\infty^{n-1}$  上にあれば、この領域は有限体積を持ち、“ideal 単体”と呼ばれる。さらに各  $n$  個の超平面が  $S_\infty^{n-1}$  上でさえも交わらなくても、各  $n-1$  個の超平面が  $H^n$  の中あるいは  $S_\infty^{n-1}$  上で交われば、頂点を持たない  $n$  個の超平面に対しそれらの共通直行面で truncate すれば有限体積を持つ多面体を得られる。これを “truncated 単体” と呼ぶ。



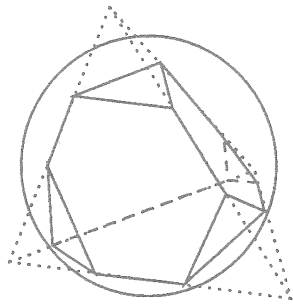


図 1. truncated 3 単体

truncated 単体には元からある非有界の面が truncated されたもの (これもやはり truncated 単体である) と、truncation によって現れる面 (これは通常の変曲的単体である) があるが、単に“面”といえは前者を指し、後者は truncation の面などと呼ぶことにする。辺 (1 次元面) も同様である。

2 次元の場合、ideal 2 次元単体は等長的に ideal 3 角形 ただひとつであり、その面積は、 $\pi$  である。truncate された頂点は、両端に直角を持つ辺に置き換わるから、Gauss-Bonnet より、truncated 2 次元単体の面積もやはり  $\pi$  である。

一般の次元の場合、単体は  $n + 1$  個の超平面の相互的な位置関係によって (等長的) に決まるから、その  $n - 2$  次元面上の面角によって決定される。相対的に、もしすべての頂点が  $H^n$  の中にある、あるいはすべての頂点が truncate されているならば、単体はその辺の長さ (truncation の面の間の距離) によって等長的に決まる。

以下すべての辺の長さが等しい truncated  $n$  次元単体を “truncated regular  $n$  次元単体” と呼び、その長さが  $l$  であるものを  $T^n(l)$  で表すことにする。ideal regular  $n$  次元単体は無有限長の辺を持っていると考へて、 $T^n(\infty)$  で表す。特に 3 次元の場合、面角が  $\theta$  であるような regular 単体を  $T_\theta$  で表す。  $0 \leq \theta < \pi/3$  ならば  $T_\theta$  は truncated であり、 $T_{\pi/3} = T^3(\infty)$  は ideal regular 4 面体である。また辺の長さが 0 にな

るまで truncate した単体  $T^3(0) = T_0$  は ideal regular 直角 8 面体である。

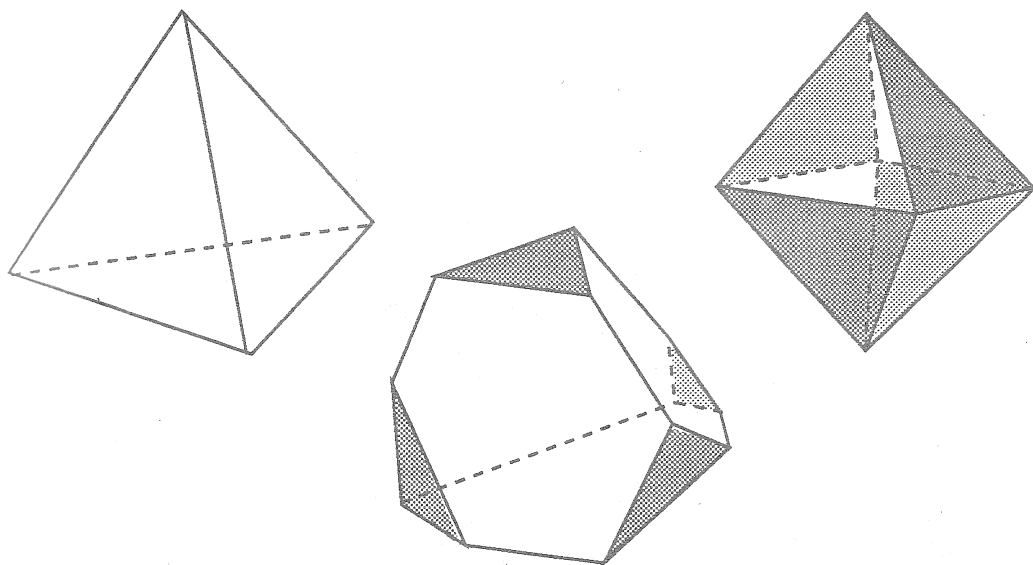


図 2. ideal 単体、truncated 単体、めいっぱい truncate した単体。

### 3. ちいさな多様体たち

双曲的単体を使って体積の小さな多様体を作ってみる。

*Example 1.* 1 個の ideal regular 3 次元単体  $T_{\pi/6} = T^3(\infty)$  の 4 個の面を 2 個ずつ組にして (等長的に) 貼り合わせると cusp がひとつついた多様体を得られる。この構成法からは必然的に位相同型の意味でただひとつの向き付け可能でない多様体を得られる。この多様体は Giesking 多様体と呼ばれる。Giesking 多様体は cusp 付き 3 次元多様体の中では唯一最小であり、その体積は  $\text{vol } T_{\pi/3} \approx 1.0149$  である [1]。

最小の cusp 付き 3 次元 orbifold は、 $T_{\pi/3}$  のその full symmetry による商を基本領域として持つ [8]。したがってその体積は  $\text{vol } T_{\pi/3}/24 \approx 0.0423$ 。

最小の向き付け可能な cusp 付き 3 次元 orbifold と位数 6 の torsion を持つ 3 次元 orbifold は同じもので、上の orbifold の 2 重被覆であり

[8][6]、したがってその体積は  $\text{vol } T_{\pi/3}/12 \approx 0.0846$ 。

*Example 2.*  $T_0$  を ideal regular 双曲的直角 8 面体と見てその 8 個の面を貼り合わせて cusp が 2 個ついた向き付け可能な多様体を作ることができる。これは Whitehead link 補空間であり [10]、完備な全測地的曲面を含む完備な 3 次元双曲的多様体としてはもっとも小さい。その体積は  $\text{vol } T_0 \approx 3.6639$ 。

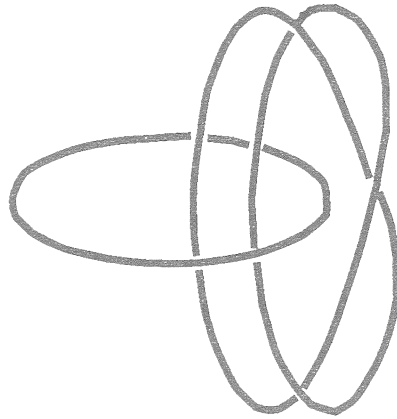


図 3. Whitehead link

*Example 3.*  $T_0$  の truncated 単体としての 4 個の面を貼り合わせると全測地的境界を持つ多様体を得られる。この多様体は Kojima[private communication] によって完備な双曲的 3 次元多様体で全測地的境界を持つものの中でもっとも小さいことが示された。このことは後述の方法によっても証明することができる。

*Example 4.* 面角  $\pi/6$  を持つ truncated 単体  $T_{\pi/6}$  2 個の面をうまく貼り合わせて、2 個の単体のすべての辺が同一視されるようにできる。この結果は compact な全測地的境界を持つ双曲的 3 次元多様体である。この多様体の境界は  $T_{\pi/6}$  の truncation 3 角形によって構成され、その Euler characteristic は  $-2$ 、したがって面積は  $4\pi$  である。この多様体は Fujii[4] により 8 個の位相同型類に分類されていて、compact

な双曲的 3 次元多様体で全測地的境界を持つものの中でもっとも小さい [8]。体積は、 $2 \text{vol } T_{\pi/6} \approx 6.4520$ 。

*Example 5.* Example 4 を一般化して、 $g$  個の面角  $\frac{\pi}{3g}$  の truncated 単体  $T_{\pi/3g}$  を辺がすべて同一視されるように貼り合わせて多様体を作ることができる。これは Gieseking 多様体のその中を走る辺を branching locus とする分岐被覆として得られる。この方法だと  $g$  が奇数のときできあがった多様体が向き付け可能ではなくなるが、Fujii[5] は同じ単体で向き付け可能な多様体を別の方法で作った。

### 3. Sphere Packing

定曲率の空間内の半径が等しい球の collection  $\{S_i\}$  が球の内部で交わりを持たないとき、 $\{S_i\}$  を *sphere packing* と呼ぶ。Böröczky[2] の定理によれば、“ $n$  次元定曲率空間の任意の sphere packing の密度は、 $n+1$  個の互いに接する球の中心によって張られる  $n$  次元単体におけるそれらの球の密度以下である”。厳密にいうと無限大体積を持つ空間での sphere packing の密度は定義できないが、適当に有限体積の部分に分割できて、各部分での密度が単体における密度以下である、ということである。

この定理は非常にもっともらしい。たとえば 2 次元 Euclid 平面に半径の等しい円盤を近隣の 3 個が互いに接するように敷き詰めればこれはもっとも密である。3 次元 Euclid 空間の densest packing の密度は Böröczky の上界より小さい。半径の等しい球を近隣の 4 個が接するように詰め込むのは不可能だからである。

**Definition.**  $O$  を  $H^n$  の超平面とする。 $S \subset H^n$  が  $O$  上の半径  $r$  の hyperball であるとは、 $S$  が  $O$  を境界とする半空間  $H_+^n$  の中での  $O$  の  $r$ -collar であること、すなわち  $S = \{x \in H_+^n : d(x, O) \leq r\}$  である。さらにいくつかの超平面によって囲まれた  $H^n$  の領域  $H$  の境界の (それぞれが超平面である) 連結成分上の半径  $r$  の hyperball が  $H$  の中にある。

て互いに内部で交わらないとき、 $H$  は半径  $r$  の hypersphere packing をもつという。

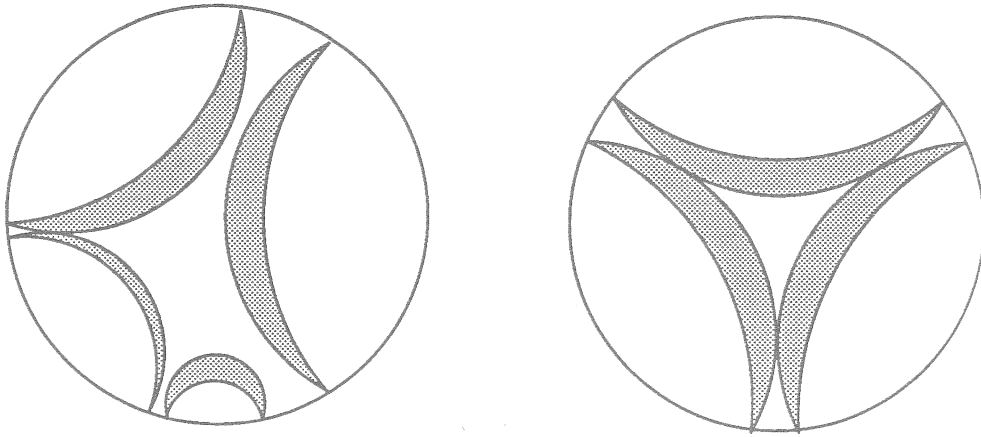


図 4. hypersphere packing とできるだけ詰め込んだ hypersphere packing

hyperball は通常の球と同様な性質を持っており、Böröczky の定理とおなじ主張が同様に示される。ところが hyperball は超平面の collar 近傍だから、packing の密度に替えて、hypersphere packing における超平面に囲まれた領域と超平面の体積比の言葉で言い替えることができる。すなわち:

**Lemma 1.** 半径  $r$  の hypersphere packing をもつ領域の体積と境界の体積比のは、 $n + 1$  個の互いに接する hyperball によって張られる truncated 単体における体積とその truncation の面の体積との比を下回らない。

ここでも領域の体積が無限大のときは、体積比が truncated 単体の体積比以上の部分に分割できる、という意味である。さらに“下回らない”というのは狭義の意味、すなわち等号がなりたつのは  $n + 1$  個の hyperball によって張られるような truncated 単体に分割可能なときのみ、ということである。

#### 4. 多様体の体積とその境界の体積の比

全測地的境界を持つ双曲的  $n$  次元多様体  $N$  の測地的線分で両端点を  $\partial N$  上に持ち両端点で  $\partial N$  に垂直なものを *return path* とよぶ。  $N$  の return path は  $\tilde{N} \subset \mathbb{H}^n$  の測地的線分で  $\partial \tilde{N}$  の 2 成分の共通垂直線分であるもの (すなわちその 2 成分を結ぶ最短 path) に lift される。ゆえに  $N$  のすべての return path の長さが  $l \geq 0$  以上であれば、 $\tilde{N}$  は半径  $l/2$  の hypersphere packing をもつ。

**Lemma 2.**  $N$  の return path が下界  $l$  をもつならば、 $N$  の体積と  $\partial N$  の体積の比は  $T^n(l)$  の体積とその truncation の面の体積との比を下回らない。さらに等号がなりたつのは  $N$  が  $T^n(l)$  で分割できるときのみである。

最悪の場合  $l = 0$  を考えれば次の定理が得られる。

**Theorem A.** 全測地的境界を持つ完備な双曲的  $n$  次元多様体  $N$  が有限体積を持つならば、

$$\frac{\text{vol } N}{\text{vol } \partial N} \geq \frac{\text{vol } T^n(0)}{(n+1)\text{vol } T^n(\infty)}.$$

上式の右辺は  $T^n(0)$  の truncation の面が  $n+1$  個の  $T^{n-1}(\infty)$  であることから導かれる。この評価は 3,4 次元においては最小値でもあり、その値はそれぞれ 0.29156 と 0.43219 であるが、それ以上の次元においては狭義に小の下界である。

#### 5. 3 次元多様体の境界の面積と最小体積

先述の定理にある体積比の下界は  $n = 3$  の場合、Example 3 の多様体によって実現できる。さらに、

**Theorem B.** Example 3 の多様体は、全測地的境界を持つ完備な双曲的 3 次元多様体の中で最小体積を持ち、また逆に全測地的境界を持つ

完備な双曲的 3 次元多様体で最小体積を持つものは 1 個の  $T_0$  から作られる多様体のみである。その最小体積は、

$$\text{vol } T_0 \approx 3.6639.$$

これは Euler characteristic に関する考察から多様体の境界となり得る双曲的曲面の面積が  $4\pi$  以上であることと、Lemma 2 から示される。同様に多様体の境界になり得る双曲的曲面の Euler characteristic は  $-2k (k \geq 1)$ 、すなわち面積は  $4k\pi$  であるから、

**Theorem B'.** Euler characteristic が  $-2k (k \in \mathbb{N})$  である全測地的境界を持つ完備な双曲的 3 次元多様体で最小なものは  $k$  個の  $T_0$  から作られる。

境界が閉曲面のときは Lemma 2 がもっと効果的に使える。

**Lemma 3.** Euler characteristic が  $\chi$  である閉曲面を全測地的境界として持つ完備な双曲的 3 次元多様体の return path の長さは  $g = 1 - \chi/2$  と定義すれば、面角が  $\frac{\pi}{3g}$  である truncated 単体  $T_{\pi/3g}$  の辺の長さ以上である。

証明は hyperbolic trigonometry と  $\partial N$  上の circle packing に対する Böröczky の定理の適用による。

このことと、Lemma 2 および Example 5 による多様体の存在から次が示される。

**Theorem C.** Euler characteristic が  $\chi$  である閉曲面を全測地的境界として持つ完備な双曲的 3 次元多様体で最小体積を持つものは、 $g = 1 - \chi/2$  とすれば、 $T_{\pi/3g}$  を  $g$  個貼り合わせて得られる多様体のみである。

*Remark.* この定理の中の  $g$  は多様体の境界が向き付け可能なときは、境界の total genus に一致する。

## 参考文献

1. C. Adams, *The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 601–606.
2. K. Böröczky, *Packing of spheres in spaces of constant curvature*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **32** (1978), 243–261.
3. T. Chinburg and E. Friedman, *The smallest arithmetic hyperbolic three-orbifold*, Inventiones math. **86** (1986), 507–527.
4. M. Fujii, *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary which are decomposed into hyperbolic truncated tetrahedra*, Tokyo J. Math. **13** (1990), 353–373.
5. M. Fujii, *Hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, master thesis (1989) Tokyo Institute of Technology.
6. F. Gehring and G. Martin, *6-tortion and hyperbolic volume*, preprint (1990).
7. S. Kojima and Y. Miyamoto, *The smallest hyperbolic 3-manifolds with totally geodesic boundary*, to appear in J. Differential Geom.
8. R. Meyerhoff, *Sphere-packing and volume in hyperbolic 3-space*, Comment. Math. Helvetici. **6** (1986), 271–278.
9. Y. Miyamoto, *The volumes of hyperbolic manifolds with geodesic boundary*, preprint (1991).
10. W. Thurston, *The Geometry and Topology of 3-Manifolds*, Lecture Notes, Princeton Univ., 1977/78.





