

第 36 回

トポロジー・シンポジウム

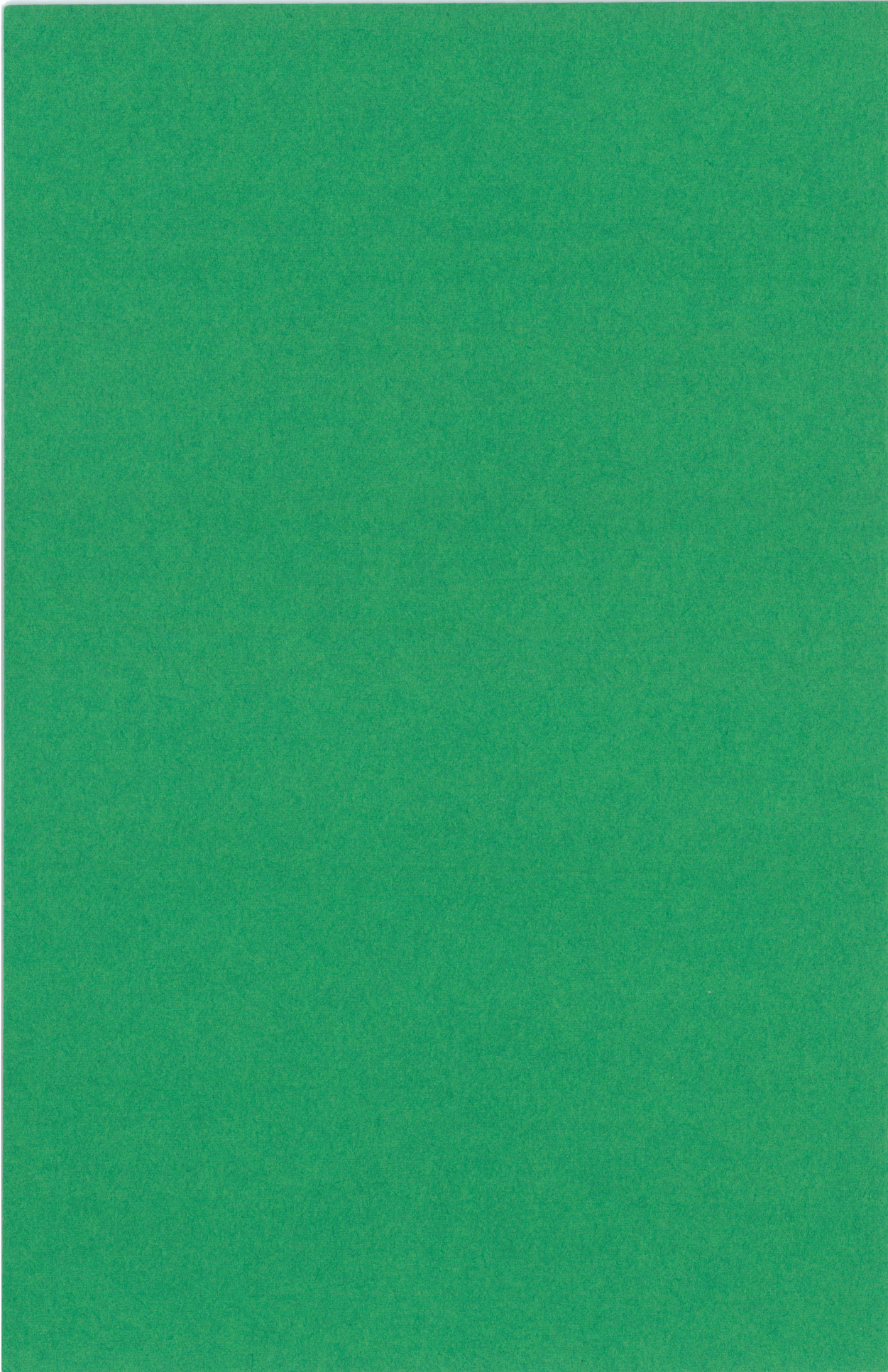
講 演 集

昭和63年 7月18日～20日

於 静 岡 大 学

昭和63年度科学研究費補助金・総合研究 (A)

課題番号 63302001



## 序

この講演集は、昭和63年7月18日から20日の間、静岡大学で開催される第36回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費補助金・総合研究(A)

「位相幾何学の総合的研究」(課題番号63302001)

により作られたものであることを附記しておく。

昭和63年7月

総合研究(A)63302001

研究代表者 松本幸夫



## 目 次

1. On the stratification of good hypersurfaces  
岡 陸 雄 (東工大 理) ..... 1
2. 複素射影平面の九頂点単体分割  
吉 田 正 章 (九大 理) ..... 13
3. Symplectic 多様体上の群作用について  
小 野 薫 (東北大 理) ..... 31
4. Formal group と elliptic cohomology  
河 野 明 (京大 理) ..... 49
5. Applications of Knot theory in chemistry  
and molecular biology  
De Witt Sumners (Florida 州立大) ..... 60
6. モノポールの幾何学  
伊 藤 光 弘 (筑波大 数学系) ..... 75
7. 連続関数の群と非アルキメデス バナッハ空間  
大 田 春 外 (静岡大 教育) ..... 95
8. Nonorientable 4-manifold の homotopy 不変量  
小 島 定 吉 (東工大 理) ..... 113



# ON THE STRATIFICATION OF GOOD HYPERSURFACES

Mutsuo OKA

Department of Mathematics, Tokyo Institute of Technology

**1. Statement of results** Let  $f(z)$  be a germ of an analytic function defined in a neighborhood of the origin and let  $f(z) = \sum_{\mathbf{v}} a_{\mathbf{v}} z^{\mathbf{v}}$  be the Taylor expansion. We consider the germ of the hypersurface  $V = f^{-1}(0)$ . We assume that  $f$  has a non-degenerate Newton boundary  $\Gamma(f)$ . The purpose of this paper is to construct a canonical Whitney b-regular stratification  $\underline{\mathcal{S}}$  of  $V$  which depends only on the Newton boundaries  $\{ \partial\Gamma(f) \}$ . Under the non-degeneracy condition of the Newton boundary, the singular locus of  $V$  is the union of several coordinate subspaces  $\mathbb{C}^{*I}$ . However the b-regularity for  $(V^*, \mathbb{C}^{*I})$  does not hold in general and we have to know the locus where the regularity fails. For this purpose, we introduce the concept of the *I-primary boundary components* which plays an important role for the stratification of  $V$ . Its rough description is as follows. Let  $P = (p_1, \dots, p_n)$  be a positive rational dual vector and let  $I(P) = \{ 1 \leq i \leq n ; p_i = 0 \}$ . The face function  $f_P(z)$  is defined by the partial sum  $\sum' a_{\mathbf{v}} z^{\mathbf{v}}$  for  $\mathbf{v}$  such that  $\mathbf{v} \in \Delta(P)$ . Here  $\Delta(P)$  is the face of  $\Gamma(f)$  where  $P$  takes its minimal value  $d(P; f)$ . We use the notations of [5]. Assume that  $f_P(z) = z^L g(z_{I(P)})$  where  $z_{I(P)}$  is the projection of  $z$  into the affine coordinate space  $\mathbb{C}^{I(P)}$ . In this case, we say that  $f_P$  is *essentially of  $z_{I(P)}$ -variables* and we denote  $g(z_{I(P)})$  by  $f_P^{\sharp}(z_{I(P)})$ . We consider the variety  $V^*(P)$  and  $\partial V^*(P)$  as follows.  $V^*(P) = \{ z \in \mathbb{C}^{*n} ; f_P(z) = 0 \}$  and  $\partial V^*(P) = \{ z_{I(P)} \in \mathbb{C}^{*I(P)} ; f_P^{\sharp}(z_{I(P)}) = 0 \}$ . If  $f_P$  is not essentially of  $z_{I(P)}$ -variables,  $\partial V^*(P)$  is  $\mathbb{C}^{*I(P)}$  by definition. We call  $\partial V^*(P)$  a *I-primary boundary component with respect to  $P$*  if  $V^*(P)$  is not empty.

Let  $V_{pr}$  be the closure of  $V^*$  in  $C^n$  and let  $V^{*I} = V \cap C^{*I}$  and let  $V_{pr}^{*I} = V_{pr} \cap C^{*I}$ . Then  $V_{pr}^{*I}$  is a union of I-primary boundary components (Lemma (3.3)). We say that the hypersurface  $V = f^{-1}(0)$  is *good* if for each subset  $I$  of  $\{1, \dots, n\}$  with  $|I| > 2$ , there is at most one  $f_P$  among  $\{f_P ; I(P) = I\}$  such that  $f_P$  gives a proper I-primary boundary component. Here  $P$  may not be unique. We assume that  $V$  is a good hypersurface hereafter. If  $V$  has a proper primary boundary component, we denote this component by  $\partial V_{pr}^{*I}$ . If  $V$  does not have proper primary boundary component,  $\partial V_{pr}^{*I} = \emptyset$  by definition. Let  $P$  be a positive dual vector and let  $I = I(P)$ . We say that  $V$  satisfies *the primitive non-degeneracy condition* or simply *the PND-condition* if the following conditions are satisfied for any  $P$  such that  $V^*(P) \neq \emptyset$ . Let  $p_{\min} = \text{minimum } \{p_j ; j \in I\}$ .

(PND1) Assume that  $f_P$  is essentially of  $z_I$ -variables and let  $f = f_P + \hat{f}$ . Write  $f_P(z) = z^K f_P^{\beta}(z_I)$  where  $K = (k_1, \dots, k_n)$ .

(a) (i)  $d(P;f) = 0$  or (ii)  $d(P;f) > 0$  and  $d(P;\hat{f}) \geq d(P;f) + p_{\min}$  or (iii) the variety  $\{z \in C^{*n} ; f_P(z) = 0, z_j \frac{\partial \hat{f}_P}{\partial z_j}(z) - k_j \hat{f}_P(z) = 0 \text{ for } j \in I\}$  is empty.

(b)  $\partial V^*(P)$  is a non-degenerate hypersurface in  $C^{*I}$  in an  $\varepsilon$ -ball  $B_{\varepsilon}^I$  for some  $\varepsilon$ .

(PND2) Assume that  $f_P$  is not essentially of  $z_I$ -variables. For each  $z_I \in C^{*I} \cap B_{\varepsilon}^I$ , the fiber  $q_I^{-1}(z_I)$  is a non-degenerate hypersurface in  $C^{I^c} \times \{z_I\}$  where  $I^c$  is the complement of  $I$  in  $\{1, \dots, n\}$ .

**Main Theorem.** *We assume that  $V$  is a good hypersurface which satisfies the PND-condition. Let  $\underline{S}(I) = \{V^{*I} - \partial V_{pr}^{*I}, \partial V_{pr}^{*I}\}$  and let  $\underline{S} = \bigcup_I \underline{S}(I)$ . Then  $\underline{S}$  is a regular stratification of  $V$ .*

For the stratification of the hypersurfaces which is not good and the stratification of the complete intersection varieties, see [6].



## 2. Stratifications

Let  $V$  be an analytic variety in an open set  $D$  of  $\mathbb{C}^n$ . We recall the necessary notions of the stratification which is induced by Whitney and Thom. For further details, see [10,7,3]. Let  $\underline{S}$  be a family of subsets of  $V$  such that  $V$  is covered disjointly by elements of  $\underline{S}$ .  $\underline{S}$  is called a *Whitney stratification* if the following conditions are satisfied.

- (i) (*D*-strictness) Each element  $M$  of  $\underline{S}$  (which is called a *stratum*) is a connected smooth analytic variety such that  $\overline{M}$  and  $\overline{M} - M$  are closed analytic varieties in  $D$ . Here  $\overline{M}$  is the closure of  $M$  in  $D$ .
- (ii) (*Frontier property*) Let  $M$  and  $N$  be strata of  $\underline{S}$  and assume that  $M \neq N$  and  $M \cap \overline{N} \neq \emptyset$ . Then  $M \subset \overline{N} - N$ .

We recall the Whitney b-condition for a Whitney stratification  $\underline{S}$ . Let  $(N, M)$  be a pair of strata of  $\underline{S}$  with  $\overline{N} \supset M$  and let  $p$  be a point of  $M$ . Let  $p_i$  and  $q_i$  be sequences on  $N$  and  $M$  respectively. We assume that

$$(2.1) \quad p_i \rightarrow p, \quad q_i \rightarrow p, \quad T_{p_i}N \rightarrow \tau \quad \text{and} \quad [p_i - q_i] \rightarrow \lambda.$$

Here the arrows imply the convergence in the respective spaces and  $[v]$  is the complex line generated by  $v$ . Thus  $\tau \in G(r, n)$  ( $r = \dim N$ ) and  $\lambda \in G(1, n) = \mathbb{P}^{n-1}$  where  $G(r, n)$  is the Grassmannian manifold of  $r$ -planes in  $\mathbb{C}^n$ . We say that  $(N, M)$  satisfies *Whitney b-condition* at  $p$  if  $\lambda \in \tau$  for any such sequences. When each pair  $(N, M)$  with  $M \subset \overline{N}$  satisfies the Whitney b-condition at any point  $p$  of  $M$ , we call  $\underline{S}$  a *b-regular Whitney stratification*. The following proposition is a direct consequence of the Curve Selection Lemma (§3 of [4] or [1]) and Theorem 17.5 of [10].

**Proposition (2.2).** *Let  $p_i$  and  $q_i$  be as in (2.1). Then there are analytic curves  $p(t)$  and  $q(t)$  defined on the interval  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  ( $\varepsilon > 0$ ) such that*

- (i)  $p(0) = q(0) = p$  and  $p(t) \in N$  for  $t \neq 0$  and  $q(t) \in M$ .
- (ii)  $T_{p(t)}N \rightarrow \tau$  and  $[p(t) - q(t)] \rightarrow \lambda$ .

It is known that the b-condition for analytic varieties follows from the ratio condition (R) by [2, 9]. There is also a weaker regularity condition which is called *Whitney a-condition* but this condition results from b-condition ([3]).

### 3. Non-degenerate hypersurface and primary boundary components

Let  $f(z) = \sum_{\nu} a_{\nu} z^{\nu}$  be an analytic function of  $n$  variables which is defined in a neighborhood of the origin. The Newton polyhedron  $\Gamma_+(f)$  is the convex hull of the union of  $\{\nu + \mathbb{R}_+^n\}$  for  $\nu$  such that  $a_{\nu} \neq 0$ . The Newton boundary  $\Gamma(f)$  is the union of the compact faces of the Newton polyhedron. We assume that the Newton boundary  $\Gamma(f)$  is non-degenerate. As we are mainly interested in non-isolated singularities, we also use the notation  $\partial\Gamma_+(f)$  which is the union of the boundaries of  $\Gamma_+(f)$  which are not necessarily compact. The inclusion  $\Gamma(f) \subset \partial\Gamma_+(f)$  is obvious by the definition.

Let  $\Sigma^*$  be a fixed unimodular simplicial subdivision which is compatible with the dual Newton diagrams  $\{\Gamma^*(f)\}$  and let  $\hat{\pi}: X \rightarrow \mathbb{C}^n$  be the associated modification map. See [8] and [5] for the definition. Let  $V_{pr}$  be the closure of  $V^*$  and let  $\tilde{V}$  be the proper transform of  $V_{pr}$  by  $\hat{\pi}$ . Let  $\pi: \tilde{V} \rightarrow V_{pr}$  be the restriction of  $\hat{\pi}$  to  $\tilde{V}$ . For finite vertices  $Q_1, \dots, Q_s$  of  $\Sigma^*$ , we define a subvariety  $E(Q_1, \dots, Q_s)$  of  $\tilde{V}$  by  $E(Q_1) \cap \dots \cap E(Q_s)$  and let  $E(Q_1, \dots, Q_s)^* = E(Q_1, \dots, Q_s) - \bigcup_{P \neq Q_i} E(P)$

where  $E(P)$  is the divisor of  $\tilde{V}$  which corresponds to  $P$ . Note that  $E(Q_1, \dots, Q_s)^*$  is non-empty only if  $Q_1, \dots, Q_s$  are vertices of an  $(n-1)$ -simplex of  $\Sigma^*$ . The collection of  $E(Q_1, \dots, Q_s)^*$  gives a regular stratification  $\tilde{S}$  of  $\tilde{V}$ . Let  $\sigma = (P_1, \dots, P_n)$ . Then we have

$$(3.1) \quad \tilde{V} \cap \mathbb{C}_{\sigma}^n = \{y_{\sigma} \in \mathbb{C}_{\sigma}^n; f_{\sigma}(y_{\sigma}) = 0\}$$

where  $f_{\sigma}(y_{\sigma}) = f(\hat{\pi}(y_{\sigma})) / \prod_{j=1}^n y_{\sigma j}^{d(P_j; f)}$ .

**Theorem (3.2).**  $\tilde{V}$  is a smooth complex manifold and  $\pi : \tilde{V} \rightarrow V_{pr}$  is a proper modification of  $V_{pr}$  in the neighborhood of the origin.

The assertion is well known if the origin is an isolated singular point of  $V_{pr}$ . The general case can be proved similarly. Let  $I$  be a subset of  $\{1, \dots, n\}$ . We define the coordinate subspace  $C^I$  and  $C^{*I}$  by  $C^I = \{z = (z_1, \dots, z_n) ; z_j = 0 \text{ if } j \notin I\}$  and  $C^{*I} = \{z \in C^n ; z_j = 0 \text{ iff } j \in I\}$  respectively. For simplicity we usually write  $C^{*n}$  instead of  $C^{*I}$  if  $I = \{1, \dots, n\}$ . We define the  $I$ -proper boundary  $V_{pr}^{*I}$  of  $V$  in  $C^{*I}$  by  $V_{pr} \cap C^{*I}$ . If  $I$  is empty,  $V_{pr}^{*I} = \{0\}$  by definition. Then we claim:

**Lemma (3.3).** *The  $I$ -proper boundary  $V_{pr}^{*I}$  of  $V$  is the union of the  $I$ -primary boundary components.*

*Proof.* Let  $\pi : \tilde{V} \rightarrow V_{pr}$  be the resolution of  $V_{pr}$  constructed in §3. Let  $\tilde{V}^{*I}$  be the union of the strata  $E(P_1, \dots, P_s)^*$  of the stratification  $\tilde{S}$  of  $\tilde{V}$  such that  $\pi(E(P_1, \dots, P_s)^*) \subset C^{*I}$ . As  $\pi$  is a proper surjective mapping, it is clear that  $\pi(\tilde{V}^{*I}) = V^{*I}$ . Let  $E(P_1, \dots, P_s)^*$  be such a stratum and let  $\sigma = (P_1, \dots, P_n)$  be an  $(n-1)$ -simplex of  $\Sigma^*$ . Let  $P = P_1 + \dots + P_s$ . Then  $P$  is a positive dual vector with  $I(P) = I$ . We may assume that  $I = \{m+1, \dots, n\}$  ( $m \geq s$ ) for simplicity and  $\sigma = (p_{ij})$  has the following form.

$$\begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$$

where  $A$  and  $B$  are unimodular matrixes of  $m \times m$  and  $(n-m) \times (n-m)$  respectively. Then Lemma (3.3) follows from the following.

**Sublemma (3.4).** *The restriction of  $\pi$  to  $E(P_1, \dots, P_s)^*$  is a submersion onto  $\partial V^*(P)$ .*

*Proof.* Let  $y$  be an arbitrary point of  $E(P_1, \dots, P_s)^*$ . Recall that  $E(P_1, \dots, P_s)^*$  is defined by

$$y_{\sigma 1} = \dots = y_{\sigma s} = h(y_\sigma) = 0$$

where  $h$  is characterized by

$$(3.5) \quad h(y_\sigma) \prod_{i=1}^n y_{\sigma_i}^{d(f; P_i)} = f_P(\hat{\pi}(y_\sigma)).$$

Note that  $\Delta(P) = \bigcap_{i=1}^s \Delta(P_i)$ . Thus  $h(y_\sigma)$  does not contain the variables  $y_{\sigma_1}, \dots, y_{\sigma_s}$ . Let  $z = \hat{\pi}(y_\sigma)$ . Then we have  $z_j = (y_I)^B$  i.e.,

$$(3.6) \quad z_j = \prod_{i=m+1}^n y_{\sigma_i}^{p_{ji}} \quad (j = m+1, \dots, n).$$

In particular,  $\{z_j\}$  ( $m+1 \leq j \leq n$ ) depend only on  $y_{\sigma(m+1)}, \dots, y_{\sigma n}$ . Let  $E^*$  be the subvariety of  $\mathbb{C}^{\sigma^n}$  defined by  $h(y_\sigma) = 0$ .  $E^*$  is nothing but the product of  $\mathbb{C}^{*s} \times E(P_1, \dots, P_s)^*$ . Let  $V^*(P)$  be the subvariety of the base space  $\mathbb{C}^{*n}$  which is defined by

$$V^*(P) = \{ z \in \mathbb{C}^{*n} ; f_P(z) = 0 \}.$$

It is clear that  $\hat{\pi} : E^* \rightarrow V^*(P)$  is an isomorphism by (3.5). Let  $q_I : V^*(P) \rightarrow \partial V^*(P)$  and  $p : E^* \rightarrow E(P_1, \dots, P_s)^*$  be the canonical projections. We have the commutative diagram:

$$\begin{array}{ccc} E^* & \xrightarrow{\hat{\pi}} & V^*(P) \\ \downarrow p & & \downarrow q_I \\ E(P_1, \dots, P_s)^* & \xrightarrow{\pi} & \partial V^*(P) \end{array}$$

Let  $\phi$  be the composition  $q \circ \hat{\pi} : E^* \rightarrow \partial V^*(P)$ . By the commutativity of the diagram,  $\phi = \pi \circ p$ . By the assumption PND1 and PND2,  $\phi$  is a submersion. As  $\phi = \pi \circ p$ , this implies that  $\pi : E(P_1, \dots, P_s)^* \rightarrow \partial V^*(P)$  is a submersion. This completes the proofs of Sublemma (3.4) and Lemma (3.3).

**Remark (3.7).** Assume that  $f(z_I)$  is not identically zero. Then  $V^{*I}$  is defined by  $f(z_I) = 0$ . In this case,  $f_P(z) = f(z_I)$  and for any  $P$  with  $I(P) = I$ . Thus  $V^{*I}$  itself is the unique I-primary boundary component. In this case,  $V$  is non-singular on

$V^{*I}$ .

#### 4. Key Lemma .

We first consider the following situation. Let  $p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t))$  be an analytic curve defined in the interval  $(-1,1)$  with the Taylor expansion  $p_i(t) = a_i t^{b_i} + (\text{higher terms})$ . We assume that

(i)  $f(p(t)) \equiv 0$ ,

(ii)  $a_j \neq 0$  for each  $j = 1, \dots, n$ . and  $b_i = 0$  if and only if  $i \in I$ .

Let  $B = {}^t(b_1, \dots, b_n)$ ,  $a = (a_1, \dots, a_n)$ . Let  $b_{\min} = \text{minimum } \{b_j ; j \notin I\}$  and  $J_{\min} = \{j ; b_j = b_{\min}\}$ . Let  $q(t)$  be an analytic curve in  $V^{*I}(B)$  with  $q(0) = p(0)$ . We assume that

(iii)  $T_{p(t)}V^* \rightarrow \tau$  and  $[p(t)-q(t)] \rightarrow \lambda$ .

Then we assert

**Key Lemma (4.1).**  $\lambda$  is contained in  $\tau$ .

*Proof.* It is well-known that the tangent space  $T_z V^*$  is characterized by  $df(z)^\perp = \{v \in T_z C^n ; df(z)(v) = 0\}$ . Let us consider the limit of  $df(p(t))$ . For a real analytic function  $k(t)$ , we define an integer  $ord(k(t))$  by the order of  $k(t)$  at  $t = 0$ . Similarly we define the order of a vector-valued analytic function by the minimum of the order of the coordinate functions. Thus  $ord(df(p(t)))$  is the minimum of  $ord(\frac{\partial f}{\partial z_i}(p(t)))$  for  $i = 1, \dots, n$ . Let  $m = ord(df(p(t)))$  and let

$\vec{\gamma} = df(p(t))/t^m|_{t=0}$ . By the PND1-(b)-condition,  $m \leq d(B;f)$ . Let  $\vec{\gamma} = \sum_{i=1}^n \gamma_i dz_i$ .

Then we have an obvious equality  $\tau = \vec{\gamma}^\perp$ . Considering the leading term of (i), we obtain  $f_B(a) = 0$ .

Case (a). Assume that  $f_B(z)$  is not essentially of  $z_I$ -variables. Then  $V^{*I}(B) = \mathbb{C}^{*I}$  by the definition. Then by the PND2-condition, there exists an index  $j$  ( $j \notin I$ ) such that  $\frac{\partial f_B}{\partial z_j}(a) \neq 0$  if  $\sum_{i \in I} |a_i|^2$  is small enough. Thus we have  $m \leq d(B;f) - b_{\min}$ . Assume that  $m = d(B;f) - b_{\min}$ . Then we must have

$$(4.2) \quad \frac{\partial f_B}{\partial z_j}(a) = 0 \text{ for } j \in J_{\min} \cup I \text{ and } \gamma_j = \frac{\partial f_B}{\partial z_j}(a) \text{ for } j \in J_{\min}.$$

If  $m < d(B;f) - b_{\min}$ , we have that

$$(4.3) \quad \gamma_j = 0 \text{ for } j \in J_{\min} \cup I.$$

Note that  $\gamma_i = 0$  for  $i \in I$  in both cases. This implies that  $\vec{\gamma} | \mathbb{C}^I = 0$ .

Now we consider the line  $[p(t)-q(t)]$ . Let  $k = \text{ord}(p(t)-q(t))$ . As  $q(t) \in \mathbb{C}^{*I}$ , it is easy to see that  $1 \leq k \leq b_{\min}$ . Let  $\vec{\lambda} = (p(t)-q(t))/t^k|_{t=0}$ . By the definition of  $\lambda$ , we have that  $[\vec{\lambda}] = \lambda$ . If  $k < b_{\min}$ ,  $\vec{\lambda}$  is a vector in  $\mathbb{C}^I$ . In this case, it is clear that  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda}) = 0$ . Assume that  $k = b_{\min}$ . Then  $\lambda_j = a_j$  if  $j \in J_{\min}$  and  $\lambda_j = 0$  if  $j \in J_{\min} \cup I$ . We consider the equality

$$\begin{aligned} 0 &\equiv \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) \frac{dp_j(t)}{dt} \\ &\equiv \left[ \sum_{j \in I} \frac{\partial f_B}{\partial z_j}(a) b_j a_j \right] t^{d(B;f)-1} + (\text{higher terms}). \end{aligned}$$

Thus we obtain the equality

$$(4.4) \quad \sum_{j \in I} \frac{\partial f_B}{\partial z_j}(a) b_j a_j = 0.$$

If  $m < d(B;f) - b_{\min}$ ,  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda}) = 0$  is immediate from (4.3). Assume that  $m = d(B;f) - b_{\min}$ . By (4.2) and (4.4), we can see easily that  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda}) = 0$ . Here  $\vec{\lambda}$  is

identified with the tangent vector  $\sum_{j=1}^n \lambda_j \frac{\partial}{\partial z_j}$  at  $p(0)$ .

Case (b). Assume that  $f_B(\mathbf{z})$  is essentially of  $\mathbf{z}_I$ -variables. Let  $f_B(\mathbf{z}) = \mathbf{z}^L f_B^e(\mathbf{z})$  where  $\mathbf{z}^L$  is a monomial in the variables  $\{z_j; j \notin I\}$ . Then  $V^{*I}(B) = \{f_B^e(\mathbf{z}_I) = 0\}$  and  $\text{ord}(f_B(p(t))) = \text{ord}(p(t)^L) = d(B;f)$ . We have two equalities:

$$(4.5) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) \frac{dp_j(t)}{dt} \equiv 0 \text{ and } \sum_{i \in I} \frac{\partial f_B^e}{\partial z_i}(q(t)) \frac{dq_i(t)}{dt} \equiv 0.$$

Let  $\beta = \text{ord}(f_B^e(p(t)))$  and  $\delta = \text{ord}(\hat{f}(p(t)))$ . First we assume that PND1-(a)-(ii) holds. As  $f(p(t)) = f_B(p(t)) + \hat{f}(p(t)) \equiv 0$ , we have

$$(4.6) \quad \beta + d(B;f) = \delta \geq d(B;\hat{f})$$

where  $\hat{f}_B(\mathbf{z})$  is the secondary face function of  $f$  with respect to the weight  $B$ . The equality holds if and only if  $\hat{f}_B(\mathbf{a}) \neq 0$ . We consider the equality which follows immediately from (4.5).

$$(4.7) \quad \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) \frac{d}{dt} [p_j(t) - q_j(t)] + \sum_{i \in I} \left[ \frac{\partial f}{\partial z_i}(p(t)) - \frac{\partial f_B}{\partial z_i}(p(t)) \right] \frac{dq_i(t)}{dt} + \sum_{i \in I} p(t)^L \left[ \frac{\partial f_B^e}{\partial z_i}(p(t)) - \frac{\partial f_B^e}{\partial z_i}(q(t)) \right] \frac{dq_i(t)}{dt} \equiv 0.$$

By the assumption,  $p_j(t) \equiv q_j(t) \text{ modulo } (t^k)$  for any  $j$ . This implies that  $\text{ord} \left[ \frac{\partial f}{\partial z_i}(p(t)) - \frac{\partial f_B}{\partial z_i}(p(t)) \right] \geq k$ . Thus the order of the last sum is at least  $d(B;f) + k$ . On the other hand, we have

$$\text{ord} \left( \frac{\partial f}{\partial z_i}(p(t)) - \frac{\partial f_B}{\partial z_i}(p(t)) \right) \geq d(B;\hat{f}) \geq d(B;f) + b_{\min} \quad (i \in I)$$

by PND1-(a)-(ii) where  $\hat{f} = f - f_B$ . As  $k \leq b_{\min}$ , the order of the second sum in (4.7) is also at least  $d(B;f) + k$ . The order of the first sum in (4.7) is at least  $m+k-1$ . As  $m \leq d(B;f)$  by the PND1-(b)-condition and  $k \leq b_{\min}$ , the coefficient of

$t^{m+k-1}$  of (4.7) is equal to  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda})$ . Thus we conclude that  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda}) = 0$ . Assume (a)-(i) :  $d(B:f) = 0$ . We consider the following equality instead of (4.7).

$$\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) \frac{d}{dt} \left[ p_j(t) - q_j(t) \right] + \sum_{i \in I} \left[ \frac{\partial f}{\partial z_i}(p(t)) - \frac{\partial f}{\partial z_i}(q(t)) \right] \frac{dq_i(t)}{dt} \equiv 0.$$

Here we have used the equality  $\frac{\partial f}{\partial z_i}(q(t)) = \frac{\partial f_B}{\partial z_i}(q(t))$ . By the PND1-(b)-condition,  $m = 0$ . Thus by a similar argument, we have  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda}) = 0$ . Note that  $m = d(B:f)$  if the PND1-(a)-condition is satisfied.

Assume that PND1-(a)-(iii) holds. We may assume that  $d(B:\hat{f}) < d(B:f) + b_{\min}$ . We consider (4.7) again. The order of the last sum is at least  $d(B:f) + k$ . We can write  $f_B^e(p(t)) = \lambda t^\theta + (\text{higher terms})$  by (4.6) where  $\theta = d(B:\hat{f}) - d(B:f)$ . Note that  $\theta \leq \beta$ . As  $f(p(t)) \equiv 0$ , we have that  $\hat{f}_B(a) + \lambda a^K = 0$ . Thus we have

$$\frac{\partial f}{\partial z_j}(p(t)) = \eta_j t^{d(B:\hat{f})-b_j} + (\text{higher terms}) \text{ for } j \in I$$

where  $\eta_j = \frac{\partial \hat{f}_B}{\partial z_j}(a) + \lambda k_j a^K / a_j = (a_j \frac{\partial \hat{f}_B}{\partial z_j}(a) - k_j \hat{f}_B(a)) / a_j$ . As  $f_B(a) = 0$ , there exists an index  $j_o \in I$  such that  $\eta_{j_o} \neq 0$  by the PND1-(a)-(iii) condition. Thus the order of the first term of (4.7) is at most  $d(B:\hat{f}) - b_{j_o} + k - 1$ . The order of the second term is at least  $d(B:\hat{f})$ . As  $k < b_{\min}$ , we have the inequality :  $d(B:\hat{f}) - b_{j_o} + k - 1 < d(B:\hat{f})$ . By the assumption that  $d(B:\hat{f}) < d(B:f) + b_{\min}$ , we have also the inequality :  $d(B:\hat{f}) - b_{j_o} + k - 1 < d(B:f) + k$ . Therefore we conclude as before that  $\vec{\gamma}(\vec{\lambda}) = 0$ . This completes the proof of Lemma (4.1).



## 5. Proof of Main Theorem.

In this section, we will prove Main Theorem in §1. Let  $Y$  and  $Z$  be a pair of strata of  $\underline{S}$  such that  $\bar{Y} \cap Z \neq \emptyset$ . We assume that  $Y \in \underline{S}(J)$  and  $Z \in \underline{S}(K)$ . Then we must have  $J \supset K$ . If  $J = K$ , the b-regularity is obvious as  $V$  is good. Thus we may assume that  $J \neq K$ . If  $Y$  is an open dense stratum in  $\mathbb{C}^{*J}$ , the b-regularity for  $(Y, Z)$  is again obvious. Thus we assume that  $\bar{Y} \neq \mathbb{C}^J$ . Let  $p(t)$  and  $q(t)$  be real analytic curves defined on  $(-1, 1)$  such that (i)  $p(0) = q(0) \in Z$ . (ii)  $p(t) \in Y$  for  $t > 0$ . (iii)  $q(t) \in Z$  for  $t \geq 0$ . Assume that the tangent space  $T_{p(t)}Y$  converges to  $\tau$  and the line  $[p(t) - q(t)]$  converges to  $\lambda$ .  $Y$  is a non-degenerate hypersurface defined by  $f_P^{\underline{S}}(z_J) = 0$  for some  $P$  with  $I(P) = J$ . Assume that  $p_j(t) = a_j t^{b_j} + (\text{higher terms})$  for  $j \in J$ . For brevity's sake, we assume that  $J = \{1, \dots, m\}$ . Let  $B = {}^t(b_1, \dots, b_m)$  and  $a = (a_1, \dots, a_m)$ . As  $p(0) = q(0) = a_I \in Z$ ,  $K = I(P)$ . By looking at the leading terms of the equality  $h(p(t)) \equiv 0$ , we can see that  $a_K$  belongs to the  $K$ -primary component  $Y^{*K}(B)$ . Let  $R = P + rQ$  for a sufficiently small  $r > 0$ . Then it is an easy linear algebra to see the following.

(i)  $(f_P)_B = f_R$ . (ii) The secondary face function  $\hat{f}_R$  of  $f$  with respect to  $R$  is equal to the secondary face function of  $f_P$  with respect to  $B$ .

Thus the PND-condition for  $f$  implies the PND-condition for  $f_P$ . Now we use Lemma (4.1) to obtain the regularity for the pair  $(Y, Z)$ . This completes the proof of Main Theorem.

**Example (5.1)** Let  $f(z) = (z_1 z_2)^2 (z_3^5 + z_4^5) + (z_3 z_4)^2 (z_1^5 + z_2^5)$ . Then the singular locus of  $V$  is the union of the two dimensional coordinate planes  $\mathbb{C}^I$  for  $|I| = 2$ . Let  $I = \{1, 2\}$ . Then by an easy calculation, we have a proper primary boundary components defined by  $C : z_1^5 + z_2^5 = 0$ .  $C$  consists of five lines, say  $C_1, \dots, C_5$ . Thus  $\underline{S}(I) = \{\mathbb{C}^{*I} - C, C_1, \dots, C_5\}$ . The same is true for  $I = \{3, 4\}$ . Thus the stratification of  $V$  consists of the following strata:  $V^*$ ,  $\mathbb{C}^{*I}$  ( $I \neq \{1, 2\}, \{3, 4\}$ ),  $\mathbb{C}^{*\{1, 2\}} - C$ ,  $\mathbb{C}^{*\{3, 4\}} - D$ ,  $C_i, D_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ),  $\mathbb{C}^{[j]}$  ( $j = 1, \dots, 4$ ),

{0} where  $D = \bigcup_{i=1}^5 D_i = \{z_3^5 + z_4^5 = 0\}$ .

### References

1. H. Hamm, "Lokale topologische Eigenschaften komplexer Räume," *Math. Ann.*, vol. 191, pp. 235-252, 1971.
2. J.C. Kuo, "The ratio test for analytic Whitney stratifications," in *Proceedings of Liverpool singularities symposium*, Springer Lecture Note, vol. 192, pp. 141-149, 1971.
3. J. Mather, "Stratifications and Mappings," in *Dynamical Systems*, ed. Peixoto, pp. 195-232, 1973.
4. J. Milnor, "Singular Points of Complex Hypersurface," *Annals Math. Studies*, vol. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, 1968.
5. M. Oka, "On the Resolution of Hypersurface Singularities," *Advanced Study in Pure Mathematics*, vol. 8, pp. 405-436, 1986.
6. M. Oka, "Canonical stratification of complete intersection varieties," *preprint*, 1988.
7. R. Thom, "Ensembles et morphismes stratifiés," *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 75, pp. 240-284, 1969.
8. A.N. Varchenko, "Zeta-Function of Monodromy and Newton's Diagram," *Inventiones Math.*, vol. 37, pp. 253-262, 1976.
9. J.P. Verdier, "Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard," *Inventiones Math.*, vol. 36, pp. 295-312, 1976.
10. H. Whitney, "Tangents to analytic variety," *Ann. Math.*, vol. 81, pp. 496-546, 1964.

# 複素射影平面の九頂点単体分割

九州大学 理学部 吉田正章

§ 0 はじめに

1980年代初頭に Wolfgang Kühnel  
によってみつけられた複素射影平面  $\mathbb{C}P^2$   
の9つの頂点と36ヶの4-単体からなる  
単体分割は様々な幾何的意味や  
色々な美しい性質を持っている。それらは

[MoYo]: B. Morin と M. Yoshida,  
The Kühnel Triangulation of the complex  
projective plane from the view point of  
complex crystallography, Part I  
(Advances Math. 1989)

[Ma]: A. Marin, 同上 Part II  
(pre-print)

にくわしい。私はあちこちで Kühnel  
単体分割の話をしたが、時間的制約

のために、各頂点のまわりの Link<sup>\*</sup> の解説だけをして、あとはお話しでお茶をにごしてしまったことが多い。そして未だにこの簡単で美しい単体分割が何なのかは残念ながら実際には殆んど知られてないのである。

そこで今回は、Bernard MORIN の最初のアイデアに基づいて、Kühnel 単体分割を描写してみようと思う。内容は [MoYo] の一部なのであるが、この中では“証明”をしなくてはならなかったし、あれもいいたいこれもいいたいと色々書いてあるので、始めて読まれる方はしんどいだろうと思われる。このノートは、これだけを、大らかな気持ちで読めば“最低限 Kühnel 単体分割がどんなものか乍らに分る解説”という意味で存在価値はあるだろうと思う。

\*）筆者著：やさしくたのしくためになる  
“Trefoil knot を含む  $S^3$  の単体分割” その展開図とその応用 Topology News 3 ('87)

§1 おなじみの写像  $\pi: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \Delta_2$   
 まず  $\mathbb{C}P^2$  を

$$\mathbb{C}P^2 = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \sum |z_i|^2 = 1\} / \{|\lambda| = 1\}$$

と同次座標で表示しておき, 2次元単体  $\Delta_2$  を標準的に

$$\Delta_2 = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 \mid t_i \geq 0, \sum t_i = 1\}$$

と表示する.  $\mathbb{C}P^2$  から  $\Delta_2$  への写像  $\pi$  を

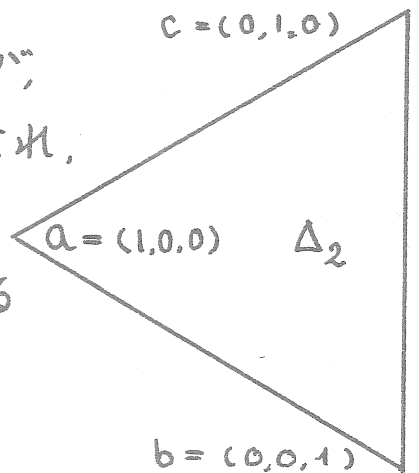
$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{C}P^2 &\longrightarrow \Delta_2 \\ (z_1, z_2, z_3) &\longmapsto (|z_1|^2, |z_2|^2, |z_3|^2) \end{aligned}$$

で定義する. これは色々な所に出てくるので  
 なじみの方も多いと思う. それは承知の  
 上で  $\pi$  の性質を調べておこう. まず  
 一点の逆像は

$$\pi^{-1}(p) = \begin{cases} \text{Torus} & p \text{ が } \Delta_2 \text{ の内点} \\ S^1 & p \text{ が } \Delta_2 \text{ の辺の内点} \\ \text{一点} & p \text{ が } \Delta_2 \text{ の頂点} \end{cases}$$

となる. 即ち  $\pi^{-1}(p)$  は,  $p$  が  $\Delta_2$  の内点で

では Torus なののであるが、  
 辺に近づくと  $S^1$  につぶれ、  
 またさらに、頂点に  
 近づくと一点につぶれる  
 という訳である。

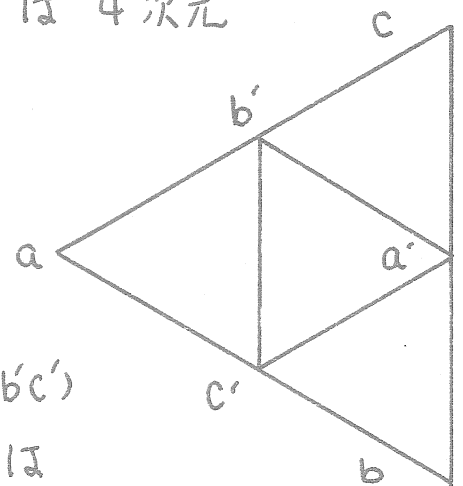


$\Delta_2$  の一辺の逆像は  
 座標軸である：たとえば、

$$\pi^{-1}(bc) = \{z_1 = 0\}.$$

次に  $\Delta_2$  を右下図の如く細分する。  
 隅の三角形の逆像は 4次元  
 球である：たとえば、

$$\begin{aligned} & \pi^{-1}(ab'c') \\ &= \left\{ \left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 + \left| \frac{z_3}{z_1} \right|^2 < 1 \right\}. \end{aligned}$$



だから 小さな三角形  $(a'b'c')$   
 のひとつの辺の逆像は  
 三次元球面  $S^3$  である：たとえば

$$\pi^{-1}(b'c') = \left\{ \left| \frac{z_2}{z_1} \right|^2 + \left| \frac{z_3}{z_1} \right|^2 = 1 \right\}.$$

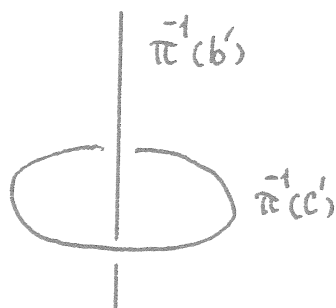
この球面  $\pi^{-1}(b'c')$  の中で 2つの  $S^1$  :

$\pi^{-1}(b')$  と  $\pi^{-1}(c')$  は互に link している。

なぜなら、それらは  
球面  $\pi^{-1}(b'c')$  と座標軸

$\{z_2=0\}$ ,  $\{z_3=0\}$  の交

わりだからである。



こういう訳で、

3つの球体

$$\pi^{-1}(b'c') \cong S^3$$

$\pi^{-1}(ab'c')$ ,  $\pi^{-1}(bc'a')$ ,  $\pi^{-1}(cb'a')$

は互に link する  $S^1$  で接していることが分る。

我々は以下の節で  $\mathbb{C}P^2$  を 36ヶの 4-単体に分けるのであるが、まず §2 で  $\pi^{-1}(a'b'c')$  を 27ヶに分け、それが  $\pi^{-1}(a'b'c')$  の境界である 3つの球面  $\pi^{-1}(b'c')$ ,  $\pi^{-1}(c'a')$ ,  $\pi^{-1}(cb'a')$  に induce する単体分割をみて、§3 で、3つの球体

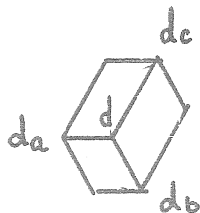
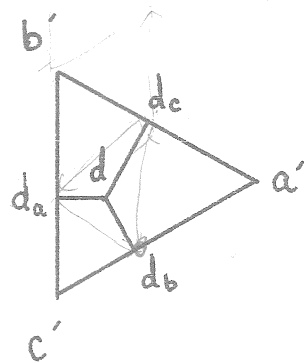
$\pi^{-1}(ab'c')$ ,  $\pi^{-1}(bc'a')$ ,  $\pi^{-1}(cb'a')$

をそれぞれ 3つに、合計 9ヶに分けるのである。

§ 2  $\pi^{-1}(a'b'c')$  を 27ヶの 4-単体に分けること

この節では小さな三角形  $(a'b'c')$  の逆像  $\pi^{-1}(a'b'c')$  を 27ヶの単体に分ける。各点  $d \in (a'b'c')$  の逆像は  $d \neq a', b', c'$  ならいつも Torus な訳だから, Torus  $\pi^{-1}(d)$  を 27ヶに分けることを考える。

以下少しの間, “何でそんなことするのん?” と言わずに聞いて下さい。三角形  $(a'b'c')$  の内点  $d$  に対して各辺に垂線を下し, その足を  $d_a, d_b, d_c$  とする。(右図)  $d_a, d_b, d_c$  と  $d$  を用いて, 下のような 3つの平行四辺形を描き,



右の平行四辺形に ≡,

左下の “ ” に ≡≡

という模様をつける。(右図)



ここまで描い



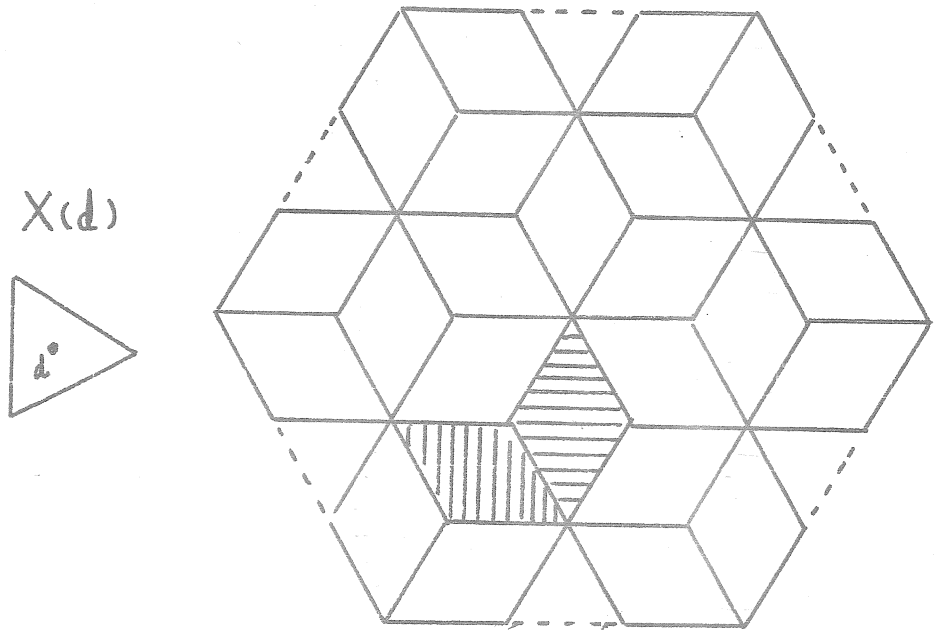
たら,  $d_a, d_b, d_c$  が小さな三角形の辺にあ  
 ったとかこれらの平行四辺形が  $(a'b'c')$ -  
 平面にあったとかいうことはわすれていた  
 だきます。あるのはただある平面に描  
 かれたひとかたまりの3つの平行四辺形  
 のみであります。このかたまりをベクトル  
 $\vec{d}_{adb}, \vec{d}_{bdc}, \vec{d}_{cda}$  (和は0) を使ってくり返  
 し平行移動して, このパターンで平面をおお  
 います。次に  $3\vec{d}_{adb}, 3\vec{d}_{bdc}, 3\vec{d}_{cda}$  で  
 移り合うものを同一視して Torus を作り  
 それを  $X(d)$  とします。  $X(d)$  は9ヶの  
 かたまり即27ヶの平行四辺形に分れて  
 います。Lattice の言葉で言うと  $X(d)$  は

$$\mathbb{Z}\vec{d}_{adb} + \mathbb{Z}\vec{d}_{bdc} + \mathbb{Z}\vec{d}_{cda}$$

$$\text{modulo } 3\mathbb{Z}\vec{d}_{adb} + 3\mathbb{Z}\vec{d}_{bdc} + 3\mathbb{Z}\vec{d}_{cda}$$

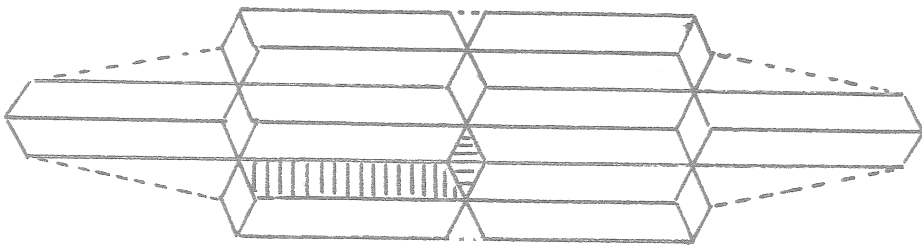
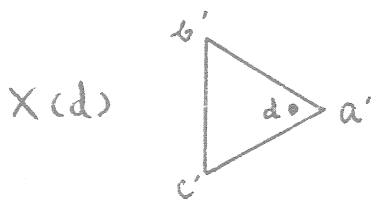
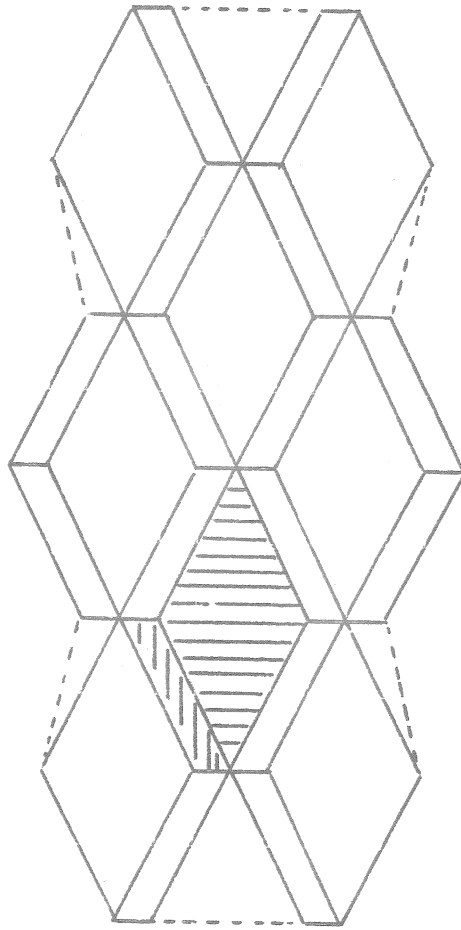
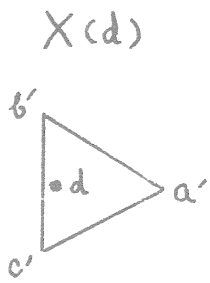
でひとかたまりの3つの平行四辺形を動か  
 して出来たものです。Torus  $X(d)$  は次頁  
 のような基本域を作って表示すると便利  
 です。図を描きやすくするために  $d$  は







( $a'b'c'$ ) の中心にしておきます。



ここで上と下, 右下と左上, 右上と左下は同一視されています。模様を完成させるのは, ぬり絵として残しておきます。

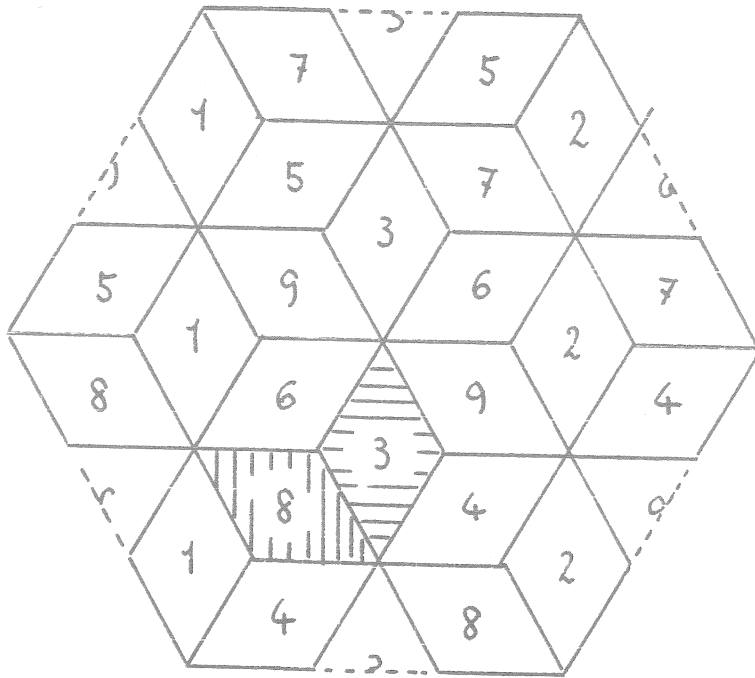
さて,  $d$  が 三角形 ( $a'b'c'$ ) の中を動きまわると,  $X(d)$  とその上に描かれた模様がどうなるか 分解写真 (アニメーション) で見てみましょう。



以上の観察で以下のことが分ります。  $d$  が  $(a'b'c')$  の内点にあるときには、  $X(d)$  は 27ヶの平行四辺形に分割された Torus で、  $d$  が 辺に近づくとき、たとえば  $(b'c')$  の内点に近づくときだんだん  のしめる割合が大きくなり、ついに  $d$  が  $(b'c')$  の内点では  ばかりが 9つの Torus になり；  $d$  が  $(a'b'c')$  の頂点、たとえば  $a'$  に近づくとき  はだんだん小さくなり、ついに  $d = a'$  になると、 や  は糸線分に  は点になり、  $X(a')$  は  $S^1$  になります。このことから

$X(d)$  と  $\pi^{-1}(d)$   $d \in (a'b'c')$   
 を同一視し、  $\pi^{-1}(d)$  は  $X(d)$  を通じて模様がつけられた訳です。




訳の分らないことをするのはこれで最後ですから、がまんしてもらって、  $d$  が  $(a'b'c')$  の内点にあるときに  $X(d)$  の 27ヶの平行四辺形に次頁の如く、1 から 9 までの数字をふって下さい。





X(d)

模様を完成させるのは再びぬり絵として残しておきます。ついでに2ページ前のアニメーションにも番号をふりましょう。


dがa'に近づくときの状況を思い出しましょう。①, ③と②は異なる3点になり, 他の平行四辺形はこれらの3点を結ぶ線分になります。そこで  $X(a') = \pi^{-1}(a')$  上の3点を以下のように定義します。

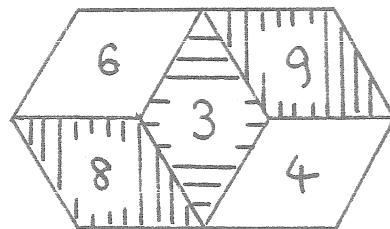
頂点 1 :=  $\lim$   ,  $d \rightarrow a'$   
 頂点 2 :=  $\lim$   ,  $d \rightarrow a'$   
 頂点 3 :=  $\lim$   ,  $d \rightarrow a'$

他の頂点  $4, 5, 6 \in X(b') = \pi^{-1}(b')$  と  
 頂点  $7, 8, 9 \in X(c') = \pi^{-1}(c')$  を同様に  
 や  の  $d \rightarrow b'$  や  $d \rightarrow c'$  の limit  
 として定義します。

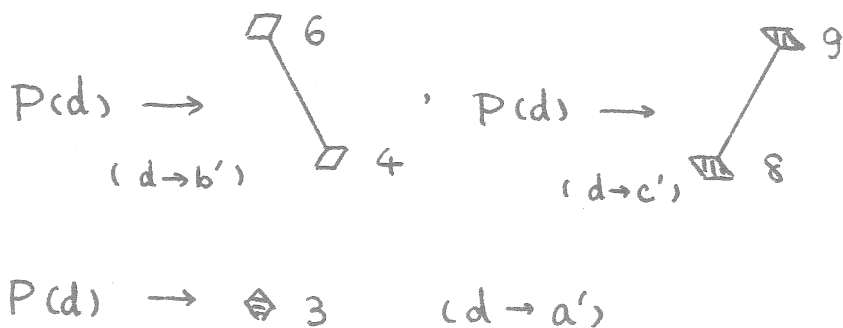
さて,  $X(d)$  内の 27 個のうちの一つの  
 平行四辺形  $P(d)$  に注目して

$$\bigcup_{d \in \alpha(b'c')} P(d)$$

はどうなっているのかを調べましょう。ど  
 れでも同じですから,  $P(d)$  を  のうち  
 でまわりが

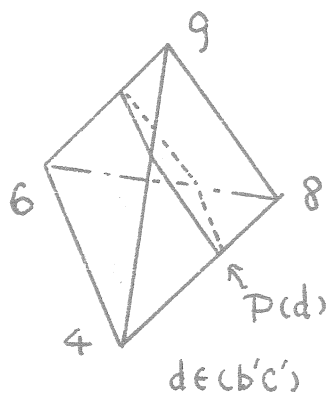


となっているものを考えましょう。  $P(d)$  は  
 $d$  が  $(a'b'c')$  の頂点に近づくとき以下の  
 ように変形してゆきます。



このことから、 $\bigcup_{d \in (b'c')} P(d)$  は線分 (46) と線分 (89) で定まる

Tetrahedron (4689) であり、 $\bigcup_{d \in (a'b'c')} P(d)$  は Tetrahedron (4689) を底、頂点 3 を頂点とする錐である 4-単体 (34689)



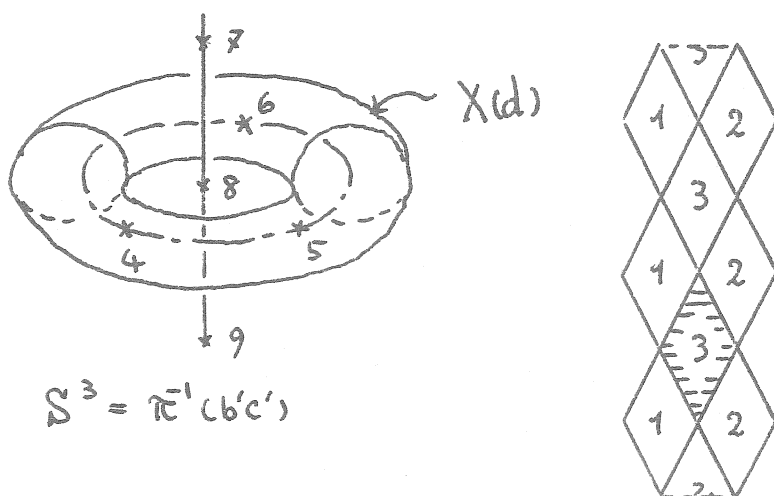
であることが分る。平行四辺形  $P(d)$  はどれも同様であるから結局  $\pi^{-1}(a'b'c')$  は 9 つの頂点

1, 2, 3  $\in \pi^{-1}(a)$ ; 4, 5, 6  $\in \pi^{-1}(b')$ ; 7, 8, 9  $\in \pi^{-1}(c')$  を使って 27 々の 4-単体に分割されたのである。

§ 3  $\pi^{-1}(abc')$  を 3ヶの 4-単体 に 分割するに  
 4次元球体  $\pi^{-1}(abc')$  の表面は 3次元球面  $\pi^{-1}(bc')$  であり, 前節の最後にみたように

$$\pi^{-1}(bc') = \bigcup_{d \in (bc')} X(d)$$

は 9つの Tetrahedra に分れている.



すなわち

$$\partial(456) * \partial(789).$$

表面がこのように単体に分かれているのだから内部を

$$\pi^{-1}(abc') = \partial(456) * (789)$$

$$= (45789) \cup (56789) \cup (64789)$$

と 3つの 4-単体に分ければ, 新たな頂点,



を使わないで単体分割できる。同様に

$$\pi^{-1}(bc'a') = \sigma(789) * (123)$$

$$\pi^{-1}(cb'a') = \sigma(123) * (456)$$

とする。これで出来上りである。この36ヶの4-単体からなる(位相的には $\mathbb{C}P^2$ である)複体を Kühnel complex  $K$  と呼ぶ。もちろん

$$\pi^{-1}(a'b'c') = (456) * \sigma(789)$$

....

としてもよい。こうして出来たものは anti-Kühnel complex と呼ばれる。

#### §4 Kühnel 複体 $K$

前節までで $\mathbb{C}P^2$ を $27+3 \times 3 = 36$ ヶの4-単体に分割したのであるが、すべての4-単体を書き上げよう。各単体の頂点をら列する代りに

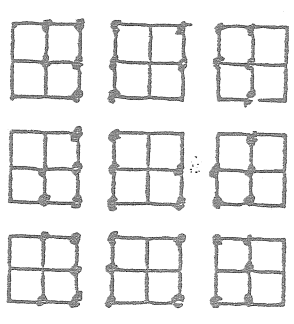
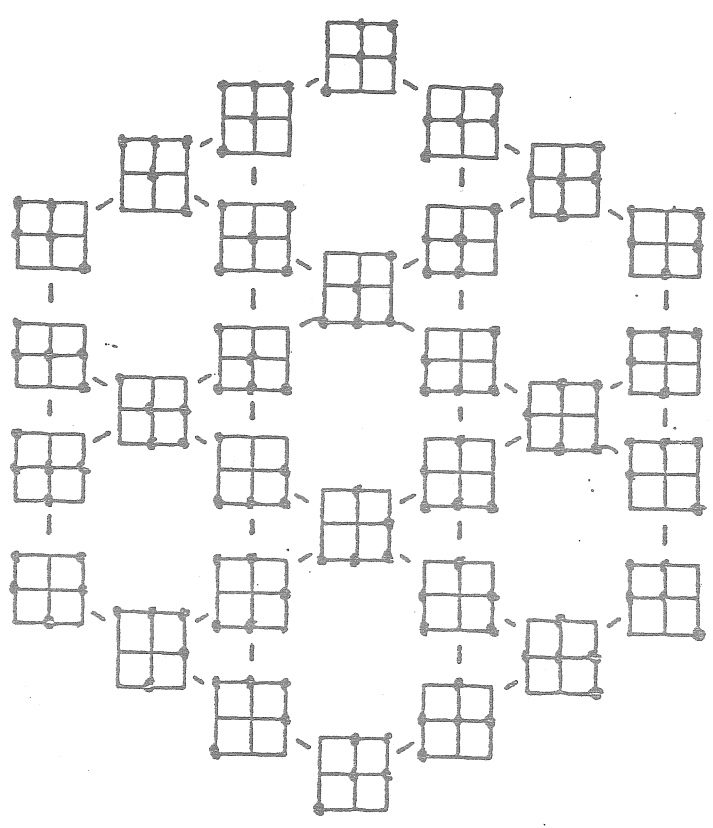
以下の様な点字記法を用いる:

たとえば

$$\begin{array}{ccc} 1-4-7 \\ | & | & | \\ 2-5-8 \\ | & | & | \\ 3-6-9 \end{array}$$

$(12459) =$   という具合。

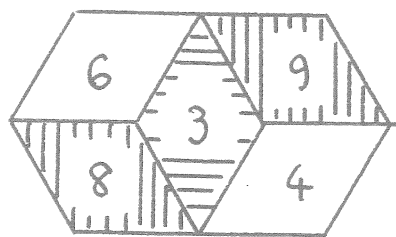
# The Kühnel complex $K$



前頁上のひとかたまりは  $\pi^1(a'b'c')$  であり  
 前頁下の3ヶづつは左から  $\pi^1(abc')$ ,  
 $\pi^1(bc'a')$ ,  $\pi^1(cb'a')$  である。上のひとか  
 たまりの内 でまん中の下あたりに

$$(34689) = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \bullet & \bullet & \bullet \\ \hline \end{array}$$

があるでしょう。これが §2 の最後に  
 説明した、切口  $P(d)$  が  $\diamond 3$  でまわりが

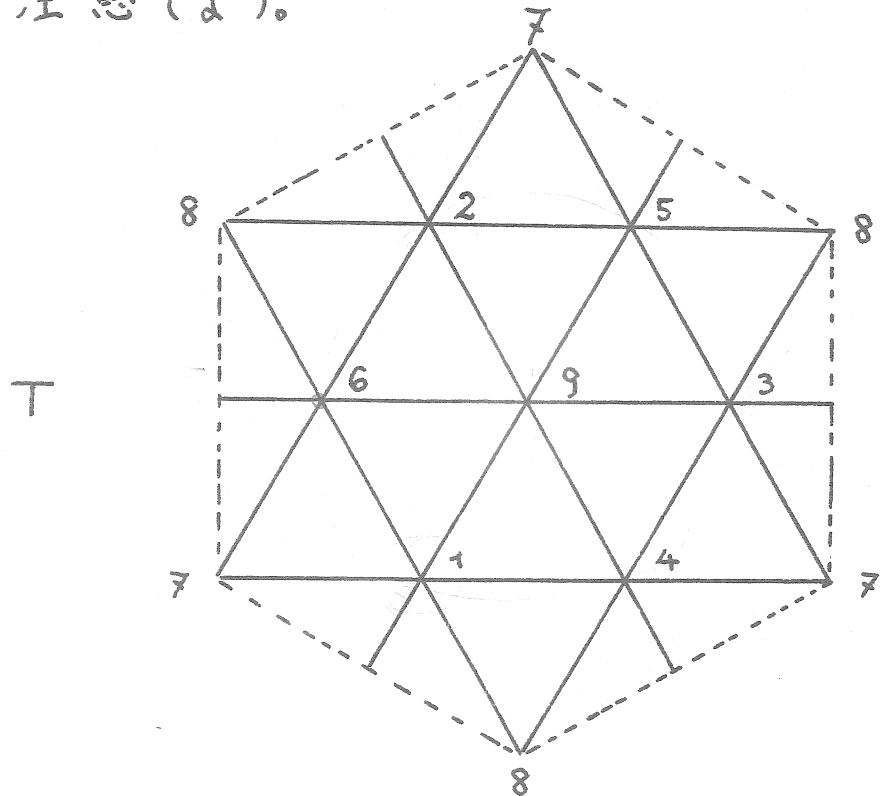


となるものを表している。

## §5 K 内の大切な Torus T

Kühnel 複体 K については言いたいこ  
 とが山程あるのであるが、この誘惑に  
 負けると [MoYo] の二の舞になってしま  
 うのでやめるが、1つだけ大切なことを  
 言っておしまいにしようと思う。

Kの部分複体に18ヶの三角形よりなる以下の様な Torus  $T$  があることに注意しよう。



相對する辺は同一視する。写像

$$\pi: T \rightarrow (a'b'c')$$

は上への18対1写像である。実はこの  $T$  は  $\mathbb{C}P^2$  に住む点  $1, \dots, 9$  に cusps をもつ6次のだ円曲線に homotopic であるという発見から [MoYo] は始まったのである。 — 終 —

# Symplectic 多様体上の群作用について

東北大理 小野 薫

## § 1. Introduction

symplectic 多様体に Lie 群が作用している時、moment map と呼ばれるものがあると好都合である。たとえば  $S^1$  作用のときには perfect Morse function を与え、そのことから Frankel の定理は示される。ここでは、moment map の存在条件、complex line bundle への作用の持ち上げ、同変射影埋込について考え、最後に symplectic diffeomorphism のなす群に compact subgroup が有限群以外にならない様な symplectic 多様体となるための十分条件について考える。

方針としては closed symplectic 多様体の典型例である Kähler 多様体についての事実の analogy をする。

まず symplectic 多様体、moment map の定義の復習から始める。  $M$  を (実)  $2n$  次元多様体とする。

Def.  $M$  上には closed 2-form  $\omega$  で、 $\omega = \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_n$  が至る所消えないものが存在するとき、 $(M, \omega)$  を symplectic 多様体、 $\omega$  を symplectic form と呼ぶ。

Ex 1. (cotangent bundle)

$X$  を多様体とし、 $M = T^*X$  cotangent bundle とする。射影  $\pi: T^*X \rightarrow X$  とすると、 $T^*X$  上には 1-form  $\eta$  が次の様に定義される。

$\eta(V) := p(\pi_* V) \quad \because p \in T^*X, V \in T_p(T^*X)$   
 すると 2-form  $\omega = d\eta$  が定まり、これが symplectic form を与える。

Ex 2. (coadjoint orbit)

$G$  を Lie 群とし、 $\mathfrak{g}$  を  $\mathbb{R}$  の Lie 環、 $\mathfrak{g}^*$  を  $\mathbb{R}$  の dual space とする、このとき  $\mathfrak{g}^* \ni f$  の orbit (coadjoint orbit) には 次の様な symplectic form があふ。

$$\Omega_f(u, v) := \langle f, [\tilde{u}, \tilde{v}] \rangle$$

$\because u, v \in T_p(G \cdot f) \quad \tilde{u}, \tilde{v} \in \mathfrak{g}$  は  $u, v$  の lift, (つまり  $f$  の isotropy  $\in \mathfrak{H}_f$ ,  $\mathbb{R}$  の Lie 環  $\mathfrak{f}_f$  と書くと)

$T_p(G \cdot f) \cong \mathfrak{g} / \mathfrak{f}_f$  であるから、この意味で  $u, v$  は  $\tilde{u}, \tilde{v} \pmod{\mathfrak{f}_f}$  が対応している)  $\langle, \rangle$  は  $\mathfrak{g}^*$  と  $\mathfrak{g}$  の pairing である。closed である  $\Rightarrow$  Jacobi 律

を使えばよい。非退化であることもすぐにわかる。

### Ex 3. (Kähler manifold)

symplectic form と 1, 2 Kähler form をとればよい。

(注意) Darboux の定理により、任意の symplectic 多様体は local には Ex 1 と同型になる。又 closed symplectic 多様体で non-Kähler なものがあるか、(かも単連結なものがあるか) という問題があったが、実際存在することが知られている。(Thurston, McDuff, Cordero Fernandez, Gray, Yamato, Hasegawa, ...)

次に moment map について復習する。

Def. Lie 群  $G$  が  $(M, \omega)$  に  $\omega$  を保つ作用をしているとき、 $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  が moment map であるとは、

1)  $\langle d\mu, X \rangle + i(X^M)\omega = 0 \quad (\forall X \in \mathfrak{g})$

2)  $G$ -equivariant

の 2 条件を満たしていることをいう。上で  $X^M$  と書いたものは、 $X \in \mathfrak{g}$  に対応する  $M$  上の vector field である。

### Ex 1. (cotangent bundle)

$G$  が  $X$  に作用しているとき、 $TX$  への作用が決まり、その dual である  $T^*X$  への作用も決まる。このときこの作用は前出の  $\eta$  を保ち従って symplectic form  $\omega$

を保つ。このとき  $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  を

$\langle \mu, X \rangle := \int (X^M) \eta$  で定義すれば、  
これが moment map を与える。

$M = \mathbb{R}^3$ ,  $G = SO(3) \times \mathbb{R}^3$  (Euclidean motion group) の通常的作用  $\alpha$  のとき、上の  $\mu$  は角運動量, 運動量に対応している。

Ex 2. (coadjoint orbit)

自然な inclusion  $G \cdot f \hookrightarrow \mathfrak{g}^*$  が  $G \curvearrowright G \cdot f$  の moment map を与えることは容易にわかる。

Ex 3. (Kähler manifold, Frankel)

$M$  を compact Kähler 多様体とし、 $S^1$  が holomorphic に作用している。不動点集合  $M^{S^1} \neq \emptyset$  とすれば moment map が存在する。

一般の closed symplectic 多様体についても逆は成立する。即ち  $S^1$  (又は  $T^m$ ) の  $(M, \omega)$  への  $\omega$  を保つ作用に対し、moment map が存在すれば、 $M^{S^1}$  (又は  $M^{T^m}$ )  $\neq \emptyset$ 。

又、semi-simple Lie 群の作用については必ず moment map が存在する。(Marsden-Weinstein) ところが compact Lie 群の作用に対する moment map の



存在については torus 群 について調べればよい。これについては次の事が判かる。

PROP. 1.  $(M, \omega)$  を  $2n$  次元 closed symplectic 多様体とし、 $T^m$  が  $\omega$  を保つ作用しているとする。もしも  $M^{T^m} \neq \emptyset$  かつ  $(*) \quad \int \omega^{n-1} : H^1(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^{2n-1}(M; \mathbb{R})$  であれば、moment map が存在する。

(注意) ① compact Kähler 多様体は  $(*)$  を満たすので、この PROP から Frankel の崩壊の結果は従う。

②  $n=2$  (i.e.  $\dim M=4$ ) のとき  $(*)$  は落とせる。 $n=3$  のとき  $(*)$  を落とすと反例がある。(どちらも McDuff による。)

## § 2. moment map, 作用の lifting, 同変射影埋込

まず  $(\mathbb{C}P^n, \omega_0)$  への linear action に対する moment map と 作用の lifting との関係を見て explicit に書く。(但し  $\omega_0 =$  Fubini-Study metric の Kähler form)

$L \rightarrow \mathbb{C}P^n$  を tautological line bundle とする。

$U(n+1)$  の  $\mathbb{C}P^n$  への linear action は自然に  $L$  に lift されてくる。 $L^*$  の associated principal  $S^1$  bundle を  $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$  と見て、connection on  $S^{2n+1} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}P^n$

を (horizontal subspace = vertical subspace of  $S^{2n+1}$  の直交補空間) とし、定めれば、 $U(n+1)$  の作用はこの connection を保つてゐる。この connection form を  $\alpha$  とする。すると  $\omega_0$  はこの connection の  $\frac{1}{2\pi} \times$  curvature form であり、従つて  $\pi^* \omega_0 = \frac{d\alpha}{2\pi}$  を満たしていることが判る。そして

$$\langle \mu(p), X \rangle := \frac{1}{2\pi} i(X^{S(L)}) \alpha(\tilde{p}) \quad (X \in \mathfrak{u})$$

$$(\text{ここで } \tilde{p} \in S^{2n+1}, p \in \mathbb{C}P^n, \pi(\tilde{p}) = p)$$

とおけば、これは well defined であり、 $\mu$  は moment map を与えることがわかる。計算すると

$$\begin{aligned} \langle \mu(p), X \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle X \tilde{p}, \sqrt{-1} \tilde{p} \rangle_{S^{2n+1}} \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \operatorname{Im}(\tilde{p}^t X \tilde{p}) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} (\tilde{p}^t X \tilde{p}) \end{aligned}$$

(ここで  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S^{2n+1}}$  は  $S^{2n+1}$  の standard metric, 又  $X \in \mathfrak{u}(n+1)$  より、 $\tilde{p}^t X \tilde{p}$  は pure imaginary)

上より一般に次の事実が判かる。

PROP 2  $(M, \omega)$  closed symplectic 多様体とし、Lie 群  $G$  が  $\omega$  を保つて作用してゐるとする。もしも  $\exists L \rightarrow M$

complex line bundle で  $c_1(L)_{\mathbb{R}} = [\omega]$  となるものがあり、しかも  $L$  に  $G$  作用が lift (すなわち) "moment map" が存在する。

又逆、

PROP 3.  $(M, \omega)$  closed symplectic 多様体とする

$[\omega] \in \text{Im}(H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{R}))$  とする。  $\omega$  を保つ  $G$  作用に対し、moment map が存在すれば、

$c_1(L)_{\mathbb{R}} = [\omega]$  となる complex line bundle に対し、

$\exists k \in \mathbb{N}$  があり、  $L^{\otimes k}$  に  $G$  の作用は lift する。

も判かる。

Smooth な作用  
とす

これら 2 つの Proposition は 次の 2 つの事実から基本的には従う。(前者も後者は下の事実 2 つからも示される。)

Fact (Hattori - Yoshida)

$L \rightarrow M$  に  $G$  作用が lift するための必要十分条件は  $c_1(L) \in \text{Im}(H_{\mathbb{Q}}^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{Z}))$  となることである。

Fact (Atiyah - Bott)

$(M, \omega)$  の  $\omega$  を保つ  $G$  作用が moment map を持つための必要十分条件は

$[\omega] \in \text{Im}(H_{\mathbb{Q}}^2(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{R}))$  となることである。

(1) Fact (Hattori-Yoshida) is a topological category  
 with a statement that: smooth lift exists  
 to show it, use another method.

射影埋込については、まず Kähler の時の復習から  
 始める。

Th (Kodaira)

$M$  を Hodge 多様体 (i.e.  $\exists \omega$ : Kähler form on  $M$ ,  
 $[\omega] \in \text{Im}(H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{R}))$ ) とすると、埋込

$\sigma: M \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$  ( $N \in \mathbb{N}$ ) が存在する。

この定理の同変版は Blanchard に依る。

Th (Blanchard)

$M$  を Hodge 多様体とし、連結 Lie 群  $G$  が  $M$  に正則  
 に作用しているとす。もし  $G \rightarrow \text{Aut}(M)$  の微分  
 $\sigma \rightarrow f(M)$  の像が  $f_1 = \{Z: \text{hol. vector field},$   
 $\alpha(Z) = 0 \ (\forall \alpha: \text{hol. 1-form})\}$  に含まれるならば、

$\sigma: M \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$  なる  $G$ -同変な埋込が  
 存在する。

(注意)  $f_1 = \{Z: \text{hol. vector field}, \text{Zero}(Z) \neq \emptyset\}$   
 とするところが知られている。

Th (Kodaira) の symplectic version は、次のとおりである。

Th (Gromov, Tischler)

$(M, \omega)$  を closed symplectic 多様体 とし、

$[\omega] \in \text{Im}(H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{R}))$  とする、すなわち

$\Phi: M \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$  ( $\exists N \in \mathbb{N}$ ) なる  $\Phi^* \omega_0 = \omega$   
となるものが存在する。

次に、この同変版を考える。まずは  $f_1$  に対応するものは何かということになるが、それは前ページ下の注意から  $\{\text{零点をもち } \omega \text{ を保つ vector field}\}$  となると思われる。次にこの条件は (\*) を課せば moment map の存在条件と見做せる。そこでこれよりは少し強い条件 (line bundle への作用に lift する条件) 下でまず考えてみる。

Th 1.  $(M, \omega)$  を closed symplectic 多様体、 $G$  を compact Lie 群とする。更に、 $L \rightarrow M$  complex line bundle なる  $c_1(L)_{\mathbb{R}} = -[\omega]$  となるものがあるとする。

このときもしも  $G$  の  $\omega$  を保つ  $M$  への作用が  $L$  に lift するとすれば

$\Phi: M \hookrightarrow \mathbb{C}P^N$  ( $\exists N \in \mathbb{N}$ ) なる  $G$ -equivariant  
かつ  $\Phi^* \omega_0 = \omega$  となるものが存在する。

Prop 3 を使うことで次も示される。

Th 2.  $(M, \omega)$  は closed symplectic 多様体で

$$[\omega] \in \text{Im}(H^2(M; \mathbb{Z}) \rightarrow H^2(M; \mathbb{R})) \quad \text{かつ}$$

$$\wedge \omega^{n-1}: H^1(M; \mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} H^{2n-1}(M; \mathbb{R}) \quad (2n = \dim M)$$

を満たすものとする。  $G$  (  $G$  compact connected Lie 群 )

$G$  の  $\omega$  を保つ作用に 対し moment map が あれば:

$$\Phi: M \hookrightarrow \mathbb{C}P^N \quad (\exists N \in \mathbb{N}) \quad \text{で } G\text{-equivariant かつ}$$

$$\Phi^* \omega_0 = k \cdot \omega \quad (\exists k \in \mathbb{N}) \quad \text{となるものが存在する。}$$

### Th 1 の証明の Outline

i) 無限次元射影空間への埋込

Gromov, Tischler の 定理から 下の図式を得る。

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{\tilde{\Phi}_0} & L_0 \subset \mathbb{C}P^N \times \mathbb{C}^{N+1} \xrightarrow{P} \mathbb{C}^{N+1} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \quad \because L_0 \rightarrow \mathbb{C}P^N \text{ は} \\ M & \xrightarrow{\Phi_0} & \mathbb{C}P^N \quad \text{tautological line bundle} \end{array}$$

$x \in M$  に対して  $\tilde{x} \in L - M$  で  $\pi(\tilde{x}) = x$  なるものをとけば:  $P \circ i \circ \tilde{\Phi}_0(\tilde{x})$  は  $x$  の homogeneous

coordinate を与える。そのことに注意して

$$\tilde{\Phi}_1: L \longrightarrow \text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}) \text{ を}$$

$$\tilde{\Phi}_1(\tilde{x})(g) := P \circ i \circ \tilde{\Phi}_0(g^{-1}\tilde{x}) \quad (g \in G, \tilde{x} \in L)$$

と定めれば:  $\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1})$  への  $G$  の作用を正則表現

$$(h \cdot \psi)(g) = \psi(h^{-1}g) \quad (h, g \in G, \psi \in \text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}))$$

とすると  $G$ -equivariant  $\tau$ :

$$\tilde{\Phi}_1|_{L-M} : L-M \rightarrow \text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}) - \{0\}$$

は  $\mathbb{C}^* \times G$ -equivariant となる  $\tau$ :

$$\Phi_1 : M \rightarrow \mathbb{P}(\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}))$$

が得られる。

$\therefore \tau: \mathbb{P}(\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}))$  上の symplectic structure  
を  $\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1})$  からの reduction  $\tau$  で定める。(下記)

notation  $dg: G$  上の Haar measure

$B_0: \mathbb{C}^{N+1}$  上の standard symplectic structure

$S(\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}))$ : unit sphere in  $\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1})$

$u, v \in T_p \mathbb{P}(\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}))$

$\tilde{u}, \tilde{v} \in T_p S(\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}))$ ;  $u, v$  の lift

$$\Omega_\infty(u, v) := \int_{\tilde{u}, \tilde{v}} B_0(\tilde{u}, \tilde{v}) dg$$

すると  $\tilde{\Phi}_1^* \Omega_\infty = \omega$  となることは、すぐには判らない。

( $\mathbb{C}P^N$  上の symplectic structure も  $\mathbb{C}^*$  と同様の reduction  
による定義されていることは、すぐには判らない。) )

ii) 有限次元射影空間への埋込

$G$  は compact Lie 群 なるので  $\text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \oplus V_k$   
 と有限次元既約表現  $V_k$  たち に直和分解される。

今  $K$  を十分大きくとれば、

$$\tilde{\Phi}_K : L \xrightarrow{\tilde{\Phi}_K} \text{Map}(G, \mathbb{C}^{N+1}) \rightarrow \bigoplus_{k=-K}^K V_k$$

から

$$\Phi_K : M \hookrightarrow \mathbb{P}\left(\bigoplus_{k=-K}^K V_k\right) \quad (G \text{ equivariant})$$

が作られる。

(か) このままでは  $\Phi_K^* \omega_{\text{can}} = \omega$  とはなっていない。  
 それを修正するためには次の補題を準備する。

Lemma (equivariant version of Moser's theorem)

$M$  を closed な多様体,  $\{\omega_t\}$  を symplectic forms の  
 1-parameter family で  $[\omega_t]$  の de Rham cohomology  
 class は一定であるとす。 compact Lie 群  $G$  が  $M$  に  
 作用していて各  $\omega_t$  を保つとすれば、  $G$ -equivariant  
 diffeomorphism の 1-parameter family  $\phi_t : M \rightarrow M$   
 で  $\phi_t^* \omega_t = \omega_0$  となるものが存在する。

先程の状況で  $K$  を十分大きくとれば

$t \Phi_K^* \omega_{\text{can}} + (1-t)\omega$  は全ての  $t \in [0, 1]$  に対  
 して非退化となるので上の補題から、



$\phi: M \rightarrow M$   $G$ -equivariant diffeomorphism なら

$\phi^* \Phi_k^* \omega_{can} = \omega_0$  となるものがあつることかわかる。

そこで  $\Phi := \Phi_k \circ \phi$  とおけば: これは求めるもの  
がある。 // // //

§3. 自己同型群の compact 部分群の非存在.

symplectic 多様体  $(M, \omega)$  上の関数  $f$  に対し, vector  
field  $X_f$  を  $i(X_f)\omega = df$  なるものと  $L_{X_f}\omega = 0$  と定めると  
 $L_{X_f}\omega = 0$  となるから.

$$C^\infty(M) \longrightarrow \mathcal{X}_\omega(M) := \{X: \text{vector field なら } L_{X_f}\omega = 0 \text{ を満たす}\}$$

という写像が決まり, この kernel は  $\{\text{locally constant 関数}\} \cong H^0(M; \mathbb{R})$  であり,  $\mathcal{X}_\omega(M)$  は無限次元である。これに対応する群即ち  $(M, \omega)$  の自己同型群は "無限次元" である。ここでは  $\text{Aut}(M, \omega)$  の中に非自明な compact 連結部分群の存在について考える。例えば  $(\mathbb{C}P^n, \omega_0)$  の場合は  $U(n+1)/S^1$  ( $S^1$  は center) が含まれている。

Kähler 多様体の時を思い出してみると, 第1 Chern 類  $c_1(M)$  が negative ならば holomorphic vector

field は自明なものに限ることが知られている。この analogy と 12 次の結果を得た。

Th 3.  $(M, \omega)$  を closed symplectic 多様体とし、その第 1 Chern 類  $c_1(M)_{\mathbb{R}} = -[\omega]$  であるとすると、任意の compact 連結 Lie 群  $G$  の  $\omega$  を保つ作用は自明なものに限る。

但し、 $M$  の第 1 Chern 類  $c_1(M)$  は、 $\omega$  の通りである。

$M$  の tangent bundle の構造群は  $Sp(n; \mathbb{R})$  であり、その maximal compact subgroup は  $U(n)$  となる。これには up to homotopy で unique (= almost complex structure) が入る。これに関する第 1 Chern 類を  $c_1(M)$  と書く。

また次の事も示される。

Th 4.  $(M, \omega)$  を closed symplectic 多様体とし、 $c_1(M)_{\mathbb{R}} = 0$  とすると、任意の compact 連結半単純 Lie 群  $G$  の  $\omega$  を保つ作用は自明なものに限る。

Th 5.  $(X, \Omega)$  を Hermitian symmetric domain (と Bergmann 計量と Kähler form) の compact quotient とする。もし closed symplectic 多様体  $(M, \omega)$  が  $f: (M, \omega) \rightarrow (X, \Omega)$  で  $f^*\Omega = \omega$  と  $f$

るものを持つ。任意の compact 連結 Lie 群の  $M$  への作用は自明なものに限る。

Th 3 の証明の Outline. ( $G = S^1$  の時に示せばよい。)

(i)  $(M, \omega)$  に  $G$  が作用している時、 $G$ -不変な almost complex structure  $J$  と  $G$ -不変な Riemann 計量  $g$  をとり、 $\omega(x, y) = g(Jx, y)$  とできる。以下  $J$  をとり、考える。

$$K_M = \bigwedge_{\mathbb{C}}^n T^*M \quad (n = \frac{1}{2} \dim M)$$

とおく。  $c_1(K_M) = -c_1(M) = [\omega]$  である。

$M$  への  $G$  作用は自然に  $K_M$  に lift しているから、§2 の Prop 2 を使えば、moment map  $\mu: M \rightarrow \mathfrak{g}^*$  がある。今  $G = S^1$  ならば  $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}$  とみる。

$\text{Crit}(\mu) = M^{S^1}$  となっていることに注意すれば、 $\mu$  が 最大値, 最小値をとる critical submanifold  $F_{\infty}, F_0$  がとれ、その normal bundle での  $S^1$  作用の weight は 全負, 全正 とそれぞれとれる。  
( $\mu$  が perfect ということを思い出せば  $F_{\infty}, F_0$  は連結である。)

(ii) generic  $p \in M$  をとり、 $\text{grad} \mu$  の trajectory

を考えると、 $F_\infty$  の点  $p_\infty$  と  $F_0$  の点  $p_0$  を結ぶ curve  $C$  が得られる。  $M(p) := \bigcup_{t \in S^1} t(C) \quad (C \subset M)$  を考えれば、 $M(p) \cong S^2$  と見られる。

$K_M|_{p_\infty}$  の  $S^1$  module としての weight  $m_\infty$  は正  
 $K_M|_{p_0}$  の  $S^1$  module としての weight  $m_0$  は負  
 と見られる。

(iii) として Lemma を引用する。

Lemma.  $S^2$  を向き付けられた 2 sphere とし、 $L \rightarrow S^2$  をその上の complex line bundle とする。  $S^1$  が  $S^2$  に "回転で" 作用している。 その 2 つの不動点  $P, Q$  での "回転数" を  $m, -m$  とする。 このとき  $L$  への作用の lift については次が成り立つ。

$$t_p - t_q = m \cdot c_1(L)[S^2]$$

但、 $t_p, t_q$  は  $L_p, L_q$  を  $S^1$ -module と見たときの weight である。

この Lemma を上の  $K_M|_{M(p)} \rightarrow M(p) =$   
 適用すれば、

$$m_0 - m_\infty = l \cdot c_1(K_M)[M(p)]$$

但、 $l$  は  $p$  での isotropy の order  $M(p)$  には almost complex structure から決まる orientation を入れた

いる。すると、(ii) から  $m_0 - m_\infty < 0$ , 一方  
 $c_1(K_H)[M(p)] = \int_{M(p)} \omega > 0$  と  $T_{\mathbb{R}^2}$  が矛盾  
 する。よって非自明  $T_{\mathbb{R}^2}$  作用は  $T_{\mathbb{R}^2}$  ではない。////

Th 4 の証明も同様である。(半単純 Lie 群  
 の作用に対しては moment map が存在することに注意。)

Th 5 の証明は略す。

## References.

M.F. Atiyah and R. Bott, The moment map and equivariant cohomology, *Topology* 23 (1984) 1 ~ 28

T. Frankel, Fixed points and torsions on Kähler manifolds, *Ann. Math.* 70 (1959) 1 ~ 8

A. Hattori and T. Yoshida, Lifting compact group actions in fiber bundles, *Japan. J. Math.* 2 (1976) 13 ~ 25

J. Marsden and A. Weinstein, Reduction of symplectic manifolds with symmetry, *Rep. Math. Phys.* 5 (1974) 121 ~ 130

J. Moser, On the volume element on a manifold, *Trans. A. M. S.* 120 (1965) 286 ~ 294

K. Ono, Equivariant projective imbedding theorem for symplectic manifolds, to appear in *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.*

—, Some remarks on group actions in symplectic geometry, preprint (1987)

D. Tischler, Closed 2-forms and an embedding theorem for symplectic manifolds, *J. Diff. Geom.* 12 (1977) 229 ~ 235

§.1 Prop 1 の注意に 触れ  $T = \text{McDuff}$  の結果. は

D. McDuff, The momentum map for circle actions on symplectic manifolds, (Preliminary version, 1988) にあります.

# Formal Group と Elliptic Cohomology

京大・理 河野 明

序文;  $K$ -理論, コホモロジー理論 等の一般コホモロジー論は, 通常コホモロジーでは解決できないような種々のトポロジーの問題の解決に重要にはたらきをしてきた。とくに一般コホモロジー論  $h^*$  で, 任意の複素ベクトル束  $E \rightarrow B$  に対して Thom 同型

$$h^*(B) \longrightarrow \tilde{h}^*(T(E))$$

をみたす物は, 複素向き付け可能 (complex oriented) なコホモロジーと呼ばれ, 特に重要である (Adams [1], Quillen [8])。 ( $T(E)$  は  $E$  の Thom complex)。このようなコホモロジー理論  $h^*$  について

$$h^*(\mathbb{C}P^\infty) \cong h^*(pt)[[x]]$$

が成立する。さらに  $\mathbb{C}P^\infty$  が複素 line bundle の分類空間であることに注意すると, line bundle のテンソル積の分類写像

$$\mu: \mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty \longrightarrow \mathbb{C}P^\infty$$

は

$$\mu_{\mathbb{R}}^*: \mathbb{R}^*(\mathbb{C}P^\infty) \rightarrow \mathbb{R}^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty)$$

を導く。同型

$$\mathbb{R}^*(\mathbb{C}P^\infty \times \mathbb{C}P^\infty) \cong \mathbb{R}^*(pt) [\langle x_1, x_2 \rangle]$$

に注意するとき  $\mu_{\mathbb{R}}^*(x) = \sum_{i,j} a_{ij} x_1^i x_2^j$  は形式群 (Formal group) に至る。(Adams [1]).

複素コホモロジー、複素 K-理論、通常コホモロジー等はこの例である。とくに次の Quillen の定理は重要である。(  $F^{\mathbb{R}}(x_1, x_2) = \mu_{\mathbb{R}}^*(x)$  とおく )

定理 1 (Quillen [8]). 複素コホモロジー  $MU^*$  について  $(MU^*(pt), F^{MU})$  は universal な形式群と同型である。

もっと幾何学的に  $\mathbb{R}^*$  を complex oriented なコホモロジーとあるとき コホモロジーの自然変換

$$\phi: MU \rightarrow \mathbb{R}$$

で Thom 類を保つ (従って  $\phi^* F^{MU} = F^{\mathbb{R}}$ ) とするものが唯一存在する。この意味で 複素コホモロジーはすべての complex oriented コホモロジーを支配しているわけである。しかし応用上 この形式群を直接使うのはむづかしいのである。



K-理論や、通常コホモロジーの形式群は比較的単純である。実際

$$F^K(x_1, x_2) = x_1 + x_2 + x_1 x_2$$

$$F^H(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

である。形式群  $F(x_1, x_2) \in R[[x_1, x_2]]$  に対して

$l(x) \in R \otimes \mathbb{Q}[[x]]$  で  $l(x) = x + \text{higher}$  かつ

$$l(F(x_1, x_2)) = l(x_1) + l(x_2)$$

をみたすものが存在することが知られている。この  $l(x)$

は一意的であり  $\log^F(x)$  と書かれ logarithm と呼ばれている。 $(\log^F(x) \text{ を } \log^h \text{ と書く})$  実際

$$l(x) = \int_0^x (F_2(t, 0))^{-1} dt$$

である ( $F_2(x_1, x_2) = \partial F(x_1, x_2) / \partial x_2$ )。

さて、球面の安定ホモトピー群への応用上 その  $\alpha$ -族と呼ばれる部分については K-理論で完全にコントロール可能であるが、 $\beta$ -族等の他の類については、K-理論では区別がつかない。一方コボルティズムと考えると、それで直接計算するのは相当複雑である。従って、

$$MU^* \longrightarrow L^* \longrightarrow K^*$$

となるようなよいコホモロジー ( $\beta$ -族をコントロールし計算もあまり複雑でない) をさがすことが代数的

ロジの立場に重要になってくる。この一方向の例が最近  
 Stong - Landweber 等によって定義された Elliptic  
 cohomology とある。

## §1 Elliptic Genus

定義  $R$  可換で単位元を持つ  $\mathbb{Q}$ -代数とするとき  
 ring homomorphism  $\varphi: \Omega_*^U = MU^*(pt) \rightarrow R$   
 を genus と呼ぶ (又は  $\Omega_*^{SO} \rightarrow R$ ) ( $\varphi(1)=1$ )

例  $Td: \Omega_*^U \rightarrow \mathbb{Z}$  (Todd genus)  

$$Td(M) = \left( \prod u_i / (1 - e^{-u_i}) \right) [M]$$
  
 に対し  $C(M) = \prod (1 + u_i)$

この  $Td$  を用いて Conner - Floyd [3] は  

$$K_*(X) \cong \Omega_*^U(X) \otimes_{\Omega_*^U} \mathbb{Z}$$
  
 を示している。

この一般化として elliptic genus が次のように定  
 義される。

定義 (Ochaine [7])  $\varphi: \Omega_*^{SO} \rightarrow \mathbb{R}$  が elliptic genus とは  $\varphi(1) = 1$  で

$$g(x) = \sum \varphi(\mathbb{C}P^{2n}) / 2n+1 x^{2n+1}$$

が elliptic integral

$$g(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{R(t)}}$$

で書けるときに言う。ただし

$$R(t) = 1 - 2\delta t^2 + \varepsilon t^4 \quad (\delta, \varepsilon \in \mathbb{R})$$

注意. 実は  $\Omega_*^U \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q}[[\mathbb{C}P^n] \mid n \geq 1]$  であり, このとき  $\log^{MU}(x) = \sum [\mathbb{C}P^n] / n+1 x^{n+1}$  である。従って  $\varphi$  が cohomology の係数環の対応であれば  $g(x)$  はその形式群の意味の  $\log$  になる。

Euler によって  $g(x)$  が  $\log$  であれば, その形式群は

$$F(x_1, x_2) = \frac{x_1 \sqrt{R(x_2)} + x_2 \sqrt{R(x_1)}}{1 - \varepsilon x_1^2 x_2^2} \quad (*)$$

であたえられる。また対応する cohomology の種々の計算には 数論の成果が利用できる。

Elliptic genus の例

1)  $\delta = \varepsilon = 1$  : signature

2)  $\varepsilon = 0$   $\delta = -\frac{1}{8}$  :  $\hat{A}$ -genus

応用上は  $\text{Im } \varphi$  が比較的小さい場合 (例えば上で  $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \subset \mathbb{Q}$  である) が重要である。

すべての elliptic genus において

$$\delta = \varphi(\mathbb{C}P^2) \quad \varepsilon = \varphi(\mathbb{H}P^2)$$

であり, さらに

$$\varphi(\mathbb{H}P^n) = \begin{cases} \varepsilon^{n/2} & n \text{ even} \\ 0 & n \text{ odd} \end{cases}$$

が知られている (Landweber)。

## §2 Elliptic cohomology

elliptic genus  $\varphi: \Omega_*^{SO} \rightarrow \mathbb{R}$  について  
2つの注意を挙げる。

定理2.  $\text{Im } \varphi \subset \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$

証明.  $\Omega_*^{SO} = \text{MSO}^*(pt)$  は  $\otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  では形式群の  
係数で生成される ( $\text{MSO}^*( ) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}]$  は complex  
oriented). 次に elliptic genus  $\varphi$  から (\*)  
で定義される形式群について その係数が  $\mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$   
はすぐにわかる。すると形式群の対応から定理2が  
得られる。

定理3.  $\Omega_*^{SO} \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][x_4, x_8, x_{12}, \dots]$

の生成元  $x_{4j}$  を

$$x_4 = [\mathbb{C}P^2] \quad x_8 = [\mathbb{H}P^2]$$

でありかつ  $\varphi(x_{4j}) = 0 \quad j \geq 3$  とおけるように  
とることかできる

(くわしい証明は Ochanine [7] にある。)

$$\Delta = \varepsilon(\delta^2 - \varepsilon)^2 \quad (\text{これを discriminant と呼ぶ})$$

とし  $M_* = \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon]$  とおく 定理2を用いる  
とき

定理4.  $X \mapsto MU^*(X) \otimes_{MU^*(pt)} \mathbb{Z}[\frac{1}{2}][\delta, \varepsilon, \Delta^{-1}]$   
は cohomology 理論である。

定理3 からは 次の定理が得られる。

定理5.  $h^*(pt) \cong M_*$ , 形式群が  $(*)$  であらえ  
らる complex oriented cohomology 理論が  
存在する。

定理4の証明には exact functor 定理を用いる。  
また定理5 については Baas Sullivan 構成を用  
いてそこに 島田-柳田 [6] を使う。定理4で構成  
された cohomology もまた complex oriented  
でありその形式群は  $(*)$  とみている。定理4の

構成は canonical であるが,  $\Delta$  で localize する必要はある。一方定理5では  $\Delta$  で localize する必要はないが,  $\alpha_{12}, \alpha_{16}, \dots$  のとり方により種々のものができてしまう。定理5の形の証明には exact functor 定理は使えない。

この cohomology が elliptic cohomology と呼ばれるものでない。  $\beta$  族あたりまでの話はこれで行きようである。

elliptic cohomology の他の応用としては、定理6 (Ochanine)  $8k+4$  次元 Spin 多様体  $M^{8k+4}$  の signature は 16 で割れる等がある。

参考文献

- [1] J. F. Adams; Stable homotopy and generalized cohomology, Univ. Chicago Press, Part II.
- [2]; Lectures on generalized cohomology, Lecture Notes in Math., 99 (1969)
- [3] P. E. Conner - E. E. Floyd; The relation of cobordism to K-theories, Lecture Notes in Math., 28 (1966)
- [4] P. S. Landweber; Elliptic genera: an introductory overview, Preprint
- [5] P. S. Landweber; Elliptic cohomology and modular forms, Preprint
- [6] N. Shimada - N. Yagita; Multiplication in the complex cobordism theory with singularities, Publ. R.I.M.S. Kyoto Univ., 12 (1976), 259-293



[7] S. Ochanine; Sur les genres multiplicatifs définis par des intégrales elliptiques, *Topology* 26 (1987), 143-151.

[8] D. Quillen; Elementary proofs of some results of cobordism theory using Steenrod operations, *Adv. in Math.*, 7 (1971), 29-56

APPLICATIONS OF KNOT THEORY IN  
CHEMISTRY AND MOLECULAR BIOLOGY

De Witt Sumners

Florida State University, Tallahassee, Fla. 32306

INTRODUCTION

Knot theory is the study of ambient isotopy classes of embeddings of graphs in 3-space. Of principal concern to mathematicians is the enumeration and classification of these configurations, concentrating specifically on graphs which are families of circles. Knot theory continues to exhibit a perhaps surprising degree of applicability to considerations involving the physical, chemical and biological properties of macromolecules [11,19,22,17]. Macromolecules are molecules of large molecular weight, such as synthetic polymers (polyethylene) and biopolymers (DNA). One models these macromolecules as molecular graphs in 3-space--the vertices correspond to atoms, and the edges correspond to covalent bonds. While one can think of small bits (a few atoms bonded together) of these molecules as being somewhat

rigid, when one concatenates long strings of these bits, the resulting molecule can be very flexible. These large molecules can present themselves in  $R^3$  in topologically interesting ways, and can change their geometry (and sometimes their internal topology and embedding type) due to external physical, chemical and biological influences. For example, in DNA research, various enzymes (topoisomerases and recombinases) exist which, when reacted with unknotted closed circular DNA, produce enzyme-specific characteristic families of DNA knots and links (called catenanes by biologists and chemists). One studies these experimentally produced characteristic DNA knots and links in order to deduce enzyme mechanism and substrate conformation. This particular application is an interesting mix of knot theory and the statistics of random molecular configurations. This talk will give a brief overview of knot theory and DNA, and will discuss a new topological model (the tangle model) for site-specific recombination. Also, questions on random knotting of circles in  $R^3$  which arise in scientific contexts

will be discussed.

#### SITE-SPECIFIC RECOMBINATION

Duplex DNA consists of two linear backbones of sugar and phosphorus. Attached to each sugar molecule is one of the four bases: A = Adenine, T = Thymine, C = Cytosine, and G = Guanine. A ladder is formed by hydrogen bonding between base pairs, where A binds with T, and C binds with G. In the classical Crick-Watson model for DNA, the ladder is twisted in a right-handed helical fashion, with a relaxed-state pitch of approximately 10.5 base pairs per full helical twist. Duplex DNA occurs naturally in closed circular form, where the rungs of the ladder form a twisted annulus (instead of a twisted Mobius band).

An enzyme which mediates recombination on DNA is called a recombinase. A recombination site for a given recombinase is a short linear segment whose genetic coding is recognized by the enzyme. Site-specific recombination can occur when a pair of sites (on the same or on different molecules) becomes juxtaposed in the presence of the enzyme.

The pair of sites is aligned (brought together), either through enzyme manipulation or random thermal motion (or both), and both sites are then bound by the enzyme. This stage of the recombination reaction is called synapsis, and the complex formed by the DNA substrate together with the bound enzyme is called the synaptic complex. We call the unbound DNA molecule(s) before the recombination takes place the substrate, and after recombination takes place and the molecule is released by the enzyme the product. In a single recombination event, at synapsis the enzyme forms two double-stranded breaks at the sites, and recombines the ends in an enzyme-specific manner. The schematics of a single recombination are shown in Figure 1. In these figures, double-stranded DNA is represented by a single strand, and supercoiling is omitted.

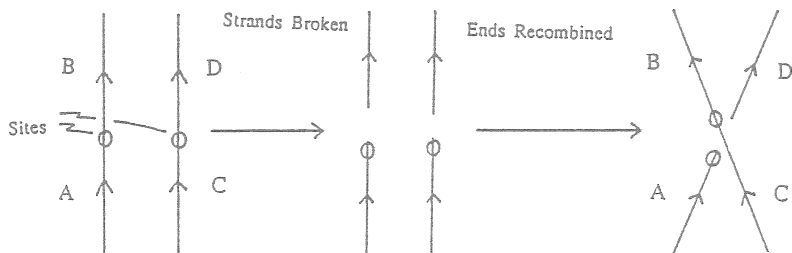


Figure 1: A SINGLE RECOMBINATION EVENT

The process of recombination clearly involves some interesting topological changes in the substrate. In order to trap these topological changes, one chooses to perform experiments on artificial circular DNA substrate. Using cloning techniques, one can synthesize circular duplex DNA molecules which contain two copies of a recombination site. The linear base pair sequence induces a local orientation on each of the recombination sites. The orientation of each of the recombination sites induces an orientation on the ambient circular molecule. If these induced orientations agree, this site configuration is called direct repeats. If the induced orientations of the circular molecule disagree, the site configuration is called inverted repeats. If the substrate is a single circle with direct repeats, the recombination product is then a pair of DNA circles, and can form a DNA link (catenane). This process is shown in Figure 2. If the substrate is a pair of circles with one site each, the product is a single DNA circle, and can form a DNA knot (Figure 2 read in reverse). If the sub-

strate is a single circle with inverted repeats, the product is a single circle, and can form a DNA knot(Figure 3).

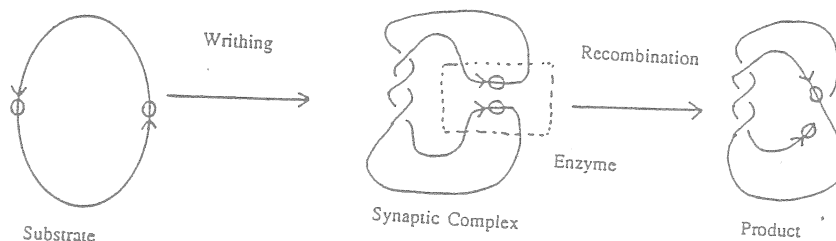


Figure 2: DNA LINK SYNTHESIS VIA RECOMBINATION

The experimental strategy is to exploit knowledge of the topological structure(knot or link type) of the recombination products and knowledge of the topological structure of the substrate to deduce enzyme mechanism and substrate conformation. This has been called the topological approach to enzymology[22 ]. The topological structure(knot or link type) of the substrate is an experimental control variable. The topological structure of the recombination product is an experimental observable. It is this new observation technique (rec A enhanced electron microscopy [9 ] which makes possible the detailed knot-theoretic analysis of reaction products. Rec A is an E

coli protein which binds to DNA. Naked duplex DNA is approximately 20 angstroms in diameter, and rec A coated DNA is approximately 100 angstroms in diameter. This enlarged diameter means that crossovers in DNA electron micrographs can (usually) be unambiguously resolved. In vitro (in the laboratory) experiments usually proceed as follows: Circular substrate is prepared, with all of the substrate molecules representing the same knot type (usually the unknot). The substrate molecules are reacted with a high concentration of purified enzyme, and the reaction products are fractionated according to crossover number by gel electrophoresis. Gel electrophoresis is extremely sensitive to differences in the geometry (supercoiling) and topology (knot type) of circular DNA molecules of identical molecular weight. After gel separation, the molecules undergo platinum shadowing for viewing under the electron microscope. Photographs of the reaction products (Figure 4) are prepared, and frequency distribution of product knot types is calculated.

If one thinks of an enzyme reaction as taking



place in  $S^3$  (instead of  $R^3$ ), and thinks of the enzyme as a  $B^3$ , the synaptic complex is naturally divided by the boundary of the enzyme ball (the enzyme  $S^2$ ) into two complementary 2-string tangles. A 2-string tangle is a configuration of two strings (arcs) properly embedded in  $B^3$ . We view all tangles as having the same boundary, and two tangles are isomorphic if one configuration can be ambient isotoped to the other, keeping the boundary fixed [3,10]. In the synaptic complex, we call the tangle inside the enzyme ball the site tangle (T), and the tangle outside the enzyme ball the substrate tangle (S). Site-specific recombination can be viewed as tangle surgery performed on the synaptic complex by the enzyme. The enzyme removes the site tangle T, replacing it with the recombinant tangle (R). Figure 3 shows the synaptic complex just before and just after recombination; each state of the synaptic complex gives rise to a tangle equation: the substrate equation:  $N(S+T) = \text{Substrate}$ , and the product equation:  $N(S+R) = \text{Product}$ . We wish to solve the substrate and product equations for the recombi-

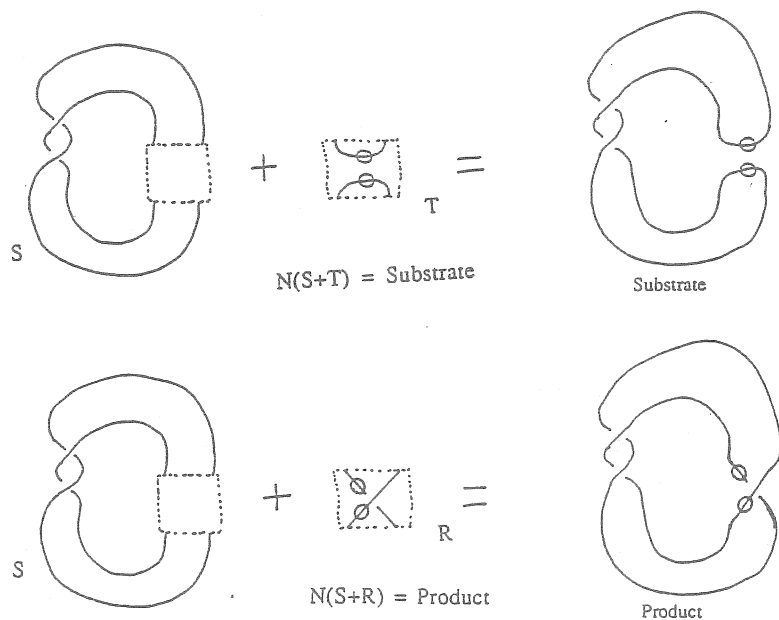


Figure 3: THE SUBSTRATE AND PRODUCT EQUATIONS

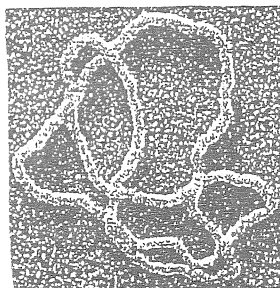


Figure 4: THE DNA KNOT  $6_2$  (From [21 ])

nation variables  $S, T,$  and  $R.$  This job is greatly simplified by realizing that most recombination products are 4-plats(2-bridge)[ 1 ], and that a great deal can be said about the factorization of 4-plats into tangle summands. The summands of interest are rational tangles[ 3 ]. A tangle is rational if it is homeomorphic(moving the boundary)

to the trivial tangle. Rational tangles are formed from the trivial tangle by twisting pairs of strands about each other, and look a great deal like electron micrographs of DNA. In the analysis of DNA experiments, one can use 3-manifold theory to prove that the tangles of biological interest are indeed rational tangles. The main ingredients of this argument are the cyclic surgery theorem [ 4 ], and the theory of Dehn Surgery on Seifert Fiber Spaces [8,12 ]. Once the tangles are known to be rational tangles, the analysis becomes a matter of solving the equations posed by experiment. One can develop a calculus in the classifying symbols for rational tangles and 4-plats (the rational tangle calculus), and use this calculus to solve the equations. The full details of this analysis appear in [ 6 ].

#### RANDOM KNOTS

Chemists have long been interested in the synthesis of molecules with exotic geometries; in particular, the synthesis of knots and links [20, 13,5,19 ]. One can consider such a synthesis by means of a cyclization reaction (random closing)

of linear chain molecules[7,20 ]. Let  $N$  denote the number of repeating units in such a linear chain.  $N$  may represent the number of monomers, or the number of groups of monomers, where a group of monomers(not necessarily an integral number) is the equivalent statistical length for the substance in question.

In mathematical terms, a randomly closed chain of length  $N$  is a random piecewise-linear embedding of  $S^1$ , where all the 1-simplexes have the same length. In order to make predictions about the yield of such a cyclization reaction(and for many other reasons), one needs answers to the following questions:

Q1: WHAT IS THE DISTRIBUTION OF PRIME KNOT TYPES (as a function of  $N$ ) WHICH ONE WILL SEE IN THE RANDOM CLOSING OF A CHAIN OF LENGTH  $N$ ?

Q2: WHAT IS THE PROBABILITY THAT A RANDOMLY CLOSED CHAIN OF LENGTH  $N$  IS KNOTTED?

In this context, we have the FRISCH-WASSERMAN-DELBRUCK CONJECTURE [7,5 ]:

THE KNOT PROBABILITY TENDS TO ONE AS THE LENGTH GOES TO INFINITY.

Various Monte Carlo samplings of the knot configuration space have provided partial answers to questions 1 and 2 [18,2,11]. Recently, the Frisch-Wasserman-Delbruck conjecture has been solved for the case of self-avoiding-walks (SAW) on the cubical lattice in  $R^3$  [14]. A discussion of this proof will be given.

#### REFERENCES

- [ 1] G. Burde, H. Zieschang, Knots, de Gruyter (1985).
- [ 2] J. des Cloizeaux, M.L. Mehta, J. de Physique 40(1979), 665.
- [ 3] J. Conway, On enumeration of knots and links and some of their related properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Proc. Conf. Oxford 1967, Pergamon(1967), 329-358.
- [ 4] M.C. Culler, C.M. Gordon, J. Leucke, P.B. Shalen, Dehn surgery on knots, Ann. of Math 125(1987), 237-300.
- [ 5] M. Delbruck, in Mathematical Problems in Biological Sciences, Proc. Symp. Appl. Math. 14(1962), 55.

- [ 6] C. Ernst, D.W. Sumners, A calculus for rational tangles:applications to DNA recombination, preprint(Florida State University) (1988).
- [ 7] H.L. Frisch, E. Wasserman, J. Am. Chem. Soc. 83(1961), 3789.
- [ 8] W. Heil, Elementary surgery of Seifert fiber spaces, Yokohama Math. J. 22(1974), 135-139.
- [ 9] M.A. Krasnow, A. Stasiak, S.J. Spengler, F. Dean, T. Koller, N.R. Cozzarelli, Determination of the absolute handedness of knots and catenanes of DNA, Nature 304(1983), 559-560.
- [10] W.B.R. Lickorish, Prime knots and tangles, Trans. A.M.S. 267(1981), 321-332.
- [11] J.P.J. Michels, F.W. Wiegel, Probability of knots in a polymer ring, Phys. Letts. 90A (1982), 381-384.
- [12] L. Moser, Elementary surgery along a torus knot, Pac. J. Math. 38(1971), 737-745.
- [13] G. Schill, Catenanes, Rotaxanes and Knots, Academic Press(1971).

- [14] D.W. Sumners, S.G. Whittington, Knots in self-avoiding walks, J. Phys. A. (1988), (to appear).
- [15] D.W. Sumners, Knots, macromolecules and chemical dynamics, in Graph Theory and Topology in Chemistry, Elsevier(1987), 3-22.
- [16] D.W. Sumners, The knot theory of molecules, J. Math. Chem. 1(1987), 1-14.
- [17] D.W. Sumners, The role of knot theory in DNA research, in Geometry and Topology, Marcel Dekker(1987), 297-318.
- [18] A.V. Vologodskii, A.V. Lukashin, M.D. Frank-Kamenetskii, V.V. Anshelevich, The knot problem in the statistical mechanics of polymer chains, Sov. Phys. JETP 39(1974), 1059-1063.
- [19] D. Walba, Topological Stereochemistry, Tetrahedron 41(1985), 3161-3212.
- [20] E. Wasserman, Chemical topology, Scientific American 207(1962), 94-102.

- 
- [21] S.A. Wasserman, J.M. Dungan, N.R. Cozzarelli,  
Discovery of a predicted knot substantiates  
a model for site-specific recombination,  
Science 229(1985), 171-174.
- [22] S.A. Wasserman, N.R. Cozzarelli, Biochemical  
topology:applications to DNA recombination  
and replication, Science 232(1986), 951-960.



## モノポールの幾何学

筑波大 数学系 伊藤光弘

序 4次元 Differential topology にインスタントン理論が  
応用され大きな成果をおさめて久しい。次元を一つ下げた  
3次元 Differential topology に対してインスタントン(instanton)に  
対応するものはあるだろうかと考えるのは自然である。モノ  
ポール(monopole)といわれるものがそれである。

4次元 instanton は Yang-Mills 物理理論にその由来を  
求めることができる。それは  $\mathbb{R}^4$  上の理論であるが、 $\mathbb{R}^3$  上  
での gauge 理論もすでに Yang-Mills-Higgs 理論, magnetic  
monopole 理論という形でできあがっている ([9], [10])。  
さらには 電磁 Maxwell 方程式の双対化を意図した Dirac  
の論文まで遡ることができる ([5])。

さて (magnetic) monopole の数学的理論づけは 4次元  
instanton 理論とほとんど同時並行的に進められた(例えば  
[12], [22], [6] などの論文参照)。それは主に Euclid 3-  
空間  $\mathbb{R}^3$  上での monopole の理論的解明であったが、最  
近これを発展させ、 $\mathbb{R}^3$  を含む漸近的平坦, 開 3-多様体  
上の monopole 理論が生まれつつある ([7], [8])。3次  
元 Differential topology にこの理論がどう結びつけられてい

くかは今後に残されるが、本講演では

§1  $\mathbb{R}^3$  上の monopole, §2 monopole と instanton,  
§3 monopole の moduli 空間, §4 開 3-多様体上の  
monopole

という順序で話を進める。

monopole に関する文献としては [19], [14], [15], [13], [21]  
などが基本的である。[2] の終章は monopole 理論の  
数学的歴史経過がまとまっている。

### §1 $\mathbb{R}^3$ 上の monopole

$\mathbb{R}^3$ , 3次元 Euclid 空間とし,  $g_0 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = (dx)^2 +$   
 $(dy)^2 + (dz)^2$ , Euclid 計量とする。

$P \rightarrow \mathbb{R}^3$ ;  $\mathbb{R}^3$  上の  $SU(2)$ -主バンドル,  $ad(P) = P \times_{Ad} \mathfrak{su}(2)$ ,  
 $P$  に同伴した随伴バンドルとする。  $\mathbb{R}^3$  上ではこれらのバンドルは  
直積バンドルと考えてよい。

$\mathfrak{su}(2)$ -値 1-形式  $A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$ ,  $A_i; \mathbb{R}^3 \xrightarrow{C^\infty}$   
 $\mathfrak{su}(2)$ , を  $P$  上の 接続 (gauge potential) といい,  $ad(P)$  の  
切断  $\Phi; \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathfrak{su}(2)$  を Higgs 場 (Higgs field) という。

接続  $A$  を用いて,  $\Phi$  の 共変微分 が定義される;

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \nabla_A \Phi &= \sum_i \nabla_i \Phi dx^i, \\ \nabla_i \Phi &= \frac{\partial}{\partial x^i} \Phi + [A_i, \Phi], \quad 1 \leq i \leq 3 \end{aligned}$$

$\nabla_A \Phi \in \Omega^1(\text{ad}(P))$ 。

接続  $A$  の 曲率 (curvature, gauge field)  $F_A$  を

$$F_A = \frac{1}{2} \sum_{i,j} F_{ij} dx^i \wedge dx^j,$$

(1.2)

$$F_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial x^j} A_i + [A_i, A_j] \quad 1 \leq i, j \leq 3$$

で定義する ( $F_A \in \Omega^2(\text{ad}(P))$ )。

Higgs 場  $\Phi$  と 接続  $A$  の 組  $c = (\Phi, A)$  を コンフィギュレーション (configuration) という。

定義 1.1 configuration に関する 汎関数 (Yang-Mills-Higgs 汎関数)  $a$  を考える;

$$a; \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(1.3) \quad a(c) = \int_{\mathbb{R}^3} (|F_A|^2 + |\nabla_A \Phi|^2) d^3x,$$

ただし, configuration の空間  $\mathcal{C}$  は

$$\mathcal{C} = \{ c = (\Phi, A); \Phi, A \text{ は } C^\infty, a(c) < +\infty \}$$

とする。 二乗ノルム  $|F_A|^2$ ,  $|\nabla_A \Phi|^2$  は  $\mathfrak{su}(2)$  の不変内積  $(X, Y) = -\frac{1}{2} \text{Tr} XY$  と  $\mathbb{R}^3$  の計量  $g_0$  を用いて定義されたもの。

定義 1.2  $a$  の停留点を Yang-Mills-Higgs 場 という。

$a$  の Euler-Lagrange 方程式は

$$(1.4) \quad \sum_j \nabla_j F_{ji} = [\Phi, \nabla_i \Phi] \quad i=1,2,3$$

$$\sum_j \nabla_j \nabla_j \Phi = 0.$$

座標を用いなければ”

$$(1.4') \quad d_A(*F_A) + *[\Phi, \nabla_A \Phi] = 0,$$

$$d_A(*\nabla_A \Phi) = 0 \quad (*: \Omega^p \rightarrow \Omega^{3-p} \text{ 星作用素})$$

ここに  $d_A: \Omega^p(\text{ad}(P)) \rightarrow \Omega^{p+1}(\text{ad}(P))$  は 共変外微分 分で

$$\theta = \frac{1}{p!} \sum \theta_{i_1 \dots i_p} dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

に対して

$$d_A \theta = \frac{1}{p!} \sum_j \sum \nabla_j \theta_{i_1 \dots i_p} dx^j \wedge dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}$$

で定まる。  $\Omega^0(\text{ad}(P))$  上  $d_A = \nabla_A$  である。

もちろん Yang-Mills-Higgs 場は E.-L. 方程式の解。

カッコ積  $[\cdot, \cdot]$  と外積  $\wedge$  から自然な写像  $[\cdot, \cdot]: \Omega^p(\text{ad}(P)) \times \Omega^q(\text{ad}(P)) \rightarrow \Omega^{p+q}(\text{ad}(P))$ ,  $[\varphi \wedge \psi]$  が定まる。このとき次の公式が成立する;

$$(1.5) \quad d_A d_A \varphi = [F_A \wedge \varphi], \quad \varphi \in \Omega^p(\text{ad}(P)) \quad (\text{Ricci公式})$$

$$(1.6) \quad d_A F_A = 0 \quad (\text{Bianchiの恒等式})$$

$\text{Ad}(P) = P \times_{\text{共役}} \text{SU}(2)$  はファイバーが  $\text{SU}(2)$  の  $P$  に同伴したファイバーバンドル。切断  $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \text{Ad}(P)$  を、 $P$  の ゲージ変換 という。ゲージ変換全体は群となる。これを  $\mathcal{G}$  であらわす。

ゲージ変換は  $\Omega^p(\text{ad}(E))$  に作用する;

$$(1.7) \quad g(\phi) = g^{-1} \cdot \phi \cdot g, \quad \phi \in \Omega^p(\text{ad}(E)), \quad g \in \mathcal{G}.$$

configuration  $c = (\Phi, A)$  にも次のように作用する;

$$(1.8) \quad g(c) = (g(\Phi), g(A)),$$

$$g(\Phi) = g^{-1} \Phi g, \quad g(A) = g^{-1} dg + g^{-1} A g$$

次が成立;

$$(1.9) \quad \nabla_{g(A)} g(\Phi) = g(\nabla_A \Phi),$$

$$F_{g(A)} = g(F_A).$$

$\mathfrak{su}(2)$  の内積  $(\cdot, \cdot)$  が随伴不変なので, ゲージ変換は各点ごとの内積, したがって大域的内積 ( $L_2$ -内積) を不変にする;

$$(1.10) \quad (g(\phi), g(\psi))(x) = (\phi, \psi)(x), \quad x \in \mathbb{R}^3$$

$$a(g(c)) = a(c), \quad c \in \mathcal{C}, \quad g \in \mathcal{G}$$

したがって次のことがいえる;

命題 1.3 Yang-Mills-Higgs 場  $c$  に対して,  $g(c)$  もまた Yang-Mills-Higgs 場である,  $\forall g \in \mathcal{G}$ .

定義 1.4 configuration  $c$  に関する 1 階微分方程式

$$(1.11) \quad \nabla_A \Phi = *F_A \quad (\text{または } \nabla_A \Phi = -*F_A)$$

を Bogomol'nyi 方程式 といい; 方程式の解を (magnetic) monopole といい。

命題 1.5 monopole は Yang-Mills-Higgs 場である。

証明. Ricci の公式, Bianchi の恒等式 (1.5), (1.6) 及び  $*^2 = \text{id}$  を用いる. (1.4) の \*1 式;

$$\begin{aligned} d_A(*F_A) + *[\Phi, \nabla_A \Phi] &= d_A(\nabla_A \Phi) + *[\Phi, \nabla_A \Phi] \\ &= [F_A, \Phi] + [\Phi, *\nabla_A \Phi] = [F_A - *\nabla_A \Phi, \Phi] = 0 \\ *2 \text{ 式 } d_A(*\nabla_A \Phi) &= d_A F_A = 0. \end{aligned}$$

漸近的条件 をみたす configuration のみ考える;

$$(1.12) \quad \mathcal{C} = \left\{ c = (\Phi, A); c \text{ は } C^\infty, \rho(c) < +\infty, \right. \\ \left. \lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{|x| \geq R} \|\Phi\| = 0 \right\}.$$

任意の  $c \in \mathcal{C}$  に対して, 2-球面  $S_R^2 = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = R\}$  ( $R$ : 十分大きい) 上の写像  $|\Phi|^2: S_R^2 \rightarrow S^2 = \{X \in \mathfrak{su}(2); |X| = 1\} \subset \mathfrak{su}(2)$  が定義される。その写像度数は  $R$  に依存しない整数である。これを  $c$  の monopole charge (monopole number) といい。

$\mathcal{C}_k = \{ c \in \mathcal{C} ; c \text{ の monopole charge} = k \}$  とおく。  
 次が成立する ([3], [11])。

定理 1.6 (i)  $\mathcal{C} = \coprod_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{C}_k$ , 各  $\mathcal{C}_k$  は弧状連結,

(ii) (1.13)  $k = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} (F_A, *D_A \Phi) d^3x, c \in \mathcal{C}_k$

(iii) (1.14)  $A(c) = \int_{\mathbb{R}^3} |F_A - *D_A \Phi|^2 + 8\pi k \geq 8\pi k,$

$c \in \mathcal{C}_k$  ( $k \geq 0$ )。等号 "=" 成立  $\Leftrightarrow$

$c$  は monopole

注 ① (iii) より monopole (charge  $k$  の) は  $\mathcal{C}_k$  上の Yang-Mills-Higgs 汎関数  $A$  の最小停留点を特徴づける。

②  $k < 0$  の場合

$$A(c) = \int_{\mathbb{R}^3} |F_A + *D_A \Phi|^2 + 8\pi(-k), c \in \mathcal{C}_k$$

③  $c$ : monopole charge 0 の monopole  $\Leftrightarrow A(c) = 0$

$\Leftrightarrow A$ : 平坦 ( $F_A = 0$ ),  $\Phi$ : 平行 ( $D_A \Phi = 0$ ) かつ  $|\Phi| = 1$ 。

monopole charge  $\pm 1$  の monopole の具体的表示を最後に述べよう。具体的表示をみいだした人たちの名前をとって

Prasad-Sommerfield (PS) monopole 解 (あるいは BPS monopole 解) といわれている ([20], [14])。

$r = |x|$ ,  $\frac{\partial}{\partial r} = \frac{1}{r}(x^1, x^2, x^3)$  とおく。  $e_1 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_1$ ,  
 $e_2 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_2$ ,  $e_3 = \frac{\sqrt{-1}}{2}\sigma_3$  とおく ( $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma_2 = \begin{pmatrix} i & -i \\ -i & i \end{pmatrix}$ ,  
 $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$  は Pauli 行列)。  $\{e_1, e_2, e_3\}$  は  $\mathfrak{su}(2)$  の  
 基底となる。形式的に  $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ ,  $dx = (dx^1, dx^2, dx^3)$   
 とおく。次で定義される  $(\Phi, A)$  は charge  $\pm 1$  の monopole  
 である；

$$(1.15) \quad \begin{aligned} \Phi(x) &= \mp \left( \frac{1}{\tanh r} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathcal{E} \right) \\ A(x) &= \left( \frac{1}{\sinh r} - \frac{1}{r} \right) \left( \frac{\partial}{\partial r} \times \mathcal{E} \right) \cdot dx \end{aligned}$$

$\left( \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathcal{E}, \frac{\partial}{\partial r} \times \mathcal{E} \right)$  は形式的内積, 形式的ベクトル積とあそぶ。

PS monopole 解  $(\Phi, A)$  は原点中心の回転に関して不変  
 である。

## §2 monopole と instanton

$\mathbb{R}^4$  上の instanton が  $\mathbb{R}^3$ -monopole に対応している。

$\mathbb{R}^4$  上の  $SU(2)$ -主バンドル上の接続  $A$  に対して汎関数  
 (Yang-Mills 汎関数)  $\mathcal{A}(A) = \int_{\mathbb{R}^4} |F_A|^2 d^4x$  が定義される。

Euler-Lagrange 方程式は

$$(2.1) \quad d_A(*F_A) = 0.$$

この方程式の解を Yang-Mills 接続 という。もちろん



ゲージ変換も定義され、Yang-Mills 接続全体はゲージ変換で  
不変である。

定義 2.1 接続  $A$  は

$$(2.2) \quad *F_A = F_A \quad (\text{または } *F_A = -F_A)$$

をみたすとき 自己双対接続 (instanton) (あるいは 反自己双  
対接続 (anti-instanton)) といい。

Bianchi の恒等式より instanton (anti-instanton) は  
Yang-Mills 接続である。

$\mathbb{R}^3$  上の Yang-Mills-Higgs 場の性質、様相と  $\mathbb{R}^4$  上の  
Yang-Mills 接続のそれらには共通性が認められる ([14])。

$\mathbb{R}^3$  上の Yang-Mills-Higgs 場

monopole charge

$$Q(C) \cong 8\pi |k|$$

Bogomol'nyi 方程式

monopole

(B)PS monopole 解

$\mathbb{R}^4$  上の Yang-Mills 接続

instanton 数

$$Q(A) \cong 8\pi^2 |k|$$

自己双対 Yang-Mills 方程式

instanton

BPS T instanton 解

次の定理は 3次元 Yang-Mills-Higgs 場と 4次元 Yang-Mills 接続の間の関係を直接表現するものとして、よく知られた定理である。

定理 2.2 ([18])  $\mathbb{R}^4$  の座標を  $(x^0, x^1, x^2, x^3)$  とおく。

(i)  $\mathbb{R}^4$  上の接続  $A$  が  $x^0$  方向の平行移動で不変とする (i.e.,  $\frac{\partial A}{\partial x^0} = 0$ )。すると  $c = (\Phi, A)$ ,  $\Phi = A_0$ ,  $A = A_1 dx^1 + A_2 dx^2 + A_3 dx^3$  は  $\mathbb{R}^3$  上の configuration を与え,  $Q(c) = Q(A)$  である。

(ii) さらに  $A$  が Yang-Mills 接続ならば  $c$  は Yang-Mills-Higgs 場, (iii)  $A$  がさらに instanton ならば  $c$  は monopole である。

証明  $F_{ij} = \frac{\partial}{\partial x^i} A_j - \frac{\partial}{\partial x^j} A_i + [A_i, A_j]$  において  $i=0$  とおく。  $F_{0j} = -\frac{\partial A_0}{\partial x^j} + [A_0, A_j] = -\nabla_j \Phi$ ,  $j=1, 2, 3$ 。

よって  $(F_A, F_A) = \sum_i (F_{0i}, F_{0i}) + \sum_{0 < i < j} (F_{ij}, F_{ij})$   
 $= (\nabla_A \Phi, \nabla_A \Phi) + (F_A, F_A)$ , したがって  $Q(c) = Q(A)$ 。

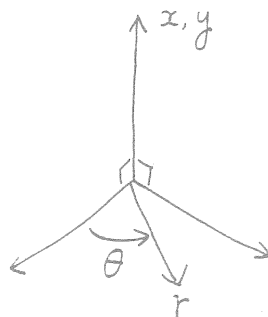
(ii), (iii) も同様に示される。

注. Yang-Mills 接続, instanton の定義は共形的不変である。残念ながら (?) Yang-Mills-Higgs 場の方はそう

なっていない。 instanton の共形不変性を利用して、双曲的 3-空間上での monopole を議論することができる ([1])。  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}^2$  と分解する。左側の平面  $\mathbb{R}^2$  の座標は  $(x, y)$  とし、あとのものは極座標  $(r, \theta)$  を用いる。 Euclid 計量は

$$(2.3) \quad dx^2 + dy^2 + dr^2 + r^2 d\theta^2$$

$$= r^2 \left\{ d\theta^2 + \frac{1}{r^2} (dx^2 + dy^2 + dr^2) \right\}$$



となり、  $S^1 \times H_+^3$  上の標準計量に共形的である。したがって  $\theta$ -変数に関して不変な Yang-Mills 接続 (instanton)  $A$  が与えられると、  $\Phi = \frac{\partial}{\partial \theta} \perp A$ ,  $\mathcal{A} = A - \Phi d\theta$  からなる configuration  $C = (\Phi, A)$  は双曲的 3-空間  $H_+^3$  上の Yang-Mills-Higgs 場 (monopole) となる。

### §3 monopole の moduli 空間

monopole charge  $k$  の  $\mathbb{R}^3$  上の  $SU(2)$  monopole 全体をゲージ変換群  $\mathcal{G}$  で割った空間, monopole の moduli 空間  $M_k$  を考える。すなわち

Bogomol'nyi 方程式 (1.11) の linearization は

$$(3.4) \quad d_A a = * [a, \Xi] + * \nabla_A \varphi, \quad (\varphi, a) \in T_c \mathcal{L}_k$$

これより次の系列は複体となる;

$$(3.5) \quad 0 \longrightarrow \Omega^0(\text{ad}(P)) \xrightarrow{\mathcal{D}^0} (\Omega^0 \oplus \Omega^1)(\text{ad}(P)) \\ \xrightarrow{\mathcal{D}^1} \Omega^2(\text{ad}(P)) \longrightarrow 0,$$

$$\mathcal{D}^0(\varphi) = ([\Xi, \varphi], \nabla_A \varphi),$$

$$\mathcal{D}^1(\varphi, a) = d_A a - * [a, \Xi] - * \nabla_A \varphi.$$

moduli 空間の接空間  $T_{[c]} M_k$ ,  $[c] \in M_k$  は  $\text{Ker } \mathcal{D}^{0*} \cap \text{Ker } \mathcal{D}^1$  と同一視される ( $\mathcal{D}^{0*}(\varphi, a) = [\varphi, \Xi] + \nabla_A^* a$ ).

定理 3.2 ([22], [2]) (i)  $\dim \text{Ker } \mathcal{D}^{0*} \cap \text{Ker } \mathcal{D}^1 = 4k$ , (ii)  $\text{Ker } \mathcal{D}^{0*} \cap \text{Ker } \mathcal{D}^1$ ,  $\mathcal{L}$  は  $M_k$  の各接ベクトル空間は左 H ベクトル空間の構造をもつ。

証明 (i) Taubes [22], IX 参照。  $\mathcal{D} = \begin{pmatrix} \mathcal{D}^0 \\ \mathcal{D}^1 \end{pmatrix}$ ;  $(\Omega^0 \oplus \Omega^1)(\text{ad}(P)) \longrightarrow (\Omega^0 \oplus \Omega^2)(\text{ad}(P))$  は Fredholm 作用素であることに注意 ([17]).

### 定義 3.1

$$(3.1) \quad M_k = \left\{ c = (\mathbb{E}, A) \in \mathcal{C}_k ; \begin{array}{l} F_A = * \nabla_A \mathbb{E} \\ k(c) = k \end{array} \right\} / \mathcal{G}$$

を monopole charge  $k$  の monopole の moduli 空間 とする。

$M_k$  については いろいろ面白い性質がみいだされている。  
それらをかいつまんで述べていこう。

$\mathcal{C}_k$  の接空間は

$$T_c \mathcal{C}_k = \{ (\varphi, a) \in (\Omega^0 \oplus \Omega^1)(\text{ad}(P)) \}.$$

ゲージ群  $\mathcal{G}$  の Lie 環は  $\Omega^0(\text{ad}(P))$  である。 support コンパクトなもの全体  $\Omega^0(\text{ad}(P))$  は support コンパクトなものからなる群  $\mathcal{G}_0$  の Lie 環である。  $\Omega^0(\text{ad}(P))$  に関して 無限小軌道全体  $\mathcal{U}_c$  は

$$(3.2) \quad \mathcal{U}_c = \{ ([\mathbb{E}, \varphi], \nabla_A \varphi) ; \varphi \in \Omega^0(\text{ad}(P)) \}.$$

$$(3.3) \quad \mathcal{H}_c = \{ (\varphi, a) \in T_c \mathcal{C}_k ; [\varphi, \mathbb{E}] + \nabla_A^* a = 0 \}$$

とおく。  $\mathcal{H}_c$  は 無限小軌道に直交する方向 (スライス) を与える。

(ii) 対応  $(\psi, a = \alpha dx + \beta dy + \gamma dz) \longleftrightarrow \psi + \alpha I + \beta J + \gamma K$  により  $(\Lambda^0 \oplus \Lambda^1) \otimes \mathfrak{su}(2)$  は自然に左  $\mathbb{H}$ - $\Lambda^*$  空間  $\mathbb{H} \otimes \mathfrak{su}(2)$  の構造をもつ。このとき  $(\psi, a) \in \text{Ker}(\mathcal{D}^*, \mathcal{D}')$  に対して容易に  $I(\psi, a), J(\psi, a), K(\psi, a) \in \text{Ker}(\mathcal{D}^*, \mathcal{D}')$  が示される ([22] を参照)

注 monopole  $c = (\Phi, A)$  に対して  $(0, \nabla_A \Phi) \in \text{Ker} \mathcal{D}^* \cap \text{Ker} \mathcal{D}'$ 。  $\Phi$  を無限小ゲージ変換とするゲージ変換  $\exp t\Phi$ ,  $t \in \mathbb{R}$  は support コンパクトで  $\lim_{t \rightarrow 0} |\Phi| \rightarrow 1$  にもかかわらず  $\exp t\Phi$  によるゲージ軌道はモジュライ空間  $M_k$  内の path を定める。

$$L_2\text{-内積} \quad \langle (\varphi, a), (\varphi', a') \rangle = \int_{\mathbb{R}^3} \{ (\varphi, \varphi') + (a, a') \} dx^3,$$

$(\varphi, a), (\varphi', a') \in T_c \mathcal{C}_k$  は gauge 不変であり、自然に  $M_k$  の計量を定める。

定理 3.3 ([2]) (i)  $M_k$  の自然な計量は完備である。  
(ii) さらにそれは四元数構造  $I, J, K$  に関して hyperkähler 構造を与える。

instanton の場合と全く同様に, weakly

compactness theorem が成立し ( Prop 3.8, Lemma 3.9 [2] ),  $M_k$  の漸近的領域は  $M_1$  の  $n$  個の直積としてあらわされる。これは charge 1 の monopole  $k=1$  を適当な距離をおいて重ねあわせる (superposition) できることに対応。計量も漸近的平坦となることが知られている。

- 1-monopole の moduli 空間  $M_1$  は  $M_1 = \mathbb{R}^3 \times S^1$ ,  
2-monopole の moduli 空間  $M_2$  については [23], [13], [9], [2] など参照。

#### §4. 開 3-多様体上の monopole.

$\mathbb{R}^3$  上の monopole 理論を用いて,  $\mathbb{R}^3$  とコンパクト 3-多様体  $M$  の連結和  $\mathbb{R}^3 \# M$  上の monopole を考えることができる。実際 Andreas Floer は最近, Yang-Mills-Higgs 汎関数  $\mathcal{A}$  の密度関数の集中点が  $M$  から十分離れていれば, monopole の moduli 空間は  $4k-1$  次元  $C^\infty$  多様体であり,  $M$  の homology と  $\mathbb{R}^3$  上の monopole の moduli 空間によってあらわされることを示した ([8])。

定義 4.1 ([8]) 3次元 Riemann 多様体  $(M, h)$  が 漸近的平坦 とは

$\exists r = r_M > 0 \exists \omega; \mathbb{R}^3 \setminus B_r \longrightarrow M, C^\infty$  に対し,

s.t. (i)  $M \setminus \omega(\mathbb{R}^3 \setminus B_r)$  はコンパクト

(ii)  $\omega^*(h) = g_0 + \gamma$ ,  $g_0: \mathbb{R}^3$  上の Euclid 計量,  $\gamma$  は  $|x||\gamma|, |x|^2|\partial\gamma|, |x|^3|\partial\partial\gamma|$  は有界.

$n$  の end をもつ 漸近的平坦 3-空間も定義可能である。

$M$  上の configuration  $c = (\Phi, A)$  に対しても  $\mathbb{R}^3$  の場合同様, Higgs 場の写像度, したがって monopole charge  $k(c)$  が定義される。

$k \geq 0$  に対して configuration の空間  $\mathcal{E}_k$  を

$$\mathcal{E}_k = \left\{ c = (\Phi, A) \in L^2_{1,loc}((\Omega^0 \otimes \Omega^1)(ad(P))) ; \left. \begin{array}{l} \|\Phi\|_{L^6} < +\infty, \quad Q(c) < +\infty, \quad k(c) = k \end{array} \right\} \right.$$

$\mathcal{G} = L^2_{2,loc}(Ad(P))$  とする。局所 = 乗可積分のカテゴリーで考える。

商空間  $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}$  は自然な Hilbert 多様体の構造をもつ ([7])。



写像

$$\begin{array}{ccc} \ell; \mathcal{E}_k & \longrightarrow & L^2(\Lambda^1 \otimes_{\text{ad}}(P)) \\ \cup & \longmapsto & F_A - * \nabla_A \Phi \end{array}$$

は  $\mathcal{E}_k/\mathcal{G}$  上の  $C^\infty$  Hilbert 空間バンドルの  $C^\infty$  切断をあたえる。切断の零点集合

$$N_k = \{ [c] \in \mathcal{E}_k/\mathcal{G} ; \ell(c) = 0 \}$$

は charge  $k$  の monopole の "moduli 空間" である。

注.  $M_k = \{ k\text{-monopole の全体} \} / \mathcal{G}_0$  ( $\mathcal{G}_0$ ; support コンパクトなゲージ群) は  $N_k$  上の  $S^1$ -バンドルである ([2]).

$\mathbb{R}^4$  上の instanton のはりつけ操作でコンパクト 4-多様体上の自己双対接続が構成されたが,  $M$  上の monopole も,  $\mathbb{R}^3$ -monopole configuration を  $M$  の end に移し, 逐次近似的につくっていくことができる. ([8]).

定理 4.2  $(M, h)$  は  $H_1(M; \mathbb{Z})$  有限なる漸近的平坦 3-多様体とする。このとき  $\forall k > 0 \exists C > 0 \exists R$  (十分大)

$$\begin{array}{ccc} \exists \chi; H_1(M; \mathbb{Z}) \times N_{k,R}(\mathbb{R}^3) & \longrightarrow & N_k \\ (w, [c]) & \longmapsto & \chi(w, [c]) \end{array}$$

s.t.

$[c], \chi(w, [c])$  を代表する configuration  $c$  ( $\mathbb{R}^3$  上の),

$C_w$  ( $M$ 上の) をえらんで

$$\| \omega^* C_w - C \|_{L_2} \leq C/R^{0.1}$$

とすることが出来る。ここに

$$N_{R,R}(\mathbb{R}^3) = \left\{ [C] \in N_R(\mathbb{R}^3); \int_{|x| \leq R} (|FA|^2 + |F_A \Phi|^2) < \frac{1}{R} \right\}$$

である。

### 参考文献

- [1] M. Atiyah, Instantons in two and four dimensions, Com. Math. Phys., 93 (1984) 437-451.
- [2] M. Atiyah, N. Hitchin, The geometry and dynamics of magnetic monopoles, Rice Univ., Princeton, 1988.
- [3] E. Bogomol'nyi, Stability of classical solutions, Sov. J. Nucl. Phys., 24 (1976) 861-870.
- [4] E. Corrigan, P. Goddard, An  $n$ -monopole solutions with  $(4n-1)$ -degrees of freedom, Com. Math. Phys., 80 (1981) 575-587.
- [5] P. Dirac, Quantised singularities in the electromagnetic field, Proc. Roy. Soc. Lond. A133 (1931) 60-72.
- [6] S. Donaldson, Nahm's equations and the classification of monopoles, Com. Math. Phys., 96 (1984) 387-

407.

- [7] A.Floer, The configuration space of Yang-Mills-Higgs theory on asymptotically flat manifolds, preprint, 1987.
- [8] A.Floer, Construction of monopoles on asymptotically flat manifolds, preprint, 1987.
- [9] G.Gibbons, N.Manton, Classical and quantum dynamics of BPS monopoles, Nucl.Phys., B274(1986) 183-224.
- [10] P.Goddard, D.Olive, Magnetic monopoles in gauge field theories, Rep.Prog.Phys., 41(1978) 1357-1437.
- [11] D.Groisser, Integrality of the monopole number in  $SU(2)$  Yang-Mills-Higgs theory on  $\mathbb{R}^3$ , Com. Math.Phys., 93(1984) 367-378.
- [12] N.Hitchin, Monopoles and geodesics, Com.Math. Phys., 83(1982) 579-602.
- [13] N.Hitchin, Monopoles, minimal surfaces and algebraic curves, Univ.de Montreal, Montreal, 1987.
- [14] M.Itoh (伊藤光弘), Yang-Mills 方程式 — インスタントンとモノポールを中心にして — 数学 37(1985) 322-337.
- [15] A.Jaffe, C.Taubes, Vortices and monopoles, Birkhäuser, Boston, 1980.

- [16] P.Kronheimer, Monopoles and Taub-Nut metrics, preprint, 1985.
- [17] R.Lockhart, R.McOwen, Elliptic differential operators on noncompact manifolds, Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa, no.3 (1985) 409-447.
- [18] N.Manton, Complex structure of monopoles, Nucl. Phys., B135 (1984) 319-332.
- [19] I.Mogi, M.Itoh (茂木勇, 伊藤光弘) 微分幾何学とゲージ理論, 共立出版, 東京 1986
- [20] M.Prasad, C.Sommerfield, Exact classical solutions for the 't Hooft monopole and the Julia-Zee dyon, Phys. Rev.Lett., 35 (1975) 760-762.
- [21] K.Shimatani (島谷健一郎) Monopole  $n$  spectral curve と Nahm 方程式, 京都, 修論, 1986.
- [22] C.Taubes, Stability in Yang-Mills theories, Com.Math.Phys., 91 (1983) 235-263.
- [23] R.Ward, A Yang-Mills-Higgs monopoles of charge 2, Com.Math.Phys., 79 (1981) 317-325.

## 連続関数の群と非アルキメデスバナッハ空間

静岡大(教育) 太田 春外

位相空間  $X$  に対し,

(i)  $X$  から 整数環  $\mathbb{Z}$  への連続関数全体の作る  
アーベル群  $C(X, \mathbb{Z})$  (但し,  $\mathbb{Z}$  は離散位相を持つ,  
また  $C(X, \mathbb{Z})$  の加法は  $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$ ) と

(ii)  $X$  から 完備 non-Archimedean 付値体  $\mathbb{K}$  への  
有界連続関数全体の作る Banach 空間  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$   
(但し,  $\mathbb{K}$  は付値から導かれる距離位相をもつ.  $f \in$   
 $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  の ノルム は  $\|f\| = \sup\{|f(x)| : x \in X\}$ )  
の間に共通の現象を見つけたので, 二つについて報告し  
ます。なお, 二つは 昨年(1987), 江田勝哉さん  
(筑波大), 清澤毅光さん(静岡大) と行った共同研究  
([3]) の一部です。

ここで,  $X$  は  $\mathbb{Z}$  或いは  $\mathbb{K}$  へ豊富な連続関数を持  
たなければ意味がないので,  $\mathbb{Z}$  の直積  $\mathbb{Z}^m$  ( $m$  は自由  
に下せる濃度) に部分空間として埋め込まれるものだ

けを考える (実は、これは  $K^m$  に埋め込まれることと同値)。このより低位相空間は、開かつ閉な集合からなる基底を持つ Hausdorff 空間で、0次元空間と呼ばれる。具体的には、

可算濃度の離散空間  $\mathbb{Z}, \mathbb{N}$ ,

もっと下き可濃度の離散空間  $\Lambda$ ,

Cantor 集合  $C$ ,

有理数からなる空間  $\mathbb{Q}$ ,

無理数からなる空間  $\mathbb{N}$ ,

収束列  $\{0 \cup \{1/n : n \in \mathbb{N}\}\}$ ,

順序数の空間  $0, 1, 2, \dots; \omega, \omega+1, \dots$

及び、これらの直積とその部分空間が考慮の対象である。

更に、 $X$  のもつべき性質をもう一つ挙げる。

定義.  $X$  は直積  $\mathbb{Z}^m$  ( $m$  は自由に下き可濃度である) に閉部分空間として埋め込まれるとき、 $N$ -compact と呼ばれる。

次のより可事実はある: 一般に 0次元空間  $X$  は  $X$  が  $\mathbb{Z}^m$  に於ける閉区  $\bar{X}$  の中で  $\mathbb{Z}$ -embedded である。

あるように (即ち, 任意の  $f \in C(X, \mathbb{Z})$  が  $\bar{X}$  上へ連続  
拡張できるから),  $\mathbb{Z}^m$  に埋め込むことができる。

このとき,  $C(X, \mathbb{Z}) \cong C(\bar{X}, \mathbb{Z})$  (更には,  $\bar{C}(X, \mathbb{K}) \cong$   
 $\bar{C}(\bar{X}, \mathbb{K})$  であることも分る) で,  $\bar{X}$  は  $N$ -compact だ  
から,  $X$  の代りに  $\bar{X}$  を考えれば, 初めから,  $X$  は  
 $N$ -compact であると仮定できる。すなわち, この  $\bar{X} \in X$   
の  $N$ -compactification とし,  $\beta_N X$  と表す可。

上に挙げた空間は, 可測濃度の離散空間と順序数の  
空間の一部を除いて, すべて  $N$ -compact である。

例として,  $\mathbb{Q}$  は  $\mathbb{Z}^{\omega}$  に,  $\mathbb{R}$  は  $\mathbb{Z}^{2^{\omega}}$  にそれぞれ部分  
空間として埋め込まれる。

以下,  $X, Y$  は  $N$ -compact 空間を表す可。

1. 群  $C(X, \mathbb{Z})$  について, 位相空間論の観点から  
次の2つの問題を考えよう。

Q1. 群  $C(X, \mathbb{Z})$  の代数的性質と  $X$  の位相的  
性質の間にどんな関係があるか。

Q2.  $C(X, \mathbb{Z}) \cong C(Y, \mathbb{Z})$  であるとき,  $X$  と  $Y$   
の間にどんな類似があるか。

これらについて、何か分り、何か分らないかを述べる。  
 空間  $X$  の位相的性質と  $X$  上の関数の集合の代数的性質の間の関係は古くから研究されている。特に、積  $\Sigma$   
 $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$  で定義すれば、 $C(X, \mathbb{Z})$  は環  
 である。この環は、 $X$  上の実連続関数全体の作る環  
 $C(X, \mathbb{R})$  と同様に、 $N$ -compact 空間  $X$  の位相  $\Sigma$   
 決定することが知られている。即ち

定理 1 (Mrówka [7])。  $C(X, \mathbb{Z})$  と  $C(Y, \mathbb{Z})$   
 が環として同型ならば、 $X$  と  $Y$  は位相同型である。

この定理は次の対応関係による。

環  $C(X, \mathbb{Z})$  の idempotent

$\Leftrightarrow$

$X$  上の連続な特徴関数

$\Leftrightarrow$

$X$  の開かつ閉な部分集合

以上、群  $C(X, \mathbb{Z})$  は何を決定するか。実連続関数  $\Sigma$



る場合、群  $C(X, \mathbb{R})$  は vector 空間として Hamel 基底が存在するので、つねに  $\mathbb{R}$  の直和と同型である。

従って、その濃度を無視すれば、群  $C(X, \mathbb{R})$  の構造はつねに一定である。ところが、 $C(X, \mathbb{Z})$  の場合、事態は複雑である。即ち、群  $C(X, \mathbb{Z})$  は必ずしも自由アーベル群ではない。

定理 2 ( $\Leftarrow$  は H\"obeling [9],  $\Rightarrow$  は [2]) .

群  $C(X, \mathbb{Z})$  が自由アーベル群 (即ち、 $\mathbb{Z}$  の直和と同型) であるためには、 $X$  が compact であることが必要十分。

この定理から、 $X$  が compact の場合、群  $C(X, \mathbb{Z})$  の構造は、 $C(X, \mathbb{R})$  の場合と同様に、その濃度によって決定される。ところで、無限濃度の 0 次元 compact 空間  $X$  に対して、

$$|C(X, \mathbb{Z})| = w(X) \quad (= \text{基底の最小濃度})$$

が成り立つので、次の定理が導かれる。

定理 3 ([2]) .  $X, Y \in \text{compact}$  とする。このとき群  $C(X, \mathbb{Z})$  と  $C(Y, \mathbb{Z})$  が同型であるためには、

$w(X) = w(Y)$  であることが必要十分。

compact の場合と対照的に,  $X, Y$  が 離散空間  
のとき,  $C(X, \mathbb{Z})$  は  $\mathbb{Z}$  の直積  $\mathbb{Z}^X$  同士の, 当り前の話  
だ。

$$C(X, \mathbb{Z}) \cong C(Y, \mathbb{Z}) \Rightarrow X \approx Y$$

が 成り立つ。この中間のクラスで何か起るかは未解決  
である。例としては,  $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$  と  $C(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$  が同型か  
どうかは 知られていない (どうに見ても)。もし  $X$  の  
完備性の ような性質が 群  $C(X, \mathbb{Z})$  の性質に 反映す  
れば,  $\mathbb{P}$ -ベリ群自身の研究にも 新しい 視点  $\Sigma$  とする  
と思う。

一般に,  $\mathbb{P}$ -ベリ群  $A$  に対して,  $A$  から  $\mathbb{Z}$  への  
準同型全体の作る  $\mathbb{P}$ -ベリ群  $\text{Hom}(A, \mathbb{Z}) \cong A^*$  で表わ  
す。  $C(X, \mathbb{Z})^*$  の元は  $X$  の compact 集合の上で  
決定される:

定理 4 (Mrówka [8]). 任意の  $h \in C(X, \mathbb{Z})^*$   
は compact support  $\Sigma$  もつ。(即ち, compact 集合

$K \subseteq X$  の存在で,  $f|_K = 0 \Rightarrow h(f) = 0$  )。

この定理で,  $X$  の  $N$ -compact 性の本質的であることに注意しておく。もし  $X$  が  $N$ -compact でなければ (例えば, 可測濃度の離散空間ならば),  $p \in \beta_N X - X$  の存在する。このとき,  $h(f) = \bar{f}(p)$  で定義される  $h \in C(X, \mathbb{Z})^*$  は compact support を持たない。ここで,  $\bar{f}$  は  $f$  の  $\beta_N X$  への拡張である。各  $h \in C(X, \mathbb{Z})^*$  が finite support を持てば,  $C(X, \mathbb{Z})^*$  は自由アベル群なので, 定理 4 の次の定理が導かれる。

定理 5 ([2])。  $C(X, \mathbb{Z})^*$  が自由アベル群であるためには,  $X$  の任意の compact 集合の濃度が高々有限であることが必要十分。

compact 集合が高々有限であるような空間は或る意味で離散空間に非常に近い。その場合, 群  $C(X, \mathbb{Z})$  は  $X$  の位相を決定するかどうかという期待が起るが, 以下には簡単な反例がある。

$\Lambda$  は非可算集合,  $X = \Lambda \cup \{\infty\}$  とし, " $\Lambda$  の各点は孤立点,  $\infty$  の近傍は, 高々可算個  $\Lambda$  の点を除いて,  $X$  の点をすべて含む" により  $X$  に位相を与える. このとき  $X$  の各 compact 集合は高々有限で,

$$\begin{aligned} C(X, \mathbb{Z}) &\cong \mathbb{Z} \oplus \{f \mid f(\infty) = 0\} \\ &\cong C(X, \mathbb{Z}) \oplus C(X, \mathbb{Z}) \\ &\cong C(X \oplus X, \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

よって, 位相和  $X \oplus X$  と  $X$  は位相同型でない. しかしながら, この場合,  $C(X, \mathbb{Z}) \cong C(Y, \mathbb{Z})$  ならば,  $X$  と  $Y$  は ( $X \oplus X$  と  $X$  のように) 有限の範囲での違いを無視すれば, 同型ではないかという疑問が残っている.

次に  $\mathbb{Q}$  に関連して,  $C(X, \mathbb{Z})$  の reflexivity について簡単に触れる.  $P$ -ベクトル群  $A$  に対して,  $(\theta(a))(h) = h(a)$  によって定義される自然同型  $\theta: A \rightarrow A^{**}$  の同型写像のとき,  $A$  は reflexive であるという.

可算個  $\mathbb{Z}$  の直積及び直和と見る  $P$ -ベクトル群をそれぞれ,  $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$  と  $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$  で表す. 各  $i \in \mathbb{N}$  に対して,

$e_i \in \mathbb{Z}^N$  と  $e_i(j) = \delta_{ij}$  に  $f$  を定義する。

定理4で、 $X$  が可算離散空間  $N$  としたとき、

Specker に  $f$  を古典的  $f$  定理が得られる。(実は、定理4の証明には、このSpeckerの定理を用いるので、むしろ  $f$  が本質的である)；

定理6 (Specker [14])。任意の  $h \in (\mathbb{Z}^N)^*$  に対し、有限個の  $i \in N$  を除いて、 $h(e_i) = 0$  である。従って、自然同型写像  $(\mathbb{Z}^N)^* \cong \mathbb{Z}^{(N)}$  が存在する。

自然に  $(\mathbb{Z}^{(N)})^* \cong \mathbb{Z}^N$  であるので、この定理から、 $\mathbb{Z}^N$  と  $\mathbb{Z}^{(N)}$  は reflexive である。更に定理2と合わせれば、 $C(\mathbb{C}, \mathbb{Z})$  も reflexive である。これは無限次元の vector 空間で reflexive であるものが存在し得ることを示すと非常に面白い。 $C(X, \mathbb{Z})$  又は  $C(X, \mathbb{Z})^*$  が reflexive であるより  $X$  は完全に決定されている。(これは [2] で詳述したので、定理だけ述べる)。写像  $f: X \rightarrow \mathbb{Z}$  は  $X$  の各 compact 集合  $K$  に対し、 $f|_K$  が連続のとき、 $f$  が  $K$ -連続であるという。 $X$  に任意の  $f$ -連続写像が連続となるより  $f$  の最小の位相

$E$  を  $E$  上の空間  $E$  を  $k_N X$  で表す。恒等写像  $k_N X \rightarrow X$  が位相同型るとき、 $k_N X = X$  とおく。

定理 7 ([2]).  $C(X, \mathbb{Z})$  が reflexive であるためには、 $X$  の任意の compact 集合の濃度が非可測で、 $k_N X = X$  であることが必要十分。

定理 8 ([2]).  $C(X, \mathbb{Z})^*$  が reflexive であるためには、 $X$  の任意の compact 集合の濃度が非可測で、 $k_N X$  が  $N$ -compact であることが必要十分。

$X$  が局所 compact、又は  $\aleph_1$  可算公理  $\Sigma$  を満たせば、 $k_N X = X$  が成り立つ。従って、 $C(\mathbb{Q}, \mathbb{Z})$ 、 $C(\mathbb{N}, \mathbb{Z})$ 、及び  $\Lambda$  が可測濃度するときの  $C(\Lambda, \mathbb{Z})$  及びこれらの dual は reflexive である。これは従って、 $C(X, \mathbb{Z})$  又は  $C(X, \mathbb{Z})^*$  が reflexive ではないならば  $X$  は  $\aleph_1$  存在する (cf. [2], [3])。定理 4 と 7 の結果が得られる。

定理 9 ([2]).  $X$  の濃度は非可測と可する。

このとき、 $C(X, \mathbb{Z})$  が  $\mathbb{Z}$  の直積と同型であるためには、 $X$  が離散空間であることが必要十分。

ここで、 $X$  の濃度が非可測であるという仮定を外した場合、 $X$  がある離散空間の  $N$ -compactification ではないかという Eda の予想は未解決である。

最後に、定理 4 に戻って、 $h \in C(X, \mathbb{Z})^*$  は compact support を持つか、このとき、 $h$  の compact supports のうち最小のものか存在する。そして逆に“ $X$  の任意の compact 集合は  $C(X, \mathbb{Z})^*$  のある元の最小の supports に含まれるか”という問題が自然に起る。これは Mrówka [8] に戻って提起され、最近 Eda [1] に戻って肯定的に解決された。従って

$$h \in C(X, \mathbb{Z})^* \iff X \text{ の compact 集合}$$

という対応 (1対1 ではない) が与えられる。ところで、いま  $X$  自身が compact ならば、 $X$  の compact 集合全体、即ち  $X$  の閉集合全体は  $X$  の位相を決定する。これらと定理 3 から “ $\omega(X) = \omega(Y)$  である

2つの 0次元 compact 空間  $X, Y$  の位相は何かの意味で似ている” ということが言えるのは面白いと思う。“何かの意味”の意味を模索中です。例としては、 $\omega(X) = \omega(Y) = \omega$  の場合は、Petczynski [10] による次の定理がある：“孤立点を稠密に含む 0次元 compact 距離空間の hyperspace (= compact 集合全体に Vietoris の位相を与えたもの) は互いに位相同型である。”

2. Banach 空間  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  について、体  $\mathbb{K}$  上の付値  $|\cdot|$  が強い三角不等式

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\}$$

を満たすとき、non-Archimedean 付値という。

以下、 $\mathbb{K}$  に  $d(a, b) = |a-b|$  で定義される距離  $d$  について、完備な non-Archimedean 付値体とする。

$\mathbb{K}$  上の Banach 空間  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  について前節の Q1, Q2 と同じ問題が考えられるが、以下で述べるように、これらについて  $\mathcal{P}$ -ベクトル群  $C(X, \mathbb{Z})$  の場合に対応する結果が存在する。

離散空間  $\Lambda$  について、 $\bar{C}(\Lambda, \mathbb{K})$  (即ち  $\mathbb{K}$  の直積)



$\Sigma \mathcal{L}^\infty(\Lambda)$  とかく。  $\mathbb{K}$  の直和は  $\mathcal{L}^\infty(\Lambda)$  の閉部分空間

$$C_0(\Lambda) = \{ f \in \mathcal{L}^\infty(\Lambda); \forall \varepsilon > 0 \exists \lambda; |f(\lambda)| \geq \varepsilon \} < \omega \}$$

である。

さて、 $X$  が compact のとき、real Banach 空間  $\bar{C}(X, \mathbb{R})$  は  $X$  の位相  $\Sigma$  を決定する：

定理 1' (Banach-Stone). compact 空間  $X, Y$  に対し、もし Banach 空間  $\bar{C}(X, \mathbb{R})$  と  $\bar{C}(Y, \mathbb{R})$  が同型ならば、 $X$  と  $Y$  は位相同型である。

とすると、群  $C(X, \mathbb{Z})$  の場合と同様、 $X$  が compact ならば、 $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  は  $C_0(\Lambda)$  と同型になり、 $X$  の位相  $\Sigma$  を決定する。実際、定理 2 と 3 で次の表 1 のように、左右の言葉を入れ替えることが出来る。

$\mathbb{Z}$	$\mathbb{K}$
$C(X, \mathbb{Z})$	$\bar{C}(X, \mathbb{K})$
群	Banach 空間
自由 $\mathcal{P}$ -ベリル群	$C_0(\Lambda)$ と同型な Banach 空間

表 1

$\bar{C}(X, \mathbb{K})$  に対し, 定理 2 に対応する結果は Gruson-van der Put [5], 定理 3 に対応するものは [3] で得られた。

$\bar{C}(X, \mathbb{K})^*$  は  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  の continuous dual (即ち,  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  上の連続な線形汎関数全体に  $\|h\| = \sup\{|h(f)|/\|f\|; f \neq 0\}$  で与えられる) とする。non-Archimedean 付値体上の Banach 空間の dual を議論する際には,  $\mathbb{K}$  の球完備性が鍵となる。

定義.  $\mathbb{K}$  が球完備である,  $\mathbb{K}$  の開球  $D_1, D_2, \dots$  が空でない共通部分を持つことと言う。

この概念は完備性より更に強い。  $D_n$  の半径が 0 に収束する場合に, 中心の列は Cauchy 列となり, その極限が  $\bigcap D_n$  に属する。と云うが  $D_n$  の半径が 0 に収束しないときには,  $\bigcap D_n = \emptyset$  になり得る! 具体的には,  $p$ -進数体  $\mathbb{Q}_p$  は球完備であるが,  $\mathbb{Q}_p$

の代数的包の完備化  $\mathcal{C}_p$  は球完備ではない。定理 6 に対応して、次の定理がある。  $\mathcal{Q}^\infty(N) = \mathcal{Q}^\infty$ ,  $\mathcal{C}_0(N) = \mathcal{C}_0$  とおく。また  $e_i \in \mathcal{Q}^\infty$  と  $e_i(f) = \delta_{ij}$  で定義する。

定理 6' (van der Put [12]), 次の同値:

- (a)  $\mathbb{K}$  は球完備ではない。
- (b)  $(\mathcal{Q}^\infty/\mathcal{C}_0)^* = \{0\}$ 。
- (c)  $\forall h \in (\mathcal{Q}^\infty)^*$ ,  $h(e_n) \rightarrow 0$

(b) は  $\mathbb{K}$  が球完備ではないとき、Hahn-Banach の拡張定理が成り立たないことを示している。(そしてその逆も正しい, Ingleton [6])。また Fleischer [4] は  $\mathbb{K}$  が球完備のとき、 $\mathbb{K}$  上の無限次元 Banach 空間はすべて reflexive ではないことを証明した。つまり、 $\mathbb{K}$  が球完備ではない場合は、reflexive Banach 空間は存在する。例として、(c) より自然な同型写像  $(\mathcal{Q}^\infty)^* \cong \mathcal{C}_0$  が存在する。 $\mathcal{C}(X, \mathbb{Z})$  の場合と同様に、自然に  $(\mathcal{C}_0)^* \cong \mathcal{Q}^\infty$  であり、 $\mathcal{Q}^\infty$  と  $\mathcal{C}_0$  は reflexive である。より一般に、 $\mathbb{K}$  が球完備ではなく、非可測濃度

同様、表1に同じ、次表2に示した置き換えにより、定理4~9は  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  に対応し、そのまま成立する。

$C(X, \mathbb{Z})^*$	$\bar{C}(X, \mathbb{K})^*$
compact support $\Sigma$ もつ	$\forall \varepsilon > 0$ , compact $\varepsilon$ -support $\Sigma$ もつ
$\mathbb{Z}^N$	$l^\infty$
$\mathbb{Z}^{(N)}$	$C_0$

表2

ここで、 $K \subseteq X$  の  $h \in \bar{C}(X, \mathbb{K})^*$  の  $\varepsilon$ -support でありとせば、 $f|_K = 0 \Rightarrow \|h(f)\| \leq \varepsilon \|f\|$  が成り立つことを言う。また  $X$  の濃度が非可測の場合、 $\mathbb{K}$  は非可測濃度で、同様でもよい。よって、定理4に対応する結果は [3]、定理5は [13]、定理6は、上述の  $f$  により van der Put [12]、定理7.8は、“可測濃度が存在しない”という仮定の下で、van der Put [11] による証明された。同様、[3]では、 $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  に対応する定理7.8は、 $C(X, \mathbb{Z})$  の場合に平行する

証明を与えた。定理9は  $\mathbb{K}$  が 球完備 であるも、  
成立するかも知れない。

最後に、 $\mathbb{P}$ -ベクトル群  $C(X, \mathbb{Z})$  と non-Archimedean  
Banach 空間  $\bar{C}(X, \mathbb{K})$  に対する二つの結果を統一する  
共通の見方を与えようかと思っております。

### 参考文献

1. K. Eda, Support property of 0-dimensional compact spaces concerning abelian groups of integer-valued continuous functions, preprint.
2. K. Eda and H. Ohta, On abelian groups of integer-valued continuous functions, their  $\mathbb{Z}$ -duals and  $\mathbb{Z}$ -reflexivity, in "Abelian group theory" edited by R. Göbel and E. A. Walker, Gordon and Breach, New York-London (1987) 241-258.
3. K. Eda, T. Kiyosawa and H. Ohta,  $\mathbb{N}$ -compactness and its applications, in "Topics in General Topology" edited by J. Nagata, to appear.
4. I. Fleischer, Sur les espaces normés non-archimédiens, Indag. Math. 16 (1954) 165-168.
5. L. Gruson and M. van der Put, Banach spaces, Bull. Soc. Math. France, Mém. 39-40 (1974) 55-100.
6. A. W. Ingleton, The Hahn-Banach theorem for non-Archimedean valued fields, Proc. Cambridge Phil. Soc. 48 (1952) 41-45.

7. S. Mrówka, Structures of continuous functions. III. Rings and lattices of integer-valued continuous functions, *Indag. Math.* 27 (1965) 74-82.
8. S. Mrówka, Structures of continuous functions. VIII. Homomorphisms of groups of integer-valued continuous functions, *Bull. Acad. Sci. Math.* 20 (1972) 563-566.
9. G. Nöbeling, Verallgemeinerung eines satzes von Herrn E. Specker, *Invent. Math.* 6 (1968) 41-55.
10. A. Pelczynski, A remark on spaces  $2^X$  for zero-dimensional  $X$ , *Bull. Acad. Polon. Sci.* 13 (1965) 85-89.
11. M. van der Put, Reflexive non-Archimedean Banach spaces, *Indag. Math.* 32 (1970) 341-352.
12. M. van der Put, Espaces de Banach non-archimédiens, *Bull. Soc. Math. France*, 97 (1969) 309-320.
13. A. C. M. van Rooij, Non-Archimedean functional analysis, Marcel Dekker, New York (1978).
14. E. Specker, Additive gruppen von Folgen ganzer Zahlen, *Portugaliae Math.* 9 (1950) 131-140.

# Nonorientable 4-manifold の homotopy 不変量

小島定吉 (東工大理)

## 0. 序

以下は Michigan 大学の F. Raymond, その弟子 M. H. Kim 両氏と共同で '発掘' した結果です.

$E_n$  を Euler class が  $2n$  の  $S^2$  上の  $D^2$ -bundle とする.  $\partial E_n$  上の fiber ( $= S^1$ ) を半回転させる principal free involution を  $\tau_0$  とすると,  $E_n$  から境界を  $\tau_0$  で割って得られる nonorientable 4-manifold  $E_n/\tau_0$  は  $n$  によらず  $S^2 \times \mathbb{R}P^2$  に diffeomorphic となる.

ここで  $\tau_0$  の代わりに fiber を半回転させると同時に base  $S^2$  もある軸に沿って半回転させる free involution を  $\tau_1$  としたとき,  $E_n/\tau_1$  は  $n$  が even 同士, あるいは odd 同士 なら互いに diffeomorphic であることがわかる. そこで  $M_0 = E_0/\tau_1$  と  $M_1 = E_1/\tau_1$  はいかに異なるかという素朴な疑問を考える. 先に読み進む前に, 初心に戻り3分間位アレコレ考えてみると, 両者が酷似していることに気づくはず.

驚くべきことに最近の4次元多様体論の驚異的な発展にもかかわらずこの問いに '直ちに' 答える定理は知られていなかったようだ. 本講演ではこれらが homotopy 同値ではないことを示すふたつの方法を述べたい. ひとつは cell 分割を見て

obstruction theory を用いる方法。もうひとつは、新しい homotopy invariant を求めそれで判定する方法である。

$M_0$ ,  $M_1$  はそれ自身特に興味深いとは思えないが、4次元多様体の homotopy classification が、特に nonorientable の場合、きわめて素朴な段階で疑問が山積みであることを示す格好の例といえよう。他方やはり素朴な手法で得られた  $RP^4$  上の exotic differential structure とのいくつかの類似点を見ると、更に Freedman, Donaldson 等による発展で忘れられた未開発部分の典型例になることも期待してみたい。

#### 1. これまでの結果

J. H. C. Whitehead [3] は、simply connected 4-manifold の homotopy type は  $H^2$  上の cup product が定める intersection form により決まることを示した。この定理の拡張として、C. T. C. Wall [2] は  $\pi_1$  が prime order のとき  $\pi_2$  上の equivariant intersection form (= universal cover 上の intersection form を  $\pi_1$  の作用つきで考えたもの) で決まると述べた。がこの証明にはギャップがある。最近 Hambleton-Kreck [1] は orientable を仮定し k-invariant を加え  $\pi_1$  の class を少し拡張して正しい証明を与えた(自白: 私はまだ証明を読んでいません)。そこで nonorientable の場合が残されるわけだが、冒頭の例は  $S^2 \times RP^2$  と k-invariant まで一致しており、Hambleton-Kreck 流の修正がこの場合容易



でないことを示すことになる。

## 2. Obstruction theory による方法

問題を「3-complex  $K$  を固定し、それに 4-cell  $e$  を  $\gamma \in \pi_1(K)$  により attach してできる Poincare complex  $K_\gamma = K \cup_\gamma e$  の homotopy type はどれだけあるか?」と設定する。このとき Obstruction theory により、 $\pi_1(K)$  を有限とし  $K_\gamma$  の universal cover の homotopy type (これは intersection form で決まる) を指定すると何通りの variation があるかを形式的な計算に帰着するある種の exact sequence が得られる。

この machine を冒頭の例にあてはめる。 $M_0, M_1$  は  $S^2 \times RP^2$  の 3-skeleton  $K$  と homotopic な 3-skeleton を持ち、かつ同様に  $S^2 \times S^2$  に 2重 cover される。この設定で計算すると homotopy  $S^2 \times S^2$  を double cover に持つ nonorientable Poincare complex の homotopy type は 4個であることがわかる。更に細かく調べることにより  $M_0, M_1, S^2 \times RP^2$  は独立な元で、とくに互いに homotopy 同値ではないことが結論できる。

しかしこの手法は苦勞が大きい割りに実りがすくない。

## 3. Homotopy 不変量

$M_0, M_1$  と  $S^2 \times RP^2$  は  $Z_2$ -intersection form により直ちに区別される。そこで  $M_0$  と  $M_1$  を区別する不変量を定義

する.  $M$  を closed nonorientable 4-manifold とし, その universal cover の orientation を一つ固定する. このとき  $x \in \pi_2(M)$  を represent する transversely immersed 2-sphere を一つとり  $S_x$  として

$$q(x) = \chi(S_x) + 2 \# \text{ self } s_x \pmod{4}$$

と定義する. ここで Euler class は universal cover の orientation を用い整数として数える. このとき容易に

Lemma.  $q$  は  $\pi_2(M) \otimes \mathbb{Z}_2$  上の well defined  $\mathbb{Z}_4$ -quadratic function となる. すなわち

$$i) q(nx) = n^2 q(x)$$

$$ii) q(x+y) - q(x) - q(y) = 2 x \cdot y$$

が確かめられる. ここで  $\cdot$  は  $\mathbb{Z}_2$ -intersection number を意味する.  $q$ -function は orientable の時 modulo 4 をとらずに self intersection number であり, nonorientable のときは modulo 2 をとれば  $\mathbb{Z}_2$ -self intersection number である. 従って新しい点は domain を  $\pi_2$  にしその分 modulo を 4 に広げたことにある. この function に関し, 幸い

Theorem.  $q$ -function は homotopy invariant. 即ち,  $f : M$

→  $N$  を homotopy 同値とすると  $M, N$  の universal cover の orientation を適当にとれば,

$$q_M(x) = q_N(f_*(x)).$$

が証明できた。これを用いると  $M_0$  の  $q$ -function は自明だが  $M_1$  のは非自明という明白な差が生じ homotopy 同値でないことが判定できる。

$q$ -function を加えて、例えば  $\pi_1$  が  $Z_2$  のとき homotopy classification ができるかは今後の課題。そのため homotopy 論的定義があるとよいのだが...

#### References

- [1] I. Hambleton and M. Kreck : On the classification of topological 4-manifolds with finite fundamental groups, Math. Ann., 280 (1988), 85 - 104.
- [2] C. T. C. Wall : Poincare complexes I, Ann. of Math., 86 (1967), 213 - 245.
- [3] J. H. C. Whitehead : On simply connected, 4-dimensional polyhedra, Comment. Math. Helv., 22 (1949), 48 - 92.



