第 35 回

トポロジー・シンポジウム

講　演　集

昭和62年 7 月15日～17日

於　**琉　球　大　学**

昭和62年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号　61302004

序

この講演集は、昭和６２年７月１５日から１７日の間、琉球大学で開催される第３５回トポロジー・シンポジウムに際し、あらかじめ各講演者から集めた原稿を印刷したものである。その目的は、参加者が講演をよりよく理解して研究討論を行うための一助とするとともに、記録として残すことによって後々の資料として役立てることにある。

この講演集は科学研究費補助金・総合研究（Ａ）

「トポロジーの総合的研究」（課題番号　61302004）

により作られたものであることを附記しておく。

昭和６２年７月

総合研究（Ａ）　61302004

研究代表者　　川久保　勝　夫

目　　次

L^2-cohomology of Singular Varieties

東工大・理　長瀬正義

よく知られているように，（境界のない）コンパクト多様体 M に関して，de Rham の定理

(0.1)　　　$H^i_{DR}(M) \cong (H_i(M))^*$

がある（全て $\mathbb{R}$ 又は $\mathbb{C}$ 係数，以下同様）．この同型を "singularity を持つ M" にまで "拡張" してみようというのがこのノートの目標である．

歴史的には，一方の側から Goresky & MacPherson が "M が singularity を持つと Poincare duality が一般に成立しなくなってしまう simplicial homology $H_i(M)$" ではなく "M が singularity を持ってもある意味で Poincare duality の成立する intersection homology $IH_i(M)$ ([3])"（singularity がなければ $H_i(M)$ に一致する）なるものを提案し，一方 Cheeger が "コンパクト多様体上の Hodge 理論，スペクトラル幾何 etc" を "非コンパクト（& 非完備）多様体" にまで拡張するため（その道具の一つとして）

"L^2-cohomology $H^i_{(2)}$"（コンパクト多様体に対しては H^i_{DR} に一致する）なるものを提案（[C1]）した。これら2つの概念はそれぞれ独立して"発生"したわけであるが、特殊な場合の彼らの $IH, H_{(2)}$ の計算結果をみて D. Sullivan が、それらの"双対関係"を指摘した。（彼の見たと思われる）最も単純な場合の計算結果を紹介してみたい。

<u>Example 1</u>.（Intersection homology の定義は省略：それには実は"i"の他に perversity $\bar{p}$ と呼ばれるものが付随している。ここでは、その $\bar{p}$ が lower middle perversity $\bar{m}$ と呼ばれるものである時の結果である。）N を n 次元（境界を持たない）コンパクト多様体とし、

$C(N) = [0,1] \times N / \{0\} \times N$ を一点 p につぶす
これは、一般にその p を特異点として持つ

とおくと、

$$(0.2) \qquad IH_i(C(N)) \cong \begin{cases} H_i(N) & ; \ i \leq \frac{n}{2}, \\ 0 & ; \ i > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

<u>Example 2</u>.（L^2-cohomology の定義は、次の§でおこなう：兎角、それを定義するには、metric が付随していな

ければ始まらない.) Example 1 の N に (任意に固定した) metric g を付随させ,

$$C^*(N) = \text{“}(0,1] \times N \text{ with } dr^2 + r^2 g\text{”} \quad ; \text{非完備}$$

とおくと

$$(0.3) \qquad H^i_{(2)}(C^*(N)) \cong \begin{cases} H^i_{DR}(N) & ; i \leq \frac{n}{2}, \\ 0 & ; i > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

(0.2) と (0.3) より ((0.1) を通して) $IH_i(C(N))$ と $H^i_{(2)}(C^*(N))$ とがまさに双対関係にあることがわかる.

さて, こうしたことをふまえ当然の成り行きとして彼らは次のような予想を立てた.

予想 (Cheeger, Goresky, MacPherson) X を射影空間 $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ に埋め込まれている singular algebraic variety とする. その singularity S を X から取り除き, $\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ の Fubini-Study metric を制限することにより非完備リーマン多様体 $(X-S, g)$ を作る. この時

$$H^i_{(2)}(X-S) \cong (IH_i(X))^*,$$

ここで IH_i は，$\overline{m}$ の付随したものとする。

これでこのノートの目標を正確に述べることができる．（予想は，X が singular curve のときは，かなり自明なことであり）

<u>定理　X が singular surface (over $\mathbb{C}$) の時には，予想は正しい</u>．

この定理はもともと，Hsiang-Pati（[4]）が"証明した"ことになっていましたが，当時から少々ギャップがあるとささやかれていたもので，筆者の contribution は，そのギャップを埋めた点にあります．正確に言うと X の singulaity の"非常に良い解消" $\pi:\tilde{X}\to X$ を考えた時，それの divisors どうしが交わらなければある意味でギャップがなく，交わりがあると本質的にギャップがある，というふうになっています．

<u>§1. L^2-コホモロジー</u>　なにはともあれまず，L^2-cohomology を定義しなければならない．(Y,g) を

(非完備)リーマン多様体とする．するとその上の微分形式α, βどうしの内積が

(1.1) $$(\alpha, \beta) = \int_Y \alpha \wedge * \beta$$

と定義される；$*$はmetric gの定めるstar operator．ここでその内積の定めるノルム$\|\alpha\|$が有限であるようなi-forms全体を$L^2\Lambda^i = L^2\Lambda^i(Y)$とおく(Hilbert空間)．コンパクトな台を持つC^∞-i-forms全体Λ_c^iは，$L^2\Lambda^i$に含まれるが，Yをコンパクトと仮定していないので一般にC^∞-i-forms全体Λ^iは，$L^2\Lambda^i$に含まれるとはかぎらない．さて，外微分$d : \Lambda^* \to \Lambda^{*+1}$を次のような空間に制限して$d_i$と書くことにする；

(1.2) $$\mathrm{dom}\, d_i = \{\alpha \in \Lambda^i \cap L^2\Lambda^i \mid d\alpha \in L^2\Lambda^{i+1}\}.$$

するとこの$\{\mathrm{dom}\, d_i\}$はcochain complexをなすので，それの定めるi次コホモロジーが考えられる．それを<u>i次L^2-コホモロジー</u>と呼ぶ；

(1.3) $$H^i_{(2)}(Y) = \mathrm{Ker}\, d_i / \mathrm{Range}\, d_{i-1}.$$

コンパクトな場合とちがってd_iの定義域が明示されている，ひいては，"metric"をかえれば我々のd_iはちがうd_iとなってしまう．

(1.4) <u>注意</u> Example 2で $\overset{r^2\text{の}}{r^2}$を$r^{2c}$にかえたものを

$C^*_{(c)}(N)$ とおくと，$H^i_{(2)}(C^*_{(c)}(N))$ は c に依存して変化する．（この c と IH_i の perversity $\bar{p}$ とを関係づけること etc. は [5] においてなされている．）

なお，d_i の operator norm に関する閉包を $\bar{d}_i$ とおく，i.e.,

$$(1.5)\quad \mathrm{dom}\,\bar{d}_i = \left\{ \alpha \in L^2\Lambda^i \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{次を満たすような点列 } \alpha_j \in \mathrm{dom}\, d_i \\ \text{と，} A \in L^2\Lambda^{i+1} \text{ が存在する；} \\ \quad \alpha_j \to \alpha,\ d\alpha_j \to A \quad (\text{in } L^2) \end{array} \right\}.$$

$\alpha \in \mathrm{dom}\,\bar{d}_i$ に対して（α_j については様々な取り方があるが）$A \in L^2\Lambda^{i+1}$ は一意に定まることがわかるので，その α, A について，$\bar{d}_i\alpha = A$ と定義する．この時，$\{\mathrm{dom}\,\bar{d}_i\}$ も又，cochain complex をなすのでそれの i 次コホモロジーを考えることもできる．ただしそれについては自然に同型

$$(1.6)\qquad H^i_{(2)}(Y) \cong \mathrm{Ker}\,\bar{d}_i / \mathrm{Range}\,\bar{d}_{i-1}$$

となっていることがわかっている（[1]）．$\{d_i\}$-type，$\{\bar{d}_i\}$-type，それぞれ一長一短があり必要に応じて使いわけることになる．

さて，L^2-コホモロジーの重要な性質を一つ紹介しておく．一般に，2つのリーマン多様体 (Y_1, g_1)，(Y_2, g_2) があった時，それらが <u>quasi-isometry</u> であるとは，微分同型 $f: Y_1 \to Y_2$ 及び適当な定数 $C > 0$ があり，

$\frac{1}{C}g_1 \leq f^*g_2 \leq Cg_1$ がなりたっていることとする. 例えば, コンパクト多様体Mに任意の metrics g_1, g_2 を付随させた時, (M, g_1), (M, g_2) は(恒等写像を通して) quasi-isometric である. 注意(1.4)での $C^*_{(c)}(N)$ は, cに依存してその quasi-isometric class は変化する.

<u>補題1.1</u> L^2-コホモロジーは, quasi-isometric 不変である.

証明) quasi-isometry $f : (Y_1, g_1) \to (Y_2, g_2)$ は, cochain complexes 间の同型 $\{\mathrm{dom}\, d_{Y_1}\} \cong \{\mathrm{dom}\, d_{Y_2}\}$ を導く.

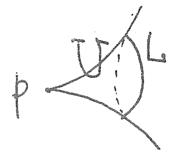
§2. 定理の証明のアイデア

以下, 我々の X ($\mathbb{P}^N(\mathbb{C})$ に埋め込まれている singular surface/$\mathbb{C}$) を, normal と仮定する. (normal でない場合には, 誤解を恐れず言えば, normalization を施してから考えれば良い.) よってその singularity S は孤立特異点の集合となっている. $S = \{p\}$, 一点よりなっている, と仮定しても何ら一般性は失われない (一般に

は、以下の議論を各特異点の近傍で行なえばいい）のでそう仮定しておく．

p の閉近傍 U を考えてみる．

p の link を $L=\partial U$ とおけば、



$$(2.1) \qquad U \cong C(L)$$

なる位相同型がある（Milnor）として良い．右辺は Example 1 で定義されたもの（L 上の cone）である．よって

$$(2.2) \qquad IH_i(U) \cong \begin{cases} H_i(L) & ; \ i \leq 1 \\ 0 & ; \ i \geq 2 \end{cases}$$

である（(0.2) を見よ）．この事実より，定理を証明するには，まず Example 2 に対応する次の結果を証明する必要があると思われる．そして実は，それさえ証明できれば，ある意味で一般論として定理そのものが証明されたことになる（そのことの詳しい説明は省略する）．

$U^* = U \setminus \{p\}$ とおいて，

<u>命題 2.1.</u>　次の自然な同型がある；

$$(2.3) \qquad H^i_{(2)}(U^*) \cong \begin{cases} H^i_{DR}(L) & ; \ i \leq 1, \\ 0 & ; \ i \geq 2. \end{cases}$$

ここで自然な同型（$i \leq 1$）とは：$H^i_{(2)}$ は $\{d_i\}$-type を使っているとする（定義をすなおに解釈して V^* 上の C^∞-forms とは，その境界 L 上まで C^∞ に延びているものとする：$H^i_{(2)}$ 自身にとっては C^∞-forms が L 上まで込めて C^∞ なのか，又，L 上で値をとるのか，はどちらでもいいことであるが）．すると

(2.4) $\quad H^i_{(2)}(V^*) \ni [\phi] \longmapsto [\phi|_L] \in H^i_{DR}(L)$

が well-defined であり，自然な同型とはこれのことである．

以下この命題を証明することが目標である．(2.3) 自身は，(0.3) と全く同じであるが，V^* 上の metric g ($\mathbb{P}^N$ の Fubini-Study metric の制限) が Example 2 のように単純であるはずはない．そこで補題1.1 に注意しつつ，quasi-isometric な範囲で g を変形して，より扱いやすい metric を捜し出すことが出発点となる．実際には，V^* を適当に分割し，各部分 (with the given metric g) と quasi-isometric な，より扱いやすいものを捜し出す，という手段を取る：結果だけを紹介すると次のようになる．

(1) まず，V^* に適当な積構造を入れる：(微分同型)

(2.5) $\quad V^* \cong (0,1] \times L \quad , x \mapsto (r, \hat{x})$,

ここでrは一般に"pからのxの距離関数"ではない.
(これを少々変形したものが本質的.)

(ロ) link Lを適当に分割する; $L = \sqcup Y_j$

(ハ) この分割と(2.5)をあわせてU^*自身を分割する: $U^* = \sqcup W_j$, $W_j \cong (0,1] \times Y_j$.

(ニ) 以上を非常にうまく遂行すると, 各W_jは, 次のtypesのリーマン多様体Wのどれかとquasi-isometricである;

<u>type(−)</u>: $1 \leq c$を固定し, $\mathbb{R}^2$内の三角形Δを考え, $\mathbb{R}^2$の通常の計量のΔへの制限を$\tilde{g}$とおく. そして

$$W = W(-) = \text{“}(0,1] \times [0,1] \times \Delta \ (\ni (r, \theta, y)) \text{ with } dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^{2c}\tilde{g}(y)\text{.”}$$

<u>type(+)</u>: $0 < b < 1$及び$1 \leq c$を固定する. そして,

$$W = W(+) = \text{“}(0,1] \times [0,1]^3 \ (\ni (r, \theta, s, \Theta)) \text{ with } dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^{2c}\{ds^2 + (r^b + s)^2 d\Theta^2\}\text{.”}$$

ここで, "quasi-isometry" $I_j : W_j \cong W$で, $x \mapsto (r, \cdots)$のrは(2.5)のrに一致している. (W_iに対してまずtypes($\pm$)

のどちらかが定まり，次に c や b が W_i に対応して定まる．)

(イ)−(ニ) をいかに遂行するかが最も本質的(そして Hiang-Pati のギャップのあるところ)であるが，この§の最後にごくごく簡単に説明することとして，ここでは，それが遂行し得たと仮定して話を進める．3つほど"主張"を与える．

<u>主張A</u>　$i\le 1$ とし，$\phi\in L^2\Lambda^i(L)$ を任意に取る．そして (2.5) を通して ϕ を U^* 上の form とみなす ($\phi(r,\cdots)=\phi(1,\cdots)$) と，それは $L^2\Lambda^i(U^*)$ に属する．

次に，$\alpha=\phi+dr\wedge\omega\in L^2\Lambda^i(U^*)$ に対して

$$(2.6)\qquad (K\alpha)(r,\cdots)=\begin{cases}\displaystyle\int_a^r \omega(r,\cdots)\,dr & ;\ i\le 2,\\ \displaystyle\int_0^r \omega(r,\cdots)\,dr & ;\ i\ge 3\end{cases}$$

とおく(ここで $0<a\le 1$ は特定しない)．すると，

主張B　この作用素κは，連続作用素

$$\kappa : L^2\Lambda^i(U^*) \to L^2\Lambda^{i-1}(U^*)$$

を与える．

最後に；§1において$d_i, \bar{d}_i$を定義した（定義域が決められている）．ここでは新しく，定義域をΛ_c^iに制限した外微分$d_{c,i}$を考え，(1.5)と同様に，その閉包を$\bar{d}_{c,i}$と書く．この時，

主張C　U^* (or $X \setminus \{p\}$) 上，$\bar{d}_i = \bar{d}_{c,i}$

実はCheeger氏より「Hsiang-Pati は，これを証明したと言っているが，どうもおかしい．[8]（$\bar{d}_0 = \bar{d}_{c,0}$のみを証明）を拡張すれば一般の$\bar{d}_i = \bar{d}_{c,i}$が証明できるはずだ」と言われたのが"定理"を考えだしたきっかけでした．実際には，主張Cの証明がないというのが彼らのギャップであるというより（イ）－（ニ）にギャップがあって，もしそれをギャップであると言わないなら主張Cは，証明が不必要なほど明らか（つまり[1]とほとんど同様に証明できる）ということになっています．尚，主張Cは，

$i=0,3$ の時と，$i=1,2$ の時とでは，だいぶ事情が違っていて（それが[8]を研究中 $i=0$ の場合のみをあつかった主な理由），Cheeger氏の指摘通りには事ははこびません．

主張Cは，$\mathrm{dom}\,\bar{d}_i$ の元を任意に取った時，それが Λ^i_c の元達で norm $\|\cdot\|+\|d\cdot\|$ に関し近似できると主張している．$\|\cdot\|$ に関してなら常に言えていることであり，本質的な点は $\|\cdot\|$ 及び $\|d\cdot\|$ に関して同時に近似できる点にある．なお，d の formal adjoint を $\delta(=-{*d*})$ とおき，同様に $\bar{\delta}_i$ を考えれば，主張Cは，

$$\bar{\delta}_i^* = \bar{d}_i,$$

$$\text{i.e., } (\bar{d}\alpha,\beta)=(\alpha,\bar{\delta}\beta) \text{ for } \alpha\in\mathrm{dom}\,\bar{d}_i,\ \beta\in\mathrm{dom}\,\bar{\delta}_i,$$

(Stokes' theorem in the L^2-sense)

となっていることと同値である．

注意　これの成立しない singular space を人工的に作ることができる．

さて，以上，主張A, B, Cを仮定すると次を得る：

豆　$\alpha = \phi + dr \wedge \omega \in L^2\Lambda^i(U^*)$.

(1) $i = 0$ or 1 の時, $\alpha \in \mathrm{dom}\, d_i$ なら,

(i) $\kappa\alpha \in \mathrm{dom}\, d_{i-1}$,

(ii) $d\kappa\alpha + \kappa d\alpha = \alpha - \phi(a)$.

(2) $i=2$ の時, $\alpha \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_i$ なら, ほとんどの $0<a\leq 1$ に対して次を満たすような $\psi \in \mathrm{dom}\, \bar{\hat{d}}_{i-1}$ (link L上のdを $\hat{d}$ と書き $\bar{\hat{d}}_{i-1}$ を考えている) が存在する; (κを定義するためにaが必要)

(i) ψ (L上のform) を自然に U^*上のformとみなした時, $\kappa\alpha + \psi \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_{i-1}$,

(ii) $\bar{d}(\kappa\alpha + \psi) + \kappa\bar{d}\alpha = \alpha$.

(3) $i = 3$ or 4 の時, $\alpha \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_i$ なら,

(i) $\kappa\alpha \in \mathrm{dom}\, \bar{d}_{i-1}$,

(ii) $\bar{d}\kappa\alpha + \kappa\bar{d}\alpha = \alpha$.

(2)の略証) $\alpha \in \mathrm{dom}\, d_i$ が $r>0$ が充分小さい時, $\alpha(r,\cdot\cdot) \equiv 0$ であると仮定する. ($0<a\leq 1$ はこの場合全てのa) するとこのαに関しては, $\psi = \int_0^a \omega\, dr$ とおくと, 形式的に,

(2.7)　$\hat{d}\psi = \phi(a) - (\kappa d\alpha)(a)$

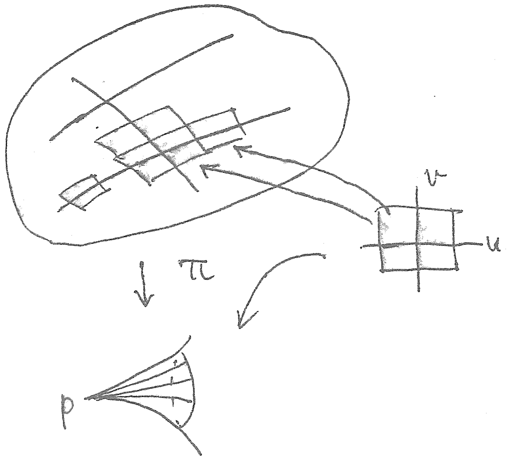
(2.8) $\qquad d(\kappa\alpha+\psi)+\kappa d\alpha=\alpha$

を得る. そして主張A, Bより, $\kappa\alpha+\psi$, $\kappa d\alpha\in L^2(U^*)$ であることがわかり (2.8)より $d(\kappa\alpha+\psi)\in L^2_i$, よって $\kappa\alpha+\psi\in\mathrm{dom}\,\bar{d}$ がわかる. つまりこの α については(2)が示された. そして主張Cより任意の $\alpha\in\mathrm{dom}\,\bar{d}_i$ は上述の α 達によって norm $\|\cdot\|+\|d\cdot\|$ に関して近似できることより $\mathrm{dom}\,\bar{d}_i$ の元に関しても(2)が示される.

そして系より命題2.1が証明されることは明らかであろう ($i\le 1$ の場合, 系の(1)で $a=1$ とおく.)

このようにして, 命題2.1は主張A, B, Cに帰着されたことになる. そしてお気付きのように, ここまでは (イ)−(ニ) の (イ) の部分のみが表に出ていた. (イ)−(ニ)の本質的部分(ニ)が使われるのは, これら主張の証明においてである. 次の§でそれについて少々説明する.

(イ)−(ニ)について: ごく簡単に説明する. 多様体 X の解消をいったん作り, さらに blowing-ups を必要なだけ繰り返すと次のような"非常に良い解消" $\pi:\tilde{X}\to X$ を作ることができる: $\pi^{-1}(p)$ の任意点のまわりの適当な



座標近傍 $(U,(u,v))$ を取ると，π は次のように書き下せる；($p=[1,0,\cdots 0]\in\mathbb{P}^N$ とし，そのまわりの座標 $[w_0,\cdots,w_N]\mapsto(z_1,\cdots,z_N)=(w_1/w_0,\cdots)$ を考える．ただし，$z_1,\cdots,z_N$ の順序は無視するとして）

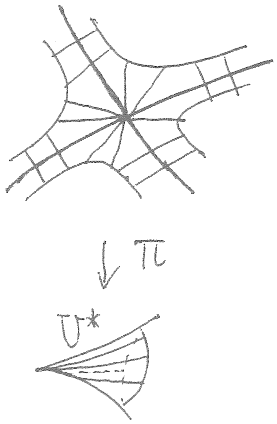
$$
\left[\begin{array}{ll}
z_1 = u^{n_1}v^{m_1} & ,\ (n_1,m_1)\neq(0,0) \\
z_2 = f_2(z_1)+u^{n_2}v^{m_2}g_2(u,v) & ,\ \det\begin{pmatrix} n_1 & m_1 \\ n_2 & m_2\end{pmatrix}\neq 0,\ g_2(0,0)\neq 0 \\
\vdots & \\
z_l = f_l(z_1)+u^{n_l}v^{m_l}g_l(u,v) & ,\ \det\begin{pmatrix} n_1 & m_1 \\ n_l & m_l\end{pmatrix}\neq 0,\ g_l(0,0)\neq 0 \\
z_{l+1} = f_{l+1}(z_1) & \\
\vdots & \\
z_N = f_N(z_1) &
\end{array}\right.
$$

ここで $f_j=\sum a_{j,n}z^{\varepsilon_n}$，$\varepsilon_n\geqq 1$

$n_1\leq n_2\leq\cdots\leq n_l$

$m_1\leq m_2\leq\cdots\leq m_l$

また，$\pi^{-1}(p)\ni x$（座標近傍の中心）が divisors の交点であるとき（$n_1m_1\neq 0$ である）　$0<\left|\frac{n_2}{n_1}-\frac{m_2}{m_1}\right|<1$ である．



そこで左図のように適当に分割（divisorsの交点の近傍の分割の図は全くあやしい）した時，それの与えるU^*の分割が（ハ），（ニ）のW_j達である：divisorsの交点の近傍の部分のW_jが$W(+)$とquasi-isometric（$c=\min\{\frac{n_2}{n_1},\frac{m_2}{m_1}\}$, $\tilde{c}=\max\{\frac{n_2}{n_1},\frac{m_2}{m_1}\}$, $b=\tilde{c}-c$）であり，そうでない点の近傍の部分のW_jが$W(-)$とquasi-isometric（この時，$n_1=0$ or $m_1=0$である：$n_1=0$なら$c=\frac{m_2}{m_1}$，$m_1=0$なら$c=\frac{n_2}{n_1}$）となる．

§3. 主張A, B, Cの証明のアイデア

§2の（ニ）で与えたI_jは有界作用素達

(3.1) $$L^2\Lambda^i(W_j) \underset{I^*}{\overset{I_*}{\rightleftarrows}} L^2\Lambda^i(W(\pm))$$

を与えている．また，$W_j(\varepsilon)=\{(r,\hat{x})\in W_j \mid r=\varepsilon\}$, $W(\varepsilon,\pm)=\{(r,\cdots)\in W(\pm)\mid r=\varepsilon\}$とおけばさらに有界作用素達

(3.2) $$L^2\Lambda^i(W_j(\varepsilon)) \underset{I(\varepsilon)^*}{\overset{I(\varepsilon)_*}{\rightleftarrows}} L^2\Lambda^i(W(\varepsilon,\pm))$$

が与えられる．ここで重要なことは，$I(\varepsilon)_*$, $I(\varepsilon)^*$ の (operator) norms $\|I(\varepsilon)_*\|$, $\|I(\varepsilon)^*\|$ が $0<\varepsilon\leq 1$ に関して一様に有界なことである．こうしたことは全て I_j が quasi-isometric であることより簡単に導かれる．

さて，主張 A, B に関しては明らかに，各 W_j 上で考えれば良い．つまり，それぞれの主張で L, U^* を $W_j(1)$, W_j におきかえたもの，を証明すれば良い．そして (3.1), (3.2) を通して，さらにそれぞれの主張を $(W(1,\pm), W(\pm))$ に関して証明すれば良いことがわかる．この段階までくると，§2 (二) の types (±) の metrics が非常に扱いやすいものとなっているため，直接の計算によって，それらが証明される（$0<b<1$ は本質的である）．

主張 C について：この場合，特に $i=1,2$ の場合には，その主張を $W(\pm)$ 上のそれにまで簡素化すること自体，それほど自明なことではない．ただ，いずれにしろ，最終的には，$W(\pm)$ 上での主張を証明することになる．

以上，このノートに関する詳細は，[9]（及び [8]）を参照されたい．

REFERENCES

[1] J.Cheeger : On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds, Proc. Sym. Pure Math., Providence, 36, 1980, 91-146.

[2] ——, M.Goresky and R.MacPherson : L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varieties, Ann. Math. Studies, 102(1982), 303-340.

[3] M.Goresky and R.MacPherson : Intersection homology theory, Topology, 19(1980), 135-162.

[4] W.C.Hsiang and V.Pati : L^2-cohomology of normal algebraic surfaces I, Invent. Math., 81(1985), 395-412.

[5] M.Nagase : L^2-cohomology and intersection homology of stratified spaces, Duke Math. J., 50(1983), 329-368.

[6] —— : Sheaf theoretic L^2-cohomology, Adv. Studies in Pure Math. 8 (Complex Analytic Singularities), 1986, 273-279.

[7] —— : On the heat operators of cuspidally stratified Riemannian spaces, Proc. Japan Acad., 62 (1986), 58-60.

[8] —— : On the heat operators of normal singular algebraic surfaces, preprint.

[9] —— : Remarks on the L^2-cohomology of singular algebraic surfaces, preprint.

S^5内のホモロジー3球面と3変数複素多項式の特異点

東大理　佐伯修

§1. 序

fを$(n+1)$-変数の複素係数多項式で、$f(\vec{0})=0$を満たし、$\vec{0}$を孤立特異点に持つものとする。（すなわち、$\{z\in\mathbb{C}^{n+1};\ \frac{\partial f}{\partial z_1}(z)=\cdots=\frac{\partial f}{\partial z_{n+1}}(z)=0\}$で$\vec{0}$が孤立点。）この時、次のことが知られている。

<u>定理</u> 1.1　(Milnor [11])

(1)　$(D_\varepsilon^{2n+2}, D_\varepsilon^{2n+2}\cap f^{-1}(0))$ は $(S_\varepsilon^{2n+1}, S_\varepsilon^{2n+1}\cap f^{-1}(0))$ の cone と同相。ここで、$D_\varepsilon^{2n+2}=\{\|z\|\leqq\varepsilon\}$, $S_\varepsilon^{2n+1}=\partial D_\varepsilon^{2n+2}$, εは十分小さな正数である。

(2)　$K_f=S_\varepsilon^{2n+1}\cap f^{-1}(0)$ とおくと、

$$\varphi=f/\|f\| : S_\varepsilon^{2n+1}-K_f \longrightarrow S^1$$

は C^∞ fibration で、次を満たす。

①　Fをφの fiber とすると、Fは $2n$ 次元の多様体

で、$\partial F = K_f$ 。

② K_f は $(n-2)$-connected 。

③ F は $S^n \vee \cdots \vee S^n$ と同じホモトピー型を持つ。

上の定理の (1) より、複素超曲面 $f^{-1}(0)$ の原点の近傍における位相的状況を見るには、$(S_\varepsilon^{2n+1}, K_f)$ さえ調べれば良いことがわかる。そこで、K_f の S^{2n+1} における isotopy class を、f に付随した algebraic $(2n-1)$-knot と呼ぶことにする。

$n \neq 2$ の時は、algebraic $(2n-1)$-knot の位相的性質はかなり良くわかっている。一般に S^{2n+1} 内の余次元2部分多様体 K が、上の定理の ①〜③ を満たすような fibration φ を持つ時、K を simple fibered $(2n-1)$-knot と呼ぶが、たとえば $n \geqq 3$ の時には次のことが知られている。

定理 1.2 (Durfee [2], Kato [5])

$n \geqq 3$ の時、各 knot にその Seifert matrix を対応させる写像

$$\Phi_n : \left\{\begin{array}{c}\text{simple fibered}\\ (2n-1)\text{-knots}\\ \text{in } S^{2n+1}\end{array}\right\}\Big/\text{isotopy} \longrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{integral}\\ \text{unimodular}\\ \text{matrices}\end{array}\right\}\Big/\text{congruence}$$

は well-defined で全単射になる。

（Seifert matrix については §2 を参照して下さい。）

この定理は $n=2$ の時には成り立たない。実際 Φ_2 は単射でないことが知られている [13]。

本講演では $n=2$ の時、すなわち3変数複素多項式の特異点のまわりに現われる algebraic 3-knot の位相的性質を調べるのが目的である。ただし、一般の場合は技術的に難しい面があるため、主に埋め込まれた3次元多様体がホモロジー3球面の場合を扱う。

なお、以下ではすべて C^∞ カテゴリーで考え、多様体はすべてコンパクトで向きづけられているものとする。

§2. algebraic 3-knot の isotopy type

S^5 に埋め込まれたホモロジー3球面の isotopy class のことをここでは <u>3-knot</u> と呼ぶことにする。また、埋め込まれたホモロジー3球面の微分同相型 Σ を明記した

い時には、特に $\mathbb{Z}$-knot と呼ぶことにする。3-knot K が simple とは、$\pi_1(S^5-K)$ が無限巡回群になる時をいう。定理1.1より、algebraic 3-knot は simple になることがわかる。そこでこの節では、必ずしも fibered とは限らない simple 3-knots を isotopy で分類することを考える。

Kを 3-knot とする。この時 S^5 の4次元部分多様体 Fで、$\partial F = K$ となるものが存在する。この時、双線型写像 $\Gamma_K : H_2(F;\mathbb{Z}) \times H_2(F;\mathbb{Z}) \to \mathbb{Z}$ を、$\Gamma_K(x, y) = lk(i_* x, y)$ で定義する。ここで $i: F \to S^5 - F$ は positive normal 方向への平行移動であり、lk は S^5 での linking number を表わす。この Γ_K を、K の Seifert form と呼ぶ。また、Γ_K を行列で表わしたもののことを Seifert matrix と呼び、L_K と書く。

一般に、整数成分の正方行列 L_1, L_2 に対し、ある unimodular matrix P が存在して、$L_1 = P L_2 {}^t P$ となる時 L_1 と L_2 は congruent であるという。また、

$$\left(\begin{array}{c:cc} L_1 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hdashline * & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad や \quad \left(\begin{array}{cc:cc} \multicolumn{2}{c}{L_1} & * & 0 \\ \hdashline \multicolumn{2}{c}{0} & 0 & 1 \\ & & 0 & 0 \end{array}\right)$$

なる形の行列を、L_1 の elementary enlargement という。そして congruence

と elementary enlargement で生成される、整数成分の正方行列の間の同値関係のことを <u>S-equivalence</u> と呼ぶ。

以上の定義のもとに、simple 3-knots は次のように分類される。

<u>定理</u> 2.1　任意のホモロジー3球面Σに対し、各Σ-knot にその Seifert matrix を対応させる写像

$$\left\{\begin{array}{l}\text{simple}\\ \Sigma\text{-knots}\\ \text{in } S^5\end{array}\right\}\Big/\text{isotopy} \longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\text{integral square matrices } L\\ \text{s.t. } \det(L+{}^tL)=\pm 1,\\ \operatorname{sign}(L+{}^tL)\equiv 8\rho(\Sigma) \pmod{16}\end{array}\right\}\Big/S\text{-equivalence}$$

は well-defined で全単射になる。ここで、$\rho(\Sigma)$ $(\in\{0,1\})$ はΣの Rohlin 不変量を表わす。

(注) この定理は、$\Sigma=S^3$ の時の Levine の結果 [9] の一般化である。

上の定理により、ホモロジー3球面となる algebraic 3-knot の isotopy type を調べるには、埋め込まれた3次元多様体が何であるかをはっきりさせ、さらに knot の Seifert matrix を求めれば良いことになる。し

かし、3変数の時に限らず、algebraic knot の Seifert matrix の具体的な計算方法についてはあまりわかっておらず、今後の研究が期待される所である。

なお、algebraic 3-knot でホモロジー3球面となるものは豊富に存在する。たとえば、任意の2変数既約多項式 $g(x,y)$ に対し、$f_r(x,y,z) = g(x,y) + z^r$ とおくと、g.c.d. $(e, r) = 1$ なる r に対し、K_{f_r} はホモロジー3球面になる。（ここで $e(<\infty)$ は g に対する Milnor fibration の monodromy の order である。）

定理2.1を algebraic 3-knot に応用すると、たとえば分解可能な algebraic 3-knot の存在が示せる。詳しくは [13], [14] を参照して下さい。

§3. algebraic 3-knot と homology cobordism

これまでは knot の isotopy による分類を中心に考えてきたが、この節では cobordism による分類を考える。$n \neq 2$ の時は、algebraic $(2n-1)$-knot として球面が現われることがしばしば起こるので、普通の knot cobordism group を考えることに意味があるが、$n = 2$ の時には Mumford の結果 [12] により、3次元球面は決

して algebraic 3-knot になり得ないことが知られている。したがって algebraic 3-knot を考える時には、S^3-knot だけではなく、少なくともホモロジー3球面を埋め込んだ 3-knot にまで範囲を広げて考える必要が生じる。そこでこの節では、3-knots に対し homology cobordant という概念を導入し、それに関する algebraic 3-knot の性質を見てゆくことにする。

<u>定義</u>　2つの 3-knots K_0, K_1 が <u>homology cobordant</u> とは、$[0,1] \times S^5$ の4次元部分多様体 W で、次の (1), (2) を満たすものがある時をいう。

(1) W は $\partial([0,1] \times S^5)$ と横断的に交わり、

$$W \cap \partial([0,1] \times S^5) = \partial W = 1 \times K_1 \cup 0 \times (-K_0) 。$$

(2) 包含写像が導く準同型写像 $H_*(j \times K_j ; \mathbb{Z}) \longrightarrow H_*(W ; \mathbb{Z})$ は同型。$(j = 0, 1)$

また、上の W として $[0,1] \times K_0$ と微分同相なものがとれる時、K_0 と K_1 は <u>concordant</u> であるという。

homology cobordant という関係は同値関係となる。そこで、3-knots 全体をこの関係で割った集合を C_3^H

と書くことにする。これは連結和を加法とするアーベル群になる。C_3^H を 3-knot の homology cobordism group と呼ぶ。

次に C_3^H を記述するために2つの群を導入する。2つのホモロジー3球面 Σ_0, Σ_1 が homology cobordant とは、ある4次元多様体 V で、$\partial V = \Sigma_1 \cup (-\Sigma_0)$ となり、かつ包含写像が導く準同型写像 $H_*(\Sigma_j;\mathbb{Z}) \to H_*(V;\mathbb{Z})$ $(j=0,1)$ が同型となるものが存在する時をいう。ホモロジー3球面全体を homology cobordant という同値関係で割った集合を $\mathcal{H}^3$ と書く。これは連結和を加法とするアーベル群になる。$\mathcal{H}^3$ をホモロジー3球面の homology cobordism group と呼ぶ。

次に、2つの整数成分の正方行列 L_0, L_1 が cobordant とは、$L_0 \oplus (-L_1)$ が、$\left(\begin{array}{c:c} 0 & N_1 \\ \hdashline N_2 & N_3 \end{array}\right)$ （N_i は同じ size の正方行列）なる形の行列に congruent になる時をいう。$\det(L+{}^tL)=\pm 1$ なる行列だけを考えると、この cobordant という関係が同値関係になることがわかる。そこで、$\det(L+{}^tL)=\pm 1$ なる行列全体をこの同値関係で割った集合を G_+ と書く。これは block sum

を加法とするアーベル群になる。

(注) $\mathcal{H}^3$ の群構造については、全射準同型写像

$\rho : \mathcal{H}^3 \to \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ （Rohlin 不変量）が存在することと、無限位数の元が存在することぐらいしか知られていない。しかし、G_+ は $\mathbb{Z}^\infty \oplus (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^\infty \oplus (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\infty$ と同型となることが知られている（[8]）。

$\mathcal{H}^3$ と G_+ を使うと、3-knot の homology cobordism group C_3^H は次のように記述できる。

定理 3.1

$$C_3^H \cong \{[\Sigma]\oplus[L] \in \mathcal{H}^3 \oplus G_+ \,;\, \mathrm{sign}\,(L + {}^tL) \equiv 8\rho(\Sigma) \pmod{16}\}$$

（これは $\mathcal{H}^3 \oplus G_+$ の指数 2 の部分群 ）

同型は、各 3-knot K に対し、その微分同相型と、Seifert matrix を対応させることにより得られる。

この定理と、3次元 knot cobordism group に関する Levine の結果 [7] をあわせると、次を得る。

系 3.2 $0 \to C_3 \xrightarrow{i} C_3^H \xrightarrow{\pi} \mathcal{M}^3 \to 0$

は exact。ここで C_3 は 3 次元 knot cobordism group、i は canonical な包含写像、π は埋め込みを忘れる写像である。

定理 3.1 は、Levine が C_3 を代数的に記述したのと同様の手法を使って示すことができる。また、その証明を良く見れば、次が成りたつことがわかる。

命題 3.3 2 つの homology cobordant な 3-knots K_0 と K_1 が 3 次元多様体として微分同相ならば、K_0 と K_1 は concordant になる。

さて次に、algebraic 3-knot が homology cobordism に関してどのような性質を持つかということを考える。まず最初に、3-knot の homology cobordism group C_3^H の元としては次の性質を持つことがわかる。

命題 3.4 algebraic 3-knot は C_3^H で non-zero で、かつ無限位数を持つ。

(注) $n \neq 2$ の時は、homology cobordism group のかわりに普通の knot cobordism group C_{2n-1} を考えると、algebraic $(2n-1)$-knot に関して同様のことが成立することが知られている([10])。

次に、次のような問題を考える。

<u>問題</u>　homology cobordant な2つの algebraic 3-knots は常に isotopic か?

他の次元でも同様の問題が考えられてきたが([3])、現在の所 classical knot の場合に成立することが知られているだけで、一般の次元では今だに解決されていない。

ここでは上の問題に部分的解答を与える。

一般に、$(n+1)$-変数複素多項式 $f(z_1, \cdots, z_{n+1})$ が <u>weighted homogeneous</u> であるとは、ある正の有理数の組 $(w_1, \cdots, w_{n+1})$ があって、f の各単項式 $c z_1^{a_1} \cdots z_{n+1}^{a_{n+1}}$ $(c \neq 0)$ に対し、$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{a_i}{w_i} = 1$ が成り立つ時をいう([11])。

命題3.5　f, g を3変数の weighted homogeneous polynomial で、原点を孤立特異点に持つものとする。この時もし algebraic 3-knots K_f, K_g がホモロジー3球面で、しかも 3-knotsとして homology cobordant であれば、K_f と K_g は isotopic になる。

(注) 上の命題は、S^5 への埋め込みを忘れて、algebraic 3-knot の微分同相型だけを考えると成立しない。たとえば $x^2+y^3+z^{13}$ と $x^3+y^4+z^5$ に付随した algebraic 3-knots は可縮な4次元多様体を bound するので $\mathcal{H}^3$ の元として同じになるが、微分同相にはならない。

§4. algebraic 3-knot の Murasugi 数

この節では、3-knot に対し Murasugi 数という不変量を定義し、algebraic 3-knot の Murasugi 数に関する結果をいくつか述べる。

K を 3-knot とする。この時、D^6 の4次元部分多様体 W で、($\partial D^6 = S^5$)

(1)　$\partial W = K$ 。

(2) W は $S^2 \vee \cdots \vee S^2$ と同じホモトピー型を持つ。

を満たすもの全体の集合を $\mathcal{G}_K$ とする。この時常に $\mathcal{G}_K \neq \phi$ となることが示せる。そこで、

$g(K) = \min\{\operatorname{rank} H_2(W;\mathbb{Z})\,;\, W \in \mathcal{G}_K\}$ と定義する。これを 3-knot K の Murasugi 数と呼ぶ。これは K の concordance invariant になる。

(注) これは classical knot の 4-ball genus に対応する不変量である。また、Murasugi 数は高次元の knot に対しても同様に定義できる。

定理 1.1 より、多項式 f に付随した algebraic knot K_f は fibered knot であり、その fiber F は $S^n \vee \cdots \vee S^n$ と同じホモトピー型を持っていた。この S^n の個数は f によって決まるので $\mu(f)$ と書き、f の Milnor 数と呼ぶ。定義より、常に $\mu(f) \geqq g(K_f)$ となることがわかる。

Murasugi 数と Milnor 数に関しては、たとえば次の定理が知られている。

<u>定理</u> 4.1 (Michel [10])

$(n+1)$-変数多項式 f に付随した algebraic knot K_f がホモロジー球面の時、$n \geqq 3$ ならば、$\mu(f) = g(K_f)$ なることと、f が原点を simple critical point に持つこととは同値である。

(simple critical point の定義については、たとえば [4] を参照して下さい。)

以後この節では $n=2$ の時を考える。

<u>定義</u>　整数成分の $m \times m$ 行列 L が <u>b-cobordant</u> $(b \geqq 0)$ とは、L が

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} \overbrace{}^{k} & \overbrace{}^{l} \end{array} \\ \begin{array}{c} k\{ \\ l\{ \end{array} & \left(\begin{array}{c:c} 0 & N_1 \\ \hdashline N_2 & N_3 \end{array}\right) \end{array} \qquad \left(\begin{array}{l} k \geqq \dfrac{m}{2} - b, \\ m = k + l \end{array} \right)$$

なる形の行列と congruent になる時をいう。

<u>定義</u>　3-knot K の Seifert matrix を L_K とした時、対称行列 $L_K + {}^tL_K$ の signature のことを K の <u>signature</u> と呼び、$\sigma(K)$ と書く。(これは 3-knot

Kの homology cobordism invariant になる。)

(注) 任意の 3-knot K に対し、$|\sigma(K)| \leqq g(K)$ が成り立つ。

以上のような定義のもとで、3-knot の Murasugi 数は次のように上から評価できる。

<u>命題</u> 4.2　各 3-knot K と $g > |\sigma(K)|$ なる整数 g に対し次は同値。

(1) $g(K) \leqq g$ 。

(2) ある 1-connected な 4次元 spin 多様体 V で、

- ∂V は K と微分同相 。
- $\operatorname{rank} H_2(V;\mathbb{Z}) \leqq g$ 。
- $\operatorname{sign} V = \sigma(K)$ 。

の3つの条件を満たすものが存在し、さらに K の Seifert matrix L_K は $\frac{g}{2}$-cobordant 。

命題 4.2 を使うと、$\mu(f) \gneqq g(K_f)$ なる algebraic 3-knot の例をたくさん作ることができる。

例　$f(x,y,z)=x^2+y^3+z^{13}$ とする。すると、K_f はホモロジー3球面で、$\mu(f)=24$, $\sigma(K_f)=-16$, K_f の Seifert matrix は 11-cobordant ということがわかる。また、K_f は可縮な4次元多様体 M を bound することが知られている。したがって、$V=M\#V_4$ (V_4 は $\mathbb{C}P^3$ 内の degree 4 の非特異超曲面) とおくと、K_f は $g=22$ に対して命題4.2の(2)を満たすことがわかる。したがって $g(K_f)\leqq 22<24=\mu(f)$ となる。

(注)　$X=f^{-1}(\delta)\cap D^6_\varepsilon$　$(0<\delta\ll\varepsilon\ll 1)$ とおくと、[11]より、X は f の Milnor fiber と微分同相で、しかも $\partial X=K_f$ となることがわかる。しかも X は複素超曲面だから、[6]より、K_f を境界とする D^6 内の4次元多様体のうちで体積が最小となることがわかる。しかし上の例のように、位相的に(たとえば middle Betti 数が)最小とはならないこともある。

その他に $\mu(f)>g(K_f)$ となる例としては、たとえば $f(x,y,z)=x^2+y^3+z^{12k-1}$ $(k\geqq 4)$ など

がある。しかし、 $\mu(f) = g(K_f)$ となる例ももちろんある。

<u>例</u> $f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^{11}$ とおく。すると K_f はホモロジー3球面で、$\mu(f) = 20$, $\sigma(K_f) = -16$ となることがわかる。さらに K_f は、intersection form が $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ と同型である 1-connected な4次元多様体 N を bound することが知られている。

さて、$\mu(f) > g(K_f)$ と仮定する。$W \in \mathcal{G}_{K_f}$ を、$g(K_f)$ を実現する元とする。すると、$\partial W = K_f$, $\operatorname{sign} W = -16$, $\operatorname{rank} H_2(W; \mathbb{Z}) < 20$ となることがわかる。そこで、$M = W \underset{K_f}{\cup} N$ とおくと、M は 1-connected な4次元閉多様体で、$\operatorname{sign} M = -16$ で $\operatorname{rank} H_2(M; \mathbb{Z}) < 22$ となることがわかる。ところが Donaldson [1] により、そのような C^∞ 多様体は存在しない。したがって、$\mu(f) = g(K_f)$ でなければならない。

f は原点を simple critical point には持たないことがわかるので、この例は定理4.1が $n=2$ の時に成り立たないことを示している。

参考文献

[1] S. Donaldson, Connections, cohomology and the intersection forms of 4-manifolds, J. Diff. Geom. 24 (1986), 275-341.

[2] A. Durfee, Fibered knots and algebraic singularities, Topology 13 (1974), 47-59.

[3] ——, Knot invariants of singularities, Algebraic Geometry (Arcata, 1974, Proc. Sympos. Pure Math. 29, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.) 1975, 441-448.

[4] ——, Fifteen characterizations of rational double points and simple critical points, L'Enseign. Math. 25 (1979), 131-163.

[5] M. Kato, A classification of simple spinnable structures on a 1-connected Alexander manifold, J. Math. Soc. Japan 26 (1974), 454-463.

[6] H. B. Lawson, Minimal varieties in real and complex geometry, Séminaire de Math. Sup., Press de l'Université de Montréal (1973).

[7] J. Levine, Knot cobordism groups in codimension two, Comment. Math. Helv. 44 (1969), 229-244.

[8] ——, Invariants of knot cobordism, Invent. Math. 8 (1969), 98 - 110.

[9] ——, An algebraic classification of some knots of codimension two, Comment. Math. Helv. 45 (1970), 185 - 198.

[10] F. Michel, Formes de Seifert et singularités isolées, Nœuds, tresses et singularités, Monographie de l'Enseign. Math. no. 31, Genève, 1983, 175 -190.

[11] J. Milnor, Singular points of complex hypersurfaces, Ann. of Math. Stud. no. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1968.

[12] D. Mumford, The topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity, Publ. I.H.E.S. 9 (1961), 5 - 22.

[13] O. Saeki, On simple fibered knots in S^5 and the existence of decomposable algebraic 3-knots, to appear in Comment. Math. Helv..

[14] ——, Knotted homology 3-spheres in S^5, to appear in J. Math. Soc. Japan.

[15] ——, Cobordism classification of knotted homology 3-spheres in S^5, preprint.

Lieの接触幾何学とLie多様体

名大教養　佐藤肇

S^nの(超球 に対しての)反転の積として表わされるMöbius幾何 は,多様体上でのConformal幾何,Hyperbolic幾何としての拡張を持った為に十分な発達を遂げ,数学,物理学において重要な概念となった。

S^nの向きづけられた超球の間のLaguerre反転の積で表わされる幾何をLaguerre幾何という。反転及びLaguerre反転の積として表わされる幾何をLie(の超球)幾何という。

Lie(の超球)変換は,超球の接触対を接触対にうつす為に,接触変換の部分群となり,それが(普通の意味での)有限次元Lie群となることから,その幾何学,偏微分方程式論における有用性は大であると思われる。

Lie幾何学の低次元の場合は,Lie環の間の同型写像を組み合わせることにより,そのままPenroseのTwistor幾何学として表われ,数理物理と,複素多様

体論の構成しを行った。

又、最近では、Eight 又は Taught 埋め込みという、Morse 関数の極値に対応する写像が、Lie 幾何と関係づけられ、活発な研究が産まれている。

しかしながら、Lie（の超球）幾何は、多様体上への拡張は知られておらず、その後 Lie 幾何は、人気を失っていた様に思われる。

田中昇氏の Cartan 接続の理論が、そのまま（理論的には）Lie 幾何に導入され、一般的に Lie（の接触）多様体 の概念が、接触多様体の中で位相的な条件上（接触構造群が $O(n-1)\times O(2)$ に還元）で定義される。Riemann 多様体の接球束はその代表的なものとなる。Lie 多様体の間の Lie 変換は、接触変換で、有限次元 Lie 群となる。Riemann 多様体の共形変換の prolongation は、その接球束の Lie 変換となるが、一般に、いつ真の部分群であるかは、まだ調べていない。

その接球束の Lie 構造を考えることにより、Riemann 多様体に対しても、Lie 平坦、Lie 幾何の Weyl の曲率テンソルが定義されるが、その具体的な表現は未だ不明である。Lie 幾何は、Conformal 幾何の Microlocal化

というべきものであることを注意しよう。5次元コンパクト Lie 平坦な多様体は、$\times \mathbb{R}$ をしたものに、自然に複素多様体の構造が入る。それが $\mathbb{Z}$-不変ならば、$\times S^1$ にコンパクトな複素多様体の構造が入る。いくつかのコンパクト複素3次元多様体の例を、実3次元多様体から作る話を、最後に述べるであろう。

我々の Lie 幾何に出てくる群は $O(n+1, 2)$ である。この群は、Möbius幾何の群 $O(n+1, 1)$ の prolongation として出てくるわけであるが、一方、Lorentz 幾何の isotropy 群も $O(n, 1)$ で、そのコンパクト化 $S^n \times S^1/\mathbb{Z}_2$ の Lorentz 共形変換の群も $O(n+1, 2)$ となっている。従って、Lie幾何と Lorentz 共形幾何学の対応、相関も、自然に期待される。

§1. Lie Geometry

Kugel で，単位球 S^n の向きづけられた umbilic な超球（小円）を表わす。一枚の Kugel Σ は，x を unit normal として

$$\Sigma = \{ y \in S^n,\ \langle y, x \rangle_0 = c,\ \underset{\text{for some}}{x \in S^n} \ -1 < c < 1 \}$$

としてあらわされ，$c \to 1$ の極限として，S^n の点自身も Kugel と考える。

$\mathbb{R}^{n+3}$ に符号 $(n+1, 2)$ の内積を入れ，$\langle\ \rangle$ で表わす。$P^{n+2} = \mathbb{R}^{n+3} - \{0\} / \mathbb{R}^*$ の部分空間 Q を

$$Q = \{ [v] \in P^{n+2},\ v \in \mathbb{R}^{n+3} - \{0\},\ \langle v, v \rangle = 0 \}$$

で定義すると Q は，$(n+1)$－次元多様体で，$(S^n \times S^1)/\mathbb{Z}_2$ と微分同相になる。Q は $S^1/\mathbb{Z}_2 = S^1$ 上の S^n－bdle であり，P^n 上の S^1 bdle でもある。n が奇数の時，Q は $S^n \times S^1$ と微分同相となる。

$\mathcal{K}$ で，S^n の Kugel 全体を表わすと，bijection

$$\phi : \mathcal{K} \longrightarrow Q = S^n \times (-1, 1] /_{\sim}$$

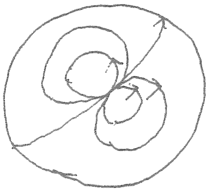
が

$$\phi(\Sigma) = (x, c)$$
$$\phi(y) = (y, 1) \qquad y \in S^n$$

で定義され，$\mathcal{K}$ も $(n+1)$－次元多様体となる。

逆写像 $\Phi^{-1}: Q \longrightarrow \mathcal{K}$ は、 $Q \ni [v]$ に対し
$\Phi^{-1}(v) = \{ y \in S^n ; \langle e_{-1} + y, v \rangle = 0 \}$ で与えられる。(e_{-1}, e_0 が time 方向の basis).

Contact Element で、向きをこめて接触している Kugel の集りの S^1-family をあらわす。



その接触 $(n-1)$ 平面の unit normal を取ることにより Contact Element は、S^n の接単位球束 T_1S^n の一点と対応する。

R^{n+3} の中の 2-plane 全体のなす Grassmann 多様体の中の部分空間 $\mathcal{P}$ を

$$\mathcal{P} = \{ P : \text{2-plane in } R^{n+3},\ \langle\ \ \rangle|_P = 0 \}$$

と定義する。

$P \in \mathcal{P}$ が与えられた時、$\exists x, \exists y \in R^{n+1}$ s.t.

$$e_{-1} + x \in P, \quad e_0 + y \in P$$

従って、$\langle x, x \rangle_0 = \langle y, y \rangle_0 = 1, \quad \langle x, y \rangle_0 = 0$
となる。

P に対して、(x, y) を対応させることにより、
bijection

$$\psi : \mathcal{P} \longrightarrow T_1 S^n$$

が得られる。

$\mathcal{P}$ は、1-form $\theta = \langle y, dx \rangle = \langle x, dy \rangle$ を接触形式とする接触多様体で次元は $(2n-1)$ となる。

Lie Kugel Γ とは、$T_1 S^n$ の subset で

$\Gamma = \{(x, y) ;\ \{x\}$: Kugel, y: unit normal$\}$

と表わされるものとする。Γ は S^{n-1} に微分同相である。Γ 上では、contact form θ は消えて、Γ は Legendre submanifold となる。

一般の Kugel Σ は、一般の Lie Kugel Γ で定める か、$\gamma : \mathcal{Q}(\cong \mathcal{K}) \longrightarrow \mathcal{P}(\cong T_1 S^n)$ の部分空間 という写像として、$\gamma(L) = \{P \in \mathcal{P} ; L \subset P\}$ で与えられる。$(L \in \mathcal{Q})$。

Def $O(n+1, 2)/_{\{\pm I\}}$ の元を Lie transformation と呼ぶ。これは $T_1 S^n \longrightarrow T_1 S^n$ として、Lie Kugel を他の Lie Kugel にうつす接触変換として定義され、

又、$Q \longrightarrow Q$ の写像としては、Contact Element を Contact Element に移すものとして定義される。(後者が、より古典的な考え方)

<u>演習問題(重要な問題)</u> S^n には $O(n+1,1)$ の元 f が、共形変換として働く。$v \in T_1S^n$ に対し $f_*(v)/|f_*(v)|$ を対応させることにより、$\tilde{f}: T_1S^n \longrightarrow T_1S^n$ が定まる。$\tilde{f}$ と、自然な埋め込み $O(n+1,1) \hookrightarrow O(n+1,2)$ による、f の定める Lie 変換が一致することを示せ。

各 Kugel に対し、unit normal 方向に parameter t だけ動かした、平行な Kugel を対応させる変換も Lie 変換となる。これは、T_1S^n の測地流に対応する。Lie 環の計算により、次のことがわかる。

<u>任意の Lie 変換 $f: T_1S^n \longrightarrow T_1S^n$ は、共形変換の prolongation (上の問題) と、測地流の、それぞれ有限個の結合で表わされる。</u>

任意の単位接球束の接触変換は、超曲面の自然な接球束への断面と結合することにより、{超曲面} $\longrightarrow$ {超曲面}

という写像を引き起こす。非特異な超曲面の像は、一般には特異な超曲面になる。 Lie 変換の場合，Kugel の像は Kugel になるが，トーラスの像には，Dupin のサイクロイド等があらわれ，<u>一般には，共形的変換の像よりも，沢山の物が表われる</u>のが，興味深い。

超曲面の主曲率がいずれも一定の時 <u>isoparametric</u> な超曲面，いずれも一定の重複度を持ち，その主曲率葉層の上で，主曲率が一定の時 <u>Dupin</u> 超曲面という。次が，未解決の問題である。

<u>予想</u> 球面にうめ込まれたコンパクトな Dupin 超曲面は，isoparametric な超曲面と Lie equivalent か？

このような超曲面のコホモロジー環は，複雑なトポロジーの計算により，よくわかっている。特に主曲率の個数が 1，2，3，4，6 に限られていることが証明されている。

2. Lie 代数.

Lie 変換の群 $\overset{G}{\overset{\|}{O(n+1,2)}}$ の Lie 環の構造を知ることは、基礎的である。次のような grading を与える。

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n+1,2) = \{ X \in \mathfrak{gl}(n+3, \mathbb{R}) ;\ {}^tXS + SX = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} & & -I_2 \\ & I_{n-1} & \\ -I_2 & & \end{pmatrix} \}$$

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2, \quad [\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j}$$

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & {}^tb \\ g & {}^td & -{}^ta \end{pmatrix} ;\ g, c \in \mathfrak{o}(2),\ e \in \mathfrak{o}(n-1) \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{-2} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;\ c = \begin{pmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & {}^tb \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & -{}^ta \end{pmatrix} : e \in \mathfrak{o}(n-1) \right\}$$

$$\mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 \\ 0 & {}^td & 0 \end{pmatrix} \right\} \qquad \mathfrak{g}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ g & 0 & 0 \end{pmatrix} : g = \begin{pmatrix} 0 & q \\ -q & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

次元 $$\frac{(n+3)(n+2)}{2} = 1 + 2(n-1) + \left(\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 4 \right) + 2(n-1) + 1.$$

$\mathfrak{g}' \equiv \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_1 + \mathfrak{g}_2$ subalgebra, 対応する Lie 群 G'

<u>Prop.</u> $G/G' \cong T_1 S^n$

$$T_0(T_1 S^n) \equiv \mathfrak{m} \cong \mathfrak{g}_{-2} \oplus \mathfrak{g}_{-1} \qquad (\mathfrak{g}_{-1} が接触構造)$$

$$G' \xrightarrow{\rho} GL(\mathfrak{m}) \qquad 線形 \text{ isotropy } 表現$$

$$\tilde{G} \equiv \rho(G')$$

$\tilde{G}$ の Lie alg. を $\tilde{\mathfrak{g}}$ と書く $\quad \tilde{\mathfrak{g}} \subset \mathfrak{gl}(2n-1)$

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ d & e & 0 \\ g & {}^t d & -{}^t a \end{pmatrix} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{ccc} 1 & n-1 & n-1 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} \operatorname{tr} a & 0 & 0 \\ -d_2 & e + a_1 I_{n-1}, & a_2 \\ d_1 & a_3 I_{n-1}, & e + a_4 I_{n-1} \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ n-1 \\ n-1 \end{array} \end{array}$$

となる事から、

$$\tilde{\mathfrak{g}} = \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{tr} a & 0 & 0 \\ * & & \\ * & & e \otimes a \end{pmatrix} ; \begin{array}{l} a \in \mathfrak{gl}(\ ) \\ e \in \mathfrak{o}(n-1) \end{array} \right\}$$

$$1 \longrightarrow \underset{\underset{G''}{\parallel}}{\operatorname{Ker}\rho} \longrightarrow G' \xrightarrow{\rho} \tilde{G} \longrightarrow 1$$

$$0 \longrightarrow \underset{\underset{\mathfrak{g}_2}{\cong}}{\mathfrak{g}''} \longrightarrow \mathfrak{g}' \xrightarrow{d\rho} \tilde{\mathfrak{g}} \longrightarrow 0$$

$$\tilde{G} = N \cdot G_0 \qquad N = \left\{ \left(\begin{array}{c|c} * & 0 \\ * & 1 \end{array} \right) \right\}, \quad G_0 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & O(n-1) \otimes GL(2) \end{pmatrix} \right\}$$

となる

3. Lie 多様体

接触多様体上の G ー構造の1つとして，次のように Lie（接触）多様体を定義する。

今，M を $(2n-1)$ 次元の接触多様体とする。即ち，

$$M = \bigcup U_i, \qquad \gamma_i : 1\text{-form on } U_i \qquad \gamma_i \wedge d\gamma_i^{n-1}(x) \neq 0 \quad \forall x \in U_i$$

$$\gamma_i = f_{ij}\gamma_j, \qquad f_{ij} \in C^\infty(U_i \cap U_j)$$

この時，$(2n-2)$ 次元 Distribution D が

$$D = \{ X \in T_x(M) ; \gamma_i(X) = 0 \quad x \in U_i \}$$

で定義される。

この時，自然に TM の構造群は

$$G_0^{\#} = \left\{ \begin{array}{c|cc} & 1 & 2n-2 \\ \hline 1 & a & 0 \\ 2n-2 & b & C \end{array} ; C \in Sp(n-1;\mathbb{R}),\ a \neq 0 \right\}$$

に含まれる。

§2で定義した群 $\tilde{G}$ を考えると，$\tilde{G} \subset G_0^{\#}$ となっている。

<u>定義</u> 接触多様体 M の構造群 $G_0^{\#}$ を持つ frame bundle の $\tilde{G}$ の reduction を M の Lie（接触）構造という。$\tilde{G}$ - bundle 同型を Lie 同型という。

例 (M, g) を n 次元 Riemann 多様体とする。

FM を M の frame bundle とすると、FM は M 上の $O(n)$-主束となる。$FM = \{ z : R^n \longrightarrow T_x M$, linear isometry$\}$ と考えられる。

今 $\pi : FM \longrightarrow T_1 M$ を $z \in FM$ に対し $\pi(z) = (x, z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix})$ で定義する。この時 π は $T_1 M$ 上の $O(n-1)$-主束となり、$T_1 M$ の接束に対応する主束となる。

$$T T_1 M = FM \times_{O(n-1)} R^{2n-1}$$

$$T_z T_1 M \cong H \oplus V \cong H \oplus V' \oplus \text{geod. flow}$$

今、$T_1 M$ 上の $\widetilde{G}$-主束 $\widetilde{P}$ を

$$\widetilde{P} \equiv FM \times_{O(n-1)} \widetilde{G}$$

で与えると、$\widetilde{P}$ は、$T_1 M$ 上の Lie (接触) 構造を定める。

例 N を complex parallelizable な射影多様体とし、L を、N の Kähler form に対応する complex line bdle に associate した S^1-bdle とする。この時 L には Lie (接触) 構造が入る。

4. Cartan 接続と田中の定理

Lie(の接触)構造が、接触多様体上に定義されたが、この時、自然に接続が入り(Cartan 接続)、同型問題が、その曲率の計算によって可能であるという田中の定理が存在している。これは、田中あるいは Chern-Moser による CR 多様体に対する接続のよう一般化であり、その場合の Frobenius の仮定 (integrability) に対応する部分が成立していないので、より微妙に複雑になって居り、実際の計算を可能にすることが、今後の課題と思われる。

今、$G = O(n+1, 2)$、$G/G' = T_1 S^n$ という model を次のように固定しておく。

M : $(2n-1)$ 次元多様体

P : G' を構造群とする M 上の主束

ω : $\mathfrak{g} = \mathfrak{o}(n+1, 2)$-valued 1-form on P

定義　(P, ω) が Cartan connection of type G/G'

$\Longleftrightarrow$ 1) $X \in TP$, $\omega(X) = 0 \Longrightarrow X = 0$

2) $\omega(A^*) = A \quad {}^\forall A \in \mathfrak{g}'$

3) $R_a^* \omega = Ad(a^{-1}) \omega \quad {}^\forall a \in G'$

この時，(P, ω) より，自然に曲率 K が定義される。
$\mathfrak{g}$ の grading により Spencer cohomology が定義され，K が harmonic という定義も与えられる。

<u>定義</u> (P, ω) Cartan connection of type G/G' が normal $\Longleftrightarrow$ K が harmonic.

<u>定理（田中）</u> (1) すべての normal Cartan connection of type G/G' は，M 上の Lie structure を定義し，又，M 上の Lie structure は，自然に normal Cartan connection を与える。
2) 上の対応は，互いの同型類に対して 1対1である。

<u>問題</u> (M, g) から作られる T_1M 上の Lie structure に対し，normal Cartan connection を構成せよ
（上の定理は，存在の証で，構成は明白ではない）.

normal Cartan connection に対し，conformal 幾何と同様に，Weyl の曲率テンソルが定義され，それが消える事が，Lie 平坦と同値になる。

M が Conformally flat の時，T_1M に定義された Lie structure は flat となる。

<u>問題</u> M が conformally flat でないが，T_1M が Lie flat になる事はあるか？

5. 低次元の場合

$n \le 4$ の場合，次のような Lie 群の間の Local Isomorphism があり，Penrose の Twistor 幾何が成立して居る。

$$
\begin{tikzcd}
SO(2,1) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong"] & SO(3,1) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong"] & SO(4,1) \arrow[d, phantom, "\cong"] & & \\
SL(2,\mathbb{R}) \cong SU(1,1) \cong Sp(1,\mathbb{R}) \arrow[d, hook] & SL(2,\mathbb{C}) \arrow[d, hook] & Sp(1,1) \arrow[d, hook] & & \\
SO(2,2) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong"] & SO(3,2) \arrow[r, hook] \arrow[d, phantom, "\cong"] & SO(4,2) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cong"] & SO(6,\mathbb{C}) \arrow[r, "Spin"] & PGL(4,\mathbb{C}) \\
SL(2,\mathbb{R}) \oplus SL(2,\mathbb{R}). & Sp(2,\mathbb{R}) & SU(2,2) & &
\end{tikzcd}
$$

対応する Lie 群の inclusion 関係を調べるのは，簡単ではない。

Penroseの Twistor Geometryでは、complex flag manifold

$$F_{d_1\cdots d_r} = \{(L_1, L_2, \ldots, L_r);\ L_1 \subset L_2 \subset \cdots \subset L_r \subset \mathbb{C}^n,\ \dim_{\mathbb{C}} L_j = d_j\}$$

を考える。特に $n=4$ とし、$\Phi = |z^0|^2 + |z^1|^2 - |z^2|^2 - |z^3|^2$ を考え、diagrams

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & F_{12} \arrow[dl] \arrow[dr] & & \supset (\Phi = 0) & & F^0 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ F_1 = P_3(\mathbb{C}) \arrow[rr, rightsquigarrow] & & F_2 = G_{2,4}(\mathbb{C}) & & N \arrow[rr, rightsquigarrow] & & M \end{tikzcd}$$

を考える。この時、$N = T_1S^3 = \mathcal{P}(n=3) \cong S^3 \times S^2$

$$M = \mathcal{H} \equiv Q\,(n=3) \cong S^3 \times S^1$$

である。我々の $\mathcal{P} = T_1S^3$ は $P_3(\mathbb{C})$ で $\Phi = 0$ で定義される、<u>flat CR-manifold with signature (1,1)</u> という model space にも等しい。

<u>系</u> Mを3次元 conformally flat manifold とする。その時 T_1M には自然に flat (integrable) CR-structure (with signature (1,1)) が入る。

<u>系</u> M を compact 3-dim conformally flat manifold

とする。その時、$T_1M\times\mathbb{R}$には complex structure が入る。

注 $M\times\mathbb{R}$に conformal flat structure が入れば、(あるいは self-dual structure が入れば) Atiyah-Hitchin-Singer により $P(V_-)$に integral complex structure が入り、$P(V_-)$は$T_1M\times\mathbb{R}$に微分同相である。

$T_1M\times S^1\cong M\times S^2\times S^1$ 上の複素構造に関しては次の様に考えられる。

Mを prime な 3-manifold の和に分解する。Thurston の 8つの geometry に対し、次が知られている。

<u>定理(神島、Goldman)</u> Nil, Solv の 2つの geometry は conformally flat 構造を持たない。

残りの 6つの geometry を持つM^3に対し、$M^3\times S^2\times S^1$は複素構造を与えることが出来る。又、M_1, M_2が共に conformally flat ならば、$M_1\# M_2$も

conformally flat な構造を持つことが知られている。今, M_1, M_2 を Nil, Solv とは別の structure の geometry の時, $(M_1 \# M_2) \times S^2 \times S^1$ にも complex structure を入れることが出来るが, 一般的な次の命題に対する証明は, まだ不明である。

予想 M^3: compact conformally flat 3-mfd.
その時 $M^3 \times S^2 \times S^1$ には complex structure が入る。

6. Tight and Taut Immersions

多様体の R^N への埋め込みの中で, tight 又 taught 埋め込みと呼ばれるものがある。これは幾何学的にも非常に楽しい話題であり, 又, 最小絶対全曲率を持つ埋め込みの拡張でもあって, 興味深い。

<u>定義</u> X: compact topological space. $f: X \longrightarrow R^N$ map が <u>tight</u> であるとは, 任意の affine 半空間 $h \subset R^N$ に対し

$$H_*(f^{-1}(f(X) \cap h); Z_2) \longrightarrow H_*(X; Z_2)$$

が injective.

<u>taught</u> であるとは, 任意の半径一定の N球, その補集合, 又は affine 半空間 $\Omega \subset R^N$ に対し

$$H_*(f^{-1}(f(X) \cap \Omega); Z_2) \longrightarrow H_*(X; Z_2)$$

が injective.

(taught $\Rightarrow$ tight)

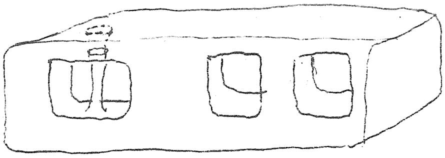
注 taught は共形幾何的概念, tight は affine 幾何的概念.

Kuiper は, 長年の仕事で, 2次元閉曲面の R^3 への tight immersion を研究した。X が連結閉曲面

の場合，tight の条件は，H_0 を考えるだけで十分で，この時 two piece property を持つ埋め込みともいう（半空間との交わりが空又は連結）．

定理（Kuiper） orientable な閉曲面は $\mathbb{R}^3$ への smooth tight embedding を持つ．non-orientable の場合 $\chi < -1$ の時 $\mathbb{R}^3$ への smooth tight immersion を持ち，$\chi = 1, 0$ の場合，$\mathbb{R}^3$ への smooth tight immersion は持たない。

（tight immersion の例）



未解決の問題

$P^2 \# T^2$ $(\chi = -1)$ は $\mathbb{R}^3$ への smooth tight immersion を持つか。

一般に，例え locally flat でも，PL と smooth は，うめこみの次元（tight）等も，異なっていることに注意しておこう。

又、exotic sphere は決して $\mathbb{R}^N$ には smooth に tight に immerse されないことも知られている。ある $\mathbb{R}^N$ に smooth に tight immerse される多様体すべてを決定することも可能であろう。これは taught と仮定すると、更に詳しいことがわかるであろう。

Dupin 超曲面、isoparametric 超曲面は皆 taught immersion の例である

compact manifold M から $\mathbb{R}^N$ への埋め込みが tight となる必要十分条件は、次の2つが同時に成立することである。

1) $\tau(M, f)$：絶対全曲率 $\equiv \int_{\nu_1 M} |G|\, d\sigma$ が最小

G : Lipschitz-Killing curvature $= (-1)^n \det A_\xi$

2) $\gamma(M)$ (: Morse number Morse function の critical pt. の最小値)

$$= \sum_{i=0} \dim H_i(M, \mathbb{Z}_2)$$

1) の条件は、$\tau(M, f) = \gamma(M)$ と同値である。

REFERENCES

*) Atiyah-Hitchin-Singer, Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry Proc. R. Soc. Lond. A 362, 425~461 (1978)

*) Blaschke, Vorlesungen über Differentialgeometrie III Springer, Berlin (1929)
(幾何的微分幾何の宝庫)

*) Cecil-Ryan, Tight and taut immersions of manifolds, Pitman Adv. Publ. Prog., Boston. (1985)

*) Cecil-Chern, Tautness and Lie sphere geometry, (preprint)

*) Chern-Moser, Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133, 219~271 (1974)

*) Kamishima, Conformally flat manifolds whose development maps are not surjective. I. Trans. Amer. Math. Soc. 294 607~623 (1986)

*) ———, Deformation of Kleinian groups and Application to Conformal Geometry. トポロジー分科会アブストラクト (1986, 秋, 千葉大学)

*) Miyaoka, R, Compact Dupin Hypersurfaces with Three Principal Curvature, Math Z. 187, 433~452 (1984).

*) ———, Tant Embeddings and Dupin Hypersurfaces. Lec Note in Math, 1090, 15~23 (1984), Springer.

*) Pinkall, Dupin Hypersurface, Math Ann. 270, 427~440 (1985).

*). Tanaka, On non-degenerate real hypersurfaces, graded Lie algebras and Cartan connections, Japan. J. Math 2, 131~190 (1976)

*) ———, On the equivalence problems associated with simple graded Lie algebras Hokkaido Math. J. 8, 23~84 (1979).

*) Wells, R.O, Complex manifolds and mathematical physics, Bull. Amer. Math Soc. 1, 296~336 (1979)

*) Willmore, Total curvature in Riemannian geometry. Ellis Horwood Ltd. (1982)

HOMEOMORPHISM SPACES OF COMPACT MANIFOLDS, AN INFINITE-DIMENSIONAL VIEWPOINT

Raymond Y Wong

University of California, Santa Barbara, CA

Let $H(M)$ denote the space of self homeomorphisms of a compact manifold (with compact-open topology). Since the celebrated results of Edwards-Kirby-Cernavskii ([C],[EK]) showing that $H(M)$ is locally contractible, the progress of infinite dimensional topology has added considerable insight into the structures of $H(M)$. In 1972 Geoghegan [Ge_1] Has shown, among more general results concerning function spaces, that $H(M)$ is homeomorphic to $H(M)\times\ell_2$, where ℓ_2 is the separable Hilbert space of square-summable real sequences. Then in 1974 Torunczyk [To_1] proved an important result concerning characterization of ℓ_2-manifold factors : the product of every complete separable metric absolute neighborhood retract (ANR) with ℓ_2 is an ℓ_2-manifold. Consequently, $H(M)$ is an ℓ_2-manifold if it can be shown to be an ANR.

(A long sought-after result concerning an axiomatic characterization of ℓ_2-manifolds was subsequently established by Torunczyk in 1981 [To$_2$]). If Dim M $\leq$ 2, it is known that H(M) is an ANR. In fact , Anderson [An] showed that for any finite graph P, H(P) is an ℓ_2-manifold. If Dimension M = 2, Luke-Mason [LM] showed that H(M) is an ANR. On the other extreme, if M is a compact Q-manifold, where Q is the Hilbert cube $[-1,1]^\infty$, the remarkable results of Ferry [Fe] and Torunczyk [To$_3$] showed that H(M) is, in fact, an ANR.

Cap and f-d cap subsets of H(M)

An important open question is whether H(M) is an ANR for any n-manifold M, n>2. Even without answering this question, interesting intrinsic structure of H(M) are found using the notion of cap and f-d cap set of Anderson (see [Ch]). To explain, we say a closed subset K of a separable metric space X is a Z-<u>set</u> if for any non-null homotopically trivial open set U in X, U\K is non-null and homotopically trivial. We say that a subset B of X has the <u>(finite-dimensional)</u> <u>compact absorption</u> <u>property</u>, or (f-d) cap, in X if (1) $B = \cup\{B_n \mid n=1,2,\cdots\}$, where each B_n is a (f-d) compact Z-set in X such that $B_n \subset B_{n+1}$, and (2) for each $\varepsilon>0$, each integer m>0, and each (f-d) compact subset K of X, there is an integer n>0, and an embedding $h : K \to B_n$ such that $h|K \cap B_m = id$ and $d(h,id) < \varepsilon$. The important point is that the notion of "cap" (resp. f-d cap) completely characterize certain dense subspaces of an ℓ_2-manifold M. For instant if N and N′ are cap sets (resp. f-d cap set) in M, then there is a homeomorphism h of M onto itself taking N onto N′ [We]. If $M=\ell_2$, a typical cap set of M is $\Sigma = \{(x_i) \in \ell_2 \mid \sup |i \cdot x_i| < \infty\}$ and a typical f-d cap set of M is $\ell_f = \{ (x_i) \in \ell_2 \mid x_i = 0$ except for finitely many i$\}$. Returning to the space of homeomorphisms, the relevancy of (f-d) cap in the structure of H(M) is contained in the following discussion.

The Subspaces of PL Homeomorphisms

Let M is a compact PL manifold. For the subspace of piece-wise linear (PL) homeomorphisms of M (denoted PLH(M)), the following are known : it is the countable union of f-d compacta [Ge_2] ; it is uniformly locally contractible [Ga] ; it is an ANR [Ha] ; PLH(M) $\times \ell_f$ is homeomprphic to PLH(M) [To_2] ; and finally, PLH(M) is an ℓ_f-manifold [KW],[GH]. In high dimensional cases it is not always true that PLH(M) is dense in H(M) although it is true when $n < 4$. Let $H^*(M)$ denote the subset of H(M) consisting of homeomorphisms that are isotopic to PL homeomorphisms. It is known that when dim $M \neq 4$ and $\partial M = \emptyset$ if dim M=5, PLH(M) is dense in $H^*(M)$ [GH]. More importantly, it is shown in [GH] that PLH(M) is an f-d cap set in $H^*(M)$. Hence we have the following THEOREM [GH] : $(H^*(M), PLH(M))$ is an (ℓ_2, ℓ_f)-manifold pair if and only if H(M) is an ℓ_2-manifold.

The Subspaces of Lipchitz Heomorphisms

(The following are joint work with K. Sakai). In H(M) there is a naturally derived subspace lying between H(M) and PLH (M), it is the space of Lipschitz homeomorphisms $H_{LIP}(M)$. To define $H_{LIP}(M)$ we say a map $f : (X, d) \to (Y, \rho)$ is Lipschitz if there is some $k>0$ such that $\rho(f(x), f(y)) < k \cdot d(x,y)$ for all x, y. Then $H_{LIP}(M)$ is the subspace of H(M) consisting of all homeomorphisms h such that both h and h^{-1} are Lipschitz maps. It is known that $H_{LIP}(M) \supset PLH(M)$ [Lu] and $H_{LIP}(M)$ is locally contractible [SS]. Furthermore, $H_{LIP}(M)$ is easily seen to be σ-compact and strongly infinite-dimensional [SW]. Using a procedure which modify that of

[KW], we show that $H_{LIP}(M)$ is Σ-stable; that is, $H_{LIP}(M) \times \Sigma$ is homeomprphic to $H_{LIP}(M)$. Let $\tilde{H}_{LIP}(M) = H_{LIP}(M) \cap H^*(M)$. Then each $h \in \tilde{H}_{LIP}(M)$ is Lipschitz isotopic to a PL homeomorphism and PLH(M) is dense in $\tilde{H}_{LIP}(M)$ [SW].

If H(M) is an ℓ_2-manifold, so is H*(M). It follows that $\tilde{H}_{LIP}(M)$ is a cap set for H*(M) . Hence $(H^*(M), \tilde{H}_{LIP}(M))$ is an (ℓ_2, Σ)-manifold pair. Since (with the dimensional restriction mentioned above) $H_{LIP}(M)$ is dense in H(M) [Su] and is homogeneous, $(H(M), H_{LIP}(M))$ is also an (ℓ_2, Σ)-manifold pair. We hence have the following THEOREM([S-W]). <u>Let X be a compact PL manifold in</u> R^n <u>with dim</u> $M \neq 4$ <u>and</u> $\partial M = \emptyset$ <u>if dim</u> M=5 . <u>Then</u> $(H(M), H_{LIP}(M))$ <u>is an</u> (ℓ_2, Σ)-<u>manifold pair if and only if</u> H(M) <u>is an</u> ℓ_2-<u>manifold</u>.

References

[Ce] Cernavskii, A. V. , Local contractibility of the homeomorphism group of a manifold, Soviet Math. Dokl. 9(1968), 1171-1174.

[An] Anderson, R. D., Spaces of homeomorphism of finite graphs, unpublished manuscript.

[Ch] Chapman, T. A., Dense sigma-compact subsets of infinite-dimensional manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 154 (1971) , 399-426.

[EK] Edwards R. D. and Kirby R. C. , Deformations of spaces of imbeddings, Ann. of Math., 93(1971), 63-88.

[Fe] Ferry, s. The homeomorphism group of a compact Hilbert cube manifold is an ANR. Ann. of Math. (2) 106 (1977), 101-119.

[Ga] Gauld D. B., Local contractibility of PL(M) for a compact manifold, Math. Chronicle 4(1975), 1-6.

[Ge_1] Geoghegan, R., On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions-I, Topology 11 (1972), 159-177.

[Ge_2] Geoghegan, R., On spaces of homeomorphisms, embeddings, and functions-II, Proc. Amer. Math. Soc. (3) 27 (1973), 463-483.

[GH] Geoghegan, R and Haver, W. E., On the space of piecewise linear homeomorphisms of a manifold, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1976), 145-151.

[Ha] Haver, W. E., Locally contractible spaces that are absolute neighborhood retracts, Proc. Amer. Math. Soc. 55 (1973) , 280-284.

[KW] Keesling, J. and Wilson, D. C., The group of PL-homeomorphisms of a compact PL-manifold is an $\ell_2{}^f$-manifold, Trans. Amer. Math. Soc. 193 (1973) , 249-256.

[LM] Luke, R. and Mason, W.K., The space of homeomorphisms on a compact two-manifold is an absolute neighborhood retract, Trans Amer. Math. Soc. 164(1972), 275-285.

[SS] Siebenmann, L. and Sullivan, D., On complexes that are Lipschitz manifolds, Geometric Topology, (Cantrell, J.C., ed), Academic Press, New York, 1979, 503-525.

[Su] Sullivan, D; Hyperbolic geometry and homeomorphisms, Geometric Topology, Academic Press, New York, 1979, 543-555.

[SW] Sakai K. and Wong R. Y. On spaces of Lipschitz maps, embeddings and homeomorphisms, in preparation.

[To_1] Torunczyk, H., Absolute retracts as factors of normed linear spaces, Fund. Math. 86 (1974) , 53-67.

[To_2] Torunczyk, H., Characterizing Helbert space topology, Fund. Math. 111 (1981), 247-262.

[To_3] Torunczyk, H., Homeomorphism groups of compact Helbert cube manifolds which are manifolds, Bulletin, Polish Academy of Science, 1977.

[To_4] Torunczyk, H., A collection of two papers concerning Hilbert manifolds, Fund. Math. 125 (1985), 89-93.

[We] West, J. E., The ambient homeomorphy of an incomplete subspace of infinite-dimensional Hilbert spaces, Pacific J. Math. 34 (1970), 257-268.

One fixed point actions on spheres

Okayama Univ. (教養) Morimoto, Masaharu

§1 Introduction

Unless specified to the contrary, G will denote a finite group and group actions will mean smooth actions in this note.

Standard actions (Linear actions). We refer the actions on spheres obtained as follows to <u>linear actions</u>. Let V be orthogonal (real) G-modules. The unit spheres S(V) have the induced G-actions.

Since $S(V)^G = S(V^G)$ a sphere, one fixed point actions on spheres are exotic. As for construction of one fixed point actions on spheres, we know the following two theorems.

Theorem (Stein [18], 1977). <u>There exist one fixed point actions on</u> S^7 <u>of</u> $SL(2, 5)$.

Theorem (Petrie [14]-[16], 1978-1982). <u>The following groups</u> (i)-(iii) <u>have one fixed point actions on homotopy spheres</u>:

(i) S^3, SO_3,

(ii) $SL(2, F)$, $PSL(2, F)$ <u>with characteristic odd</u>,

(iii) <u>any odd order abelian group having at least three non-cyclic Sylow subgroups</u>.

Higher dimensional spheres are likely to have one fixed point actions of various groups. We pay our attention to lower dimensional spheres.

Theorem (Laitinen-Traczyk [10], 1986). <u>If there is a one fixed point</u> G-<u>action on a homotopy sphere</u> Σ^k, $k \geqq 5$, <u>fulfilling</u>

$$\dim \Sigma^g \leqq 2 \quad \text{for any} \quad g \in G - \{1\},$$

then $G = A_5$ *and* $\Sigma = S^6$.

This brings us to the question: Does there exist a one fixed point action on S^6 of A_5 ? Our answer is

Theorem A. *There exist one fixed point actions on* S^6 *of* A_5 .

For the outline of the proof see [11].

Corollary B. *For any integer* $n \geqq 6$, *one has fixed point free actions on* D^n *of* A_5 .

Definition. Let LD be the least dimension of spheres which have one fixed point actions.

It is easy to see that LD is greater than 2, hence $3 \leqq LD \leqq 6$. People conjecture that LD $\neq 3$. There is, however, a one fixed point action on the Poincaré sphere $S^3/SL(2, 5)$ of A_5 . It seems hard to prove the conjecture. Some algebraic topologists thought that it would be hard to show LD $\neq 4$, too. Recently M. Furuta proved

Theorem ([8]). *Any homotopy sphere* Σ^4 *does not have one fixed point actions of finite groups* G *fulfilling the condition that each element of* G *preserves the orientation of* Σ.

As a corollary to it we get

Theorem B. *Any homotopy sphere* Σ^4 *does not have one fixed point actions of compact Lie groups*.

For the outline of the proof see [11].

Not to turn the subject we know that S^8 does not have one fixed point actions of compact connected Lie groups. We are, hence, wondering if S^8 has one fixed point actions or not.

§2 Fixed point free actions on disks

Let S^n, $n \geqq 6$, have a one fixed point action, and denote by x the fixed point in S^n.

Take an equivariant closed disk neighborhood $N(x)$ of x. Then the disk $D^n = S^n - \mathrm{Int}\, N(x)$ has the induced fixed point free action.

$$\boxed{\text{One fixed point action on } S^n} \Rightarrow \boxed{\text{Fixed point free action on } D^n}$$

The class $\mathcal{C}$ of finite groups which have fixed point free actions on disks, was studied by E. Floyd - R. Richardson [7], J. Greever [9] and R. Oliver [12]. E. Floyd - R. Richerdson are the first persons who found a fixed point free action on a disk. R. Oliver completely decided the class $\mathcal{C}$.

Definition. Let p and q be primes. We denote by $\mathcal{G}_p^q$ the class of finite groups G which have subgroups H and K fulfilling

(2.1) $\{1\} \lhd H \lhd K \lhd G$,

(2.2) G/K is a q-group,

(2.3) K/H is cyclic, and

(2.4) H is a p-group.

Theorem (Oliver [12]). *A finite group G has a fixed point free action on a disk if and only if* $G \notin \bigcup_{p,q} \mathcal{G}_p^q$.

Proof of the only if part. Let G be a finite group with H and K satisfying (2.1) - (2.4). Suppose that G acts on a disk D without fixed points. By Smith's theorem, D^H is $\mathbb{Z}_p$-acyclic, hence $\mathbb{Q}$-acyclic.

Lemma 2.5. *Let C be a finite cyclic group, and let X be a* $\mathbb{Q}$-*acyclic finite* C-CW *complex. Then one has* $\chi(X^C) = 1$.

This lemma gives $\chi(D^K) = \chi((D^H)^K) = 1$. Further we have $\chi(D^G) = \chi((D^K)^G) \equiv \chi(D^K) = 1 \pmod q$, hence $\chi(D^G) \neq 0$. This is a contradiction.

Proof of Lemma 2.5 . This proof is due to [13]. We observe the cellular chain complex $C_*(X) = \{H_n(X^n, X^{n-1}; \mathbb{Q})\}$. For a rational C-module M, we denote by $M(g)$ the character of $g \in C$ on

$\mathbb{C} \otimes M$. We have

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [H_n(X, \mathbb{Q})] = [\mathbb{Q}] \text{ in } R(C, \mathbb{Q}),$$

hence $\sum_n (-1)^n [C_n(X)] = [\mathbb{Q}]$. This implies that $\sum_n (-1)^n C_n(X)(g) = 1$ for $g \in C$. The standard $\mathbb{Q}$-basis of $C_n(X)$ corresponds to the set of n-cells of X. Let A_n be the C-submodule of $C_n(X)$ generated by the n-cells with isotropy group $\neq C$. Then we have $C_n(X) = C_n(X^C) \oplus A_n$. Since $A_n(g) = 0$ for a generator g of C, we have $C_n(X)(g) = C_n(X^C)(g) = \dim C_n(X^C)$. It holds that $\sum_n (-1)^n \dim C_n(X^C) = 1$. This means $\chi(X^C) = 1$.

As a corollary to Oliver's theorem, he showed that 60 is the least order of finite groups which have fixed point free actions on disks. The order of A_5 is 60, and A_5 has fixed point free actions on disks.

Several authors studied fixed point free actions of compact Lie groups on acyclic manifolds. For example see W. y. Hsiang - E.

Straume [H-S], R. Oliver [O] and I. Nakanishi [N].

§3 Petrie's transversality construction

The proof of Theorem A consists of three parts:

(i) Construction of an equivariant framed normal map.
(ii) Modification of the singular part of the equivariant framed normal map.
(iii) Vanishing of the surgery obstruction.

The first part is due to Petrie, the second part is done with by an ad hoc argument and the third part is shown by using surgery theory of three dimensional manifolds. We see only the first part in this section. Our general reference of this section is [15].

Let $M(n)$ be the n-fold direct sum of the complex regular representation $\mathbb{C}[G]$ of G. For a finite G-CW complex X, $\mathrm{Map}(X, n)^G$ denotes the set of proper G-maps $f : X \times M(n) \longrightarrow X \times M(n)$ with $p \circ f = p$, where $p : X \times M(n) \longrightarrow X$ is the projection. Let $map(X, n)^G$ denote the set of proper G-fiber homotopy classes in $Map(X, n)^G$. We obtain naturally an inductive system $\{map(X, n)^G\}_n$. We define $\omega_G^0(X) = \varinjlim map(X, n)^G$. The singleton G-space is denoted by $*$. For each $H < G$, $deg_H : \omega_G^0(*) \longrightarrow \mathbb{Z}$ is the map given by $deg_H(f) = deg\ [f^H : M(n)^H \longrightarrow M(n)^H]$, $n >> 1$. Several mathematician showed that $\{deg_H \mid H\} : \omega_G^0(*) \longrightarrow \bigoplus_H \mathbb{Z}$ is an injective ring homomorphism, see [4], [17], etc.. The Burnside ring $\Omega(G)$ of G is the set of equivalence classes of finite G-CW complexes with respect to the relation: $A \simeq B$ iff $\chi(A^H) = \chi(B^H)$ for all $H < G$. Maps $\chi_H : \Omega(G) \longrightarrow \mathbb{Z}$ are given by $\chi_H(A) = \chi(A^H)$. Then $\{\chi_H \mid H\} : \Omega(G) \longrightarrow \bigoplus_H \mathbb{Z}$ is also an injective ring homomorphism. Furthermore the two ring homomorphisms give an isomorphism between $\omega_G^0(*)$ and $\Omega(G)$ (see [4]). We identify $\omega_G^0(*)$ with $\Omega(G)$. Especially $\omega_G^0(X)$ becomes a module over $\Omega(G)$.

In the following G is A_5.

Lemma 3.1. *There is an elemaent* ω *in* $\Omega(G)$ *such that* (1) $\chi_G(\omega) = 1$ *and* (2) $\chi_K(\omega) = 0$ *for all* $K \neq G$.

Proof. $\Omega(G)$ is a subset of $\bigoplus_H \mathbb{Z}$ consisting of elements satisfying certain equations. We can easily verify that such an element with (1) and (2) exists in $\Omega(G)$. For the detail see [4].

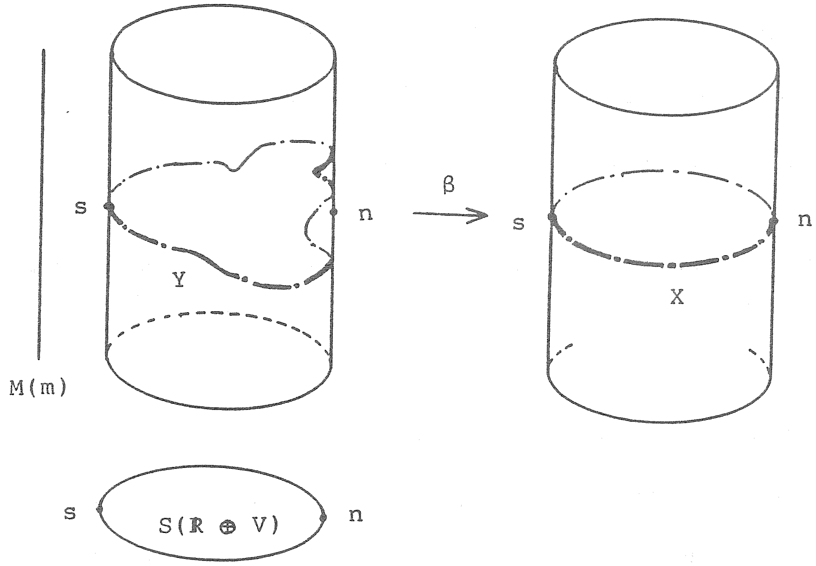
Lemma 3.2. *Let* $j : X^G \longrightarrow X$ *be the inclusion. Then* $j^* : \omega\, \omega_G^0(X) \longrightarrow \omega\, \omega_G^0(X^G)$ *is an isomorphism.*

Proof. This is obtained from the facts: (1) $\omega_G^0(X)$ is the 0-th part of a generalized cohomology $\omega_G^*(X)$, (2) ω is an idempotent and (3) $\mathrm{res}_K\, \omega = 0$ in $\Omega(K)$ for $K \neq G$. For the detail see [15], [16].

Let V be an irreducible complex G-module of dimension 3. Its realification is again denoted by V. $\mathbb{R}$ denote the trivial real G-module of dimension 1. Let X be the unit sphere $S(\mathbb{R} \oplus V)$ of $\mathbb{R} \oplus V$.

subgroup H	1	cyclic $\neq 1$	dihedral
$\dim X^H$	6	2	0

Denote by s the south pole $(-1, 0)$ and by n the north pole $(1, 0)$, $\pm 1 \in \mathbb{R}$ and $0 \in V$. X^G consists of s and n, hence $\omega_G^0(X^G) = \Omega(G)_s \oplus \Omega(G)_n$, where $\Omega(G)_x$ are copies of $\Omega(G)$. There is an element $\omega\mu$ in $\omega\, \omega_G^0(X)$ such that $j^*(\omega\mu) = (0, \omega) \in \Omega(G)_s \oplus \Omega(G)_n$. We put $\alpha = 1 - \omega\mu$. Roughly to say, α is a proper G-map of $X \times M(m)$, $m \gg 1$. Petrie ensured that α is deformed by a proper G-homotopy to a proper G-map $\beta : X \times M(m) \longrightarrow X \times M(m)$ such that β is transverse to $X \times 0$.



We put $Y = \beta^{-1}(X \times 0)$ and $f = \beta|Y : Y \longrightarrow X = X \times 0$. By a delicate observation, we can see that $f : Y \longrightarrow X$ becomes a G-framed normal map (with bundle data). We will see that Y^G consists of exactly one point. We denote by α_s the restriction of α to $M(m) = \{s\} \times M(m)$, hence $\alpha_s : M(m) \longrightarrow M(m)$. Similarly we have $\alpha_n : M(m) = \{n\} \times M(m) \longrightarrow \{n\} \times M(m) = M(m)$. There hold $\deg_H(\alpha_s) = 1$ for $H < G$, $\deg_K(\alpha_n) = 1$ for $K \neq G$ and $\deg_G(\alpha_n) = 0$. By [17], we may suppose that

(1) $\alpha_s = \mathrm{id}$,

(2) α_n is transverse to 0 in $M(m)$ and
$\alpha_n^{-1}(0) \cong G/A_4 \coprod G/D_{10} \coprod G/D_6$

$$\coprod \coprod_C |a_C| G/C,$$

if $\omega = [G/G] - ([G/A_4] + [G/D_{10}] + [G/D_6]) + \sum_C a_C[G/C]$ in $\Omega(G)$, where C runs over all cyclic subgroups of G and a_C are adequate integers. Hence we may suppose $\beta^{-1}(\{s, n\} \times M(m)) = \{s, n\} \times M(m)$ and the restriction of β to $\{s ,n\} \times M(m)$ is identical to that of α. We have $Y^G = \beta^{-1}(X^G)^G = \alpha_s{}^{-1}(s)^G \coprod \alpha^{-1}{}_n(n)^G = \{s\}$.

We can perform G-surgery of $f : Y \longrightarrow X$ to obtain a new G-framed normal map $f' : Y' \longrightarrow X$ such that f' is a homotopy equivalence and Y'^G consists of exactly one point. The detail is omitted.

§4 Appendix

This section is devoted to a sketch of the part (iii) of the proof of Theorem A.

Let $f : Y \longrightarrow X$ be the G-framed normal map in §3, $G = A_5$. For simplicity, we suppose that (1) for any subgroup H with $\{1\} \neq H \neq G$, $f^H : Y^H \longrightarrow X^H$ is a homotopy equivalence, and (2) f

is 3-connected. Let $K(f)$ be the kernel of f_* $: H_3(Y, \mathbb{Z}) \longrightarrow H_3(X, \mathbb{Z})$. By algebraic observation, we can see that $K(f)$ is a stably free $\mathbb{Z}[G]$-modele. Denote by λ the intersection form $: K(f) \times K(f) \longrightarrow \mathbb{Z}[G]$ and by μ the self-intersection map $: K(f) \longrightarrow \mathbb{Z}[G]/\{x + \bar{x} : x \in \mathbb{Z}[G]\}$. The class $\sigma(f) = [(K(f), \lambda, \mu)]$ in $L_6(\mathbb{Z}[G])$ is the G-surgery obstruction to obtaining a new G-framed normal map $f' : Y' \longrightarrow X$ such that f' is a homotopy equivalence. By the Dress induction theorem, $\sigma(f) = 0$ if $\sigma(\mathrm{res}_H f) = 0$ in $L_6(\mathbb{Z}[H])$ for all the hyperelementary subgroups H of G. Fix a hyperelementary group H of G. Then we have $\mathrm{res}_H \omega = 0$, hence $\mathrm{res}_H \alpha = 1$ in $\omega_H^0(\mathrm{res}_H X)$. That is, $\alpha : X \times M(m) \longrightarrow X \times M(m)$ is properly G-fiber homotopic to the identity on $X \times M(m)$. By Petrie's transversality construction, we obtain an H-framed normal cobordism $F_H : W_H \longrightarrow I \times X$, $I = [0, 1]$, between $\mathrm{res}_H f$ and $\mathrm{id}_H : X \longrightarrow X$. If the H-action is free, then the existence of the cobordism implies $\sigma(\mathrm{res}_H f) = 0$. While the action is not free in our case, we have

Lemma 4.1. <u>If for any prime</u> p <u>and for any non-trivial</u> p-<u>subgroup</u> P <u>of</u> H, ${F_H}^P : {W_H}^P \longrightarrow I \times X^P$ <u>is a</u> $\mathbb{Z}_{(p)}$-<u>homology equivalence, then one has</u> $\sigma(\mathrm{res}_H f) = 0$.

Hence we have to modify F_H so as to satisfy the condition in Lemma 4.1. We have $\dim {W_H}^P = 3$ if $P \neq 1$ is cyclic and $\dim {W_H}^P = 1$ if P is dihedral. In the case where P is dihedral, it is easy to modify F_H. In the case where P is cyclic, we have to consider about $N_H(P)/P$-surgery of the induced framed map ${F_H}^P$ with bundle data. On the analogy of Wall [19], we can deduce it to a calculation of a Witt group of quadratic forms with ring parameter (cf. [2]).

Let Λ be an associative ring with 1 and with an involution $-$ satisfying $\bar{1} = 1$, $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b}$ and $\overline{ab} = \bar{b}\,\bar{a}$ for $a, b \in \Lambda$. $M_n(\Lambda)$ denotes the set of $n \times n$-matrices whose entries are in Λ. Let Γ be an additive subgroup of Λ such that

($\Gamma 1$) $\{a + \bar{a} : a \in \Lambda\} \subset \Gamma \subset \{a \in \Lambda : a = \bar{a}\}$,

($\Gamma 2$) $a\Gamma\bar{a} \subset \Gamma$ for all $a \in \Lambda$.

Such Γ is called a ring parameter of Λ.

For an element (x_{ij}) of $M_n(\Lambda)$, $(x_{ij})^*$ is defined to be $(\bar{x}_{ji})$. In the following an arbitrary element in $M_{2n}(\Lambda)$ is often written in the form:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \quad \text{with} \quad \begin{cases} A = (a_{ij}),\ B = (b_{ij}), \\ C = (c_{ij}) \ \text{and} \ D = (d_{ij}), \end{cases}$$

where i and j run from 1 to n. Let $SU_n(\Lambda, \Gamma)$ be the group of non-singular matrices in $M_{2n}(\Lambda)$ which satisfy

(1) $$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} D^* & -B^* \\ -C^* & A^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix},$$

(2) the diagonal coefficients of BA^* and DC^* lie in Γ.

We denote by $TU_n(\Lambda, \Gamma)$ the subgroup of $SU_n(\Lambda, \Gamma)$ which consists of the elements with $B = 0$. We put

$$\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Then σ belongs to $SU_1(\Lambda, \Gamma)$ for any ring parameter Γ of Λ. We have the standard stabilizers $j_{n,n+1} : SU_n(\Lambda, \Gamma) \longrightarrow SU_{n+1}(\Lambda, \Gamma)$ definded by

$$j_{n,n+1}(x) = \begin{pmatrix} A & & B & \\ & 1 & & \\ C & & D & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{for } x = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \text{ in } SU_n(\Lambda, \Gamma).$$

With respect to the standard stabilizers, we define $SU(\Lambda, \Gamma) = \varinjlim_n SU_n(\Lambda, \Gamma)$ and $TU(\Lambda, \Gamma) = \varinjlim_n TU_n(\Lambda, \Gamma)$. We denote by $RU(\Lambda, \Gamma)$ the subgroup of $SU(\Lambda, \Gamma)$ which is generated by $TU(\Lambda, \Gamma)$ and σ. It is well-known (see [2, Corollary 3.9]) that $RU(\Lambda, \Gamma)$ includes the commutator subgroup $CU(\Lambda, \Gamma) = [SU(\Lambda, \Gamma), SU(\Lambda,$

$\Gamma)]$ of $SU(\Lambda, \Gamma)$.

Definition 4.2. The *Witt group of dimension three* $W_3(\Lambda, \Gamma)$ is defined to be the quotient group $SU(\Lambda, \Gamma)/RU(\Lambda, \Gamma)$.

Lemma 4.3. *If* Λ *is a commutative local ring with the trivial involution, then* $W_3(\Lambda, \Gamma) = 0$ *for any ring parameter* Γ.

Our surgery obstructions lie in $W_3(\Lambda, \Gamma)$ for

(1) $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}$, $\Gamma = 2\mathbb{Z}_{(p)}$ if $N_H(P) = P$, and
(2) $\Lambda = \mathbb{Z}_{(p)}[C_2]$, $\Gamma = \{2a\ 1 + b\ g : a, b \in \mathbb{Z}_{(p)}\}$ if $|N_H(P)/P| = 2$, where g is the generator of C_2.

In these cases it holds that $W_3(\Lambda, \Gamma) = 0$ from Lemma 4.3. (In the case (2) with $p \neq 2$, $W_3(\Lambda, \Gamma) \cong L_3(\mathbb{Z}_{(p)}) \oplus L_3(\mathbb{Z}_{(p)})$.)

Hence we can perform H-surgery of F_H so as to satisfy the condition in Lemma 4.1.

References

[1] G. A. Anderson, Surgery with coefficients, Springer Lecture Notes in Math. 591 (1977).

[2] A. Bac, K-theory of forms, Princeton Univ. Press (1981).

[3] A. Bak - W. Sharlou, Grothendieck and Witt group of orders and finite groups, Inv. Math. 23 (1974) 297-240.

[4] T. tom Dieck, Transformation groups and representation theory, Springer Lecture Notes in Math 766 (1979).

[5] K. H. Dovermann - T. Petrie, G surgery II, Memoirs of A. M. S. vol 37 no 260 (1982).

[6] __________ , An induction theorem for equivariant surgery, Amer. J. Math. 105 (1983) 1369-1403.

[7] E. Floyd - R. Richardson, An action of a finite group on an n-cell without stationary points, Bull. A. M. S. 65 (1959) 73-76.

[8] M. Furuta, A remark on a fixed point of finite group action on S^4, Univ. of Tokyo

Preprint Ser. 87-8 (1987).

[9] J. Greever, Stationary points for finite transformation groups, Duke Math. J. 27 (1960) 163-170.

[10] E. Leitinen - P. Traczyk, Pseudofree representations and 2-pseudofree actions on spheres, Proc. A. M. S. 97 (1986) 151-157.

[11] M. Morimoto, On one fixed point actions on spheres, Proc. Japan Acad. 63 Ser. A (1987) 95-97.

[12] R. Oliver, Fixed-point sets of group actions on finite acyclic complexes, Comm. Math. Helv. 50 (1975) 155-177.

[13] R. Oliver - T. Petrie, G-CW-surgery and $K_0(\mathbb{Z}G)$, Math. Z. 179 (1982) 11-42.

[14] T. Petrie, Pseudoequivalences of G-manifolds Proc. Symp. in Pure Math (A. M. S.) 32 (1978) 169-210.

[15] ____ , One fixed point actions on spheres, I Adv. Math. 46 (1982) 3-14.

[16] ____ , One fixed point actions on spheres, II, Adv. Math. 46 (1982) 15-70.

[17] R. L. Rubinsztein, On the equivariant

homotopy of spheres, Dissertation Math. (Rozprawy Mat.) 134 (1976).

[18] E. Stein, Surgery on products with finite fundamental group, Topology 16 (1977) 473-493.

[19] C. T. C. Wall, Surgery on compact manifolds, Academic Press (1970).

[H-S] W. y. Hsiang - E. Straume, Actions of compact connected Lie groups on acyclic manifolds with low dimensional orbit spaces, J. für reine und angewante Math. 369 (1986) 21-39.

[N] I. Nakanishi, Fixed point free SU(n)-actions on acyclic manifolds, preprint.

[O] R. Oliver, Weight systems for SO(3)-actions, Ann. Math. 110 (1979) 227-241.

Riemann多様体の極限

東大 教養　深谷賢治

閉多様体Mに対して，そのMinimal Volume Minvol M を（[δ]にならって）

$$\mathrm{Minvol}\, M = \{ \inf \mathrm{Vol}(M, g) \mid g \text{はM上の計量で、断面曲率} K_g \text{は} |K_g| \leq 1 \text{をみたす。} \}$$

で定義する。§1でMinvolについてのいくつかの予想と結果を述べ，§2ではそのうちの1つを証明するために必要なRiemann多様体の極限についての諸結果を述べる。

§1 Minimal Volume

<u>問題1-1</u>　M上に，Minvol M = Vol(M, g)

$|K_g| \le 1$、なる計量 g はあるか？

<u>問題1-2</u>　$n \in \mathbb{N}$ に対して
$v_n = \{\mathrm{Minvol}\, M \mid \dim M = n\}$ とおく。
v_n を求めよ。

問題1-1に対する自然なアプローチは、M上の計量の列 g_i で $|K_{g_i}| \le 1$、$\lim \mathrm{Vol}(M, g_i) = \mathrm{Minvol}\, M$ なるものをとり、極限、$\lim (M, g_i)$ を考えることであろう。この極限がM上の計量に何らかの意味で収束すれば、それは問題1-1の答えを与えると思われる。しかし、一般には、(M, g_i) はM上の計量には収束しない。その理由は次の2つであろうと推測される。

(A)　$\lim \mathrm{Vol}(M, g_i) = 0$ となり、(M, g_i) はつぶれる（collapseする。）

(B)　$\lim \mathrm{diam}(M, g_i) = \infty$ となり、(M, g_i) はちぎれる。

例1-3（(A)の例）

$M=N\times S^1$ とする。$|K_{g_N}|\leq 1$ なる N 上の Riemann 計量 g_N をとり、M 上の計量 g_ε を $g=g_N\oplus\varepsilon^2dt^2$ で定める。$\lim_{\varepsilon\to 0}(M,g_\varepsilon)$ は (N,g_N) で M 上の計量ではない。

例1-4（(B)の例）

3次元 Riemann 多様体 M_1, M_2 で

- $K_{M_i}\equiv -1$
- $\mathrm{Vol}(M_i)<\infty$
- M_1 の end は1つで $T^2\times\mathbb{R}$ と diffeo.

なるものをとり、M_1 と M_2 を end のところではり合わせたものを M とする。このとき、(証明はされていないが) 次のように予想される。

☆ $\mathrm{Minvol}\,M=\mathrm{Vol}\,M_1+\mathrm{Vol}\,M_2$

（右辺の Vol は $K\equiv -1$ なる計量を入れた場合の体積）。

☆☆ $\lim \mathrm{Vol}(M,g_i)=\mathrm{Vol}\,M_1+\mathrm{Vol}\,M_2$

$|K_{g_i}|\leq 1$ とすると、g_i は M_1, M_2 上で、それぞれ $K\equiv -1$ なる計量に近づき

はり合せた部分はだんだん長くなる。

(☆☆のような g_i は作ることが出来る。☆☆の仮定の下で、g_i がそのようなものに限る、ということが証明されていない。)

☆、☆☆が正しければ $\lim Vol(M, g_i) = \mathrm{Minvol}\, M$ とき、(M, g_i) は M_1 と M_2 にちぎれることになる。

(A)(B)は問題1-2を考える場合も主要な問題点である。以下、問題1-2についての結果、予想を列挙する

(a) $n=2$ とき、$\mathcal{V}_2 = \{2\pi n \mid n = 0, 1, 2, \cdots\}$

これは、Gauss-Bonnet の定理から分る。

(b) $n=3$ とき

<u>予想1-5</u>　$\mathcal{V}_3$ は順序集合として ω^{ω^ω} と同型。

(ここで ω は最初の可算順序数。)

予想1-5は次の3つの予想と1つの定理の帰結である。

予想1-6　$M_1 \cup M_2 = M$, $M_1 \cap M_2 = S^2$ or T^2
とき　$\mathrm{Minvol}\, M = \mathrm{Minvol}\, M_1 + \mathrm{Minvol}\, M_2$
（開多様体M_iに対しても、Minvolを、完備計量
を使って、閉多様体に対してと同様に定義する。

予想1-7　Mが$K_{g_0} \equiv -1$なる計量g_0をもてば　$\mathrm{Minvol}\, M = \mathrm{Vol}(M, g_0)$.

予想1-8　Thurston の geometrization conjecture
（吉田氏の予稿参照）.

定理1-9（Thurston [12]）

$$\left\{ \mathrm{Vol}(M^3, g_0) \;\middle|\; \begin{array}{l} (M, g_0)\text{は完備}\ \dim M^3 = 3 \\ K_{g_0} \equiv -1,\ \mathrm{Vol}(M, g_0) < \infty \end{array} \right\}$$

は順序集合として、ω^{ω}と同型。

1-8はM^3が8種類のpieceに分かれることをいい
1-6はその分解が、Minvolとcompatibleであること
をいう。1-7, 1-9からは、hyperbolicなpieceの場
合のMinvolの値を定める。他の種類のpieceの場

合はMinvolが0であることが分っているので、
1-6, …, 1-9 ⇒ 1-5 が分る。

予想1-5の弱い形である次のことは証明されている。

定理1-10 (Cheeger-Gromov [1], [2])
$\exists \varepsilon > 0$ s.t. $\dim M = 3$, $\mathrm{Minvol}\, M < \varepsilon$
$\Rightarrow \mathrm{Minvol}\, M = 0$

(c) 予想1-11 1-10 は $\dim M > 3$ でも正しい。

さて、もとにもどって(A)、(B)を考える。(B)を調べるには直径が無限大に発散する場合のRiemann多様の極限を調べる必要があるが、これについての理論は、今のところあまり出来ていない。そこで、以下では、これは回避することにして次のように定義する。

$$\mathrm{Minvol}_D M = \inf\left\{ \mathrm{Vol}(M,g) \;\middle|\; \begin{array}{l} |K_g| \le 1 \\ \mathrm{diam}(M,g) \le D \end{array} \right\}$$

$\mathrm{Minvol}_D M$については、問題1-1, 1-2は、$\mathrm{Minvol}_D M \neq 0$の場合、次のように解かれている。

<u>定理1-12</u>（Gromov等、[7], [9] [10] [11]の結果からすぐに分る。）

(1) $\mathrm{Minvol}_D M \neq 0$とすると、M上の$C^{1+\alpha}$級計量$g_0$で
- $\mathrm{Vol}(M, g_0) = \mathrm{Minvol}_D(M)$
- $\mathrm{diam}(M, g_0) \leq D$
- $\exists g_i$ s.t. $|K_{g_i}| \leq 1$, g_iはg_0にC^0収束
  g_iはC^∞級

(2) $\varepsilon > 0$なる全てのεに対して、
$\{\mathrm{Minvol}_D(M) \mid \dim M = n\} \cap [\varepsilon, \infty)$
は有限集合である。

従って、Minvol_Dについては0の近傍が不明である。これについては次の2つのことが分る。

<u>定理1-13</u>（[4]）n, Dのみによる正の数$\varepsilon(n, D)$があって、次のことが成り立つ。

$$\left.\begin{array}{l}\dim M = n, \quad \pi_k M = 1 \ (k=1,2,\cdots) \\ \mathrm{Minvol}_D M \leq \varepsilon(n, D)\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Minvol}_D M = 0$$

定理1−14（[4]）

$\pi_k M = 1$ $(k=2,3,\cdots)$ である場合、次の2つは同値である。

(1−15−1) $\mathrm{Minvol}_D M = 0$

(1−15−2) Orbifold X/Γ と、Orbifoldのカテゴリーでのfibration $\pi : M \to X/\Gamma$ があって

- πのfibreは G/Γ とdiffeo. ここでGは巾零Lie群で $\Gamma \subset G \rtimes \mathrm{Aut}\,G$, $[\Gamma : \Gamma \cap G] < \infty$
- πの構造群は $\dfrac{C(G)}{C(G)\cap\Gamma} \rtimes \mathrm{Aut}\,\Gamma$ に含まれる。ここで $C(G)$ はGの中心。
- $\dim X/\Gamma \lneqq \dim M$

（定理1−14中の言葉は§2でもう少し説明する。）

§2 Riemann多様体の極限

§2では定理1−13、1−14の証明の方針を述べ、それに必要なRiemann多様体の極限についての事柄を述べる。定理1−13、1−14を証明するには次の2つのことを示せばよい。

(甲) $\left.\begin{array}{l}\dim M = n,\ \pi_k M = 1 \quad (k=1,2,\cdots) \\ \mathrm{Minvol}_D M \leq \varepsilon(n,D)\end{array}\right\}$

$\Longrightarrow$ Mは(1−15−2)をみたす。

(乙) Mは(1−15−2)をみたす。

$\Longrightarrow \mathrm{Minvol}_D M = 0$

甲の証明は次に述べるHausdorff収束の概念を使って行なわれる。

定義2−1 (Gromov [9])

・Met：compactな距離空間のisometry class全体の集合。

○ $X, Y \in \mathfrak{Met}$, $\varphi : X \to Y$ 写像とき.

φは ε-Hausdorff近似

$\Longleftrightarrow \begin{cases} \circ\ \varphi(X) \text{の } \varepsilon\text{-近傍} = Y \\ \circ\ x, y \in X \text{に対して} \\ \quad |d(x,y) - d(\varphi(x), \varphi(y))| < \varepsilon \end{cases}$

○ $d_H(X, Y) = X$とYの間のHausdorff距離

$= \inf\{\varepsilon \mid \exists \varphi : X \to Y,\ \varphi' : Y \to X\ \varepsilon\text{-Hausdorff近似}\}$

(甲)の証明は背理法による。(甲)をみたす $\varepsilon(n, D)$が存在しないとすると、閉多様体の列 M_iで

(2-2-1) $\begin{cases} \circ\ \dim M_i = n \\ \circ\ \pi_k M_i = 1 \quad k \geq 2 \end{cases}$

(2-2-2) $\quad \mathrm{Minvol}_D M_i \leq 1/i$

(2-2-3) M_iは(1-15-2)をみたさない。

なるものがある。(2-2-2)からM_i上のRiemann

計量 g_i で $\mathrm{Vol}(M_i, g_i) \leq 2/i$, $|K_{g_i}| \leq 1$. となるものがある。ここで次のことを使う。

<u>定理2−3</u> (Gromov [9])
n 次元 Riemann 多様体の列 (M_i, g_i) が

$$\begin{cases} \circ\ \mathrm{diam}(M_i, g_i) \leq D \\ \circ\ \text{Ricci 曲率}(M_i, g_i) \geq C \cdot g_i \end{cases}$$

をみたせば、部分列 (M_{k_i}, g_{k_i}) があって、(M_{k_i}, g_{k_i}) は、$\mathcal{M}et$ の元 Z に Hausdorff 収束する。

定理2−3から、部分列をとって $\lim_{i\to\infty} d_H((M_i, g_i), Z) = 0$, $Z \in \mathcal{M}et$、としてよいことが分る。Z を調べるには、次の結果を用いる。

<u>定理2−4</u> ([6])
(M_i, g_i) : Riemann 多様体, $Z \in \mathcal{M}et$ が

$$\begin{cases} (2\text{-}5\text{-}1) & \lim d_H((M_i, g_i), Z) = 0 \\ (2\text{-}5\text{-}2) & |K_{g_i}| < 1 \\ (2\text{-}5\text{-}3) & \pi_k M_i = 1 \quad k \geq 2. \end{cases}$$

をみたすとすると、Zは$C^{1,\alpha}$級のAspherical Riemannian orbifoldである。すなわち、可縮、完備な、$C^{1,\alpha}$級Riemann多様体Xと、Xにproperly discontinuousに作用する等長変換の作る群Γが存在して、ZはX/Γとisometric。

注意2-6　定理2-4で仮定2-5-2を落とすと結論は次のようになる（[5]）。Zの各点の近傍は$(\mathbb{R}^m, g)/T$とisometricである。ここで、gはある$C^{1,\alpha}$級の計量、Tは$O(m) \cap \mathrm{Isometry}(\mathbb{R}^m, g)$のcompact部分群で、単位元を含む連結成分は可換。（定理2-4の場合はTは有限群だった。）

定理2-4より$\lim (M_i, g_i) = X/\Gamma$が分った。十分大きい$i$に対して、$M_i$から$X/\Gamma$への(1-15-2)をみたすfibrationを作ることにより矛盾が得られる。* このfibrationを構成するには、次の結果のorbifold versionを用いる。

---

* $\mathrm{Vol}(M_i, g_i) \to 0$から$\dim X/\Gamma \lneq \dim M_i$が分かる。

定理2−7（[3, 4]）

CompactなRiemann多様体M_i, Nが、
$|K_{M_i}| \leq 1$, $\lim d_H(M_i, N) = 0$ をみたすとする。このとき、十分大きいiに対して、$\pi_i : M_i \to N$が存在して次をみたす。

(2−8−1) π_iはfibre束である。

(2−8−2) π_iのfibreはG/Γとdiffeo.（ここでGは巾零Lie群、$\Gamma \leq G \tilde{\times} \mathrm{Aut}\, G$）

(2−8−3) π_iの構造群$\subset \dfrac{C(G)}{C(G) \cap \Gamma} \tilde{\times} \mathrm{Aut}\, \Gamma$.

定理2−7はNがorbifoldである場合にも成立する。この場合、π_iがfibre束とは、次のことをいう。
$p_i \in M_i$, $\pi_i(p_i)$の近傍$= \mathbb{R}^m/F$（Fは有限群）とき、π_iから得られる写像

$$\tilde{\pi}_i : \pi_i^{-1}(\mathbb{R}^m/F) \times_{\mathbb{R}^m/F} \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$$

はfibre束。ここで $\pi_i^{-1}(\mathbb{R}^m/F) \times_{\mathbb{R}^m/F} \mathbb{R}^m$
$= \{(x, y) \mid x \in M_i, y \in \mathbb{R}^m, \pi_i(x) \equiv y \mod F\}$,

以上、(1)の証明をのべた。(2)を示すには、定理2-7の逆である次の事を用いる(正確にはそのorbifold version)。

<u>定理2-9([4])</u>
M, Nを閉多様体、$\pi: M \to N$は(2-8-1)(2-8-2)、(2-8-3)をみたす写像とする。このときM上のRiemann計量の列g_iとN上の計量gで

(2-10-1) $|K_{g_i}| \leq 1$

(2-10-2) $\lim_{i \to \infty} d_H((M_i, g_i), (N, g)) = 0$

をみたすものがある。

<u>注意2-11</u> $Z = N$がorbifoldでも多様体でもなく、注意2-6でのべたようなものである場合も、定理2-7に相当する結果がある。([5])。しかし、この場合は逆が成り立たない。これが定理1-13が$\pi_k M = 1$ $k \geq 2$の場合しか証明されていない理由である。

文献

[1] Cheeger, J. and Gromov, M., Collapsing Riemannian manifolds while keeping their curvatures bounded I, J. Diff. Geometry 23 (1986) 309-346.

[2] ———— II, in preparation

[3] Fukaya, K., Collapsing Riemannian manifolds to ones with lower dimension, J. Diff. Geometry 25 (1987) 139-156.

[4] ———— II, Preprint MPI (1987).

[5] ————, A boundary of the set of the Riemannian manifolds with bounded curvatures and diameters, to appear in J. Diff. Geometry

[6] ————, A compactness of a set of aspherical Riemannian orbifolds, to appear in "Foliation and Topology of manifolds", Academic press.

[7] Green, R. – Wu, Lipschitz convergence of Riemannian manifolds, preprint.
[8] Gromov, M., Volume and bounded cohomology, Publ. I.H.E.S. 56 (1983) 213–307.
[9] ——————, (with Lafontaine and Pansu), Structure metrique pour les variétés riemanniennes, Cedic Fer
[10] Katsuda, A., Gromov's convergence theorem and its application, Nagoya Math Journal 100 (1985) 11–48.
[11] Peters, S., Convergence of Riemannian manifolds, preprint.
[12] Thurston, W., The geometry and topology of three manifolds, Princeton university, 1979.

Riemann球面上の複素力学系について

京大 理. 宍倉 光広

目次

序.

本講演では Riemann球面からそれ自身への解析的写像(実は有理関数)で定義された力学系(複素力学系)について考える。

複素力学系の研究は 1918～1920年の P. Fatou および G. Julia の一連の研究に始まる。彼等は、正規族に関する Montel の定理(1912年)を最大の武器として、Julia set 等の性質を調べていった。しかしその後は、irrationally indifferent periodic pt. に関する Siegel の定理を除いては、大きな飛躍もなく、忘れさられた分野であった。

ところが、1982年に D. Sullivan が 擬等角写像の理論を用いて"遊走領域の非存在"(§4. 定理I)を証明し、続けて"stable region の分類"(§4. 定理II)を完成すると、多くの人々が注目し、いろいろ新しい研究を行うようになった。特に Sullivan や Thurston 等は Kleinian group の理論との類似性に注目しているようである。

同時に、B. Mandelbrot はコンピーターを使って Julia set 等を描き、"fractal"の典型的な例として発表した。その絵の美しさも多くの人をひきつける大きな要因となっている。

本講演では，part I．で Julia set や stable region 等の基本的な定義と性質，そして Sullivan の定理について概説し，part II では，与えられた dynamics をもつような有理関数を構成する方法（qc-deformation と qc-surgery）について述べる。最後にそれに関して，複素力学系から tree 上の区分線型写像を作る理論について述べる。

part I．

§1．定義

- $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ を Riemann 球面とする。
- $f : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ を analytic な写像とすると，$f(z)$ は有理関数で表わされる。$\left(f(z) = \dfrac{a_d z^d + \cdots + a_0}{b_d z^d + \cdots + b_0}\right)$
- 有理関数 $f(z)$ を互いに素な多項式の商として表わしたとき，$\deg f = \max\{$分母の次数，分子の次数$\}$ を f の次数という。$d = \deg f$ のとき，f は（多重度をこめて）d 対 1 の写像である。

以後は、$f(z)$ は 次数 $d \geqq 2$ の有理関数を表わすとする。　$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n}$ と書く。

◦ 必要に応じて、座標変換

$$f \longmapsto A \circ f \circ A^{-1}$$

(ただし、$A \in PSL(2, \mathbb{C})$, $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ Möbius transf.)

を行って考える。

◦ z が f の周期点 (periodic point)

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 　$\exists p \geqq 1$, 　$f^p(z) = z$

このような最小の p を その周期 (period) という。

さらにこのとき、　$\lambda = (f^p)'(z)$ 　　($z \neq \infty$ のとき)

を その固有値 (あるいは multiplicator) と呼ぶ。

周期点は その固有値 λ に応じて

$|\lambda| < 1$ のとき attractive, $|\lambda| = 1$ のとき indifferent

$|\lambda| > 1$ のとき repulsive であるという。

indifferent のときは、λ が 1 の巾根であれば rationally indifferent, そうでなければ、irrationally indifferent であるという。

○ z が f の critical point

$\underset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ f は z のどんな近傍でも１対１でない。

これは、$z \neq \infty, f(z) \neq \infty$ のときは $f'(z) = 0$ と同値。

次数 d の有理関数は、重複度をこめて $2(d-1)$ 個の critical point をもつ。

○ $D_f \coloneqq \{ z \in \overline{\mathbb{C}} \mid z$ のある近傍で $\{f^n \mid n \geq 0\}$ が同等連続 $\}$

を f の stable set という。（[Bl] では Fatou set と呼んでいる。）D_f の連結成分を f の stable region という。

$J_f = \overline{\mathbb{C}} - D_f$ は f の Julia set と呼ばれる。

§2. Julia set の基本的性質

1) J_f は closed, $\neq \phi$。 D_f は open。(ϕのこともある。)

2) J_f は completely invariant i.e. $f(J_f) = J_f = f^{-1}(J_f)$。

Dが stable region なら $f(D)$ も stable region であり、

$f|_D : D \to f(D)$ は proper (故に branched cover)。

3) α が attractive periodic pt. (周期 p) のとき、

$A(\alpha) = \{z \in \overline{\mathbb{C}} \mid \lim_{n\to\infty} f^{np}(z) = \alpha\}$ とおくと、

$A(\alpha) \subset D_f$。

4) $z \in \overline{\mathbb{C}}$ が、ある例外的な点(高々2個)でなければ、

$J_f \subset \overline{\bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(z)}$, (特に $z \in J_f$ なら一致)。

5) $J_f = \overline{\{\text{repulsive periodic pts.}\}}$。

注意 3)で $A(\alpha)$ の αを含む component を $A^*(\alpha)$と書くと、$A(\alpha) \neq A^*(\alpha)$ のときには、$A(\alpha)$ は無限個の components にわかれ、$A(\alpha) = \bigcup_{n\geq 0} f^{-n}(A^*(\alpha))$ である。また、$\partial A(\alpha) \subset J_f$。

attractive per. pt. $\in D_f$, repulsive per. pt. $\in J_f$ などは、局所的 dynamics から直ちにわかる。(§ 参照)

<u>参考</u>　<u>Montelの定理</u>　$\mathcal{F}$を、open set $U(\subset\overline{\mathbb{C}})$上の meromorphic functions のなすある族とする。もし、相異なる3つの値 $\alpha,\beta,\gamma\ (\in\overline{\mathbb{C}})$ があって、$\mathcal{F}$の除外値となる（i.e. ${}^\forall f\in\mathcal{F},\ {}^\forall z\in U,\ f(z)\neq\alpha,\beta,\gamma$）ならば、$\mathcal{F}$は U上同等連続である。

この定理から直ちに、「Uがopenで $U\cap J_f\neq\phi$ ならば $\#\left(\overline{\mathbb{C}}-\bigcup_{n\geq 0}f^n(U)\right)\leq 2$」などが結論される。

また、periodic pts が J_f で dense（cf. 5)）であることも次のようにして示される。（概略）。

$z_0\in J_f$ の小さな近傍Uで、f^{-2} の相異なる branch. g_1, g_2, g_3 （$g_i(z)\neq g_j(z)$ $(i\neq j, z\in U)$）がとれたとする。（ほとんどの点でとれる。）このとき、

$$\varphi_n(z)=\frac{f^n(z)-g_1(z)}{f^n(z)-g_3(z)}\cdot\frac{g_2(z)-g_3(z)}{g_2(z)-g_1(z)}$$

は、Uで meromorphic。　もし、$\{\varphi_n|_U\}$ が $0,1,\infty$ を除外値としてもったとすると、Montel の定理より $\{\varphi_n|_U\}$ は同等連続。$\Longrightarrow$ $\{f^n|_U\}$ は同等連続。

故に、$z_0\in J_f$ なら、${}^\exists\zeta\in U,\ {}^\exists n\geq 0$　$\varphi_n(\zeta)=0$ or 1 or ∞

$\Rightarrow f^n(\zeta)=g_1(\zeta)$ or $g_2(\zeta)$ or $g_3(\zeta)$ $\Rightarrow f^{n+2}(\zeta)=\zeta$ (per. pt.) //

§3. 例

<u>例1</u> $f(z) = z^2$

$f(0)=0$, $f'(0)=0$ (super attractive) ; $f(\infty)=\infty$ も super attr.

$|z|<1$ なら $f^n(z) = z^{2^n} \to 0$; $|z|>1$ なら $f^n(z) \to \infty$

$A(0) = A^*(0) = \{|z|<1\}$, $A(\infty) = A^*(\infty) = \{|z|>1\}$

$S^1 = \{z \mid |z|=1\}$ の近傍は 0 と ∞ に引きのばされるので. $J_f = S^1$。

$$\overline{\mathbb{C}} = J_f \sqcup A(0) \sqcup A(\infty).$$

<u>例2</u> $f(z) = z^2 + c$, $0<|c|\ll 1$ (例1の perturbation)

$\exists \alpha$: attractive fixed pt. (not super attr.) , $A(\alpha) = A^*(\alpha)$

∞ : super attractive fixed pt. , $A(\infty) = A^*(\infty)$

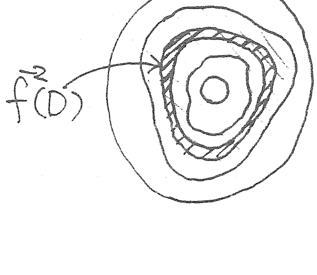
J_f は Jordan curve (実は quasi-circle), しかし, どの点でも接線をもたない。

$$\overline{\mathbb{C}} = J_f \sqcup A(\alpha) \sqcup A(\infty).$$

[$\exists R>1$ s.t. $D = \{z \mid \frac{1}{R} < |z| < 1\}$, $\underset{\text{(annulus)}}{f^{-1}(D)} \subset D$

$f : f^{-1}(D) \to D$, degree 2.

$$J_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D)$$



]

例3　$f(z) = z^2 + c$,　$|c| \gg 1$

$^\exists R > 1$ s.t. $D = \{z \mid |z| < R\}$,

$f^{-1}(D) = D_1 \sqcup D_2$ disksの disjoint union;

$f|_{D_i} : D_i \to D$, homeo;　$\overline{D_1} \sqcup \overline{D_2} \subset D$.

このとき．$f^{-2}(D) = (f|_{D_1})^{-1}(D_1) \sqcup (f|_{D_1})^{-1}(D_2) \sqcup (f|_{D_2})^{-1}(D_1) \sqcup (f|_{D_2})^{-1}(D_2)$

4つの disksの disjoint union

$\vdots$

$$J_f = \bigcap_{n \geq 0} f^{-n}(D) \underset{\text{homeo}}{\approx} \text{Cantorの3進集合.}$$

$$\overline{\mathbb{C}} - J_f = A(\infty) = A^*(\infty).\qquad \overline{\mathbb{C}} = J_f \sqcup A(\infty).$$

例4　(Lattès)　$f(z)$ は次のように定められる。

$\wp(z)$: Weierstraßの $\wp$-function for $\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ $(\mathrm{Im}\,\tau > 0)$

$^\exists f(z)$: 有理関数 (次数4) s.t.

$$\wp(2z) = f(\wp(z))\qquad : \text{“2倍角の公式”}.$$

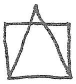
$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \arrow[r, "z \mapsto 2z"] \arrow[d, "\wp"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \arrow[d, "\wp"] \\
\overline{\mathbb{C}} \arrow[r, "f"] & \overline{\mathbb{C}}
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ 上の $z \mapsto 2z$ は repulsive periodic pt. が dense。

$$\therefore\ J_f = \overline{\mathbb{C}}.$$

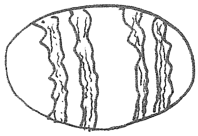
例5　$f(z) = c\left(\frac{z}{1+z^2}\right)^3$,　$|c| > 67$.

$J_f \underset{\text{homeo}}{\approx}$ (Cantorの3進集合) $\times$ S^1.

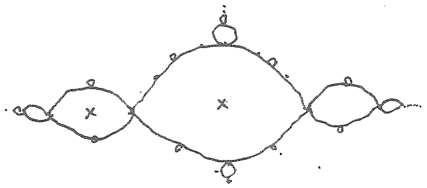
$f \underset{\text{conjugate}}{\sim}$  $\times\ (z \mapsto z^3)$

$\updownarrow$

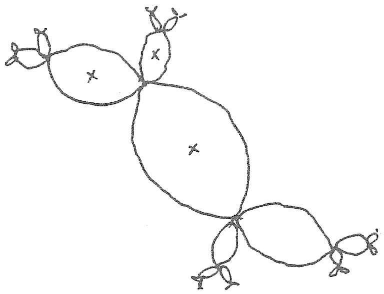
$\left(z \mapsto \frac{3}{2} - |x - \frac{1}{2}| \times 3\right)$



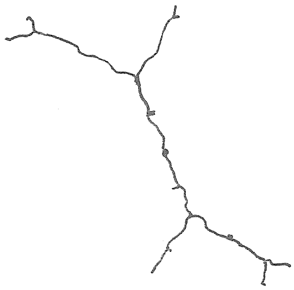
その他、2次関数だけでもいろいろな形が現われる。



$z \mapsto z^2 - 1$



$z \mapsto z^2 - 0.122561 + 0.744861i$



$z \mapsto z^2 + i$

§4. Sullivanの定理 — stable regionの分類

定理I.（Sullivan [S1]）　（§7参照）

すべてのstable regionはpreperiodic，すなわち，Dを1つのstable regionとすると．ある．$N\geqq 0$, $p\geqq 1$があって　$f^{N+p}(D)=f^N(D)$。

定理II.（Sullivan [S2]）

Dを周期pのperiodic stable region（Sullivan domainとも呼ばれる）とする。すなわち．$f^p(D)=D$　$f^k(D)\cap D=\phi$　$(0<k<p)$　をみたすstable regionである。このとき．$(D, f^p|_D)$は次の(AB), (PB), (SD), (HR)のどれかである。

(AB) attractive basin：　attractive periodic pt. $\zeta\in D$があって（周期p）．　D上広義一様に．

$$f^{np}(z)\longrightarrow\zeta\qquad(n\to\infty).$$

(PB) parabolic basin：　rationally indifferent periodic pt. $\zeta\in\partial D$があって（$f^p(\zeta)=\zeta$，$(f^p)'(\zeta)=1$；故にζの周期はpの約数）．　D上広義一様に．

$$f^{np}(z)\longrightarrow\zeta\qquad(n\to\infty).$$

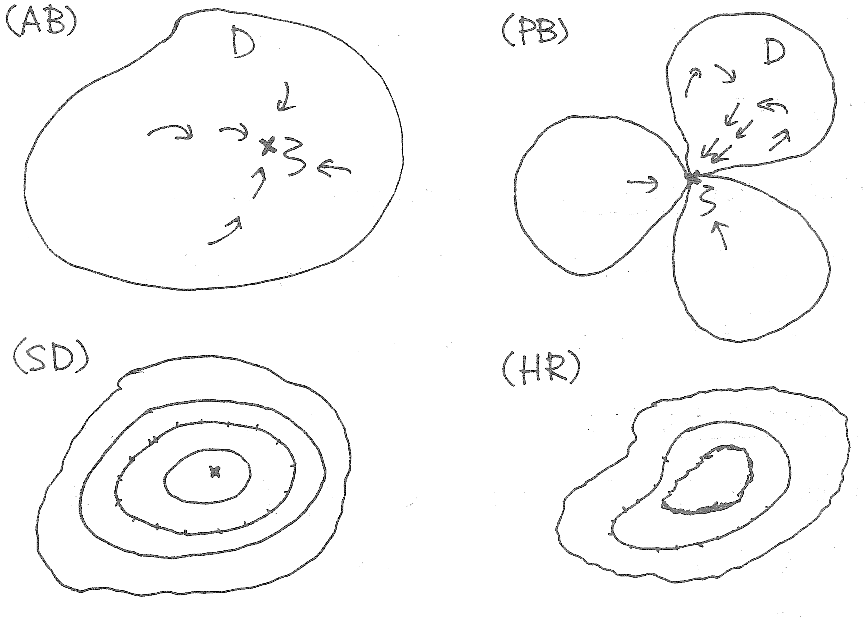
(SD) Siegel disk : 等角写像 $\varphi : D \to \{z \in \mathbb{C} \mid |z|<1\}$ と 無理数 θ があって. $\varphi(f^p(z)) = e^{2\pi i\theta} \cdot \varphi(z)$。
すなわち. f^p on D は. $z \mapsto e^{2\pi i\theta} \cdot z$ on $\{|z|<1\}$ と conformally conjugate。(このとき. $\varphi^{-1}(0)$ は固有値 $e^{2\pi i\theta}$ の irrationally indifferent per. pt.)

(HR) Herman ring : $0<r<1$ と. 無理数 θ, 等角写像 $\varphi : D \to \{z \in \mathbb{C} \mid r<|z|<1\}$ があって.

$$\varphi(f^p(z)) = e^{2\pi i\theta} \cdot \varphi(z)。$$

(i.e. $z \mapsto e^{2\pi i\theta} \cdot z$ on $\{r<|z|<1\}$ に conformally conjugate.)

Orbit の様子



§5. Periodic stable region (Sullivan domain) と periodic point, critical point との関係

前節で得られた4つのtype の Sullivan domain に関して知られている事実を述べる。(その多くは Fatou, Julia によって古典的に知られていた。) 表を参照。

A. periodic points について

∘ 周期 p の attractive per. pt. は、それを含む周期 p の attractive basin と 1対1 に対応する。

∘ 周期 p の rationally indifferent per. pt. に対しては、それを境界にもつ、p の倍数の周期の parabolic basin がいくつか(少くとも1個)対応する。parabolic basin は定義より、その境界上に rationally indiff. per. pt. をもつ。

∘ 周期 p の Siegel disk は、($\varphi'(0)$ に対応する) 周期 p の irrationally indifferent per. pt. を含む。しかし、irrationally indiff. per. pt. であって、Siegel disk に含まれ**ない**ものもある。(この時は、Julia set に属す。)
(Cremer の例)

∘ Herman ring は periodic point に関係しない。
(よって存在証明等はより困難である。)

B. critical points について

- attractive basin や parabolic basin の cycle は少くとも1つの critical pt. を含む。
- Siegel disk や Herman ring の境界の各点には，critical pt. の forward orbit（z の forward orbit $=\{f^n(z) \mid n \geqq 0\}$）が集積している。
- Cremer 型の irrationally indiff. per. pt. にも critical pt の forward orbit が集積する。

以上と，分類定理（定理II）より，もしすべての critical pt. が preperiodic（$\Leftrightarrow$ forward orbit が有限集合）なら，Julia set は $\overline{\mathbb{C}}$ 全体になる。（Sullivan）

表

periodic points（λ：固有値）			periodic stable regions (Sullivan domains)	critical points
attractive $\lvert\lambda\rvert<1$ [$\lambda=0$ のとき super attractive]			(AB) attractive basin [(SAB) super attractive basin]	ABのcycleは少くとも1コのcritical pt.を含む。
indifferent $\lvert\lambda\rvert=1$ ($\lambda=e^{2\pi i\theta}$ とおく)	rationally indifferent $\theta\in\mathbb{Q}$		(PB) parabolic basin	PBのcycleは少くとも1コのcritical pt.を含む。
	irrationally indifferent $\theta\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$	Siegel type	(SD) Siegel disk	forward orbitがSDの境界に集積。
		Cremer type	— (Julia setに属す)	forward orbitがper. pt.に集積。
—			(HR) Herman ring	forward orbitがHRの境界に集積。
repulsive $\lvert\lambda\rvert>1$			— (Julia set内でdense)	—

§6. Sullivan domain 等の個数について

Sullivan の結果により、有理関数 f の dynamics を記述するには、まず、f がどのような Sullivan domain どれくらいもつかが、最も重要なデータとなる。これを特徴付ける筆者の結果を述べる。

attractive basin の cycle の個数を n_{AB} で表わす。以下同様に、parabolic basin, Siegel disk, Herman ring, Cremer 型の irrationally indifferent per. pt. に対してその cycle の数を n_{PB}, n_{SD}, n_{HR}, n_{Cremer} で表わす。

<u>定理 [Shi 1]</u>

次数 d の有理関数について、

$$n_{AB} + n_{PB} + n_{SD} + n_{Cremer} + 2 \cdot n_{HR} \leqq 2(d-1),$$

$$n_{HR} \leqq d-2.$$

逆に上の2つの不等式をみたす n_{AB}, n_{PB}, --- に対し、それだけの個数の attractive basin, parabolic basin, --- をもつ次数 d の有理関数が存在する。

part II.

§7 qc-deformation と Sullivan の定理 I の証明

Sullivan の定理 I の証明は、擬等角写像を用いた変形 (qc-deformation) の理論に基づいている。 もし、preperiodic でない (i.e. "wandering" な) f の stable region が存在したと仮定すると、そこから f の qc-deformation を構成して、f の moduli 空間 ("Teichmüller space") の次元が ∞ になってしまうことが示される。(以下の C. 参照) ところが、次数 d の有理関数全体は、$2(d+1)$ 個の係数の比を考えれば $\mathbb{C}P^{2d+1}$ の中に埋めこめるので、moduli 空間は高々 $2d+1$ 次元のはずで、ここから矛盾が出る。

この節では、qc-deformation について簡単に説明する。

A. measurable conformal structure と qc-mapping

$\overline{\mathbb{C}}$ 上の measurable な Riemann 計量の conformal equivalence による同値類を measurable conformal structure という。(今後は Lebesgue measure 0 の集合は無視して考えるので、a.e. で定義されていれば

十分である。) measurable conf. str. σ を1つとる。各点の tangent space で σ での単位円は、standard structure σ_0 ($\overline{\mathbb{C}}$ の複素構造から決まるもの) に関しては楕円になる。その長軸と短軸の比の ($\mathbb{C}$ 上での) essential supremum を $\mathrm{dist}(\sigma)$ と書く。($1 \leq \mathrm{dist}(\sigma) \leq \infty$)

homeomorphism $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ が擬等角写像 (qc-mapping) $\Longleftrightarrow$ distribution としての $\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ が $L^1_{loc}(\mathbb{C})$ に属し、かつ、$\left|\frac{\partial\varphi}{\partial \bar{z}} \Big/ \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right| \leq {}^\exists k\,(\text{定数}) < 1$ a.e.

このときは、measurable conf. str. の引きもどし $\varphi^*\sigma$ も定義できる。

<u>Measurable mapping theorem</u> σ が measurable conf. str. で $\mathrm{dist}(\sigma) < \infty$ のとき、ある qc-mapping $\varphi : \overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$ が一意的に存在し、$\varphi^*\sigma_0 = \sigma$ a.e. $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$, $\varphi(\infty) = \infty$ をみたす。

B. qc-deformation [S1]

<u>補題</u> g が有理関数, σ が g-不変な measurable conf. str. (i.e. $g^*\sigma = \sigma$) で $\mathrm{dist}(\sigma) < \infty$ のとき、$\varphi^*\sigma_0 = \varphi$ となる qc-mapping φ に対し、

$f = \varphi \circ g \circ \varphi^{-1}$ も有理関数になる。

このfをgのqc-deformationという。

<u>注意</u> 実はこの補題で gが有理関数である必要はなく、各点の近傍で. analytic function と qc-map の合成になっていればよい。

C. 定理Ⅰの証明の概略

もし、Dがpreperiodicでないstable regionであるとすると. $D_n = f^n(D)$ $(n=0,1,2,\cdots)$ は disjoint になる。また. critical pt. は有限個なので、DをD_nで置きかえれば. $f: D_n \to D_{n+1}$ は covering である$(\forall n)$としてよい。(§2. 2))

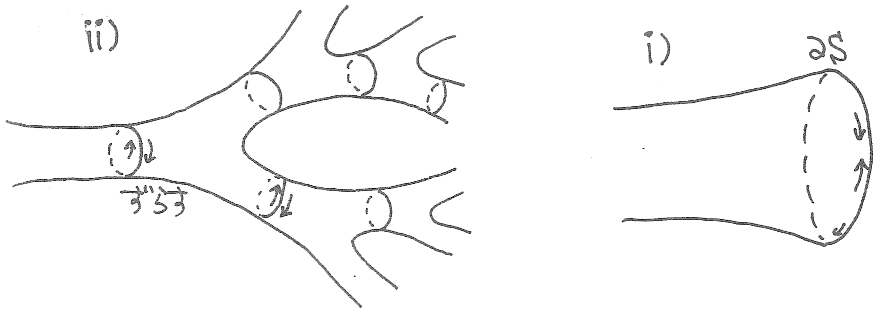
このとき. Riemann surface S と $\pi_n : D_n \to S$ (covering) で. $\pi_{n+1} \circ f = \pi_n$ および次のどちらかをみたすものが存在する:

i) ある $N \geq 0$ があって $n \geqq N$ なら、 $f: D_n \to D_{n+1}$ も $\pi_n : D_n \to S$ も bijective.

ii) Sは無限連結。

さて、ii)の場合. SのTeichmüller spaceは∞次元であり、i)の場合でも $D_n \subset \overline{\mathbb{C}}$ $(n \geqq N)$ の理想境界

は non-trivial な component を含むから、Sもそうで、その理想境界を"ずらす"ような変形を考えると、こちらも自由度∞で変形できる。



さて、これらの変形に対応するS上の新しい conformal structure を、まずπ_nで、次にfで引きもどしていくことにより、$\bigcup_{n,m\geq 0} f^{-m}(D_n)$上に conformal str. が定義される。この集合の外ではσ_0を与えておけば、$\overline{\mathbb{C}}$全体の measurable conformal structure σでf-不変なものが得られる。(f,σ)にBの補題を適用すれば、fの qc-deformation $\hat{f}$が得られる。こうして、Sの∞の自由度の変形に対応して、fの∞の自由度の qc-deformation が作れるので、fの moduli 空間の次元が∞であることがわかる。

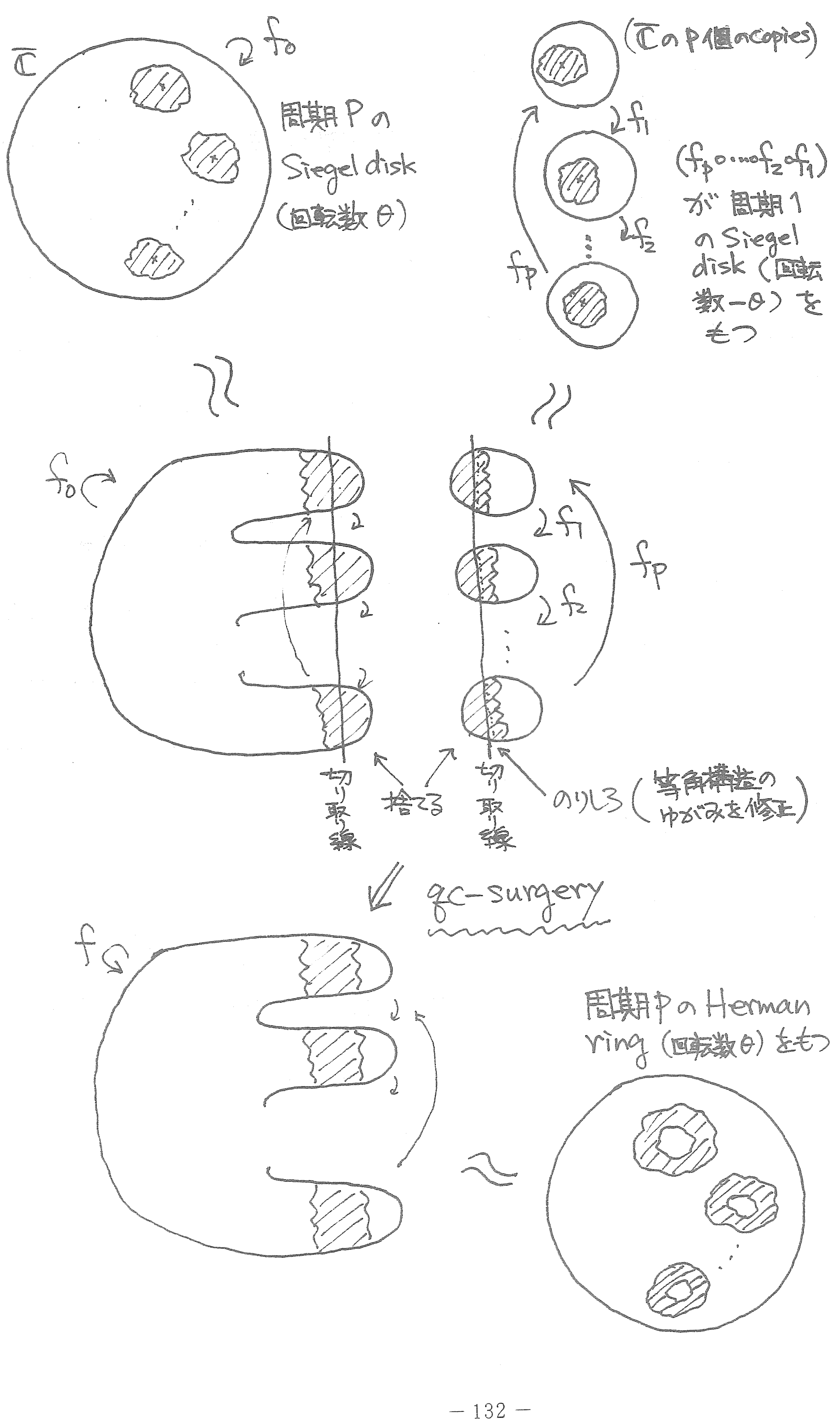
あとは、この節の最初に述べた通りである。

§8 qc-surgery

解析関数には、一致の定理があるので、C^∞-力学系に対してよく行われるような手術（写像の一部だけ変えたり、2つの写像をつなぎ合わせたりする操作）は、複素力学系に対しては 自由に行うことはできない。従って、与えられたdynamicsをもつ系を構成することはより困難になっている。

しかし、§ B の注意で述べたことを使えば、これが可能になる場合がある。 つまり、いくつかの有理関数を切って C^1-級 diffeo でつなぎ、うまく invariant measurable conf. str. を入れられれば、有理関数が得られるわけである。

例 Siegel disk を 貼り合わせて Herman ring を作る。次ページの図参照。 逆の操作も 可能である。



$\overline{\mathbb{C}}$
f_0
周期Pの Siegel disk (回転数θ)
($\overline{\mathbb{C}}$のp個のcopies)
f_1
f_2
f_p
($f_p \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1$) が 周期1の Siegel disk (回転数−θ) をもつ
≈
≈
f_0
f_1
f_2
f_p
切り取り線
捨てる
切り取り線
のりしろ(等角構造のゆがみを修正)
qc-surgery
f
周期pの Herman ring (回転数θ) をもつ
≈

§9 Hermann ring の配置に付随した tree

前節のような．Herman ring を構成する手術をもっと組織的に行えるようにするため．以下で述べるような tree を考える。これは同時に．Herman rings の配置（configuration）の問題を考える上でも非常に有効である。また．Herman ring をもたない系についても同様な tree を考えることができる。[Shi2]

f を Herman ring をもつ有理関数とする。

まず．$\mathcal{A}_0 = \{$(Herman rings $-$ critical pts の forward orbit の closure）の連結成分$\}$

$\mathcal{A}' = \{ f^{-n}(A)$ の連結成分 $| A \in \mathcal{A}_0,\ n \geq 0 \}$

$B =$ Herman rings の boundary の union

$\mathcal{A} = \{ A \in \mathcal{A}' \mid f^n(A)$ は B を separate する $(n \geq 0) \}$

とおく。$\mathcal{A}$ は disjoint annuli の集合である。

一般に annulus A に対して等角写像

$$\varphi_A : A \longrightarrow \{ z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < {}^{\exists} r_A \}$$

が存在する。このとき．$m(A) \rightleftharpoons \log r_A$，

$A[z] \rightleftharpoons \varphi_A^{-1}(\{ \zeta \mid |\zeta| = |\varphi_A(z)| \}) \quad (z \in A)$

$A(x,y) \rightleftharpoons \{ z \in A \mid A[z]$ は x と y を separate$\} \quad (x, y \in \overline{\mathbb{C}})$

と定義する。

$x, y \in \overline{\mathbb{C}}$ に対して $\quad d(x,y) = \sum_{A \in \mathcal{A}} m(A(x,y))$

とおくと これは pseudo metric (対称律・三角不等式をみたす) になる。 そこで、

$$T_f = \overline{\mathbb{C}}/\sim \qquad (x \sim y \underset{def.}{\Longleftrightarrow} d(x,y) = 0)$$

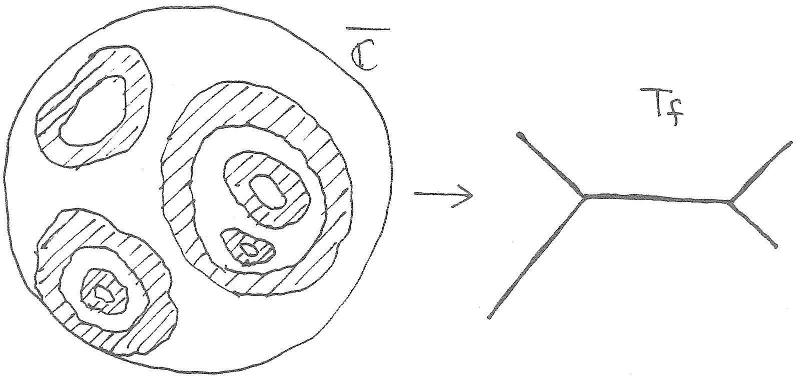
$\pi : \overline{\mathbb{C}} \to T_f$ natural projection

とすると <u>T_f は (有限な) tree になる。</u> さらに、

$$f_* : T_f \to T_f \quad \text{を} \quad f_*(x) = \pi \circ f(\partial \pi^{-1}(x))$$

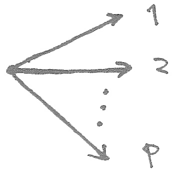
とおくと、<u>f_* は、区分線型な連続写像で その微分係数は整数値をとる。</u>

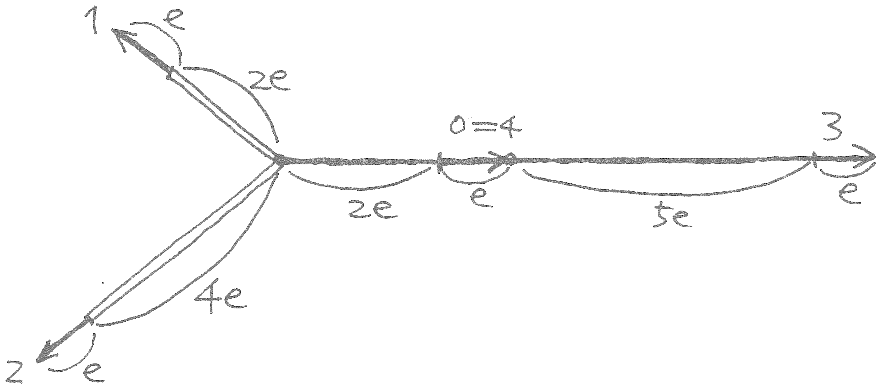
逆に、上のような性質 $(+\alpha)$ をもつ (T, F) から、有理関数を構成して $T = T_f$, $F = f_*$ とすることも、ある条件の下で可能である。 これは §8 の手術の例の一般化になっている。

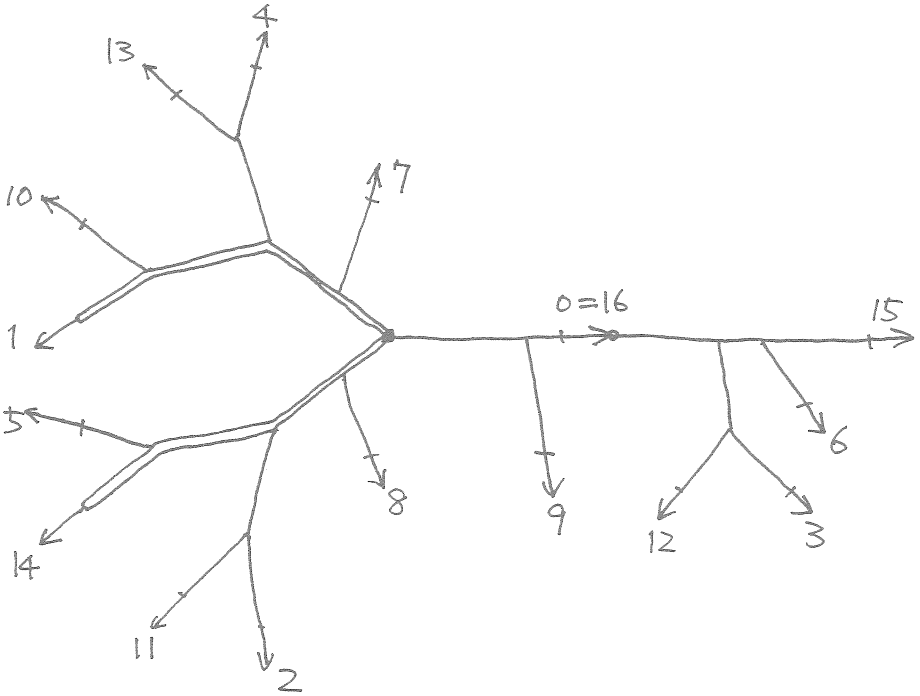


<u>treeの例</u>　最後にtreeの例をいくつか挙げる。

§8 の例から作ったtree







参考文献

読みやすい解説として [Bl] を挙げておく。詳しい reference は [Bl] 参照。

[Bl] P. Blanchard, Complex analytic dynamics on the Riemann sphere, Bull. Amer. Math. Soc. 11 (1984) p. 85-141.

[D] A. Douady, Systèmes dynamiques holomorphes, (Sém. Bourbaki, n° 599) Astérisque 105-106 (1983) p. 33-63.

[Shi 1] M. Shishikura, On the quasiconformal surgery of rational functions, Ann. Ec. Norm. Sup. (4) 20. (1987) p. 1-30.

[Shi 2] ———, Configuration of Herman rings and dynamical systems on trees, 数理研講究録 614 (Fractals and Related Topics). p. 13-26.

[S1] D. Sullivan, Quasiconformal homeomorphisms and dynamics I, Ann. of Math. 122 (1985) p. 401-418

[S2] ——, —— III, IHES preprint (M/83/1).

[U] 宇敷重広, 複素力学系の世界, 数学セミナー 1985年6月～1986年4月.

Hyperbolic 3-Manifolds の Deformation

岡山大理　吉田朋好

§1. Geometric Structure

基本群が複雑な構造をもつ多様体の位相構造には、通常の組み合わせ的あるいはホモトピー論的な手段だけではどうしても解明困難な面があって、それを補うものとして最も有効であると思われるものが Geometric structure である。

多様体 M の geometric structure とは次のように定義される一種の等質構造である。G を unimodular Lie 群で、ある Riemann 多様体 X の上に等長かつ推移的に作用するものとする。G のある離散部分群 Γ で、X に自由かつ固有不連続に作用するものがあり、商空間 X/Γ と M が位相同型になるとき M は (G, X) をモデルとする geometric structure

をもつという。 G は時たま省略されて、単に X にモデルをもつ geometric structure ということが多い。 X としては通常単連結なものを考える。従って Γ は M の基本群 $\pi_1(M)$ と同一視される。つまり $\pi_1(M)=\Gamma$ から Lie 群 G への表現 $\rho: \pi_1(M) \to G$ があり $\rho(\pi_1(M))=\Gamma$ かつ $M \approx X/\Gamma$ となる situation を考えるのである。 ρ のことをこの geometric structure のホロノミー表現という。

最もポピュラーな geometric structure は n 次元球面 S^n を M とし、 X としては S^n をそのまま $\mathbb{R}^{n+1}$ の単位球面と考え Riemann 多様体とみなしたものである このとき $S^n=X$ でホロノミー表現は trivial である。 S^n のこの geometric structure は S^n の位相構造の解明に大変役に立つことは周知の通りである

geometric structure をもつ多様体はかなり特殊なものであることは事実であるが、又、多様で面白い性質をそなえた空間の大きな class を含み、そこで展開される幾何学は従来の

幾何学のわく組にとらわれない自由な空気にみちている。

よく知られているように可向閉曲面は種数 $g=0, 1, \geq 2$ に応じて、球面 S^2、平面 $\mathbb{E}^2$、双曲平面 $\mathbb{H}^2$ にモデルをもつ geometric structure をもっている。特に $g \geq 2$ の閉曲面の双曲幾何学は近年 Thurston により3次元多様体の geometric structure との dynamic な関連が明らかにされ大変豊かな世界が展開されつつある。

§2. 3次元多様体の geometric structure

上に述べたように2次元多様体は、S^2, $\mathbb{E}^2$, $\mathbb{H}^2$ にモデルをもつ geometric structure によりすべてが記述される。3次元多様体の geometric structure のモデル空間として Thurston は次の8種類のものを与えた。

$\mathbb{H}^3$ (双曲空間)

$\mathbb{E}^3$ (ユークリッド空間)

S^3 (3次元球面)

$\widetilde{SL_2(\mathbb{R})}$ （$SL_2(\mathbb{R})$ の universal cover）

Sol （3次元 solvable Lie群）

Nil （3次元 nilpotent Lie群）

$\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$

$S^2 \times \mathbb{R}$

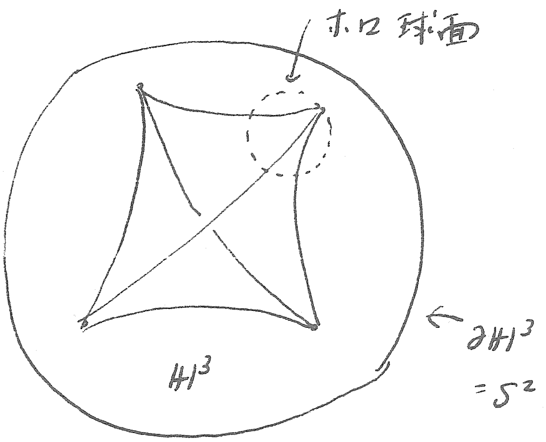
Lie群 G としてはこれらの等長変換群全体のなす群を考える。$\mathbb{H}^3$ の向きを保つ等長変換全体は通常 $PSL_2(\mathbb{C})$ とかかれる。$PSL_2(\mathbb{C})$ は複素3次元の複素Lie群であるが、このLie群は他の7つの空間の等長変換群を部分群もしくは接空間のような形で中に含むとみなされる。この事実を反映して、3次元多様体の geometric structure の研究においては、$\mathbb{H}^3$ 以外の7つのモデル空間は $\mathbb{H}^3$ を何らかの意味で deform したものとみなすと非常に見通しのよいものとなる。具体的には、non compact な完備双曲多様体 M を一つとりその双曲構造の変形を考えるのである。代数的にはこれはホロノミー表現 $\rho : \pi_1(M) \to PSL_2(\mathbb{C})$ の変形としてとらえられる。この変形の極限として、いろ

いろなタイプの現象があらわれ．極限の現象の多くのものが、上にあげた $\mathbb{H}^3$ 以外の7つの幾何学で記述される。この極限の現象の解明はまだ未知の部分が大きいが、現在の3次元トポロジーの最も重要な課題の一つであることはまちがいない。

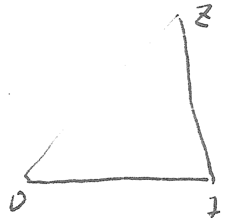
§3. Hyperbolic structure の deformation

上に述べた双曲構造の変形をもう少し具体的に説明すると次のようなことである。Nとして有限体積、non-compact、完備双曲多様体を考える　すなわち、$PSL(2,\mathbb{C})$ に含まれる離散部分群 Γ で $N = \mathbb{H}^3/\Gamma$ となるものがあり $\mathrm{volume}(\mathbb{H}^3/\Gamma) < +\infty$ である状況を考える。このとき N は有限個の、2次元トーラス T^2 と homeo な境界をもつコンパクト3次元多様体 $\bar{N}$ の内部と位相同型になる　このような双曲多様体 N は ideal triangle とよばれる $\mathbb{H}^3$ 内の無限遠に頂点をもつ測地四面体の有限個の和に分解される。（次図参照）

ideal triangle



この図では $\mathbb{R}^3$ 内の単位球の内部を $\mathbb{H}^3$ とした。$\partial\mathbb{H}^3 = S^2$ の4点を $\mathbb{H}^3$ 内の測地線で結んでできる四面体をideal四面体とよぶ。四面体の頂点で S^2 に接し $\mathbb{H}^3$ 内に含まれる球面をホロ球面とよぶ。ホロ球面から頂点をとり除いた部分には自然にユークリッド計量が入り、従って $\mathbb{E}^2$ とみなされる。ホロ球面と四面体との共通部分は $\mathbb{E}^2$ 内の3角形であるが、この3角形の相似形は一つの複素数 z



で特徴づけられる。又. ideal 四面体の合同類はこの3角形の相似形により決定され.従ってそによりきまる。こうしてわれわれは四面体の合同類を $\Delta(z)$ とあらわすことができる。前に述べたように有限体積、noncompact 完備な双曲多様体 N は有限個の ideal 四面体 $\Delta(\alpha_1), \cdots, \Delta(\alpha_n)$ に分解することができる。

$$N = \Delta(\alpha_1) \cup \cdots \cup \Delta(\alpha_n)$$

複素数の組 $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ は incident 関係式と呼ばれる有限個の代数方程式をみたす.この代数方程式は四面体の個数と同じ次元の複素 vector 空間 $\mathbb{C}^n$ 内の affine 代数多様体 C を定義する。C を N の変形の variety とよぶ。C に含まれ $(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ に十分近い点 $z = (z_1, \cdots, z_n)$ をとって

$$N_z = \Delta(z_1) \cup \cdots \cup \Delta(z_n)$$

とおくと N_z は位相的には N とかわらないが異なる双曲構造をもつことがわかる

このようにして変形の variety C 内に z を動かすことにより N の双曲構造を変形させることが可能になる。C 内に適当な real analytic curve をとりその curve に沿う変形を考え、その極限の現象を考えるのである。

§4　8の字 knot

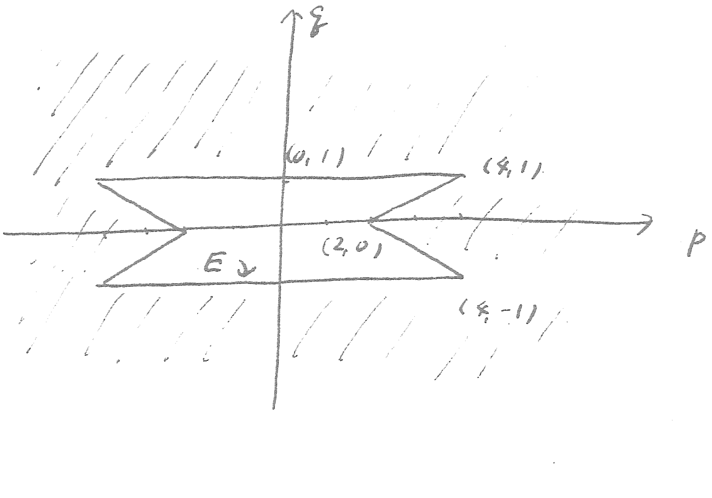
例として 8の字 knot の補空間を考える。K を S^3 内の 8の字 knot とし、$N = S^3 - K$ とする。N は体積有限、完備な双曲構造をもち $N = \Delta(z) \cup \Delta(w)$ と2つの ideal 四面体に分解される。(z, w) は $\mathbb{C}^2$ 内の

$$z(z-1)\,w(w-1) = 1$$

で定義される affine 代数曲線 C 上の点である。変形の variety C は genus 1 の代数曲線で 4個の無限遠点をもつ。$vol(z, w) = vol(\Delta(z)) + vol(\Delta(w))$ とおいて C のすべての点に対し volume が定義される

$$C_+ = \{ (z, w) \in C \mid vol(z, w) \geqq 0 \}$$

とおく。 C_+ から $\mathbb{R}^2$ へ Dehn surgery map と
よばれる写像 $\Phi : C_+ \to \mathbb{R}^2$ が定義される。
$\Phi(z,w) = (pt, qt)$, (p,q) は互いに素な整数の組, t は実数, となるとき (z,w) のあらわす N 上の双曲構造は、完備化することにより, S^3 を 8 の字 knot K に沿って (p,q)-Dehn surgery した多様体 $N_{p,q}$ の双曲構造で, attaching solid torus の core curve に角度 $2\pi/t$ の singularity をもつものとなる。 t を ∞ から 1 まで動かすように C 内に real analytic curve をとり対応する双曲構造の変形をたどることにより $N_{p,q}$ の geometric structure を観察するのである。 今の場合 Dehn surgery map Φ の image $\Phi(C_+)$ は図の



ようになる。$\mathbb{R}^2$内に原点対称な polygon E があり，$\Phi(C_r)=E$の外側，となる。Eは$\mathbb{C}$内の$\{z=$実数，$w=$実数$\}$で定義される曲線のΦによるimageで，対応する2つのideal四面体は2次元に退化しており，(z,w)がこの曲線上にくると，Nの双曲構造は退化して，他の7つのgeometric structureのどれかになる。例えば$(p,q)=(0,1)$とすれば$N_{0,1}=S^1$上のT^2-バンドルとなり，(z,w)を$\mathbb{C}$内でΦによるimageが$(0,t)$ $(1\leq t<\infty)$となるように動かせば，$t\to 1$になるとき，T^2方向が一点にshrinkして$N_{0,1}$がS^2に退化することになり，rescaleして考えることにより$N_{0,1}$がSolにモデルをもつgeometric structureをもつことがわかる。又，$(p,q)=(1,1)$とすれば$N_{1,1}=S^2$上のSeifertファイバー空間で，同様に(t,t) $(1\leq t<\infty)$となるように(z,w)を動かせば，$t\to 1$のとき$N_{1,1}$のファイバーが一点にshrinkして$N_{1,1}$はS^2に退化し，ファイバー方向をrescaleすることにより，$N_{1,1}$が$\widetilde{SL_2\mathbb{R}}$にモデ

ルをもつ geometric structure をもつことがわかる。

文献

(1) Thurston. W.P. The geometry and topology of 3-manifolds, Princeton Math. Dept. 1979

(2) Thurston. W.P. Hyperbolic structures on 3-manifolds I, Ann. of Math. 124 (1981)

(3) Scott. P. The geometries of 3-manifolds Bull. London Math. Soc. 15

(4) Neumann W.D. and Zagier D. Volumes of hyperbolic three manifolds. Topology 24, No. 3.

(5) Yoshida T. The η-invariant of hyperbolic 3-manifolds Invent. math. 81 (1985)

等質空間のコホモロジー環の自己同型群

琉大理　手塚康誠

序

Gをコンパクト連結単純リー群でUをその閉部分群で $\mathrm{rank}\, G = \mathrm{rank}\, U$となるものとする。本稿では，等質空間$G/U$のコホモロジー環$H^*(G/U, \mathbb{C})$の次数を保つ自己同型のなす群$\mathrm{Aut}\, H^*(G/U, \mathbb{C})$について述べる。以下，特に断りがない限り，コホモロジーの係数は，複素数$\mathbb{C}$とする。$\mathrm{Aut}\, H^*(G/U)$は，$H^*(G/U)$を$\mathbb{C}$上のベクトル空間とみた時の次元をnとするとき，$\mathrm{Aut}\, H^*(G/U) \subset M_n(\mathbb{C})$となり，$H^*(G/U)$の関係式を保つことから，アフィン空間$M_n(\mathbb{C})$の代数的集合になるから，$\mathbb{C}$上の線型代数群になっている。その単位元の連結成分は，リー環を調べることにより，1次元の複素トーラス$\mathbb{C}^\times$と同型になる。G/Uの自己ホモトピー同値写像のな

す群 $Aut(G/U)$ の構造を調べることは, むづかしいが, 上の結果と, Sullivan, Wilkerson の結果 [10] を用いると $\pi_0(Aut(G/U))$ は有限群になることがわかる。Glover, Mislin [3] は, グラスマンの場合にコホモロジー環の自己同型群を調べることで, $Aut\, H^*(G/U; \mathbb{C})$ は $\mathbb{C}^\times$ と Weyl 群の元で生成されることを予想した。筆者らは, [8] においてその証明を述べたが, Papadima [6] によりエラーが指摘された。

§1 G/U のコホモロジー

T を G と U との共通の極大トーラスとする。今 $n = \mathrm{rank}\, G = \dim T$ とすれば, T の分類空間 BT は無限次元の複素射影空間の n コの直積となるので, $H^*(BT) = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]$ $|x_i| = 2$ となる。$T \subset G$ は $BT \xrightarrow{i} BG$ を引き起こし, Chevalley あるいは Borel の定理 [11] によれば, $i^* : H^*(BG) \longrightarrow H^*(BT)$ は単射で, $\mathrm{Im}\, i^*$ は Weyl 群 $W(G)$ の T への作用から定義される作用から誘導される $H^*(BT)$ への $W(G)$

の作用による不変式環 $H^*(BT)^{W(G)}$ に一致して,

$$H^*(BG) = H^*(BT)^{W(G)} = \mathbb{C}[I_1, \cdots, I_m]$$

と書ける。Uの分類空間BUのコホモロジー環も同様に,

$$H^*(BU) = H^*(BT)^{W(U)} = \mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n]$$

となる。G/Uを計算するために,ファイバーバンドル

$$\begin{array}{ccccc} G & \to & G/U & \to & BU \\ \| & & \downarrow & & \downarrow \\ G & \to & E_G & \to & BG \end{array}$$

を比較する。ここで E_G は普遍G主束の全空間。$H^*(BG) \to H^*(BU)$ で $(I_1, \cdots, I_m)$ は $H^*(BU)$ の正則列になるから, Borelの転入定理を使うことで,

$$H^*(G/U) = \mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n] \big/ (I_1, \cdots, I_m)$$

となり, $\dim_{\mathbb{C}} H^*(G/U) = |W(G)/W(U)|$ で, $\mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n]$ は自由 $\mathbb{C}[I_1, \cdots, I_m]$-加群で, その rank は $|W(G)/W(U)|$ と一致する。

§2 $\mathrm{Aut}\, H^*(G/T)$の単位元の連結成分

Aを$\mathbb{C}$上の有限生成多元環（可換）とする。$D: A \to A$が$\mathbb{C}$上の微分であるとは，(1)，(2)をみたすA上の線型写像のことである。

(1) Dは$\mathbb{C}$- linear

(2) $D(x\cdot y) = Dx\cdot y + x\,Dy$, $x, y \in A$

ここでは更に次数を保つ微分だけを考える。この全体を$D(A)$と書くと，$X_1, X_2 \in D(A)$に対して，

$$[X_1, X_2]f = X_1X_2f - X_2X_1f, \quad f \in A$$

とすることで，$D(A)$は$\mathbb{C}$上のリー環になる。このとき，$X \in D(A)$に対して，

$$\mathrm{Exp}\, X\cdot f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i(f)}{i!}, \quad f \in A$$

と定義すると，

$$\mathrm{Exp}\, X\cdot(f_1 f_2) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!}(f_1\cdot f_2)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\Big(\sum_{k+l=i} {}_iC_k X^k f_1\cdot X^l f_2\Big)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{k+l=i} \frac{X^k f_1}{k!}\cdot\frac{X^l f_2}{l!} = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{X^i}{i!} f_1\Big)\cdot\Big(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{X^j}{j!} f_2\Big)$$

$$= (\mathrm{Exp}\, X f_1)\cdot(\mathrm{Exp}\, X f_2)$$

又 $\mathrm{Exp}(-X)\cdot\mathrm{Exp}(X)=I$ となるので, $\mathrm{Exp}X\in$
$\mathrm{Aut}(A)=\hat{G}$ になる。Chevalley[12]によれば,
$\hat{G}$ は $\mathbb{C}$ 上の代数群になり, その連結成分
$\hat{G}^\circ$ のリー環を $D(A)$ とみるとき, $\hat{G}^\circ$ は,
$\mathrm{Exp}\,X$, $X\in D(A)$ で生成され, $\hat{G}^\circ$ の閉部分
群, 位相は Zariski 位相で考えている。, と
代数的部分リー環は一対一に対応している。更に $\hat{G}^\circ$ は $\hat{G}$ の正規部分群となり,
$\hat{G}$ は代数的集合だから, 連結成分, この場合は既約成分と同じ, は有限個になるので,
$\hat{G}/\hat{G}^\circ$ は有限群になる。そこで $\hat{G}^\circ$ の
構造を見るのに, $D(A)$ を調べてみる。

$D_{-}(A)$ を次数を下げる $\mathbb{C}$ 上の微分の
なすリー環としてみる。筆者らは, 以前
次の様な問題を考えていた。$F\to E\to B$
を Serre ファイブレーションで, $\pi_0(B)=\pi_1(B)=1$
とするとき, 任意の底空間 B に対して,
どんな条件が F にあれば, $H^*(E)\longrightarrow H^*(F)$
が全射になるか。これに対して Halperin は

$H^*(F) = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/(P_1, \dots, P_q)$, $P_1, \dots, P_q$ は正則列ならば、$H^*(E) \to H^*(F)$ が全射になるであろうと予想した。代数的にもっと強く、$H^*(F)$ が上の形ならば、$D(H^*(F)) = 0$ と予想した。この予想は一般の場合は、まだ解かれていないようであるが、[9]で $F = G/U$ の時正しい事を示した。又河野明氏との共同研究[7]で、$X = U(n)/U(n_1) \times \cdots \times U(n_k)$ のとき、$H^*(E, F_p) \to H^*(F, F_p)$ が、任意の単連結底空間 B に対して、全射になるのは、$p \nmid n$ に限ることを示した。$D(H^*(G/U)) = 0$ を示すのに得た結果は、

定理[9]. G を単純連結コンパクトリー群、U を閉部分群で $\mathrm{rank}\, G = \mathrm{rank}\, U$ となるもの。$H^*(G/U) = \mathbb{C}[J_1, \dots, J_n]/(I_1, \dots, I_n)$ $n = \mathrm{rank}\, G$, $|J_1| \le \cdots \le |J_n|$, $|I_1| \le \cdots \le |I_n|$ とするとき、$(I_1, \dots, I_{n-1}, \det(\partial I_i/\partial J_j))$ は $\mathbb{C}[J_1, \dots, J_n]$ の正則列である。

以下定理の条件をみたす $H^*(G/U)$ Aと書くことにする。$D\in D(A)$に対して、Dの$\mathbb{C}[J_1,\dots,J_n]$への持ちあげを$\tilde{D}$と書く。

補題 2.1. $\tilde{D}I_i\in(I_1,\dots,I_{n-1})$, $1\le i\le n$ ならば、$D=0$。

証明.

$$\tilde{D}\cdot I_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial I_i}{\partial J_k}\tilde{D}(J_k),$$

仮定より $\tilde{D}I_i\in(I_1,\dots,I_{n-1})$ より、

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial I_1}{\partial J_k}\tilde{D}(J_k)\in(I_1,\dots,I_{n-1}),\dots,\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial I_n}{\partial J_k}\tilde{D}(J_k)\in(I_1,\dots,I_{n-1})$$

Cramerの公式より、$\det\left(\frac{\partial I_i}{\partial J_j}\right)\tilde{D}(J_k)\in(I_1,\dots,I_{n-1})$。

定理から、$(I_1,\dots,I_{n-1},\det\left(\frac{\partial I_i}{\partial J_j}\right))$は、正則列になるので、正則列の定義より、

$\tilde{D}(J_k)\in(I_1,\dots,I_{n-1})$となり、$D=0$。

$\hat{X} \in D(\mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n])$ を，$\hat{X}(J_i) = |J_i| J_i$ とする。

補題 2.2. Eulerの公式

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I_i}{\partial J_k} |J_k| J_k = |I_i| I_i \text{ が成り立つ。}$$

証明 $t \in \mathbb{C}$ を不定元とするとき，

$$I_i(t^{|J_1|} J_1, \ldots, t^{|J_n|} J_n) = t^{|I_i|} I_i(J_1, \cdots, J_n)$$

が成り立つ。両辺を t で微分すると，

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial I_i}{\partial J_k} |J_k| t^{|J_k|-1} J_k = |I_i| t^{|I_i|-1} I_i.$$

ここで $t = 1$ とすれば，上の等式を得る。
これから，$\hat{X}$ は $D(A)$ の元とみなせる。

定理 2.3. 先きの定理の仮定で，

$D(A) \simeq \mathbb{C}$. ここで $D(A)$ の生成元 X は，

$\hat{X}(I_i) = |J_i| J_i$，$1 \le i \le n$ で与えられる。

証明. $D(A) \ni D$ を取ると，仮定により $|I_{n-1}| < |I_n|$，よって $\hat{D}(I_n) = a I_n + h$，

$a \in \mathbb{C}$，$h \in (I_1, \cdots, I_{n-1})$ と書ける。

$\hat{X}$の定義から, $\exists b \in \mathbb{C}$で $b\hat{X}(I_n) = aI_n$,
$\hat{D}, \hat{X} \in D(A)$から, $\hat{D}' = \hat{D} - b\hat{X} \in D(A)$.
そして $\hat{D}'(I_i) \in (I_1, \cdots, I_{n-1})$. $1 \le i \le n$.
補題2.1から $D' = 0$. だから $\hat{D}(J_i) = b|J_i|J_i$
と書ける。

これから $D(A)$の元 Yを取ると, $\hat{Y}(J_i) = a|J_i|J_i$,
$a \in \mathbb{C}$と書けるから,
$(\mathrm{Exp}\,\hat{Y})J_i = \exp(a|J_i|)J_i = \exp a^{|J_i|} J_i$
となるので,

定理2.4. $\hat{G}^0 = \mathbb{C}^\times$. 同型は, $\mu \in \mathbb{C}^\times$
に対して, $\mu^{|J_i|}J_i$ で与えられる。

Gが単純でないと, 上の結果は成立しない。しかし, Halperin予想を含む予想として,
$A = \mathbb{C}[x_1, \cdots, x_n]/(P_1, \cdots, P_n)$ $|x_1| \le \cdots \le |x_n|$, $P_1, \cdots, P_n$
は正則列とするとき, $\mathrm{Aut}\,A$の連結成分は,
複素トーラスに同型かという問題が,
考えられる。

§3. $\mathrm{Aut}\,H^*(G/U)$ と $\mathrm{End}\,H^*(G/U)$.

・$\tilde{G} = \mathrm{Aut}\,H^*(G/U)$ とするとき, §2の結果から, $\tilde{G}^\circ = \mathbb{C}^\times$ で;

$$1 \to \mathbb{C}^\times \to \tilde{G} \to W \to 1,$$

ここで Wは有限群. $\mathbb{C}(x_1, \cdots, x_n) = L$, $\mathbb{C}(I_1, \cdots, I_n) = k$, $\mathbb{C}(J_1, \cdots, J_n) = K$ とすると, L/k, L/K は Galois拡大で; そのGalois群は、$G(U)$ の Weyl群 $W(G)$ ($W(U)$) にそれぞれなる。K/k には, $N_G(W(U))/W(U)$, $N_G(W(U))$ は, $W(U)$ の $W(G)$ での正規化群, が作用するが; これは $\mathbb{C}[J_1, \cdots, J_n]$に作用していることがわかり, $\mathbb{C}[I_1, \cdots, I_n]$を固定するから, $\tilde{G}$ の部分群になっていることが, わかる。

Homer, Glover, Liulevicius, Mislin [1], [2], [3], [4] 等は、$G = U(n)$, $U = T^n$, $U(n_1) \times U(n_2)$ の場合に $\tilde{G}$を計算して, $\tilde{G}$は $\mathbb{C}^\times$ と $N_G(W(U))/W(U)$ で生成されることを予想した。

しかし Papadima [5] の手紙により, その予想は

一般的には成立しないことを知らされた。

例 Papadima [6]

$G = SO(7)$, $U = U(3)$.

$H^*(G/U) = \mathbb{C}[c_1, c_3]/(c_1^4 - c_1c_3,\ c_3^2)$.

$N_G(W(U))/W(U) = \mathbb{Z}/2$ で生成元 w は,

$w(c_1) = -c_1$, $w(c_3) = -c_3$ と作用するから

$w = -1 \in \mathbb{C}^\times$. よって $\langle \mathbb{C}^\times, \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rangle = \mathbb{C}^\times$.

ところで $\sigma(c_1) = c_1$, $\sigma(c_3) = -c_3 + 2c_1^3$ は,

$\sigma^2 = 1$ なる自己同型で, 明らかに $\sigma \notin \mathbb{C}^\times$.

そこで, $G = U(n)$, $U = U(n_1) \times \cdots \times U(n_k)$ に

ついても, $\tilde{G}$ が計算できればと思っている。

最後に $\mathrm{End}\, H^*(G/U)$ について, 簡単に

ふれておく. $U(n)/U(n_1) \times U(n_2)$ のタイプ

に対しては、やはり Hommer や Glover 等が,

$$\mathrm{End}\, H^*(G/U, \mathbb{Q}) = \mathrm{Aut}\, H^*(G/U, \mathbb{Q}) \cup \{0\}$$

となることを示した。これから, End は

$\tilde{G}$ の $M_m(\mathbb{C})$ の Zariski 閉包を取った

ものでないかと思われるが、"$\hat{G}$が連結ならば、Endは$\hat{G}$のZariski閉包を取ったものになることは、簡単に示せる。" $G=U(n)$, $U=T^n$で、$\theta(x_i)=x_i-\xi^i x_i$, ここで$\xi$は原始$n$乗根で、$H^*(BT)=\mathbb{C}[x_1,\cdots,x_n]$とすると、$\theta$は$H^*(U(n)/T)$の自己準同型写像で、$\hat{G}$の閉包を取ったものになっていない。

そんな訳で、EndはAutに比べても、かなり複雑になっているように思われる。

参考文献

1. J. Ewing and A. Liulevicius, homotopy rigidity of linear actions on friendly homogeneous spaces, J. Pure, Appl. Algebra 18 (1980) 259−267

2. H. Glover and W. Homer, Self maps of flag manifolds, Trans. Amer Math. Soc. 267 (1980) 423−434

3. H. Glover and G. Mislin, On the genus of generalized flag manifolds, Enseignment Math 27(1981) 211-219.

4. Hoffman, Endomorhisms of the cohomology of complex grassmanions, Trans. Amer Math Soc. 281(1984) 745-764.

5. S. Papadima, Rigidity properties of compact Lie group modulo maximal tori, Math Ann, 275(1986) 637-652.

6. S. Papadima, Rational homotopy equivalences of Lie type, preprint.

7. A. Kono, H. Shiga, M. Tezaka, A note on the cohomology of fibrations whose fiber is a homogeneous space, preprint.

8. H. Shiga and M. Tezuka, Cohomology automorphisms of some homogeneous space, Topology and Its Application 25 (1987) 143-150.

9. H. Shiga and M. Tezuka, Rational fibrations, homogeneous spaces with positive Euler characteristics and Jacobians, to appear in Ann. Inst. Fourier

10. D Sullivan, Infinitesimal computations in Topology, publ. I.H.E.S 39 (1977)

11. 戸田宏, 三村護, リー群の位相 上, 下. 紀ノ国屋 (1981)

12. C. Chevalley, Théorie des groupes Algébriques, Hermann (1951)

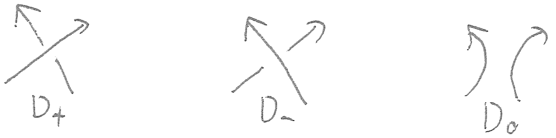
A formula for the two variable link polynomial

大阪市大・理　村上斉 *)

$\mathbb{R}^3$内のlinkの不変量であるAlexander polynomial $\Delta_L(t)$ [1], Jones polynomial $V_L(t)$ [5, 6], およびそれらの一般化であるtwo variable polynomial $P_L(a, z)$ [4, 12] について成立するある種の公式とその応用について説明をする。

§1　$P_L(a, z)$ の定義

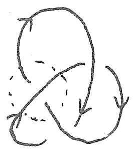
$\mathbb{R}^3$内の，折れ線でできた向きのついたlink L と，その$\mathbb{R}^2$上のdiagram Dを考える．diagram上の1つの交点に着目して，その交点を次のように変化させたものをD_+, D_-, D_0とする。



*) 日本学術振興会特別研究員

その diagram に対応する link をそれぞれ L_+, L_-, L_0 とかく。

たとえば、D_+ が



のとき D_-, D_0 はそれぞれ

D_-

D_-

となる。

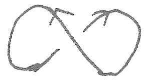
L の two variable polynomial $P_L(a, z) \in \mathbb{Z}[a^{\pm 1}, z^{\pm 1}]$ は、L を表す1つの diagram D に対して、次の2つの式を用いて計算されるものである。

$$\begin{cases} (\mathrm{I}) & P_O(a, z) = 1 \quad (O \text{は自明な knot}) \\ (\mathrm{II}) & a^{-1} P_{D_+}(a, z) - a P_{D_-}(a, z) + z P_{D_0}(a, z) = 0 \end{cases}$$

P_L は link を表す diagram のとり方に、また計算の方法にも

よらずに link のみによって決まることがわかる[4, 12]。

たとえば

D_+ :  , D_- :  , D_0 : 

とおくことにより（D_+, D_- はともに自明な knot を表すことに注意）

$$D_0 = \frac{a-a^{-1}}{z},$$

つまり自明な two-component link T_2 に対しては

$$P_{T_2}(a,z) = \frac{a-a^{-1}}{z}$$

となることがわかる。同様にして，自明な n-component link T_n について

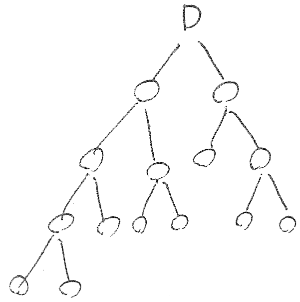
$$P_{T_n}(a,z) = \left(\frac{a-a^{-1}}{z}\right)^{n-1}$$

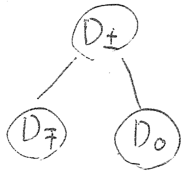
となる。

次に，一般の link について，どのように P_L を計算

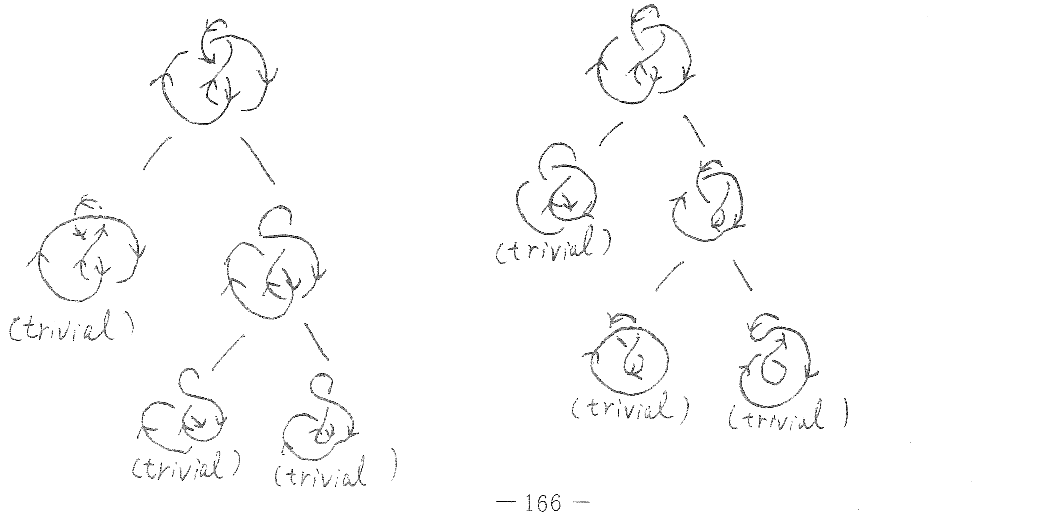
するかを説明しよう。

Lのdiagram Dに対して、次のようなtree (resolution tree)を考える。各vertex ○にはdiagramが対応し、



各分枝  には、

のようなlink diagramをあてはめ、一番下のdiagramはtrivialなlinkのdiagramが入っているものとする。すると、左へ伸びる枝(根?)は、交点の上下を入れかえる操作に、右へ伸びる枝は交点をなくす操作に対応しているので、必ず上のようなtreeがとれることがわかる。たとえば



などは、どちらも figure eight knot の resolution tree である。(1つめの分枝における、入れかえられた交点の符号が違うことに注意)

resolution tree が1つ作れれば、その各 leaf (一番下にくる trivial link) については P_L の値がわかっているので ($P_{T_n} = \left(\frac{a-a^{-1}}{z}\right)^{n-1}$ であった) あとは定義式 (II) を使うことによって、すべての link に対して P_L が計算できることになる。

さて、Alexander polynomial $\Delta_L(t)$ は

$$\Delta_L(t) = P_L(1, t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}}),$$

Jones polynomial $V_L(t)$ は

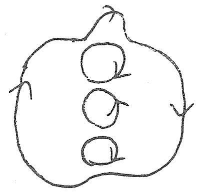
$$V_L(t) = P_L(t, t^{\frac{1}{2}} - t^{-\frac{1}{2}})$$

で表されることが知られている。([2, 4, 5, 7, 12] を参照、この式を定義だとしてもよい。)

§2　Seifert circle, writhe の定義

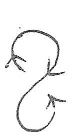
link の diagram のすべての交点を D_0 の形にして消し去ると、いくつかの simple closed curve ができる。それらを Seifert circles とよぶ。たとえば

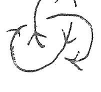
という knot の Seifert circles は



のようになる。

また、link の diagram の交点に、 のときは $+1$,  のときは -1 の符号をつけて、それらすべてを加えたものを、diagram D の writhe [raið] とよび $w(D)$ とかく。たとえば

$w($ $)=0$,　$w($  $)=-1$

$w($  $)=-3$,　$w($  $)=0$

である。上の例でもわかるように writhe は link の invariant ではないことに注意してほしい。[8,9]

braid から link を作るときに、その braid の弦の本数は Seifert circles の数に対応し、writhe は braid 表現の exponent sum に対応するのだが、任意の link diagram を、その Seifert circles の数と、writhe を変えずに braid の形に変形できることが山田氏によって示された [13]。

§3 定理とその応用

<u>定理 1</u> link L の diagram を D、また D は n 個の Seifert circles に分かれるものとする。このとき次の式が成り立つ。

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\Big\{\prod_{\substack{0\leq j<k\leq n\\ j\neq i,\,k\neq i}}(a_j a_k^{-1}-a_j^{-1}a_k)\Big\}a_i^{-w(D)}P_L(a_i,z)=0$$

ここで、$a_0, a_1, \cdots, a_n$ は独立な変数である。

§1で述べたように $P_L(1, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = \Delta_L(t)$, $P_L(t, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = V_L(t)$ であることと，簡単にわかる事実

$$P_L(t^{\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = 1$$
$$P_L(t^{-\frac{1}{2}}, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = (-1)^{n+w(D)-1}$$
$$P_L(t^{-1}, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = (-1)^{n+w(D)-1} V_L(t^{-1})$$

を使うと次の系が得られる。

系1　Lを3個のSeifert circlesからなるdiagramをもつlinkとする。(山田氏の定理によりこれは3-braid linkになる。) そのとき

$$P_L(a, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = a^{w(D)}\left\{\frac{(a-a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t-t^{-1})}\left\{t^{-\frac{1}{2}w(D)}\right.\right.$$
$$\left.\times(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1}) - (-1)^{w(D)}t^{\frac{1}{2}w(D)}(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)\right\}$$
$$\left.+\frac{(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})^2}\Delta_L(t)\right\}$$

が成り立つ。つまり P_LはΔ_Lと$w(D)$のみによって

定まる。

注意　上の式はJonesによって最初に示された[5,6]。その証明はHecke algebraの表現を使うもので、以下に示す方法とは異なっている。

系2　Lを4個のSeifert circlesからなるdiagramをもつlinkとする。そのとき

$$
\begin{aligned}
P_L(a, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = a^{w(D)} \Bigg\{ & \frac{(a-a^{-1})(ta^{-1}-t^{-1}a)}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t-t^{-1})} \Bigg\{ t^{-\frac{1}{2}w(D)} \times \\
& \frac{(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})} + (-1)^{w(D)} t^{\frac{1}{2}w(D)} \frac{(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)}{(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{3}{2}})} \Bigg\} + \\
& \frac{(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})(ta^{-1}-t^{-1}a)}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})^2(t-t^{-1})} \Delta_L(t) - \\
& \frac{(a-a^{-1})(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t-t^{-1})(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{3}{2}})} t^{-w(D)} V_L(t) \Bigg\}
\end{aligned}
$$

または、

$$
\begin{aligned}
P_L(a, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}}) = a^{w(D)} \Bigg\{ & \frac{(ta^{-1}-t^{-1}a)(ta-t^{-1}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t-t^{-1})(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{3}{2}})} \\
\times \Big\{ & t^{-\frac{1}{2}w(D)}(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1}) - (-1)^{w(D)} t^{\frac{1}{2}w(D)} (t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a) \Big\}
\end{aligned}
$$

$$-\frac{(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{3}{2}})(t^{2}-t^{-2})}\{(ta-t^{-1}a^{-1})t^{-w(D)}$$

$$\times V_L(t)-(-1)^{w(D)}(ta^{-1}-t^{-1}a)t^{w(D)}V_L(t^{-1})\}]$$

のように，P_Lは，Δ_LとV_Lと$w(D)$またはV_Lと$w(D)$によって定まる。これからΔ_LがV_Lと$w(D)$によって定まることもわかる。（2番目の式で$a=1$とおけばよい）

系3　Lを5個のSeifert circlesからなるdiagramをもつlinkとする。そのとき

$$P_L(a,t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})=a^{w(D)}\{\frac{(a-a^{-1})(ta^{-1}-t^{-1}a)(ta-t^{-1}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})^{2}(t-t^{-1})(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{3}{2}})}$$

$$\times\{t^{-\frac{1}{2}w(D)}(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})-(-1)^{w(D)}t^{\frac{1}{2}w(D)}(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)\}$$

$$+\frac{(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})(ta^{-1}-t^{-1}a)(ta-t^{-1}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})^{2}(t-t^{-1})^{2}}\Delta_L(t)$$

$$-\frac{(a-a^{-1})(t^{\frac{1}{2}}a^{-1}-t^{-\frac{1}{2}}a)(t^{\frac{1}{2}}a-t^{-\frac{1}{2}}a^{-1})}{(t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})(t-t^{-1})(t^{\frac{3}{2}}-t^{-\frac{3}{2}})(t^{2}-t^{-2})}$$

$$\times\left\{(ta-t^{-1}a^{-1})t^{-w(D)}V_L(t)-(-1)^{w(D)}(ta^{-1}-t^{-1}a)\right.$$

$$\left.\times t^{w(D)}V_L(t^{-1})\}\right\}$$

のように P_L は Δ_L と V_L と $w(D)$ によって定まる。

注意 Jones は $P_L(t^n, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$ の形の polynomial invariant に対しては別の角度から定義できることを示しているようである。(これは名大の河野氏に教えていただいた) $P_L(t^n, t^{\frac{1}{2}}-t^{-\frac{1}{2}})$ の形の invariant が詳しくわかれば、定理1の応用範囲はもっと拡がるであろう。

また定理1の証明から、次の不等式も示される。

定理2 (Morton, Franks and Williams [10, 3])

$$w(D)-(n-1)\leqq e\leqq E\leqq w(D)+(n-1)$$

ここで n は link diagram D の Seifert circles の数, e, E は, $P_L(a,z)$ における a の最小, 最大次数である。

§4 証明

次の補題は簡単な計算でわかるが、その意味は重要である。

<u>補題1</u>　link diagram D によって定まる Laurent polynomial $\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_D(a_i, z) \in \mathbb{Z}[a_0^{\pm1}, a_i^{\pm1}, z^{\pm1}]$ は、$P_D(a_0, z)$ の定義式(II)をみたす。

この補題から $\sum_{i=1}^{m} f_i \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_D(a_i, z)$ の形の Laurent polynomial (f_i は D によらない Laurent polynomial) はすべて $P_D(a_0, z)$ の定義式(II)をみたすことがわかる。

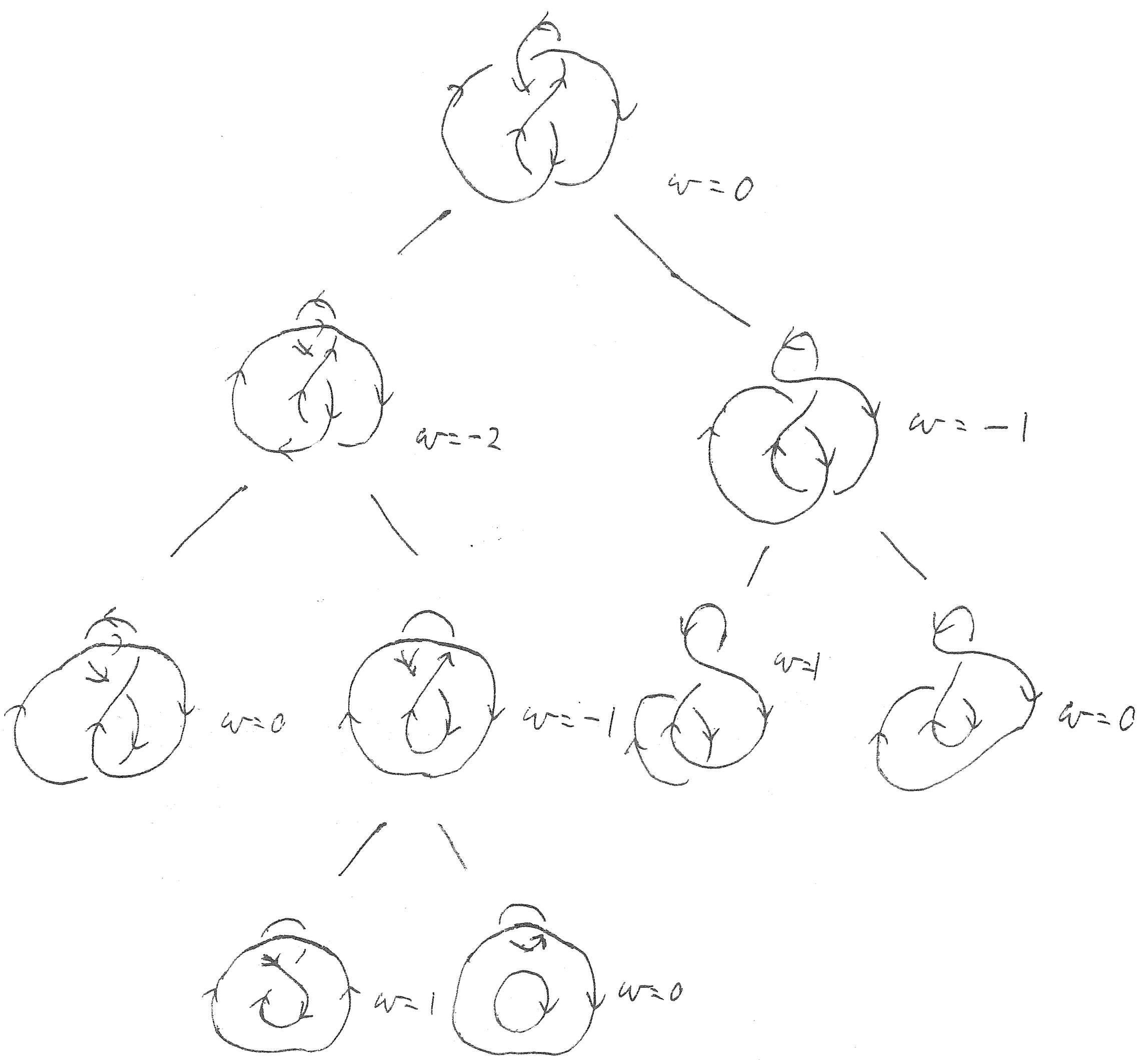
$P_L(a, z)$ の計算のときに導入した resolution tree を考える。各 leaf は trivial な link でよいと言ったが、今は $\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_D(a_i, z)$ を考えているので、writhe も込めて考えることにする。D の定める link の component の数を c、D は n 個の Seifert circles に分かれるとすると $c + n \equiv w(D) \pmod{2}$ がわかる。そこで、もし $c + n \pmod{2}$ に応じて resolution tree の leaf の writhe を 0 か 1

にできれば，n個のSeifert circlesからできている link の resolution tree の leaf には n 種類の link しか現れないことになる。（すべて trivial link であるから component さえ決まれば，writhe は上の式から決まってしまうので $\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_D(a_i, z)$ は一意に決まるという意味） そこで

$$P_D(a_0, z) = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_D(a_i, z) \qquad (*)$$

の式の $\left(\frac{a_0}{a_i}\right)^{w(D)} P_D(a_i, z)$ にこれら n 種類の"初期値"を代入した n 個の方程式（f_i が未知数）を解けば，定理が得られるというわけである。（初期値と漸化式が等しいので(*)の両辺は等しい。）

上に述べた事実(resolution tree のとり方)の証明は［11］を見て下さい。ここでは例を1つ挙げておく。



resolution tree の長さは長くなるが、leaf の種類は3種類（trivial knot で writhe 0, trivial 2-component link で writhe 1, trivial 3-component link で writhe 0）しかないことに注意してほしい。

そこで(*)の式の f_i を定めるのであるが、ここでは天下り的に次の補題を使う。

補題2 $F_p = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left\{ \prod_{\substack{0 \leqq j < k \leqq n \\ j \neq i,\, k \neq i}} (a_j a_k^{-1} - a_j^{-1} a_k) \right\}$

$\times a_i^p$ とおく。このとき、$|p| \leqq n-1$ かつ $p \equiv n-1$ $(\mathrm{mod}\ 2)$ をみたすような整数 p に対しては $F_p = 0$ となる。

証明は F_p を a_0 の多項式とみてその次数が $2(n-1)$ であることと、$F_p = 0$ という a_0 についての方程式が $\pm a_i$ $(i = 1, 2, \cdots n)$ を解にもつという事実より示される。

補題2をみれば定理1の証明は容易である。それは、L が n 個の Seifert circles でできていて、n が odd のときは

$$a_i^{-w(D)} P_L(a_i, z) = 1,\ a_i^{-1}(a_i - a_i^{-1}),\ (a_i - a_i^{-1})^2,$$
$$\cdots,\ a_i^{-1}(a_i - a_i^{-1})^{n-2},\ (a_i - a_i^{-1})^{n-1}$$

(a_i の次数は常に偶数)

nが even のときは

$$a_i^{-w(D)} P_L(a_i, z) = a_i^{-1},\ (a_i - a_i^{-1}),\ a_i^{-1}(a_i - a_i^{-1})^2,$$
$$\cdots,\ a_i^{-1}(a_i - a_i^{-1})^{n-2},\ (a_i - a_i^{-1})^{n-1}$$

（a_iの次数は常に奇数）

の形の polynomial しか leaf には現れないのであるが，このとき定理1の式が成り立つことは補題2が示しているからである。また(*)式のf_iをきめることと，定理1の式が，上の初期値に対して成り立っていることを確めることが同値であることも明らかであろう。

定理2は，補題2において $|P| \leqq n$ のときは $F_P \neq 0$ となることによる。

References

[1] J.W. Alexander : Topological invariants of knots and links, Trans. AMS 30(1928), 275-306.

[2] J.H. Conway : An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties, Computational Problems in Abstract Algebra, Pergamon Press, Oxford and New York, 1969, 329-358.

[3] J. Franks and R. Williams : Braids and the Jones polynomial, preprint.

[4] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W.B.R. Lickorish K. Millett, and A. Ocneanu : A new polynomial invariant of knots and links, Bull. AMS 12 (1985), 239-246.

[5] V.F.R. Jones : A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras, Bull. AMS 12(1985), 103-111.

[6] V.F.R. Jones : Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials, Ann. of Math., to appear.

[7] L.H. Kauffman : The Conway polynomial, Topology 20(1981), 101-108.

[8] L.H. Kauffman : A geometric interpretation of the generalized polynomial, preprint.

[9] L.H. Kauffman : An invariant of regular isotopy, preprint.

[10] H.R. Morton : Seifert circles and knot polynomials, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99 (1986), 107-109.

[11] H. Murakami : A formula for the two-variable link polynomial, Topology, to appear.

12] J.H. Przytycki and P. Traczyk : Invariants of links of Conway type, Kobe J. Math., to appear.
13] S. Yamada : The minimum number of Seifert circles equals the braid index of a link, Invent. Math., to appear.