第３７回

トポロジー・シンポジウム

講　演　集

１９８９年7月１９日～２２日

於　　福　島　大　学

平成元年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号　６３３０２００１

序

この講演集は、１９８９年７月１９日から２２日の間、福島大学で開催される第３７回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して、研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は、科学研究費・総合研究（Ａ）

「位相幾何学の総合的研究」（課題番号　６３３０２００１）

により作られたものであることを附記しておく。

１９８９年７月

総合研究（Ａ）　６３３０２００１

研究代表者　　松　本　幸　夫

目　　次

余次元１の (G,X) 葉層構造

千葉大教養　稲葉尚志

近頃，幾何構造を持つ多様体の研究が盛んであるが，ここでは (葉に横断的な方向に) 幾何構造を持つ葉層構造—即ち (G,X) 葉層構造—について，現在までにわかっていることを (私の知る範囲で) 概説したい．ただし，多様体の場合と違って，葉層構造の場合には $\dim X=1$ でも (私にとっては) 十分難しく，今のところその場合しか扱えない．

§1.　定義

Xを向き付けられた C^ω級多様体とし，G を Xに向きを保ちながら効果的，推移的かつ C^ω級に作用するリー群とする．

定義.　多様体 M上の葉層構造 $\mathcal{F}$が，横断的 (G,X) とは，Mの開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ と，$\mathcal{F}|U_\alpha$の各葉を一点につぶす沈め込み $f_\alpha : U_\alpha \to X$が存在して，各重なり $U_\alpha \cap U_\beta$ に対して，$f_\alpha = g_{\alpha\beta} f_\beta$をみたす G の元 $g_{\alpha\beta}$がとれることである．

古典的な Lie (Cartan ?) の定理によれば，$\dim X=1$ とすると，(G,X) は次に限られる．

a) $(\mathrm{Euc}^+(\mathbf{R}),\mathbf{R})$

b) $(\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R}),\mathbf{R})$

c) $(\mathrm{Proj}^+(P^1),P^1)=(\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R}),S^1)=(\widetilde{\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})},\tilde{S}^1)$

ここに，a) は平行移動 $x\mapsto x+b$ 全体，b) は 1 次関数 $x\mapsto ax+b, a>0$ 全体，c) は 1 次分数変換 $x\mapsto (ax+b)/(cx+d), ad-bc=1$ 全体である．これらを (G,X) とする横断的 (G,X) 葉層構造を，順に，(横断的) ユークリッド葉層構造，(横断的) アフィン葉層構造，(横断的) 射影葉層構造と呼ぶ．

微分幾何の用語との一貫性からいうと，平坦という言葉を挟むべきであるという御指摘があるようです (例えば，アフィン葉層構造はアフィン平坦葉層構造とする等)．しかし，ここでは通常用いられている用語のままとさせていただきました.

§2. 一般の葉層構造論からの用語の準備

$\mathcal{F}$を多様体M上の余次元1葉層構造とする．$\mathcal{F}$の葉は，Mの部分集合としての位相に着目して次のように分類される.

$\mathcal{F}$の葉Lの，多様体としての位相とMの部分集合としての位相が一致するときLを真葉とよび，一致しないとき非真葉とよぶ．非真葉は更に局所稠密葉 (Lの閉包がMのなかで内点を含むとき) と例外葉 (Lの閉包が局所的に (カントール集合)×(超平面) の形をしているとき) に分けられる．コンパクトな葉 (LがMのコンパクト部分多様体になっている葉) は真葉の重要な例である．また，閉包がM全体になるような葉は，単に稠密葉とよばれる.

ここで，古くから，例外葉の存否は葉層構造論の重要な研究テーマの一つであったことを喚起しておこう.

以上の分類とは別に，一連の卓越した研究の結果，葉層構造の複雑さの元凶であることが認識されるに至った次の概念がある．(ここで，葉上のループの引き起こすホロノミーを，後出 (§4) の大域ホロノミーと区別するため，葉ホロノミーとよぶことにする.)

定義． $\mathcal{F}$の葉Lが，自分自身の葉ホロノミーで自分自身を巻き込んでいるとき，Lを弾性葉という．(次ページの図1を参照して下さい.)

実際，Duminy 1982[D]により，Godbillon-Vey 類 (略して GV 類) が消えていないならば，必ず弾性葉が存在することが示されたし，Ghys-Langevin-Walczak 1988[GLW]により，葉層エントロピーが消えていないことと，弾性葉が存在することが同値であることも示されている．容易にわかるように，弾性葉は非真葉であ

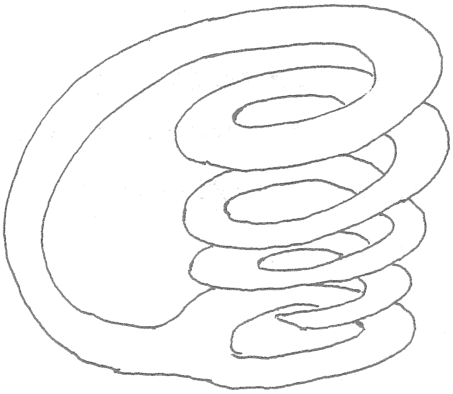


図 1

り，局所稠密弾性葉と例外弾性葉とに分けられる．C^ω級の葉層構造においては，例外葉が存在すれば例外弾性葉も存在することが判っている．

対照的に，構造がほぼ完全に解明されている葉層構造として次がある．

定義． $\mathcal{F}$が殆どホロノミーなしとは，$\mathcal{F}$の葉で，自明でない葉ホロノミーをもつものがコンパクトな葉のみであるときに云う．

最も簡単な葉層構造が，殆どホロノミーなしの葉層構造であり，最も複雑な葉層構造が，弾性葉を含む葉層構造であると考えてよい．その二者の間には，色々な程度の複雑さをもった葉層構造が豊富に在る．

§3. 微分形式による特徴付け

M上の葉層構造 $\mathcal{F}$を定める非特異 1 形式を ω とする (即ち，$\mathrm{Ker}\omega = T\mathcal{F}$)．このとき，必要なら ω を正の関数倍だけ変更して

命題 (Blumenthal 1979[Bl])．

$\mathcal{F}$がユークリッド $\Longleftrightarrow d\omega = 0$

$\mathcal{F}$がアフィン $\Longleftrightarrow d\omega = \exists\theta \wedge \omega,\ d\theta = 0$

$\mathcal{F}$が射影 $\iff d\omega = \exists\theta \wedge \omega,\ d\theta = \omega \wedge \exists\eta,\ d\eta = \eta \wedge \theta$

特に，ユークリッド及びアフィン葉層構造の GV 類 $[\theta \wedge d\theta]$ は常に 0 である．対照的に，GV 類が非自明であることを示す最初の例 (Roussarie による) は射影葉層構造であった．GV 類の見地からの (G, X) 葉層構造の研究については Brooks-Goldman 1984[BG] を見られたい．

§4. 展開写像と大域ホロノミー群

M上に (G, X) 葉層構造 $\mathcal{F}$が与えられると，(G, X) 多様体の場合と同様に，$\mathcal{F}$を定める局所沈め込み $f_\alpha : U_\alpha \to X$ を解析接続により大域化していくことで，展開写像と呼ばれる沈め込み

$$D : \tilde{M} \to X$$

($\tilde{M}$は Mの普遍被覆) が得られる．それに付随してホロノミー準同型

$$h : \pi_1(M) \to G$$

も定まる．h の像 Γ を大域ホロノミー群と呼ぶ．

§5. 問題

(G, X) 葉層構造について，次の諸問題を研究したい．

I (supporting manifold). (G, X) 葉層構造を許容する Mを位相的に特徴付けよ．

II (prescribed holonomy). G の有限生成部分群 Γ は，いつある (G, X) 葉層構造の大域ホロノミー群となるか?

III (diversity). (G, X) 葉層構造は，位相的にどのくらい多様か?

IV (influence of holonomy or of π_1). $\pi_1(M)$ 或いは大域ホロノミー群 Γ の代数的性質が，$\mathcal{F}$の位相にどの程度反映するか?

V (deformation).　固定されたM上に，どのくらい(G,X)葉層構造が存在するか?

注1)　Iに関して．(G,X)葉層構造はC^ωなので，Haefligerの定理により常に$\pi_1(M)$は無限群である．

注2)　Vは良問だが，浅学非才のため，私は敬遠している．Meigniez 1988[Me]に(G,X)葉層構造の変形に関する一般論がある．

続く3つのセクションで，3種の葉層構造のそれぞれについて問題IからVの解明状況を報告する．ただし，台多様体Mが閉多様体の場合を中心に扱う．

§6.　ユークリッド葉層構造

これについては既に数多くの研究がある．まず，典型的な例を一つ挙げよう．

例．　T^2上の線形葉層構造.

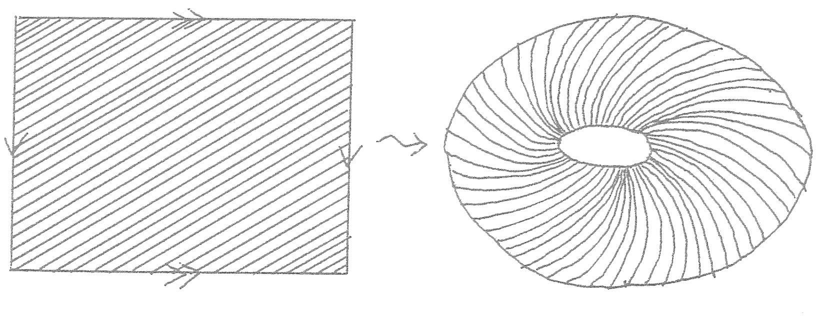


図2

I (解決).　定理 (Tischler 1970[Ti]).　閉多様体Mがユークリッド葉層構造をもつ．$\Longleftrightarrow$ MがS^1上ファイバーする．

II (解決).　常に可能.

III (解決).　$\mathcal{F}$は全く葉ホロノミーを持たず，全ての葉は互いに微分同相．更に，全ての葉がコンパクトか全ての葉が稠密．

注)　以上はMが閉の場合であるが，Mが開なら，一転して複雑になる．例えば，例外葉をもつ例がある (今西 1979[Im])．最近の組織的な研究としては Levitt 1988[L]がある．

IV (解決).　閉多様体上のユークリッド葉層構造の大域ホロノミー群 Γ は自由アーベル群であり，

$\mathrm{rank}\Gamma = 1 \Longleftrightarrow$ 全ての葉がコンパクト．

$\mathrm{rank}\Gamma > 1 \Longleftrightarrow$ 全ての葉が稠密．

V (不明).　Laudenbach-Blank 1979[LB], Thurston 1986[Th]が関係ある?

以上で分る通り，Mが閉のときは満足すべき程度に解明されている．現在は 'Mが開のとき' または 'Mは閉だが，$\mathcal{F}$が特異点をもつとき' の研究が進行中である．Mが開のときのユークリッド葉層構造の研究は，Mが閉のときのアフィン葉層構造の研究に応用をもつことを注意しておく ([L])．

§7.　アフィン葉層構造

例 1.　$\mathbf{R}^2 - \{0\}$ に x 軸に平行な直線族による葉層構造を入れておき，これをアフィン写像 $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ で割る．できたものは図 3 の様な T^2上のアフィン葉層構造である．これは，殆どホロノミーのない葉層構造である．

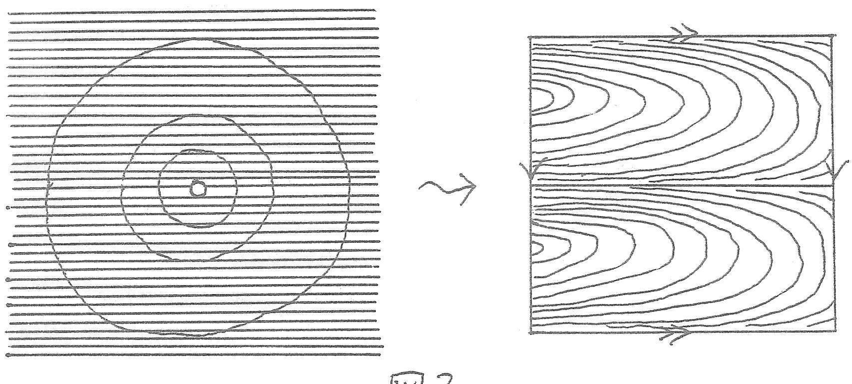


図3

例 2.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ とすると A は T^2の微分同相と見られる．A の固有空間に平行な直線族による T^2の線形葉層構造を $\mathcal{G}$とし，$T^2 \times [0,1]$上に $\mathcal{G} \times [0,1]$ なる葉層構造を考え，$(\mathbf{x}, 1) \sim (A\mathbf{x}, 0)$ により，境界を貼り合わせれば，S^1上の T^2束 M_A上のアフィン葉層構造を得る．これはアノソフ葉層構造と呼ばれるものの一つであり，これの葉は全て稠密で，弾性葉を含む．(c.f., Ghys-Sergiescu 1980[GS]によると，M_A上のコンパクトな葉を持たない葉層構造は，アフィンであるなしに拘わらず，この例しか無い.)

次に解明の様子をみよう．

I (未解決)．　次は容易である．

命題．　閉多様体 Mがアフィン葉層構造を持つ$\Longrightarrow b_1(M) \neq 0$.

証明．　短完全列

$$1 \longrightarrow \mathbf{R} \xrightarrow{i} \mathrm{Aff}^+(\mathbf{R}) \xrightarrow{l} \mathbf{R}^+ \longrightarrow 1$$

と，$\mathcal{F}$のホロノミー準同型 $h : \pi_1(M) \to \mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ に対して，lh が非自明なら，$[\log lh]$ が $H^1(M)$ の非自明元．lh が自明なら，$h : \pi_1(M) \to \mathbf{R} \xrightarrow{i} \mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ と経由するから $[h]$ が $H^1(M)$ の非自明元 (M から $\mathbf{R}$ への沈め込みは存在しないから，h は零写像ではない)．証明終わり．

しかし，$b_1(M) \neq 0$ なる Mでも，アフィン葉層構造を許さぬことがある．実際，Whitehead link complement の境界を次のページの図 4 のように貼り合わせてできる閉多様体がその例である．これは，基本群から $\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R})$ への準同型が可換なものしか無いことから，比較的すぐに確かめられる．

では，ユークリッド葉層構造と同様，アフィン葉層構造でも Mは S^1上ファイバーするのだろうか? 答は否である．図 5 の link complement に meridian disks (豚鼻) による葉層構造を入れておき，その境界を指示通りに貼り合わせると，閉多様

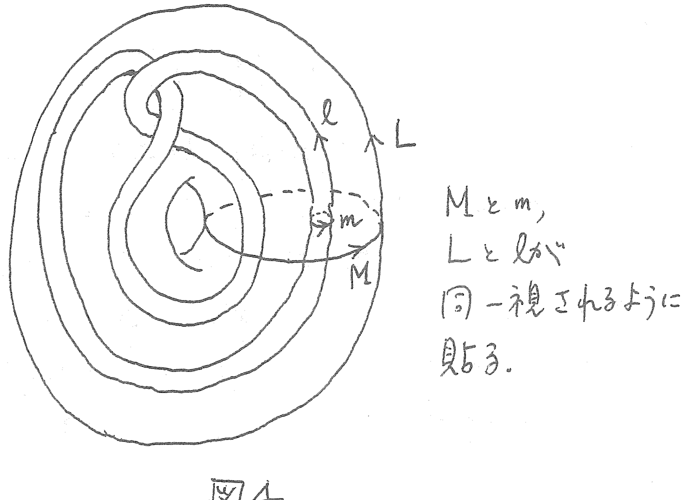


図4

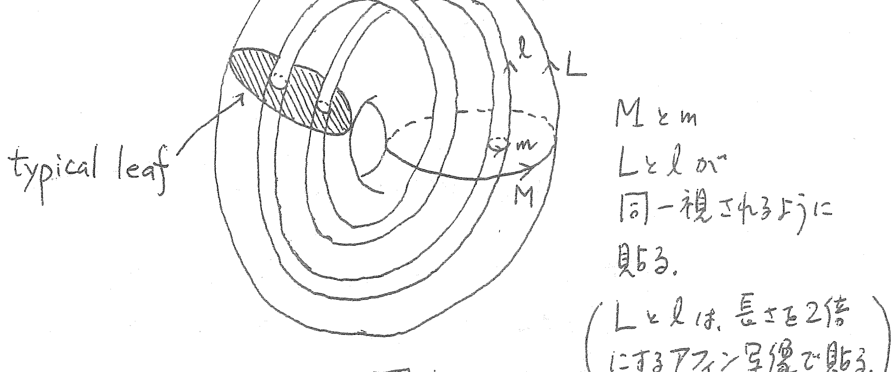


図5

体 M 上のアフィン葉層構造が得られる (Hirsch 1975[H]). しかし,Mのフレビッチ写像の核は $\mathbb{Z}[1/2]$ であり,有限生成でないので,Mは S^1上ファイバーしない.

しかし,$\dim M = 3$ かつ Γ が可換のときは正しい (土屋 1988[Ts], Meigniez 1988[Me]).

II (解決). Meigniez 1988[Me]により,$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{R})$ の任意の有限生成部分群は,あるアフィン葉層構造の大域ホロノミー群となる.

III (部分的解決). 多様さの一つの目安として,例外葉の存在がある.アフィ

ン葉層構造では，例外葉をもつ例がなかなか作りにくく，Furness-Fedida 1976[FF]には，非存在の証明まで載っているが，その証明は誤りであった．実際，

例 (Hector(unpublished, but see [Me]), 稲葉 1988[In])．　**閉多様体上のアフィン葉層構造で，例外葉を持つものが構成できる．**

しかし，中間難易度の葉層構造は存在しない:

定理 ([In])．　**閉多様体上のアフィン葉層構造は，殆どホロノミーなしか，さもなくば，局所稠密弾性葉を持つ．**

IV(部分的解決)．　アフィン葉層構造においては，大域ホロノミー群の可換性が $\mathcal{F}$ の位相を大きく支配する．

定理 ([In])．　閉多様体上のアフィン葉層構造 $\mathcal{F}$ の大域ホロノミー群 Γ に対し，次が成り立つ．

Γ が可換 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$は殆どホロノミーなし

Γ が非可換 $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{F}$は局所稠密弾性葉を持つ

基本群の複雑さが，例外葉の存在に関係することも判明している．

定理 (Levitt 1988[L])．　$\mathcal{F}$ を閉多様体 M上のアフィン葉層構造とする．このとき，

$\mathcal{F}$が例外葉をもつ $\Longrightarrow$ $\pi_1(M)$ は非可換自由群を含む．

V (不明)．

この他，土屋 1988[Ts]は，殆どホロノミーの無い葉層構造が，アフィン葉層構造であるための必要十分条件を得ている．

§8.　射影葉層構造

例 (Roussarie)．　双曲曲面 Σ_g 上の測地流の安定葉層構造は，Σ_g の単位接束 $T_1\Sigma_g$ 上の射影葉層構造となる．これはアノソフ葉層構造と呼ばれるものの一つであり，これの葉は全て稠密で，弾性葉を含む．(c.f., 松元 1987[Ma]によると，$T_1\Sigma_g$

上のコンパクトな葉を持たない葉層構造は，射影であるなしに拘わらず，この例しか無い.)

以下に，諸問題の解決状況を報告するが，結果は全て 稲葉-松元 1989[IM] で得られたものである.

I (全く結果なし).

II (不明).　$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の任意の有限生成部分群が，十分ジーナスの大きい曲面上の射影葉層 S^1束の大域ホロノミー群として実現できることは自明であるが，本質的には $\widetilde{\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})}$ の部分群について考えるべきであり，それに関しては残念乍ら全く不明である.

III (部分的解決).　アフィンの場合と類似の，中間難度の葉層構造の非存在定理が成立する.

定理 1.　閉多様体上の射影葉層構造は，殆どホロノミーなしか，さもなくば，弾性葉を含む.

IV (部分的解決).　$\mathcal{F}$を閉多様体上の射影葉層構造とし，Γ をその大域ホロノミー群とする. このとき次が成り立つ.

命題 2.　Γ が殆ど可換 $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$は殆どホロノミーなし.

証明.　$\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ の殆ど可換な部分群 Γ はよくわかっている. 特に，$F = \{x \in S^1 \mid x$ は，Γのある非単位元の不動点$\}$ とおくと，Fは有限集合 (実は，元が 0, 1 または 2 個) である. これより，$p : \tilde{M} \to M$ を普遍被覆，Dを $\mathcal{F}$の展開写像としたとき，$pD^{-1}(F)$ に属す葉は Mの中で集積しないことがわかる. 即ち，コンパクトな葉である. 一方，Fの定義から直ちに $pD^{-1}(F)$ に属さない葉は葉ホロノミーを持たない. 証明終わり.

この命題の逆に関しては，次がいえる.

定理 3.　$\mathcal{F}$が殆どホロノミーなし $\Longrightarrow$ Γ は殆ど可解.

命題 4.　Γ が殆ど可解 $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$は，殆どホロノミーなしか，さもなくば，$\mathcal{F}$から有限枚のコンパクト葉を取り去ると，残りは，アフィン葉層構造となる.

証明．　$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})$ の殆ど可解な部分群 Γ は，ある程度わかっている．特に，Γ が殆ど可換でないならば，Γ の不動点集合 $\mathrm{Fix}\Gamma$ は一点である．今，S^1を $\mathbf{R}\cup\{\infty\}$ と同一視し，(必要なら共役に取替えて) $\mathrm{Fix}\Gamma=\{\infty\}$ とする．前命題と同じ議論により，$pD^{-1}(\infty)$ はコンパクトな葉有限枚から成る．$M-pD^{-1}(\infty)$ に $\mathcal{F}$を制限すると，その展開像は $\mathbf{R}\ (=S^1-\{\infty\})$ であり，Γ は ∞ の固定群 $\mathrm{Stab}(\infty)$ に含まれている．ところが，正に $(\mathrm{Stab}(\infty),\mathbf{R})=(\mathrm{Aff}^+(\mathbf{R}),\mathbf{R})$ であるから，証明終わり．

定理 5.　**Γ が非可換自由群を含む $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}$ は弾性葉を持つ．**

証明．　対偶を示す．定理 1 の二者択一により，$\mathcal{F}$が弾性葉を持たなければ，殆どホロノミーが無い．すると定理 3 より，Γ は殆ど可解．すると有名な Tits の二者択一により，Γ は非可換自由群を含まない．証明終わり．

では，アフィン葉層構造の場合のように，弾性葉の存否を Γ の情報で判定できるだろうか?　答は否である．次の簡単な例がある．

例．　ある 3 次元閉多様体 M上に，同じ大域ホロノミー群を持つ 2 種の射影葉層構造で，一方は弾性葉を持ち，他方は持たぬものを構成できる．

基本群の影響については，アフィンのときの Levitt の結果を真似ることにより，次が示せる．

定理 6.　**$\mathcal{F}$が例外葉を持つ $\Longrightarrow$ $\pi_1(M)$ は非可換自由群を含む．**

V (不明)．

文献

[Bl] R. A. Blumenthal: Transversely homogeneous foliations, *Ann. Inst. Fourier* 29 (1979), 143–158

[Bo] Bobo Seke: Sur les structures transversalement affines des feuilletages de codimension un, *Ann. Inst. Fourier* 30 (1980), 1–29.

[BG] R. Brooks and W. Goldman: The Godbillon-Vey invariant of a transversely homogeneous foliation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 286 (1984), 651–664.

[D] G. Duminy: L'invariant de Godbillon-Vey d'un feuilletage se localise dans les feuilles ressort, preprint 1982.

[FF] P. M. D. Furness and E. Fedida: Transversally affine foliations, *Glasgow Math. J.* 17 (1976), 106–111.

[GLW] E. Ghys, R. Langevin and P. Walczak: Entropie geometrique des feuilletages, *Acta Math.* 160 (1988), 105–142.

[GS] E. Ghys and V. Sergiescu: Stabilité et conjugaison différentiable pour certains feuilletages, *Topology* 19 (1980), 179–197.

[H] M. W. Hirsch: A stable analytic foliation with only exceptional minimal sets, *Springer Lect. Notes in Math.* 468 (1975), 8–9.

[Im] H. Imanishi: Structure of codimension 1 foliations without holonomy on manifolds with abelian fundamental group, *J. Math. Kyoto Univ.* 19 (1979), 481–495.

[In] T. Inaba: Resilient leaves in transversely affine foliations (to appear in *Tôhoku Math. J.*).

[IM] T. Inaba and S. Matsumoto: Resilient leaves in transversely projective foliations, preprint 1989; Some qualitative aspects of transversely projective foliations, *Proc. Japan Acad.* 65 (1989), 115–117.

[L] G. Levitt: Groupe fondamental de l'espace des feuilles dans les feuilletages sans holonomie, preprint, Univ. de Paris-Sud 1988.

[LB] F. Laudenbach and S. Blank: Isotopie de formes fermées en dimension trois, *Inv. Math.* 54 (1979), 103–177.

[Ma] S. Matsumoto: Some remarks on foliated S^1-bundles, *Inv. Math.* 90 (1987), 343–358.

[Me] G. Meigniez: Actions de groupes sur la droite et feuilletages de codimension 1. Thèse. Univ. Claude Bernard-Lyon I 1988.

[Th] W. P. Thurston: A norm on the homology of 3-manifolds, *Memoir of Amer. Math. Soc.* 339 (1986).

[Ti] D. Tischler: On fibering certain foliated manifolds over S^1, *Topology* 9 (1970), 153–154.

[Ts] 土屋 信雄: 初等的な余次元 1 横断的アフィン葉層，葉層構造論シンポジウム，熱海 1988.

シンプレクティック構造と変換群

東大・理　　服部晶夫

§1　目標

シンプレクティック構造はリーマン構造，複素構造とともに，自然界によく現れる幾何構造である。シンプレクティック構造は古来ハミルトン力学系の記述などに用いられてきたが，リーマン構造や複素構造と比べて，幾何学の直接の対象となる度合はそれ程大きくなかったと思われる。近年，幾何学者の間にもシンプレクティック構造に対する興味が盛になってきているが，その原因の一つとして，慣性写像（moment map）の種々の面での重要性が認識されてきたことをあげることができよう。ちなみに，種々のモジュライ空間の上に自然にシンプレクティック構造と慣性写像が作られる場合が多い点も注目に値する。

作用する群がコンパクト群であるときは，慣性写像は考えている多様体の位相に強い条件を課するものであり，その存在の下にその多様体の詳しい研究が可能になる。

シンプレクティック構造の典型例はケーラー構造であ

る。このことは複素構造とシンプレクティック構造とが"両立"したものがケーラー構造であることを意味する。

複素射影多様体上の$\mathbb{C}^*$作用に対しては，その作用から生ずる自然な滑層構造(stratification)に基くBialynicki-Birulaの研究[B]があり，ケーラー多様体の場合にもFrankelによる先駆的な業績[F]がある。現在では，それらを統括して，一般のシンプレクティック多様体上のハミルトン的群作用(慣性写像を許容する作用)を研究することが可能な段階に達している と考えられる。特に，慣性写像と不動点定理を結合させることにより強い結論を導くことが可能である。講演では，そのようなプログラムの初期的な段階について報告する([A-H]，$[H]_2$)。

§2 基本事項

以下，Mは滑らかなコンパクト，連結$2n$次元多様体とする。

定義 M上の2次微分形式ωが

1) $d\omega=0$，　　2) $\omega^n(x)\neq 0$，$^\forall x\in M$

を満たすとき，ωはシンプレクティック形式（または

構造）であるという。

典型的な例はケーラー形式である。ω のコホモロジー類 $[\omega] \in H^2_{DR}(M)$ に対して、明らかに、

$$[\omega]^k \neq 0 \quad , \quad k = 0, 1, \cdots, n$$

である。

(M, ω) をシンプレクティック多様体という。以下，G はコンパクト，連結なリー群を指すものとする。G が M に作用し，その作用が ω を保つとき，(M, ω) はシンプレクティック G 多様体であるという。リー群 G のリー環を $\mathfrak{g}$ と記し，$\mathfrak{g}^*$ はその双対とする。G は $\mathfrak{g}$ に随伴作用し，$\mathfrak{g}^*$ にはその双対で作用するものとみる。$X \in \mathfrak{g}$ に対し，$\exp tX \in G$ の M への作用が定める M のベクトル場を X^* と書くことにする。

定義　(M, ω) をシンプレクティック G 多様体とする。滑らかな同変写像 $\mu : M \longrightarrow \mathfrak{g}^*$ が

$$d\mu_X = i(X)\omega \quad , \quad {}^{\forall} X \in \mathfrak{g}$$

を満たしているとき，μ シンプレクティック G 多様体 (M, ω) の慣性写像という。ここで，$X \in \mathfrak{g}$ に対し，μ_X は

$$\mu_X(x) = \langle \mu(x), X \rangle \quad , \quad x \in M$$

で定義される関数 $\mu_X : M \to \mathbb{R}$ を表す。

慣性写像の存在のための条件は記述できる（[A-B]$_2$, [O]）。特に，$H^1(M)=0$ ならば常に存在は保証される。

$H \subset G$ が閉リー部分群であるとき，μ に制限写像 $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$ を合成したものはシンプレクティック H 多様体 (M, ω) の慣性写像になる。

例　G の $\mathfrak{g}^*$ への作用の一つの軌道を M とする。この場合は，M 上に自然にシンプレクティック形式 ω が定まり，埋め込み $M \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$ がその慣性写像になる。例えば，複素射影空間 $\mathbb{C}P^n$ 上の有名なモース関数

$$f([z_0, \cdots, z_n]) = \frac{\sum b_i |z_i|^2}{\sum |z_i|^2} \qquad (b_0 < b_1 < \cdots < b_n)$$

は，そのようにして得られる慣性写像（$G = U(n+1)$）を，ある $S^1 \subset U(n+1)$ に制限して得られるものである。ここで，S^1 のリー環を $\mathbb{R}$ と同一視して考えている。

$G = S^1$ のとき，慣性写像 $\mu : M \to \mathbb{R}$ の臨界点はちょうど G の作用の不動点と一致する。次の定理は最も基本的なものである。

定理 1　$G = S^1$ とする。そのとき，慣性写像 $\mu : M \to \mathbb{R}$ は Bott の意味で非退化で，しかも完全であ

る。特に，不動点がすべて孤立しているときには，μはモース関数であり，

$$\#\{P;\ \text{指数 } q \text{ の } \mu \text{ の臨界点}\} = b_q(M) \quad (q\text{次ベッチ数})$$

が成り立つ。

慣性写像に関するより詳しい記述については，[A]，$[A\text{-}B]_1$，$[A\text{-}B]_2$，[K]，[O] などを参照されたい。

なお，M上のシンプレクティック構造ωに対して，M上のリーマン構造$\langle\ ,\ \rangle$と概複素構造Jで

$$\bigstar \qquad \omega(u, Jv) = \langle u, v \rangle$$

となるものが存在する。これは，本質的には，$U(n)$が$Sp(n, \mathbb{R})$の極大コンパクト群になることに基いている。コンパクト群Gの作用があるときは，ωがGで不変ならば，$\langle\ ,\ \rangle$もJも同様に不変なものをとることができる。

次に，不動点定理について簡単に述べておく。簡単のため$G = S^1$とする。状況としては，S^1が概複素多様体Mに作用し，不動点はすべて孤立している場合をとりあげる。そのとき，Mの接束TMは複素ベクトル束で，そこにS^1が作用しているから，不動点P_i上のファイバーはS^1加群になる。それを

$$TM|P_i = \sum_{k=1}^{n} t^{m_{ik}}$$

と表す。ここで，tは標準的な1次元S^1加群であり，m_{ik}は0でない整数である。

各，P_iに対して，

$$p_i = \#\{k ; m_{ik} > 0\}$$

とおき，$q \in \mathbb{Z}$，$0 \leq q \leq n$，に対し

$$\rho_q = \#\{P_i ; p_i = q\}$$

とおく。

<u>定理2</u>（[H]$_1$）　$\{P_1, \cdots, P_\chi\}$を不動点の全体とする。このとき，$\chi = \chi(M)$はMのオイラー数と一致し，

$$\sum_{i=1}^{\chi} \prod_{k=1}^{n} \frac{1 - \lambda t^{m_{ik}}}{1 - t^{m_{ik}}} = \sum_{q=0}^{n} \rho_q \lambda^q$$

が成り立つ。しかも，$\rho_q = \rho_{n-q}$である。ここで，λは不定元である。

この型の不動点定理については[H]$_1$を見られたい。

(M, ω)がシンプレクティックS^1多様体で慣性写像μが存在するときは，☆を満たす概複素構造Jを用いることにする。そのとき，次の補題が成り立つ。

<u>補題</u>　慣性写像μの臨界点としてのP_iにおける指数λ_iに対し，

$$\lambda_i = 2p_i .$$

したがって，このとき

$$b_{2q}(M)=\rho_q, \quad b_{2q+1}(M)=0.$$

§3 結果

最も簡単なものを一つだけあげておく。

定理3 (M,ω) はシンプレクティック S^1 多様体で，

1) 不動点はすべて孤立点，

2) 作用は半自由，

3) $c_1(M)=0$

を満たすものとする。そのとき，

$$H_*(M)\cong H_*(S^2\times\cdots\times S^2)$$

が成り立つ。 $\dim M=4$ のときは，M は $S^2\times S^2$ と微分同型である。

証明。 定理2の式で $\lambda=0$ とおく。条件2)から $m_{ik}=\pm 1$ であるから

$$左辺=\sum_q \frac{\rho_{n-q}}{(1-t)^q(1-t^{-1})^{n-q}}$$

$$=\frac{1}{(1-t)^n}\sum_q \rho_{n-q}(-t)^{n-q}$$

$$右辺=\rho_0.$$

よって，

$$\sum \rho_{n-q}(-1)^{n-q} = \rho_0 (1-t)^n .$$

これから，

$$\rho_q = \rho_0 \binom{n}{q} .$$

一方，条件3)から慣性写像が存在し，したがって補題により

$$b_{2q}(M) = \rho_q = \rho_0 \binom{n}{q}, \quad b_{2q+1}(M) = 0 .$$

特に $\rho_0 = 1$ であるから，

$$b_{2q}(M) = \binom{n}{q} .$$

これが求める最初の結論である．

4次元のときは，流れ grad μ を利用して，同型 $M \cong S^2 \times S^2$ を構成する．

文献

[A-H] K. Ahara & A. Hattori, A classification of 4-dimensional symplectic S^1-manifolds admitting moment map, preprint.

[A] M. F. Atiyah, Convexity and commuting Hamiltonians, Bull. London Math. Soc. 14 (1982), 1-15.

[A-B]$_1$ M. F. Atiyah & R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. Roy. Soc. London A308 (1982), 523-615.

[A-B]$_2$ ———————————, The moment map and equivariant cohomology, Topology 23 (1984), 1-28.

[B] A. Bialynicki-Birula, Some theorems on action of algebraic groups, Ann. of Math. 98 (1973), 480-497

[F] T. Frankel, Fixed points on Kähler manifolds, Ann. of Math. 70 (1959), 1-8.

[K] F. Kirwan, Cohomology of Quotients in Symplectic and Algebraic Geometry, Princeton UP, 1984

[H]$_1$ A. Hattori, S^1-actions on unitary manifolds and quasi-ample line bundles, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 31(1985), 433-486.

[H]$_2$ ———, Circle actions on symplectic manifolds, to appear in Proc. Intn. Conf. on Transf. Groups, Osaka 1987.

[O] K. Ono, Equivariant projective imbedding theorem for symplectic manifolds, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 35(1988), 381-392.

拡大的写像の力学系

筑波大・数学　平出 耕一

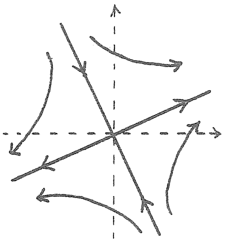
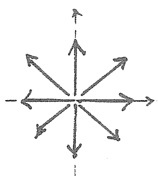
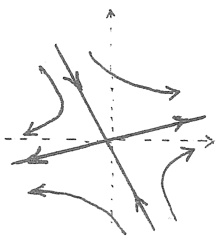
距離空間上の写像が拡大的であるとは，異なる2点の軌道がある定数以内の距離を保ち続けることが出来ないときをいう．拡大性の概念は1950年にUtzによって導入された．当時は，どのような空間上に拡大的写像が存在するか？が主に研究された．その後エルゴード理論において位相的エントロピーが導入されてから，確率論的エントロピーとの関係を調べる上で，拡大性は有益な概念であることが認識された．また微分力学系理論においてAnosov系は拡大的であり，Axiom A系はその非遊走集合上で拡大的である．この事は，これらの系を研究する上で重要な役割を果してきた．

1975年に，Mañé [7] は拡大的微分同相写像の研究からquasi-Anosovと呼ばれる拡大的写像の新しいクラスを見い出した．一方，Thurston [8] は閉曲面上の微分同相写像を分類する為に，pseudo-Anosovの概念を

導入した． 閉多様体上の拡大的写像で今までに知られているものは，この2つだけである．

本講演では，先ず拡大性の定義を与え，閉曲面，n次元トーラス上の拡大的写像の特徴付けについて述べる．次に拡大性をもつ可微分写像について考える． 最後に正拡大的写像の特徴付けについて述べる．

次の行列は $\mathbb{R}^2$ 上の拡大的写像の典型的な例である．

	I	II	III
行列	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
固有値	$0<\frac{3-\sqrt{5}}{2}<1<\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$1<\frac{5\pm\sqrt{5}}{2}$	$0<2-\sqrt{2}<1<2+\sqrt{2}$
行列式	1	5	2
原点付近での挙動			

I，II，III の行列は $\mathbb{Z}^2\subset\mathbb{R}^2$ を不変にしているから，2次元トーラス $T^2=\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ 上の写像を導く． このときIは自己同型写像，II，III は準同型写像である．

一般的に拡大性の定義を与える． 以下 (X, d) は距離空間とする．

(I) $f : X \to X$ は同相写像とする． f が <u>拡大的</u> であるとは，定数 $e > 0$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $d(f^i(x), f^i(y)) \leq e \ (\forall i \in \mathbb{Z})$ ならば $x = y$ であるときをいう．

(II) $f : X \to X$ は連続写像とする． f が <u>正拡大的</u> であるとは，定数 $e > 0$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $d(f^i(x), f^i(y)) \leq e \ (\forall i \geqq 0)$ ならば $x = y$ となるときをいう．

X がコンパクトのとき，$f : X \to X$ が正拡大的同相写像ならば X は有限集合に限ることに注意する．

(III) $f : X \to X$ は連続写像とする． 直積位相空間 $\prod_{-\infty}^{\infty} X_i$ $(X_i = X)$ の閉部分集合 $X_f = \{x = (x_i) \in \prod_{-\infty}^{\infty} X_i : f(x_i) = x_{i+1} \ (\forall i \in \mathbb{Z})\}$ を考える． f が <u>c-拡大的</u> であるとは，定数 $e > 0$ が存在して任意の $x = (x_i), y = (y_i) \in X_f$ に対し $d(x_i, y_i) \leq e \ (\forall i \in \mathbb{Z})$ ならば $x = y$ のときをいう．

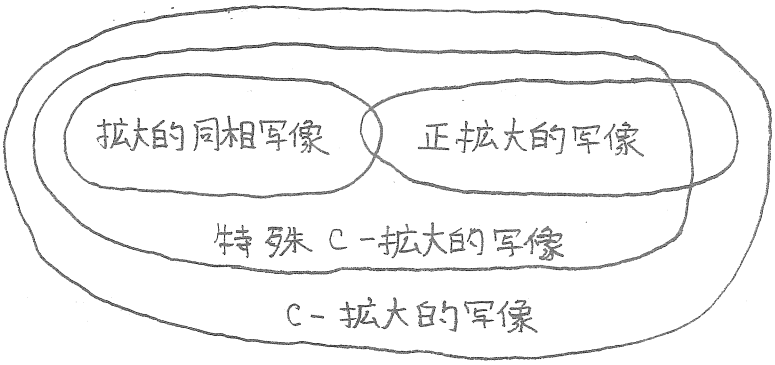
(IV) $f : X \to X$ は c-拡大的とする． f が <u>特殊 c-拡大的</u> であるとは，$x = (x_i), y = (y_i) \in X_f$ に対

して $x_0 = y_0$ ならば $W^u(x) = W^u(y)$ となるときをいう． ここで $W^u(x) = \{y_0 \in X : \exists (y_i) \in X_f \text{ s.t. } d(x_i, y_i) \to 0,\ i \to -\infty\}$.

同相写像 $f: X \to X$ に対して

拡大的 ＝ C-拡大的 ＝ 特殊C-拡大的

である． 拡大性の間には次の図のような関係がある．



拡大的，正拡大的，C-拡大的，特殊C-拡大的を総称して単に拡大的という． Ⅰ，Ⅱ，Ⅲの定数 $e>0$ を f の<u>拡大定数</u>という。 空間 X がコンパクトのとき，拡大性は X の距離の取り方に依存しないし，位相共役に関して不変である． 特に X が閉多様体の場合，正拡大的写像は被覆度2以上の被覆写像である． しかし一般にC-拡大的写像は被覆写像とは限らない．

以後空間はコンパクトとし，連続写像は被覆写像の

場合を考える．　閉曲面上で次の結果が得られている．

定理1　　閉曲面 M 上の被覆写像 f が c-拡大的であるとする．　このとき

1)　$f: M \to M$ が単射ならば，f は pseudo-Anosov であって，特に $M = T^2$ のとき f は POTP を満たす([5])，

2)　$f: M \to M$ が単射でないとき，$M = T^2$ あるいは $M = K^2$ (クライン管)であって，a) f が正拡大的ならば f は POTP をもつ，b) f が正拡大的でないならば $M = T^2$ に限り f は POTP をもつ．

連続写像 $f: X \to X$ が POTP (擬軌道追跡性) をもつとは，任意の $\varepsilon > 0$ に対し $\delta > 0$ が存在して任意の δ-擬軌道 $\{x_i\}_{i=a}^{b}$ (すなわち $d(f(x_i), x_{i+1}) < \delta$，$a < \forall i < b$) に対して $d(f^i(x), x_i) < \varepsilon$ $(a < i < b)$ を満たす点 x が存在するときをいう．　定理1より T^2 上の任意の c-拡大的被覆写像は POTP をもつことが分かる．　定理1の証明は空間が閉曲面であることを本質的に使っているので，その方法を高次元に応用することは困難である．そこで n 次元トーラス T^n 上の c-拡大的被覆写像が

POTP を満たす場合について考える。 この場合次が成立する.

定理 2 ([1]) 被覆写像 $f: T^n \to T^n$ は C-拡大的であって POTP を満たすとする。 このとき

1) f が同相写像ならば, f は T^n 上の自己同型写像 (I 型) と位相共役である ([4])

2) f が正拡大的であるならば, f は T^n 上の準同型写像 (II 型) と位相共役である

3) f が 1) 2) 以外の特殊 C-拡大的写像であるならば, f は T^n 上の準同型写像 (III 型) と位相共役である

4) f が C-拡大的ならば, n-ソレノイダル群とその上の自己同型写像 A が存在して, 逆極限 $\varprojlim(T^n, f)$ は A と位相共役である.

C-拡大的被覆写像 $f: T^n \to T^n$ はいつ POTP をもつか？が問題となる. この問題を扱うために, f が正則写像の場合を考える.

M を閉 C^∞ 多様体とし, $f: M \to M$ を正則写像とする.

Λ はMの閉部分集合で $f(\Lambda)=\Lambda$ を満たすとする。このとき Λ が f の双曲型集合であるとは，定数 $c>0$ と $0<\lambda<1$ が存在して任意の $x=(x_i)\in\Lambda_f$ に対して，$T_{x_i}M$ が次の条件を満たす部分空間 $E^s(x_i;x)$, $E^u(x_i;x)$ の直和 $T_{x_i}M=E^s(x_i,x)\oplus E^u(x_i,x)$ に分解できるときをいう：

a) $D_{x_i}f\left(E^\sigma(x_i;(x_i))\right)=E^\sigma(x_{i+1};(x_{i+1}))\qquad \sigma=s,u$

b) $\|D_{x_i}f^n(v)\|\leqq c\lambda^n\|v\|\qquad v\in E^s(x_i;x),\ n\geqq 0$

c) $\|D_{x_i}f^n(v)\|\geqq c^{-1}\lambda^{-n}\|v\|\qquad v\in E^u(x_i;x),\ n\geqq 0$

部分空間 $E^s(x_i;x)$ は x に依存しないので $E^s(x_i)=E^s(x_i;x)$ で表わす。しかし一般に $x\neq y$, $x_i=y_i$ であっても $E^u(x_i;x)\neq E^u(y_i;y)$ の場合がある。

f の非遊走集合 $\Omega(f)$ が双曲型で周期点の集合が $\Omega(f)$ で稠密のとき，f を Axiom A といい，M全体が双曲型のとき，f を Anosov という。

$$A(M)=\{\text{Anosov}\}$$

$$CE(M)=\{\text{C-拡大的正則写像}\}$$

とおく。このとき $A(M)\subset \mathrm{int}\,CE(M)$ であり，次が成立する。

<u>定理3</u>　$f \in \mathrm{int}\, CE(M)$ であるための必要十分条件は

1) f は Axiom A

2) 任意の $x \in M$ と任意の $\mathfrak{X} = (x_i) \in M_f$ $(x_0 = x)$ に対して $T_x W^s(x) \cap T_x W^u(\mathfrak{X}) = \{0\}$.

一般に $f \in \mathrm{int}\, CE(M)$ は Anosov であるとは限らない（そのような例は連結和 $T^3 \# T^3$ 上に構成されている [2]）。　しかし $M = T^3$ のとき "$f \in \mathrm{int}\, CE(T^n)$ は Anosov" が予想される。　これが成立すれば任意の $f \in \overline{\mathrm{int}(T^n)} \cap CE(T^n)$ は POTP をもつことが分かる。

最後に，正拡大的写像の特徴付けについて述べる．この写像の場合は，上で述べたものよりもっと一般的な結果が得られている．

N を単連結巾零リー群とし，Aff(N) を左移動と自己同型写像から生成される群とする。　$\Gamma \subset \mathrm{Aff}(N)$ を N に一様，自由かつ固有不連続に作用する部分群とする．　このとき N/Γ は <u>infra-nil-manifold</u> と呼ばれる．　$A : N \to N$ を微分 $dA : \mathcal{L}(N) \to \mathcal{L}(N)$ の固有

値の絶対値がすべて1より大きい自己同型写像とする。A が N/Γ 上の写像を導くとき，これを <u>expanding infra-nil-endomorphism</u> と呼ぶ。

<u>定理4（[3]）</u>　M は任意の閉多様体，$f:M\to M$ は正拡大的写像とすると，f は expanding infra-nil-endomorphism と位相共役である。

閉多様体上の正拡大的写像は開写像であった。　しかし一般にコンパクト距離空間上の正拡大的写像 f は開写像とは限らない。　次のことが成立する：

$$f \text{ が 開写像 } \Longleftrightarrow f \text{ が POTP をもつ.}$$

<u>定理5（[6]）</u>　X はコンパクト連結局所連結距離空間とし，$f:X\to X$ は正拡大的写像とする。　もし X が弱局所単連結で f が開写像ならば，X は閉多様体でなければならない。

参考文献

[1] N. Aoki and K. Hiraide, Generalized foliations and algebraic representations of maps on dynamical systems, preprint.

[2] J. Franks and C. Robinson, A quasi-Anosov diffeomorphism that is not Anosov, Trans. AMS, 223 (1976), 267-278.

[3] K. Hiraide, Positively expansive maps and growth of fundamental groups, Proc. AMS, 104 (1988), 934-941.

[4] ________, Expansive homeomorphisms with the pseudo-orbit tracing property of n-tori, to appear.

[5] ________, Expansive homeomorphisms of compact surfaces are pseudo-Anosov, to appear.

[6] ________, Positively expansive open maps of Peano spaces, preprint.

[7] R. Mañé, Expansive diffeomorphisms, L.N. Math., 468, Springer, 1975, 162-174.

[8] W. Thurston, On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces, Bull. AMS, 19 (1988), 417-431.

Approximate Shape と応用について

山口大学教育学部
渡辺　正

§１．動機ずけ．

初めに基本的なカテゴリーを定義しておく．

TOP　：位相空間と連続射像からなるカテゴリー．

POL　：多面体と連続射像からなるカテゴリー．

HTOP：位相空間と連続射像のホモトピー類からなるカテゴリー．

HPOL：多面体と連続射像のホモトピー類からなるカテゴリー．

１９８６年にK.Borsukが空間の局所的性質を無視し大局的性質を調べる幾何学を始めた．それがShape理論である，多くの数学者により研究されている面白い理論である．しかし，目的からして，Shape理論では局所的性質を調べる事はできない．そこで，局所的性質を調べる事ができるようにShape理論を作り直せないか？
これが直接的は動機である．但し，単なる作り直しでは面白くない．歴史的背景を具現したものでなくてはならない．その為に歴史的背景から眺めてみることにする．

一般的な位相空間の性質を調べるときに，通常の道具では役にたたない．例えば，特異ホモロジー群やホモトピー群等は役にたたない．通常の道具が役にたつのは多面体やANRに対してである．そこで，多面体やANRを”良い空間”と言うことにする．その他の空間を”悪い空間”と言うことにする．次のことは基本的問題である．

問題１：悪い空間の性質を調べるには如何なる方法があるか？

この問題は基本問題である為に，今世紀初頭より多くのトポロジストにより種々の方法が提唱されてきた．これらは，３つの段階に分

類される．

第１段階．ホモロジー理論を多面体から一般空間へ拡張する為に提唱された方法論である．これらは，1930-40年代前後に提唱され，Cechホモロジー理論，Vietorius ホモロジー理論，Steenrod ホモロジー理論として生き残っている．しかし，時代的制約のためか，かれらはホモロジー理論の面のみを考察して，それらの背後にある”もの”を把握できなかった．これらを把握しようとする試みはあった（Christie，1944）が成功しなかった．

第２段階．第１段階での方法論の背後にある”もの”を抽出し，理論として展開した段階である．K.Borsukは1968年にShape理論を導入した．そして，Cechホモロジー理論とVietorius ホモロジー理論の背後にある”もの”を抽出し把握した．その後，Steenrodホモロジー理論の背景にある”もの”が抽出され，Strong Shape理論が創られた．Shape理論とStrong Shape理論とは，多くの研究者を引き付け，魅力ある分野を形成している．

ところで，ホモロジー理論はホモトピー不変であるから，第１段階での方法は総てHTOPでの世界での出来事である．従って，第２段階で抽出した”もの”もHTOPでの世界での出来事である．故に，第２段階での理論はHTOPでの世界で問題１に対する答を与える．

解答２．Shape理論とStrong Shape理論は，良い空間の世界HPOLを基にして悪い空間の世界HTOPを調べる道具である．

別の言葉で述べると，Shape理論は，多面体上でのホモトピー理論の一般空間への自然な拡張を与える，またStrong Shape理論は，多面体上でハイヤーホモトピー理論の一般空間への自然な拡張を与える．これらはホモトピーの世界HTOPでの話である．それでは，質問１に対する　TOPの世界での解答は？解答２に比して書き改めて見ると次のようになる．

質問３．良い空間の世界POLを基にして悪い空間の世界TOPを調べる道具は有るか？

第３段階．第２段階での背後にある”もの”を質問３の見地から更に抽出し理論として展開した段階である．渡辺がApproximate Shape を1987年に導入し，質問３に対する１つの答えを与えた．この道具は TOPの世界での多くの応用がある．特に，一般的ANR空間や不動点定理にたいしてである．

§を改めてApproximate Shapeの意味を考える事にする．

§２．古典的方法について．

質問３は今世紀初頭より提起されている古くからある基本的問題である．先人達の開発した方法を見てみよう．Alexsandroff, Lefschetz 等は，悪い空間を良い空間に展開する事を考えた．その為にInverse systemsとそのInverse limitsなる概念を導入した．これらの定義を念の為に述べる．

Cを或カテゴリーとする．

$X = \{X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\}$がCでのInverse systemであるとは，次の条件(１)-(２)を満たす時である．

(１)Λは有向順序集合で各$\lambda\in\Lambda$に対してX_λはCの対象である．

(２)各$\lambda \leq \lambda' \leq \lambda''$ に対して，$p_{\lambda\lambda'}: X_{\lambda'} \to X_\lambda$はCの射であり，$p_{\lambda\lambda'} p_{\lambda'\lambda''} = p_{\lambda\lambda''}$と$p_{\lambda\lambda} = 1_{X_\lambda}$を満たす．

Xのindex集合Λが正の整数の集合N^+ の時Xをinverse sequence と言う．

XとY $= \{Y_\mu, q_{\mu\mu'}, M\}$をCでのinverse systemとする．

$f = \{\varphi, f_\mu\}: X \longrightarrow Y$がXからYへのsystem mapであるとは，fが次の条件(5)-(6)を満た すときである．

(3) $\varphi: M \longrightarrow \Lambda$が写像であり，各$\mu \in M$に対して，$f_\mu: X_{\varphi(\mu)} \longrightarrow Y_\mu$ がCの射である．

(4) 各$\mu \leqq \mu'$にたいして，ある $\lambda \geqq \varphi(\mu), \varphi(\mu')$があり $f_\mu p_{\varphi(\mu),\lambda} = q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu'),\lambda}$ を満たす．

$g = \{\psi, g_\nu\}: Y \dashrightarrow Z = \{Z_\nu, r_{\nu\nu'}\}$ を system map とするとき， fとgの合成gfを $\{\varphi\psi, f_{\varphi(\nu)} g_\nu\}: X \dashrightarrow Z$ と定義する．$1_X = \{1_\Lambda, 1_{X_\lambda}\}: X \dashrightarrow X$ を identity system map である．

このとき，カテゴリー INV-C を定義する：対象はCでのすべての inverse system (index 集合 Λを固定しない．)．射はすべてのsystem mapとし，合成は上で定義したものとする．

$p = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\}: X \longrightarrow X$が対象Xからinverse system Xへのsystem mapであるとは，pが次の条件(3)-(4)を満たす時である．

(3) 各$\lambda \in \Lambda$に対して，$p_\lambda : X \longrightarrow X_\lambda$は射である．

(4) 各$\lambda \leqq \lambda'$に対して， $p_{\lambda\lambda'} p_{\lambda'} = p_\lambda$ を満たす．

System map $p: X \longrightarrow X$がXのinverselimitであるとは，pが次の条件 (5)を満たすときである．

(5)任意のsystem map $q = \{q_\lambda : \lambda \in \Lambda\}: Y \longrightarrow X$ に対して，射$h: Y \longrightarrow X$で，各$\lambda \in \Lambda$に対して$q_\lambda = p_\lambda h$ を満たすものが唯一存在する．

pがinverse limitである時に $p = \lim X$と書く．時々，

XのことをXのinverse limitと言い，$X = \lim X$ と書くこともある． この時，XをXのinverse system への展開と言う．

$p:X \longrightarrow X$, $q = \{q_\mu\}:Y \longrightarrow Y$をinverse limit とする．射$h:X \longrightarrow Y$ がsystem map $f:X \longrightarrow Y$ の inverse limitであるとは，次の条件(7)をみたすことである．

(7) 各$\mu \in M$に対して，$q_\mu h = f_\mu p_{\varphi(\mu)}$.

この時，hをfのinverse limitと言い，$h = \lim f$と書く．fをhのp,q二関する展開と言う，または，単にfをhの展開とも言う．

定義に関して，次の基本的性質がある．

(2.1)定理． (1) TOPに於いては，任意のinverse system Xは inverse limit， $\lim X$,をもつ，しかもそれらは互いに同型である．

(2) HTOP では，inverse limit は一般には存在しない．

(3) $p:X \longrightarrow X$, $q:Y \longrightarrow Y$をCに於けるinverse limitsとする． 任意の system map $f:X \longrightarrow Y$ は，p,qに関する $\lim f:\lim X \longrightarrow \lim Y$ を唯一つもつ．

inverse limitsの概念は数学のいろいろな分野で，勿論トポロジー でも，使用され役立っている．最近の成果では Dranisnikov の CE-map 問題の解決であろう．即ち，彼は inverse sequenceを用いて，被覆次元は無限であるが，有限次元コホモロジー次元をもつ空間を構成した．この様な空間は inverse limitの概念無しでは，まず作れないであろう．この様に，inverse limit は複雑な空間をつくる為に非常に有効である．

ここでは， INV-TOP， INV-POL を使用する．特に，

INV-POLの対象 X, i.e, Xの各項X_λが多面体の時，Xを多面体的inverse systemと言う．また，Xが空間Xの多面体的展開であるとは，Xが多面体的 inverse system で lim X = X なるときである．

基本的には次の４通りのタイプの問題がある．

(A)空間Xが与えられたとき，Xの性質から，Xの良い展開Xを求め，Xの性質を調べる．

(B) inverse system X が与えられたとき，Xの性質から，空間 lim X の性質を調べる．

(C) 写像 h:X ⟶ Y が与えられたとき，hの性質から，hの良い展開f:X ⟶ Yの性質を調べる．

(D) inverse system f:X ⟶ Yが与えられたとき，fの性質から，lim f:lim X ⟶ lim Y の性質を調べる．

一般には，(A)は空間の展開問題，(B)は写像の展開問題，(C)は空間の極限問題，(D)は写像の極限問題といわれる．

次の結果は良く知られている．

(2.2)定理．(1) 空間Xが多面体的 inverse system への展開をもつ為の必要十分条件はXが topologically complete である．

(2) 空間Xが有限多面体的 inverse system への展開をもつ為の必要十分条件はXがコンパクトなハウスドルフ空間である．

(3) Xをコンパクト距離空間とする．この時，dim X ≦ n であるための必要十分条件はXが有限多面体的 inverse sequence X への展開で Xの各項の次元がn以下となるものを持つことである．

(4) XとYとをコンパクト空間から成る inverse system で，f = {φ, f_μ}:X ⟶ Y を system map とする．各f_μが monotone であれば，lim f:lim X ⟶ Y もmonotone である．

(5) X,Y を topologically completeな空間とする．この時，任意 の連続写像 $h:X \longrightarrow Y$ に対して，或多面体的展開 $p:X \longrightarrow X$, $q:Y \dashrightarrow Y$ があり，h は p,q に関する或 system map $f:X \dashrightarrow Y$に展開できる．

(2.2)において，(1),(2)は，どの様な空間が良い空間に展開できるかを調べている．(3)は，空間の被覆次元が多面体の次元で調べられる事を示している．これらは，タイプとしては，(A),(B),(E)である．(4)は(D)のタイプである．1981年になり，初めて(5)が証明された．(5)は (C)のタイプである．

基本的には，(A)-(D)は次のようにTOPを調べる為に使われる：

(E)空間Xに関する問題Pが与えられたとき，空間Xを良い空間から成るinverse systemへの展開Xをもとめ，問題PをX上の問題P'に置き換える(展開問題)．問題P'をX上で解き，その結果を空間Xの性質に置き換える(極限問題)．こうして，初めの問題Pを解く．

(F) 写像$h:X \longrightarrow Y$に関する問題Pが与えられたとき，良い写像から なるhの展開$f:X \longrightarrow Y$を求め，問題Pをf上の問題P'に置き換える(展開問題)．問題P'をf上で解き，その結果をhの性質に置き換える(極限問題)．こうして，初めの問題Pを解く．

これがinverse limitsを使用するに際してのストラテジイーである．ところで，空間Xと恒等射像1_Xとは，通常同一視されるから，(A)-(F)のうちで本質的なのは(C),(D),(F)である．

歴史的にみると，写像の展開問題(C)がいつも弱点となってきた．(2.2)の(5)を見てみる．この定理は存在を主張している．それはそれで大切な事実である．しかし，hに依存してX,Y,fが決まり，しかも，X,Yは自分の都合の良いように選ぶことはできない．故に，(F)の観点から見ると，あまり役に立たない定理である．それでは，(F)の観点から見て有用な形の定理を予想してみよう．

(2.3)予想．$p:X \dashrightarrow X$，$q:Y \dashrightarrow Y$を空間X,Yの任意な多面体的展開とする．任意の連続写像 $h:X \dashrightarrow Y$にたいして，hのp,qに関する展開が存在する．

(2.4)例．CをCantor set，$I = [0,1]$ とする．$h:C \dashrightarrow I$を上への　連続写像とする．inverse sequence

$C = \{C_i, p_{i,j}, N^+\}$と$I = \{I_i, q_{i,j}, N^+\}$

を次のようにとる．各i,jにたいして，$I_i = I$，

$q_{i,j} = 1_I$，C_iは有　限集合であり $\lim I = I$，

$\lim C = C$．$p = \{p_i\}:C \dashrightarrow C$，$q = \{q_i\}:I \dashrightarrow I$ を inverse limit とする．各$q_{i,j} = 1_I$

であるから，各$q_i = 1_I$としてよい．

hのp,qに関する展開は存在しない．

何故ならば，もし展開 $f = \{\varphi, f_i\}:I \dashrightarrow C$が存在したとせよ．各$i$について，(7)から$q_i h = p_{\varphi(i)} f_i$．ところで，

hが上への写像で$q_i = 1_I$であるから，$q_i h$は上への写像となる．

故に$f_i:I_{\varphi(i)} \dashrightarrow C_i$が上への写像となる．

従いC_iは連結となる．これは矛盾である．

例(2.4)はTOPでは予想(2.3)が成立しない事を示している．ところが，

(2.5)定理．(2.3)はコンパクト空間にたいしては，HTOPで成立する．

この事実(2.5)が Shape理論を作るときの出発点であった．しかし，(2.5)はコンパクトという条件を落とすと成立しない．

つまり，shape 理論では inverse limitの概念はコンパクトより一般な空間には役に 立たない．そこで，inverse limitに替わるものを色々模索した．そして，1981年 Mrdesic により resolution という概念に到達し，この時より inverse limit の理論は近代にはいる．

§３．最近の方法．

１987年に近似の方法で可換 approximate system を導入して，(2.3)予想の一の解答を与えると，共に質問３に対しても一の解答をあたえる．そして，不動点定理，一般ANR 空間の組織的分類，UV^n写像の特徴ずけ，Vietorius-Smale 定理へ応用した．

ここ2,3年の間に，L.Rubin，J.Segal，S.Mardesic 等によりコンパ クト空間での，非可換 approximate systemが導入され，コホモロジカル次元や被服次元に応用された．そして，Mardesic-Watanabe により，一般空間での非可換 approximate system の基本定理が作られた．

ここでは，簡単の為可換の場合の基礎概念を説明する．

Xを空間とし，$\mathcal{U} = \{U_a : a \in A\}$をXの開被覆とする．すなわち，各$U_a$ はXでの開集合であり，$X = \cup\{U_a : a \in A\}$．開被覆$\mathcal{V} = \{V_b : b \in B\}$が$\mathcal{U}$の細分であるとは，各$V_b \in \mathcal{V}$ に対して，或$U_a \in \mathcal{U}$ がありV$_b \subset U_a$を満たすこと．この時，$\mathcal{V} \leq \mathcal{U}$ と書く．

Xの部分集合Lに対して，$st(L,\mathcal{U}) = \cup\{U_a \in \mathcal{U}: U_a \cap L \neq \emptyset\}$とする． 各自然数$n \geq 1$に対して$st^1\mathcal{U} = st\mathcal{U} = \{st(U,\mathcal{U})\ \ U \in \mathcal{U}\}$，$st^n\mathcal{U} = st(st^{n-1}\mathcal{U})$と定義する．

$\mathcal{U}$がXの正規開被覆であるとは，或Xの開被覆の列$\mathcal{U}_0, \mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \mathcal{U}_3, \ldots$で$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U}$ かつ 各iにつき $\mathrm{st}\mathcal{U}_{i+1} \leq \mathcal{U}_i$を満たすものが存在するときである．$\mathcal{C}ov(X)$を空間Xの全ての正規開被覆の集まりとする．
正規開被覆は1の分割をもつ開被覆のことである．故に，
パラコンパクト空間(コンパクト空間や距離空間はパラコンパクトである．)では，任意の開被覆は正規開被覆である．これから，被覆とは正規開被覆を意味するものとする．

$f, g : X \longrightarrow Y$を連続写像とし，$\mathcal{V} \in \mathcal{C}ov(X)$ とする．この時$f^{-1}\mathcal{V} = \{f^{-1}V : V \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{C}ov(X)$である．fとgとが$\mathcal{V}$近似であるとは，各$x \in X$に 対して或$V \in \mathcal{V}$で
$f(x), g(x) \in V$となるものが存在するときである．この時，
記号では $(f, g) \leq \mathcal{V}$と書く．

有向順序集合$(A, \leq)$が cofinite であるとは，各$a \in A$にたいして$\{a' \in A : a' \leq a\}$ が有限集合である事である．

$(X, U) = \{X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\}$がapproximate inverse system であると は，次の条件(1)-(3)を満たす時である．

(1) $X = \{X_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\}$は，TOPでのinverse system である．

(2)Λはcofiniteな有向順序集合で各$\lambda \in \Lambda$に対して，
$\mathcal{U}_\lambda \in \mathcal{C}ov(X_\lambda)$で あり，各$\lambda' \geq \lambda$にたいして，

$p^{-1}_{\lambda\lambda'}\mathcal{U}_\lambda \geq \mathcal{U}_{\lambda'}$を満たす．

(3) 各$\lambda \in \Lambda$，各$\mathcal{U} \in \mathcal{C}ov(X_\lambda)$に対して，或$\lambda' \geq \lambda$があり

$p^{-1}_{\lambda'' ,\lambda}\mathcal{U} \geq \mathcal{U}_{\lambda''}$ である．

各X_λが多面体の時，(X, U)を多面体的approximate inverse systemと言う．Xのindex集合Λが正の整数の集合N^+ の時，approximate inverse sequenceと言う．

$(X,\mathcal{U})$と$(Y,\mathcal{V}) = \{Y_\mu, \mathcal{V}_\mu, q_{\mu\mu'}, M\}$をapproximate inverse system とする. $f = \{\varphi, f_\mu\}:(X,\mathcal{U}) \longrightarrow (Y,\mathcal{V})$がapproximate mapであるとは, fが 次の条件(4)-(5)を満たすときである.

(4) $\varphi: M \longrightarrow \Lambda$が写像であり, 各$\mu \in M$に対して, $f_\mu: X_{\varphi(\mu)} \longrightarrow Y_\mu$が連続写像であり, $f_\mu^{-1}\mathcal{V}_\mu \geq \mathcal{U}_{\varphi(\mu)}$.

(5) 各$\mu \leq \mu'$に対して, $\lambda \geq \varphi(\mu), \varphi(\mu')$があり $(f_\mu p_{\varphi(\mu),\lambda}, q_{\mu\mu'} f_{\mu'} p_{\varphi(\mu'),\lambda}) \leq \mathcal{V}_\mu$ を満たす.

$g = \{\psi, g_\nu\}:(Y,\mathcal{V}) \dashrightarrow (Z,\mathcal{W}) = \{Z_\nu, \mathcal{W}_\nu, r_{\nu\nu'}, N\}$ を approximate map とするとき, $gf = \{\varphi\psi, g_\nu f_{\psi(\nu)}\}$と定義する. この時 $gf:(X,\mathcal{U}) \dashrightarrow st(Z,\mathcal{W}) = \{Z_\nu, st\mathcal{W}_\nu, r_{\nu\nu'}, N\}$であり, $gf:(X,\mathcal{U}) \dashrightarrow (Z,\mathcal{W})$では無い事に注意しなければならない.
従って,合成を定義する為に工夫が必要である.

$\alpha: N \dashrightarrow N$が$(Z,\mathcal{W})$のn-細分写像であるとは, αが増加写像であり,　かつ, $r_{\nu,\alpha(\nu)}^{-1}\mathcal{W}_\nu \geq st^n\mathcal{W}_{\alpha(\nu)}$
が任意の$\nu \in N$について成立する事である.

(3.1)補助定理. (1) 任意のapproximate inverse system$(Z,\mathcal{W})$は, 任意のnに対して, n-細分写像を持つ.

(2) αを$(Z,\mathcal{W})$の1-細分写像とする時, $r(s)(gf) = \{\varphi\psi\alpha, r_{\nu,\alpha(\nu)} g_{\alpha(\nu)} f_{\psi\alpha(\nu)}\}:(X,\mathcal{U}) \dashrightarrow (Z,\mathcal{W})$は, approximate mapである.

(3) $[r(s)(gf)]$は$[f]$,$[g]$の代表元, 及び1-細分写像sの取り方によらない.

グロタンディエックにより導入されたカテゴリー pro-TOP を念頭においてappro-TOPを定義する：対象をTOPにおける approximate inverse system全体とする．
(X,U)から(Y,V)への射の集合を[(X,U),(Y,V)]とする．
射[f]:(X,U) ---> (Y,V)と射[g]:(Y,V) ---> (Z,W)の合成[g][f]を[r(s)(gf)]と定義する．

(3.2)定理． appro-TOPはカテゴリーである．

appro-POLを多面体的approximate inverse system全体からなる appro-TOPのfull部分カテゴリーとする．同様にappro-FPOL等も定義する．

$p = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\} : X \dashrightarrow (X,U)$ がaproximate system mapであるとは，p:x ---> Xがsystem mapである時とする．approximate system map p:X ---> (X,U)が空間Xのapproximate resolutionであるとは，pが次の条件(6)-(7)を満たす時とする．

(6) 任意の$\mathcal{U} \in \mathrm{Cov}(X)$にたいして，或$\lambda \in \Lambda$があり，$p_\lambda^{-1}\mathcal{U}_\lambda \leqq \mathcal{U}$.

(7) 任意の$\lambda \in \Lambda$にたいし，或$\lambda' \geqq \lambda$があり，$\mathrm{st}(p_\lambda(X), \mathcal{U}_\lambda) \supset p_{\lambda\lambda'}(X_{\lambda'})$.

特に各X_λが多面体の時に，pまたは，(X,U)をXの多面体的 approximate resolutionと言う．ARES(X)を空間Xの approximate resolutionの総て集まりとする．

(3.3)定理．任意の空間は多面体的 approximate resolutionをもつ．特に，コンパクト空間は有限多面体的 approximate resolutionをもつ

$p: X \dashrightarrow (X, U)$, $q = \{q_\mu : \mu \in M\}: Y \dashrightarrow (Y, V)$を approximate resolution, $f: (X, U) \dashrightarrow (Y, V)$を approximate system map とする．fを連続写像$h:$ $X \dashrightarrow Y$のp,qに関するapproximate resolution であるとは，次の条件(7)を満たすこととする．

(7) 各$\mu \in M$について，$(q_\mu h,\ f_\mu p_{\varphi(\mu)}) \leq \vartheta_\mu$.

この時，fをhのp,qにかんする近似展開とも言う．

(3.4)定理．$p: X \dashrightarrow (X, U)$, $q = \{q_\mu : \mu \in M\}: Y \dashrightarrow (Y, V)$を空間X,Yの任意の多面体的 approximate resolutionとする．

(1) 任意の連続写像$h: X \dashrightarrow Y$はp,qに関する approximate resolution $f: (X, U) \dashrightarrow (Y, V)$をもつ．

(2) $f, f': (X, U) \dashrightarrow (Y, V)$を$h: X \dashrightarrow Y$のp,qにかんするapproximate resolutionであれば，$f \equiv: f'$である．

予想(2.3)にたいする一つの答えとして，定理(3.4)がある．即ち，hの近似展開が存在し，しかも，近似展開が幾通りかあってもそれらは互いに同値関係≡:で結ばれている．従って，この同値類を$[h]_{p,q}$と書くことにする．

(3.5)定理．$p: X \dashrightarrow (X, U)$, $p': X \dashrightarrow (X, U)'$, $q: Y \dashrightarrow (Y, V)$, $q': Y \dashrightarrow (Y, V)'$, $r: Z \dashrightarrow (Z, W)$を空間X,Y,Zの任意の多面体的 approximate resolutionとする．

(1) 任意の連続写像$h: X \dashrightarrow Y$, $k: Y \dashrightarrow Z$にたいして，$[kh]_{p,r} = [k]_{q,r}[h]_{p,q}$.

(2) hが位相同型写像ならば，$[h]_{p,q}: (X, U) \dashrightarrow (Y, V)$はappro-POLで同型射となる．

特に，$[1_X]_{p,p} = [1_{(X,U)}]$である．

(3) $[1_Y]_{q,q'}[h]_{p,q} = [h]_{p',q'}[1_X]_{p,p'}$.

X,Yを空間とする．X,Yの多面体的近似展開は幾通りもある．したがって集まり$M(X,Y) = \{[(X,U),(Y,V)]:p:X \dashrightarrow (X,U) \in ARES(X),\ q:Y \dashrightarrow (Y,V) \in ARES(Y)\}$をかんがえる．この集りの上で関係≈を定義する．つまり$[f],[f'] \in M(X,Y)$とする．或多面体的近似展開$p:X \dashrightarrow (X,U)$, $p':X \dashrightarrow (X,U)'$, $q:Y \dashrightarrow (Y,V)$, $q':Y \dashrightarrow (Y,V)'$があり，$f:(X,U) \dashrightarrow (Y,V)$, $f':(X,U)' \dashrightarrow (Y,V)'$となる．$[f] \approx [f']$とは，$[1_Y]_{q,q'}[f] = [f'][1_X]_{p,p'}$が成立するときとする．

この関係≈は同値関係となる．$[f]$の同値類を$<[f]>$と書くことにし$<M(X,Y)> = \{<[f]>:[f] \in M(X,Y)\}$とおく．次に，同値類の合成を次のように考える．$[f] \in M(X,Y),[g] \in M(Y,Z)$とし，$g:(Y,V)' \dashrightarrow (Z,W)'$で$r':Z \dashrightarrow (Z,W)' \in ARES(Z)$とする．この時$<[f]>$と$<[g]>$の合成$<[g]><[f]> = <[g][1_Y]_{q,q'}[f]>$とする．これは，代表元の取り方によらず良く定義できる．

さて，Approximate ShapeカテゴオリーAsh を定義する：対象は総ての位相空間とし，XからYへの射の集合を$<M(X,Y)>$とし，合成は上で定義したものとする．Ashはカテゴリーになる．

近似展開ファンクター $R:TOP \dashrightarrow Ash$を次のように定義する．対象$X$については，$R(X) = X$．射$h:X \dashrightarrow Y$については，$R(h) = <[h]_{p,q}>$, $p \in RES(X)$, $q \in RES(Y)$とする．(3.5)により，Rはファンク ターとなる．

(3.6)定理．Ash はカテゴリーになり，近似展開ファンクター R:TOP $\dashrightarrow$ Ashがある．

inverse limit と approximate resolution との関係は次のようになる．

(3.7)定理．p:X $\dashrightarrow$ (X,U)，q:Y $\dashrightarrow$ (Y,V)を approximate resolutionとする．f:(X,U) $\dashrightarrow$ (Y,V)をapproximate mapとする．

(1) Xがtopologically completeで各X_λがTychonoff空間の時，p:X $\dashrightarrow$ X はinverse limitである．

(2) 各Y，Y_μがtopologically completeでれば，連続写像L(f):X $\dashrightarrow$ Yで，各$\mu \in M$にたいして，$(q_\mu L(f),\ f_\mu p_{\varphi(\mu)}) \leq st\mathcal{V}_\mu$をみたすのが唯一つ存在する．

(3) 条件(2)のもとで，[f] = [f']ならば，L(f) = L(f')．更に，<[f]> = <[f']>ならば，L(f) = L(f')．

$Ash_{C3.5}$，Ash_{PARA}，Ash_{COM}，Ash_{MET}を各々で，各々，全てのtpologically completeな空間，パラコンパクト空間，コンパクト空間，距離空間からなるAshのfull部分カテゴリーとする．$TOP_{C3.5}$，PARAをtpologically completeな空間，パラコンパクト空間からなるTOPのfull部分カテゴリーとする．

(3.5)のLの性質から，L(<[f]>) = L(f)と定義する事ができる．このとき次を得る．

(3.6)定理．L:$Ash_{C3.5}$ $\dashrightarrow$ $TOP_{C3.5}$がファンクター

となり，R:$TOP_{C3.5}$ --→ $Ash_{C3.5}$の逆ファンクターとなる．
つまり，RL = 1,　　LR =1となり，
$Ash_{C3.5}$は$TOP_{C3.5}$と同型である．

この様にして，Approximate Shape のカテゴリーAsh
とその基本 的性質が明らかになった．これから分かるように，
TOPよりAppro-POLの方が，より豊かな内部構造を
もっているので，議論しやすいと言える．

§４．不動点への応用について．

空間Xの多面体的近似展開 $p = \{p_\lambda : \lambda \in \Lambda\} : X \dashrightarrow (X, U) = \{X_\lambda, \mathcal{U}_\lambda, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda\}$がapproximate movableであるとは，つぎの条件(１)を満たすときとする．

(１) 各$\lambda \in \Lambda$に対し，或$\lambda' \geqq \lambda$があり，各$\lambda'' \geqq \lambda$に対し，写像r: $X_{\lambda'} \dashrightarrow X_{\lambda''}$があり，$(p_{\lambda\lambda'}, p_{\lambda\lambda''} r) \leqq \mathcal{U}_\lambda$を満たす．

(４.１)定理．p,p'を空間Xの多面体的近似展開とする．pがapproximate movableであれば，p'もapproximate movable である．

(４.１)により，空間Xがapproximate movable であるとは，その如何なる多面体的近似展開がapproximate movableで有ることとする．

Qを有理数全体からなる体とし，XのQ係数Cechホモロジー群を$H_i(X;Q)$とする．Xが有限タイプであるとは，有る有限個の次元に関してのみ$H_i(X,Q)$がいきのこり，しかも各$H_i(X,Q)$が有限ベクトル空間となるときである．

(4.2)定理．コンパクト空間Xをapproximate movableで有限タイプとする．$h:X \dashrightarrow X$のQ係数Cechホモロジー群にかんするLefschetz数 $L(h) \neq 0$ ならば，hは不動点をもつ．

証明の概略．まず始めに有限多面体的近似$p:X \dashrightarrow (X,U)$をとる．
Xが有限タイプであることから

(i)各nについて，$\{H_n(X_\lambda;Q), p_{\lambda\lambda'*}, \Lambda\}$がstableである．
i.e.,プロベクトルのカテゴリーである有限ベクトル空間と同型である．

$f:(X,U) \dashrightarrow (X,U)$をhのp,pに関する近似展開とする．pが条件(1)を満たすことから，fが次の性質を持つことが分かる．

(ii)各$\lambda\in\Lambda$につき，或$\lambda'\geqq\varphi(\lambda)$があり，各$\lambda''\geqq\lambda$にたいして写像$r:X_{\lambda'} \dashrightarrow X_{\lambda''}$ で $(f_\lambda p_{\lambda\lambda'}, p_{\lambda\lambda''}r) \leqq \mathcal{U}_\lambda$をみたす．

各$\lambda\in\Lambda$にたいして(i)より，十二分に大きいλ''にたいして$rp_{\lambda\lambda''}:X_{\lambda''} \longrightarrow X_{\lambda''}$ を考えると，$L(h)=L(rp_{\lambda\lambda''})$となる．
$X_{\lambda''}$が有限多面体であるから，Lefschetzの不動点定理より$rp_{\lambda\lambda''}$が不動点をもつ．これらの不動点のinverse limitとして，(ii)を使用して，hの$p_\lambda^{-1}\mathcal{U}_\lambda$-不動点を作る．
λが任意であるから，各hの$p_\lambda^{-1}\mathcal{U}_\lambda$-不動点から，inverse limitにより，hの不動点を作る．

(4.3)系．Xをapproximate movableなコンパクト空間とするとき，Xの錘は不動点性をもつ．

詳しい内容は参考論文[14],[18]-[24]をお読み下さい．

References

[1] P.Bacon, Cotinuous functors, General Topology & Appli. 5(1975),321-331.

[2] K.Borsuk, Concerning homotopy properties of compacta, Fund. Math.,19(1968),223-254.

[3] ---------, On a class of compacta, Houston J.Math.,1(1975),1-13.

[4] ---------, On Lefschez-Hopf fixed point theorem for nearly extendable maps, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math.Astronom Phys., 23(1975),117-130.

[5] Eilenberg and N.Steenrod, Foundations of algebraic topology, Princeton, 1952.

[6] H.Freudenthal, Entwicklungen von Raumen und ihren Gruppen, Comp. Math.,4(1937),145-234.

[7] S.Lefschetz, Algebraic topology, AMS, New York,1942.

[8] S.Mardesic, On covering dimension and inverse limits of compact spaces, Illinois J. Math.,4(1960),278-291.

[9] ----------, Approximate polyhedra, resolutions of maps and shape fibrations, Fund. Math. 114(1981),53-78.

[10] --------- and L.R.Rubin, Approximate inverse systems of compacta and covering dimension,to appear in Pacific J.Math.

[11] --------- and J.Segal, Shape Theory, North-Holland,1982.

[12] ----------------, $\mathcal{P}$-like continua and approximate inverse systems, Math.Japonica,

33(1986),895-908.

[13] -----------------, Mapping approximate inverse systems of compacta, to appear in Fund. Math.

[14] --------- and T.Watanabe, Approximate resolutions of spaces and mappings, preprint.

[15] J.Miouszewski, Mappings of inverse limits, Colloq. Math.,10(1963),39-44.

[16] K.Morita, Cech cohomology and covering dimension for topological spaces, Fund. Math., 87(1975),808-815.

[17] ---------, Resolutions of spaces and proper inverse systems in shape theory, Fund. Math.,124(1984),263-270.

[18] T.Watanabe, Approximate shape I, Tsukuba.J.Math.,11(1987),17-59.

[19] ----------, Approximate shape II, Tsukuba. J.Math., 11(1987),303-339.

[20] ----------, Approximate shape III, Tsukuba. J.Math., 12(1988),1-41.

[21] ----------, Approximate shape IV, Tsukuba. J.Math., 12(1988),273-319.

[22] ----------, Approximate expansions of maps into inverse systems, Banach Center Publications,vol.18(1986),363-370.

[23] ----------, The continuity axiom and the Cech homology, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag,Beelin,#1283(1987),221-239.

[24] ----------, Approximate resolutions and covering dimension, preprint.

1階偏微分方程式系と特異点

北大理．泉屋周一

§1．序

C^∞-写像の特異点論は，Whitney, Thom, Mather 等による基礎的理論の構成，さらにその後の Fukuda, Damon, du Plessis, Wilson 等による発展をへて，現在は，"特異点論各論"の時代へ入って来ていると言って良いであろう．事実，すでに英国の Wall 学派や，ロシアの Arnol'd 学派の仕事においても，微分幾何への応用や分岐理論への応用という研究が多々みられる．本講演では，（1未知関数）1階偏微分方程式系の幾何学的理論への特異点論の応用の1つの試みについて報告したい．

以下の系図が我々の立場を表わしている：

Lie − Darboux − E. Cartan
（1階偏微分方程式の幾何学的理論）
Whitney − Thom − Mather
（C^∞-写像の特異点論）

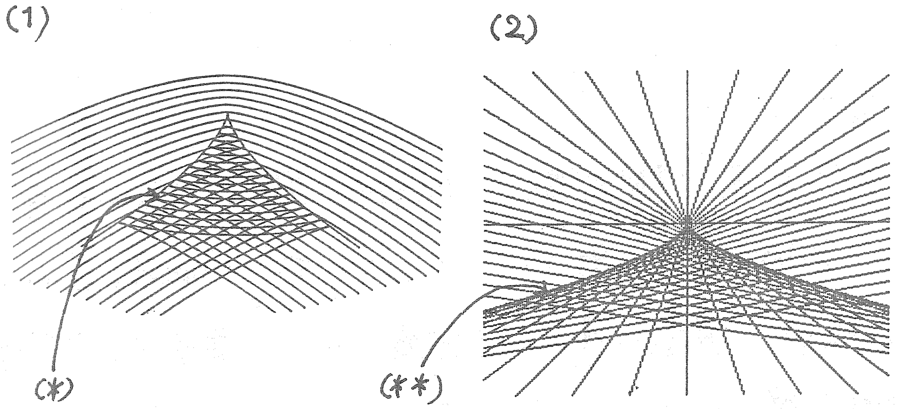
→ 1階偏微分方程式の特異点論？
（Who？）

さて，最初に以下の1階常微分方程式を考える．

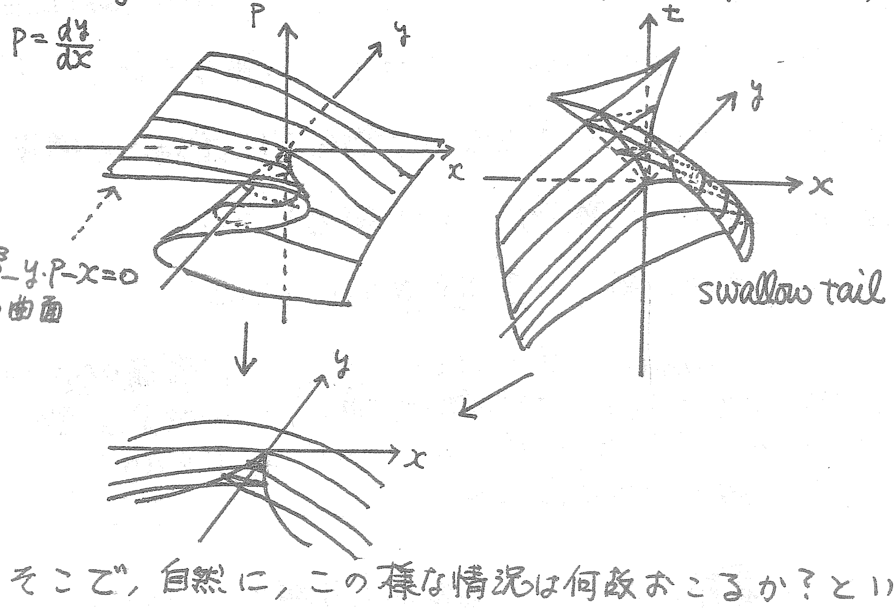
(1) $(dy/dx)^3 - y\cdot(dy/dx) - x = 0$　　(2) $(dy/dx)^3 + x(dy/dx) - y = 0$

これらは，第1積分を持ち，解を求める事が出来る．

その解のグラフを(x,y)平面上にえがくと以下の図のようになる．



ここで(1)の解の図は，swallow tailをたてに切って，それを"generic"に射影したものと理解出来る．（下図）



そこで，自然に，この様な情況は何故おこるか？という疑問がわく．この問に対しては，従来から色々な人が解釈を提出している（[2],[4],[5],[6],[8] [13]）．

また，解の特異点がカスプや交叉だけであり，それらの軌跡として表われる曲線（(1)図(＊)）は方程式の解にはなり得ず，((2)図(＊＊))のように非特異解曲線の包絡線は解となる事などはすでにForsythの教科書（[7] 1885年）の中にみられる（昔の人はなんでも知っていた!）．さらに常微分方程式のdiscriminant（(1)や(2)での人の集合）が"generic"にはカスプとなり(2)のようなClairautの方程式は"generic"ではない事がDarbouxやDyckの時代にすでに知られていた（[5] [6]）．驚くべき事に，この事実はThomによる1972年の再証明([13])が数学的に厳密な最初の証明である．

さて，変数をふやして1階偏微分方程式系とすると，もはや，ForsythやCaratheodoryの教科書([7]，[3])には解の特異点や方程式の特異点に関する記述は皆無と言って良い，おそらく，研究するための手段を持ちあわせていなかったのであろう．しかし，我々の時代には，ピー写像の特異点論という豊富な道具が存在するのである．

最初に，古典理論の復習を行なう：

古典的には<u>（1未知関数）1階偏微分方程式系</u>（単に<u>方程式</u>と呼ぶ）は

(3) $F_k(x_1,\cdots,x_n, z, p_1,\cdots, p_n)=0$ $(k=1,\cdots,2n+1-r,\ r\geqq n)$

と書かれる．この時，方程式(3)の(古典)解とは，C^∞-関数 $z=f(x_1,\cdots,x_n)$ で $p_i=(\partial f/\partial x_i)(x)$ をみたすものとする．幾何学的理論をあつかうために，我々は(3)が

(4) $\mathrm{rank}(\partial F_k/\partial x_i, \partial F_k/\partial z, \partial F_k/\partial p_i) = 2n+1-r$

をみたすと仮定する．即ち，$F_1=\cdots=F_{2n+1-r}=0$ は $\mathbb{R}^{2n+1}$ の中に r 次元の部分多様体を定めるとする．この時，(3)の discriminant set を以下の様に定義する：

$$D=\{(x,z)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R} \mid \exists p\in\mathbb{R}^n \text{ s.t. } F_1(x,z,p)=\cdots=F_{2n+1-r}(x,z,p)=0 \ \& \ \mathrm{rank}(\partial F_k/\partial p_j)(x,z,p)<\min(n,2n+1-r)\}.$$

さらに，criminant set を以下の様に定義する：

$$\Sigma=\{(x,z,p)\in\mathbb{R}^{2n+1} \mid F_1(x,z,p)=\cdots=F_{2n+1-r}(x,z,p)=0 \ \& \ \mathrm{rank}(\partial F_k/\partial p_j)(x,z,p)<\min(n,2n+1-r)\}.$$

我々は，D が(3)の(古典)解の“グラフ”となっている時，そのグラフを表わす関数を特異解と呼びたいが，(2)の方程式のように，D は一般には特異点をもつような超曲面となる．この様に，解の概念の一般化が必要となる．そこで，Lie の哲学に従い，以下のシステムを考える：

$$\begin{cases} F_k(x_1,\cdots,x_n, z, p_1,\cdots,p_n)=0 & (k=1,2,\cdots,2n+1-r,\ r\geqq n) \\ dz-\sum_{i=1}^{n} p_i dx_i=0 \end{cases}$$

即ち，$F_1=\cdots=F_{2n+1-r}=0$ で定まる R^{2n+1} の中の部分多様体上に 1-form $dz-\sum_{i=1}^{n}p_i dx_i$ によってあたえられる部分空間場を考える．これが接触幾何学の誕生である．(抽象)解とは，そのような部分空間場の最大積分多様体として定義される．(§2．参照) 古典理論の中で最も大切な結果の1つとして，完全解の(局所的)存在定理がある．

定義(1.1) $r-n$ 個の任意定数 $(t_1,\cdots,t_{r-n})$ を含む(3)の(古典)解 $z=f(x_1,\cdots,x_n,t_1,\cdots,t_{r-n})$ が完全解であるとは，次の関数行列の階数が $r-n$ に等しいときをいう．

$$(\partial f/\partial t_i,\ \partial^2 f/\partial t_i\partial x_j).$$

この時，以下の定理は有名である．(小松−大島[12])

定理(1.2)．(古典的存在定理) 方程式(3)は $(x_0 z_0 p_0)$ の近傍で包合的であると仮定する。もし，$(x_0 z_0 p_0)\notin\Sigma$ とすると，(3)は $(x_0 z_0 p_0)$ の近傍で完全解を持つ。ただし，(3)が包合的であるとは，$1\leq i,j\leq k$ に対して，$[F_i,F_j]=0$ が成立する事である。

ここで，$[F,G]=F\cdot\partial G/\partial z-G\cdot\partial F/\partial z+\sum_{i=1}^{n}(\partial F/\partial x_i\cdot\partial G/\partial p_i-\partial F/\partial p_i\cdot\partial G/\partial x_i)+\sum_{i=1}^{n}p_i\cdot(\partial F/\partial z\cdot\partial G/\partial p_i-\partial G/\partial z\cdot\partial F/\partial p_i)$.

§2. 1階微分方程式の幾何

$J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を n 変数関数の 1-jet 束とする. 我々は, 局所的な場合しか考えないので, この 1-jet 束は $\mathbb{R}^{2n+1}$ に自然な座標 $(x_1, \dots, x_n, z, p_1, \dots, p_n)$ をあたえたものとみなして良い. この時, $J^1(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$ 上には $\theta = dz - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ によってあたえられる接触構造と, 自然な射影 $\pi : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, $\pi(x, z, p) = (x, z)$ が定まる. §1 を参照すると以下の定義が自然である.

定義(2.1) 微分方程式とは $J^1(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$ の r 次元部分多様体 E の事とする.

解の概念を定義するため, 以下の言葉を用意する.

定義(2.2) 部分多様体 $i : L \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$ がルジャンドル部分多様体であるとは, $\dim L = n$ かつ $i^*\theta = 0$ を満足する事とする. E を方程式とする時, その(抽象)解とはルジャンドル部分多様体 $i : L \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$ で $i(L) \subset E$ を満足するものとする.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ について, $j^1 f : \mathbb{R}^n \to J^1(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$ を考えると, これはルジャンドル埋め込みである事がわかり, (古典)解は(抽象)解である事がわかる. 逆に, ルジャンドル部分多様体 $i : L \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^n \mathbb{R})$ がある点の近傍で,

ある関数 f の j^1f として与えられる必要十分条件は，
$\pi\circ i$ がその点で非特異写像となる事である．従って，以下の概念が重要である．

定義(2.3) $i: L \hookrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ をルジャンドル部分多様体とする．$q \in L$ がルジャンドル特異点であるとは，$\mathrm{rank}\, d(\pi\circ i)_q < n$ を満足する事とする．

さらに，方程式の特異点も以下のように定義する．

定義(2.4). $E^r \subset J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を方程式とする．この時

(1) $q \in E$ が接触特異点 $\Longleftrightarrow$ $\theta(T_qE) = 0$

(2) $q \in E$ が π-特異点 $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{rank}\, d(\pi|E)_q < \min(r, n+1)$.

$\Sigma(\pi|E)$ を π-特異点全体の集合，$D_E = \pi(\Sigma(\pi|E))$ と定めると，これらは criminant set と discriminant set となる．

定義(2.5) criminant set $\Sigma(\pi|E)$ がルジャンドル部分多様体となる時，$\Sigma(\pi|E)$ を(抽象)特異解と呼ぶ．

[10] において，$r=2n$ の場合に以下の定理を証明した．

定理(2.6)([10], Theorem 2.4) "ほとんどすべて"の方程式芽 $(E, (x_0 z_0 p_0))$ は(抽象)特異解を持たない．そして，その criminant set $\Sigma(\pi|E)$ は高々 $(x_0 z_0 p_0)$ をのぞいて，(抽象)解のルジャンドル特異点からなる．

この定理は常微分方程式の場合のThomの結果の一般化である(cf [13]). さて，この定理を単独方程式以外の場合(i.e. $r \neq 2n$)に一般化しようとする事は不可能である. 何故ならば，定理(1.2)の様に，包合的でない方程式にはもはや解は存在しない，しかも定義から，包合的でない方程式が方程式全体の中で開集合をなしているのである. 従って，包合的方程式全体の中で"generic"な性質を調べれば良いのであるが，それでも現在のところはお手上げの状態である. そこで，我々はもう少しせまいクラスの方程式をあつかうこととする.

古典論の中では，完全解の概念が非常に重要なものであった. (cf. 定義(1.1)). 今，$z = f(x_1 \cdots x_n, t_1, \cdots t_{r-n})$ を方程式Eの(古典的)完全解であるとする. この時，jet extension $j^1_* f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n} \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ by $j^1_* f(x, t) = j^1 f_t(x)$ を考えると(ただし，$f_t(x) = f(x, t)$)，

$$j^1_* f : \text{immersion} \Leftrightarrow \operatorname{rank}(\partial f / \partial t_i, \partial^2 f / \partial t_i \partial x_j) = r - n$$

が成立する. 今，$\dim E = r$ であるから，上記のはめ込み $j^1_* f$ はEの(局所)パラメータをあたえ，さらに，$j^1_* f(\mathbb{R}^n \times t)$ は各 $t \in \mathbb{R}^{r-n}$ に対してEの解となる. 即ち，E上には，葉が(古典)解からなる葉層構造が導入される.

定義 (2.7) $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \supset E$ を方程式とする．E が完全積分可能（又は，E は（抽象的）完全解を持つ）とは，n 次元の完全積分可能な E 上の部分接ベクトル空間場 D で任意の $g \in E$ に対して $\Theta_g(D_g) = 0$ を満足するものが存在する事とする．

この時，Frobenius の定理から以下の命題を得る．

命題 (2.8) $J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \supset E^r$ を方程式とする時，以下は同値である．

(1) E は完全積分可能．

(2) 任意の $g \in E$ に対して，E の中での g の近傍 U と U 上の C^∞-関数 $\mu_1, \cdots, \mu_{r-n}$ で各点で $d\mu_1 \wedge \cdots \wedge d\mu_{r-n} \neq 0$ を満足するものが存在して，$C^\infty(U)$-加群として，

$$\langle d\mu_1, \cdots, d\mu_{r-n} \rangle_{C^\infty(U)} \supset \langle \Theta | E \rangle_{C^\infty(U)}$$

が成立する．

(3) 任意の $g \in E$ に対して，$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n}$ の中での 0 の近傍 $V \times W$ と埋め込み $f : V \times W \to J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ で $f(0) = g$，$f(V \times W) \subset E$ そして各 $t \in W$ に対して，$f|V \times t$ がルジャンドル埋め込みとなるものが存在する．

§3. 完全積分可能方程式

ここでは方程式の局所的性質をあつかうので，方程式とは，はめ込み $f : U \to J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ の事とする．ただし，U は $\mathbb{R}^r$ のある開集合である．命題(2.8)から，我々は以下の定義を採用する．

定義(3.1)　$f : U \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ を方程式とする．f が<u>完全積分可能</u>とは，しずめ込み $\mu = (\mu_1, \cdots \mu_{r-n}) : U \to \mathbb{R}^{r-n}$ で $\langle d\mu_1, \ldots d\mu_{r-n} \rangle_{C^\infty(U)} \supset \langle f^*\theta \rangle_{C^\infty(U)}$ を満足するものが存在する事とする．この時，$\mu = (\mu_1, \cdots \mu_{r-n})$ を<u>f の完全積分</u>と呼び，対 $(f, \mu) : U \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{r-n}$ を<u>完全積分を持つ方程式</u>(又は<u>完全対</u>)と呼ぶ．

注) 我々は上記の概念を写像芽の言葉でも記述できる：<u>方程式芽</u>とははめ込み芽 $f : (\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ の事で，f が<u>完全積分可能</u>とは，しずめ込み芽 $\mu = (\mu_1 \ldots \mu_{r-n}) : (\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow \mathbb{R}^{r-n}$ が存在して，

$$\langle d\mu_1, \ldots, d\mu_{r-n} \rangle_{\mathcal{E}_r} \supset \langle f^*\theta \rangle_{\mathcal{E}_r}$$

を満足する事とする．この時，μ は f の<u>完全積分</u>と呼ばれ，対 $(f, \mu) : (\mathbb{R}^r, 0) \longrightarrow J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{r-n}$ は<u>完全積分をもつ方程式芽</u>(又は<u>完全対</u>)と呼ばれる．

この時，以下の補題が成立する．

補題(3.2)　$(f,\mu): U \to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{r-n}$ を完全対とする．この時，U 上で $f^*\theta = \sum_{i=1}^{r-n} h_i d\mu_i$ をみたす U 上の C^∞－関数 $h_1, \cdots, h_{r-n}$ が一意的に存在する．

さてここで，1-jet 束 $J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R})$ を考える．そこには自然に $(x_1,\cdots,x_n, t_1,\cdots,t_{r-n}, z, p_1,\cdots p_n, q_1 \cdots q_{r-n})$ という座標が入り．自然な接触構造が 1－form $\Theta = dz - \sum_{i=1}^{n} p_i dx_i - \sum_{i=1}^{r-n} q_i dt_i$ であたえられる．また，3種の自然な射影が以下の様に定まる：

$\pi_1 : J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R}) \to J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{r-n}$，$\pi_1(x, t, z, p, q) = (x, z, p, t)$．$\pi_2 : J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{r-n} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$，$\pi_2(x, z, p, t) = (x, z)$．$\pi' : J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{r-n}$，$\pi'(x, t, z, p, q) = (x, z, t)$．

命題(3.3)　(1) $(f,\mu): U \to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{r-n}$ を完全対とする．この時，ルジャンドルはめ込み
$l : U \to J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R})$ で $\pi_1 \circ l = (f,\mu)$ を満足するものが一意的に存在する．

(2) 逆に，$l : U \to J^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R})$ をルジャンドルはめ込みで $\pi_1 \circ l = (f,\mu)$ と書き表わした時，f がはめ込みでありかつ μ がしずめ込みであるものとする．この時 (f,μ) は完全対となる．

完全対 (f,μ) に対して上記 ℓ は以下の様に定まる：
$\ell(u)=(x_1\circ f(u),\cdots,x_n\circ f(u),\mu_1(u),\cdots,\mu_{r-n}(u),z\circ f(u),p_1\circ f(u),\cdots,p_n\circ f(u),$
$h_1(u),\cdots,h_{r-n}(u))$.

このルジャンドルはめ込みを $\ell_{(f,\mu)}$ と表わす．この $\ell_{(f,\mu)}$ を使うと (f,μ) に関する種々の情報が得られる．

系(3.4) $(f,\mu):U\to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n}$ を完全対とする．この時，以下は同値である：

(1) $\ell_{(f,\mu)}$ はルジャンドル非特異である．

(2) すべての $t\in\mathbb{R}^{r-n}$ に対して，$\mu^{-1}(t)$ は方程式 f の(古典)解となる．

系(3.5) $(f,\mu):U\to J^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n}$ を完全対とする．$u\in U$ に対して $\ell_{(f,\mu)}(u)$ を $J^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r-n},\mathbb{R})$ の座標系を使って前記の様に表わしたとする．この時，以下は同値である：

(1) f は $u_0\in U$ において接触特異である．

(2) $h_1(u_0)=\cdots=h_{r-n}(u_0)=0$.

我々の主要目的は，完全対の "generic" な性質を研究する事にある．しかし，完全対そのものを直接しらべようとすると，様々な困難がある．たとえば，写像空間の中の "generic" な性質を記述するほとんど唯一の一般的な

道具であるところの"Thomの横断性定理"は完全対の空間に対して成立するかどうかはわからない．しかし，我々の命題(3.3)は，この空間の中の性質はある種のルジャンドルはめ込みの空間の中の性質に翻訳される事を示唆するのである．$Int(U, J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n})$ で完全対全体の集合を表わす．さらにまた，$L(U, J^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R}))$ でルジャンドルはめ込み $l: U \to J^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R})$ で $\pi_1\circ l=(f,\mu)$ と書き表わした時，fがはめ込みであり，かつμがしずめ込みであるもの全体の集合を表わす．両方の集合ともWhitney C^∞-位相をあたえる事により位相空間となる．この時，命題(3.3)より連続写像

$$\pi_{1*} : L(U, J^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R})) \longrightarrow Int(U, J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n})$$

が $\pi_{1*}(l) = \pi_1\circ l$ により定まる．以下の定理が我々の理論のキーポイントである．

<u>定理(3.6).</u> <u>連続写像</u>

$$\pi_{1*} : L(U, J^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r-n}, \mathbb{R})) \longrightarrow Int(U, J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n})$$

<u>は同相写像である</u>．

この定理の証明は，むずかしくない．(f,μ) に対して $l_{(f,\mu)}$ を対応させる写像が連続である事をみれば，これがπ_{1*}の逆写像となる事は自明である．しかし，大変

有効な定理である．この定理の主張するところに依れば，完全対に対する "generic" な性質は $L(U, J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r-m}, \mathbb{R}))$ の中の "generic" な部分集合に完全に対応しているのである．一方，$L(U, J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r-m}, \mathbb{R}))$ はルジャンドルはめ込み $U \to J^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{r-m}, \mathbb{R})$ 全体の中の開集合である．さらにルジャンドルはめ込みの "generic" な性質を研究する手段としては，Arnol'd - Zakalyukin ([7], [14]) に依る generating family の理論がある．

$F : (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ を C^∞-関数芽で d_2F が 0 で非特異なものとする．ただし，$d_2F(x, q) = (\partial F/\partial q_1(x, q), \ldots, \partial F/\partial q_k(x, q))$．この時，$F$ は generalized phase function と呼ばれる．仮定から Catastrophe set $C(F) = d_2F^{-1}(0)$ は n 次元多様体となり，写像芽 $\Phi_F : C(F) \to J^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ by $\Phi_F(x, q) = (x, F(x, q), \partial F/\partial x(x, q))$ はルジャンドルはめ込みとなる．

命題 (3.7) (Arnol'd-Zakalyukin) すべてのルジャンドルはめ込み芽は上記の方法で構成できる．

この命題に依り，ルジャンドルはめ込みの性質は，関数芽の族の性質に翻訳でき，Thom - Mather 等の C^∞-写像の特異点論が適用出来る．我々の $l(f, \mu)$ の場合，各 $f|\mu^{-1}(t)$ もルジャンドルはめ込みである事を考慮すると，$t \in \mathbb{R}^{r-n}$

をパラメータとして持つ関数族の族となる．即ち，

$F(x,t,q)$　$((x,t,q)\in \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{r-n}\times\mathbb{R}^k)$という関数芽で，

各 d_2F_t が非特異なものである．この様に $\ell(f,\mu)$ に対応する関数芽はパラメータ x と t を区別した族 (i.e. 開折の開折) と見る事が出来，この意味で，$\ell(f,\mu)$ はルジャンドル開折 (Legendrian unfolding) と呼ばれる．従って，完全対 (f,μ) の "generic" な性質は，関数芽の開折の開折 $F(x,t,q)$ の "generic" な性質で記述できる．

§5. いくつかの分類．

この節では，完全対の間に3種類の自然な同値関係を導入して，その "generic" な分類を試みる．我々の目標は完全対 (f,μ) に対して $\pi\circ f$ の discriminant set 及び $\mu^{-1}(t)$ のルジャンドル特異点のパラメーター t にそった分岐の記述である．

定義(5.1)　C^∞-写像芽 $g:(\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)$ としずめ込み芽 $\mu:(\mathbb{R}^r,0)\to(\mathbb{R}^{r-n},0)$ の対 (g,μ) が積分図式であるとは，完全対 (f,μ) が存在して $\pi\circ f=g$ を満足する事である．

$\pi_D:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{r-n},0)\to(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)$ と $\pi_B:(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{r-n},0)\to(\mathbb{R}^{r-n},0)$

を自然な射影とする．

定義(5.2)　(g,μ)と(g',μ')を積分図式とする．

(1)　$(g,\mu) \underset{B}{\sim} (g',\mu')$　(<u>B-同値</u>) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^r,0) \arrow[r, "{(g,\mu)}"] \arrow[d, "\exists\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & ((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n},0) \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[d, "\exists\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^{r-n},0) \arrow[d, "\exists\psi"'] & \\
(\mathbb{R}^r,0) \arrow[r, "{(g',\mu')}"] & ((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n},0) \arrow[r, "\pi_B"] & (\mathbb{R}^{r-n},0) &
\end{tikzcd}$$

: diffeos

(2)　$(g,\mu) \underset{D}{\sim} (g',\mu')$　(<u>D-同値</u>) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^r,0) \arrow[r, "{(g,\mu)}"] \arrow[d, "\exists\phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & ((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n},0) \arrow[r, "\pi_D"] \arrow[d, "\exists\Phi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0) \arrow[d, "\exists\psi"'] \\
(\mathbb{R}^r,0) \arrow[r, "{(g',\mu')}"] & ((\mathbb{R}^n\times\mathbb{R})\times\mathbb{R}^{r-n},0) \arrow[r, "\pi_D"] & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)
\end{tikzcd}$$

: diffeos

(3)　$(g,\mu) \sim (g',\mu')$　(<u>同値</u>) $\Longleftrightarrow$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^{r-n},0) \arrow[d, "\exists\kappa"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^r,0) \arrow[l, "\mu"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\exists\psi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0) \arrow[d, "\exists\phi"'] \\
(\mathbb{R}^{r-n},0) & (\mathbb{R}^r,0) \arrow[l, "\mu'"'] \arrow[r, "g'"] & (\mathbb{R}^n\times\mathbb{R},0)
\end{tikzcd}$$

: diffeos

これらの同値関係は何を保存するのか？　もし(g,μ)と(g',μ')がB-同値とすると，$g|\mu^{-1}(t)$と$g'|\mu'^{-1}(\psi(t))$は，Matherの意味で右左-同値である．完全対の立場で見ると，B-同値はパラメーターtに沿ったルジャンドル特異点の分岐を保存している．また，(g,μ)と(g',μ')がD-同値の時，gとg'は右左-同値である．gの特異値

集合は完全対(f, μ)のdiscriminant setなので，D－同値はdiscriminant setを保存する．(g, μ)と(g', μ')が同値の時は，それらはB－同値でありかつD－同値である．従って"同値"で分類すれば完全であるが，それは非常にむずかしい．しかし，B－同値，D－同値については，$\ell(f, \mu)$のgenerating familyを使って分類が出来る．

CANONICAL FORMS

I $n = 1$, $r = 2$. The ordinary differential equations case.

1) B-equivalence

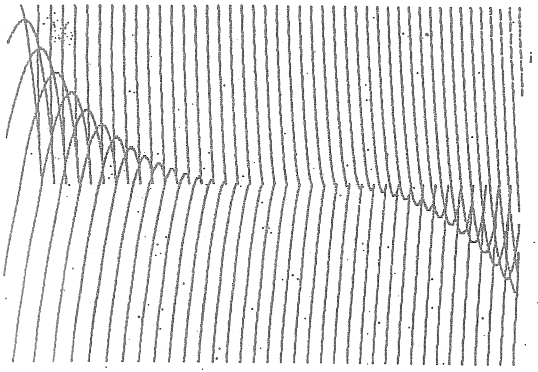
	$g\vert\mu^{-1}(t)$
1)	$(u + t, u^2)$
2)	$(3u^2 + t, 2u^3)$
3)	$(4u^3 + t(2u + 1), 3u^4 + tu^2)$

2) D-equivalence

	g	μ	contact singular?
1)	(u, v)	v	regular
2)	(u^2, v)	$v - (1/3)u^3$	regular
3)	(u, v^2)	$v - (1/2)u$	singular
4)	$(u^3 + uv, v)$	$(3/4)u^4 + (1/2)u^2v + v$	regular
5)	$(u, v^3 + uv)$	v	singular
6)	$(u, v^3 + uv^2)$	$(1/2)v^2 + u$	singular

3) equivalence (Hayakawa, Ishikawa, Izumiya, Yamaguchi [9])

	g	μ
1)	(u, v)	v
2)	(u^2, v)	$v - (1/3)u^3$
3)	(u, v^2)	$v - (1/2)u$
4)	$(u^3 + uv, v)$	$(3/4)u^4 + (1/2)u^2v + \alpha\circ g$, $\alpha(0)=0$, $(\partial\alpha/\partial y)(0)=0$
5)	$(u, v^3 + uv)$	$v + \alpha\circ g$, $\alpha(0)=0$
6)	$(u, v^3 + uv^2)$	$(1/2)v^2 + \alpha\circ g$, $\alpha(0)=0$, $(\partial\alpha/\partial x)(0)=0$



2)の6)の芽の解$\{g(\mu^{-1}(t))\}_t$ の図である．古典論では表われないもので，完全対の中では"generic"なものである．

II n = 2, r = 3.　($F_1(x_1 x_2 z p_1 p_2) = F_2(x_1 x_2 z p_1 p_2) = 0$ の場合)

1) B-equivalence

	$g\vert\mu^{-1}(t)$	type
1)	$(u+t, v, u^2 \pm v^2)$	A_1
2)	$(3u^2+t, v, 2u^3 \pm v^2)$	A_2
3)	$(4u^3-4uv+t, v, -3u^4+v(2u^2+v))$	A_3
4)	$(5u^4-4uv+t(3u^2+1), v, 4u^5+2u^3t-v(2u^2+v))$	A_4
5)	$(3u^2+t(v+1), 3v^2+tu, 2u^3+2v^3+tuv)$	D_4^+
6)	$(3u^2-v^2+t(2u+1), -2uv+2tv, -2u^3+2uv^2-t(u^2+v^2))$	D_4^-

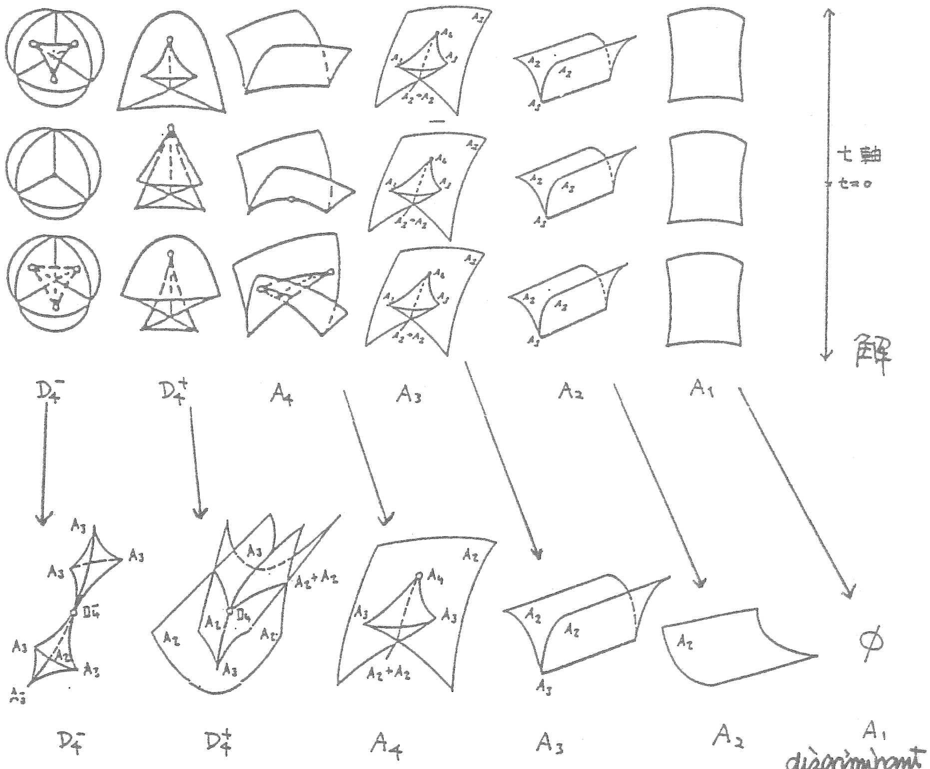
2) D-equivalence

	g	μ	contact sing?	type
1)	(u, v, w)	w	reg	A_1
2)	(u^2, v, w)	$w-(1/3)u^3+v$	reg	A_2
3)	(u, v, w^2)	$w-(1/2)u+v$	sing	A_1
4)	(u^3+vu, v, w)	$(3/4)u^4+(1/2)u^2v+w$	reg	A_3
5)	(u, v, w^3+uw)	w	sing	A_1
6)	(u, v, w^3+w^2v)	$(1/2)w^2+v$	sing	A_2
7)	(u^4+u^2w+uv, v, w)	$(4/5)u^5+(1/2)u^2(v+w)+w$	reg	A_4
8)	(u^2+vw, v^2+uw, w)	$u^3+v^3+uvw+w$	reg	D_4^+
9)	$((3/4)u^2-v^2+uw, uv+vw, w)$	$u^3-uv^2+(u^2+v^2)w+w$	reg	D_4^-
10)	$(3u^2+vw, v, \pm w^2-2u^3+vw)$	w	sing	A_2
11)	(u, v, w^4+vw^2+uw)	w	sing	A_1
12)	$(u, v, w^4+w^3v+w^2u)$	$(4/3)w^3+(2/3)w^2v+u(2w+1)$	sing	A_3

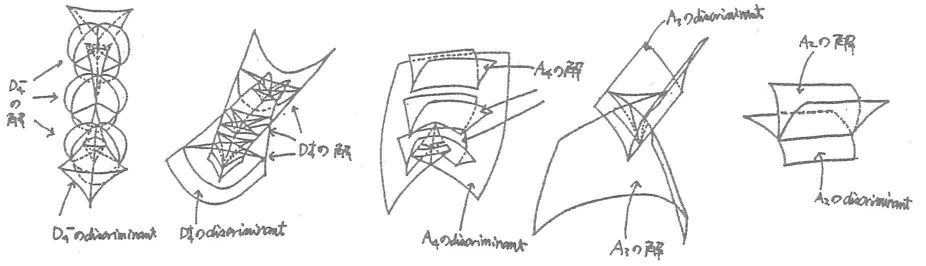
3) equivalence

?

この場合，B－同値とD－同値は接触非特異なもの同士に対しては，A，D－型を保存し，従って以下の対応が得られる



この対応を$\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}$の中でえがくと：



我々の分類によるとクレロー型（I，2），の3）5））も完全対の中では"generic"である．これはThomの定理（[13]）

や定理(2.6)から，方程式全体の中では"generic"でない．

我々は，他の場合，$n=2$，$r=4$ や $n\geq 3$ の時も，アルゴリズムを得た．くわしくは論文[11]を参照してもらいたい．

文献．

[1] V. I. Arnol'd et al, Singularities of differentiable maps, vol. 1. Monographs in Math. 82 Birkhauser (1985)

[2] J. W. Bruce, A note on first order differential equations of degree greater than one and wave front evolution, Bull. London Math. Soc. 16 (1984), 139-144

[3] C. Carathéodory, Calculus of Variations and Partial Differential Equations of the First Order, Part I. Holden-Day, (1965)

[4] L. Dara, Singularités générique des équations différentielles multiformes, Bol. Soc. Brasil Mat. 6 (1975), 95-128.

[5] M. G. Darboux, Sur les solutions singulières des équations aux dérivees ordinaires du Premier ordere, Bull. Sciences Math. & Astron. IV (1873)

[6] W. Dyck, Über die Gestalich Verhaltnisse der durch eine Differentialgleichung erster ordung zweishen zwei variablen definiven curven systeme, Bay. Akad. Der Wissenschaften München sizungberichte der Math. Phys. Classe. Band XXI (1891)

[7] A. R. Forsyth, A Treatise on Differential Equations. Tokyo TAMURA (1885)

[8] M & F. Fukuda, Singular solutions of ordinary differential equations, The Yokohama Math. Jour. 15 (1977), 41-58.

[9] A. Hayakawa, G. Ishikawa, S. Izumiya, K. Yamaguchi, Classification of generic integral diagrams and first order ordinary differential equations. preprint.

[10] S. Izumiya, First order partial differential equations and singularities, preprint

[11] S. Izumiya, Complete integrable first order partial differential equations and Legendrian unfoldings, In preparation (要約のみあり).

[12] 小松彦三郎，大島利雄，1階偏微分方程式，岩波書店

[13] R. Thom, Sur les equatione differentielles multiformes et leurs integrals singulieres, Bol. de Soc. Brasil Mat. 3 (1972) 1-11

[14] V. M. Zakalyukin, Lagrangian and Legendrian singularities, Funct. Anal. Appl. 10 (1976), 37-45

球面上のfree actionについて

大阪大学 理学部 牛瀧 文宏

本日の講演では、球面上の free action に関する内容を2つ紹介したいと思います。以後 C_m を order m の cyclic group とし、S^{2n-1} で奇数次元球面とし、$n \geqq 3$ を仮定しておきます。

(I) 球面上の non-linear free action の拡張について

Part I では、連続の category において、S^{2n-1} 上の free C_m-action の拡張についてのことを紹介します。この分野のことで、次のようなことが知られています。

Theorem 1. (F. Connolly and R. Geist [1])
k を odd integer とするとき、S^{2n-1} 上の任意の free C_m-action は free C_{2m}-action に拡張される。

Theorem 2. (J. Ewing [2])

pを素数、Nを次をみたす自然数とする。

(i) $N \geqq 4$ if $p=2$

(ii) $N \geqq 3$ if $p=3$

(iii) $N \geqq 2$ if $p \geqq 5$

このとき、S^{2n-1}上の free C_{p^N}-action で、$C_{p^{N+1}}$-action に拡張しないものが存在する。

F. Connolly と R. Geist が [1] で巡回群の free action の拡張可能性についての条件を与えておりまして、それがこの証明のときに使われます。特に action を non-linear なものに限って考えることにすると、次のことがわかります。

Theorem A. ([5])

mを 1, 2, 3, 4, 6 を除く自然数とする。S^{2n-1}上の non-linear free C_m-action μで次の条件をみたすものが存在する。

条件; 任意の自然数列 $\{k_1, k_2, \cdots\}$ に対し、

actions の列 $\{\mu_1, \mu_2 \cdots\}$ で μ_1 は μ の拡張であり、μ_j ($\geqq 1$) は S^{2n-1} 上の order $m\prod_{i=1}^{j} k_i$

の non-linear free cyclic action である。
さらに、これらの actions は free S^1-action に拡張しない。

$\varinjlim C_\ell = \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ より、Theorem A の応用として、次を得ます。

<u>Corollary B ([5])</u>

free S^1-action に拡張しない S^{2n-1} 上の non-linear free $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ action が存在する。

<u>Remark</u> 特に linear free action のとき、これらのことが成り立つことは容易に証明される。

(II) 球面上に free に作用する有限群の SK_1 について

ここでは、smooth category で議論します。G は、homotopy sphere に free に作用できる有限群、X を dim $2n-1 \geqq 5$ の G-homotopy sphere とします。

さて、integral group ring $\mathbb{Z}[G]$ には、$a_g \in \mathbb{Z}$, $g \in G$ とするとき、$(\Sigma_g a_g g)^- = \Sigma_g a_g g^{-1}$ をみたす anti-involution $-$ があります。$\mathbb{Z}[G]$ 係数の matrix (x_{ij}) に対して、$(x_{ij})^-$ を $(\overline{x_{ji}})$ で定義します。すると、$Wh(G)$, $SK_1(\mathbb{Z}[G])$ などは、これより誘導された involution を持つわけですが、やはりこれも $-$ で表すことにします。

$Wh(G)$ の sub-group $B(G)$ を、

$$B(G) = \{x \in Wh(G) \mid \bar{x} = -x\}$$

で定義し、

$$A_{2n+1}(G) = B(G)/\{x - \bar{x} \mid x \in Wh(G)\}$$

で定義するとき、Rothenberg exact sequence ([4]),

$$\cdots \to L^h_{2n+1}(G) \xrightarrow{b} A_{2n+1}(G) \xrightarrow{c} L^s_{2n}(G) \to \cdots$$

を考えます。$\bar{c}: B(G) \longrightarrow L^s_{2n}(G)$ を c を決定する map とします。このとき、次が証明されます。

<u>Theorem C</u> (with M. Morimoto and I. Nagasaki)

X を free G-homotopy sphere of dim. $2n-1 \geqq 5$, とする。このとき、次の (I) と (II) は同値である。

(I) X とそれ自身の間の任意の G-h-cobordism W

は $X \times I$ に G - diffeo である。

(II) $\ker \overline{\tau} = 0$

これと G - s - cobordism theorem により、$\ker \overline{\tau} = 0$ ということと、W が G-s- cobordism である、ということの同値性が示されます。逆に $\ker \overline{\tau} \neq 0$ であるということと、X とそれ自身の間の G - h- cobordism W で s- cobordism にならないものがある、ということが同値であります。従って、この周辺のことを調べるために $B(G)$ を調べるということが問題になります。今、$SK_1(\mathbb{Z}[G])_{(2)} \subset B(G) \subset SK_1(\mathbb{Z}[G])$ ですから、$SK_1(\mathbb{Z}[G])$ を調べることになります。G として abel 群をもってくると、G は cyclic group となり、このとき、$-$ による involution は trivial ですから、$B(G)=0$ です。そこで、G として non - abelian group を選んできます。solvable group に関していうと、次のことが知られてます。

<u>Theorem 3.</u> ([3] 参照)

G を finite solvable group とする。次の3つの条

件は同値である。

(1) GはS^{2n-1}にlinear freeに作用する。

(2) Gはすべてのpq - conditionをみたす。

(3) Gは、表の4つの型の群の1つであり、表の中のrに対して、dを$r \in (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\times}$のorderとするとき、$\frac{n}{d}$は$d$のすべての素因数でわり切れる。

この群に対し、$SK_1(\mathbb{Z}[G])$を計算することを試みます。これを計算する手段として、次のものがあります。

<u>Theorem 4.</u> (R. Oliver [3], Ex. 14.4)

Gを有限群で、$Syl_2(G)$は、dihedral, quaternionic, or semidihedralとする。このとき、

$$SK_1(\mathbb{Z}[G])_{(2)} \cong (C_2)^t$$

ここでtは、cyclic group $\sigma \subset G$で、次をみたすものの conjugacy classes の数

(a) $|\sigma|$はodd　(b) σのGでのcentralizer $C_G(\sigma)$はnon-abelian 2-Sylow subgroupを持つ。(c) $\forall x \in \sigma$に対して$gxg^{-1} = x^{-1}$をみたす$g \in N_G(\sigma)$は存在しない。

Type	generators	relations	conditions	order	2-Sylow
I	A. B	$A^m = B^n = 1$ $BAB^{-1} = A^r$	$m \geq 1, \quad n \geq 1$ $(n(r-1), m) = 1$ $r^n \equiv 1 \pmod{m}$	mn	cyclic
II	A, B, R	As in I: also $R^2 = B^{n/2}$ $RAR^{-1} = A^l$ $RBR^{-1} = B^k$	As in I: also $l^2 \equiv r^{k-1} \equiv 1 \pmod{m}$ $n = 2^u v \quad (u \geq 2)$ $k \equiv -1 \pmod{2^u}$ $k^2 \equiv 1 \pmod{m}$	$2mn$	$\langle R, B^v \rangle$ $= Q2^{u+1}$ i.e $(B^v)^{2^u} = 1$ $R^2 = (B^v)^{2^{u-1}}$ $RB^vR^{-1} = B^{-v}$

III	A. B P, Q	As in I : also $P^4 = 1$ $P^2 = Q^2 = (PQ)^2$ $AP = PA$, $AQ = QA$ $BPB^{-1} = Q$ $BQB^{-1} = PQ$	As in I : also $n \equiv 1 \pmod{2}$ $n \equiv 0 \pmod{3}$	$8mn$	$\langle P, Q \rangle = Q8$
IV	A. B. P, Q, R	As in III : also $R^2 = P^2$ $RPR^{-1} = QP$ $RQR^{-1} = Q^{-1}$ $RAR^{-1} = A^{l}$ $RBR^{-1} = B^{k}$	As in III : also $k^2 \equiv 1 \pmod{n}$ $k \equiv -1 \pmod{3}$ $r^{k-1} \equiv l^2 \equiv 1 \pmod{m}$	$16mn$	$\langle P, Q, R \rangle = Q16$

Theorem 5. (R. Oliver [3], Th 14.2)

Gを有限群とする。$Syl_p(G) \cong C_{p^t}$ or $C_{p^t} \times C_p$ のとき、 $SK_1(\mathbb{Z}[G])_{(p)} = 1$

表に与えた群の odd Sylow subgroups はすべて、cyclic ですから([6], P.175, 6.1.10 Theorem) $SK_1(\mathbb{Z}[G])$ は 2-torsion のみをもつということになり、Theorem 4 を用いて計算することに帰着されます。type I については、2-Sylow subgroup が cyclic になり、結局 $SK_1(\mathbb{Z}[G]) = 1$ となります。残る3つのうち、type III について SK_1 を決定します。整数 α, β $(\beta|\alpha)$ に対し、

$D(\alpha) = \{\alpha$の約数$\}$

$D(\alpha,\beta) = \{\alpha$の約数のうち、$\beta$の倍数のもの$\}$

とおきます。IIIの条件中の r, m と整数νに対し、$M_\nu = (r^\nu - 1, m)$ とおきます。このとき、

Theorem D.

Gを type III のものとする。

$$\operatorname{rank} SK_1(\mathbb{Z}[G])_{(2)} = \sum_{\nu \in D(n,3)} \# D(M_\nu)$$

となります。

Example E.

$m=7$, $n=9$, $r=2$ のとき、

$$SK_1(\mathbb{Z}[G]) \cong C_2^4$$

Example F

d を Theorem 3 の中のものとする。$d=3$ のとき、

$$\operatorname{rank} SK_1(\mathbb{Z}[G])_{(2)} = \#D(n,3)\cdot\#(m)$$

Theorem D の証明の outline

次の順に証明していきます。

Claim 1. $\left(\dfrac{r^n-1}{r^\nu-1}, M_\nu\right) = 1$.

Claim 2. $\alpha \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ に対し、

$$\left(m,\ r^\nu-1,\ \alpha\frac{r^n-1}{r^\nu-1}\right) = (\alpha, M_\nu)$$

Claim 3. Theorem 4 の条件をみたす $\sigma \subset G$ は、$\langle A, B\rangle$ の subgroup である。

<u>Claim 4.</u> $\alpha \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$, $\beta \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ で β は 3 の倍数とする。$\langle A^\alpha B^\beta \rangle$ は、Theorem 4 の条件をみたし、逆に Theorem 4 の条件をみたす群は、この形でかける。特に $\alpha \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ と $\nu \in D(n,3)$ があって、$\langle A^\alpha B^\nu \rangle$ とかける。

これより、$\langle A^\alpha B^\nu \rangle$ なる cyclic subgroup について調べればよいということになりますが、この群の order を求めると次のようになります。次の Claim を示すのに、Claim 1 が使われます。

<u>Claim 5.</u> $m' = \dfrac{M_\nu}{(M_\nu, \alpha)}$　$n' = \dfrac{n}{\nu}$ とするとき、

$$|\langle A^\alpha B^\nu \rangle| = m'n'$$

ここまでで、Theorem 4 の条件をみたす群は定まりましたが、conjugacy class の数を求めなければなりません。次の証明には、Claim 2 が使われます。

<u>Claim 6.</u> Theorem 4 の条件をみたす cyclic

subgroups は、同じ order のものはすべて共役である。

以上より Theorem D が示されたことになります。

参 考 文 献

[1] Frank Connolly and Robert Geist: On extending free group actions on spheres and a conjecture of Iwasawa: Trans. Amer. Math. Soc. 274 (1982), 631-640

[2] John Ewing: Extending free cyclic actions on spheres: Trans. Amer. Math. Soc. 273 (1982), 631-640

[3] Robert Oliver: Whitehead Groups of Finite Groups: London Mathematical Society Lecture Note Series 132 (1988)

[4] Julius L. Shaneson: Wall's surgery obstruction group for $G \times \mathbb{Z}$: Ann. of Math. 90 (1969), 296-334

[5] Fumihiro Ushitaki : On Extensions of Non-Linear Actions on Spheres : to appear in International Conference of Transformation Groups, held in Osaka 1987, Springer Lecture note, (ed. by K. Kawakubo)

[6] Joseph A. Wolf : Spaces of Constant Curvature : Publish or Perish, Inc. (1974)

S^2上の電荷の配置

東大理 河澄(かわずみ)響矢(なりや)

この講演では、$S^2 = \mathbb{P}^1 = \mathbb{C}P^1$ 上の 5点集合のmoduli空間の可縮性を「電荷の配置から決まるpotential energy」という考えによって示すことを目的にしています。

そもそも $\mathbb{P}^1$ 上の n点集合のmoduli空間のtopologyに興味を持ち、それの実用的な(i.e., 種々の計算に使える)cell分割を探すうちに「電荷の配置から決まるpotential energyはMorse函数ではないのか?」と考え、それの実行を試みたのがこの話の由来です。

この考えに到るには次の2つの仕事が念頭にあったように思います。

1. 大原淳氏のknotのenergyの理論(cf. 今回のトポロジー・シンポジウム)

2. G. Segalによる、$\mathbb{R}^2$上の電荷の配置から決まる電場を用いて $\Omega^2 S^3$ (S^3の2重loop space) を調べる話(cf. [Segal])

——

この考えは全く未完成で、電荷の個数nに関し$n=6$については予想をたてるのがやっと、$n \geqq 7$は予想もつかないのが現状です。また$n \leqq 5$についても無理矢理有理式の計算に持ち込んだというのが実状です。

§1. $S^2 = \mathbb{P}^1$上のn点集合のmoduli空間

Xを位相空間、C^∞多様体、複素解析多様体、とするとき、X上のn点の配置の空間(configuration space)は

$$F_n X := X^n - \bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha = z_\beta\}$$

$$B_n X := F_n X / \mathfrak{S}_n$$

と定義され、位相空間、C^∞多様体、複素解析多様体となる。ここで、z_αはX^nの第α成分、$1 \leqq \alpha \leqq n$を表し、対称群$\mathfrak{S}_n$はX^nに成分とりかえとして働き、$F_n X$を保つ。(cf. [Birman 1])

立体射影

$$\mu : \mathbb{P}^1 \to S^2 \subset \mathbb{R}^3 \text{ (単位球面)}$$

$$z \mapsto \left(\frac{2z}{1+|z|^2}, \frac{1-|z|^2}{1+|z|^2} \right)$$

によって$\mathbb{P}^1$とS^2を同一視する。$X = \mathbb{P}^1 = S^2$が本講演の主題である。

$$F_n := F_n S^2 = F_n \mathbb{P}^1$$

$$B_n := B_n S^2 = B_n \mathbb{P}^1$$

とする。函数論で習うように$\mathbb{P}^1$の複素解析多様体としての自己同型群は、一次分数変換の群である：

$$\mathrm{Aut}\,\mathbb{P}^1 = PSL(2,\mathbb{C}) \quad (\text{以下} = G \text{とおく})$$

すると「$\mathbb{P}^1 = S^2$上のn点集合全体の空間」という言葉には、少くとも2通りの意味が出てくる。一つはF_n, B_nであり、もう一つはF_n/G, B_n/Gである。（GのF_n, G_nへの作用は対角作用とする。）次の比較ができる。

F_n, B_n	F_n/G, B_n/G
（自明化つき$\mathbb{P}^1$束, n本のsection）の分類空間	（$\mathbb{P}^1$束, n本のsection）の「分類空間」（B_n/Gは正確には分類空間ではない）
F_nの高次のhomotopyは消えない	F_n/Gは$K(\pi,1)$であり、そのπ_1はS^2上の（順序つき）n点つき mapping class group である。

つまり、F_n/G, B_n/Gの方がより基本的な情報を含んでいることがわかる。B_n/Gは$\mathbb{P}^1$上のn点集合の moduli または degree n の binary form の moduli と呼ばれ、不変式論の対象として19世紀以来研究されている。またB_n/Gの有理(co)homology はS^2上のn個の(unordered)基点をもつ mapping class group の有理 cohomology にひとしい。

一次分数変換の重要な性質：

① $G=PSL(2,\mathbb{C})$ は $\mathbb{P}^1$ に 3 重推移的に働く。

② $\mathbb{P}^1$ の相異なる 3 点をとめる一次分数変換 $\in G$ は恒等写像に限る。

により複素解析同型

$$F_n/G = F_{n-3}(\mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}) \overset{\text{open}}{\subset} (\mathbb{P}^1)^{n-3}$$

$$(z_1,\cdots,z_n) \bmod G \longmapsto (g(z_4),\cdots,g(z_n))$$

但，$g(z)=\dfrac{z-z_1}{z-z_3}\Big/\dfrac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$（非調和比）

が成立つ

ゆえに $n\leqq 3$ では F_n/G，B_n/G は一点集合である。

$n=4$ のとき，$F_4/G \cong \mathbb{P}^1-\{0,1,\infty\}$，$B_4/G \cong \mathbb{C}$ となる。

とくに B_4/G は可縮である。(cf. §2)

$n=6$ のとき，B_6/G は hyperelliptic involution の不動点を介して，種数 2 の Riemann 面の moduli にひとしい。これは，[井草] により $\mathbb{C}^3/\mathbb{Z}_5$（作用は線型）に複素解析同型であることが示されている。とくに B_6/G は可縮である。

他方，B_n/G の基本群，Betti 数は計算されている。

<u>定理 1.</u> ([Birman, 2])(cf. [MacLachlan])

$$\pi_1(B_n/G)=\{1\}$$

定理2

$$H^*(B_n/G : \mathbb{Q}) \cong H^*(pt : \mathbb{Q})$$

(注). 定理2はArnol'dによる平面braid群のcohomologyの計算の結果及方法 [Arnol'd. 1, 2] を用いる。$n=6$ については [Lee-Weintraub] が示している. 彼らの方法だけで. $H^*(F_n/G : \mathbb{Q})$ への $\mathfrak{S}_n$ の作用を見ることは非常に困難に思える. cf. [河澄].

以上から

問題 B_n/G は可縮か?

という疑問が湧いて来ます. この問題への一つのapproachとして「電荷の配置から決まるpotential energy」という考え方が出て来るわけです. これを用いて

主結果 $B_5/G \simeq pt$

を示しました.

§2. 電荷の配置

立体射影 $\mu : \mathbb{P}^1 \to S^2$ による $z \in \mathbb{P}^1$ の像を $\vec{z}$ で表す:

$$\mu(z) = \vec{z}$$

まず、天下り的に F_n 上で「電荷の配置から決まる

potential energy」を定義する.

$$E(z_1,\cdots,z_n) \overset{\mathrm{def}}{=} -\log \prod_{1\leq\alpha<\beta\leq n} \|\vec{z_\alpha}-\vec{z_\beta}\|^2$$

$$\text{for } (z_1,\cdots,z_n)\in F_n$$

ここで $\|\cdot\|$ は $\mathbb{R}^3$ の通常の norm を表す. $z, w \in \mathbb{P}^1$ について

$$\|\vec{z}-\vec{w}\|^2 = \frac{4|z-w|^2}{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}$$

が成立つ。

このとき直接計算により. $z=(z_1,\cdots,z_n)$ に対して同値

$$\left(\begin{array}{l} dE_z = 0 \\ \Leftrightarrow \vec{z_1},\cdots,\vec{z_n} \text{ は距離に反比例する斥力に関してつりあっている} \end{array}\right.$$

が成立つ. つまり, 我々の電荷は Coulomb の法則とは別の法則にしたがっており、力学も Newton のそれではなく、Aristoteles のそれである。

F_n の end で ∞ に発散するので, E が Morse 函数であれば, 何らかの handle 分解を誘導する.

E は定義から成分いれかえによる対称群 $\mathfrak{S}_n$ の作用で不変である。また, $SO(3)=PSU(2)\ (\subset PSL(2,\mathbb{C}))$ の作用でも不変である. しかし, E は $G=PSL(2,\mathbb{C})$ 不変ではなく、直接 F_n/G 上の C^∞ 函数を定めることはできない.

しかるに [Kirwan] の一般論によって次がわかる。

自然な写像

$$\mu^{-1}(0)/SO(3) \to F_n/G$$

は可微分同相である。但し、μ は重心をとる写像

$$\mu : F_n \to \mathbb{R}^3 \; (= \mathfrak{so}(3))$$

$$(z_1, \cdots, z_n) \longmapsto \sum_{\alpha=1}^{n} \mu(z_\alpha) = \sum_{\alpha} \vec{z}_\alpha$$

であり、これは symplectic 多様体 F_n への $SO(3)$ 作用の moment map である ____.

そこで、E を $\mu^{-1}(0)$ に制限することによって F_n/G 上の C^∞ 関数がえられる。

この状況に我々の E はよく適合している。即ち $z = (z_1, \cdots, z_n)$ に対し次が成立つ。

$$\begin{cases} dE_z = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \mu(z) = 0 \quad \text{かつ} \quad d(E|\mu^{-1}(0))_z = 0 \end{cases}$$

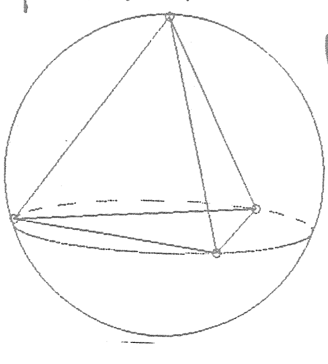
これは Coulomb 力では成立たない。

主定理を述べる。

<u>主定理</u>　$n = 4, 5$ のとき、E は F_n/G の Morse 関数で、その critical points は次で尽くされる。

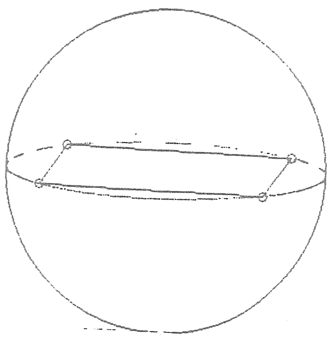
$n=4$

(I)



index $= 0$

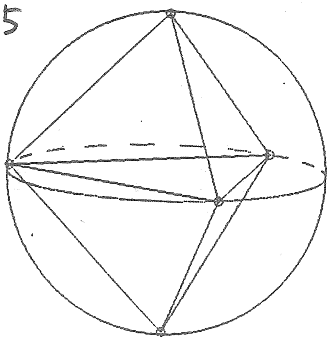
(II)



index $= 1$.

$n=5$

(I)

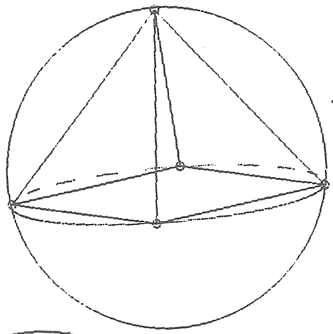


赤道上の正多角形と南北極

index $= 0$

個数：20ケ

(II)

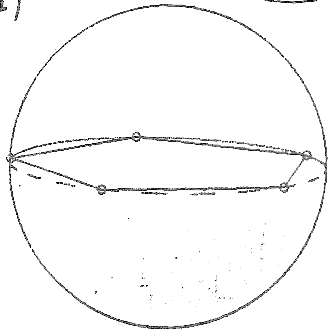


北極と、赤道より$\frac{1}{4}$下の正方形

index $= 1$

個数：30ケ

(III)



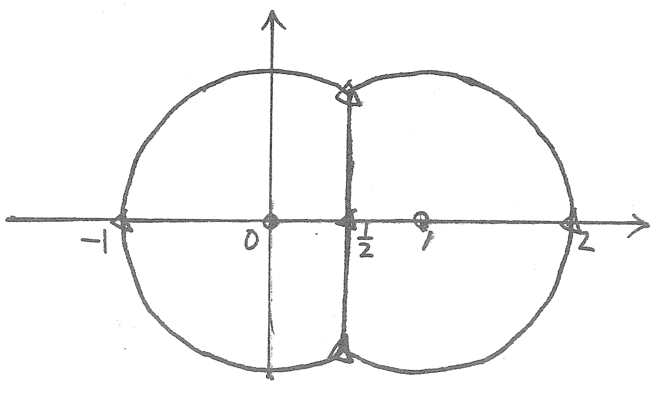
赤道上の正5角形

index $= 2$

個数：12ケ

証明のあらすじは後で述べる。まず、これを認めた上で B_4/G、B_5/G を調べる。

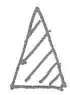
$\boxed{B_4/G}$ 図



は E が $F_4/G = \mathbb{P}^1 - \{0,1,\infty\}$ に定める handle 分解の Γ_4 不変 spine になっている。△印は E の critical points を表す。この spine を Γ_4 で割ると、閉区間 がえられる。ゆえに $B_4/G = F_4/G/\Gamma_4$ は可縮である。

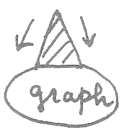
$\boxed{B_5/G}$ 主結果 $B_5/G \simeq pt$ を示す。まず、index $= 2$ の critical points での Γ_5 の isotropy 群は、位数10の正二面体群 D_5 であり

$$2\text{-cell}/D_5 = \text{区間 } [0,1] \text{ の cone}$$



であることがわかる。したがって

$$B_5/G = F_5/G/\Gamma_5$$

$\simeq$  $\simeq$ 

となる。しかるに B_5/G は単連結（定理1 (Birman) による。但、定理2の $b_1 = 0$ で今は充分）だから、このgraphは可縮である。よって

$$B_5/G \simeq pt$$

が成立つ。これで主結果が示された。

§3. 主定理の証明のあらすじ.

まず、与えられた配置が、Eのcritical pointsであることは一目瞭然である。Eがそれらの点で非退化であることを直接計算して確認しておく。そうすればEのcritical pointが与えられたものに限ることを示せば、主定理は示される.

$n=4$は$n=5$に比べると、とても易しいので$n=5$の場合に話を限る.

証明の方針は、次の通り.

① 対称性を持つcritical pointは与えられたものに限ることを示す。___ (これが示されれば、与えられたものの他にEのcritical pointが存在するときには$5!=120$個ずつあらわれることになる.)

② 不等式

$$\#\{\text{Eのcritical points}\} \lneqq \underbrace{\#\{\text{与えられたcritical pts}\}}_{62.} + 120 = 182$$

を示す___.

②を示すためのideaはた゛一つ

「複素解析曲面上のeffective divisorたちは十(プラス)に交わる」

である。したがって、$F_5/G \subset (\mathbb{P}^1)^2$ と考えて、E の critical points が必ずその上にあるような $(\mathbb{P}^1)^2$ の effective divisors を2つ見つけて、それらに共通因子のないことを check すれば、望む不等式

$$\#\{E\text{ の critical points}\} \leq \begin{array}{c}\text{みつけた effective divisors}\\ \text{の交叉数（代数的）}\end{array}$$

がえられる。右辺として $2\cdot 9^2 = 162 < 182$ がえられるから②が示され、主定理が示される。（①は②を示す途中で、示されるが、（②より）やさしいので省略する。）

そこで、E の critical point が必ずその上にあるような effective divisors を、無理矢理みつける。

まず、S^2 上の vectors $\vec{z_1}, \vec{z_2}, \vec{z_3}, \vec{z_4} \in S^2 - \{\vec{\infty}\}$ が $\vec{\infty}$ において定める電場が

$$\left(2\sum_{\alpha=1}^{4} z_\alpha \ , \ * \right) \in \mathbb{R}^3$$

となることに注意する。とくにこの電場が $\vec{\infty}$ と直交するための必要充分条件は

$$\sum_{\alpha=1}^{4} z_\alpha = 0$$

である。こういうことも Coulomb 力には望めない。

この事実を用いると

$$\left[\begin{array}{l} \vec{z}_1,\dots,\vec{z}_5 \text{ がつりあいの位置にある.} \\ \Rightarrow \text{(A)}\quad (\vec{z}_1,\vec{z}_3) = \dfrac{1}{8}(1+\xi+\eta)\left(1+\dfrac{1}{\xi}+\dfrac{1}{\eta}\right)-1 \end{array}\right.$$

$$\text{但, } \xi = \frac{z_4-z_1}{z_4-z_3}\Big/\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}, \quad \eta = \frac{z_5-z_1}{z_5-z_3}\Big/\frac{z_2-z_1}{z_2-z_3}$$

ということがわかる. ここで$(\ ,\ )$は$\mathbb{R}^3$の標準内積である. 式(A)の右辺が$F_5/G \subset (\mathbb{P}^1)^2$上holomorphicで, 極をもたないことに注意する。

高校数学により, $\alpha,\beta = 1,\dots,5$について

$$\left[\begin{array}{l} \vec{z}_1,\dots,\vec{z}_5 \text{ がつりあいの位置にある.} \\ \vec{z}_\alpha \text{ と } \vec{z}_\beta \text{ は } \mathbb{R}^3 \text{ の vector として一次独立である} \\ \Rightarrow \text{(B)}\quad 1+(\vec{z}_\alpha,\vec{z}_\beta)+\displaystyle\sum_{\gamma\neq\alpha,\beta}\frac{(\vec{z}_\alpha,\vec{z}_\gamma)-(\vec{z}_\alpha,\vec{z}_\beta)(\vec{z}_\beta,\vec{z}_\gamma)}{1-(\vec{z}_\beta,\vec{z}_\gamma)} = 0 \end{array}\right.$$

ということがわかる. (B)式左辺に$\prod_{\gamma\neq\alpha,\beta}(1-(\vec{z}_\beta,\vec{z}_\gamma))$をかけたものに, (A)式(及びそれを$\mathfrak{S}_5$で変換したもの)を代入して, ξ,ηの有理式$V_{\alpha,\beta}(\xi,\eta)$がえられる.

このとき, $(\vec{z}_1,\dots,\vec{z}_5)$がつりあいの位置にあれば,

$$V_{\alpha\beta}(\xi,\eta) = 0, \qquad \xi,\eta \text{ は上の通り.}$$

となる. つまり, $F_5/G \subset (\mathbb{P}^1)^2$におけるEのcritical pt $(0,1,\infty,\xi,\eta) \bmod G \in F_5/G$ は $\overbrace{\{V_{\alpha\beta}=0\}}^{((\mathbb{P}^1)^2\text{の解析集合})}$ に含まれる.

他方，$V_{\alpha\beta}$ は $(\vec{z_\gamma}, \vec{z_\delta})$ たちの多項式に (A) の右辺を代入したものだから，$F_5/G \subset (\mathbb{P}^1)^2$ 上 holomorphic である．とくに $V_{\alpha\beta}$ の極は $\{\xi = 0, 1, \infty\} \cup \{\eta = 0, 1, \infty\} \cup \{\xi = \eta\}$ に含まれる．そこで $V_{\alpha\beta}$ の極の定める homology 類 $\in H_2((\mathbb{P}^1)^2 ; \mathbb{Z})$ は計算可能である．

V_{13} と V_{31} の零の定める effective divisors が望むものである。$\{V_{13} = 0\}$ と $\{V_{31} = 0\}$ に共通因子のないことは手計算で check する。また

$$
\begin{aligned}
&V_{13}\ (V_{31})\ \text{の零の定める homology 類} \\
&= V_{13}\ (V_{31})\ \text{の極の定める homology 類} \\
&= 9\,[\mathbb{P}^1_\xi] + 9\,[\mathbb{P}^1_\eta] \in H_2(\mathbb{P}^1_\xi \times \mathbb{P}^1_\eta ; \mathbb{Z})
\end{aligned}
$$

だから，$\{V_{13} = 0\}$ と $\{V_{31} = 0\}$ の交叉数は

$$2 \cdot 9^2 = 162$$

である。これで ② が示され，主定理も示される．

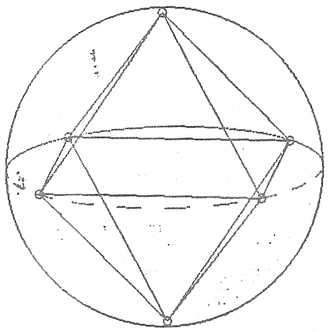
(注) 例えば $\det((\vec{z_\alpha}, \vec{z_\beta})) = 0$ であるが，これに (A) を代入しても (左辺) $\equiv 0$ で意味のある式は出てこない。

§4. 問題と予想

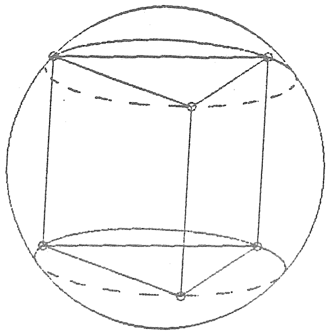
① 一般の n について E は F_n/G の Morse 函数か？

② $n=6$ の場合、§3 でのべた評価式は粗すぎて使いものにならない。そこで $n=6$ では未解決であるが、次のような予想を立てることができる。

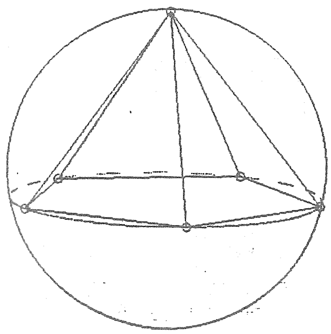
予想　E の critical point は次の4種類でつきる。



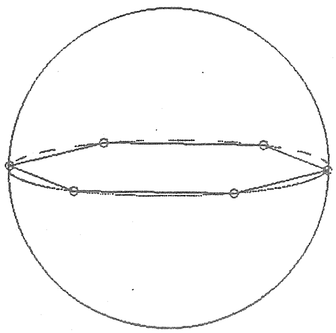
index $=0$　個数：30



index $=1$　個数：120



index $=2$　個数：144



index $=3$　個数：60

これらの交代和は $-6=\chi(F_6/G)$ に一致するから、① が解ければ、上にのべたものの他に critical point が

あれば、χへの寄与を打ち消すように、2種類以上現われなければならない。また予想が正しければ、§2と同じ方法で[井草]の結果のhomotopy版

$$B_6/G \simeq pt$$

が示される。

③ 一般のnについてのEのcritical pointsの決定。阿原一志氏による実験で、$n=7$で奇妙なstable critical pointがみつかっている。そこで、予想を立てることすら困難になっている。

何か知恵が要るように思われる。

付記　図の作成に関し阿原一志氏(東大理)の御協力を得た。心から感謝します。

References

[Arnol'd 1] V. I. Arnol'd "The cohomology ring of the colored braid group." Math. Notes Sci. USSR 5 (1969) pp 138–140

[Arnol'd 2] V. I. Arnol'd "On some topological invariants of algebraic functions" Trans. Moscow Math Soc. 21 (1970) pp 30–52.

[Birman 1] J. S. Birman "Braids, Link, Mapping Class Groups" Ann. Math. Studies No. 82. Princeton U.P. 1975

[Birman 2]. J. S. Birman "Automorphisms of the fundamental group of a closed, orientable 2-manifold" Proc. A.M.S. 21 (1969) pp 351–354.

[井草]. J. Igusa "Arithmetic variety of moduli for genus 2" Ann. Math. 72 (1960) pp 612–649

[Kirwan] F. C. Kirwan "Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry" Math. Notes No. 31 Princeton U.P. 1983

[Lee-Weintraub] R. Lee and S. H. Weintraub "Cohomology of $Sp_4\mathbb{Z}$ and related groups and spaces." Topology 24 (1985) pp 391–410.

[MacLachlan] C. MacLachlan "Modulus space is simply-connected" Proc. A.M.S. 29 (1971) pp 85–86.

[Segal] G. B. Segal "Configuration-spaces and iterated loop-spaces" Invent. Math. 21 (1973) pp 213–222

[河澄] N. Kawazumi "The homotopy type of the moduli space of n-point sets of the Riemann sphere and configurations of electric charges" in preparation.

以上。

縫い目付多様体の理論とunknotting作用について

阪大理　小林 毅

1. Introduction

縫い目のついた多様体(sutured mfd.)の概念は、D.Gabaiが"三次元多様体の上にいつ性質のよい(具体的に言うと, tautな)葉層構造が入るか?"という問題を考えるにあたって導入したものであり, 彼はそれを用いて三次元多様体の中の曲面がその様な葉層構造に拡張する為の必要十分条件を[G1]の中で与えている。更にGabaiはその様な葉層構造を利用する事により Property R予想[G3], satellite knot の Property P [G5], 結び目の種数のband和に関する超加法性[G4] 等結び目理論におけるいくつかの重要な問題を解いた。その後 M.Scharlemannは, 上の問題を解決するにあたってGabaiの議論の中で葉層構造の部分はomitできる事, つまり縫い目付多様体に関する議論だけで十分な事を示した[S1]。本講演ではまずこのScharlemannの仕事を紹介しその後

これを利用して得られる結び目のunknotting数に関するいくつかの結果を報告する。

2. Sutured manifold (from D. Gabai to M. Scharlemann)

まず標題の sutured mfd. の定義を与える。M を向きのついた三次元多様体とする。この時:

Definition 2.1. 組 (M, γ) が<u>sutured mfd.</u> とは,

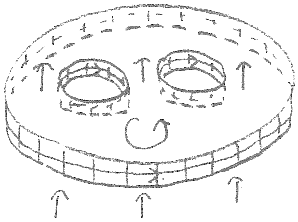
(1) γ は ∂M 内の互いに交わらない, いくつかのアニュラス $A(\gamma)$ とトーラス $T(\gamma)$ の和,

(2) $A(\gamma)$ の各成分には, 向きの与えられた, その core となる simple loop が指定されている。(この simple loops を<u>suture</u>と呼び $s(\gamma)$ と書く事にする)

(3) $R(\gamma) = cl(\partial M - \gamma)$ の各成分には向きが入っている。特にその法線ベクトルが外向き (内向き) のもの全体の和を $R_+(\gamma)$ ($R_-(\gamma)$) と書く。またこの時 $R_\pm(\gamma)$ の向きは $s(\gamma)$ の向きと同調していなければならない。

Example 2.2. (product sutured mfd.)

S を $\partial S \neq \phi$ なるコンパクト曲面, $M = S \times [0,1]$, $\gamma = \partial S \times [0,1]$ とする。この時 (M, γ) には $R_+(\gamma) = S \times \{1\}$, $R_-(\gamma) = S \times \{0\}$ なる sutured mfd. str. が入る。



さて Gabai の仕事を紹介する為に更に二つ定義を与えておく。

Definition 2.3. (taut suture mfd.)

sutured mfd. (M, γ) が <u>taut</u> であるとは, 次の条件をみたす事とする。

(1) M は 3-mfd. として既約,

(2) $R_\pm(\gamma)$ は $H_2(M, \gamma)$ の元として Thurston norm minimizing,

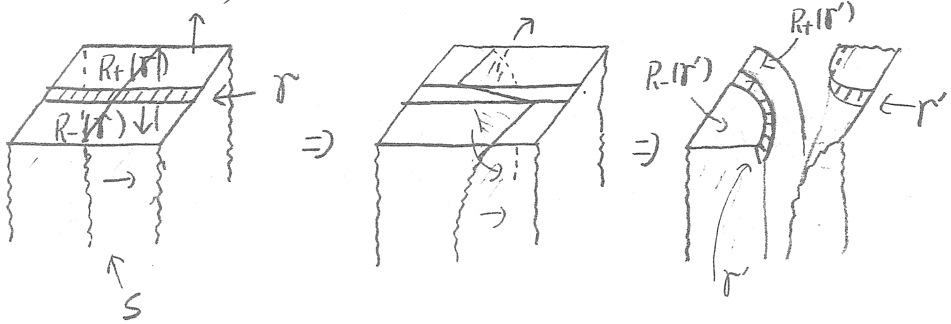
(3) $R(\gamma)$ は M で incompressible.

Definition 2.4 (sutured mfd. decomposition; 但し簡単の為 $T(\gamma) = \phi$ としておく)

(M, γ) を sutured mfd., S を M に proper に埋め込まれた 向き付けられた surface とする。この時

$$(M, \gamma) \xrightarrow{S} (M', \gamma')$$

が sutured mfd. decomp. であるとは, $M' = cl(M - N(S))$, M' 上の γ' は次の要領で定める。

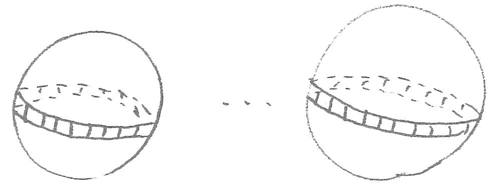


以上の下 Gabai は 次の結果を示した。

Theorem 2.4 ([G1]) 全ての taut sutured mfd. は taut sutured mfd. hierarchy を持つ。即ち (M, γ) を taut sutured mfd. とすると sutured mfd. decomp. の列 ; $(M, \gamma) \xrightarrow{S_1} (M_1, \gamma_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_n} (M_n, \gamma_n)$ で各 (M_i, γ_i) は taut かつ M_n の各成分は 3-cell になる様なものがある。

Remark : (M_n, γ_n) は taut だから M_n の各成分は

丁度1個の γ_m の成分を含む。 即ち

$(M_m, \gamma_m) =$ 

ところで Gabai は，同じ論文の中で次の結果を述べている。

"Theorem 2.6. [G1, Lemma 3.5]"
$(M, \gamma) \xrightarrow{S} (M', \gamma')$ を sutured mfd. decomp. とする。 この時 (M', γ') が taut なら (M, γ) も taut である。

Theorem 2.6 に " " がついているのは，[G1] の中ではその証明のスケッチが書かれているだけで，またその statement 自体も正確ではないからである。(実際 上の"定理"には反例が存在する事が三好重明氏 や Scharlemann によって指摘されている [G2, 463p.]。) しかし上の"定理"は適当な条件をおく事により厳密に証明できる。(例えば [G2], [S1] 参照のこと) ここでは敢えて正確な命題を述べる事は

しないが要するにここで重要なのは sutured mfd. の tautness は多くの場合 sutured mfd. decomp. に於て"引きもどす事ができる"という精神である。

以上ごく簡単に Gabai の仕事の一部を紹介した訳だが次に [S1] に沿って Scharlemann の手法を紹介する事にする。

いま M を今まで通り β を M に埋め込まれた 1-complex, S を M に proper に埋め込まれた曲面とする。この時 S の β-Euler数 $\chi_\beta(S)$ を次で定める。

$$\chi_\beta(S) = \max\{0, |S \cap \beta| - \chi(S)\}$$

(但 $|\cdot|$ は成分の個数)

すると Thurston norm の時と全く同じ要領で $H_2(M, \mathbb{R})$ 上の β-norm χ_β が定義できる。

Definition 2.7 以上の下, S が β-taut であるとは S が次の条件をみたす事とする。

(1) S は $H_2(M, \partial S)$ で β-norm minimizing,

(2) $S-\beta$ は $M-\beta$ で incompressible,

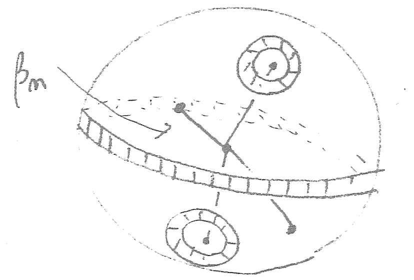
(3) S は β の各arc に同じ orientation

で交わる。

また χ_β を用いて Def. 2.3 と同じ要領で β-taut sutured mfd. (M, γ, β) が定義できる。この時 Scharlemann は Theorem 2.5 にあたる結果が全く平行に成立する事を示した。即ち；

Theorem 2.8. (M, γ, β) を β-taut sutured mfd. とする。この時 (M, γ, β) sutured mfd. decomp. の列：$(M, \gamma, \beta) \xrightarrow{S_1} (M_1, \gamma_1, \beta_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \gamma_m, \beta_m)$ で各 (M_i, γ_i, β_i) は β_i-taut かつ M_m の各成分は 3-cell からなる様なものがある。

上の定理に於て (M_m, γ_m, β_m) は β_m-taut であって taut とは限らない事を注意しておく。即ち一般には次の様になっている。



：β_m-taut だが taut ではない。

さて以上を準備として，Property R の証明を Model に，Scharlemannの手法を紹介する事にする。

K を S^3 内の non trivial knot，$E(K)=cl(S^3-N(K))$，$S\subset E(K)$ を K の最小種数 Seifert surface とする。次に M を K を 0-surgery して得られる mfd.，$\hat{S}$ $(\subset M)$ を S の boundary に，K を surgery する solid torus の a meridian を attach して得られる closed surface，$\beta(\subset M)$ を その solid torus の core とする。この時 Property R予想は 次の様に述べられる。

Property R予想：M は $S^2\times S^1$ に同相ではない。

この予想を証明する為には次の命題を示せばよい事が容易にわかる。

目標：$\hat{S}$ は Thurston norm minimizing かつ incompressible.

以下，三つの steps に分けて"目標"を証明する。

Step 1. $\hat{S}$ は (M, φ, β) で β-norm minimizing.

この step は $\hat{S}$ と β の代数的交わり数を使えば容易に証明できる。Step 1 と Theorem 2.8 より

Step 2. (M, φ, β) の β_i-taut な sutured mfd. hierarchy $(M, \varphi, \beta) \xrightarrow{\hat{S}} (M_1, \gamma_1, \beta_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \gamma_m, \beta_m)$ が存在する。 ($\gamma_1 = \varphi$)

がわかる。そこで:

Step 3. M_m の各成分に対して suture は一本しか乗っていない。

という事実を示す。Step 3 は Graph 理論的な解析を用いてなされるが非常に technical なのでこれ以上は何も述べない事にする。実際この step は示したい命題によって色々と異ったタイプの議論を要するので一般論で述べる事はできない。さてとにかく Step 3 が示せたとする。そうすれば後は一般論で O.K. である。つまり Step 3 は (M_m, γ_m) が taut である

事を意味している。そこで Step 2 の β_i を忘れて得られる sutured mfd. decomp.

$$(M, \phi) \xrightarrow{\hat{S}} (M_1, \gamma_1) \xrightarrow{S_2} \cdots \xrightarrow{S_m} (M_m, \gamma_m)$$

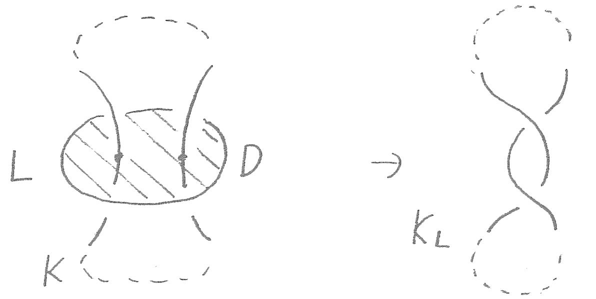
を考える。これに Theorem 2.6 を適用してやれば (M_m, γ_m) の tautness が次々と引きもどされていって最後に"目標"の命題が示されて Property R 予想の証明が終る訳である。

3. unknotting 作用

このセクションでは unknotting 作用（又は crossing change）の定義を与えこれに関する Scharlemann–Thompson の仕事 [S-T 1] を紹介しそれらの一般化について述べる。

K を S^3 内の結び目，D を K と2点で，互いに相異なる向きで交わる円板とし $L = \partial D$ とする。いま L に ± 1 surgery を施す事により K は S^3 内の（一般には K と異なる）knot K_L に変わる。このとき K_L は K から crossing link L に沿って unknotting 作用（又は crossing change）を一回施す事によって得

られると言う事にする。



この時 Scharlemann-Thompson は次の結果を示した。

Theorem 3.1. [S-T 1]　K, L, K_L を上の通りとする。また T を $E(K)$ $(= cl(S^3 - N(K)))$ 内の incompressible torus とする。この時次のいずれかが成立。

(1) $\text{genus}(K_L) \geq \text{genus}(K) - 1$,

(2) L は $E(K)$ 内の ambient isotopy で動かして, T と disjoint にできる。

筆者は [K 1] の中で Theorem 3.1 の一つの一般化を与えたが、それを用いると例えば次の結果が示せる。

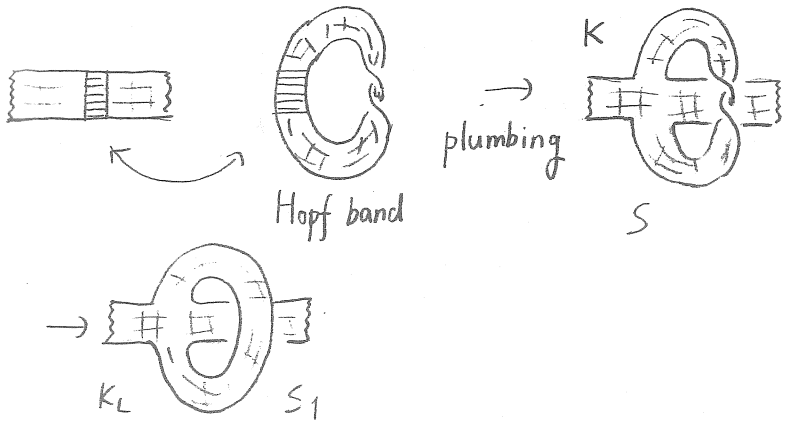
Theorem 3.2. K, L, K_L を上の通りとする。また T を $E(L)$ 内の incompressible な genus g surface とする。この時次のいずれかが成立。

(1) $\mathrm{genus}(K_L) \geq \mathrm{genus}(K) - 1$,

(2) L は $E(K)$ 内の ambient isotopy で動かして T と高々 $4g-4$ 点で交わる様にできる。

この証明は §2 で述べた Scharlemann の手法を用いてなされる。更に K が non-trivial knot, K_L が trivial knot の場合次の結果を得た。

Theorem 3.3. [K2] K, L, K_L を上の通り K を non-trivial knot, K_L を trivial knot とする。この時 K の minimal genus Seifert surface S である genus $g-1$ surface と Hopf band の plumbing になっているものがある。特にその unknotting 作用は Hopf band のねじれをほどく事に対応している。

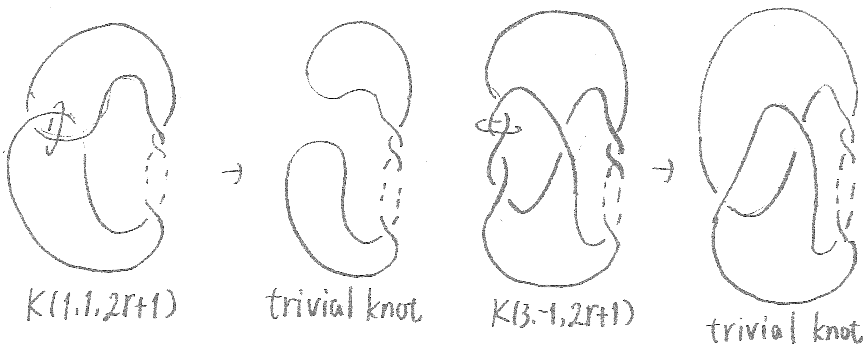


Remark. Scharlemann-Thompson [S-T 2] はより一般に genus (K_L) < genus (K) ならば Theorem 3.3と同じ結論の成立する事を示している。

Theorem 3.3を用いて次の結果が示される。

Corollary 3.4. ([K2], [S-T 2]) K が genus 1 かつ unknotting 数 1 の結び目である必要十分条件は K が doubled knot である事である。

Corollary 3.5. [K2] non-trivial pretzel knot $K(2p+1, 2q+1, 2r+1)$ $(p, q, r \in \mathbb{Z})$ が unknotting 数 1 をもつ必要十分条件は $\{2p+1, 2q+1, 2r+1\}$ が $\{1, 1\}$, $\{-1, -1\}$, $\{3, -1\}$ 又は $\{-3, 1\}$ を含む事である。



また Theorem 3.3と [K3] の結果を合わせると結び目

9_{25} の unknotting 数が2である事も示せる[K2].

4. Fibered links and unknotting operations

このセクションでは fibered links の unknotting operation に関する[K4]の結果を紹介する。その為にまず[K4]の動機となった一つの事実を紹介する。

いま K, L, K_L, S を Theorem 3.3 の通りとする。この時

Fact 4.1. L を $1/n$ surgery して K から得られる結び目を K_n と書く。(従って $K_L = K_1$ or K_{-1}) この時高々一個の n を除いて S は K_n の minimal genus Seifert surface となる。

が成立する。つまり K_n = trivial knot となる様な n は唯一の"例外点"と言う事ができる。そこで特に K が fibered knot の場合にこの"例外点"で何が起っているのかを以下で述べる事にする。

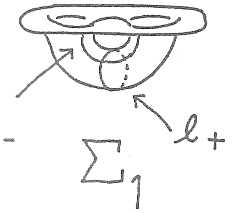
Definition 4.2. F を絡み目 k の Seifert surface とする。この時 $(N, \delta) = (N(F, E(k)), N(\partial F, \partial E(k)))$ に

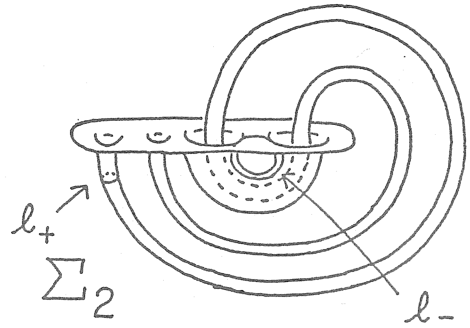
は自然に product sutured mfd. の構造が入る。この(N, δ) を <u>F から得られる sutured mfd.</u> と呼ぶ。
また $N^c = cl(E(k) - N)$, $\delta^c = cl(\partial E(K) - \delta)$ とし(N^c, δ^c) に $R_+(\delta^c) = R_-(\delta^c)$ なる構造を入れた sutured mfd. (N^c, δ^c) の事を <u>F の complementary sutured mfd.</u> と呼ぶ。

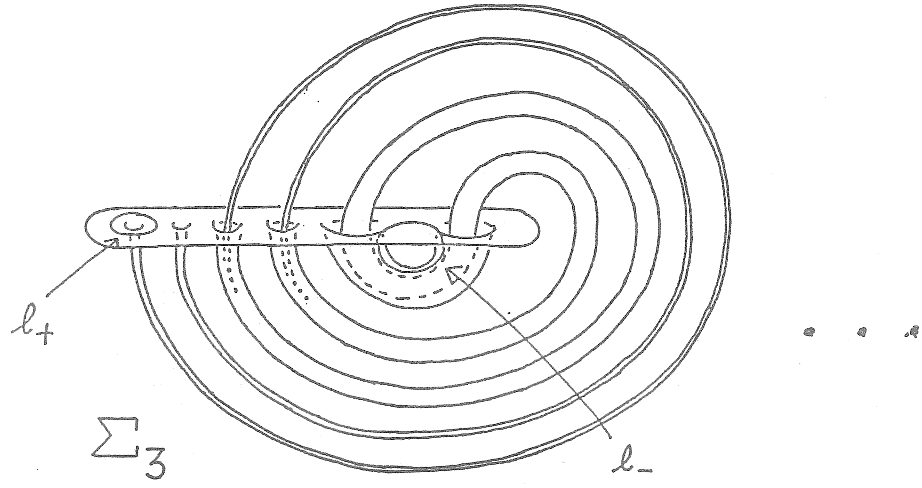
Definition 4.3. S^3 内の連結な surface F が <u>pre-fiber surface</u> であるとは (N^c, δ^c) が product sutured mfd. の R_+ と R_- に 1-handles を1個づつ attach して得られるものになっている事である。

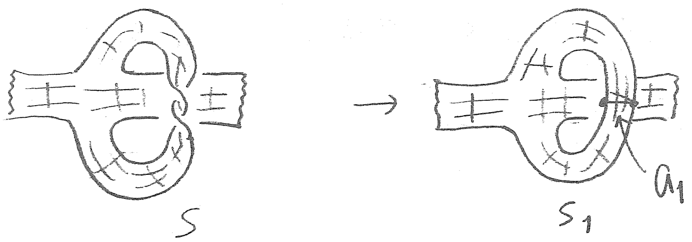
Example 4.4 Σ_m を次の様な trivial knot の genus m の Seifert surface とする(次頁)。この Σ_m は pre-fiber surface である。

いま K, L, K_L, S, K_m を上の通りとする。また特に $K_1 = K_L$ として S から得られる K_L の Seifert surface とする。この時次が成立する;









Theorem 4.5　S_1 はある Σ_m に ambient isotopic また上図の arc a_1 は ℓ_+, ℓ_- と一点で交わる。逆にこの性質をもつ Σ_m 上の arc で Σ_m を一回ひねると fiber surface が得られる。

REFERENCES

G1. D. Gabai, Foliations and the topology of 3-manifolds, J. Diff. Geom. 18(1983), 445-503.

G2. ________, Foliations and the topology of 3-manifolds II, J. Diff. Geom. 26(1987), 461-478.

G3. ________, Foliations and the topology of 3-manifolds III, J. Diff. Geom. 26(1987), 479-536.

G4. ________, Genus is superadditive under band connected sum, Topology 26(1987), 209-210.

G5. ________, Surgery on knots in solid tori, Topology 28 (1989), 1-6.

K1. T. Kobayashi, Generalized unknotting operations and tangle decompositions, Proc. AMS(to appear).

K2. ____________, Minimal genus Seifert surfaces for unknotting number 1 knots, Kobe J. Math.(to appear).

K3. ____________, Uniqueness of minimal genus Seifert surfaces for links, Topology and its Appl.(to appear).

K4. ____________, Fibered links and unknotting operations, Osaka J. Math.(to appear).

S1. M. Scharlemann, Sutured manifolds and generalized Thurston norm, preprint.

S-T 1. M. Scharlemann and A. Thompson, Unknotting number, genus, and companion tori, Math. Ann. 280(1988), 191-205.

S-T 2. ______________________________, Link genus and the Conway moves (expanded version), preprint.

実特異点のmodified analytic equivalence classes

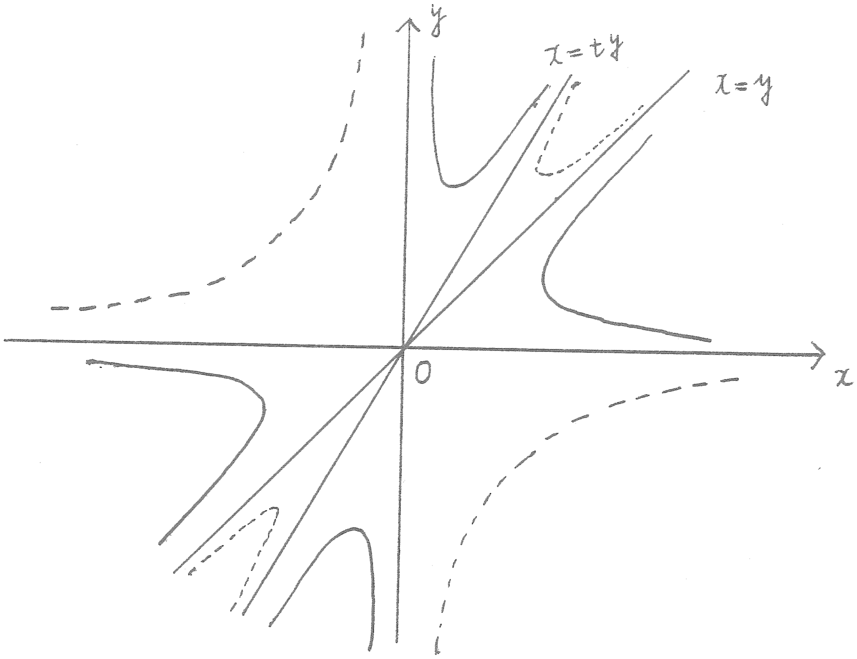
吉永 悦男
横浜国大・教育

1. Whitney's Example と T.-C. Kuo の定理

1-1 $W_t(x,y) = xy(x-y)(x-ty) : \mathbb{R}^2, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$

$t \in \mathbb{R} - \{0,1\}$ のとき，W_t は原点で isolated singularity を持つ。

$W_t(x,y) =$ 定数 の表わす曲線



この絵から，次の可換図を得る：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2, 0 \arrow[r, "W_t"] \arrow[d, "{}^\exists H"', "\text{homeo.}"] & \mathbb{R}, 0 \\ \mathbb{R}^2, 0 \arrow[ur, "W_s"'] & \end{tikzcd}$$

$$\therefore \quad W_t \underset{C^0}{\sim} W_s \quad \text{for } t, s \in \mathbb{R} - \{0, 1\}$$

次に，H を C^1 diffeomorphism としてみる。

$$H(W_t^{-1}(0)) = W_s^{-1}(0)$$

$$\begin{array}{ccc} dH_0 : T_0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & T_0\mathbb{R}^2 = \mathbb{R}^2 \\ \cup & & \cup \\ W_t^{-1}(0) & \longrightarrow & W_s^{-1}(0) \end{array}$$

1-2 Lemma　$H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を正則行列。

$v_i = (v_{i1}, v_{i2}) \in \mathbb{R}^2$　$1 \leqq i \leqq 4$ に対し，非調和比 $\sigma(v_1, v_2, v_3, v_4)$

$$= \frac{v_{11}/v_{12} - v_{31}/v_{32}}{v_{11}/v_{12} - v_{41}/v_{42}} \bigg/ \frac{v_{21}/v_{22} - v_{31}/v_{32}}{v_{21}/v_{22} - v_{41}/v_{42}}$$

とおくとき，

$$\sigma(v_1, v_2, v_3, v_4) = \sigma(Hv_1, Hv_2, Hv_3, Hv_4) .$$

さて，$\sigma(W_t^{-1}(0)) = t/t-1$ であり，

$\sigma(W_s^{-1}(0))$ は，次のいずれか：

$s/s-1$，$1-s$，s 又はこれらの逆数。

従って，次を得る：$0 < t, s < \frac{1}{2}$ のとき，

$\sigma(t) = \sigma(s) \Longleftrightarrow t = s$

これより，

1-3 Theorem. $0 < t, s < \frac{1}{2}$ のとき，

$W_t \underset{C^1}{\sim} W_s \Longleftrightarrow t = s$

これから，族 W_t は，連続濃度の C^1 同値類を持つことが判る。

さて，

$f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ analytic ft.

$\pi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ analytic modification

1-4 Definition

(1) $f, g : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ analytic fts

$f \underset{\pi}{\sim} g$ modified analytic equivalent via π

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists\, \tilde{h}$ analytic isomorphism, $\exists\, h$ homeomorphism with 可換図：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M}, \pi^{-1}(0) \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\tilde{h}"'] & \mathbb{R}^n, 0 \arrow[r, "f"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R}, 0 \\
\mathcal{M}, \pi^{-1}(0) \arrow[r, "\pi"] & \mathbb{R}^n, 0 \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
$$

(2) An analytic family (i.e. analytic ft.) $F(x; t)$: $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0 \times I \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ admits a modified analytic trivialization along I, a compact m-cube via π

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$\exists \tilde{H}$ analytic isomorphism, H homeomorphism

with 可換図：

$$
\begin{tikzcd}
\mathcal{M} \times \mathbb{R}^m, \pi^{-1}(0) \times I \arrow[rr, "\pi \times id"] \arrow[dr, "proj"] \arrow[dd, "\tilde{H}"'] & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0 \times I \arrow[r, "proj"] \arrow[dl, "proj"'] \arrow[dd, "H"] & \mathbb{R}^n \times 0, 0 \times 0 \arrow[dd, "F_0"] \\
& \mathbb{R}^m, I & & \\
\mathcal{M} \times \mathbb{R}^m, \pi^{-1}(0) \times I \arrow[rr, "\pi \times id"'] \arrow[ur, "proj"] & & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m, 0 \times I \arrow[r, "F"'] \arrow[ul, "proj"'] & \mathbb{R}, 0
\end{tikzcd}
$$

（このとき，$\forall t, \forall s \in I$ に対して，$F_t \underset{\pi}{\sim} F_s$）.

1-5 Theorem (T.-C. Kuo)

$F(x;t) = H_k(x;t) + H_{k+1}(x;t) + \cdots$ をxについての同次多項式分解とする。

$H_k(x;t)$ isolated singularity at the origin for $^\forall t \in I$

$\Longrightarrow$ F admits a MAT along I via the blowing-up of $\mathbb{R}^n$ at the origin.

1-6 Corollary

(1) W_t MAT along $I \subset \mathbb{R} - \{0,1\}$

(2) W_t $t \in \mathbb{R}$ は，二つの modified analytic classes から成る。

2 blow analytic category

2-1 Examples

(1) $$f(x,y) = \begin{cases} x^2y/(x^2+y^2) & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

continuous, not C^1 class at the origin.

ここで，次図を見ると

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^2(x_1,x_2) \times \mathbb{P}^1(\xi_1:\xi_2) \arrow[drr, "\tilde{f} = \frac{\xi_1^2}{\xi_1^2+\xi_2^2}x_2"] & & \\
\mathcal{M}^2 = \{x_1\xi_2 = x_2\xi_1\} \arrow[u, phantom, "\cup"] \arrow[r, "\pi_2"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$f \circ \pi_2 = \tilde{f}|\mathcal{M}^2$ は analytic ft である。定義により，f は blow analytic ft である。

(2) Def 1-4 における homeomorphism h は，analytic isomorphism $\tilde{h}$ から来ている。

2-2 Definition

conti. map. $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}^m, 0$ <u>blow analytic</u>

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{M}^n, \pi_n^{-1}(0) \arrow[r, "\exists \tilde{f}", "\text{analytic}"'] \arrow[d, "\pi_n"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{M}^m, \pi_m^{-1}(0) \arrow[d, "\pi_m"] \\
\mathbb{R}^n, 0 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R}^m, 0
\end{tikzcd}$$

特に，$n = m$，$\tilde{f}$ analytic isomorphism のとき，f を blow analytic isomorphism という。

◎ $f = (f_1, \cdots, f_m)$ が blow analytic map. であれば，各 f_p は blow analytic ft である。

2-3 analytic map $\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathcal{M}^n$,

$\phi(x, \xi) = \left(\frac{x \cdot \xi}{|\xi|^2}\xi, \xi\right)$ を用いると，

l. a. ft. $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ に対して

$\exists$ analytic ft $\tilde{f} = f\pi\phi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{P}^{n-1}, 0 \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}, 0$

s.t. $\tilde{f}|\mathcal{M}^n = f \circ \pi$ ここで，$\phi|\mathcal{M}^n = id$

$\tilde{f}(x, \xi) = \sum C_k(\xi) x^k$

より，

$$f(x) = \begin{cases} \sum C_k(x) x^k & \text{if } x \neq 0 \\ 0 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

を得る。このように，l. a. ft. は"級数展開"される。

2-4 Theorem（逆写像定理） l. a. map $f : \mathbb{R}^n, 0 \circlearrowleft$ の1次の項の部分を $H_1(f)$ とするとき，次は同値：

(1) f l. a. isomorphism

(2) $H_1(f)$ l. a. isomorphism

(3) $[H_1(f)] : \mathbb{P}^{n-1} \circlearrowleft$ analytic isomorphism

2-5 Definition. l. a. ft. $f : \mathbb{R}^n, 0 \longrightarrow \mathbb{R}, 0$ が，原点で高々 isolated singularity を持つ

$\overset{def}{\Longleftrightarrow} \left\{ x \in \mathbb{R}^n - 0 \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(x) = \cdots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(x) = 0 \right\} = \phi$

2-6 Theorem. analytic family $F(x;t)$ of l.a. fts., $t \in I$ (= a compact cube)

$F(x;t) = H_k(x;t) + H_{k+1}(x;t) + \cdots$

$H_k(x;t)$ が原点で高々 isolated singularity を持つ.

$\Longrightarrow$

F admits a MAT along I via the blowing-up of $\mathbb{R}^n$ at the origin.

References

[1] TZEE-CHAR KUO, Une classification des singularites reelles, C. R. Acad. Sc. Paris t.288 (1979), 809-812.

[2] -------------, The modified analytic trivialization of singularties, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 605-614.

[3] ----- and JAMES N. WARD, A theorem on almost analytic equisingularity, J. Math. Soc. Japan 33 (1981), 471-484.

[4] T.C. KUO, On classification of real singularities, Invent. math. 82 (1985), 257-262.

[5] TOSHIZUMI FUKUI and ETSUO YOSHINAGA, The modified analytic trivialization of family of real analytic functions, Invent. math. 82 (1985), 467-477.

[6] T. FUKUI, The modified analytic trivialization of family of real analytic mappings, (preprint).

[7] MASAHIKO SUZUKI, Stability of Newton diagrams of family of real analytic functions trivialized by blowing-up, (to appear in Transaction of AMS).

[8] E. YOSHINAGA, The modified analytic trivialization of real analytic families via blowing-ups, J. Math. Soc. of Japan 40 (1988), 161-179.

[9] -----------, Topologically principal part of analytic functions, (to appear in Trans. of AMS, 312 (1989)).

Hopf 空間に関連したある種の構成について

逸見　豊

1　Generalized Whitehead product

定義 1.1. 写像 $f:\Sigma Y \to X$, $g:\Sigma Z \to X$ の generalized Whitehead product $[f,g]$ は次の様に定義される.

$$\begin{aligned}[f,g]: Y * Z = CY \times Z \cup Y \times CZ \\ \xrightarrow{\tilde{f}\times\tilde{g}} X \times * \cup * \times X = X \vee X \xrightarrow{\nabla} X\end{aligned}$$

ただし, $\tilde{f}:(CY,Y) \to (X,*)$, $\tilde{g}:(CZ,Z) \to (X,*)$ は f, g から得られる自然な写像, ∇ は folding map である. (ΣY, ΣZ が球面の時は, 通常の Whitehead product である.)

写像 $\varphi: A \to C$, $\psi: B \to C$ に対して, $\mu(a,*) = \varphi(a)$, $\mu(*,b) = \psi(b)$ を満たす写像 $\mu: A \times B \to C$ を (φ,ψ) を axes とする pairing と呼べば, 上の f, g に対して,

$$[f,g] \simeq * \iff (f,g) \text{ を axes とする pairing が存在する.}$$

定義 1.2. (1) X が Whitehead space (W-space) $\underset{\text{def}}{\iff}$ X 上の全ての Whitehead product が自明となる.

(2) X が generalized Whitehead space (GW-space) $\underset{\text{def}}{\iff}$ X 上の全ての generalized Whitehead product が自明となる.

次の補題は明らかである.

補題 1.3. (i) X が W-space $\iff$ 任意の $f: S^n \to X$, $g: S^m \to X$ に対して, (f,g) を axes とする pairing が存在する.

(ii) X が GW-space $\iff$ 任意の $f:\Sigma Y\to X$, $g:\Sigma Z\to X$ に対して, (f,g) を axes とする pairing が存在する.

(iii) X が H-space $\iff$ 任意の $f:Y\to X$, $g:Z\to X$ に対して, (f,g) を axes とする pairing が存在する.

明らかに H-space $\Rightarrow$ GW-space $\Rightarrow$ W-space.

$\varepsilon:\Sigma\Omega X\to X$ を evaluation map とすると次が成り立つ.

補題 1.4. (i) X が GW-space $\iff$ (ii) $(\varepsilon,\varepsilon)$ を axes とする pairing $\mu:\Sigma\Omega X\times\Sigma\Omega X\to X$ が存在する. $\iff$ (iii) ΩX の loop multiplication が homotopy commutative.

(証明) (ii) $\Longrightarrow$ (i) : $f':Y\to\Omega X$, $g':Z\to\Omega X$ を $f:\Sigma Y\to X$, $g:\Sigma Z\to X$ の adjoint とすると, $\mu(\Sigma f'\times\Sigma g')$ は (f,g) を axes とする pairing.

(ii) $\iff$ (iii) : by Stasheff [10]. (証明終)

上の補題より, GW-space と H-space の違いを調べるためには homotopy commutative loop space と H-space の loop space の違いを調べればよい. これに関しては, Sugawara の結果がある. すなわち homotopy commutative loop space ΩX が H-space の loop space になるための必要十分条件は strongly homotopy commutative になることである ([11]). この strongly homotopy commutative という条件はある種の higher homotopy commutativity であり, 最近 McGibbon は Sugawara の条件を細かく分割することによりこれを一般化した Sugawara C_n-space (SC_n-space) を定義した. McGibbon による SC_n-space の定義は combinatorial なものであるが, 次のような同値な言い替えが可能である。

命題 1.5([9]). ΩX が SC_n-space $\iff$ 次を満たす写像 μ_n が存在する.

$$\mu_n:\bigcup_i(\Omega X)P(i)\times(\Omega X)P(n-i)\to(\Omega X)P(n)$$
$$\mu_n(x,*)=\mu_n(*,x)=x\quad(x\in(\Omega X)P(n))$$

ただし, $(\Omega X)P(i)$ は ΩX の projective i-space である.

SC_2-space は homotopy commutative loop space と同値であり, SC_∞-space は H-space の loop space と同値である. ΩX が SC_n-space になるとき X を S_n-space とよぶことにする.

いま任意の空間 X に対しそれと homotopy 同値な空間 $(\Omega X)P(\infty)$ とを同一視することにより, X の filtration $\{* = X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n \subset \cdots\}$ が $X_n = (\Omega X)P(n)$ で定まる. さらに $X \times X$ の filtration を $(X \times X)_n = \bigcup_i X_i \times X_{n-i}$ で定めると, X が S_n-space であるとは "(id_X, id_X) を axes とする pairing が filtration $\leq n$ で存在する" というい い方ができる.

Willams [12] は Sugawara の strong commutative とは異なるもう一つの higher homotopy commutativity の定義を与えた. Willams の定義を低い次元に関して少し説明することにする.

ΩX は積が homotopy commutative であるとき Williams C_2-space (WC_2-space) であるという.

ΩX が WC_3-space であるとは WC_2-space であり, さらに次の六角形の内部をうめる higher homotopy が存在する時をいう. ただし $c(x,y)$ は $x, y \in \Omega X$ に対する commuting homotopy $x \cdot y \sim y \cdot x$ である.

$$
\begin{tikzcd}
 & x \cdot y \cdot z \arrow[rr, "x \cdot c(y,z)"] \arrow[dl, "c(x,y) \cdot z"'] & & x \cdot z \cdot y \arrow[dr, "c(x,z) \cdot y"] & \\
y \cdot x \cdot z \arrow[dr, "y \cdot c(x,z)"'] & & & & z \cdot x \cdot y \arrow[dl, "z \cdot c(x,y)"] \\
 & y \cdot z \cdot x \arrow[rr, "c(y,z) \cdot x"] & & z \cdot y \cdot x &
\end{tikzcd}
$$

$n \geq 4$ に対しても同様の higher homotopy により WC_n が定義される.

空間 Y の n-th James reduced product space を $J_n(Y)$ と書くことにすると WC_n-space に関しても次の同値な言い替えが可能である. ただし $\varepsilon : \Sigma\Omega X \to X$ は evaluation map である.

命題 1.6([12]). ΩX が WC_n-space $\Longleftrightarrow$ ε の拡張である写像 $J_n(\Sigma\Omega X) \to X$ が存在する.

ΩX が WC_n-space になるとき X を W_n-space とよぶことにする。定義より S_2 と W_2 は同値である. また $S_n \Rightarrow W_n$ であることが知られているが, 一般にこの逆は成り立たない (cf. 例 1.11). この意味で "S", "W" はそれぞれ "strong", "weak" の略ともみれる.

さて $J_\infty(Y)$ は $\Omega\Sigma Y$ の homotopy 型をもつので, これらを同一視することにより$\Omega\Sigma Y$ の filtration $\{* = (\Omega\Sigma Y)_0 \subset (\Omega\Sigma Y)_1 \subset \cdots \subset (\Omega\Sigma Y)_n \subset \cdots\}$ を $(\Omega\Sigma Y)_n = J_n(Y)$ で定める. このとき S_n-space と同様に X が W_n-space であるとは "$\varepsilon : \Sigma\Omega X \to X$ の拡張 $\Omega\Sigma^2\Omega X \to X$ が filtration $\leq n$ で存在する" といういい方ができる.

任意の空間 $Y_i\,(i = 1, \ldots, n)$ に対し, 少なくとも一つの coordinate が base point である様な点からなる $Y_1 \times \cdots \times Y_n$ の部分集合 (fat wedge) を $T_1(Y_1, \ldots, Y_n)$ とする. この時写像 $\xi : Y_1 * \cdots * Y_n \to T_1(Y_1, \ldots, Y_n)$ が存在して ξ の mapping cone は $\Sigma Y_1 \times \cdots \times \Sigma Y_n$ の homotopy 型を持つ.

定義 1.7. $f_i : \Sigma Y_i \to X\,(i = 1, \ldots, n)$ の n-th order generalized Whitehead product $[f_1, \ldots, f_n]$ は次で定義される.

$$\begin{aligned}[f_1, \ldots, f_n] = \{ f\xi \mid f &: T_1(\Sigma Y_1, \ldots, \Sigma Y_n) \to X \\ &\text{s.t. } f(*, \ldots, *, y_i, *, \ldots, *) = f_i(y_i)\,(y_i \in \Sigma Y_i) \}\end{aligned}$$

明らかに $0 \in [f_1, \ldots, f_n]$ であるための必要十分条件は写像 $\mu : \Sigma Y_1 \times \cdots \times \Sigma Y_n \to X$ で $\mu(*, \ldots, *, y_i, *, \ldots, *) = f_i(y_i)\,(y_i \in \Sigma Y_i)$ なるものが存在することである. また $\rho_n : T_1(\underbrace{\Sigma Y, \ldots, \Sigma Y}_{n+1}) \to J_n(\Sigma Y)$ を自然な射影とすると $\rho_n\xi$ の mapping cone は $J_{n+1}(\Sigma Y)$ の homotopy 型を持つ.

補題 1.8. X が W_n-space $\Longleftrightarrow$ X のすべての n-th order generalized Whitehead product が定義され, それらは 0 を含む.

定義 1.9(F.Cohen). 写像 $f : Y \to Z$ が partial H-space $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f の拡張 $\tilde{f} : \Omega\Sigma Y (= J_\infty(Y)) \to Z$ が存在する.

補題 1.10. (1) (i) X は S_∞-space $\Longleftrightarrow$ (ii) $id_X : X \to X$ が partial H-space $\Longleftrightarrow$ (iii) 任意の $f : Y \to X$ が partial H-space

(2) (i) X は W_∞-space $\iff$ (ii) $\varepsilon : \Sigma\Omega X \to X$ が partial H-space $\iff$ (iii) 任意の $f : \Sigma Y \to X$ が partial H-space

(証明) (1) (i) $\iff$ (ii) : by James [6].

(2) (ii) $\Longrightarrow$ (iii) : $\tilde{\varepsilon} : \Omega\Sigma^2\Omega X \to X$ を ε の拡張, $f' : Y \to \Omega X$ を $f : \Sigma Y \to X$ の adjoint とすると, $\tilde{\varepsilon}(\Omega\Sigma^2 f')$ は f の拡張. (証明終)

例 1.11. (1)(McGibbon) $f : K(\boldsymbol{Z}/p, 2n) \to K(\boldsymbol{Z}/p, 2n(p+1))$ を $f^*\iota_{2n(p+1)} = \iota_{2n}^{p+1}$ で与えられる写像とする. ただし p は素数, $\iota \in H^t(K(\boldsymbol{Z}/p, t); \boldsymbol{Z}/p)$ は fundamental class とする. このとき, f の homotopy fiber は W_∞-space になるが S_∞-space にはならない.

(2) p-localized sphere $S_{(p)}^{2n-1}$ が loop space になる必要十分条件は $n \mid p-1\,(p : \text{odd})$, $n \mid 2\,(p=2)$ であることが知られている. $BS_{(p)}^{2n-1}$ を $\Omega(BS_{(p)}^{2n-1}) \simeq S_{(p)}^{2n-1}$ なる空間とする. このとき次が成り立つ.

定理 1.12. (i) $BS_{(p)}^{2n-1}$ が S_m-space $\iff$ (ii) W_m-space $\iff$ (iii) $m \le (p-1)/n$

(証明) $X = BS_{(p)}^{2n-1}$ とおく.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) : $J_m(\Sigma\Omega X) = J_m(S_{(p)}^{2n})$. $\pi_m : (S_{(p)}^{2n})^m \to J_m(\Sigma\Omega X)$ を射影, $u \in H^{2n}(S_{(p)}^{2n}; \boldsymbol{Z}/p)$, $v \in H^{2n}(X; \boldsymbol{Z}/p)$ を generators とする. $\mathcal{P}^n v = v^p$ だから

$$\mathcal{P}^1 v = cv^s \quad (c \neq 0, s = 1 + (p-1)/n).$$

$\tilde{\varepsilon} : J_m(\Sigma\Omega X) \to X$ を evaluation map の拡張とする. $\pi_m^*\tilde{\varepsilon}^*(v) = u \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 + 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes u$. よって $m \ge s$ ならば $\pi_m^*\tilde{\varepsilon}^*(v^s) \neq 0$ 一方 $\pi_m^*\tilde{\varepsilon}^*(\mathcal{P}^1 v) = \mathcal{P}^1(\pi_m^*\tilde{\varepsilon}^*(v)) = 0$ となり矛盾が生じる.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) : $i \le (p-1)/n \Longrightarrow (\Omega X)P(i) \simeq S_{(p)}^{2n} \vee \cdots \vee S_{(p)}^{2ni}$. よって $\mu : \bigcup (\Omega X)P(i) \times (\Omega X)P(m-i) \to (\Omega X)P(m)$ を $A = S_{(p)}^{2nt} \times S_{(p)}^{2ns}$ 上で

$$t+s > m \implies \mu|A = *$$
$$t+s \le m \implies A \xrightarrow{pr} S_{(p)}^{2n(t+s)} \xrightarrow{(t+s)!} S_{(p)}^{2n(t+s)} \subset (\Omega X)P(m)$$

と定義すればよい. (証明終)

2 Cohomology of GW-spaces

以下 p を素数とし, $\widetilde{H}^*(\cdot) = \widetilde{H}^*(\cdot; \boldsymbol{Z}/p)$ とする. $\Gamma^l[x] (l = p^*, \dim x$: even) を Hopf algebra $\boldsymbol{Z}/p[\tilde{x}]/(\tilde{x}^l)$ の dual Hopf algebra とする ($\langle x, \tilde{x} \rangle = 1$). ただし $l = \infty$ のときは $\Gamma[x]$ と書き $\boldsymbol{Z}/p[\tilde{x}]$ の dual とする. ここで空間 X に対し次を仮定する:

$$(2.1) \quad \begin{array}{c} H^*(\Omega X) \simeq A_1 \otimes \cdots \otimes A_n \otimes B_1 \otimes \cdots \otimes B_m \quad \text{as coalgebras,} \\ A_i = \Gamma[a_i], \quad B_j = \Gamma^p[b_j] \end{array}$$

上の条件は例えば "X は 単連結 H-space で $H^*(X)$ が有限" または "$H^*(X)$ は有限個の奇数次元の元で生成される exterior algebra" などの条件を満たせば成り立つ. このとき $H^*(\Omega X)$ の primitive module $PH^*(\Omega X)$ は各 A_i, B_j の生成元を基底とする$\boldsymbol{Z}/p$-module である:

$$PH^*(\Omega X) = \boldsymbol{Z}/p\{ a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m \}$$

$\iota_k : (\Omega X)P(k-1) \subset (\Omega X)P(k) \, ((\Omega X)P(1) = \Sigma\Omega X)$ を inclusion とし $\tilde{a}_i, \tilde{b}_j \in \widetilde{H}^*((\Omega X)P(2))$ を

$$\iota_2^* \tilde{a}_i = \sigma a_i, \quad \iota_2^* \tilde{b}_j = \sigma b_j$$

で定める. ただし $\sigma : \widetilde{H}^*(\cdot) \to \widetilde{H}^*(\Sigma \cdot)$ は suspension isomorphism. さらに $p \neq 2$ のときは $\tilde{c}_j \in \widetilde{H}^*((\Omega X)P(2))$ を次で定める:

$$\tilde{c}_j = \beta \mathcal{P}^{n(j)} \tilde{b}_j \quad (\dim \tilde{b}_j = 2n(j) + 1).$$

Z/p-algebras N_1, および $N_2 \, (p \neq 2)$ を abstract に次で定める:

$$N_1 = \begin{cases} \Lambda(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n, \tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_m) & (p \neq 2) \\ \Lambda(\tilde{a}_1, \cdots, \tilde{a}_n) \otimes \boldsymbol{Z}/2[\tilde{b}_1, \cdots, \tilde{b}_m] & (p = 2) \end{cases}$$
$$N_2 = \boldsymbol{Z}/2[\tilde{c}_j]$$

このとき次の結果を得る. ただし D^k は k-fold decomposable module:

命題 2.2.

$$\operatorname{Im} \iota_3^* \cong \begin{cases} N_1/D^3 N_1 \oplus N_2/D^2 N_2 & (p \neq 2) \\ N_1/D^3 N_1 & (p = 2) \end{cases}$$

さて X を GW-space とする. ΩX は homotopy commutative H-space になるから (ι_2, ι_2) を axes とする pairing $\mu : \Sigma\Omega X \times \Sigma\Omega X \to (\Omega X)P(2)$ が存在する. $\eta : \Sigma\Omega X * \Sigma\Omega X \to \Sigma((\Omega X)P(2))$ を μ の Hopf construction とし, $XQ(2)$ をその mapping cone とする. このとき定義より次の exact sequence が存在する:

(2.3)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \vdots & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & \widetilde{H}^*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}^*(\Omega X) & & & \\
 & & & \delta \downarrow & & & \\
\cdots \leftarrow \widetilde{H}^*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}^*(\Omega X) & \underset{\alpha}{\leftarrow} & & \widetilde{H}^*((\Omega X)P(2)) & \underset{\varphi}{\leftarrow} & \widetilde{H}^*(XQ(2)) & \underset{\lambda}{\leftarrow} \cdots \\
 & & & \gamma \downarrow & & & \\
 & & & \widetilde{H}^*(\Omega X) & & & \\
 & & & \downarrow & & & \\
 & & & \vdots & & &
\end{array}
$$

ただし, $\deg\alpha = -2$, $\deg\varphi = \deg\gamma = -1$, $\deg\delta = 2$, $\delta\alpha(y_1 \otimes y_2) = y_1 \otimes y_2 + (-1)^{\dim y_1 \cdot \dim y_2} y_2 \otimes y_1$. このとき (2.3) より次の定理を得る.

定理 2.4. $H^*(XQ(2))$ の subring R, および R の ideal I で次を満たすものが存在する.

(i) R, I は mod p Steenrod algebra $\mathcal{A}(p)$ の作用で閉じている.

(ii) $I \cdot \widetilde{H}^*(XQ(2)) = 0$, $\gamma\varphi(I) = 0$, $\operatorname{Im}\gamma\varphi = PH^*(\Omega X)$.

(iii) J を $\{\, y_1 \otimes y_2 - (-1)^{\dim y_1 \cdot \dim y_2} y_2 \otimes y_1 \mid y_1, y_2 \in \widetilde{H}^*(\Omega X) \,\}$ で生成される $\widetilde{H}^*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}^*(\Omega X)$ の submodule とすると

$$\operatorname{Im}\lambda \subset R, \qquad \operatorname{Ker}\lambda = J.$$

(iv) (iii) より $\lambda : \widetilde{H}^*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}^*(\Omega X) \to R/I$ が定義されるが, この写像に関して次の sequence は exact になる.

$$0 \to \widetilde{H}^*(\Omega X) \otimes \widetilde{H}^*(\Omega X)/J \xrightarrow{\lambda} R/I \xrightarrow{\gamma\varphi} PH^*(\Omega X) \to 0$$

(v) $x, y \in R/I$ に対して次が成り立つ.

$$x \cdot y = (-1)^{\dim x - 1} \lambda(\gamma\varphi x \otimes \gamma\varphi y)$$

(証明) $p=2$ として証明する．

まず $\mathrm{Im}\,\gamma = PH^*(\Omega X)$ であり，かつ $\widetilde{H}^*(\Omega X)\otimes\widetilde{H}^*(\Omega X)$ の奇数次元は 0 だから $\mathrm{Im}\,\gamma\varphi = PH^*(\Omega X)$ となる．

つぎに $(\Sigma\iota_3)\eta : \Sigma\Omega X * \Sigma\Omega X \to \Sigma((\Omega X)P(3))$ の mapping cone を $XQ(3)$ とすれば，自然な写像 $\xi : XQ(2)\to XQ(3)$ が誘導され，次の exact sequence の間の写像をえる:

$$\begin{array}{ccccccc}
\leftarrow & \widetilde{H}^*((\Omega X)P(3)) & \leftarrow & \widetilde{H}^*(XQ(3)) & \leftarrow & \widetilde{H}^*(\Omega X)\otimes\widetilde{H}^*(\Omega X) & \leftarrow \\
 & \downarrow \iota_3^* & & \downarrow \xi^* & & \| & \\
\leftarrow & \widetilde{H}^*((\Omega X)P(2)) & \xleftarrow{\varphi} & \widetilde{H}^*(XQ(2)) & \xleftarrow{\lambda} & \widetilde{H}^*(\Omega X)\otimes\widetilde{H}^*(\Omega X) & \leftarrow
\end{array}$$

ここで R, I を次で定める:

$$R = \mathrm{Im}\,[\,\xi^* : H^*(XQ(3)) \to H^*(XQ(2))\,],\quad I = R^{odd}$$

あきらかに R は $\mathcal{A}(p)$ の作用で閉じている．命題 2.2 より $\varphi(R) = N_1/D^3N_1$．一方 $\mathrm{Im}\,\lambda\subset R^{even}$ だから $I=\Sigma\beta\mathcal{P}^nR^{2n}$ と書ける．よって $\beta(I)=0$ となり I も $\mathcal{A}(p)$ の作用で閉じている．$\varphi(I)\subset\mathrm{Im}\,\delta$ であることより $\varphi(I)\cdot\widetilde{H}^*((\Omega X)P(2))=0$ となり $I\cdot\widetilde{H}^*(XQ(2))=0$ を得る．また $\gamma\varphi(I)=0$ となる．

(iii),(iv),(v) も容易に示せる．　　　　　　　　　　　　　(証明終)

上の定理を $p=2$ の場合に応用することにより次の定理を得る．

定理 2.5. ΩX が $p=2$ に対して (2.1) を満たすとする．このとき任意の正の整数 $n=2^tm\,(m:\mathrm{odd})$ および任意の $x\in PH^{4n}(\Omega X;\boldsymbol{Z}/2)$ に対して $y_i\in PH^*(\Omega X;\boldsymbol{Z}/2)\,(0\le i\le t+1)$ で次を満たすものが存在する．

$$x=\sum_{0\le i\le t+1}(Sq^2y_i)^{2^i}$$

上の結果から X の cohomology に関する次の結果を得る．ただし ψ は integral classes の上で定義され $Sq^2Sq^2=0$ に associate された secondary operation である．

定理 2.6. X, n, t, m を定理 2.5 と同じとする．このとき任意の $x\in H^{4n+1}(X;\boldsymbol{Z}/2)$ に対して次が modulo decomposable elements でなりたつような $y_i\in H^*(\Omega X;\boldsymbol{Z}/2)\,(0\le i\le t+1)$ が存在する．

$$x\equiv\psi(y_0)+Sq^{2^{t+1}m}\psi(y_1)+\cdots+Sq^{2^{t+1}m}Sq^{2^tm}\ldots Sq^{2m}\psi(y_{t+1})$$

系 2.7. X を単連結 finite H-space または $H^*(X;\mathbf{Z})$ が有限個の奇数次元の元で生成される exterior algebra であるような単連結 GW-space とする．このとき X の自明でない homotopy 群の最低次元は $-1 \bmod 4$ である．

Lin [7] は上の定理 2.6, 系 2.7 と同様の結果を X は H-space で $H_*(X;\mathbf{Z}/2)$ が associative という仮定のもとで示している．

3 Higher homotopy commutative A_n-spaces

ここでは SC_n, WC_n の定義を A_n-space に対し拡張する．ただし $\mathcal{S}(k)$ は k-th symmetric group.

定義 3.1. X を A_n-space $(n \geq 2)$ とする．

(1) X が quasi SC_n-space である $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次を満たす写像族

$$\left\{ \mu_k : \bigcup\nolimits_{0\leq i\leq k} XP(i)\times XP(k-i) \to XP(k) \right\}_{k\leq n}$$

が存在する:

(i) $\mu_k(x,*) = \mu_k(*,x) = x \quad (x \in XP(k))$

(ii) $\mu_k \mid \bigcup_i XP(i)\times XP(k-1-i) = \mu_{k-1}$

(iii) 次の diagram は homotopy commutative:

$$\begin{array}{ccc}
\bigcup_i XP(i)\times XP(k-i) & \xrightarrow{\mu_k} & XP(k) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\dfrac{\bigcup_i XP(i)\times XP(k-i)}{\bigcup_i XP(i)\times XP(k-1-i)} & & XP(k)/XP(k-1) \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
(\Sigma X)^{\wedge(k)} & \xrightarrow[\sum_{\tau\in\mathcal{S}(k)}\tau]{} & (\Sigma X)^{\wedge(k)}
\end{array}$$

(2) X が quasi WC_n-space である $\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 次を満たす写像族

$$\{ \mu_k : J_k(\Sigma X) \to XP(k) \}_{k\leq n}$$

が存在する:

(i) $\mu_1 = id_{\Sigma X}$

(ii) $\mu_k \mid J_{k-1}(\Sigma X) = \mu_{k-1}$

(iii) 次の diagram は homotopy commutative:

$$
\begin{array}{ccc}
J_k(\Sigma X) & \xrightarrow{\mu_k} & XP(k) \\
\downarrow & & \downarrow \\
J_k(\Sigma X)/J_{k-1}(\Sigma X) & & XP(k)/XP(k-1) \\
\simeq\downarrow & & \simeq\downarrow \\
(\Sigma X)^{\wedge(k)} & \xrightarrow[\sum_{\tau\in S(k)} \tau]{} & (\Sigma X)^{\wedge(k)}
\end{array}
$$

quasi SC_n, quasi WC_n は loop spaces に対する SC_n, WC_n の拡張になっている. 実際次が成り立つ.

定理 3.2. loop space に対して SC_n (WC_n) $\Longleftrightarrow$ quasi SC_n (quasi WC_n).

SC_n, WC_n の時と同様に, quasi $SC_n \Longrightarrow$ quasi WC_n が成り立つ.

p-localized sphere $S^{2t-1}_{(p)}$ に対しては "A_n-space である $\Longleftrightarrow$ (1) n : 任意, $p=2$, $t=1,2$, (2) $p=2$, $t=4$, $n\le 2$, (3) p,t : 任意, $n \le p-1$, 又は (4) n : 任意, $t \mid p-1$" であることが知られている. 次の定理は定理 1.12 の拡張になっている.

定理 3.3. $S^{2t-1}_{(p)}$ は quasi $SC_n \Longleftrightarrow$ quasi WC_n であり, さらに次が成り立つ.

(i) $S^1_{(p)}$ は任意の p に対し quasi SC_∞-space になる.

(ii) $S^{2t-1}_{(p)}$ は任意の p に対し quasi SC_{p-1}-space になる.

(iii) $S^3_{(2)}$, $S^7_{(2)}$ は quasi SC_2-space にならない.

(iv) $t \mid p-1$, $t>1$ とする. $s=(p-1)/t$ とおけば, $S^{2t-1}_{(p)}$ は quasi SC_t-space となるような A_∞-structure を持つが, quasi SC_{t+1}-space となるような A_p-structure は持たない.

さて Hubbuck は homotopy commutative H-space に関する次の定理 (Torus Theorem) を証明した.

定理 ([4]). 連結な有限 CW 複体 X が homotopy commutative な積を持てば X は torus の homotopy 型を持つ.

上の定理は本質的には空間の mod 2 構造に関するものである. 実際 Lin [8] は上の定理において有限の仮定を mod 2 cohomology $H^*(X;\boldsymbol{Z}/2)$ が有限という仮定に弱めれば, X は torus と 2-equivalent になることを示した. また Iriye-Kono [5] は p が odd prime であれば p-localized H-space は常に homotopy commutative な積を持つことを示している. 次の定理は Torus Theorem の mod p version である.

定理 3.4. X が単連結 CW 複体で $H^*(X;\boldsymbol{Z}/p)$ が有限とする. もし X が quasi WC_p-space であれば

$$\widetilde{H}^*(X;\boldsymbol{Z}/p)=0$$

となる.

上の定理は Lin [8], Aguadé-Smith [1], McGibbon [9] を一般化している.

定理 3.4 において仮定 WC_p を WC_{p-1} に弱めることはできない. 実際 $S^{2t-1}_{(p)}$ が反例になっている (定理 3.3).

References

[1] J. Aguadé and L. Smith, On the mod p torus theorem of John Hubbuck, *Math. Z.*, **191**(1986), 325–326.

[2] Y. Hemmi, On the cohomology of finite H-spaces, *pre-print.*

[3] Y. Hemmi, Higher homotopy commutativity of H-spaces and the mod p torus theorem, *pre-print.*

[4] J. R. Hubbuck, On homotopy commutative H-spaces, *Topology*, 8(1969), 119–126.

[5] K. Iriye and A. Kono, Mod p retracts of G-product spaces, *Math. Z.*, **190**(1985), 357–363.

[6] I. M. James, Reduced product spaces, *Ann. of Math.*, **62**(1955), 170–197.

[7] J. P. Lin, Higher order operations in the mod 2 cohomology of finite H-spaces, *Amer. J. Math.*, **105**(1983), 855–937.

[8] J. P. Lin, A cohomological proof of the torus theorem, *Math. Z.*, **190**(1985), 469–476.

[9] C. A. McGibbon, Higher forms of homotopy commutativity, *pre-print.*

[10] J. D. Stasheff, *H-spaces from a Homotopy Point of View, Lecture Notes in Math.*, **161**(1970), Springer-Verlag.

[11] M. Sugawara, On the homotopy-commutativity of groups and loop spaces, *Mem. Coll. Sci., Univ. Kyoto, Ser. A*, **33**(1960), 257–269.

[12] F. D. Williams, Higher homotopy-cummutativity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139**(1969), 191–206.

結び目のエネルギー汎函数の族

東京大・理　大原　淳

§０，序

S^1 から３次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ への embedding 全体の集合 $\mathcal{E}$ の構造を、その上に定義した汎関数を用いて調べることを考える。ここでは curve が自己交差しようとすると＋∞に発散するような汎関数（ energy functional と呼ぶことにする）を幾つか定義し、その性質を幾つか述べてみたい。

§１では、 energy functional の定義と幾つかの具体例について、§２ではその基本的性質と knot type の有限性について、§３では連続性と knot の canonical position について述べる。尚、証明は後半にまとめておいた。又、講演では［Ｏ］以後の結果の部分について述べる予定である。

§１．エネルギー汎関数

$\mathcal{E} = \{ f : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3$; embedding of class C^2 s.t. $|f'(t)| = 1 \quad \forall t \in S^1 \}$ とおく。

<u>Def.1.1</u> 汎関数 $e:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ が <u>energy functional</u>

$\Longleftrightarrow$ ${}^{\forall}x, y\in S^1\ (x\neq y)$, ${}^{\forall}M\in\mathbb{R}$ に対して. ${}^{\exists}\varepsilon>0$

s.t. $|f(x)-f(y)|\leqq\varepsilon\ (f\in\mathcal{E})\Rightarrow e(f)\geqq M$

$x, y\in S^1=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ に対して. S^1での弧長 $\delta(x,y)$ を.

$\delta(x,y)=min\{|x-y|,\ 1-|x-y|\}$ とおく。

<u>Def. 1.2</u> $f\in\mathcal{E}$, $x, y\in S^1$, $j=0.1.2$ に対して.

$$\Phi_j(f;x,y)=|f(x)-f(y)|^{-j}-\delta(x,y)^{-j}$$

$(j=1,2\ ;\ x\neq y)$

$$\Phi_0(f;x,y)=\delta(x,y)\cdot|f(x)-f(y)|^{-1}\qquad(x\neq y)$$

$$\Phi_j(f;x,x)=\begin{cases}1 & j=0\\ 0 & j=1\\ |f''(x)|^2/12 & j=2\end{cases}$$

と定義する。

<u>Prop. 1.3</u> $\Phi_j(f;\ ,\ ):S^1\times S^1\to\mathbb{R}$ は非負

有界、かつ $S^1\times S^1$ - diagonal で連続。(f が C^4 級なら、$S^1\times S^1$ で連続。)

<u>Def. 1.4</u> $f\in\mathcal{E}$; $j=0,1,2$; $n\geqq 1$; $\alpha\geqq\frac{1}{n}$ に対して、

$$V_j^{(n)}(f;x)=\int_0^1 \Phi_j(f;x,y)^n\,dy$$

$$E_j^{(n,\alpha)}(f)=\int_0^1\left\{V_j^{(n)}(f;x)\right\}^\alpha dx$$

$$=\int_0^1\left\{\int_0^1 \Phi_j(f;x,y)^n\,dy\right\}^\alpha dx$$

$$E_j^{exp}(f)=\int_0^1\int_0^1 \exp\Phi_j(f;x,y)\,dx\,dy$$

とおく。

<u>Prop. 1.5</u> $E_j^{(n,\alpha)}(f)\geqq 0$, $E_j^{exp}(f)\geqq 1$ $\forall f\in\mathcal{E}$.

<u>Remark 1.6</u> [O] での notation との対応は、

$$V(f,x)=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_\epsilon^{1+\epsilon}\frac{dt}{|f(x)-f(x+t)|^2}-\frac{2}{\epsilon}\right)$$

$$=V_2^{(1)}(f;x)-4$$

$$E(f) = \frac{1}{2}\int_0^1 V(f, x)\,dx$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \frac{1}{|f(x)-f(y)|^2} - \frac{\pi^2}{\{\sin\pi(y-x)\}^2}\,dx\,dy$$
$$= \frac{1}{2} E_2^{(1,1)}(f) - 2$$

<u>Th. 1.7</u> (1) $E_j^{(n,\alpha)}$ $(j=0,1,2\ ;\ n\geqq 1\ ;\ \alpha \geqq \frac{1}{n})$ が energy functional

$$\Leftrightarrow \ ☆ \begin{cases} j=0,1 \ \& \ n>1 \ \& \ \alpha \geqq \frac{1}{n-1} & \text{or} \\ j=2 \quad (n\geqq 1,\ \alpha \geqq \frac{1}{n}) \end{cases}$$

(2) E_j^{exp} $(j=0,1,2)$ は energy functional。

<u>Rem. 1.8</u> ① $\Phi_2(f;x,y) \geqq \Phi_1(f;x,y)^2$

② $E_j^{(n,\alpha)}(f) \leqq E_j^{(n\alpha,1)}(f) \qquad (\alpha \geqq 1)$

$E_j^{(n,\alpha)}(f) \geqq E_j^{(n\alpha,1)}(f) \qquad (\alpha < 1)$

③ $E_j^{(n,1)}(f) = \|\Phi_j(f)\|_{L^n(S^1\times S^1)}$

§２．Knot type の有限性

ここでは、ある種の energy functional の "基本的

性質" について述べ、それに因って、ある種の energy functional の値を上から抑えたら、knot の ambient isotopy class の数は有限になることを示す。

Def. 2.1 (Kuiper ?) $f \in \mathcal{E}$, $x \in S^1$ に対し、$\chi_f(x)$を、写像 $S^1 \ni y \mapsto |f(x) - f(y)| \in \mathbb{R}$ の 0 でない極値の最小値とする。f の self-distance を $sd(f) = \inf_{x \in S^1} \chi_f(x)$ とおく。

Th. 2.2 [O] $C > 0$ given

$\Longrightarrow$ $sd(f) \geqq C$ となるような embedding f の ambient isotopy class は有限個

Th. 2.3 [O] (E についての基本的性質) $\alpha \in \mathbb{R}$ given

$$\Longrightarrow \begin{cases} {}^\exists K > 0 \quad s.t. \quad E(f) = \frac{1}{2} E_2^{(1,1)}(f) - 2 \leqq \alpha \\ \Rightarrow |f(x) - f(y)| \geqq K\, \delta(x, y) \quad {}^\forall x, y \in S^1 \end{cases}$$

Th. 2.4 [O] $\lambda > 0$, $\alpha \in \mathbb{R}$: given

$\Longrightarrow$ ${}^\exists r > 0$ s.t.

$$E(f) + \frac{\lambda}{4\pi^2}\int_0^1 |f''(t)|^2 dt \leqq \alpha \Rightarrow \delta d(f) \geqq r$$

(注： $|f''(t)|$ は f の t での曲率)

この左辺を $E_{\lambda B}(f)$ とかくと、$E_{\lambda B}(f) \geqq \lambda - 2$ $({}^\forall f)$

<u>Cor 2.5. [O]</u> $\alpha \in \mathbb{R}$ given $\Rightarrow$ $E_{\lambda B}(f) \leqq \alpha$ なる f の amb. isotopy classes は有限個.

ここで今回の main theorem を述べる。

<u>Th. 2.6</u> $\alpha \in \mathbb{R}$ given ${}^\exists r > 0$ s.t.

$$E_2^{(1,2)}(f) \leqq \alpha \Rightarrow \delta d(f) \geqq r$$

<u>Cor 2.7</u> $\alpha \in \mathbb{R}$ given $\Rightarrow$ $E_2^{(1,2)}(f) \leqq \alpha$ なる f の amb. isotopy classes は有限個.

コメント：E ($E_2^{(1,1)}$) を上から抑えても、self-distanceを下から抑えることは出来ないと思われるが、Eを上から抑えたら、amb. isotopy classes of emb.は有限個になると予想される。

Ｔｈ.２.６は次のＴｈ.２.８とＴｈ.２.９より出る。

Th. 2.8（$E_2^{(1,2)}$についての基本的性質） $\alpha \geqq 0$ given

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} {}^{\exists}A>0,\ {}^{\exists}K_0>0 \ \text{ s.t. } \ E_2^{(1,2)}(f) \leqq \alpha \\ \Rightarrow (\#) \left\{ \begin{array}{l} |f(x)-f(y)| \geqq (1-A\delta(x,y)^{\frac{1}{3}})\delta(x,y) \\ |f(x)-f(y)| \geqq K_0 \cdot \delta(x,y) \\ \qquad\qquad \text{for } {}^{\forall}x, y \in S^1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Th. 2.9 $A>0$, $K_0>0$ given $\Rightarrow {}^{\exists}R>0$ s.t.

fについて、上の条件(#)が満たされているならば、

$$\delta(x,y) \leqq R \Rightarrow (f'(x), f'(y)) \geqq \sqrt{2}/2$$

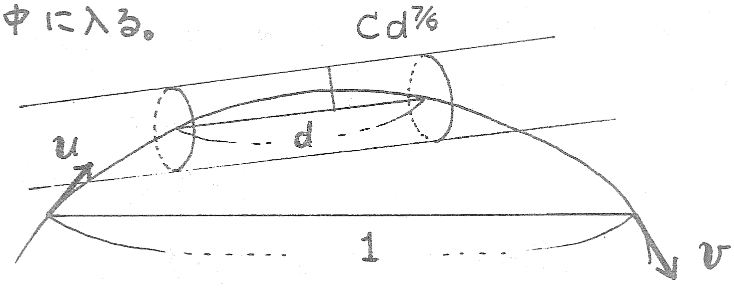
Ｔｈ.２.９は次の　Ｌｅｍｍａ　を用いて証明される。

Lemma 2.10 ${}^{\exists}C>0$ s.t.

$h: (a-\epsilon, b+\epsilon) \to R^3$ ($\epsilon>0$, $a<b$, $|h(a)-h(b)|=1$) で表わされるcurve γが次の条件(*)をみたせば、$\left(\dfrac{h'(a)}{|h'(a)|}, \dfrac{h'(b)}{|h'(b)|} \right) \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

(*) ${}^{\forall}x, y \in [a,b]$に対して、$|h(x)-h(y)|=d$とすると、$\gamma$の$h(x)$と$h(y)$の間の部分$h([x,y])$

（これを $\widehat{h(x)h(y)}$ とかく）は、$h(x)$ と $h(y)$ を結ぶ直線（これを $\overline{h(x)\,h(y)}$ とかく）を軸とした半径 $Cd^{7/6}$ の円筒の中に入る。



u と v のなす角 $\leqq \pi/4$

§ 3. 連続性と標準的位置

$\mathcal{E} \ni f$ の属する amb.iso.class of emb. を $[f]$ と書く。

Def. 3.1 $f \in \mathcal{E}$ が energy functional e に関して canonical position とは、

$$g \in [f] \Rightarrow e(g) \geqq e(f)$$

となること。

Th.1.7 に出て来る energy functional の canonical position の存在を示したいのだが、これは一般にはまだ出来ていない。そこで second derivative に制限を加えて Ascoli-Arzelàの定理を使うことを考える。その為に functional を拡張する。

Def. 3.2　$\mathbb{R}_\infty = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ とおき、$\{+\infty\}$ の基本近傍系を $\{(M, \infty) \cup \{+\infty\} \,;\, M \in \mathbb{Q}\}$ とおくことにより、$\mathbb{R}_\infty$ を topologize する。

Def. 3.3　(1)

$$\mathcal{I} = \{ f : S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}^3 \ \text{immersion of class } C^2 \quad \text{s.t. } |f'(t)| = 1 \ \ {}^\forall t \in S^1 \}$$

$$\mathcal{E}'' = \{ f'' \,;\, {}^\exists f \in \mathcal{E} \ \text{s.t.}\ f'(0) = (1, 0, 0) \}$$

$$\mathcal{I}'' = \{ f'' \,;\, {}^\exists f \in \mathcal{I} \qquad \text{〃} \qquad \text{〃} \qquad \}$$

(2) $\mathcal{K}$: an amb. iso. class of emb.

$K > 0$, $L > 0$ に対して、

$$\mathcal{E}''(\mathcal{K}\,;\,K, L) = \{ f'' \in \mathcal{E}'' \,;\, {}^\exists f \in \mathcal{E} \cap \mathcal{K} \ \text{s.t.}$$
$$|f''(x)| \leqq K \ \& \ |f''(x) - f''(y)| \leqq L\,\delta(x, y) \ \ {}^\forall x, y \}$$

とおく。

Prop. 3.4　$e : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ が C^m-topology $(2 \geqq m \geqq 0)$ に関して連続な energy functional ならば、e は C^m topology に関して連続な $\tilde{e} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}_\infty$ に (unique に) 拡張される。($\tilde{e} = e$ とかく)

<u>Prop. 3.5</u> (1) $E_j^{(n,\alpha)}$, $E_j^{\exp}:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ は C^2-top. に関して連続。従って $\overline{E}_j^{(n,\alpha)}$, $\overline{E}_j^{\exp}:\mathcal{E}''\to\mathbb{R}$, & $:\mathcal{L}''\to\mathbb{R}_\infty$ は C^0-top. に関して連続。

(2) $\mathcal{L}''$ は $C(S^1,\mathbb{R}^3)$ (S^1 から $\mathbb{R}^3$ への連続写像全体の集合) の中の閉集合。

<u>Cor. 3.6</u> Th. 1.7 の energy functional e には、$\mathcal{K}$, $K>0$, $L>0$ に対して、$\overline{\mathcal{E}''(\mathcal{K};K,L)}$ で $\bar{e}$ の最小値を与えるもの $f''_{e,\mathcal{K},K,L}\in\mathcal{L}''$ が存在する。このとき、$f_{e,\mathcal{K},K,L}\in\mathcal{E}\cap\mathcal{K}$。ここで、$\overline{\mathcal{E}''(\mathcal{K};K,L)}$ は、$C(S^1,\mathbb{R}^3)$ の部分空間としての closure、すなわち、$\mathcal{L}''$ の部分空間としての closure。

($\bar{e}:\mathcal{E}''\to\mathbb{R}$ ($\mathcal{L}''\to\mathbb{R}_\infty$) は $e:\mathcal{E}\to\mathbb{R}$ から induce される map)

$\tilde{e}:\mathcal{L}\to\mathbb{R}_\infty$ は、$f\in\mathcal{L}\setminus\mathcal{E}$ のとき、$\tilde{e}(f)=+\infty$ とおけばよい。$\bar{e}:\mathcal{L}''\to\mathbb{R}_\infty$ も同様。

§4. 証明

Prop. 1.3　$\max|f''| = K$ とおくと、$\delta(x,y) \leqq \pi/K$ なら

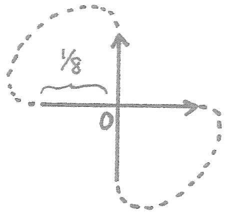
$$\delta(x,y) \geqq |f(x)-f(y)| \geqq K^{-1}\sin K\delta(x,y) \cdots (1.3.1)$$

という評価を用いる。C^4 級の場合 de l'Hôpital を使う。

Th. 1.7　(2) は (1) から出る。

(1) $\Rightarrow$)　☆が満たされなければ、self-intersection があっても、$E_j^{(n,\alpha)}$ が有限になることを示せばよい。

$$\begin{cases} g(t) = (t,0,0) & |t| \leqq 1/8 \\ g(\frac{1}{2}+t) = (0,t,0) & \text{〃} \end{cases}$$



$g(S^1)$

とおく。　$j=0,1$ の場合、

$n=1$ 又は、$\alpha < \dfrac{1}{n-1}$ のとき、

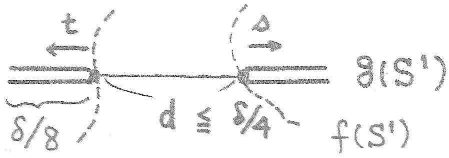
$$\text{p.v.}\int_{-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{8}}\left\{\int_{\frac{1}{2}-\frac{1}{8}}^{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} \Phi_j(g;x,y)^n\,dy\right\}^{\alpha} dx < \infty \quad \text{となる。}$$

ここで p.v. は主値積分 $\displaystyle\lim_{\epsilon\downarrow 0}\int_{-\frac{1}{8}}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\frac{1}{8}}$ の意味。

$\Leftarrow$)　$\delta(x,y) = \delta$　$|f(x)-f(y)| = d \leqq \delta/4$ とする。

$$\begin{cases} g(x+t) = (-|t|,0,0) \\ g(y+t) = (d+|t|,0,0) \end{cases} \quad |t| \leqq \frac{\delta}{8}$$

とおくと、

curve の形は、  となる

$$E_j^{(n,\alpha)}(f) \geqq \int_x^{x+\delta/8} \left\{ \int_y^{y+\delta/8} \Phi_j(g;t,s)^n ds \right\}^\alpha dt$$

右辺 $= P(\delta, d)$ とおく。

条件☆ ⇒ $\lim_{d \downarrow 0} P(\delta, d) = +\infty$ を示せばよい。

☆ ⇒ 定数（dによらない）倍を除いて、

$j = 0, 1$ のとき $P(\delta, d) = \begin{cases} \log d & (n > 1 \ \& \ \alpha = \frac{1}{n-1}) \\ d^{1-(n-1)\alpha} & (\text{otherwise}) \end{cases}$

$j = 2$ のとき $P(\delta, d) = \begin{cases} \log d & (n = \alpha = 1) \\ d^{1-(2n-1)\alpha} & (\text{otherwise}) \end{cases}$

Rem. 1.8 ② Hölder の不等式

Th. 2.2 次の Lemma から示される。

Lemma [O] $C > 0$ given $\exists N \in \mathbb{N}$ s.t.

$sd(f) \geqq C \Rightarrow f(S^1)$ は N-頂点の PL-knot と ambient isotopic.

∵ $sd(f) \geqq C$ とする。$f(S^1)=\gamma \ni X$ を中心とした半径 $\frac{c}{2}$ の 3-ball を $B_{\frac{c}{2}}(X)$ とかくと、$B_{\frac{c}{2}}(X) \cap \gamma$ の連結成分は1つで、$B_{\frac{c}{2}}(X)$ の中で γ は、X との距離が逆行しないことから、$B_{\frac{c}{2}}(X) \cap \gamma$ は unknotted curve segment になる。すなわち、boundary sphere を fix する $B_{\frac{c}{2}}(X)$ の isotopy で線分と移り合う。
$N=[1/C]+1$ とおくと、γ は半径 $\frac{c}{2}$ の ball N 個で覆うことが出来るから、順次 isotopy で PL-knot に出来る。

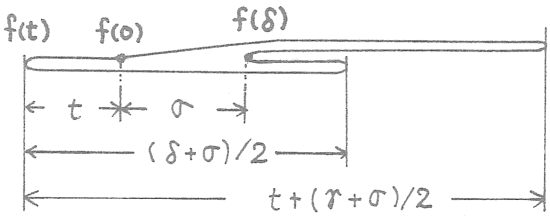
Lemma ⇒ Th2.2　N 頂点の PL-knot の amb. isotopy classes は combinatorial に有限個であることが分る。

Th.2.3　$E(f)=\frac{1}{2}\int_0^1 V(f,x)\,dx$ であった。

(H)　For some $x, y \in S^1$ with $\delta(x,y)=\delta$, $|f(x)-f(y)|=\sigma$

条件(H)下での各点での $V(f,x)$ の lower bound を求め、それを積分して、条件(H)下での E の lower bound を一つ求める。

$x=0$, $y=\delta$, $\gamma=1-\delta$ とおき、S^1 の各点に対して、下図のような場合について計算する。



i) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\delta-\sigma}{2}$ のとき. (文字 "f" は省略する)

$$V(t),\ V(\delta-t) \geqq 2\left(\frac{1}{t+\sigma}-\frac{2}{\delta+\sigma}-\frac{2}{\gamma+\sigma+2t}\right) \quad \cdots (2.3.1)$$

ii) $0 \leqq t \leqq \dfrac{\gamma-\sigma}{2}$ のとき.

$$V(-t),\ V(\delta+t) \geqq 2\left(\frac{1}{t+\sigma}-\frac{2}{\gamma+\sigma}-\frac{2}{\delta+\sigma+2t}\right)$$

それ以外の点では $V \geqq -4$

$\therefore\ E(f) \geqq -6-8\log 2+4\log\delta-4\log\sigma$

$\therefore\ |f(x)-f(y)| = \sigma \geqq \dfrac{\delta}{18\exp\frac{\alpha}{4}} = \dfrac{1}{18\exp\frac{\alpha}{4}}\cdot\delta(x,y)$ //

<u>Th. 2.4</u> $E_{\lambda B}(f) \leqq \alpha \Rightarrow E(f) \leqq \alpha-\lambda$ &

$\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_0^1 |f''(t)|^2 dt \leqq \lambda^{-1}(\alpha+2)$ $\left(\because \displaystyle\int_0^1 |h''| \geqq 2\pi \quad {}^\forall h \in \mathcal{E}\right)$

Total squared curvature が上から抑えられているので.

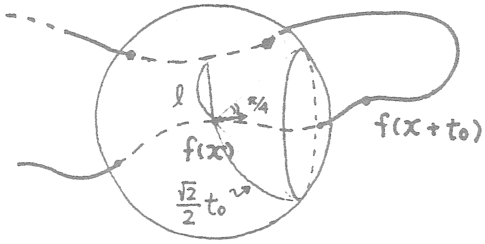
$^\exists t_0>0$ s.t. $\delta(x,y) \leqq t_0 \Rightarrow f'(x)$ と $f'(y)$ のなす角 $\leqq \frac{\pi}{4}$

よってこのとき. $|f(x)-f(y)|$ は $\delta(x,y)$ の単調増加関数。又.

E についての制限より. Th 2.3 の $K>0$ に対して. $\delta(x,y) \geqq t_0$

なら. $|f(x)-f(y)| \geqq Kt_0$

$r = \min\left\{Kt_0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}t_0\right\}$ とおけばよい。



$l \geqq Kt_0$

<u>Th.2.8 & Th.2.9 ⇒ Th 2.6</u> は 上と同様。

<u>Th.2.8</u> i) $E_2^{(1,2)}(f) \leqq \alpha \Rightarrow \int_0^1 V(f,x)^2 dx \leqq \alpha + 16$

(右辺 $= \alpha'$ とおくと、$\alpha' > 0$) $\therefore E(f) \leqq \frac{\sqrt{\alpha'}}{2}$ よって Th2.3 より、

$^\exists K_0 > 0$ s.t. $|f(x) - f(y)| \geqq K_0 \cdot \delta(x, y) \quad ^\forall x, y \in S^1$。

ii) $x=0$, $y=\delta$, $\gamma = 1-\delta$, $|f(x)-f(y)| = \sigma$ とおくと、

$$\frac{\alpha}{8} \geqq \int_0^{\frac{\delta-\sigma}{2}} \left(\frac{1}{2}V(t)+2\right)^2 dt$$

$\sigma = k\delta$ $(0 < K_0 \leqq k \leqq 1)$ とおくと、(2.3.1) を用いると、次の評価を得る。

$$\frac{1}{\delta} \cdot \frac{1}{1+k}\left\{\frac{2(1-k)}{1+k} + \frac{1-k}{k} - 4\log\frac{1+k}{2k}\right\}$$

$$\leqq \frac{\alpha}{8} - 4\log\frac{2K_0}{1+K_0}$$ 右辺 $= \alpha''$ とおくと、$\alpha'' > 0$

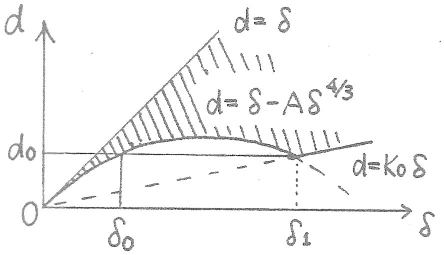
$1-k = h$ とおくと、 $\alpha'' \geqq \frac{1}{\delta} \cdot \frac{h^3}{24}$

$$\therefore |f(x) - f(y)| \geqq \left(1 - \sqrt[3]{24\alpha''} \cdot \delta(x,y)^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \delta(x,y) \quad //$$

Lemma 2.10 ⇒ Th. 2.9

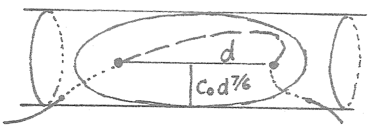
curve f が田を満たすとする。 $\delta(x,y)=\delta$, $|f(x)-f(y)|=d$ とおくと、

$\delta \geqq d \geqq (1-A\delta^{\frac{1}{3}})\delta$ & $d \geqq K_0\delta$



$$\begin{cases} K_0\delta_1 = \delta_1 - A\delta_1^{4/3} \\ d_0 = K_0\delta_1 = K_0\left(\dfrac{1-K_0}{A}\right)^3 \\ \delta_0 - A\delta_0^{4/3} = d_0 \ (\delta_0<\delta_1) \end{cases}$$

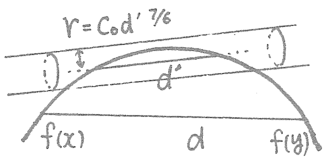
d_0 , δ_0 (>0) を上のように定める。 $K=\delta_0/d_0 (>1)$ とおけば $[0, d_0]$ で $d \leqq \delta \leqq Kd$ 。 よって $B=A\cdot K^{4/3}$ とおけば、 $\delta \leqq d + Bd^{4/3}$ 。 $C_0=\sqrt{\frac{B}{2}\left(1+\frac{B}{2}d_0^{1/3}\right)}$ とおけば、$d \in [0, d_0]$ のとき、距離 d の二点を結ぶ curve は、幅 $C_0 d^{7/6}$ の円筒の中に入る。



$d_1 = \dfrac{d_0}{1+Bd_0^{1/3}}$ とおけば、距離 $\leqq d_1$ なる二点を結ぶ curve 上の勝手な2点間の距離 $\leqq d_0$

$R = \min\left\{d_1, \left(\dfrac{C}{C_0}\right)^6\right\}$ とおけば Th が O.K.

∵ $\delta(x,y) \leqq R$ とすると、 $|f(x)-f(y)| = d \leqq R \leqq d_1$ 。よって $\overset{\frown}{f(x)f(y)}$ 上の勝手な $\underbrace{\text{2点間の距離}}_{(d')} \leqq d_0$ 。よって、その2点間の curve は、幅 $C_0 d'^{7/6}$ の円筒の中に入る。



$$d^{-1} r = C_0 d^{1/6} (d^{-1} d')^{7/6}$$
$$\leqq C_0 R^{1/6} (d^{-1} d')^{7/6}$$
$$\leqq C (d^{-1} d')^{7/6}$$

$\overset{\frown}{f(x)f(y)}$ を相似 d^{-1} 倍した図形は Lemma の条件をみたす。

よって $(f'(x), f'(y)) \geqq \sqrt{2}/2$ //

Lemma 2.10

$$C = \frac{\tan\frac{\pi}{32}}{2 + \dfrac{2^{23/12}}{1 - (1/2)^{1/6}}} \fallingdotseq 0.0027\cdots$$

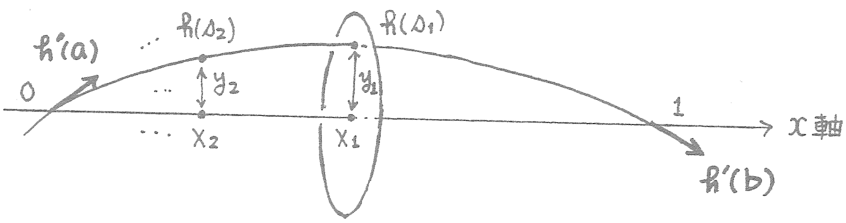
とおけばよいことを示す。実際には、このとき $h'(a)$ と $h'(b)$ のなす角 $\leqq \pi/16$ が示せる。

$h(a) = (0, 0, 0)$, $h(b) = (1, 0, 0)$, $X_n = (x_n, 0, 0)$

$x_n = 1/2^n \quad (n = 1, 2, \cdots)$ とおく。

$h = (h_1, h_2, h_3)$ としたとき、$n = 1, 2, \cdots$ に対し、

$$\begin{cases} s_n = \inf\{s \,;\, h_1(s) = x_n\} \\ y_n = |h(s_n) - X_n| \end{cases}$$ とおく。

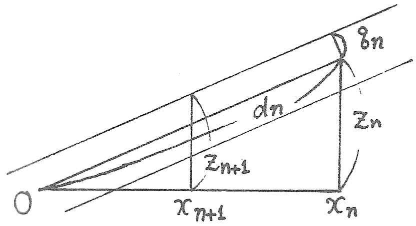


数列 z_n (>0) $n = 1, 2, \cdots$ を次の様につくる。

① $z_1 = C$

② $$z_{n+1} = \frac{z_n}{2} + g_n \times \frac{d_n}{x_n}$$

但し. $d_n = \sqrt{x_n^2 + z_n^2}$, $g_n = C d_n^{7/6}$



<u>Claim</u> ① $y_n \leqq z_n$ $\quad \forall n$

② $\frac{z_n}{x_n} \leqq \tan\frac{\pi}{32}$ よって $\frac{y_n}{x_n} \leqq \tan\frac{\pi}{32}$

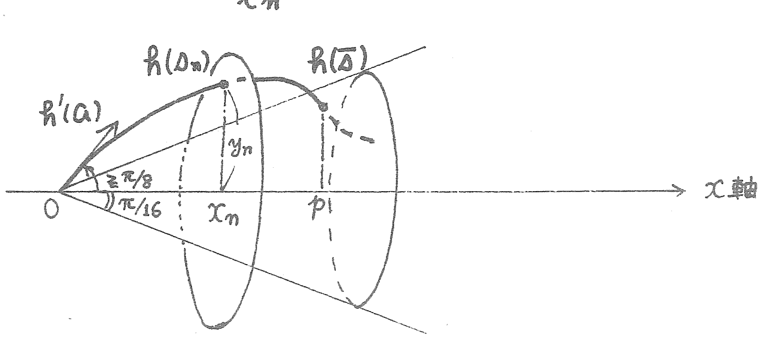
∵ induction

さて. $h'(a)$ と x軸のなす角 $\geqq \pi/8$ と仮定する。

$$0 < \bar{s} := \sup\left\{ s ;\ h((0,s)) \cap (x軸と角\tfrac{\pi}{16}をもつ母線をもつ\text{cone}) = \emptyset \right\}$$

とおくと. $\exists n \in \mathbb{N}$ s.t. $x_n < h_1(\bar{s}) = p$

これは $\frac{|h(s_n) - X_n|}{x_n} \leqq \tan\frac{\pi}{32}$ と矛盾 //



<u>Prop. 3.5</u> (1) $E_2^{exp} : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ が C^2-top. に関して連続であることを示す。（他も同様） $f \in \mathcal{E}$, $\epsilon > 0$ に対して.

${}^{\exists}\delta_0, \delta_2 > 0$ s.t. $|f(x) - g(x)| \leqq \delta_0$, $|f''(x) - g''(x)| \leqq \delta_2$ $({}^{\forall}x \in S^1) \Rightarrow |E_2^{exp}(f) - E_2^{exp}(g)| < \epsilon$ を示せばよい。

$\delta_2 = \max |f''| = K$ とおくと. $|f''(x) - g''(x)| \leqq \delta_2$ $({}^{\forall}x \in S^1)$ ならば $|g''| \leqq 2K$。よって (1.3.1) より. $t = \delta(x, y) \leqq \pi/2K$ で

$\Phi_2(g; x, y) \leqq \dfrac{(2K)^2}{(\sin 2Kt)^2} - \dfrac{1}{t^2}$。 よって ${}^{\exists}w > 0$ s.t.

$$\int_0^1 \int_{x-w}^{x+w} \exp \Phi_2(g; x, y)\, dy\, dx < \frac{\epsilon}{4} \quad \cdots ①。$$

$m = \min\limits_{\delta(x,y) \geqq w} |f(x) - f(y)| > 0$ とおく。$0 < \delta_0$ を.

$(m - 2\delta_0)^{-2} - m^{-2} < \dfrac{\epsilon}{2} \Big/ \exp\left(\max\limits_{\delta(x,y) \geqq w} \Phi_2(f; x, y) + \dfrac{\epsilon}{2}\right)$

となるように定めると. $|f(x) - g(x)| \leqq \delta_0$ $({}^{\forall}x \in S^1)$ ならば.

$$\int_0^1 \int_{x+w}^{1+x-w} \left| \exp \Phi_2(f; x, y) - \exp \Phi_2(g; x, y) \right| dy\, dx$$

$< \dfrac{\epsilon}{2} \quad \cdots ②$。 ①, ② より. $|E_2^{exp}(f) - E_2^{exp}(g)| < \epsilon$ //

References

[O] Jun O'Hara "Energy of a knot (revised version)" , preprint (1989)

Representation Spaces of Seifert fibered homology spheres

東大 理 高倉 樹

§0 序

有向ホモロジー3球面Σに対し，表現空間

$$R(\Sigma) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), SU(2)) / SU(2)$$

を用いてCasson不変量$\lambda(\Sigma)$，およびその拡張となるインスタントン・ホモロジー（Floerホモロジー）$I_*(\Sigma)$が定義されたことは有名である．$I_*(\Sigma)$について大ざっぱに復習すると次のようになる．$R^*(\Sigma)$を既約表現の共役類のなす集合とする（Σがホモロジー3球面であることから，$R^*(\Sigma) = R(\Sigma) - \{[\text{自明表現}]\}$である）．$R^*(\Sigma)$の各元にゲージ理論の手法を用いて次数（mod 8）を与えることができる．それらで生成されるmod 8－次数つき自由加群を$C_*(\Sigma)$とおくと，やはりゲージ理論を経由することにより境界作用素∂（$\partial^2 = 0$）が定まる．この鎖複体$(C_*(\Sigma), \partial)$のホモロジー群が$I_*(\Sigma)$であり，また$\lambda(\Sigma) = \frac{1}{2} \times$（$R^*(\Sigma)$の元の符号つき個数）$= \frac{1}{2}\chi(I_*(\Sigma))$が成り立つ．（もちろん一般には$R^*(\Sigma)$は有限集合でな

いが、"無限次元空間上のある関数の摂動"を経た後に上の解釈が正当化される。[F]，[T]参照。)

本稿では $\Sigma=\Sigma(a_1,a_2,\cdots,a_n)$: Seifert fibered ホモロジー3球面の場合を扱う。§1で $I_*(\Sigma)$ の計算についての進展をまとめ，それに関連して§2，3において $R(\Sigma)$ を直接的な手法で調べる。

なお，この場合の Casson 不変量は [F-M-S]，[N-W] により完全に計算されている。また，その他の Σ についての $I_*(\Sigma)$ の計算は現時点ではほとんど手がつけられていない。

§1 諸結果

先駆的な役割を果たしたのは Fintushel と Stern ([F-S]) である。特に重要なのは，彼らの以前の研究の延長として $C_*(\Sigma)$ の生成元の次数が計算されたことである。以後は彼らの示した方針の下にいくつかの結果が得られていたが，つい最近 Furuta-Steer が，すべての $\Sigma(a_1,\cdots,a_n)$ に対する I_* の計算法を確立したとの報告が入った([F'-S'])。これらに関し，以下で概観する。

1° $n=3$ のとき　この場合 $R^*(\Sigma)$ は有限集合で、$R^*(\Sigma)$ の元全体が $C_*(\Sigma)$ の生成元となる。

定理(1.1)（[F-S]）
$\Sigma=\Sigma(a_1, a_2, a_3)$ に対し、$^\forall\alpha\in R^*(\Sigma)$ の $C_*(\Sigma)$ における次数は $-R(\alpha)-3 \pmod 8$。
ここで $R(\alpha)$ はある公式により定まる奇数（§2参照）。
とくにこの次数は偶数である。

これから、$I_*(\Sigma(a_1, a_2, a_3))$ を得るには境界作用素 ∂ の考察は不要であり、$C_*(\Sigma)$ 自体が求めるホモロジー群となる。とくに $I_*(\Sigma)$ は torsion free で、$I_{odd}(\Sigma)=0$ である。また、$R(\Sigma)$ の元をすべて求める方法も [F-S], [N] に述べられており、結局 $I_*(\Sigma(a_1, a_2, a_3))$ の計算法が得られたことになる。

計算例.

$$I_*(\Sigma(2, 3, 6k\pm1))$$
$$=\begin{cases}\left(\frac{k\mp1}{2}, \frac{k\pm1}{2}, \frac{k\mp1}{2}, \frac{k\pm1}{2}\right) & (k:\text{奇数})\\ \left(\frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}, \frac{k}{2}\right) & (k:\text{偶数})\end{cases}$$

ただし右辺は I_0, I_2, I_4, I_6 のランクを表示している。

2° <u>$n \geqq 4$ のとき</u>　この場合、$R^*(\Sigma)$ は偶数次元（$0, 2, 4, \cdots, 2n-6$ 次元）の閉多様体の和になるので、$C_*(\Sigma)$ の生成元（有限個）を得るために、前述の"摂動"が必要であり、1° に比べて状況がぐっと困難になる。しかし、$R^*(\Sigma)$ の各連結成分上のモース関数を利用した摂動を考えることにより次が得られる。

<u>定理（1.2）</u>（[F-S]）

$\Sigma = \Sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ $(n \geqq 4)$ に対し

(1)　R_α を $R^*(\Sigma)$ の連結成分，g_α を R_α 上のモース関数とする。このとき各 g_α の critical point たちが $C_*(\Sigma)$ の生成元を与える。

(2)　また，p を g_α の critical point とするとき、p の $C_*(\Sigma)$ における次数は $-3 - R(\alpha) + \lambda_p(g_\alpha)$

ここで　$R(\alpha)$ は（1.1）と同様の奇数，

$\lambda_p(g_\alpha)$ は g_α の p における指数。

さて，仮にすべての指数 $\lambda_p(g_\alpha)$ が偶数であれば，(2) における次数はすべて偶数となり，1° と同様に境界作用素の考察を避けて通れる。実際、このような g_α

が存在する。すなわち、

命題(1.3)([K-K], [T])
$R(\Sigma(a_1,\cdots,a_n))$ の各連結成分上には、すべての指数が偶数であるようなモース関数が存在する。

(この主張は [F-S] において予想として提示されたもの。§3で、この(1.3)について解説する。)

これを先の定理とあわせると次が得られる。

定理(1.4)
$\Sigma = \Sigma(a_1,\cdots,a_n)$ $(n \geq 3)$ に対し、
$I_*(\Sigma)$ は torsion free, $I_{odd}(\Sigma) = 0$.
また、Poincaré多項式 $\left(= \sum_{i=0}^{7} (\mathrm{rank}\, I_i(\Sigma)) t^i\right)$ は

$$P_t(I_*(\Sigma)) = \sum_{R_\alpha} t^{-3-R(\alpha)} P_t(R_\alpha) \quad \text{in} \quad \mathbb{Z}[t]/(t^8-1)$$

で与えられる。ここで和は $R^*(\Sigma)$ の連結成分すべてにわたり、右辺の P_t は通常のPoincaré多項式である。

結局、$I_*(\Sigma)$ の計算法を完成するために残された問題

は次の2つ.

(1) $R^*(\Sigma)$ の連結成分の数はいくつか? 連結成分を完全に区別する不変量はないか?

(2) 各連結成分 R_α に対し、$P_\pm(R_\alpha)$ を求めよ.

(1) は比較的容易で、"rotation number $(H, l_1, \cdots, l_n)$" がその解答を与える(命題(2.2)参照)

(2) については、直接的なアプローチにより、

・$\dim R_\alpha = 2$ のとき、$R_\alpha \cong S^2$ ([F-S]など)

・$\dim R_\alpha = 4$ のとき, R_α は

$S^2 \times S^2$, $\mathbb{C}P^2 \# n\overline{\mathbb{C}P^2}$ $(n = 0, 1, \cdots, 5)$

のいずれかと homeo ("rotation number" により判定できる.)

ということが知られている。これから $n = 4, 5$ の場合の $I_*(\Sigma)$ が計算される.

<u>計算例</u>

$I_*(\Sigma(2,3,5,7)) = (7, 7, 7, 7)$.

$I_*(\Sigma(2,3,5,7,11)) = (125, 123, 125, 123)$

そして、前述のように、(2)に対する完全な解答($P_\pm(R_\alpha)$ を求める公式)を Furuta-Steer ([F'-S']) が得たよ

うである。そこではまた、R_αが単連結, Kählerであることも述べられている。手法はAtiyah-Bott理論([A-B])をV-Riemann面の場合に拡張して適用するというものであり、非常に興味深い。しかしながら、筆者の力量不足により89年5月現在、まだ理解にはほど遠いため解説はできません。ご容赦下さい。

§2 $R(\Sigma)$の元のイメージ

Notations

・$\Sigma = \Sigma(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ $(n \geqq 3)$

　; Seifert fibered ホモロジー3球面.

　ただし $a_1 \sim a_n$ はどの2つも互いに素な整数$(\geqq 2)$.

・$\pi_1(\Sigma)$について、次の表示を用いる;

$$\pi_1(\Sigma) = \langle x_1, \cdots, x_n, h \mid [x_i, h] = 1, \quad x_i^{a_i} = h^{-b_i}, \; x_1 \cdots x_n = 1 \rangle$$

　ここで b_iは次をみたす整数; $a_1 \cdots a_n \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i}{a_i} = 1$

・$\tilde{R}(\Sigma) := \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), SU(2)) = \mathrm{Hom}(\pi_1(\Sigma), S^3)$

・$\tilde{R}^*(\Sigma) := \tilde{R}(\Sigma) - \{自明表現\}$; 既約表現全体.

　$\cup$

・$\tilde{R}_n(\Sigma) := \{ \alpha \in \tilde{R}(\Sigma) \mid \alpha(x_i) \neq \pm 1 \quad i = 1, \cdots, n \}$

またこれらの，$SU(2)$ (or S^3) の共役作用による商空間をそれぞれ $R(\Sigma)$, $R^*(\Sigma)$, $R_n(\Sigma)$ とする。

補題 (2.1)

(1) $\alpha \in R^*(\Sigma)$ に対し，$\alpha(h) = \pm 1$.

また，$m := \#\{i ; \alpha(x_i) \neq \pm 1\}$ とおくと

$m \geqq n-3$.

(2) $R^*(\Sigma)$ は閉多様体で，α のまわりの次元は $2m-6$.

(とくに $R_n(\Sigma)$ は最大次元 $(=2n-6)$ の連結成分の和.)

(3) $R_n(\Sigma)$ に属さない $R^*(\Sigma)$ の連結成分は

$R^*(\Sigma(a_1, \cdots, \check{a}_i, \cdots, a_n))$ のある連結成分と同一視される.

$S^3 \subset \mathbb{H}$ (4元数体) とみなし，$r : S^3 \to [0, \pi]$ を，$r(X) := \cos^{-1}(\mathrm{Re}\, X)$ で定義する。この r は，S^3 内における 1 と X との距離を表し，S^3 の共役類を完全に分類する。また，$0 < \theta < \pi$ のとき，$r^{-1}(\theta) \cong S^2$ (2球面) である。

さて，$\alpha \in \tilde{R}(\Sigma)$ に対し，$X_i = \alpha(x_i)$, $H = \alpha(h) = \pm 1$ とおくと，とくに $X_i^{a_i} = H^{-b_i} = \pm 1$ だから，

$r(X_i) = \dfrac{l_i}{a_i}\pi \quad (0 \leq {}^{\exists} l_i \leq a_i,\ l_i \in \mathbb{Z})$ とおける。

この $(H, l_1, \cdots, l_n) \in \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^n$ を [F-S] にならって、α の <u>rotation number</u> と呼ぶことにする。もちろんこれは $R(\Sigma)$ 上でも well-defined であり、$R(\Sigma)$ の各連結成分上一定である。逆に次が成りたつ。

<u>命題 (2.2)</u> ([K-K])

$R(\Sigma)$ の各連結成分は、rotation number $(H, l_1, \cdots, l_n)$ により特徴づけられる。すなわち、写像

$$(*) \quad \begin{array}{ccc} \pi_0(R(\Sigma)) & \longrightarrow & \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^n \\ [\alpha] & \longmapsto & (H(\alpha), l_1(\alpha), \cdots, l_n(\alpha)) \end{array}$$ は単射.

<u>注意</u> $(H, l_1, \cdots, l_n)$ がどのような値をとりうるか (i.e. 写像 $(*)$ の像) は決定可能。また、定理 (1.1) (1.2) における不変数 $R(\alpha)$ は、この rotation number を用いて次の式で与えられる;

$$R(\alpha) = \frac{2e^2}{a} - 3 + m + \sum_{i=1}^{m} \frac{2}{a_i} \sum_{k=1}^{a_i - 1} \cot\left(\frac{\pi a k}{a_i^2}\right) \cot\left(\frac{\pi k}{a_i}\right) \sin^2\left(\frac{\pi e k}{a_i}\right)$$

ただし、$a = a_1 \cdot \cdots \cdot a_n$, $e \equiv \sum_{i=1}^{n} l_i \frac{a}{a_i} \pmod{2a}$

$$m = \#\{i \,;\, \alpha(x_i) \neq \pm 1\} = \#\{i \,;\, l_i \not\equiv 0, a_i\}$$

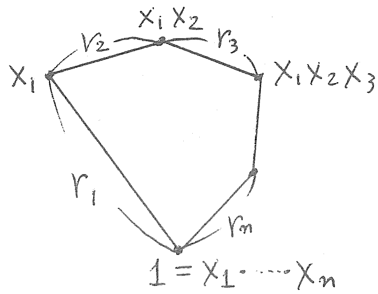
この命題の証明にも関わることだが，$R(\Sigma)$ の元の次のような描像が有効である．以下（補題(2.1)(3)により），主に $\widetilde{R}_n(\Sigma)$，$R_n(\Sigma)$ について考える．

$\alpha \in \widetilde{R}_n(\Sigma)$ の場合（このとき $0 < l_i < a_i$），

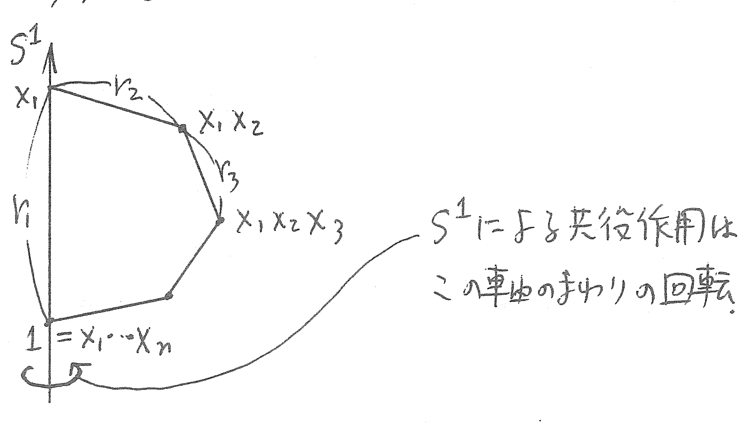
$X_i = \alpha(x_i)$ とおいて

$X_1,\ X_1X_2,\ X_1X_2X_3,\ \cdots\cdots,\ X_1\cdots X_n = 1$

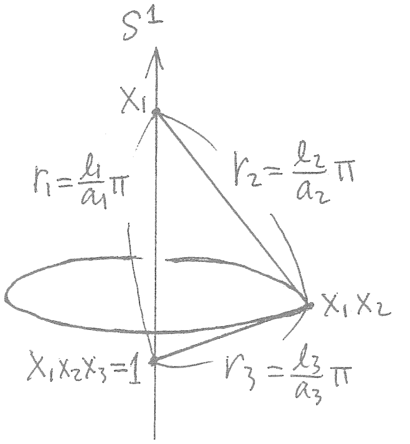
を $S^3 = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ 内に plot することにより，次図のように長さ $r_i = r(X_i) = \dfrac{l_i}{a_i}\pi$ $(0 < r_i < \pi)$ の測地線で結ばれた closed linkage が得られる．



これを $R_n(\Sigma) = \widetilde{R}_n(\Sigma)/S^3$ の元として見るには，はじめから $X_1 \in S^1_+ = \{e^{i\theta} \mid 0 \leq \theta \leq \pi\} \subset S^3$ としておき，$X_2, X_3, \cdots, X_n$ の S^1 による同時共役を modulo として考えることになる．



例　$n=3$ のとき



左図より
$(H, l_1, l_2, l_3) \in \{\pm 1\} \times \mathbb{Z}^3$
に対応する $R_3(\Sigma(a_1,a_2,a_3))$
の元は（存在すれば）ただ1つ．
このことからも $R(\Sigma(a_1,a_2,a_3))$
が有限個の点であることがわかる（補題(2.1)(1)(2)参照）.

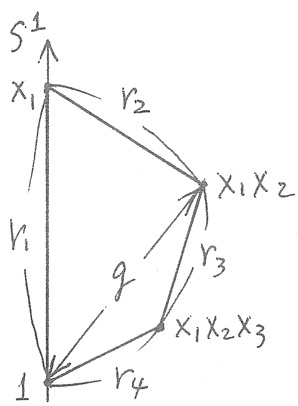
なお、命題(2.2)の証明は，1を始・終点にもち，長さ $r_i\ (=\frac{l_i}{a_i}\pi)$ の測地線をつなげて得られる closed linkage 全体の集合 $C(r_1,\cdots,r_n)$ が連結であることを示すことによりなされる（nに関する帰納法）.

§3　命題(1.3)について．

1°　洞察

例として、まず $n=4$ の場合を考える。$R(\Sigma(a_1,\cdots,a_4))$ は 0次元, 2次元の連結成分をもつ（$2=2\times4-6$）。当然, 2次元連結成分が問題となる．

$\alpha \in R_4(\Sigma(a_1,\cdots,a_4))$ に対応する S^3 内の closed linkage が次図のようであったとする．($X_i=\alpha(x_i)$).



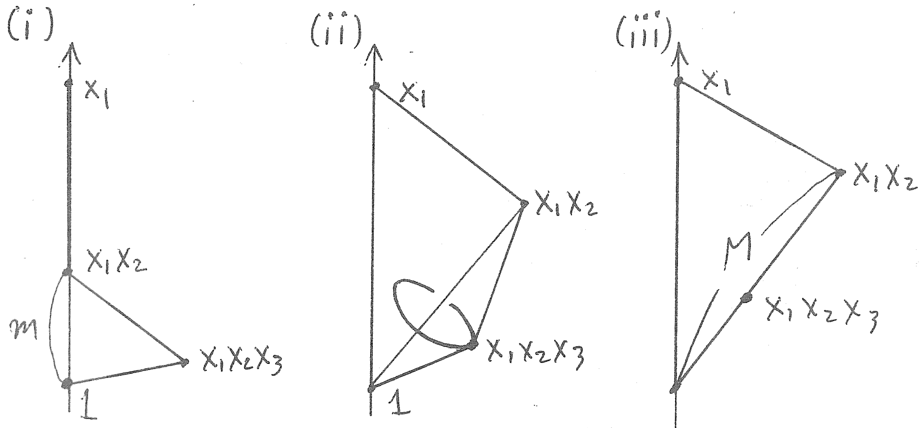
ここで、αを含む連結成分R_α上のモース関数gとして、1とx_1x_2との距離$r(x_1x_2)$を採用してみよう。gの最小値を$m(\doteq r_1-r_2)$、最大値を$M(=r_3+r_4)$とする。このとき、$g^{-1}(c)$ $(c\in[m,M])$について、

(i) $c=m$ のとき $g^{-1}(m)=1$点

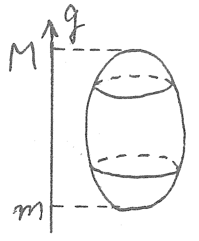
(ii) $m<c<M$ のとき $g^{-1}(c)\cong S^1$

(iii) $c=M$ のとき $g^{-1}(M)=1$点

が成り立つ。



これから（やや直観的ではあるが）、R_αはS^2であり、gの指数は0, 2であることが納得できる。$R_4(\Sigma)$の



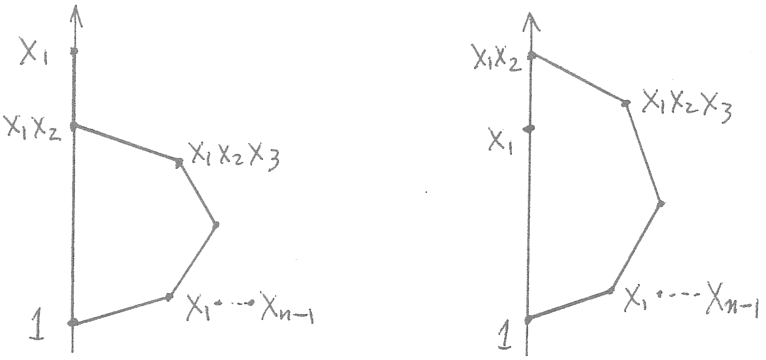
他の連結成分についても同様である。

これを $n \geq 5$ の場合の $R_n(\Sigma(a_1,\cdots,a_n))$ (次元 $=2n-6$) にも素直に適用してみる。つまり、関数

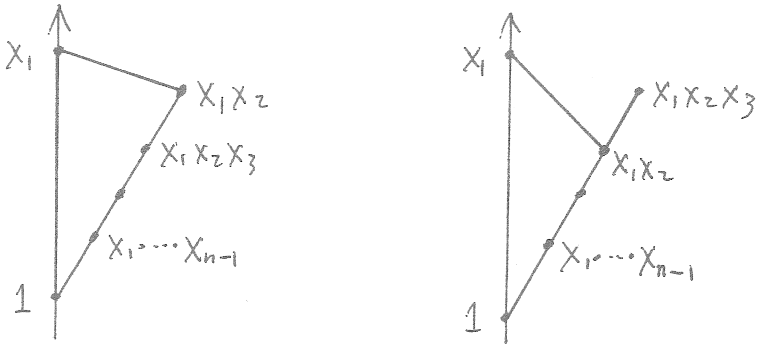
$$R_n(\Sigma) \longrightarrow [0,\pi]$$
$$\alpha \longmapsto r(\alpha(x_1)\alpha(x_2)) = r(x_1x_2)$$

を考える。$n=4$ の場合の類推から、critical point に対応するlinkageは次の2つのタイプと考えられる。

(ア) $1, x_1, x_1x_2$ が同一測地線上にある。



(イ) $x_1x_2, x_1x_2x_3, \cdots, x_1\cdots x_{n-1}, x_1\cdots x_n = 1$ が同一測地線上にある。



ここで、(ア)のタイプの critical point は自然に $R_{n-1}(\Sigma(a_1a_2, a_3, \cdots, a_n))$ の元と対応づけられること、また(イ)のタイプの critical point は孤立点であることに注意。

以上より、$n \geqq 5$ の場合、1 と X_1X_2 との距離 $r(X_1X_2)$ はモース関数ではないが、その拡張である"Bott の意味の非退化関数"(see [A-B])であることが予想される。

2° 定式化

以上の考察の下に、計算の便宜を考えて

$$
\begin{aligned}
f \ ; \ R_n(\Sigma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\
\alpha &\longmapsto \mathrm{Tr}(\alpha(x_1x_2)) = \mathrm{Tr}(X_1X_2)
\end{aligned}
$$

なる関数を考える。ここで"Tr"は $SU(2)$ におけるトレースを表す。$SU(2) \cong S^3$ の同一視の下に、$\mathrm{Tr}(X_1X_2) = 2\cos(r(X_1,X_2))$ である。すると、1° の予想が計算によって実際に裏づけられる。

命題(3.1)

(1) f の critical point set は

$$M = \{ \alpha \in R_n(\Sigma) \mid \alpha(x_1) \text{ と } \alpha(x_2) \text{ が可換} \}$$

$N = \{ \alpha \in R_n(\Sigma) \mid \alpha(x_1x_2), \alpha(x_3), \cdots, \alpha(x_n)$ が可換族$\}$

より成る.

(2) Mの各連結成分は $R_{n-1}(\Sigma(a_1a_2, a_3, \cdots, a_n))$ のある連結成分と diffeo (とくに M は $R_n(\Sigma)$ の codim 2 の閉部分多様体), また N は有限個の点.

適当に同時共役を施して

$\alpha \in M$ に対しては $\alpha(x_i) = D(\theta_i)$ $(i = 1, 2)$

$\alpha \in N$ 〃 $\alpha(x_1x_2) = D(\theta_{12})$, $\alpha(x_i) = D(\theta_i)$ $(i \geqq 3)$

としておく. ここで, $D(\theta) = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & \\ & e^{-i\theta} \end{pmatrix}$.

また, $\theta_i = \frac{\ell_i}{a_i}\pi$ $(-a_i < \ell_i < a_i, \ell_i \neq 0)$ である.

νM, νN で M, N の $R_n(\Sigma)$ における法束を表す.

<u>命題 (3.2)</u>

(1) f の $\nu_\alpha M$ における Hessian は (ある基底に関し)

$\frac{\sin\theta_1}{\sin\theta_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と行列表示される.

(とくにこれは正または負定値)

(2) f の $\nu_\alpha N = T_\alpha R_n(\Sigma)$ における Hessian は

(ある基底に関し) $-\sin\theta_{12}\begin{pmatrix} A & -B \\ B & A \end{pmatrix}$ と行列表示

される. ここで, $c_i = \cot\theta_i$ $(i \geqq 3)$ とおくとき

$$A = \begin{pmatrix} c_3 & & & 0 \\ & c_4 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & c_{n-1} \end{pmatrix} + c_n \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & & +1 \\ & \ddots & \\ -1 & & 0 \end{pmatrix}$$

いずれも $n-3$ 次行列.

(3)　(2) の行列に対し.

$$\det = (\sin\theta_{12})^{2n-6}\left\{\frac{\sin(\theta_3+\cdots+\theta_n)}{\sin\theta_3\cdot\cdots\cdot\sin\theta_n}\right\}^2 \ (>0)$$

<u>系 (3.3)</u>

$f : R_n(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$ は Bott の意味の非退化関数で、すべての指数は偶数。

命題 (3.1), (3.2) の証明 ([T]) は、接空間 $T_\alpha R_n(\Sigma)$ を、群のコホモロジー $H^1(\pi_1(\Sigma), \mathfrak{g}_{Ad\alpha})$ と同一視することによりなされ、テクニカルな計算が主となる。($\mathfrak{g}_{Ad\alpha}$ は、$su(2)$ に $Ad\circ\alpha$ による $\pi_1(\Sigma)$ の作用を付与したもの。) なお、[K-K] ではより幾何学的な考察により同様の結果を導いている。

3° 命題(3.1)の証明

nに関する帰納法による。$n=3$の場合は自明。$n-1$までOKとする。とくに(補題2.1)(3)より $R_n(\Sigma)$に含まれない各連結成分上では主張成立。また、命題(3.1)(2)より、$f: R_n(\Sigma) \to \mathbb{R}$ の critical manifold Mに対し、M上のモース関数f_Mで、すべての指数が偶数であるものが存在する。Mの$R_n(\Sigma)$における法束$p: \nu M \to M$を管状近傍と同一視し、$\tilde{f}_M(x) := \rho(x)\cdot f_M(p(x))$により$f_M$を$R_n(\Sigma)$上に拡張する。ここで$\rho$は法ファイバー方向のcut-off関数。$r$を十分小さな正数とするとき、$g = f + r\tilde{f}_M$とおけば、これが求めるモース関数となる。

文献

[A-B] M.F. Atiyah - R. Bott, The Yang-Mills equations over Riemann surfaces, Phil. Trans. R. Soc. Lond. A308, 523-615 (1982)

[F] A. Floer, An Instanton-Invariant for 3-Manifolds, Commun. Math. Phys. 118, 215-240 (1988)

[F-M-S] S. Fukuhara - Y. Matsumoto - K. Sakamoto, Casson's invariant of Seifert homology 3-spheres, preprint.

[F-S] R. Fintushel - R.J. Stern, Instanton Homology of Seifert Fibered Homology Three Spheres, preprint.

[F'-S'] M. Furuta - B. Steer, The moduli spaces of flat connections on certain 3-manifolds, preprint.

[K-K] P.A. Kirk - E.P. Klassen, Representation Spaces of Seifert Fibered Homology Spheres, preprint.

[N] E. Nasatyr, On Floer Homology and

the three dimensional Brieskorn Homology Three-Spheres, preprint.

[N-W] W. Neumann - J. Wahl, Casson's invariant of links of singularities, preprint.

[T] C. H. Taubes, Casson's invariant and gauge theory, preprint.

[T'] 高倉 樹, 修士論文.

On 3-orbifolds, links, and tangles.

by

Yoshihiro Takeuchi

(Department of Mathematics, Aichi University of Education)

1. Orbi-maps, orbi-coverings and orbifold fundamental groups.

Throuhout this note, we assume that orbifolds are good, connected and have no codimension 1 strata.

Let O_X be an n-orbifold equipped with a base point $x \in O_X - \Sigma O_X$, $p: \tilde{X} \to O_X$ be the universal covering and $\tilde{x}$ be any lift of x. Put $\Omega(\tilde{X}, x) = \{\tilde{\alpha} \mid \tilde{\alpha}$ is a continuous map from $[0,1]$ to $\tilde{X}$ with $p(\tilde{\alpha}(0)) = p(\tilde{\alpha}(1)) = x\}$. Suppose $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \Omega(\tilde{X}, x)$. Note that there is one and only one element $\tau \in \mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ such that $\tau(\tilde{\alpha}(0)) = \tilde{\beta}(0)$. $\tilde{\alpha}$ and $\tilde{\beta}$ are called <u>equivalent</u>, denoted by $\tilde{\alpha} \sim \tilde{\beta}$, if $\tilde{\alpha}(1) = \tau(\tilde{\beta}(1))$. Clearly this is an equivalence relation in $\Omega(\tilde{X}, x)$. We use the symbol $[\tilde{\alpha}]$ to denote the equivalence class represented by $\tilde{\alpha}$ in $\Omega(\tilde{X}, x)/\sim$. Suppose $[\tilde{\alpha}], [\tilde{\beta}] \in \Omega(\tilde{X}, x)/\sim$. We can define the product of $[\tilde{\alpha}]$ and $[\tilde{\beta}]$, denoted by $[\tilde{\alpha}][\tilde{\beta}]$, by $[\tilde{\alpha} \cdot \tau(\tilde{\beta})]$, where $\cdot$ implies the composition of paths, τ is the element of $\mathrm{Aut}(\tilde{X}, p)$ taking $\tilde{\beta}(0)$ to $\tilde{\alpha}(1)$, and $\tau(\tilde{\beta})$ is the path derived from transforming $\tilde{\beta}$ by τ. It is easy to check that $\Omega(\tilde{X},x)/\sim$ becomes a group with this product. So we define <u>$\pi_1(O_X,x)$</u>, the <u>fundamental group</u> of O_X based on x, by $\Omega(\tilde{X},x)/\sim$. Moreover it is easy to show that we can define an isomorphism $\Psi:\Omega(\tilde{X},x)/\sim\ \rightarrow \mathrm{Aut}(\tilde{X},p)$ by $\Psi([\tilde{\alpha}])=\tau$, where τ is the element of $\mathrm{Aut}(\tilde{X},p)$ taking $\tilde{\alpha}(0)$ to $\tilde{\alpha}(1)$. So our definition of $\pi_1(O_X,x)$ respects the ordinary one.

Let O_X, O_Y be orbifolds, and $p:\tilde{X}\rightarrow O_X$, $q:\tilde{Y}\rightarrow O_Y$ be the universal orbi-coverings. A continuous map $f:X\rightarrow Y$ is called an <u>orbi-map</u>, denoted by $f:O_X\rightarrow O_Y$, if there exist a continuous map $\tilde{f}:\tilde{X}\rightarrow\tilde{Y}$ and a point $x\in O_X-\Sigma O_X$, such that $f\circ p = q\circ\tilde{f}$, $\tilde{X}-\tilde{f}^{-1}(q^{-1}(\Sigma O_Y))$ is pathwise connected, and $f(x)\in O_Y-\Sigma O_Y$. We call $\tilde{f}$ a <u>universal map</u> of f. By denoting <u>$f:(O_X,x)\rightarrow(O_Y,f(x))$</u>, we shall mean that f is an orbi-map from O_X to O_Y and x is a point of $O_X-\Sigma O_X$ such that $f(x)\in O_Y-\Sigma O_Y$. Note that if both $\tilde{f}$ and f are homeomorphisms, then O_X and O_Y are orbi-isomorphic. (i.e. there exists a homeomorphism $h:X\rightarrow X'$ and for each point $x\in X$, there exist an isomorphism f_x from the local group G_x of x to the local group $G'_{h(x)}$ of $h(x)$ and a homeomorphism $\tilde{h}_x:\tilde{U}_x\rightarrow\tilde{U}'_{h(x)}$ such that, $g\in G_x$, $z\in\tilde{U}_x$, $\tilde{h}_x(gz) = f_x(g)\tilde{h}_x(z)$, where $\tilde{\varphi}:U_x\cong\tilde{U}_x/G_x$ and $\tilde{\psi}_{h(x)}:\tilde{U}_{h(x)}\cong U_{h(x)}/G_{h(x)}$ are local charts.) Then we call f an <u>orbi-isomorphism</u> and denote <u>$f:O_X\cong O_Y$</u>.

An *orbi-covering* of an orbifold O_X is an orbifold $O_{\tilde{X}}$, with a projection $p:\tilde{X} \to X$ between the underlying spaces, such that each point $x \in X$ has a neighborhood $U_x \cong \tilde{U}_x/G_x$ for which each component $V_{x,i}$ of $p^{-1}(U_x)$ is homeomorphic to $\tilde{U}_x/G_{x,i}$, where $G_{x,i}$ is some subgroup of G_x and the following diagram commutes.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{U}_x/G_{x,i} & \cong & V_{x,i} \\
 & & & & p \\
\tilde{U}_x & & \tilde{U}_x/G_x & \cong & U_x
\end{array}
$$

Let O_X be an orbifold and $p:\tilde{X} \to O_X$ the universal (orbi-)covering of it. If the action of $\mathrm{Aut}(\tilde{X},p)$ on $\tilde{X}$ is extendable to an action of G on $\tilde{X} \times I$ and it preserves product structure, $(\tilde{X} \times I)/G$ is called an *I-bundle over O_X*. Moreover, if G preserves $O_X \times 0$ and $O_X \times 1$, it is called an *product I-bundle over O_X*, denoted by *$O_X \times I$*. From the uniqueness of the universal orbi-covering, we may assume that the universal orbi-covering $\tilde{X} \times I \to O_X \times I$ is $(p \times id)$ and $\mathrm{Aut}(\tilde{X} \times I, (p \times id)) = \mathrm{Aut}(\tilde{X},p) \times id$. Let O_X and O_Y be good orbifolds equipped with base points $x_0 \in O_X - \Sigma O_X$ and $y_0 \in O_Y - \Sigma O_Y$. Two orbi-maps f, g: $(O_X, x_0) \to (O_Y, y_0)$ are said to be *orbi-homotopic relative to x_0*, denoted by *$f \sim g$ (rel x_0)*, if there exists an orbi-map $F: O_X \times I \to O_Y$ such that $F(x,0) = f(x)$ and $F(x,1) = g(x)$ for $x \in O_X$ and

$F(x_0,t) = y_0$ for $t \in I$.

For orbi-maps, orbi-coverings and orbifold fundamental groups we can derive the same results as those of ordinary covering spaces.

1.1. Proposition. If $f \sim g$ (rel x_0), then $f_* = g_* : \pi_1(O_X, x_0) \to \pi_1(O_Y, y_0)$, where $y_0 = f(x_0)$.

1.2. Proposition. Any orbi-covering $p' : O_{X'} \to O_X$ is an orbi-map.

Hence, an orbi-covering $p' : (O_{X'}, x') \to (O_X, x)$ induces a homomorphism $p'_* : \pi_1(O_{X'}, x') \to \pi_1(O_X, x)$.

1.3. Proposition. p'_* is monic.

1.4. Proposition. For any subgroup G of $\pi_1(O_X, x)$, there exists an orbi-covering $p' : (O_{X'}, x') \to (O_X, x)$ such that $p'_* \pi_1(O_{X'}, x') = G$.

1.5. Proposition. If $p' : (O_{X'}, x') \to (O_X, x)$ is an orbi-covering, then for any $x_0 \in O_X - \Sigma O_X$, $\# p'^{-1}(x_0) = | \pi_1(O_X, x) ; p'_* \pi_1(O_{X'}, x') |$.

Let $f : (O_X, x) \to (O_Y, y)$ be an orbi-map and $p : (O_{Y'}, y') \to (O_Y, y)$ an orbi-covering. A lift of f is an orbi-map $f' : (O_X, x) \to (O_{Y'}, y')$ such that $p \circ f' = f$.

1.6. Proposition. Let $f:(O_X,x) \to (O_Y,y)$ be an orbi-map and $p:(O_{Y'},y') \to (O_Y,y)$ an orbi-covering. There exists a lift of f, if and only if $f_*\pi_1(O_X,x)$ is a subgroup of $p_*\pi_1(O_{Y'},y')$.

1.7. Proposition. Let $p:(O_{X'},x') \to (O_X,x)$ be an orbi-covering. If $p_*\pi_1(O_{X'},x')$ is a normal subgroup of $\pi_1(O_X,x)$, then $p:(O_{X'},x') \to (O_X,x)$ is a regular orbi-covering.

1.8. Proposition. If $p:(O_{X'},x') \to (O_X,x)$ is a regular orbi-covering, then

(1) $p_*\pi_1(O_{X'},x')$ is a normal subgroup of $\pi_1(O_X,x)$

and

(2) $\pi_1(O_X,x)/p_*\pi_1(O_{X'},x') \cong \mathrm{Aut}(O_{X'},p)$.

2. A construction and modifications of orbi-maps.

We use the symbol $[\alpha]_A$ to denote the element of $\mathrm{Aut}(X,p)$ corresponding to $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(O_X,x)$ under the isomorphism $\pi_1(O_X,x) \cong \mathrm{Aut}(\tilde{X},p)$.

2.1. Proposition. $\tilde{f}\circ[\tilde{\alpha}]_A = f_*([\tilde{\alpha}])_A\circ\tilde{f}$, $[\tilde{\alpha}] \in \pi_1(O_X,x)$.

We use this equation to get the following results by equivariant arguments.

2.2. Theorem. Let O_M be a compact 2- or 3-orbifold and O_N an orientable 3-orbifold such that the total space of the universal orbi-covering of $\mathrm{Int}(O_N)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^3$. Suppose φ : $\pi_1(O_M) \to \pi_1(O_N)$ is a homomorphism such that for any local group G_x of O_M, $f_*(G_x) \ncong A_5$. Then, there exists an orbi-map $f:O_M \to O_N$ such that $f_* = \varphi$.

An orbi-map $f:O_Y \to O_X$ is called an <u>orbi-embedding</u>, if $f:Y \to X$ is embedding and $f(O_Y)$ is a suborbifold of O_X. Note that if f_1 and f_2 are two universal maps of an orbi-embedding $f:O_Y \to O_X$, then there is an element $\tau \in \mathrm{Aut}(\tilde{X},p)$ such that $\tau \circ f_1 = f_2$.

Let O_X be an orbifold and $p:\tilde{X} \to O_X$ the universal orbi-covering. We shall define <u>$\pi_2(O_X)$</u> by $\pi_2(\tilde{X})$. Let $f:O_{S^2} \to O_X$ be an orbi-embedding and $\tilde{f}:S^2 \to \tilde{M}$ a universal map of f. We use the symbol <u>$[f]$</u> to denote the element of $\pi_2(O_X)$ defined by $[\tilde{f}] \in \pi_2(\tilde{X})$.

<u>2.3. Theorem (Transversal modification of dimension 3).</u> Suppose O_M and O_N are compact 3-orbifolds such that O_N is containing a properly embedded, 2-sided, 2-suborbifold O_F such that $\mathrm{Ker}(\pi_1(O_F) \to \pi_1(O_N)) = 1$, $\pi_2(O_F) = 0$, and the total space of the universal orbi-covering of $\mathrm{Int}(O_N - O_F)$ is homeomorphic to $\mathbb{R}^3$. Suppose $f:O_M \to O_N$ is any orbi-map such that for any local group G, $f_*(G) \ncong A_5$. Then there exists an orbi-map $g:O_M \to O_N$ such that

(1) g is C-equivalent to f,

(2) each component of $g^{-1}(O_F)$ is a properly embedded, 2-

sided, incompressible 2-suborbifold in O_M, and

(3) for properly choosen product neighborhoods $O_F\times[-1,1]$ of $O_F = O_F\times 0$ in O_N and $g^{-1}(O_F)\times[-1,1]$ of $g^{-1}(O_F) = g^{-1}(O_F)\times 0$ in O_M, g maps each fiber $x\times[-1,1]$ homeomorphically to the fiber $g(x)\times[-1,1]$ for each $x\in g^{-1}(O_F)$.

The similar result stands for dimension 2.

Let $(B;t_i)$ be a tangle. The associated orbifold with weight n_i, denoted by $O(t_i,n_i)$, is an orbifold with the underlying space B, $\Sigma_B = \{t_i\}$, and the orders of every local group of t_i is n. We define the n_i-weighted orbi-invariant of $(B;t_i)$, denoted by $Orb(t_i,n_i)$, by the fundamental group of the associated orbifold with weight n_i of $(B;t_i)$. As an application of 2.3, we can show;

2.4. Theorem (Untangling theorem). Let $(B;t_i)$ be a k-strings tangle. $(B;t_i)$ is the trivial tangle if and only if $Orb(t_i,n_i) \cong A_1*\cdots*A_k$, where $A_i \cong \mathbb{Z}_{n_i}$ for each i.

3. The classification theorem.

An orbifold O_X is said to be finitely uniformizable, if there exists a uniformization $p:X' \to O_X$ such that $Aut(X',p)$ is finite. For finitely uniformizable orientable 3-orbifolds, by using the results of Equivarient theorems of [M-S] and [M-Y 1]~[M-Y 4], we can derive the orbifold versions of Dehn's lemma, Loop theorem, Sphere theorem, and I-bundle theorem.

3.1. Theorem (Dehn's Lemma of Orbifold). Let O_M be a finitely uniformizable, compact, and orientable 3-orbifold and C a simple closed curve in $\partial O_M - \Sigma O_M$. If $[C]$ has order n in $\pi_1(O_M)$ then there exists a discal orbifold $D^2(n)$ properly embedded in O_M such that $\partial D^2(n) = C$.

3.2. Theorem (Loop Theorem of Orbifold). Let O_M be a finitely uniformizable, compact and orientable 3-orbifold and O_F a compact and connected 2-suborbifold in ∂O_M. If $\mathrm{Ker}(i_*: \pi_1(O_F) \to \pi_1(O_M)) \neq 1$ then there exists a diacal 2-suborbifold O_{D^2} such that $\mathrm{Int}(O_{D^2}) \subset \mathrm{Int}(O_M)$, $\partial O_{D^2} \subset O_F$ and ∂O_{D^2} does not bound any discal orbifolds in O_F.

3.3. Theorem (Sphere Theorem of Orbifold). Let O_M be a finitely uniformizable, compact and orientable 3-orbifold. If $\pi_2(O_M) \neq 0$, then there exists an orbi-embedding $f: O_{S^2} \to O_M$ such that $[f] \neq 0$ in $\pi_2(O_M)$.

3.4. Theorem. (I-bundle theorem of Orbifold). Let O_M be a compact, orientable, irreducible 3-orbifold with boundaries. Suppose that $\pi_1(O_M)$ contains a subgroup G of finite index which is isomorphic to the orbifold fundamental group of some closed and orientable 2-orbifold ($\neq O_{S^2}$). Then O_M is an I-bundle over some closed 2-orbifold.

A 2-orbifold O_F is called a turnover if F is a 2-sphere and ΣO_F consists of three points.

Let $\mathcal{W}$ be the class of all compact and orientable 3-orbifolds which are

(i) finitely uniformizable,

(ii) irreducible,

(iii) sufficiently large,

(iv) the local group of any point is not isomorphic to A_5, and

(v) in which every turnover with non-positive Euler number is boundary-parallel.

Note that if G is either one of $\mathbb{Z}_n$, D_n, A_4, or S_4, then the homomorphic image of G must not be isomorphic to A_5.

By the results of Dunbar [D], we can see that the orbifolds belong to $\mathcal{W}$ possess hierarchies. Under these preparations, we can show the following theorem. The proof is modeled on the proof of 13.6 of [H].

3.5. Theorem. Let $O_M, O_N \in \mathcal{W}$ and suppose $f:(O_M, \partial O_M) \to (O_N, \partial O_N)$ is an orbi-map such that $f_*:\pi_1(O_M) \to \pi_1(O_N)$ is monic and such that for each component O_B of ∂O_M, $(f \mid O_B)_*:\pi_1(O_B) \to \pi_1(O_C)$ is monic, where O_C is the component of ∂O_N containing $f(O_B)$. Then there exists an orbi-map $g:(O_M, \partial O_M) \to (O_N, \partial O_N)$ such that $g_*=f_*:\pi_1(O_M) \to \pi_1(O_N)$ and either

(1) $g:O_M \to O_N$ is an orbi-covering,

(2) O_M is an I-bundle over a closed 2-orbifold, there is a orbi-homotopy $f_t:(O_M, \partial O_M) \to (O_N, \partial O_N)$ such that $f_0 = f$, $f_1 = g$, and $g(O_M) \subset \partial O_N$,

or

(3) Each of O_M and O_N is a) or b) in Figure 3.1, and $g \mid \partial O_M$

is an orbi-covering.

If $(f|O_B):O_B \to O_C$ is already an orbi-covering, we may assume $(f|O_B) = (g|O_B)$, in particular, in case (2), $f_t|O_B = g_t|O_B$ for all t.

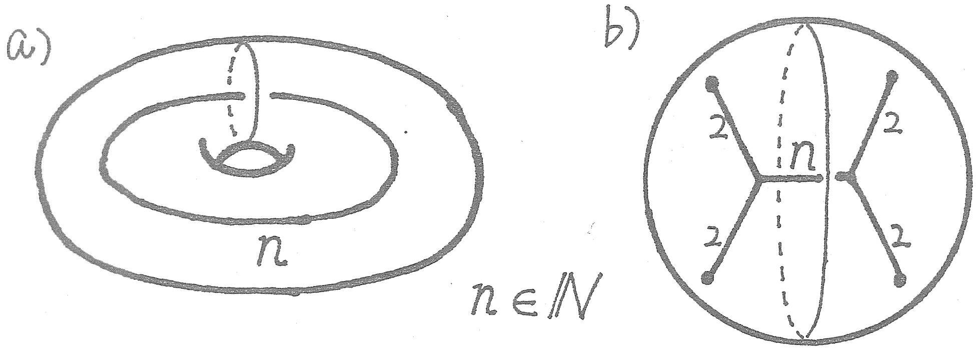


Figure 3.1.

Let O_M and O_N be 3-orbifolds. Let $\Psi:\pi_1(O_M,x) \to \pi_1(O_N,y)$ be a homomorphism. We say that Ψ <u>respects the peripheral structure</u>, if the following holds. For each boundary component O_F of O_M, there exists a boundary component O_G of O_N, such that $\Psi(i_*(\pi_1(O_F,x'))) \subset A$, and A is conjugate in $\pi_1(O_N,y)$ to $j_*(\pi_1(O_G,y'))$, where i and j are inclusions.

<u>3.6. Theorem.</u> Let O_M, $O_N \in \mathcal{W}$. Suppose all the components of ∂O_M are incompressible in O_M. Let $\Psi:\pi_1(O_M) \to \pi_1(O_N)$ be an isomorphism which respects the peripheral structure. Then either

(1) there exists an orbi-isomorphism $f:O_M \to O_N$ which induces Ψ, or

(2) O_M is a twisted I-bundle over a closed non-orientable 2-orbifold O_F and O_N is an I-bundle over a 2-orbifold O_G such that $\pi_1(O_F) \cong \pi_1(O_G)$.

3.7. Corollary. Let O_M, $O_N \in \mathcal{W}$. Suppose O_M is closed and $\pi_1(O_M) \cong \pi_1(O_N)$. Then O_M and O_N are orbi-isomorphic.

4. An application of 3.7

Let O_{S^3} be an orbifold such that $\Sigma O_{S^3} = K_1 \cup \cdots \cup K_r$, where K_i's are disjoint simple closed curves. Let n_i be the order of the local group of any point in K_i, $i = 1, 2, \cdots, r$. Let $p: M \to S^3$ be the branched covering associated with the kernel of the composition of epimorphisms

$$\pi_1(S^3 - \Sigma O_{S^3}) \xrightarrow[\text{Hurewicz}]{} H_1(S^3 - \Sigma O_{S^3}) \xrightarrow[\text{Projection}]{} \mathbb{Z}/n_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/n_r.$$

Clearly $p: M \to S^3$ is a finite uniformization of O_{S^3} and O_{S^3} is compact, connected, orientable, and contains no turnovers. Recall that a link L of disjoint simple closed curves in S^3 is <u>prime</u> if there is no S^2 in S^3 that separates the component of L, and any S^2 that meets L in two points, transversely, bounds in S^3 one and only one ball intersecting L in a single unknotted spanning arc. Hence, if $K_1, \cdots, K_r$ is a prime link in S^3, O_{S^3} is irreducible. We call the link $\{K_1, \cdots, K_r\}$ in S^3 <u>sufficiently large</u> if O_{S^3} is sufficiently large. This definition depends only on the link type of $\{K_1, \cdots, K_r\}$ not on the integers $n_1, \cdots, n_r$.

Let (S^3, L) be a link and O_{S^3} be the orbifold with $\Sigma O_{S^3} = L$. Suppose the orders of every local group of ΣO_{S^3} are n. We call such an orbifold O_{S^3} <u>the associated orbifold with weight n of (S^3, L)</u>, denoted by <u>$O_{(L,n)}$</u>. We define the <u>n-</u>

weighted orbi-invariant of (S^3,L), denoted by $Orb_n(L)$, by the fundamental group of the associated orbifold with weight n of (S^3,L). Clearly, if two links (S^3,L) and (S^3,L') are the same link type, then $Orb_n(L) \cong Orb_n(L')$ for any $n \in \mathbb{N}$. If (S^3,L) and (S^3,L') are prime and sufficiently large, then the converse holds.

4.1. Theorem. Suppose (S^3,L) and (S^3,L') are prime and sufficiently large links. (S^3,L) and (S^3,L') are the same link type, if and only if $Orb_n(L) \cong Orb_n(L')$ for some $n \in \mathbb{N}$, $n \geqq 2$.

Proof. One direction is obvious. We come to the other. Let $O_{(L,n)}$ and $O_{(L',n)}$ be the associated orbifolds with weight n of (S^3,L) and (S^3,L'), respectively. Since $\pi_1(O_{(L,n)}) \cong \pi_1(O_{(L',n)})$, by 7.7, $O_{(L,n)}$ and $O_{(L',n)}$ are orbi-isomorphic. The orbi-isomorphism is a homeomorphism from S^3 to S^3 and carries L to L'. q.e.d.

We give a sufficient condition so that a link (S^3,L) is sufficiently large.

4.2. Proposition. Let (S^3,L) be a prime link. If there is a 2-strings prime tangle (B,t) such that $O_{(L,n)}-Int(O_{(t,n)})$ does not contain any properly embedded separating disc, then (S^3,L) is sufficiently large.

Proof. It is clear that $\partial O_{(t,n)}$ is an incompressible 2-suborbifold in $O_{(L,n)}$. q.e.d.

References

[D] Dunbar, W.D.: Hierarchies for 3-orbifolds. Topology and its applications 29, 267-283 (1988)

[H] Hempel, J.:3-manifolds. Ann. of Math. Study No 86, (1976)

[M-S] Meeks, W.H., Scott, P.: Finite group actions on 3-manifolds. Invent. Math. 86, 287-346 (1986)

[M-Y 1] Meeks, W.H., Yau, S.T.: The equivariant Dehn's lemma and loop theorem. Comment. Math. Hel. 56, 225-239 (1981)

[M-Y 2] Meeks, W.H., Yau, S.T.: Topology of three dimensional manifolds and the embedding problems in minimal surface theory. Ann. of Math. 112, 441-484 (1980)

[M-Y 3] Meeks, W.H., Yau, S.T.: Embedded minimal surfaces, exotic spheres, and manifolds with positive Ricci curvature. Ann. of Math. 116, 621-659 (1982)

[M-Y 4] Meeks, W.H., Yau, S.T.: Group actions on $\mathbb{R}^3$. in: The Smith Conjecture (Academic Press, New York, 1984)

[T] Takeuchi, Y.,: Waldhausen's classification theorem for 3-orbifolds. (Preprint)

ホモトピー結合的ホップ空間

岩瀬則夫（岡山大・理）

§0. 序

連結有限ＣＷホップ空間の理論は、Lie 群に対して成立するホモトピー論的性質の多くが、実は、「両側単位元を持つ二項演算の存在」から導かれるという事実に始まる（ただし、連結でない空間をも考える場合は、この条件は、「両側単位元を持つ二項演算の方程式 $a \cdot x = b$, $x \cdot a = b$ が常に（ホモトピー的に）一意解をもつ」となる）。さらに、「ホモトピー的に積を保存する写像」として、ホップ写像が定義される。

(1) (H. Hopf) 有限ＣＷホップ空間 X は、標数 0 の体 k 上の奇数次数の元で生成される外積代数を、その k 係数コホモロジー環とする。特に、X の積がホモトピー結合的ならば、生成元は原始的（ホップ写像で代表される）にとれる。ただし、ホモトピー結合性は、ホップ写像で保存されるとは限らない。

(2) (J.F. Adams) 球面 S^n が、ホップ空間となるのは、次元 $n = 1, 3$ or 7 のいずれかの場合に限る。ただし、S^7 はホモトピー結合的とはならない。

(3) (W. Browder) 有限ＣＷホップ空間の二次元ホモトピー群は、0 である。特に、単連結ならば２連結となる。

(4) (J.R. Hubbuck) ホモトピー可換な有限ＣＷホップ空間は、torus T^n, $n \geqq 0$ にホモトピー同値である。

ホモトピー結合的でない S^7 を除けばこれらの性質は Lie 群と共通である。

他方、Lie 群と異なるホモトピー型を持つ有限CWホップ空間の例が、A. Zabrodsky らによる Mixing Homotopy Types 及び Sphere extensions の議論によってえられている。

(5) ([Z],[IM]) 任意の素数 p に対して A_{p-1} であるが A_p でない空間が存在する。（A_m 空間については §1 を参照されたい。

Fact 1. $G(n) = SU(n), U(n)$ or $Sp(n)$ ($d = 1, 1$ or 2, resp.) とする。このとき $\pi_{2dn-2}(G(n-1)) = Z/mZ$ （ただし m は巡回群の位数）であり、Z/mZ の元 λ に対応する S^{2dn-1} 上の principal bundle の全空間 X がホップ空間となる必要十分条件は、次の三つの内いづれかが成立することである。

a) $(\lambda, 2) = 1$

b) $dn \leqq 2$

c) $dn = 4$ and $\lambda = 0 \bmod 2d$

Fact 2. 上の Fact 1 で、a) または b) の時 X は素数 2 に局所化すればホモトピー結合的となる。しかし c) の時は、素数 2 に局所化しても X は ホモトピー結合的とならない 。（参考文献については [I2} を参照されたい）

近年、J.P. Lin と R. Kane によって、次の著しい結果がえられている。

(6) ([L], [K]) 単連結有限CWホップ空間の Z 係数ホモロジー群は、高次指数の torsion 部分群をもたない。

(7) ([L], [K]) 単連結有限CWホップ空間の Kコホモロジーは、torsion 元をもたない。

(8) ([L], [K]) 単連結有限CWホップ空間 X のループ空間 ΩX は、そのホモロジー群に torsion 元を持たない。

(9) ([L1,L2,L3]) 有限CWホップ空間 X は、3連結ならば6連結であり、7連結ならば14連結となる。 特に X のホモロジー群が torsion をもたない時は、7連結ならば可縮となる。

上に挙げた結果には、大別して二つの方法があった。一つは射影空間上で一次（二次）作用素を考えるもので、他方は直接ホップ空間上で二次（三次）作用素を考える。初めの方法は射影空間という、二次的な概念を実体化した空間上で考える為に見易くなるが、(1) で触れた原始性が問題となる。

以後特に断らない限り、（局所化された）連結CW複体と胞体写像のなす圏で考えるものとする。

§ 1. 1, 2, 3, . . . , m, . . . , ∞

A_m 構造は、空間 ([S]) と写像 ([IM]) とに対し定義され、m = 1, 2, 3 or ∞ に対しては、固有の意味を持つ。

A_1 空間 = 基点を持った空間

A_1 写像 = 基点を保つ写像

A_2 空間 = ホップ空間

A_2 写像 = ホップ写像

A_3 空間 = ホモトピー結合的ホップ空間

A_3 写像 ＝ ホモトピー結合性を保つホップ写像

A_∞ 空間 ＝ ループ空間

A_∞ 写像 ＝ ループ写像

さて、序でも言及した様に、A_2 空間の有理コホモロジー環の生成元は A_2 写像にとれるとは限らず、空間が A_3 であることがその為の十分条件である。同じ様に、A_3 空間の有理コホモロジー環の生成元は A_3 写像にとれるとは限らず（[IM]）、空間が A_4 であることがその為の十分条件となる（[I]）。

A_m 空間や A_m 写像は、A_m 構造を持つ空間や写像として定義される。空間及び写像の A_m 構造の存在は、m 個の元の積の作り方から組み合わせ的に与えられた可縮な複体 $K(m) \cong I^{m-2}$ 及び $J(m) \cong I^{m-1}$ を用いて定義される A_m 形式と呼ばれる次の様な写像の存在と同値である（[S],[IM]）：

$$M(k) : K(k) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X^k, X), \ k \leqq m,$$

$$F(j) : J(j) \longrightarrow \mathrm{Map}_*(X^j, Y), \ j \leqq m.$$

例えば空間の A_4 形式は、積の結合性ホモトピーから得られる次の五角形 K(4) の境界上で与えられたホモトピーの contraction である。

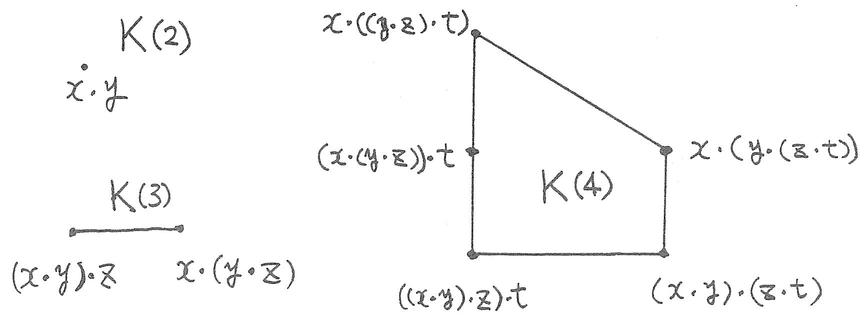


Figure 1.

例えば写像の A_3 形式は、積の結合性ホモトピー及び積との交換ホモトピーから得られる次の六角形 J(3) の境界上で与えられたホモトピーの contraction である。

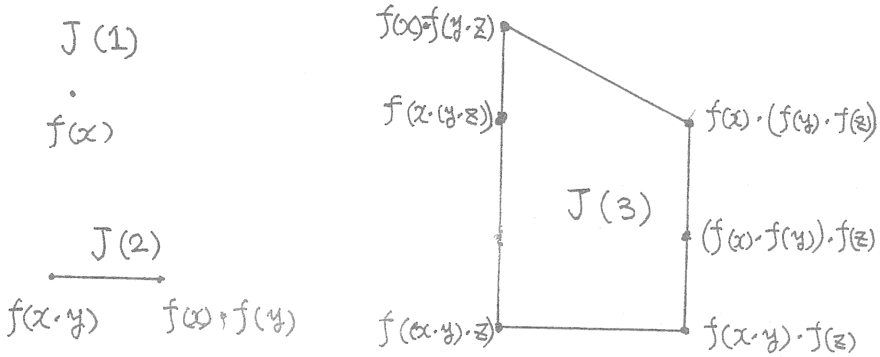


Figure 2.

これらは、互いにホモトープな写像のホモトピーという意味で二次的な量である。 Stasheff による空間の A_m 構造は、しかしホモトピー論的に与えられる。つまり A_m 構造とは、次の図をホモトピー可換とする準ファイバー空間（[DT]） $\{p(k): E(k) \to P(k-1)\}$ の列である。

$$\begin{array}{ccccccccc} X \\ \| \\ E(1) & \subset & E(2) & \subset & \cdots & \subset & E(m) \\ \downarrow p(1) & & \downarrow p(2) & & & & \downarrow p(m) \\ P(0) & \subset & P(1) & \subset & \cdots & \subset & P(m-1) & \subset & P(m) \\ \| \\ \{*\} \end{array}$$

ただし、 E(k-1) は E(k) で可縮 かつ

$E(k) \longrightarrow P(k-1) \longrightarrow P(k)$ is a cofibration.

Figure 3.

ただし、ここに現れる $E(k)$ は X の k 個の join にホモトピー同値である。このP(k) が X の k-次射影空間と呼ばれる。また、写像の A_m 構造は [IM] において、空間の A_m 構造の間のホモトピー可換図を与える写像として定義されている。A_m 形式は A_m 構造から定まり、A_m 構造は A_m 形式から次の様に誘導される：

$$(E(k), E(k-1)) \cong$$

$(K(k+1)\times X^k, \partial K(k+1)\times X^k \cup K(k+1)\times X\times X^{[k-1]})$ 相対同相。

$$(P(k), P(k-1)) \cong (D(k), E(k)) \cong$$

$(K(k+2)\times X^k, \partial K(k+2)\times X^k \cup K(k+2)\times X^{[k]})$ 相対同相。

以後は、この（A_m 形式から定まる）標準的な A_m 構造のみを考える。

A_m 空間及び A_m 写像はホモトピー論的に閉じた圏をなし、また A_m 作用及び A_m 作用を保つ写像も、同様の性質を持つが、その性質の詳細については、[IM] を参照されたい。

§2. フィルター付き A_m 構造

フィルター付け $\{X_i\}$ （$X = \cup X_i$, $\{*\} = \cap X_i$）を持った空間 X をフィルター付き空間と呼び、フィルター付けを保存する写像をフィルター写像と呼ぶ。

例1. $X = U(n)$ or $Sp(n)$, Q = 準射影空間 $\subsetneq X$ とする。$X(i)$ を Q の元の i 個の積で書ける元の全体とすると、X はフィルター付き空間である。

例2． X を奇数次元の球面の直積とし、$X(i)$ を X の元 x で高々 i 個の成分だけが基点と異なるものの全体とすると、X はフィルター付き空間となる。

例3． 任意の空間 X は、$G = \Omega X$ の分類空間として、$X(i) = GP(i)$ なるフィルター付けをもち、任意の写像 f は、このフィルター付けについてのフィルター写像となる。

フィルター付き空間に対して弱（ホモトピー結合的な）ホップ構造を考える。 X と Y をフィルター付き空間とすれば、$X \times Y$ にもフィルター付けが入る：

$$(X \times Y)(i) = \cup_{j+k=i} X(j) \times Y(k)$$

X のフィルター i ホップ構造とは単位元をもつ二項演算 μ : $(X \times X)(i) \to X(i)$ なるフィルター写像であり、組 $(X, *, \mu)$（あるいは X）を、フィルター i ホップ（あるいは A_2 ）空間と呼ぶ。 特に $i = \infty$ のときフィルター付き H（あるいは A_2 ）空間と呼ぶ。同様に、μ のホモトピー結合性を与えるホモトピー $\alpha(t)$: $(X \times X \times X)(i) \to X(i)$ が存在して、フィルター付けを保つとき、X と α の組をフィルター i HA（あるいは A_3 ）空間と呼ぶ。特に $i = \infty$ のときフィルター付き HA（あるいは A_3 ）空間と呼ぶ。

さらに、フィルター付き空間 X の A_m 形式とは、通常の A_m 形式のみたす formula を i 番目のフィルターでのみみたす写像 $M(k)(\sigma)$: $(X^k)(i) \longrightarrow X(i)$（$\sigma$ は $K(k)$ の元），$k \leqq m$ でフィルターを保つものである。 このとき X はフィルター i A_m 空間と呼ばれる。 特に $i = \infty$ のときフィルター付き A_m 空間と呼

ばれる。同様にフィルター写像 f の A_m 形式とは、通常の A_m 形式のみたす formula を i 番目のフィルターでのみみたす写像

$F(k)(\gamma)$: $(X^k)(i) \longrightarrow Y(i)$ (γ は $J(k)$ の元), $k \leqq m$

でフィルターを保つものである。このとき f はフィルター i A_m 写像と呼ばれる。特に $i = \infty$ のときフィルター A_m 写像と呼ばれる。

例4. $X = U(n)$ or $Sp(n)$ とし、$X(i) = X, i \geqq 2$、$X(1) = Q$ = 準射影空間 $\subsetneq X$ とすると、X は(いかなる積に対しても)フィルター付き A_2 空間である。

例5. X を奇数次元の球面の直積とし、$X(i) = X, i \geqq 2$、$X(1) = Q$を X の元 x で高々 1 個の成分だけが基点と異なるものとすると、X は(いかなる A_p 構造に対しても)フィルター付き A_p 空間となる。

例6. $X = Y \times S^7$ を A_3 空間とする。$X(i) = X, i \geqq 2$、$X(1) = Q = \{*\} \times S^7$ とすれば、X は(いかなる A_3 構造に対しても)フィルター付き A_3 空間となる。

例7. 任意の A_m 空間 X は、$G = \Omega X$ の分類空間として、$X(i) = GP(i)$ なるフィルター付けをもつ、フィルター付き A_m 空間となる(m = 2 の場合は、逸見氏の講演も参照されたい)。また、任意の A_m 写像 f は、このフィルター付けについての フィルター A_m 写像となる(m = 2 の場合は[LW]も参照されたい)。

フィルター付き A_m 空間 X の A_k 形式は、フィルター付けを保つので、これから定まる A_k 構造もまた、フィルター付けられる。又 $X(0) = \{*\}$ より、$i < k$ のときは

$\cup_{i=i_1+\dots+i_k} X(i_1)*\cdots*X(i_k)$ は可縮である。 従って、これを i 番目のフィルターに制限して考えれば次をえる。

定理１。 フィルター i A_m 空間（$i \geqq m$） X は、次の様なフィルター付けを伴う A_k 構造 $E(k,i)$, $P(k,i)$（$k \leqq m$）をもつ：

$P(0,i) = P(0,j) = \{*\}$,

$P(k,i) = \cup_j\ P(k,j)$, $P(k,0) = \{*\}$, $P(1,j) = \Sigma X(j)$,

$E(k,i) = \cup_j\ E(k,j)$, $E(k,0) = \{*\}$, $E(1,j) = X(j)$,

$P(k,j)$ and $E(k,j)$ are contractible if $j < k$,

$E(k,k)$ is homotopy equivalent to $X(1)*\cdots*X(1)$,

$E(k,k) \longrightarrow P(k-1,k) \longrightarrow P(k,k)$ is a cofibration,

注１。 特に $i = \infty$ のとき $E(k,\infty) = E(k)$, $P(k,\infty) = P(k)$. 従ってそのとき $P(k,k)$ は $P(k)$ に対する実質的に最初の自明でないフィルターである。 $m = 2$ のときは、Iwase [I1] の $Q(2)$ および Hemmi の $XQ(2)$ は、適当なフィルター 2 A_2 空間に対する $P(2,2)$ とみなすことができる。

注２。 $Q(m) = P(m,m) \cup P(m-1) \subset P(m)$ とおけば、次の cofibration をえる：

$X(1)*\cdots*X(1) \longrightarrow P(m-1) \longrightarrow Q(m)$

よって $Q(m) \supset P(m-1) \supset \Sigma X \supset \Sigma Q$ という関係がみたされる。

§３． （広義の）生成部分空間を持つホップ空間

X を空間とし、Q をその部分空間、$j : Q \to X$ を包含写像とする。 ここで $X(i) = X$, $i \geqq 2$ とし、$X(1) = Q$ とおく。 こ

れにより X はフィルター付き空間となる。 Q が（広義の）生成部分空間であるとは、$\tilde{K}^*(Q)$ が torsion 元をもたず、$j^!$: $\tilde{K}^*(X) \to \tilde{K}^*(Q)$ が、decomposable な元を 0 に写す全射であることとする。 従って、§ 2 で挙げた例の中の Q はすべて X の（広義の）生成部分空間である。

さて、X を A_m 空間とし、Q をその（広義の）生成部分空間とする。このとき X はフィルター付き A_m 空間となり、§ 2 の Q(m) が構成される。また $\hat{j}$: $\Sigma Q \to Q(m)$ を、Σj を通して得られる包含写像とする。 このとき [I] で示された事実「単連結有限CW A_m 空間は A_{m-1} 原始的であり、$K^*(P(m-1))$ は torsion 元を持たない。」により、§ 2 で得られた cofibration

$$Q*\cdots*Q \longrightarrow P(m-1) \longrightarrow Q(m)$$

に対して、E. Thomas [T] の結果を援用して、$K^*(Q(m))$ に対して原始性を仮定せずに、仮定した場合の $K^*(P(m))$ に近い結果を得た。

定理２（[I1:Theorem 0.1, 0.4, 0.9]）． X が単連結有限CW A_m 空間ならば、次の環同型が存在する。

$$K^*(Q(m)) \cong M(m)/R(m,\Sigma\hat{j}^!) \oplus \tilde{S}(m),$$

ただし、

(1) M(m) は polynomial algebra truncated at height m+1 であり、その生成元は外積代数 $K^*(X)$ の生成元に対応する。

(2) $R(m,\hat{j}^!)$ は、$\hat{j}^!$ の Kernel 中の m 個の元の積で生成される ideal。

(3) $\hat{S}(m)$ は、$K^*(Q(m))\cdot\hat{S}(m) = 0$ をみたし torsion 元を持たない ideal であり、$P(m-1)$ への制限は単射である。

(4) $M(m)$ の decomposable な元の全体 $M(m)\cdot M(m)$ は、Adams 作用素の作用で閉じている。

さらに、常コホモロジー H^* についても、もし $H^*(X)$ が $H^*(pt)$ 上の free 代数ならば、同様の同型がえられる。

[H] において複素及び四元数 Stiefel 多様体の場合に付されていた原始性の仮定を取り除いて、次を得る。

系１（Hubbuck,Iwase [I1:Corollary 0.6]）. Stiefel 多様体がホップ空間になるのは（素数 2 に局所化していても）それが Lie 群 または S^7 である場合にかぎる。

[HM] において付されていた A_p 原始性の仮定を取り除いて、次を得る。

系２（Hubbuck-Mimura,Iwase [I1:Proposition 0.7]）. 単連結な球面の直積が、素数 p に局所化して A_p 空間となれば、次が成立する。

(1) 因子となる球面の次元は、3 以上 (2p-1) 以下の奇数。

(2) 因子となる 3 次元球面の個数は、(2p-1) 次元球面の個数以上。

これにより、[HM] において付されていた A_3 原始性の仮定を取り除いて、次を得る。ただし、これは Hemmi によって二次作用素を用いて独立に得られている。

系３（Hemmi,Hubbuck-Mimura,Iwase [I1:Corollary 0.8]）. 球面の直積を素数 3 に局所化したときホモトピー結合的ホップ空間

となるのは、Lie 群 U(1), SU(2), SU(3) からなる直積とその空間が、素数 3 において同じホモトピー型を持つ場合にかぎる。

[H2] において付されていた A_3 原始性の仮定を取り除いて、次を得る。

系４（Hubbuck,Iwase [I1:Corollary 0.10]）．そのホモロジー群に 2 torsion を持たない空間と S^7 との直積は、（素数 2 に局所化しても）ホモトピー結合的ホップ空間とならない。

§ 4． 球面拡大のホモトピー結合性（十分性）

序でも触れた様に、$\pi_{2dn-2}(G(n-1)) = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ であり、$\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ の元 λ に対応する principal bundle の全空間 X がホモトピー結合的ホップ空間となる為の必要十分条件は、ホップ構造に対する条件とは異なる。まずその十分条件を、A_m 構造へと一般化して考察する。

$$
\begin{tikzcd}
G(n-1) \arrow[r, equal] \arrow[d, phantom, "\cap"] & G(n-1) \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\
X \arrow[r] \arrow[d] & G(n) \arrow[d] & \text{Pull-back} \\
S^{2dn-1} \arrow[r, "\lambda\cdot"] & S^{2dn-1} &
\end{tikzcd}
$$

Figure 4.

定理３（[IM:Theorem 6.5]）．m 以下の総ての素数 p に対して（λ , p）= 1 となるならば、X は A_m 空間であり、その A_m 構造はファイバー G(n-1) のＸ への作用の拡張として得られる。

証明は、二種類の素数に局所化した議論に分かれる。 m 以下の素数 p に対しては、X は $G(n)$ とホモトピー同値であるから、ここでは、定理は成立している。 さて、 $m = 2$ の場合に用いられたホモトピー集合に関する議論が、そのままではホモトピーのホモトピーとなる高次結合性の議論には使用できなくなる為、[IM] では A_m 作用の分解という手法を用いる。 具体的には、m より大きい素数 p に局所化して考え、 Lie 群 $G(n)$ の $B = S^{2dn-1}$ への標準射影に沿う作用の A_m 形式

$$R(k) : K(k) \longrightarrow Map_*(G(n)^{k-1} \times B, B), k \leqq m$$

を $\Omega^2\Sigma^2 B$ において標準射影と k 個の定値写像に沿う A_j 作用とに分解する, $1 \leqq j \leqq k$。 これには、 $\Omega^2\Sigma^2 B$ のループ構造を用いる。 さらにこの分解を B に圧縮する為には、初めに Lie 群の作用を $G(n-1)$ 同変にとって同変局所化をしておけば、次元の関係から、十分であることが分かる。 ただし、それゆえに直交群は除かれる。 さらに、B の λ 倍写像は定値写像に沿う A_j 作用を保つ写像となり（上と同様な議論による）、これらを引き戻して、X の B への標準射影と合成し、X の A_m 形式と、B への作用の A_m 形式とを得る。これらは $G(n-1)$ 同変であり、X の A_m 形式は $G(n-1)$ の A_m 形式の拡張となる。

§ 5. 球面拡大のホモトピー結合性（必要性）

m が 3 以上の場合には、$m = 2$ に見られた様な例外部分 c) が消え去る。

定理４（[I2:Theorem A]）. 3 以上の m に対し、次は同値で

ある。

(1) X は G(n-1) の A_m 構造の拡張となる A_m 空間。

(2) X は A_m 原始的 A_m 空間。

(3) 総ての素数 p に対して、次のどちらかが成立する。

(a) $(\lambda, p) = 1$,

(b) $dn \leqq p$.

定理5（[I2:Theorem B]）. 素数 p に対し、次は同値である。

(1) X は p で局所化すれば A_p 原始的 A_p 空間。

(2) X は p で局所化すれば A_∞ 空間。

(3) $(\lambda, p) = 1$ 又は $dn \leqq p$。

定理 4 は定理 3 と定理 5 との系である。定理 5 は、Adams 作用素と Chern 指標のintegrality とから構成される Hubbuck による K theory 作用素（Hubbuck 作用素）を、P(p) 上で計算することによりえられる。その Key point は、ΣX 上での Hubbuck 作用素 の p divisibility の決定であるが、これを G(n) への bundle mapping を通して $\Sigma G(n) \subset BG(n)$ と比較することで BG(n) 上での Hubbuck 作用素 の p divisibility の決定に帰着させることができる。[I2] ではこれを、ある種の部屋割りの問題として解決する（[I2:Lemma4.1]）。

注意。上記定理 4, 5 における 原始性の条件は、実際は必要ないことが最近判った。

§ 6. 幾つかの関連した問題

問題１。 p 正則 A_p 空間の決定。

問題２。 球面上の球面 bundle のループ空間がいつホモトピー可換となるか？

問題３。 ３連結有限ＣＷホモトピー結合的ホップ空間は可縮か？

問題３’。　　３連結有限ＣＷホップ空間はホモロジー群に torsion を持たないか？

問題３″。 ホモロジー群に torsion を持たない３連結有限ＣＷホップ空間はS^7 の直積か？

上の問題 3, 3', 3" は互いに関連する古典的な未解決問題である。 また問題 2 は逸見氏の研究に関連するが、これについては現時点で判っているのは奇数次元の球面に対しては

(3 , 5)

(3 , 4n+3)

(7 , 4n+3)

が可能な type の組み合わせであるということである。 問題１については兼本徹氏（岡山大・理）が計算中で、現在までに $p \leqq 5$ を決定し、$p = 7$ で未決定として残っている type は type (7 , 11) を含むもののみである。

References

[A] J.F. Adams, On the non-existence of elements of Hopf invariant one. Ann. Math. 72(1960), 20-104.

[AA] J.F. Adams and M.F. Atiyah, K-theory and the Hopf invariant one, Quart. J. Math. Oxford (1966), 31-38.

[Bo] A. Borel, Topics in the homology theory of fibre bundles, Lecture Notes in Math. Springer No. 36 (1967).

[Br] W. Browder, Torsion in H-spaces, Ann. Math. 74(1961), 24-51.

[DT] A. Dold and R. Thom, Quasifaserungun und unendliche symmetrische producte, Ann. Math. 67(1958), 239-281.

[H] J.R. Hubbuck, On homotopy commutative H-spaces, Topology 8(1969), 119-126.

[H0] J.R. Hubbuck, Generalized cohomology operations and H-spaces of low rank, trans. Amer. Math. Soc. 141(1969),335-360.

[H1] J.R. Hubbuck, Hopf structures on Stiefel Manifolds, Math. Ann. 262(1983) , 529-547.

[H2] J.R. Hubbuck, Products with the seven sphere and homotopy associativity, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. ser. A 40(1986), 91-100.

[HM] J.R. Hubbuck and M. Mimura, Certain p-regular H-spaces, Arch. Math. 49(1987), 79-82.

[I] N. Iwase, On the K-ring structure of X-projective n-space, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A 38(1984), 285-297.

[I1] N. Iwase, H-spaces with generating subspaces, Proc. Royal Soc. of Edinburgh, to appear.

[I2] N. Iwase, Homotopy associativity of sphere extensions, Proc. of Edinburgh Math. Soc., to appear.

[IM] N. Iwase and M. Mimura, Higher homtopy associativity, to appear in Arcata Procedings.

[K] R. Kane, Implications in Morava K-theory, Mem. Amer. Math. Soc. 59 No. 340 (1986).

[L] J.P. Lin, Two torsion and loop space conjecture, Ann. Math. 115(1982).

[L1] J.P. Lin, A seven connected finite H-space is fourteen connected, Ill J. Math. 30(1986), 602-611.

[L2] J.P. Lin, Mod2 Exterior H-spaces, Invent. Math. 79(1985), 475-484.

[L3] J.P. Lin, 4k+1 dimensional generators of finite H-spaces, preprint.

[LW] J.P. Lin and F. Williams, Primitivity of the C_2-invariant, J. Pure and Appl. Alg. 43(1986),289-298.

[S] J.D. Stasheff, Homotopy associativity of H-spaces I and II, Trans. Amer. Math. Soc. 108(1963), 275-292 and 293-312.

[T] E. Thomas, On functional cup products and the transgeression operator, Arc. Math. 12(1961), 435-444.

[T1] E. Thomas, On the mod 2 cohomology of certain H-spaces, Comm. Math. Helv. 37(1962), 130-140.

[Z] A. Zabrodsky, Homotopy associativity and finite CW complexes, Topology 9(1970), 121-128.