第 34 回

トポロジー・シンポジウム

講演集

昭和61年7月17日～19日

於 **福井大学**

昭和61年度科学研究費補助金・総合研究（A）

課題番号　61302004

目　　次

曲面群表現の柔い剛体性

日大理工　松元重則

§1. はじめに

- Σ : 有向閉曲面，種数 $g \geq 2$
- $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$; S^1 の，向きを保つ C^r-同相 のつくる群

- $(E, p, \mathcal{F})$; Σ 上の有向 C^r 葉層 S^1 束

  ($E \xrightarrow{p} \Sigma$ は，有向 S^1 束（構造群は $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$）．$\mathcal{F}$ は E 上の C^r 葉層で，各ファイバーに横断的なもの。)

- $\phi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$
  $(E, p, \mathcal{F})$ の ホロノミー準同型

これは，次のように定まるもの。

(i) Σの基準点x_0上のファイバーE_{x_0}を，S^1と，同一視

(ii) $\pi_1(\Sigma) \ni \gamma$を，Eへliftすることにより $E_{x_0} \to E_{x_0}$なる同相が定まる。

(iii) それを，(i)により$\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$の元と思う。

このとき，

$$\{\Sigma \text{上の有向葉層} S^1 \text{束の同値類}\} \underset{1:1}{\longleftrightarrow} \{\phi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1) \text{の共役類}\}$$

—○——○—

$H^2(\mathrm{Diff}^r_+(S^1); \mathbb{Z})$；離散群としてのコホモロジー

$\cup\!\!\!\!\,\mathrm{I}$ $\quad e$ オイラー類

(Def) $\phi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$に対し

$$eu(\phi) = \langle \phi^* e, [\Sigma] \rangle$$

---- ϕのオイラー数

（$\pi_1(\Sigma)$のコホモロジーとΣ自身のそれを同一視。$[\Sigma]$は，基本ホモロジー類）

実は、$eu(\phi)$は、ϕに対応する葉層S^1束の束としてのオイラー数に一致します。

ϕをいろいろ考えたとしても$eu(\phi)$は任意の整数値をとるわけではありません。

定理（Milnor-Wood）

$$|eu(\phi)| \leq |\chi(\Sigma)| = 2g-2$$

つまり、Σ上のS^1束は、オイラー数が大きすぎれば、横断葉層をもてないということです。

上の定理で、等号成立の場合、ϕは、いろいろ特別の性質をもつはずですが、それを調べるのが本日の講演の目的です。

既知の事実

1° (Ghys)　　$\phi : \pi_1(\Sigma) \to \mathrm{Diff}^r_+(S^1)$

$r \geq 2$, $|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)| \Longrightarrow$ 作用 ϕ に対し、

S^1 のすべての軌道は稠密

PSL$_2\mathbb{R}$ は、Poincaré 円板 $\mathbb{D}^2$ 上に、等距離的に作用しますが、その作用は、境界 S^1 にまで連続的に拡張し、従って

$$PSL_2\mathbb{R} \hookrightarrow \mathrm{Diff}^r_+(S^1)\ 。$$

$\pi_1(\Sigma)$ から PSL$_2\mathbb{R}$ への表現 ϕ は、忠実かつその像が離散のとき Fuchs 群表現 と呼ばれます。

このとき、$|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)|$ は、すぐわかりますが、逆に、

2° (Goldman)　　$\phi : \pi_1(\Sigma) \to PSL_2\mathbb{R}$

$|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)| \Longrightarrow \phi$: Fuchs群表現

主要結果を述べるための定義

(A)　$\phi_1, \phi_2 : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^r(S^1)$ が

<u>位相的に共役</u>

$\Longleftrightarrow \exists h \in \mathrm{Diff}_+^0(S^1) \ni \phi_1(\gamma) h = h \phi_2(\gamma)$

$\forall \gamma \in \pi_1(\Sigma)$

(B)　同上が <u>半共役</u> $\Longleftrightarrow$ 上の等式を

みたす, h の範囲を次のようにゆるめる。

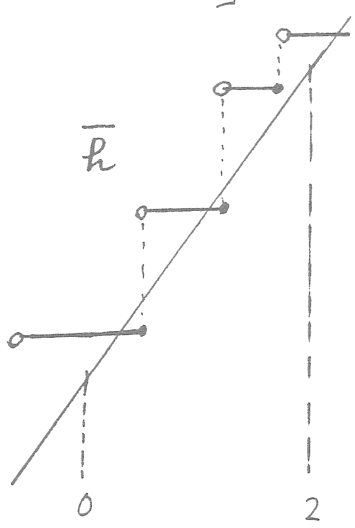
被覆 $\mathbb{R} \to S^1$ に関し, h をカバーする

$\bar{h} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ で, (i), (ii) をみたすものがとれる。

(i) $\bar{h}(x+1) = \bar{h}(x) + 1$

(ii) $\bar{h}$ は広義単調増加

(B)にて,「$\bar{h}$ は, 連続」と言っておりません。



(注)「半共役」は、同値関係

さて、前述 G_0 氏の結果より、$|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)|$ ならば、ϕ は、Fuchs群表現であり、これら任意のふたつは、御存知のように、位相的に共役です。いわば「柔い剛体性」をもってます。この拡張が、本講演の目的です。

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{定理1}\quad \phi_1, \phi_2 : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^0(S^1) \\ eu(\phi_1) = eu(\phi_2) = \pm \chi(\Sigma) \\ \qquad \Longrightarrow \phi_1 \text{ と } \phi_2 \text{ は、半共役}\end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{定理2}\quad \phi_1, \phi_2 : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathrm{Diff}_+^2(S^1) \\ eu(\phi_1) = eu(\phi_2) = \pm \chi(\Sigma) \\ \qquad \Longrightarrow \phi_1 \text{ と } \phi_2 \text{ は共役}\end{array}}$$

定理1 $\Longrightarrow$ 定理2 の証

前述 Ghys 氏より このとき，ϕ_1 も ϕ_2 も，すべての軌道、稠密。このとき，半共役は共役になることは容易。 □

定理2を，葉層構造に言い換え

> **定理3.** $E = T_1(\Sigma)$：単位接束
> $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$：E上の葉層構造
> （C^2 級，横断的に向きづけ可能）
> $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ はコンパクト葉をもたない
> $\Longrightarrow$ $\mathcal{F}_1$ の葉を，$\mathcal{F}_2$ の葉にうつす同相写像が存在する。

この定理は，いわば，コンパクト葉なしの葉層構造についての一意性ですが，これは，$T_1\Sigma$ という3-多様体について特有の現象です。（同じ性質をもつものは，Seifert 束の中に見いだされるかもしれませんが。）

今まで，このような葉層構造を全く許さない3-多様体は，多数知られていました。（おおむね spherical 多様体）しかし，一意性という現象は，はじめて発見されたわけです。

（定理3の証）Thurston の博士論文により，$\tilde{\mathcal{F}}_1, \tilde{\mathcal{F}}_2$ は，ファイバーに横断的になるように isotope できる。それらのホロノミー表現を ϕ_1, ϕ_2 とすれば，考えている多様体 E が，$T_1(\Sigma)$ なので $|eu(\phi_1)| = |eu(\phi_2)| = |\chi(\Sigma)|$ であり，定理2より O.K. □

定理1, 2 は，副産物がいろいろありますが，それらについては述べません。

§2. 有界コホモロジーと標準的オイラーコサイクル。

定理1の証明の重要なステップは、Ghys ([Gh1]) による半共役の判定法です。それは、有界コホモロジーにより与えられます。有界コホモロジーは、もともと、Gromov が、多様体のいわば「双曲的大きさ」を測るために導入したものですが、思いもかけない応用があったものです。

Γ 任意の離散群（特に、$\pi_1(\Sigma)$）

$A = \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ ：cohomology の係数

$$C^n(\Gamma ; A) = \{ \overbrace{\Gamma \times \cdots \times \Gamma}^{n} \longrightarrow A \text{ なる map} \}$$

$$\delta : C^n(\Gamma ; A) \to C^{n+1}(\Gamma ; A)$$

双対境界準同型（定義略）

$\{ C^n(\Gamma ; A), \delta \}$ より $H^n(\Gamma ; A)$ が定義される。

さて、

$$C_b^n(\Gamma;A)=\{u\in C^n(\Gamma;A)\mid \mathrm{Im}(u)\,;\text{有界}\}$$

$\Longrightarrow$ $\{C_b^n(\Gamma;A),\ \delta\}$; 部分複体

$\Longrightarrow$ そのコホモロジー $H_b^n(\Gamma;A)$

これを有界コホモロジーといいます。

この計算結果を次にのべますが、普通のコホモロジーと全く性質が違うことがわかると思います。

1° $H_b^1(\Gamma;A)=0$

(すべての Γ, $A=\mathbb{R},\mathbb{Z}$)

2° $H_b^n(\Gamma;\mathbb{R})=0$ (Γ : アメナブル)

3° $H_b^2(\Gamma;\mathbb{R})$: ∞-次元実Banach空間

($\Gamma=\pi_1(\Sigma)$, Σ : 双曲的曲面)

4° $H_b^2(\mathrm{Diff}_+^0(S^1);A)=A$

1°, 2° は Gromov 自身により、3° は、Brooks によるが三松([Mit])の幾何的証明の方がずっとわかりやすい。4° は、松元-森田。

さて，以下 $\mathrm{Diff}^0_+(S^1) = G$ と書くことにして，4° の生成元 $\varepsilon_A \in H^2_b(G; A)$ の定義を述べましょう。

(i) $\overline{G}$: G の普へん被覆群

(実は，$\overline{G} = \{ \overline{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$，同相 $| \overline{f}(x+1) = \overline{f}(x$
であり: $p : \overline{G} \to G$ は，自然な対応で
与えられる。

(ii) $\sigma : G \longrightarrow \overline{G}$，$p$ の切断で，
$\sigma(f)(0)$ が $f \in G$ によらず有界のものを選ぶ

(iii) $e_\sigma : G \times G \longrightarrow \mathbb{Z}$，by
$e_\sigma(f, g) = \sigma(fg)^{-1}\sigma(f)\sigma(g)$

(右辺は $G \ni 1$ をおおう $\overline{G}$ の引像であり，
従って $x \mapsto x + k$ の形だが，これを
k と同一視。)

これは，σ：有界より 有界コサイクル

(iv) $\varepsilon_A = [e_\sigma] \in H^2_b(G : A)$

σ のとり方によらない。

ε_A を 有界 A-係数 オイラー類と呼びます。

注）もちろん $[e_\alpha]$ は通常のコホモロジー $H^2(G;\mathbb{Z})$ の元も定めるが，これは §1 の初めに述べたオイラー類 e です。

さて，Ghys の判定条件とは：

> 定理（Ghys（[Gh_1]））$\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$
>
> 半共役 $\iff \phi_1^*(e_{\mathbb{Z}}) = \phi_2^*(e_{\mathbb{Z}})$

この定理は，証明は短くやさしいが，幅広い応用をもっていると思われます。

なお，右辺は，$H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ における等号であり，例えば，$\Gamma = \pi_1(\Sigma)$ のとき等，この群は巨大です。これは，$\pi_1(\Sigma)$ から S^1 への作用が豊かに存在することを一面で表わしています。また，$H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ が小さい Γ から G への表現は，当然少ない訳ですが，これについては拙文 [M_1] を参照して下さい。

さて，Ghys の判定法は，$H_b^2(\Gamma;\mathbb{Z})$ における2元の一致をみねばならず，得体の知れないところに，問題が押しやられた感がありますが，実は，これは，次のようにいい直せます。

そのための定義

G の2元 f_1, f_2 に対し任意の持ち上げ $\bar{f}_1, \bar{f}_2 \in \bar{G}$ をとり

$$\tau(f_1, f_2) = \mathrm{trans}(\bar{f}_1\bar{f}_2) - \mathrm{trans}(\bar{f}_1) - \mathrm{trans}(\bar{f}_2)$$

とおけば，これは，持ち上げによらない。

なお $\mathrm{trans}(\bar{f}) = \lim_{n\to 0} \frac{1}{n} \bar{f}^n(x) \quad (x \in \mathbb{R})$

は，x によらずきまり $\bar{f}$ の移動数という。

τ は，実は $\varepsilon_{\mathbb{R}} \in H_b^2(G;\mathbb{R})$ を表わすコサイクルと思うことができる。τ を，標準オイラーコサイクルという。

定理4　$\phi_1, \phi_2 : \Gamma \to G$ が半共役

$\Longleftrightarrow$ (1) Γの生成元の回転数が ϕ_1とϕ_2で一致

(2) $\phi_1^{\#}(\tau) = \phi_2^{\#}(\tau)$

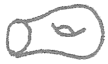
さて、$\phi : \pi_1(\Sigma) \longrightarrow G$ で、

$eu(\phi) = \chi(\Sigma)$ をみたすものをとれば、
定理2により、これらはすべて半共役であり
従って 上の定理4より

$$\theta = \phi^{\#}(\tau) : \pi_1(\Sigma) \times \pi_1(\Sigma) \longrightarrow \mathbb{R}$$

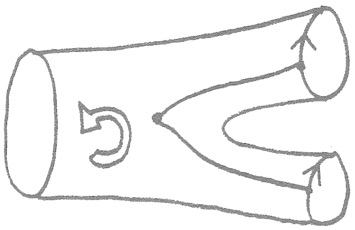
は、ϕによらずに定まるはずです。θを、Σの位相で表わすと次のようになります。

$\pi_1(\Sigma) \ni \alpha, \beta$をとり、$\alpha$と$\beta$が2元自由群$F$を生成するとして、$F$に対応する$\Sigma$の被覆$\hat{\Sigma}$をとる。

このとき、$\hat{\Sigma}$ は、 か、 で

あるが

(1) $\hat{\Sigma} =$  かつ α, β が、下図の
ような元であり、$\hat{\Sigma}$ のもつ向きに、
合致するとき、　$\theta(\alpha, \beta) = -1$



(2) 上と同じだが、$\hat{\Sigma}$ の向きと
正反対ならば　$\theta(\alpha, \beta) = 1$

(3) それ以外のすべての場合　$\theta(\alpha, \beta) = 0$

§3. 定理1の証明のあらまし

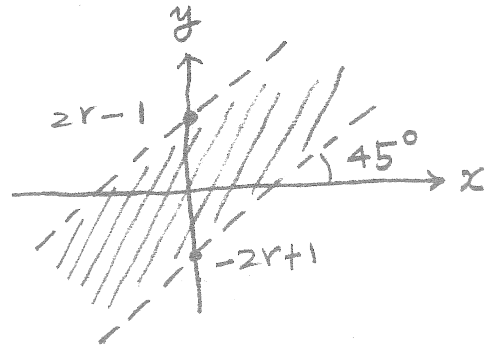
$$\overline{G} = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \text{homeo},\ f(x+1) = f(x) + 1 \}$$

§1で述べたMilnor-Woodの定理では、$\overline{G}$のどの元が、与えられた個数の交換子の積で書けるかを調べることが基本になっていました。我々の話も、ここから始まります。
$\overline{G}$の元のうち、恒等写像から遠く離れた元が、少ない個数の交換子の積で表わされることがないことは、少し考えればわかります。詳しくは:

命題 (Eisenbud-Hirsch-Neumann)

$\overline{G} \ni f$ が、k コの交換子の積で書ける。
$\Longleftrightarrow$ f の graph が 領域 D_k と交わる。

D_r



(注) $\overline{G}$ のかわりに $PSL_2\mathbb{R}$ の普へん被覆群 $\overline{PSL_2\mathbb{R}}$ ($\subset \overline{G}$ と思える) を考えても、やはり同じことが成立します。しかし、両者の中間に位置する $\mathrm{Diff}^r_+(S^1)$ を考えると、$r=2,3,\cdots,\infty$ で、$\Leftarrow$ の方は、成立しないことがわかります。（定理2の証明の系）

さて、上の命題から、$\phi:\pi_1(\Sigma)\to G$ で、$|eu(\phi)|=|\chi(\Sigma)|$ を、みたすものについての、特別な性質が浮び上ってきます。

(定義) $G \ni g$ が温順とは、そのもちあげ $\bar{g} \in \overline{G}$ のグラフが、ある領域 $\{x+k \leq y \leq x+k+1\}$ (k : 整数) に含まれること。

定理5　$\phi: \pi_1(\Sigma) \to G$ にて、
$|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)|$ のとき、$\gamma \neq 1$ に対し、
$\phi(\gamma)$ は非温順

　証明については、まず γ が単純閉曲線で Σ を分離しないもののときは、この γ を、組みこんで $\pi_1(\Sigma)$ の標準的な生成系がつくれます。このとき、上の命題により、もしも $\phi(\gamma)$ が温順ならば $|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)|$ になれないことは容易に示せます。一般の γ については、Σ の有限被覆をとることにより、上の場合に帰結できます。（Scottの定理）

□

（注）§1でふれたGoldmanの結果

「$PSL_2\mathbb{R}$ 表現 ϕ が $|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)|$ をみたせば、ϕ は Fuchs 群表現」

は、実は定理5を用いれば容易に示せます。

何故ならば，$PSL_2\mathbb{R}$表現の場合、非温順とは、すなわち双曲型ということですが，Nielsenにより$PSL_2\mathbb{R}$の部分群で，双曲型の元のみから成るものは離散であることが知られているからです。

さて，定理5の状況のとき，§2で定義した，標準的Euler類τを考えると，$\tau(\phi(\alpha), \phi(\beta))$は値$0, \pm 1$のみをとるわけですが，その値のとり方は，いわば「安定」です。つまり いま，表現ϕを，連続的に変化させたとき（ϕ_tと書く），$\tau(\phi_t(\alpha), \phi_t(\beta))$の値は不変です。 なぜなら，まず，$eu(\phi_t)$は，一定であり、従って すべての$\gamma \neq 1$に対し$\phi_t(\gamma)$は非温順です。 これから trans$(\overline{\phi_t(\alpha)}\,\overline{\phi_t(\beta)})$や trans$\overline{\phi_t(\beta)}$が不変であることがわかります。

そこで，$\phi: \pi_1(\Sigma) \longrightarrow G$，$|eu(\phi)| = |\chi(\Sigma)|$を連続的に動かして，$PSL_2\mathbb{R}$への表現にもっていければ定理1の

証明は終ります。（$PSL_2\mathbb{R}$表現で、$|eu(\emptyset)|=|\chi(\Sigma)|$をみたすものは、みな、位相共役なので。）定理4よりτさえ一致していればよかったのです。

ところが、こんなすっきりした話の運びは、残念なことにできませんでした。そこで、技巧的に、$\alpha, \beta \in \pi_1(\Sigma)$に対し、$\emptyset(\alpha), \emptyset(\beta)$だけを、まず$PSL_2\mathbb{R}$へ、連続的につなげます。次に、$\Sigma$では、やりにくいので、かわりにその模型$\Sigma'$をつくり、$\pi_1(\Sigma')$からの表現とみてつじつまを合せます。

§4 おわりに

定理1の証明はM_2、定理4の証明はM_1をみて下さい。

未解決の問題を、参考までにあげてみ

ますと、

1° 定理2を、「あるFuchs群表現に、C^r同相で共役」という形に強める
ことができるか。

これについてはGhysが、C^{r-2}の場合は、部分的な解決を得ています。

2° $R = \{\phi : \pi_1(\Sigma) \to G \mid eu(\phi) = \chi(\Sigma)\}$は、コンパクト開位相について連結か。

3° 定理4の良い応用例を、もうひとつぐらいつくれ。

以上です。御静聴ありがとうございました。

参考文献

[G] Ghys, E., Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée, Preprint, Lille

[M_1] Matsumoto, S., Numerical invariants for semi-conjugacy, to appear in Proc. A.M.S.

[M_2] Matsumoto, S., Some remarks on foliated S^1 bundles, preprint, Nihon University

[MM] Matsumoto, S., - Morita, S., Bounded cohomology of certain groups of homeomorphisms, Proc. A.M.S. 94(1985) 539-544

[Mi] Mitsumatsu, Y., Bounded cohomology and ^{1} - homology of surfaces, Topology 23(1984) 465-471

On the rank of the homotopy groups of a space

京大・理　入江幸右衛門

§1. Introduction

ここで取り扱う空間は、すべて単連結な有限複体とし、従って、定理などは弱められた形で述べられている。より詳しくは、各引用文献を参照して下さい。

与えられた空間 X に対して、そのホモトピー群 $\pi_*(X)$ を完全に決定することは、現時点では不可能である。最近、球面のホモトピー群の計算については、次のように言われている([R])。

Mahowald Uncertainty Principle. (i) Any spectral sequence converging to the homotopy groups of spheres (stable or unstable) with a systematically computable E_2-term will have differentials can be computed only by ad hoc methods.

(ii) No computer program of reasonable length for finding the homotopy groups of spheres can run with reasonable speed without human intervention.

そこで、$\pi_*(X)$の定性的な研究は、意味のあることである。この方面の基本的な仕事は、Serreによって始められた。

定理1（[S-1],[S-2],[U]）(i) 各$\pi_n(X)$は有限生成アーベル群である。

(ii) pを素数として、$\tilde{H}_*(X;\mathbb{Z}/p)\neq 0$ ならば、無限個の n に対して $\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p\neq 0$ である。

定理1の(ii)は、最近 McGibbon-Neisendorfer, Zabrodsky, 小田-吉村 らにより、次のように

改良された。

定理2（[OY]）　p を素数とし、$\widetilde{H}_*(X;\mathbb{Z}/p)\neq 0$ とする。このとき、$0\leq j<2(p-1)$ を任意に固定すれば、無限個の n に対して $\pi_{2(p-1)n+j}(X)$ はアーベル p-群 を 直和因子に持つ。

定理2の証明は、次の Miller の結果に基づいている。

定理3（[M]）　p を素数とし、$\widetilde{H}_*(X:\mathbb{Z}/p)\neq 0$ とする。このとき、すべての n に対してホモトピー集合

$$[\Sigma^n K(\mathbb{Z}/p,1),X]_0=0$$

である。ここに、$K(\mathbb{Z}/p,1)$ は $\pi_1(K(\mathbb{Z}/p,1))=\mathbb{Z}/p$, $\pi_i(K(\mathbb{Z}/p,1))=0$ for $\forall i\neq 1$ で特徴付けられる空間である。

さてここでは、$\pi_n(X)$ の p-rank, $\dim_{\mathbb{Z}/p}\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p$, の増え方について考える。便宜的に $p=0$ に対して $\mathbb{Z}/p=\mathbb{Q}$, 有理数体、と考える。
2つの形式的巾級数

$$P_{\pi_*(X)\otimes \mathbb{Z}/p} = \sum (\dim_{\mathbb{Z}/p} \pi_n(X)\otimes \mathbb{Z}/p)\, t^n$$

$$P_{H_*(\Omega X;\mathbb{Z}/p)} = \sum (\dim_{\mathbb{Z}/p} H_n(\Omega X;\mathbb{Z}/p))\, t^n$$

を考え、それぞれの収束半径を $R_{\pi_*(X)\otimes \mathbb{Z}/p}$, $R_{H_*(\Omega X:\mathbb{Z}/p)}$ とする。このとき、次の結果が成り立つ。

定理4 ([H], [I-1], [I-2])

(i) $R_{\pi_*(X)\otimes \mathbb{Z}/p} \geqq \min.\{R_{H_*(\Omega X:\mathbb{Z}/p)},\ C_p\}$

ここに、$C_0 = +\infty$, $C_2 = 1/2$, 奇素数 p に対し $C_p = 1/3^{1/(2p-3)}$.

(ii) $\min.\{1, R_{\pi_*(X)\otimes \mathbb{Z}/p}\} \leqq R_{H_*(\Omega X;\mathbb{Z}/p)}$.

上の定理の (i) において、$p=0$ の場合は $\pi_*(X)\otimes \mathbb{Q} \subset H_*(\Omega X;\mathbb{Q})$ より直ちに示される。

系5 (i) $p=0$ のとき ([B]),

$$\min.\{1, R_{\pi_*(X)\otimes \mathbb{Q}}\} = R_{H_*(\Omega X;\mathbb{Q})}$$

(ii) $p>0$ のとき, $R_{H_*(\Omega X:\mathbb{Q})} \leqq C_p$ ならば,

$$R_{\pi_*(X)\otimes \mathbb{Z}/p} = R_{H_*(\Omega X:\mathbb{Z}/p)}.$$

$p=0$ のときは、より一般に次の事が成り立つ。

定理6.（[FHT]） 次のいずれかが成り立つ。

(i) ある N が存在して、$\pi_n(X)\otimes\mathbb{Q}=0$ for $n\geqq N$，または、

(ii) ある整数 k，数 C $(C>1)$ と無限列 $\{g_i\}$ で、$g_i\leqq k^i$ となるものが存在して、

$$\dim_{\mathbb{Q}}\pi_{g_i}(X)\otimes\mathbb{Q}\geqq C^{g_i}.$$

上の定理の(i)を満たす空間は rational elliptic, (ii)を満たす空間は rational hyperbolic と呼ばれ、rational hyperbolic な空間の方がより一般的である。rational elliptic な空間はある意味できれいな空間で、球面 S^n、射影空間 CP^n, HP^n など、等質空間がその例である。

$p>0$ のとき、まず例を考える。

例） Bott-Samelson の定理（[BS]）により

$$H_*(\Omega\Sigma X:\mathbb{Z}/p)\cong T(\hat{H}_*(X:\mathbb{Z}/p))$$

を得る。ここに、T は tensor algebra functor である。よって、

$$P_{H_*(\Omega\Sigma X:Z/p)} = \left(1 - \Sigma_n (\dim. \hat{H}_n(X:Z/p)) t^n\right)^{-1}$$

だから、もし

$$\dim_{Z/p} \hat{H}_*(X:Z/p) = \Sigma_{n>0} \dim_{Z/p} H_n(X:Z/p)$$
$$> 1$$

ならば、定理4の(ii)より

$$R_{\pi_*(\Sigma X)\otimes Z/p} \leq R_{H_*(\Omega\Sigma X:Z/p)} < 1$$

を得る。つまり、数 C (C>1) と無限列 $\{g_i\}$ が存在して、

$$\dim_{Z/p} \pi_{g_i}(\Sigma X)\otimes Z/p \geqq C^{g_i}$$

が成り立つ。$\{g_i\}$ の各項については、定理6の(ii)と同様の事が成り立つと期待される。

系5 また $p=0$ と $p>0$ の場合の類似性より次の予想は自然である。

予想　$p>0$ のとき

$$R_{\pi_*(X:Z/p)} = R_{H_*(\Omega X:Z/p)}$$

さらなる上の予想の根拠として、球面の場合を考える。$H_*(\Omega S^n : \mathbb{Z}/p) = \mathbb{Z}/p[x]$, $\dim. x = n-1$ より、$P_{H_*(\Omega S^n : \mathbb{Z}/p)} = (1-t^{n-1})^{-1}$ となり、$R_{H_*(\Omega S^n : \mathbb{Z}/p)} = 1$ を得る。よって、上の予想が正しければ、$R_{\pi_*(S^n)\otimes\mathbb{Z}/p} = 1$ である。一方、定理4の(i)より $R_{\pi_*(S^n)\otimes\mathbb{Z}/p} \geqq C_p$ を得、$R_{\pi_*(S^n)\otimes\mathbb{Z}/p}$ が、素数pによって異なるとは、考えられず、$C_p \to 1$ $(p \to +\infty)$ より、$R_{\pi_*(S^n)\otimes\mathbb{Z}/p} = 1$ は、自然である。この場合、球面のホモトピー群のp-rank は、指数級数的には、けっして増大しないことを意味する。

注意　Xが rational elliptic で、pが充分大きければ、[MW]により

$$\Omega X_{(p)} \simeq \prod_\alpha S^{2n_\alpha+1}_{(p)} \times \prod_\beta \Omega S^{2n_\beta+1}_{(p)}$$

が成り立つ。よって、この場合、予想は球面のときに成立すれば、成り立つ。

また上の予想と関連して、次の問題が考えられる。

問題　pを素数とし、$\widetilde{H}_*(X;\mathbb{Z}/p)\neq 0$ とする。このとき、$\{\dim_{\mathbb{Z}/p}\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p\}_n$ は、有界かそうでないか？

§2. 定理4の証明について

まず、定理4.(i) の証明の概略を述べる。 $p=0$ のときは、明らかより、$p>0$ とする。

Xの mod-p ホモトピー群を次のように定義する。 $n\geqq 2$ に対して

$$\pi_n(X:\mathbb{Z}/p):=[S^{n-1}\cup_p e^n,X]。$$

と定める。一般に、$n=2$ のときは集合、$n=3$のときは群、$n\geqq 4$のときはアーベル群である。 そして、$n\geqq 4$ のとき、次の short exact sequence が存在する。

$$0\to\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p\to\pi_n(X:\mathbb{Z}/p)\to\pi_{n-1}(X)*\mathbb{Z}/p\to 0$$

これより、

$$\begin{aligned}\dim.\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p &\leqq \dim.\pi_n(X:\mathbb{Z}/p)\otimes\mathbb{Z}/p\\ &\leqq \dim.\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p+\dim.\pi_{n-1}(X)*\mathbb{Z}/p.\\ &\leqq \dim.\pi_n(X)\otimes\mathbb{Z}/p+\dim.\pi_{n-1}(X)\otimes\mathbb{Z}/p\end{aligned}$$

得、これは

$$P_{\pi_*(X)\otimes Z/p} \leqq P_{\pi_*(X:Z/p)} \leqq 2P_{\pi_*(X)\otimes Z/p}$$

を意味する。ここに、

$$P_{\pi_*(X:Z/p)} = \Sigma_{n\geqq 0}(\dim_{Z/p}\pi_n(X:Z/p)\otimes Z/p)t^n$$

とおく。よって、

$$R_{\pi_*(X:Z/p)} = R_{\pi_*(X)\otimes Z/p}$$

より、$\pi_*(X;Z/p)$ を調べる。

$\pi_*(X)$ に収束する unstable Adams spectral sequence ([BC], [6A], [BK], [W]) と同様に、$\pi_*(X:Z/p)$ に収束する unstable Adams spectral sequence が存在する。

命題7 ([M]) 次の収束する spectral sequence が存在する。$n\geqq 3$ のとき

$$Ext^s_{CA}(\Sigma^{s+n-2}G(2), \hat{H}_*(\Omega X:Z/p))$$
$$\Longrightarrow \pi_n(\Omega X:Z/p) = \pi_{n+1}(X:Z/p),$$

ここに、$G(2) = \hat{H}_*(S^1 \cup_p e^2, Z/p)$, CA = the category of unstable mod-p Steenrod-coalgebra without counit である。

これより、$n \geqq 4$ のとき

$$\dim_{\mathbb{Z}/p} \pi_n(X:\mathbb{Z}/p)\otimes \mathbb{Z}/p$$

$$\leqq \sum_{s\geqq 0} \dim_{\mathbb{Z}/p} \mathrm{Ext}_{CA}^{s}(\Sigma^{n+s-3}G(2), \hat{H}_*(\Omega X:\mathbb{Z}/p))$$

となり、$\mathrm{Ext}_{CA}^{s}(\Sigma^{n+s-3}G(2), \hat{H}_*(\Omega X;\mathbb{Z}/p))$ を調べることとなる。ところが、$\hat{H}_*(\Omega X:\mathbb{Z}/p)$ は nice coalgebra であるため、$\hat{H}_*(\Omega X;\mathbb{Z}/p)$ と Λ-algebra を用いて、$\mathrm{Ext}_{CA}^{s}(\Sigma^{n+s-3}G(2), \hat{H}_*(\Omega X;\mathbb{Z}/p))$ が記述でき、この評価を用いて定理4の(i)を得る。そこに表われる C_p は、Λ-algebra の評価である。

次に定理4の(ii)の証明だが、ここでは $p=0$、つまり、rational case、について述べる。$p>0$ のときも基本的なアイデアは同じである。

記号を簡単にするため、

$$P(X)=\sum_n (\dim_{\mathbb{Q}} H_n(X;\mathbb{Q}))t^n$$

と置き、形式的巾級数 f に対して、その収束半径を $r(f)$ によって表わす。

$\{(\Omega X, n)\}_n$ によって、ΩX の Cartan-Serre-G.W. Whitehead 分解とする。特に、

$$\pi_i((\Omega X, n)) \cong \begin{cases} 0 & \text{for } i < n \\ \pi_i(\Omega X) & \text{for } i \geqq n \end{cases}$$

であり、fibration (up to homotopy)

(8) $(\Omega X, n+1) \to (\Omega X, n) \to K(\pi_n(\Omega X), n)$

が存在する。(8)に associate した Serre spectral sequence は、

$$E^2_{p,q} = H_p((\Omega X, n+1), \mathbb{Q}) \otimes H_q(K(\pi_n(\Omega X), n), \mathbb{Q})$$
$$\Rightarrow H_{p+q}((\Omega X, n), \mathbb{Q})$$

となり、

$$P((\Omega X, n+1)) \cdot P(K(\pi_n(\Omega X), n)) \geqq P((\Omega X, n))$$

を得る。ここで、$\geqq$ は対応する各項において左辺の係数が右辺より大きいことを表わす。さて、$\Omega X = (\Omega X, 1)$ より

(9) $\prod_{n \geqq 1} P(K(\pi_n(\Omega X), n)) \geqq P(\Omega X)$.

を得る。$P(K(\mathbb{Q}, n))$ は、良く知られたように、次のようになる。

補題10 $P(K(\mathbb{Q}, 2n)) = (1-t^{2n})^{-1}$

$P(K(\mathbb{Q}, 2n+1)) = 1 + t^{2n+1}$

$m(n) = \dim_{\mathbb{Q}} \pi_n(\Omega X) \otimes \mathbb{Q}$ とおくと、(9)と補題10より

$$\prod_n (1-t^n)^{-m(n)}$$
$$\geqq \prod_n (1+t^{2n+1})^{m(2n+1)} \cdot \prod_n (1-t^{2n})^{-m(2n)}$$
$$\geqq P(\Omega X)$$

を得、収束半径で見れば

$$\min.\{1, R_{\pi_*(X)\otimes\mathbb{Q}}\}$$
$$= \min.\{1, r(\Sigma m(n) t^n)\}$$
$$= r(\prod_n (1-t^n)^{-m(n)})$$
$$\leqq R_{H_*(\Omega X:\mathbb{Q})}$$

となる。これで、定理4の(ii)が示された。

§3. ホモトピー群の exponent

pを素数として、任意のnに対し

$$p^k \cdot (p\text{-torsion subgroup of } \pi_n(X)) = 0$$

が成り立つとき、Xは exponent p^k を持つと

言う。

定理11（[CMN]） 奇素数 p に対して、S^{2n+1} は exponent p^n を持つ。

予想　S^{2n+1} は exponent $2^{\varphi(2n)}$ を持つ。ここで、$\varphi(t)=\#\{a : 1\leq a\leq t$, s.t. $a\equiv 0, 1, 2$ or $4 \bmod 8\}$ である。

　ホモトピー群の exponent に関する問題において、次の予想は基本的である。

Mooreの予想.　X が rational elliptic であるための必要十分条件は、すべての素数において X が exponent を持つことである。

§4. Stable case

　前節までは、非安定ホモトピー群の定性的性質について考えたが、この節では、安定ホモトピー群について

考える。まず、

定理12. (i) 各 $\pi_n^S(X)$ は、有限生成アーベル群である。

(ii) ([OY]) p を素数とし、$\widehat{H}_*(X:Z/p) \neq 0$ とする。このとき、$0 \leq j < 2(p-1)$ を任意に固定すれば、無限個の n に対して $\pi^S_{2(p-1)n+j}(X)$ は、アーベル p 群を直和因子にもつ。

定理4に対応するものとして

定理13 p を素数とし、$\widehat{H}_*(X:Z/p) \neq 0$ とする。このとき、$R_{\pi_*^S(X)\otimes Z/p} = 1$.

証明. Adams spectral sequence の E^2-term を May spectral sequence を用いて評価すればよい。

定理14 ([O]) p を素数で5以上とする。このとき、$\dim_{Z/p} \pi_n^S(S^0)\otimes Z/p$ は、n を充分大きくすれ

ば、いくらでも大きな値をとる。

定理14より次の予想は自然であろう。

予想　p を素数とし、$\widehat{H}_*(X:Z/p)\neq 0$ とする。このとき，$\dim_{Z/p}\pi_n^S(X)\otimes Z/p$ は，n を充分大きくとれば、いくらでも大きな値をとる。

安定ホモトピー群の exponent を考えるのは，あまり意味のないことと思われる。というのは、球面の安定ホモトピー群には、いくらでも大きな p-torsion 元が表われるし，$\pi_*^S(S^0\cup_p e^1)$ は、Z/p-加群（$p=2$ のときは $Z/4$-加群）であるから。

最後に，よく知られたように

定理15（[N]）　$\alpha\in\pi_n^S(S^0)$，$n>0$ ならばある整数 k が存在して，$\alpha^k=0$ となる。

最近、この定理の興味ある拡張がなされた事が報告さ

れた。

参考文献

[B] I.K. Babenko; Analytic properties of the Poincáre series of loop spaces. Math. Zametki 27(1980), 751-765.

[BS] R. Bott and H. Samelson; On the Pontryagin product in spaces of paths, Comm. Math. Helv. 27(1953), 320-337.

[BC] A.K. Bousfield and E.B. Curtis; A spectral sequence for the homotopy groups of nice spaces, Trans. A.M.S. 151 (1970), 457-479.

[6A] A.K. Bousfield, E.B. Curtis, D.M. Kan, D.G. Quillen, D. Rector and J.W. Schlesinger; The mod-p lower central series and the Adams spectral sequence, Topology 5 (1966), 331-342.

[BK] A.K.Bousfield and D.M.Kan; The homology spectral sequence of a space with coefficient in a ring, Topology 11 (1972), 79-106.

[CMN] F.R.Cohen, J.C.Moore and J.A.Neisendorfer; Torsion in homotopy groups, Ann. of Math. 109 (1979), 121-168.

[FHT] Y.Félix, S.Halperin and J.C.Thomas; The homotopy Lie algebra for finite complexes, Publ. Math. I.H.E.S., 56 (1982), 172-202.

[H] H.-W.Henn; On the growth of homotopy groups, preprint.

[I-1] K.Iriye; On the rank of the homotopy groups, preprint.

[I-2] K.Iriye; On the rank of the homotopy groups of a space, preprint.

[M] H.Miller; The Sullivan conjecture on maps from classifying spaces, Ann. of Math. 120 (1984), 39-87.

[MN] C.A. McGibbon and J.A. Neisendorfer; On the homotopy groups of a finite dimensional space, Comm. Math. Helv. 59(1984), 253-257.

[MW] C.A. McGibbon and C.W. Wilkerson; Loop spaces of finite complexes at large primes, Proc. A.M.S., 96(1986), 698-702.

[N] G. Nishida; The nilpotency of elements in the stable homotopy groups of spheres, J. Math. Soc. Japan, 25(1973), 707-732.

[O] S. Oka; Multiplicative structure of finite ring spectra and stable homotopy of spheres, Springer L.N.M. 1051 (1984), 418-441.

[OY] N. Oda and Z. Yosimura; On McGibbon and Neisendorfer theorem resolving Serre conjecture, preprint.

[R] D.C. Ravenel; Localization and Periodicity in homotopy theory, preprint.

[S-1] J.-P. Serre; Groupes d'homotopie et classes de groupes abeliens, Ann. of Math. 58 (1953), 258-294.

[S-2] J.-P. Serre; Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg MacLane, Comm. Math. Helv. 27 (1953), 198-232.

[U] Y. Umeda; A remark on a theorem of J.-P. Serre, Proc. of Japan Academy, 35 (1959), 563-566.

[W] R.J. Wellington; The unstable Adams spectral sequence for free iterated loop spaces, Memoirs of A.M.S., No. 258 (1982).

[Z] A. Zabrodsky; On phantom maps and theorems of H. Miller, preprint.

Ends and cores of non-compact 3-manifolds

広島大理　垣水修

non-compact 3-manifold は compact 3-manifold を調べるときにも covering space を考えるとき自然に出会う対象です。しかし non-compact 3-manifold には多くのおかしな現象がしられていて，non-compact 3-manifold 全般にわたる一般的な考察を難しいものにしています。こうしたなかにあってつぎの P. Scott の定理は数少ない一般的な結果の一つであり，同時に"3次元"の特徴をなすものでもあります。

Theorem (Scott [17]). W は connected non-compact 3-manifold で基本群 $\pi_1(W)$ が有限生成であるとする。このとき W の connected compact 3-submanifold N で包含 $N \subset W$ が同型

$\pi_1(N) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W)$ を導くものが存在する。

このcompact submanifold N をWの **core** と呼びます。 coreに注目すればWについてある程度調べることができるのではないでしょうか。ここではcoreの性質について得られた結果を報告します。 はじめに endのおかしな3-manifoldの例をいくつかあげ，つぎにcoreに関する結果を述べ，最後にendがきれいであるための（i.e. endにboundaryをつけてcompact 3-manifoldにできるための）条件を紹介します。

以下ではPL categoryにおいて述べ，3-manifoldとその submanifold はすべて connected で <u>orientable</u> であるとします。

1. endのpathology

（ア） Whiteheadのcontractible open 3-manifold [22]. 1935年，Whiteheadはcontractibleなopen 3-manifold W_0で3次元ユークリッド空間$\mathbb{R}^3$とは異なるものをみつけました。 W_0はsolid tori

の増大列 $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ の union で，各対 (V_n, V_{n-1}) がすべて図1の対 (V_1, V_0) と同相であるようなものです。

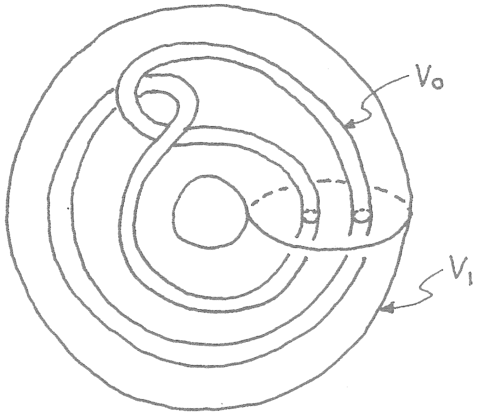


図1.

W_0 が $\mathbb{R}^3$ と同相でないことは，solid torus V_0 に対して，$V_0 \subset \mathring{I}nt B \subset B \subset W_0$ となる 3-ball B が存在しないことを示すことでわかります。

(イ) どんな compact 3-manifold にも埋め込むことのできない contractible open 3-manifold ([6], [11])。Whitehead の構成法をすこし変えて contractible open 3-manifold $W_1 = \bigcup V_n'$ を作ります。ここで $V_0' \subset V_1' \subset \cdots$ は各対 (V_n', V_{n-1}') が図2の対 (V_1', V_0') と同相な solid tori の増大列です。Kister と McMillan は W_1 が $\mathbb{R}^3$ に埋め

込めないことを示しました。さらに W. Haken が彼の incompressible surface に関する "finiteness theorem" を用いて，W_1 がどんな compact 3-manifold にもうめこむことができないことを示しました。

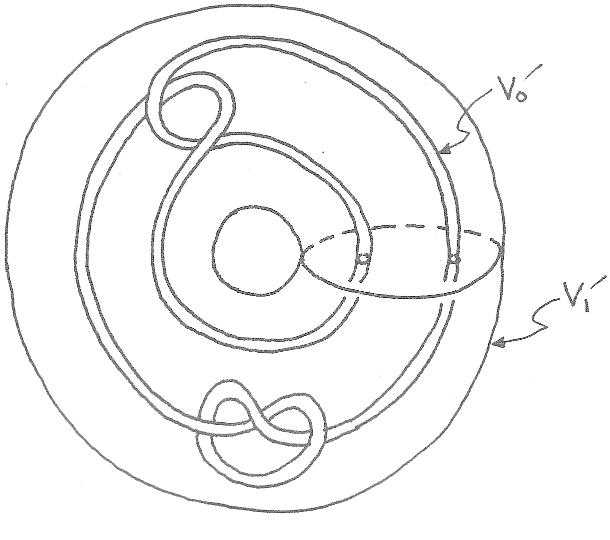


図2.

（ウ）基本群の自由積に関する分解と 3-manifold の plane による分解。M が closed 3-manifold のとき，基本群が $\pi_1(M) \cong G_1 * G_2$ と分解すれば，M はふたつの closed 3-manifold M_1，M_2 で $\pi_1(M_i) \cong G_i$ $(i=1,2)$ となるものの連結和になります。また M が境界をもつ compact 3-manifold のとき，

$$\pi_1(M) \cong G_1 * \cdots * G_n * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z} \quad \text{-----} (*)$$

(各 G_i は indecomposable ($\neq 0, \mathbb{Z}$) で, $\mathbb{Z}$ は r 個)
と分解すれば, M を $(n+r-1)$ 個の disjoint な disk $D_1, \cdots, D_{n+r-1}$ で切って n 個の component $M_1, \cdots, M_n$ に分け, $\pi_1(M_i) \cong G_i$ $(i=1, \cdots, n)$ とすることができます。 W が non-compact 3-manifold で $\pi_1(W)$ が有限生成のとき, $\pi_1(W)$ は $(*)$ の形に分解しますが, W を proper に埋め込まれた disjoint な plane $(\approx \mathbb{R}^2)$ で $\pi_1(W)$ の分解に対応させて切ることは一般にはできません。 たとえば, W_2 を solid tori の増大列 $V_0'' \subset V_1'' \subset \cdots$ の union で, $(V_n'', V_{n-1}'') \approx (V_1'', V_0'')$ (図3) なるものとすると, $\pi_1(W_2) \cong \mathbb{Z}$ ですが, W_2 を proper な plane で, non-separate なもので切って得られた manifold が単連結となるようにすることはできません。

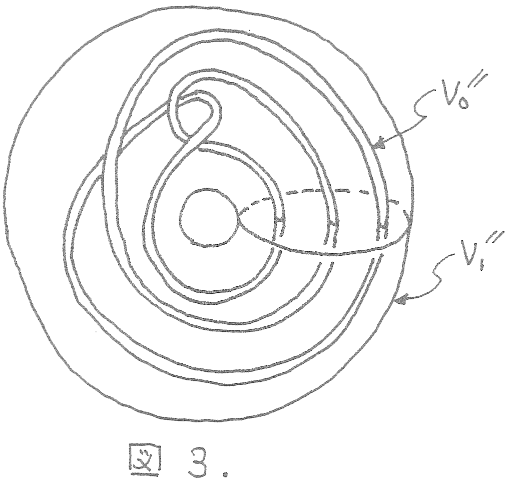


図 3.

2. Core

この節では core の性質を調べやすくするために W をつぎのものとします.

W : non-compact irreducible 3-manifold で ∂W は compact, $\pi_1(W)$ は有限生成.

(ここで, W が irreducible であるとは, W に埋め込まれた 2次元球面がすべて W のなかで 3-ball を bound すること。)

定義. W の core N は $\partial N \supset \partial W$ のとき, **boundary-compatible** であるという。

Theorem 2.1. W は irreducible で boundary-compatible な core N をもつ。

N と W は共に aspherical で, したがって, N は W の deformation retract になります。 また, ∂W の component はすべて S^2 ではなく, ∂N が S^2 component をもつのは N が 3-cell のときに限ります。

つぎに irreducible で boundary-compatible なcore の基本的な性質を述べておきます。

Proposition 2.2. $W \supset N$ を irreducible で boundary-compatible な core とし, $\mathrm{Cl}(W-N) \supset U$ をひとつの component とすると,

(1) $\partial U = U \cap N$ は ∂N のひとつの component からなる.

(2) U の end の数はひとつ.

(3) さらに, ∂U が W で incompressible ならば ∂U は U の deformation retract.

(ここで, $F \subset \partial W$ または $F \subset \mathrm{Int}\, W$ なる closed orientable surface $F\ (\neq S^2)$ が incompressible であるとは, 包含 $F \subset W$ が単射 $\pi_1(F) \longrightarrow \pi_1(W)$ を導くこと.)

W の end の数とは,

$$\sup_{W \supset K:\text{compact}} \left\{ \begin{array}{l} W-K \text{ の component で closure} \\ \text{が non-compact なものの数} \end{array} \right\}$$

のことです。 (2) から W の end の数は有限です。

Proposition 2.3. $W \supset N$ を irreducible で boundary-compatible な core とする.

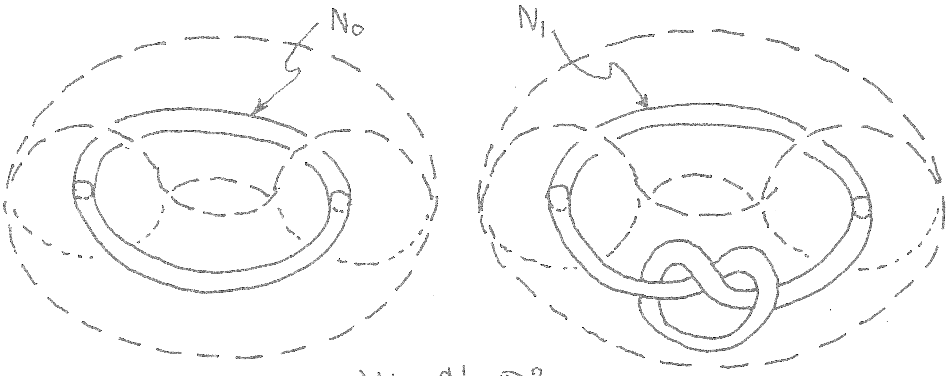
(1) ∂N の compoment が W ですべて incompressible であるためには, $\pi_1(W)$ が free product に関して indecomposable でしかも 0 でも $\mathbb{Z}$ でもないことが必要十分.

(2) $\pi_1(W)$ が rank $= n \geqq 0$ の free group ならば, N は genus $= n$ の handlebody で $\partial W = \emptyset$.

irreducible で boundary-compatible な core の一意性に関してはつぎが成りたちます.

Theorem 2.4. $\pi_1(W)$ が indecomposable で $\mathbb{Z}$ とは異なるとき, $W \supset N_0, N_1$ をふたつの irreducible で boundary-compatible な core とすると, N_0 と N_1 は ambient isotopic (∂W をとめたまま) である.

$\pi_1(W)$ が $\mathbb{Z}$ または decomposable のときは, Th. 2.4 は成りたちません。たとえば $W = S^1 \times \mathbb{R}^2$ のとき, 図4の N_0 と N_1 は共に W の core です。



$W = S^1 \times \mathbb{R}^2$

図4.

しかし一般に，つぎの弱い意味での一意性が成りたちます。

Theorem 2.5. $W \supset N_0, N_1$ をふたつの irreducible で boundary-compatible な core とすると，$N_0 \approx N_1$（同相）.

Th. 2.4 および Th. 2.5 を証明するために，つぎの Th. 2.6 を証明します。この定理は 3-manifold のなかのふたつの 3-submanifold が ambient isotopic であるための一つの十分条件を与えるものです。Th. 2.4 は Th. 2.6 の特別な場合になっています。

Theorem 2.6. M を irreducible な 3-manifold とし，N_0 と N_1 を M の compact irreducible な 3-submanifold でつぎをみたすものとする：

(1) $N_0 \cap \partial M = N_1 \cap \partial M$ で，これは ∂M のいくつかの compoment からなる.

(2) $\pi_1(N_0) \cong \pi_1(N_1)$ で，これは indecomposable で $\mathbb{Z}$ と異なる.

(3) 包含 $N_i \subset M$ が単射 $\pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(M)$ を導き ($i=0,1$)，これらふたつの image が $\pi_1(M)$ のなかで互いに conjugate.

このとき，N_0 と N_1 は ∂M をとめたまま ambient isotopic になる.

つぎに core と end との関係をいくつか述べます。McMillan の結果に；irreducible な contractible open 3-manifold は handlebody の増大列の union として表わすことができる，というのがあります（[13]）。 W の core に注目すれば，この定理はつぎのように拡張できます；

Theorem 2.7. $\pi_1(W)$ が indecomposable で $\mathbb{Z}$ ではないとき，W はつぎのような compact 3-submanifold の増大列 $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots$ の union として表わせる：

(1) V_n は irreducible で，$V_n \subset V_{n+1} - \mathrm{Fr}\, V_{n+1}$.

(2) $V_n = N_n \cup (1\text{-handles})$，ここで，$N_n$ は W の irreducible で boundary-compatible な core であり，$N_n \subset N_{n+1} - \mathrm{Fr}\, N_{n+1}$，$\mathrm{cl}(N_{n+1} - N_n) \approx \mathrm{Fr}\, N_n \times [0, 1]$.

たとえば，1節の(ア)で述べた Whitehead の例においては，N_n は 3-cell であり，Th. 2.7 に即して図1をかきなおせば，つぎの図5のようになります。

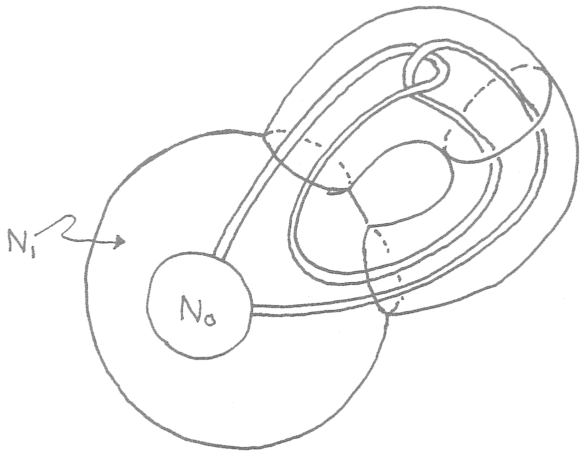


図5.

1節の(イ)で、contractible open 3-manifold でどんなcompact 3-manifold にも埋め込むことのできない例を上げましたが、これに関連して McMillan と Thickstun によるつぎの結果があります：

Theorem 2.8 ([15]). W を contractible irreducible open 3-manifold とする。Wがある compact irreducible 3-manifold に埋め込むことができれば、Wは S^3 に埋め込むことができる。

これはつぎのかたちに拡張できます。

Theorem 2.9. $\pi_1(W)$は indecomposable で $\mathbb{Z}$ と異なるとする。$W \supset N$ を irreducible で boundary-compatible な core とする。このとき、Wがあるcompact irreducible な 3-manifold に包含が基本群の単射を導くように埋め込めるならば、WはNと同相な manifold

N' に，$W \cap \partial N' = \partial W$, $cl(N' - N) \approx Fr_{N'} N \times [0,1]$
となるように埋め込むことができる。

3. manifold compactification

この節では W を irreducible な non-compact 3-manifold で ∂W が compact なものとします。

定義. W が **manifold compactification** をもつとは，compact 3-manifold M と，∂M のいくつかの component の union X で，$W \approx M - X$ となるものがあること．

W が manifold compactification をもつための条件をいくつかあげます。まず cone との関連では：

Proposition 3.1. $\pi_1(W)$ が有限生成で，indecomposable で $\mathbb{Z}$ と異なるとき，W が irreducible で boundary-compatible な

coreの増大列のunionとして表わせるならば、
Wはmanifold compactificationをもつ。

$\pi_1(W)$が有限生成でも$\mathbb{Z}$と同型かdecomposable
のときは、Prop. 3.1は成りたちません。たとえば、
W_3をsolid toriの増大列$N_0 \subset N_1 \subset N_2 \subset \cdots$
のunionで$(N_n, N_{n-1}) \approx (N_1, N_0)$（図6）
なるものとすると、W_3はirreducible open 3-
manifoldで、$\pi_1(W_3) \cong \mathbb{Z}$であり、各$N_n$は
W_3のirreducible coreです。しかし、W_3は
manifold compactificationをもちません。
これは$\pi_1(W_3 - N_0)$が無限生成になることから
わかります。

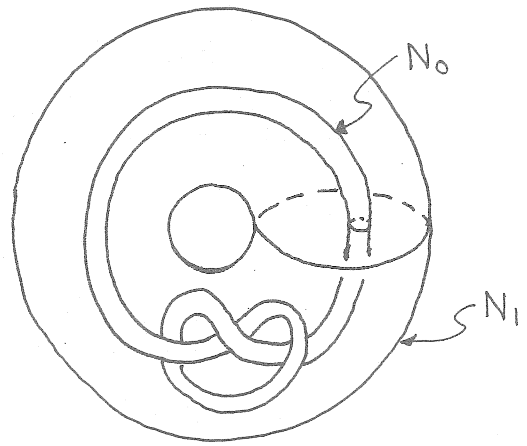


図6.

ここで，Wがmanifold compactificationをもつならば，かってなcompact subpolyhedron $K \subset W$に対して，$W-K$の各componentの基本群は有限生成になる，という事実を用いましたが，実はこの逆が成りたちます。

Theorem 3.2 (Tucker [19]). 任意のcompact subpolyhedron $K \subset W$に対して，$W-K$の各componentが有限生成な基本群をもつならば，Wはmanifold compactificationをもつ。

この定理の応用として，compact 3-manifoldのcovering spaceのcompact化に関するつぎの結果があります。

Theorem 3.3 (Simon [18], Jaco [8]). Mをcompact irreducible 3-manifoldで2-sided incompressible surfaceをもつものとする。$\pi_1(M) \supset H$を有限生成部分群とし，

$p: \tilde{M} \longrightarrow M$ を $p_* \pi_1(\tilde{M}) = H$ となる covering とする。このとき H がつぎの (1), (2) のいずれかをみたせば、$\tilde{M}$ は manifold compactification をもつ。

(1) 任意の有限生成部分群 $K \subset \pi_1(M)$ に対して $K \cap H$ も有限生成になる。

(2) M の compact irreducible な 3-submanifold N で、$N \cap \partial M$ が ∂M のいくつかの component からなり、∂N の各 component が M で incompressible で、単射 $\pi_1(N) \longrightarrow \pi_1(M)$ の image が $\pi_1(M)$ で H と conjugate になる。

この Th. 3.3 は 2 節の irreducible で boundary-compatible な core の一意性の証明において重要な役割をします。 また、compact 3-manifold への応用が [8], [9] などにあります。

参考文献

[1] E. M. Brown: Contractible 3-manifolds of finite genus at infinity, Trans. Amer. Math. Soc. 245 (1978), 503-514.

[2] D. Epstein: Ends, Topology of 3-Manifolds and Related Topics, Prentice-Hall (1962), 110-117.

[3] B. Evans: Boundary respecting maps of 3-manifolds, Pacific J. math. 42 (1972), 639-655.

[4] R. H. Fox and E. Artin: Some wild cells and spheres in three dimensional space, Ann. of Math. 49 (1948), 979-990.

[5] D. E. Galewski, J. G. Hollingsworth and D. R. McMillan,Jr.: On the fundamental group and homotopy type of open 3-manifolds, General Top. and its Appl. 2 (1972), 229-313.

[6] W. Haken: Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in Modern Topology 5, Prentice-Hall (1968), 39-98.

[7] L. S. Husch and T. M. Price: Finding a boundary for a 3-manifold, Ann. of Math. 91 (1970), 223-235.

[8] W. H. Jaco: Lectures on Three-Manifold Topology, AMS Regional Conference Series in Math. 43 (1980).

[9] _____ and P. B. Shalen: Peripheral structure of 3-manifolds, Invent. Math. 38 (1976), 55-87.

[10] O. Kakimizu: Cores of non-compact irreducible 3-manifolds (preprint).

[11] J. M. Kister and D. R. McMillan,Jr.: Locally Euclidean factors of E^4 which cannot be imbedded in E^3, Ann. of Math. 76 (1962), 541-546.

[12] D. McCullough: Compact submanifolds of 3-manifolds with boundary (preprint).

[13] D. R. McMillan,Jr.: Cartesian product of contractible open manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 510-514.

[14] _____: Some contractible open 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 373-382.

[15] _____ and T. L. Thickstun: Open three-manifolds and the Poincaré conjecture, Topology 19 (1980), 313-320.

[16] P. Scott: Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J. London Math. Soc. 6 (1973), 437-440.

[17] _____: Compact submanifolds of 3-manifolds, J. London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.

[18] J. Simon: Compactifications of covering spaces of compact 3-manifolds, Michigan Math. J. 23

(1976), 245-256.

[19] T. W. Tucker: Non-compact 3-manifolds and the missing-boundary problem, Topology 13 (1974), 267-273.

[20] _____: On the Fox-Artin sphere and surfaces in noncompact 3-manifolds, Quart. J. Math. Oxford 28 (1977), 243-254.

[21] F. Waldhausen: On irreducible 3-manifolds which are sufficiantly large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.

[22] J. H. C. Whitehead: A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279.

写像による次元とＡＮＲの保存について

筑波大，数学系　矢ヶ崎達彦

§0．序

空間の位相的特徴付けを考える際，ANR（absolute neighborhood retract）や次元に関する条件は基本的である．ここでは，どの様な写像のもとで ANR が保たれるか，或は次元が上がらないかといった問題を中心に関連した話題を紹介する．以下で取り上げる写像は次の通りである：　open map，n - soft map，CE - map cellular map，fine homotopy equivalence，hereditary shape equivalence，approximate fibration，(completely) movable map.

§1．次元を上げる写像について

以下，§1 - 3 を通して，空間は separable and metrizable とする．従って covering dimension，(small or large) inductive dimension は全て一致し，我々は何れも用いることが出来る．map $f : X \twoheadrightarrow Y$ は $\dim X < \dim Y$ のとき "次元を上げる" という．

Dimension raising map の history は，より強い条件を満たす map の構成に向かって進んできた．まず最初の例として：

<u>1.1.Prop.</u>(1) 任意の compact metric space に対して Cantor set からの onto map が存在する．

(2) 任意の connected locally connected compact metric space (Peano continuum) に対して 区間 [0,1] からの onto map が存在する．

次ぎに問題となったのが open dimension raising map の存在である．この最初の例は，Kormogoroff，Keldyš，Anderson 等によって構成された：

<u>1.2.Thm.</u>(Anderson，1952) ある 1 - dim compact connected metric space から Hilbert cube $Q = [0,1]^{\infty}$ の上への monotone open map が存在する．

注） monotone = fiber が connected

Anderson の構成は "defining sequence" の方法と呼ばれうるものであって Wilson，Walsh らによって更に展開された．結果を述べるために，ここで Menger compactum の定義を与えておく：空間 X は n - cellから X への任意の二つの map を disjoint image を持つ map で近似できるとき "DD^nP (disjoint n - cells property)をもつ" という．C^n，LC^n は 各々 n - connected，locally n - connected を表す；

<u>1.3.Thm and Def.</u>(M. Bestvina，1984) n - dim，LC^n

C^n，compact metric space で DD^nP をもつものが存在し topological に unique である．この空間を n - dim Menger compactum と呼び μ^n で表す． 特に μ^0 = Cantor set である．

n = 1 に対して Wilson は次を示した：

1.4.Thm.(Wilson, 1972) 任意の Peano continuum Y（$\neq$ 1 pt）に対して次の map が存在する．

（1） open map $f : \mu^1 \longrightarrow Y$ s.t. 各fiber $f^{-1}(y) \approx \mu^1$.

（2） open map $f : \mu^1 \longrightarrow Y$ s.t. 各fiber $f^{-1}(y) \approx \mu^0$.

Domain が多様体の場合にも次が示されている：

1.5.Thm.（Walsh,1975）

（1） M^m を m - dim compact pl. manifold，$m \geq 3$，P を simply connected compact polyhedron とすると，monotone open map $f : M^m \longrightarrow P$ が存在する．

（2） M^m，N^n を compact pl. manifolds，$n \geq m \geq 3$ とし $\pi_1(N)$ = finite group とすると，light open map $f : M^m \longrightarrow N^n$ が存在する．

注） light = fiber が totally disconnected

これらの結果以後，長い間 dimension raising map は open map の範囲を出なかったが，最近 A.N.Dranishnikov が Kormogoroff 以来の inverse limit の方法を用いて次元を上げる n - soft map の例を構成した：

1.6.Def. map $f : X \longrightarrow Y$ が n - soft $\Longleftrightarrow$ 次の map g，G が与えられて $G|_C = f \circ g$ を満たすとする．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "G'"] & Y \end{tikzcd}$$

但し dim $Z \leqq n$，C は Z の closed set とする．このとき g の extension G' が存在して $fG' = G$ を満たす．

注）f : n - soft $\Longleftrightarrow$ f : open，各 $f^{-1}(y)$ は C^{n-1} かつ family $\{f^{-1}(y)\}$ は equi- LC^{n-1}.

<u>1.7.Thm.</u>(Dranishnikov,1984) n - dim Menger compactum から Hilbert cube Q への (n-1) - soft map が存在する．

上で，n - soft map に改良することはできないので，$(n \geqq 1)$ その意味では best example といえる．この例で 更に各 fiber も Menger compactum にとれるかどうか，また domain が多様体の場合に 1 - soft dimension raising map が存在するかどうかは知られていない．Defining sequence の方法との対応を詳しく調べる必要があると思われる．

2．ANR の Geometric Topology における役割りと関連する問題

ANR の概念は，1930年代に Borsuk によって導入された

<u>2.1.Def.</u> metric space X が ANR $\Longleftrightarrow$ 任意の metric space Z の closed set C から X への map は C の近傍に拡張される．

注） ANR = normed space の open set の retract.

ENR = 有限次元 locally compact ANR .

ANR の重要性を顕著に表す例は，1980年前後から確立されてきた様々な nice spaces の特徴付けであると思われる．この議論は CE - Decomposition の理論を仲介としている：

2.2.Def. (1) A を compact metric space として，ANR M に embed しておく． A が cell - like (CE) $\Longleftrightarrow$ A は M における任意の近傍の中で一点に contract する．（この定義は M の取り方に依らない）．

(2) CE - map = proper map で各 fiber が CE.

(3) $f : X \longrightarrow Y$ が fine homotopy equivalence (f.h.e と略) $\Longleftrightarrow$ Y の任意の open cover $\mathcal{U}$ に対して map $g : Y \longrightarrow X$ が存在して $f \circ g \simeq id$ ($\mathcal{U}$ - homotopy) $g \circ f \simeq id$ ($f^{-1}(\mathcal{U})$ - homotopy).

注）(1) map $f : X \longrightarrow Y$ が proper $\Longleftrightarrow$ 任意の compact $B \subset Y$ に対して $f^{-1}(B)$ は compact.

(2) ANR の間の proper map に限れば CE - map = f.h.e.

Local に Q の open set と同相な空間を Q - manifold という．まず，この Q - manifold と ANR の関係を振り返ってみる：

2.3.Thm. (Resolution の存在) 任意 locally compact ANRのに対してある Q - manifold からの CE- map が存在する．

<u>2.4.Thm.</u>（Approximation） X を ANR， $f : M \longrightarrow Y$ を Q - manifold からの CE - map とするとき，f が near homeo（homeoで近似できる）$\Longleftrightarrow$ X は各 $n \geqq 0$ に対して DD^nP をもつ．

<u>2.5.Cor.</u>（Characterization）$\Longleftrightarrow$ Q - manifold = locally compact ANR with DD^nP $(n \geqq 0)$．

DD^nP は general position property (g.p.p.)の一種であることに注意（§1 参）．

これと類似の特徴付けをまとめると次の表になる．

<u>2.6.List.</u>

mfd	ANR	resolution	g.p.p.
Q - mfd	locally compact ANR	Q-mfd からの CE-map	DD^nP $(n \geqslant 0)$
$\mathbb{R}^\infty$-	complete ANR	$\mathbb{R}^\infty$- mfd からの f.h.e.	discrete cells property
$\mathbb{R}^\infty_f$-	(incomplete) ANR	$\mathbb{R}^\infty_f$- mfd からの f.h.e.	discrete cells property strong f.d.c. universal countable union of f.d.c
$\mathbb{R}^n$- $(n \geqslant 5)$	gen. n- mfd	(n-mfd からの CE-map)?	DD^2P
μ^n-	compact LC^{n-1}	μ^n- mfd からの UV^{n-1}- map	n-dim, DD^nP

注） E - mfd = local に E の open set と homeo な space． $\mathbb{R}^\infty$ = real line の countable product．

$\mathbb{R}^\infty_f = \{(x_n) \in \mathbb{R}^\infty$：有限個の座標を除いて $x_n = 0\}$

f.d.c. = finite dim compactum．

概念的にいえば ” E - mfd = 適当な general position property をもつ ANR（$+\alpha$）” ということになる．

CE - Decomposition 理論を用いた議論とは別に（metric の範意から外れるが）Scepin は，空間を inverse limit に展開してその空間の性質を調べるという方法を用いて $[0,1]^m$ （ m = uncountable cardinal）や ” $[0,1]^m$ - mfd ” の特徴付けを与えている：

2.7.Thm. $X \approx [0,1]^m \Longleftrightarrow X$ は一般の compact Hausdorff space に対する AR で weight = m ，かつ X の各点での character は一定．

注） AR = ANR + contractible， weight = open base の濃度の minimum， character at $x \in X$ = x の近傍base の濃度の minimum．

以上，空間の特徴付けに現れる ANR をみてきたが，では，与えられた空間が ANR かどうかを判定する方法は確立しているであろうか．現在 Dowker,Lefschetz,Toruńczyk 等の判定方が知られているが，次の問題は未解決である：

2.6.Q 1） compact n - manifold M^n に対してその homeomorphism group $H(M^n)$ は ANR か？

$H(M^n)$ は，もし ANR であれば，$\mathbb{R}^\infty$ - manifold になる．また，M が Q - manifold の場合にはすでに示されている（α - approximation theorem の parametrized version を用いる）．

2.7.Q 2） $f : M^n \longrightarrow Y$ を n - manifold からの CE - map とするとき Y は generalized n - manifold か？

注）gen. n - mfd = 有限次元 ANR homology n - mfd.

Q 2) は $n \leqslant 3$ では成りたつ (homo. 3-mfd は 3 - dim である). 上の条件のうち, homology n - mfd になることは容易にわかり, また dim Y = n (or $< \infty$) $\Longleftrightarrow$ Y : ANR である. したがて, Q 2)は CE-map が ANR を保つか, 次元を上げないかという問題に帰する:

Q 2') (Dimension raising CE - mapping probrem)

f : X $\longrightarrow$ Y を CE- map とするとき dim X $\geqq$ dim Y か?

Q 2')は Q 2)と同値である. 残念ながら, CE - map は一般に (無限次元) ANR を保たない. しかし cohomological dim. を上げないので, もし次元論での次の問題が肯定的ならばQ 2)も成り立つことになる:

Q 2") (Alexandroff cohomo. dim probrem) 任意の (separable matric) space に対して dim = cohomo. dim ($\mathbb{Z}$ - coefficient) か?

ところが Edwards 等によって "cohomo. dim $\leqslant$ n の space に対し n - dim の space からの CE - map が存在する" が示され, 結局 Q 2) = Q 2") である.

Q 2")で dim X $< \infty$ のときは等号が成り立つので, 反例があれば, それは無限次元で有限の conom. dim をもつことになる. 最近 Dranishnikov が無限次元で有限の cohomo dim ($\mathbb{Z}_p$ - coefficient) をもつ 例を与えたとのことである.

次の節では, この CE - map が ANR を保つか, 次元を上げないかという問題に対する肯定的な方向での結果や

その non-CE case への拡張を述べる．

３．写像による次元とＡＮＲの保存について

3.1 CE - map と hereditary shape equivalence

CE - map は一般に ANR を保たず，また Dimension raising probrem も未解決であったが，これに対して G.Kozlowski は この CE - map の欠点を補う写像として hereditary shape equivalence (h.s.e.) を導入した．

3.1.1.Def. (1) $f : X \longrightarrow Y$ が shape equivalence $\Longleftrightarrow$ 任意の ANR M と map $g : X \longrightarrow M$ に対して map $h : Y \longrightarrow M$ で $h \circ f \simeq g$ となるものが up to homotopy で unique に存在する．

(2) proper map $f : X \longrightarrow Y$ が h.s.e. $\Longleftrightarrow$ 任意の closed set $B \subset Y$ に対して $f| : f^{-1}(B) \longrightarrow B$ は shape equivalence.

注）h.s.e は CE - mapであり，domain が ANR のときは f.h.e. と一致する．

3.1.2.Thm.(G.Kozlowski,1980) h.s.e. は ANR を保ち，次元を上げない．

3.1.3.Thm. $f : X \longrightarrow Y$ を CE - map とする．

(1) X が ANR のとき，Y：ANR $\Longleftrightarrow$ f ：h.s.e.

(2) $\dim X \leqslant n$ のとき，$\dim Y \leqslant n$ (or $< \infty$) $\Longleftrightarrow$ f ：h.s.e.

従って我々の興味は h.s.e. の判定に進むが，これに

ついては次ぎが知られている：

3.1.4.Thm.(F.D.Ancel,1983) CE - map $f : X \longrightarrow Y$ は次ぎの何れかを満たせば h.s.e. になる．

(1) f の singular set $\{y \in Y : f^{-1}(y) \neq 1 \text{ pt}\}$ が countable dim・G_δ subset に含まれる．

(2) $Y = \bigcup_{i=1}^{\infty} Y_i$ (Y_i は Y の closed set) とかけて，各 $f| : f^{-1}(Y_i) \longrightarrow Y_i$ が h.s.e.

3.1.5.Prop. 3 - manifold の subset からの CE - mapは h.s.e. になり，したがって次元を上げない．

CE - map に近い写像に cellular map がある：

3.1.6.Def.(1) n - manifold M^n の comact subset A は n - cells の減少列 D_i ($i \geqq 1$); $D_{i+1} \subset \text{int } D_i \subset M^n$ が存在して $A = \cap D_i$ となるとき cellular であるという． (2) proper map $M^n \longrightarrow Y$ は各 fiber が cellular set のとき cellular であるという．

Q 2)は celular map について考えれば十分であることが知られているが，この場合には次ぎが成り立つ：

$C(M^n) = M^n$ からそれ自身の上への写像全体のなすspace (compact - open top.), G = "f の graph" とする；

3.1.7.Thm. cellular map $f : M^n \longrightarrow Y$ に対して次ぎは同値：

(1) $\dim Y = n$

(2) map $\phi : Y \longrightarrow C(M^n)$ が存在して，各 ϕ_y は $f^{-1}(y)$ を唯一の nondegenerate fiber(i.e. $\neq$ 1 pt)としてもつ．

(3) projection $(Y \times M - G) \longrightarrow Y$ は bundle map.

以上は,fiber が（弱い意味で）contractible な map についての結果であるが, fibration type の写像についてはどうであろうか.

3.2. movable maps

Hurewicz fibration が ANR を保つかどうか,また次元を上げないかどうかは,以前,知られていない.

注） $f : X \longrightarrow Y$ を locally compact ANR の間の proper fibration とするとき,

(1) X, Y が ANR $\Longrightarrow$ 各 fiber は ANR.

(2) Y が ANR, 各 fiber が ANR $\Longrightarrow$ X は ANR.

ここでは, CE - map と fibration の双方の幾何的拡張として Coram, Duvall によって導入された approximate fibration について考えてみる.

<u>3.2.1.Def</u>. X を ANR とする. proper map $f : X \longrightarrow Y$ は次の条件を満たすとき approximate fibration と呼ばれる：

(*) 次の map g, G が与えられて $G_0 = f \circ g$ とする.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook, "\times 0"'] & X \arrow[d, "f"] \\ Z \times [0,1] \arrow[r, "G"'] \arrow[ur, dashed, "G'"] & Y \end{tikzcd}$$

このとき Y の任意の open cover $\mathcal{U}$ に対して map G’ で $G'_0 = g$ かつ $f \circ G'$ と G は $\mathcal{U}$- near (i.e. $^{\forall}\alpha \in Z \times [0,1]$ $^{\exists}U \in \mathcal{U}$ s.t. $f \circ G'(\alpha), G(\alpha) \in U$ ）となるものが存在する.

approximate fibration は次ぎの local regularity condition と関連する：

3.2.2.Def. proper map $f: X \longrightarrow Y$ が completely movable $\Longleftrightarrow$ 各 $y \in Y$ に対して fiber $f^{-1}(y)$ は FANR であり，かつ $f^{-1}(y)$ の近傍 U からの shape retraction $\underline{r}: U \longrightarrow f^{-1}(y)$ が存在して任意の fiber $f^{-1}(z) \subset U$ に対して $\underline{r}|: f^{-1}(z) \rightarrow f^{-1}(y)$ は shape equivalence になる． 注) FANR = ANR の shape retract.

3.2.5.Prop. ANR の間の map に対しては approximate fibration = completely movable map.

Example として map $h: X \longrightarrow X$ (X compact ANR) に対する mapping torus projection $p: T(h) \longrightarrow S^1$ を考えてみる ($T(h) = (X \times [0,1])/\sim$, $(x,1) \sim (h(x),0)$, $p[x,t] = [t] \in \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$). (1) h : CE - map (= f.h.e.) $\Rightarrow$ p : fibration, (2) h : homotopy equi. $\Rightarrow$ p : approximate fibration となる．

CE - map は completely movable であり，この completely movable map もまた cohomo. dim を上げない．また n - manifold からの completely movable map $f: M^n \longrightarrow Y$ に対して $\dim Y \leq n$ (or $< \infty$) $\Longleftrightarrow$ Y : gen mfd となる．したがって Q 2) は completely movable map についての類似の問題と同値になってしまう．この completely movable map に対して CE - h.s.e.と同じ関係にある写像があるだろうか？. F.D.Ancel の h.s.e. についての observation と shape theory における movability の概念は次ぎの定義を導びく：

3.2.4.Def. $f: X \to Y$ を proper map とし，ANR fiber を持つ bundle map $p: E \to Y$ と fiber preserving embedding $X \hookrightarrow E$ を選んでおく．次の条件を満たすとき f は（globalに）movable であるという：

（*）X の E における任意の近傍 U に対して X の近傍 V が存在して，X の任意の近傍 W に対して deformation $\phi_t: V \to U$; $\phi_0 = id$, $\phi_1(V) \subset W$, $p\phi_t = p$ が存在する．

3.2.5.Thm. movable map は ANR を保ち，次元を上げない．

movable map と他の map の関係については：

3.2.6.Thm. X を ANR，$f: X \to Y$ をproper map とすると　f : movable $\Longleftrightarrow$ Y : ANR，f : approximate fibration.

3.2.7.Thm. h.s.e. = movable CE - map.

3.2.8.Thm. $f: X \to Y$ を completely movable map とする．(1) X が ANR のとき　Y : ANR $\Longleftrightarrow$ f : movable

(2) $\dim X \leqq n$ のとき　$\dim Y \leqq n$ (or $< \infty$) $\Longleftrightarrow$ f : movable.

すなわち complete vs global movability は CE - h.s.e と全く同じ関係にあることになる．

更に，3.2.8 において "movable map" を "locally approximately invertible map" に置き換えて良いことが最近示されている．

以上，map の local regularity condition とそれに

対応する global condition をいくつかみてきた．我々は判定の容易な local condition に興味をもつわけであるが，我々の望む性質（ANR を保つ，次元を上げない）は対応する map の global condition に一致してしまう．特に，もし Cohomological dimension problem が否定的であれば，個々具体的な写像に対してこれらの global condition の判定方を得ることが一層重要な課題となってくる．

Reference

D.C.Wilson, Open mappings of the universal curve onto continuous curves, Trans. AMS., 168 (1972) 497 - 515.

A.N.Dranishnikov, Absolute extensors in dimension n and dimension - raising n - soft maps, Russian Math. Surveys 39 (1984) 63 - 111.

M.Bestvina, Characterizing k - dimensional universal Menger compacta, thesis, 1984.

H.Torunczyk, On CE - images of the Hilbert cube and characterization of Q - manifolds, Fund. Math 106 (1980) 31 - 40.

_____, Characterizing Hilbert space topology, Fund. Math. 111(1981) 247 - 262.

J.J.Walsh, Dimension, cohomological dimension, and cell-like mappings, in Shape Theory and Geometric Topology, 843, Springer - Verlag, Berlin, 1981, 105 - 118.

G.Kozlowski, Images of ANR's, mimeographed notes.

F.D.Ancel,The role of countable dimensionality in the theory of cell - like relations, Trans. AMS. 287 (1985) 1 - 40.

T.Yagasaki, On continuous cellularity, Top. Appl.

D.Coram and P.F.Duvall, Approximate fibrations and a movability condition for maps, Pacific J. Math. 72 (1977) 41 - 56.

T.Yagasaki, Movability of maps and shape fibrations Glasnik Math.

_____, Maps which preserve ANR's, Proc. AMS.

D.Coram, S.Mardešić and H.Torunczyk, Images of ANR's under shape fibrations, Bull. Pol. Acad. Sci. Math., 32 (1985) 181 - 187.

古典力学	場の理論
多粒子系 (有限次元)	無限自由度
可換な量	非可換な量 ↓ 真空期待値 $\langle A_1(z_1) \cdots A_n(z_n) \rangle$

M: mfd に parametrize された operator $\{A(z)\}_{z \in M}$

統計力学　素粒子論

場の生成消滅

"場の operator は空間を創造する力を持っている"

conformal 不変な場の理論

conformal 変換　$\underline{\underline{2次元}}$ ⇒ 無限次元

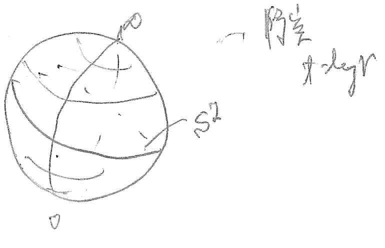
3次元以上なら有限次元

2次元 conformal str ⟺ 2次元 complex str

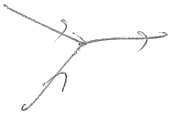
複素1-次元

Virasoro代数 ↔ S^1 上の vector field 全体 ↗ $D^\times$ 上の mero. vect fd

Current alg ↔ S^1 上のある $sl(2,\mathbb{C})$-valued function



vertex operator



3つの粒子 (生成消滅)

Virasoro代数とBraid群のMonodromy表現 (*)

名大理　　土屋昭博

（河野俊丈記）

§1. $A_1^{(1)}$ type の affine Lie algebra の integrable 表現

我々の目標は，$\mathbb{C}P^1$上の conformal 不変な場の理論の model を構成することである．まず，$\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$ の既約表現に関して，よく知られた事実を復習しておく．

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおく．Lie algebra $\mathfrak{g} = sl(2, \mathbb{C})$ の有限次元既約表現は，整数 $s = 0, 1, 2, \cdots$ で parametrize される．実際，各 s について，同型を除いて unique に，既約 $(s+1)$-次元 $\mathfrak{g}$-module V_s が存在し，適当な $\mathbb{C}$-basis $\{v_j\}_{j=0}^{s}$ に関して，

(*) 本稿は，'86年6月9日，16日　名古屋大学において土屋氏が講演された内容にもとづく，氏の最近の結果からの紹介です．

$$H(v_j)=(s-2j)v_j \ ; \quad F(v_j)=v_{j+1} \ ; \quad E(v_j)=j(s+1-j)v_{j-1}$$

が満たされる.（ここで　$v_{s+1}=0=v_{-1}$　とした）. vector v_0 を　$|s\rangle$　と書くことにする. 同様にして.（$s+1$）-次元 既約 <u>right</u>　$\mathfrak{g}$-module　V_s^+　と non-zero vector $\langle s| \in V_s^+$ が存在して.

$$\langle s|.H = s.\langle s| \ ; \quad \langle s|.F=0 \ ; \quad \langle s|.E^{s+1}=0$$

が満たされる. 次に. <u>$A_1^{(1)}$ type の affine Lie algebra</u>

$$\hat{\mathfrak{g}}=(\mathfrak{g}\otimes\mathbb{C}[t,t^{-1}])\oplus\mathbb{C}c$$

を次の基本関係式で. 定義する.

$$\begin{cases} [x(m),\ y(n)]=[x,y](m+n)+m\delta_{m+n,0}(x,y)c \\ \quad \text{ここで}\quad x(m)=x\otimes t^m, \quad x\in\mathfrak{g},\quad m\in\mathbb{Z} \\ \qquad (x,y)=\mathrm{tr}(x\cdot y) \\ [c,\ x(m)]=0 \end{cases}$$

$\mathfrak{g}$ は. 埋めこみ　$\mathfrak{g}\longrightarrow\mathfrak{g}\otimes 1$　により. 自然に $\hat{\mathfrak{g}}$ の subalgebra と考える. また　$\mathfrak{n}_\pm=\sum_{n\geq 1}\mathfrak{g}\otimes t^{\pm n}$ とおく. $V_s^+\times V_s$　上には. 次の性質をみたす. bi-linear form

$$\langle\ |\ \rangle\ :\ V_s^+\times V_s\longrightarrow\mathbb{C}$$

が unique に存在することに注意しておく

$$\begin{cases} \langle s|s\rangle=1 \\ \langle ua|v\rangle=\langle u|av\rangle, \quad a\in\mathfrak{g},\ u\in V_s^+,\ v\in V_s \end{cases}$$

さて，次に $\hat{\mathfrak{g}}$ の表現について考えよう．我々は <u>level</u> とよばれる positive integer $\ell \geqq 1$ を fix する．整数 s，$0 \leqq s \leqq \ell$，について，$\mathcal{H}_s \supseteq V_s$ となる left $\hat{\mathfrak{g}}$-module $\mathcal{H}_s$ で次の性質を満たすものが，同型を除いて unique に存在する．

$$
\begin{cases}
0) & \mathcal{H}_s \text{ は } V_s \text{ 上 } \hat{\mathfrak{g}} \text{ で（代数的に）生成される．} \\
1) & \mathfrak{m}_+ V_s = 0 \\
2) & c = \ell \times id \text{ として作用} \\
3) & \mathcal{H}_s \text{ は irreducible } \hat{\mathfrak{g}}\text{-module}
\end{cases}
$$

同様にして，上の $(V_s, \mathfrak{m}_+)$ を $(V_s^+, \mathfrak{m}_-)$ でおきかえることにより，irreducible right $\hat{\mathfrak{g}}$-module $\mathcal{H}_s^+$ を得る．さらに <u>真空期待値</u>（vacuum expectation）と呼ばれる bi-linear form

$$\langle \ | \ \rangle : \mathcal{H}_s^+ \times \mathcal{H}_s \longrightarrow \mathbb{C}$$

で，次の性質を満たすものが unique に存在する．

$$
\begin{cases}
1) & \langle s | s \rangle = 1 \\
2) & \langle ua | v \rangle = \langle u | av \rangle
\end{cases}
$$

$$u \in \mathcal{H}_s^+, \quad v \in \mathcal{H}_s, \quad a \in \hat{\mathfrak{g}}.$$

$\mathcal{H} = \sum_{s=0}^{\ell} \mathcal{H}_s$，$\mathcal{H}^+ = \sum_{s=0}^{\ell} \mathcal{H}_s^+$ とおく．これが我々のあつかいたい Hilbert 空間である．

Non-negative integer d について．

$$\mathcal{H}_s(d) = \{ x_1(-n_1) \cdots x_p(-n_p) v \ ; \quad v \in V_s \\ n_1 + \cdots + n_p = d, \quad n_j \geq 1 \}$$

$$\mathcal{H}_s^+(d) = \{ v\, y_1(m_1) \cdots y_q(m_q) \ ; \quad v \in V_s \\ m_1 + \cdots + m_q = d, \quad m_j \geq 1 \}$$

とおくと．$\dim \mathcal{H}_s(d) = \dim \mathcal{H}_s^+(d) < \infty$ となり．

分解．$\mathcal{H}_s = \sum_{d \geq 0} \mathcal{H}_s(d)$，$\mathcal{H}_s^+ = \sum_{d \geq 0} \mathcal{H}_s^+(d)$，

及び complete pairing

$$\langle \, | \, \rangle : \mathcal{H}_s^+(d) \times \mathcal{H}_s(d) \longrightarrow \mathbb{C}$$

で，$\mathcal{H}_s^+(d') \times \mathcal{H}_s(d)$ 上 zero (if $d' \neq d$) となるものが得られる．

$$\hat{\mathcal{H}}_s = \prod_{d \geq 0} \mathcal{H}_s(d), \quad \hat{\mathcal{H}}_s^+ = \prod_{d \geq 0} \mathcal{H}_s^+(d)$$

(直積) とおく．

また．$\hat{\mathcal{H}} = \sum_{s=0}^{\ell} \hat{\mathcal{H}}_s$，$\hat{\mathcal{H}}^+ = \sum_{s=0}^{\ell} \hat{\mathcal{H}}_s^+$ とする．

我々は．linear map $\mathcal{O} : \mathcal{H} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}$

を $\mathcal{H}$ に作用する <u>operator</u> と呼ぶ．真空期待値

$$\langle \, | \, \rangle : \mathcal{H}^+ \times \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{C}$$

を continuous bi-linear map

$$\langle \, | \, \rangle : \mathcal{H}^+ \times \hat{\mathcal{H}} \longrightarrow \mathbb{C}$$

に unique に拡張し．$\hat{\mathcal{H}}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}^+, \mathbb{C})$ を

同一視することにより、operator $\mathcal{O} : \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ は bilinear pairing $\mathcal{H}^+ \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ と 1:1 に対応していることがわかる（以下しばしばこの同一視を行なう。記号 $\langle u|\mathcal{O}|v\rangle$ は $\langle u|\mathcal{O}v\rangle$ を示す）

<u>Remark</u>. $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 : \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ を operators とするとき、その合成 $\mathcal{O}_1 \circ \mathcal{O}_2$ は必ずしも定義されない（場の理論における divergence の問題）。

<u>Def</u> M を complex manifold とする。$\mathcal{O}(z)$ を $z \in M$ で parametrize された operator とする。$\mathcal{O}(z)$ が holomorphic operator であるとは、かってな、$u \in \mathcal{H}^+$, $v \in \mathcal{H}$ について $\langle u|\mathcal{O}(z)|v\rangle$ が z について holomorphic であることとする。また $\mathcal{O}(z)$ を M で parametrize された holomorphic operator とし、$P(z, D)$ を M 上の holomorphic differential operator とする。$P(z, D)\mathcal{O}(z)$ を、$\langle u|P(z, D)\mathcal{O}(z)|v\rangle = P(z, D)\langle u|\mathcal{O}(z)|v\rangle$ $u \in \mathcal{H}^+$, $v \in \mathcal{H}$ で定義する。

§2. $\mathcal{H}$ 上に作用する場の operators

以下，$M = \mathbb{C}^*$ で parametrize される operator を扱う．

I) <u>Current operators</u>　$x \in \mathfrak{g}$，$z \in \mathbb{C}^*$ について，$x(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x(n) z^{-n-1}$ とおくと，$x(z) : \mathcal{H} \longrightarrow \hat{\mathcal{H}}$ は holomorphic operator を定義する．実際，$u \in \mathcal{H}^+$，$v \in \mathcal{H}$ について，

$$\langle u | x(z) | v \rangle = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle u | x(n) | v \rangle z^{-n-1}$$

とすると，右辺は有限和である．（notation $x(n)$ は §1 と同じく，$x \otimes t^n \in \hat{\mathfrak{g}}$ を示す）．さらに operator $x(z)$ は分解 $\sum_{s=0}^{\ell} \mathcal{H}_s$ を保つ．

II) <u>Energy Momentum Tensors</u>　$\mathbb{C}^*$ 上の holomorphic vector field　$\ell_n = z^{n+1} \frac{d}{dz}$ を考える．これは，$[\ell_n, \ell_m] = (m-n)\ell_{m+n}$ を満たす．ここで次の問題を考える．即ち，operator $L_n ; \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ で，Heisenberg 方程式，

$$\ell_n x(z) = [L_n, x(z)]$$

を満たすものを求めよ．（このような operator を intertwining operator と呼ぶ）．この operator は，1968年，物理学者，Sugawara によって構成され 1980年，Segal によって再発見された．

<u>Def</u> $\{x(n)\}_{n\in\mathbb{Z}}$ の間の <u>normal product</u> を次のように定義する.

$$:x(n)y(m): = \begin{cases} x(n)\,y(m) & n<m \\ \frac{1}{2}\{x(n)y(m)+y(m)x(n)\} & n=m \\ y(m)\,x(n) & n>m \end{cases}$$

$\mathfrak{g}$ の Casimir operator $\Omega = \frac{1}{2}H^2 + EF + FE$ を用いて operator $T(z)$ を,

$$T(z) = \frac{1}{2(\ell+1)}\left\{\frac{1}{2}:H(z)H(z): + :E(z)F(z): + :F(z)E(z):\right\}$$

で定義する.

$T(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} L(n)\, z^{-n-2}$ とおく. 具体的には, $L(n)$ は,

$$L(n) = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} :H(-j)H(n+j): + \sum_{j\in\mathbb{Z}} :E(-j)F(n+j): + \sum_{j\in\mathbb{Z}} :F(-j)E(n+j):$$

で与えられる. この $L(n)$ が求める operator である. 実際,

<u>Proposition</u>

1) $L(n)$ は operator $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ ($\mathcal{H}^+ \to \mathcal{H}^+$) を定義し decomposition $\sum_{s=0}^{\ell} \mathcal{H}_s$ を

保つ．

2)．$[L(n),\ x(z)] = z^n \left(z\frac{d}{dz} + (n+1) \right) x(z)$

3)* $[L(m),\ L(n)] = (m-n)\, L(m+n) + \frac{1}{12}(m^3 - m)\, \delta_{m+n,0} L'(0)$

$$L'(0) = \frac{3\ell}{(\ell+2)} \times id$$

(*) これは．Virasoro 代数の関係式である．Virasoro 代数は．物理学者．M. A. Virasoro によって．String model の Gauge group として導入されたもので．次のように定義される．

<u>Def</u> Virasoro 代数とは．$\mathbb{C}$ 上の Lie algebra $\mathcal{L} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} e_n \oplus \mathbb{C} e_0'$ で．次の基本関係式で定義されるものである．

$$\begin{cases} [e_m, e_n] = (m-n)\, e_{m+n} + \dfrac{m^3 - m}{12} \delta_{m+n,0}\, e_0' \\ [e_n, e_0'] = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L}' = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathbb{C} \ell_n$ とおくと．$\mathcal{L}$ は．$\mathcal{L}'$ の $H^2(\mathcal{L}'; \mathbb{C})\ (\cong \mathbb{C})$ の cocycle による central extension と理解される．ここで $H^2(\mathcal{L}'; \mathbb{C})$ は Gel'fand - Fuks cohomology を示す．

III). Vertex operator (primary field)

$0 \leq s \leq \ell$ を固定する

<u>Def</u> $A(z): \mathcal{H} \to \hat{\mathcal{H}}$ が Vertex operator (primary field of type s) とは.

0). $A(z)$ は $z \in \mathbb{C}^*$ について多価正則.

1). $[x(n), A(z)] = z^n [x(0), A(z)]$
$$n \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathfrak{g}$$

2) $$[L(n), A(z)] = z^n \left(z\frac{d}{dz} + (n+1)\Delta_s \right) A(z)$$
$$\Delta_s = \frac{s^2+2s}{2(\ell+2)}$$

が満たされるときをいう.

P_s を type s の primary field 全体とする. $x \in \mathfrak{g}$ について $x \cdot A(z) = [x(0), A(z)]$ と定義することにより. P_s は. $\mathfrak{g}$-module の構造をもつ. $\Pi_s : \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ を $\mathcal{H}_s$ への projection とすると. Π_s は. $x(m)$, $L(n)$ の作用と compatible である. $s = s_2$ $s_1, s_3 \in \{0, 1, \cdots, \ell\}$ とし $\mathcal{S} = (s_3, s_2, s_1)$ について $P(\mathcal{S}) = \Pi_{s_3} P_{s_2} \Pi_{s_1}$ とおくと $P(\mathcal{S})$ の構造に関して. 次の基本定理が得られる. ($P_s = \sum_{\mathcal{S}} P(\mathcal{S})$)

Theorem. $\mathcal{S}$ を fix する.

1) $P(\mathcal{S}) \neq \{0\} \iff \begin{cases} s_1 + s_2 + s_3 \equiv 0 \mod 2 \\ s_1 + s_2 \geqq s_3 \\ s_2 + s_3 \geqq s_1 \\ s_3 + s_1 \geqq s_2 \\ s_1 + s_2 + s_3 \leqq 2\ell \end{cases}$

2) 上の条件の下で, $P(\mathcal{S})$ は $\mathfrak{g}$-module として V_{s_2} と同型.

Def $\mathcal{H}_s(d)$ の basis を $\{u_{d,1}, \cdots, u_{d,d_s}\}$ $\mathcal{H}_s^+(d)$ の dual basis を $\{u_d^1, \cdots, u_d^{d_s}\}$ とする. operators $\mathcal{O}_1 : \mathcal{H}_{s_1} \to \hat{\mathcal{H}}_{s_2}$, $\mathcal{O}_2 : \mathcal{H}_{s_2} \to \hat{\mathcal{H}}_{s_3}$ が合成可能であるとは, かってな $v \in \mathcal{H}_{s_3}^+$, $u \in \mathcal{H}_{s_1}$ について

$$\sum_{d \geqq 0} \left| \sum_{j=1}^{d_s} \langle v | \mathcal{O}_2 | u_{dj} \rangle \langle u_d^j | \mathcal{O}_1 | u \rangle \right| < \infty$$

と定義する. このとき, 合成 $\mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_1$ は,

$$\langle v | \mathcal{O}_2 \cdot \mathcal{O}_1 | u \rangle = \sum_{d \geqq 0} \sum_j \langle v | \mathcal{O}_2 | u_{dj} \rangle \langle u_d^j | \mathcal{O}_1 | u \rangle$$

で定める.

さて, operators の合成に関して, 次の命題が成立する.

<u>Proposition</u> $\varphi_1(z_1), \cdots, \varphi_N(z_N)$ を

$x(z)$, $T(z)$, $A(z)$ 型の operators とする.

$\infty > z_N > z_{N-1} > \cdots > z_1 > 0$ の近傍で,

1) $(\varphi_N(z_N), \cdots, \varphi_1(z_1))$ は合成可能.

2). $M_N = \{(z_N, \cdots, z_1) \in (\mathbb{C}^*)^N \; ; \; z_i \neq z_j \text{ if } i \neq j\}$

とおくと. operators の合成 $\varphi_N(z_N) \cdots \varphi_1(z_1)$ は. M_N 上の多価正則 operator に解析接続される.

§3 <u>N点函数のみたす微分方程式系. Braid group の monodromy表現.</u>

$P = \sum_{s=0}^{\ell} P_s$ とおく. $A_N(z_N), \cdots, A_1(z_1) \in P$ について. <u>N点函数</u> $\langle A_N(z_N) \cdots A_1(z_1) \rangle$ を $\langle 0 | A_N(z_N) \cdots A_1(z_1) | 0 \rangle$ で定義する. これは. M_N 上多価正則な函数である. これらのみたす. 微分方程式系に関して. 次の基本的な定理が得られる. (これらは. 1983~84. Landau-Institut における. Knezhnik らの成果である. (Nuclear Phys. 1984 B247. 83–103))

Theorem

1) (射影不変性)

$$\sum_{j=1}^{N} z_j^{m}\left(z_j \partial/\partial z_j + \overbrace{}^{\frac{m+1}{\kappa}}\Omega_j\right)\langle A_N(z_N)\cdots A_1(z_1)\rangle = 0$$

$m=-1,0,1$.

2) (Gauge 不変性). $x \in \mathfrak{g}$ について

$$\sum_{j=1}^{N} \langle A_N(z_N)\cdots(xA_j)(z_j)\cdots A_1(z_1)\rangle = 0$$

3) $i=1,\cdots,N$ について.

$$\left(\frac{\kappa}{2}\frac{\partial}{\partial z_i} + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\frac{\Omega_{ij}}{z_i - z_j}\right)\langle A_N(z_N)\cdots A_1(z_1)\rangle = 0$$

ここで $\kappa = 2(l+2)$.

Ω_j, Ω_{ij} は次のように定義される.

Ω を $\mathfrak{g}$ の Casimir operator Π_j を $\mathfrak{g}$ の ($P\otimes\cdots\otimes P$ の) j-th factor への作用として.

$$\Omega_j = \Pi_j(\Omega).$$

$$\Omega_{ij} = (\Pi_i\otimes\Pi_j)(\Delta(\Omega) - \Omega\otimes 1 - 1\otimes\Omega)$$

ここで Δ は diagonal $\Delta: U(\mathfrak{g})\to U(\mathfrak{g})\otimes U(\mathfrak{g})$ ($U(\mathfrak{g})$ は $\mathfrak{g}$ の universal enveloping algebra で自然に Hopf algebra の構造をもつ). いいかえれば. $\Omega_{ij} = \frac{1}{2}\Pi_i(H)\Pi_j(H) + \Pi_i(E)\Pi_j(F) + \Pi_i(F)\Pi_j(E)$, $1\le i<j\le N$.

方程式 3) を書き換えれば、N点函数は、次の全微分方程式系を満たすことがわかる。

3)′ $$\frac{\kappa}{2} d\Phi - \sum_{1 \le i < j \le N} d\log(z_i - z_j)\,\Omega_{ij}\,\Phi = 0.$$

この方程式が、完全積分可能であることが、次の命題より従う。

<u>Proposition</u> Ω_{ij}, $1 \le i < j \le N$ は、<u>infinitesimal pure braid relations</u> と呼ばれる、次の関係式を満たす。

1) i, j, k, l がすべて異なるとき、

$$[\,\Omega_{ij},\ \Omega_{kl}\,] = 0$$

2) i, j, k がすべて異なるとき、

$$[\,\Omega_{ik},\ \Omega_{ij} + \Omega_{jk}\,] = 0.$$

<u>Remark</u> $N = 3$ として、

$X_{ij}(u_i - u_j) = \dfrac{1}{u_i - u_j}\Omega_{ij}$ とおくと、2) は、

$$[X_{12}(u_1-u_2),\ X_{13}(u_1-u_3)] + [X_{12}(u_1-u_2),\ X_{23}(u_2-u_3)] + [X_{13}(u_1-u_3),\ X_{23}(u_2-u_3)] = 0$$

とかきかえられる。これは <u>Classical Yang-Baxter equation</u> である。

<u>Remark</u>（記録者による）. Symbol Ω_{ij}, $1 \le i < j \le N$ で $\mathbb{C}$ 上生成され基本関係式 1), 2) で定義される Lie 環を、<u>pure braid group</u> P_N に付随した <u>holonomy Lie algebra</u> と呼び H_N とかく。H_N と P_N の関係は、次のように記述される。$\mathbb{C}[P_N]$ を P_N の group ring とし、その augmentation ideal の巾に関する completion を $\mathbb{C}[P_N]^\wedge$、また universal enveloping algebra $U(H_N)$ の自然な filtration に関する completion を $U(H_N)^\wedge$ とかくと、complete Hopf algebra としての同型、$\mathbb{C}[P_N]^\wedge \cong U(H_N)^\wedge$ が成立する。また

$\omega = \sum_{1 \le i < j \le N} d\log(z_i - z_j)\,\Omega_{ij}$ とおくと、$\theta : P_N \longrightarrow U(H_N)^\wedge$ が、Chen の反復積分を用い、

$$(\gamma \in P_N) \quad \theta(\gamma) = I + \int_\gamma \omega + \cdots + \int_\gamma \overbrace{\omega \cdots \omega}^{i} + \cdots$$

で与えられる（実はこれは injective）。Ω_{ij} にある matrix を代入して得られる方程式系 3)' の monodromy が上の θ より求まり、これは P_N の線型表現を与える。

我々の situation では、方程式系 3)′ の monodromy は、さらに braid group B_N の monodromy 表現に lift する。この表現の構造を明らかにするために、次の問題が考えられる。

<u>Prob.</u> Operators $\{A_j(z_j)\}$ の積構造を決定せよ。より具体的には、operator $B(z_2)A(z_1)$ を braid group の元 σ に対応して解析接続して得られる operator

$$\sum_{C,D} C_{DC}^{BA}\, D(z_2)\, C(z_1)$$

を決定せよ。

この問題は、$N=4$ のとき、射影不変性を用いて方程式 3) を、$\mathbb{C}P^1$ の $\{0, 1, \infty\}$ で確定特異点をもつ方程式

$$\left(\frac{d}{dz} - \frac{\Gamma_{12}}{z} - \frac{\Gamma_{23}}{1-z}\right)\Phi = 0$$

に書き直し、その接続行列を求める問題に帰着される。

R E F E R E N C E S

Belavin, A.A., Polyakov, A.M. and Zamolodchikov, A.B. ; Infinite conformal symmetry of critical fluctuations in two dimensions, J. of Stat. Phys., 34-5/6 (1984), 763-774.

Deligne, P., Equations différentielles à points singuliers réguliers, Lect. Notes in Math., 163, Springer 1970.

Kac, V.G., Infinite dimensional Lie algebras, Birkhäuser, 1984.

Tsuchiya, A. and Kanie, Y., Fock space representations of the Virasoro algebra, Publ. of RIMS, 22 (1986), 259-327.

——————————, Unitary representations of the Virasoro algebras, preprint.

同じ次元関数をもつホモトピー表現

阪大理 長崎生光

§0. 序

有限群Gのホモトピー表現(homotopy representation)はtom Dieck-Petrie [4] により導入され研究されはじめた. その研究は有限群の球面上の作用の研究の一分野と考えられる. Gのホモトピー表現とは次のような有限次元G-CW-複体のことである.

<u>定義.</u> Gは有限群でXは有限次元G-CW-複体とする. XがGのホモトピー表現とは任意の部分群Hに対して, Hの固定点集合 X^H は $\dim X^H$ と同じ次元の球面とホモトピー同値, または $X^H=\phi$ のときをいう.

ホモトピー表現の例をあげる.

例1. G表現Vの球面$S(V)$.
(G-CW-複体の構造の存在はIllmanによる.)

例2. 自由ホモトピー表現.
すなわち,ホモトピー表現でGが自由に作用しているもの.
(自由ホモトピー表現はSwan等によって研究された[18])

これらの例からわかるようにホモトピー表現は表現の球面$S(V)$と自由ホモトピー表現を一般化した概念である.

ホモトピー表現の研究の一つの目標はそのG-ホモトピー型を分類することにある.

表現の球面に関する同様の問題は以前から研究されている.(たとえば[2],[9].) また自由ホモトピー表現のG-ホモトピー型の分類もSwanなどにより研究され後のホモトピー球面(多様体)上の有限群の自由作用の研究へと発展していった。(たとえば[12].) 同様に,将来ホモトピー表現をG-多様体を考える時,その基礎としてG-CW-複体としてのホモトピー表現を研究することが有益であろうと考えられる。

本講演ではホモトピー表現の分類問題を中心にtom Dieck-

Petrie, Laitinen, Nagasaki などの結果を紹介したいと思う.

§1 次元関数と写像度関数.

この節では, 2つのホモトピー表現 X, Y の G-ホモトピー型をいかにして区別するかということを問題にする.

球面のホモトピー型はその次元のみで決まることからホモトピー表現 X の次元, さらに各固定点集合 X^H の次元を考えることが自然である. このような視点から次元関数(dimension function)が定義される. $S(G)$ を G の部分群全体の集合とし, X を G のホモトピー表現とする.

<u>定義</u> (次元関数 $\mathrm{Dim}\,X$)

$$\begin{aligned} \mathrm{Dim}\,X : S(G) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ H &\longmapsto \dim X^H + 1 \end{aligned}$$

(ただし $X^H = \phi$ のときは $\dim X^H = -1$ とおく.)

この定義で1を足しているのは2つのホモトピー表現の結 $X * Y$ に対して $\mathrm{Dim}\,X*Y = \mathrm{Dim}\,X + \mathrm{Dim}\,Y$ が成立するという利点があるからである.

次の事が容易にわかる.

補題1. ホモトピー表現 X, Y が G-ホモトピー同値ならば,
$\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y$.

この補題により同じ次元関数をもつホモトピー表現 X, Y の G-ホモトピー型をいかにして区別するかということが問題となる. X, Y が自由ホモトピー表現のときには X から Y への G-写像の写像度を調べることによって区別できることが知られている. そこで一般のホモトピー表現のときも X から Y への G-写像の写像度を調べることが有効であろうと考えられる. この観点から tom Dieck-Petrie, Laitinen 達は写像度関数 (degree function) を定義した。$\phi(G)$ を G の部分群 H の共役類 (H) の全体の集合, $f: X \to Y$ を G-写像 ($\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y$) とする.

定義 (写像度関数 $d(f)$).

$$\begin{aligned} d(f) : \phi(G) &\longrightarrow \mathbb{Z} \\ (H) &\longmapsto \deg f^H \end{aligned}$$

ただし X と Y に Laitinen の意味で向きを与える. また

$X^H = Y^H = \phi$ のときは $\deg f^H = 1$ とおく.

<u>補題</u> 2. 写像度関数 $d(H)$ は $\mathrm{Dim}\,X$ に関する非安定条件をみたす.

一般に関数 $d : \phi(G) \to \mathbb{Z}$ が次の(1)~(3)をみたす時, d は $\mathrm{Dim}\,X$ ($= n$ とおく) に関する非安定条件をみたすという.

(非安定条件 unstability condition)

(1) $n(H) = 0 \Rightarrow d(H) = 1$

(2) $n(H) = 1 \Rightarrow d(H) = 1, 0, -1$

(3) $d(H) = d(\overline{H})$, $\forall (H) \in \phi(G)$.

ここで $\overline{H}$ は集合 $\{K \in S(G) \mid K \geqq H,\ n(H) = n(K)\}$ の中の最大元. (最大元が存在することは Laitinen による. また包含写像 $X^{\overline{H}} \subset X^H$ がホモトピー同値写像であることも知られている.)

Laitinen はホモトピー表現 X から Y ($\mathrm{Dim}\,X = \mathrm{Dim}\,Y$) への G-写像の写像度関数を研究した. そしてその写像度関数全体の集合 $C_n(X, Y)$ ($n = \mathrm{Dim}\,X = \mathrm{Dim}\,Y$) について次の事をしめした。(X, Y には Laitinen の意味の向きを一つ

定めておく.)

命題3.

$C_n(X, Y) = \{ d : \phi(G) \to \mathbb{Z} \mid d \cdot d(f)$ の値は Burnside環の関係式をみたし, d は非安定条件をみたす$\}$

ここで f は Y から X への G-写像で 任意の $(H) \in \phi(G)$ に対して $d(f)(H)$ は $|G|$ と素となっているもの.(このような f はいつでも存在する.)

定義 $(d(H), |G|) = 1 \quad {}^{\forall}(H) \in \phi(G)$ をみたす関数 d を可逆関数(invertible function)と呼ぶ 命題3の $d(f)$ は可逆写像度関数とよばれる.

Laitinen は可逆写像度関数に注目して非安定Picard群 $Pic_n(G)$ $(n = \mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y)$ を定義し,その中に可逆写像度関数で代表される類として,不変量 $D_n(X, Y)$ を定義した。($D_n(X, Y)$ は向きや f のとり方にはよらない.) そして次を示した。

定理4 X, Y をホモトピー表現, $\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y\ (= n)$

とする．

X と Y が G-ホモトピー同値 $\Leftrightarrow$ $D_n(X, Y) = 1 \in Pic_n(G)$.

<u>系5</u>．ホモトピー表現 X, Y が G-ホモトピー同値であるための必要十分条件は次をみたすことである．

(1) $\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y$ （$= n$ とおく）

(2) $D_n(X, Y) = 1 \in Pic_n(G)$.

すなわち2つのホモトピー表現は次元関数と写像度関数を見ることによってその G-ホモトピー型が区別される．

この節の残りで Laitinen の意味の向き，$Pic_n(G)$, $D_n(X,Y)$ 等の定義をまとめておく．

<u>本質的固定群</u>（essential isotropy group）

$H = \bar{H}$, $X^H \neq \phi$ のとき H を X の本質的固定群といい，その全体を $\mathrm{EssIso}(X)$ で表す．

<u>Laitinen の意味の向き</u>

$\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y = n$ とする．$\phi_n(G)$ を $\mathrm{EssIso}(X)$ の元の G-共役類の代表の集合とする．任意の $H \in \phi_n(G)$ に対して $\tilde{H}_{n(H)-1}(X^H; \mathbb{Z})$ と $\tilde{H}_{n(H)-1}(Y^H; \mathbb{Z})$ の生成元を1つ定める．（X と Y に Laitinen の意味の向きを与えるという．）

こうして $H\in\phi_m(G)$ に対して $\deg f^H$ が定まる。($f: X\to Y$ G-写像) $K\notin\phi_m(G)$ に対しては $X^K=\phi$ ならば $Y^K=\phi$ で $\deg f^K=1$. $X^K\neq\phi$ ならば $\bar{K}\in \mathrm{EssIso}(X)$ となり、ある $g\in G$ によって $g\bar{K}g^{-1}=H\in\phi_m(G)$. 次の可換な図式に注意する。

$$\begin{array}{ccc}
X^K & \xrightarrow{f^K} & Y^K \\
\text{hom.eq.}\ \cup & & \cup\ \text{hom.eq.} \\
X^{\bar{K}} & \xrightarrow[f^{\bar{K}}]{} & Y^{\bar{K}} \\
\text{homeo.}\ g\downarrow & & \downarrow g\ \text{homeo.} \\
X^H & \xrightarrow[f^H]{} & Y^H
\end{array}$$

そこで $\deg f^K=\deg f^H$ と定義する。このようにして $d(f):\phi(G)\to\mathbb{Z}$ が定まる。

<u>$\mathrm{Pic}_m(G)$ と $D_m(X,Y)$.</u>

$n=\mathrm{Dim}\,X=\mathrm{Dim}\,Y$, $C=\{d:\phi(G)\to\mathbb{Z},$ 関数$\}$ とする。
また $A=\{d\in C \mid d(H)$ は Burnside 環の関係式 $(*)_H$ をみたす $\forall(H)\}$ とおく。

$$(*)_H:\ d(H)\equiv -\sum_{\substack{K/H\le WH\\ 1\neq K/H:\text{cyclic}}}\varphi(|K/H|)\,d(K) \mod |WH|$$

$$\equiv -\sum_{\substack{(K)\\ 1\neq K/H:\text{cyclic}}} n_{H,K}\,d(K) \mod |WH|$$

φ は Euler 関数，$WH = NH/H$，NH は H の正規化群

$C_n = \{ d \in C \mid d$ は非安定条件をみたす$\}$

$A_n = \{ d \in A \mid$ 〃 $\}$ とおく．

C は自然に環で A は部分環となる．そして $|G|C$ はそれぞれのイデアルであることから有限環 $\overline{C} = C/|G|C$，$\overline{A} = A/|G|C$ が定義できる．$\overline{C}^*$，$\overline{A}^*$ をそれぞれの単数群（unit group）として $\overline{C}_n^*$，$\overline{A}_n^*$，C_n^* を次で定義する．

$\overline{C}_n^* = \{ [d] \in \overline{C}^* \mid d$ は非安定条件をみたす．$\}$

$\overline{A}_n^* = \{ [d] \in \overline{A}^* \mid$ 〃 $\}$

$C_n^* = \{ d \in C^* \mid$ 〃 $\}$

<u>定義</u>　$Pic_n(G) = \overline{C}_n^* / \overline{A}_n^* C_n^*$．

$f : Y \to X$ $(\mathrm{Dim}\, X = \mathrm{Dim}\, Y = n)$ を $d(f)$ が可逆となる G-写像とする．$d(f)$ は非安定条件をみたすことに注意して，

<u>定義</u>　$D_n(X, Y) = [d(f)] \in Pic_n(G)$．

（この定義は向きや f のとり方には依存しないことが知られている [10]．）

§2 次元関数の集合 Dim(G).

Dim(G) を G のホモトピー表現の次元関数全体の集合とする. 次の問題がある.

問題. Dim(G) を決定せよ.

この問題は完全に解かれたわけではないが G が p-群あるいはもっと一般に巾零群 (p-群の直積となっているような群) のときには tom Dieck の研究がある. まず G が p-群のとき 次の事が知られている.

定理 1 ([1], [5]). p-群のホモトピー表現 X の次元関数はある表現の球面 S(V) の次元関数と等しい.

これは p-群のホモトピー表現の次元関数は表現論から決定できることを意味している. さらに巾零群のときにも同様な結果がある.

定理 2 ([1]). 巾零群 G のホモトピー表現 X の次元関数はある 2 つの表現の球面 S(V), S(W) の次元関数の

差として表わせる.（$\mathrm{Dim}\,X = \mathrm{Dim}\,S(V) - \mathrm{Dim}\,S(W)$）.

この場合逆に,ある2つの表現の球面の次元関数の差がいつホモトピー表現の次元関数として実現できるかということが問題になるが tom Dieck はそれにも答えている.

<u>定理</u>3（[1]）. Gは巾零群とする.

$n = \mathrm{Dim}\,S(V) - \mathrm{Dim}\,S(W)$ とおく. n が次の条件をみたすとき n はGのホモトピー表現の次元関数として実現できる.

(1) $n(H) \geqq 0 \quad \forall H \in S(G)$.

(2) $n(H) = n(gHg^{-1}) \quad \forall H \in S(G),\ \forall g \in G$.

(3) $H \leqq K \Rightarrow n(H) \geqq n(K)$.

(4) $\mathrm{Iso}(n) := \{H \in S(G) \mid n(H) > 0;\ H \overset{\forall}{<} K \Rightarrow n(H) > n(K)\}$ とおく. このとき

$H, K \in \mathrm{Iso}(n) \Rightarrow H \cap K \in \mathrm{Iso}(n)$.

(5) $n(H) \neq 1, 2, 3 \quad \forall H \in S(G)$.

上の定理の(1),(2),(3)は一般に次元関数となるための

必要条件である．また(4)も G が巾零のときは必要条件であることが知られている（[10]）．ただし(5)は定理を証明する上での技術的な条件である．

このように p-群あるいは巾零群のときは表現論から $\mathrm{Dim}(G)$ が決定されるが，一般にはこのようなことは期待できない．すなわち次の結果がある．

定理 4（[4]）．G は巾零でないとする．あるホモトピー表現 X でその次元関数はどんな2つの表現の球面の次元関数の差としても表わせないものがある．

このような事があるので巾零でない群については $\mathrm{Dim}(G)$ を決定することは難しい．

例．$G = \mathbb{Z}/p$（p：奇素数）のとき，

$$\mathrm{Dim}(G) = \{\alpha n_0 + \beta n_1 \mid \alpha, \beta \text{ は非負整数}\}$$

n_0, n_1 は次のような関数．

	1	G
n_0	1	1
n_1	2	0

§3 同じ次元関数をもつホモトピー表現

$n\ (\in \mathrm{Dim}(G))$ を次元関数にもつホモトピー表現たちは不変量 $D_n(X, Y)$ によってその G-ホモトピー型が区別できるが，この節ではその G-ホモトピー型がいくつあるかということについて述べたい。

$\mathrm{Num}(G, n)$ で n を次元関数としてもつホモトピー表現の G-ホモトピー型の個数を表すことにする.

<u>補題</u>1. X, Y, Z はホモトピー表現で $\mathrm{Dim}\,X = \mathrm{Dim}\,Y = \mathrm{Dim}\,Z = n$ とする.

(1) $D_n(X, Z) = D_n(X, Y)\, D_n(Y, Z)$

(2) $D_n(X, Y)^{-1} = D_n(Y, X)$.

この補題と §1の定理4より次の事がわかる.

<u>命題</u>2. $\mathrm{Num}(G, n) \leqq |\,\mathrm{Pic}_n(G)| < \infty$.

我々は $\mathrm{Num}(G, n) = |\,\mathrm{Pic}_n(G)|$ を予想する.
これを示すには次の事を言えばよい.

ホモトピー表現 X を固定する. $\mathrm{Dim}\,X=n$ とする.

(Q): 任意の $x\in \mathrm{Pic}_n(G)$ に対して あるホモトピー表現 Y があって $\mathrm{Dim}\,Y=n$, $D_n(X,Y)=x$.

これはまた次の事を言えばよい.

(Q'): 任意の可逆で非安定条件をみたす関数 d に対して あるホモトピー表現 Y と G-写像 $f:Y\to X$ があって $d(f)=d$ となる.

(Q') の Y と f を構成する時に次の技術的な仮定を要した.

<u>仮定</u> I. $H,K\in \mathrm{EssIso}(X) \Rightarrow H\cap K\in \mathrm{EssIso}(X)$.

$S_0=\{H\in S(G)\mid n(H)\leqq 3\}$ とおく.

<u>仮定</u> II. 任意の可逆で非安定条件をみたす d に対して, ある G-CW-複体 $Y(S_0)$ と G-写像 $f_{S_0}:Y(S_0)\to X$ があって,

(a) $\mathrm{Iso}(Y(S_0))=S_0\cap \mathrm{EssIso}(X)$

(b) $\dim Y(S)^K=\dim X^K$, $Y(S)^K$ は $S^{n(K)-1}$ とホモトピー同値 $\forall K\in S_0$

(c) $\deg f_{S_0}^{K} = d(K) \quad {}^{\forall} K \in S_0$.

<u>定理</u> 3 ([15]). 仮定 I, II の下に (Q') は正しい. したがって $Num(G, n) = |Pic_n(G)|$.

仮定 I は G が巾零のとき正しい事が知られている ([10]). また仮定 II は G が奇数位数のとき正しいことが証明できる. したがって.

<u>系</u> 4. G を奇数位数の巾零群とする. このとき,

$$Num^{\circ}(G, n) = |Pic_n(G)|.$$

次に $Pic_n(G)$ の位数を計算することが問題となる. 任意の有限群について $Pic_n(G)$ の位数は次のように表わせる.

<u>定理</u> 5 ([15]).

$$|Pic_n(G)| = 2^s |A_n^*| |C_n^*|^{-1} \prod_{\substack{(H) \in F \\ n(H) \geq 2}} \varphi(|WH|)$$

$$= 2^{s-f}\,|A_{n'}^{*}| \prod_{\substack{(H)\in F \\ n(H)\geq 2}} \varphi(|WH|).$$

ここで $s = |\{(H)\in\phi(G) \mid n(H)=1,\ |WH|\geq 3\}|$

$F = \{(H)\in\phi(G) \mid H=\overline{H}\}$, $f=|F|$,

$n' = n+2$, $n\in \mathrm{Dim}(G)$, φは Euler 関数.

系6. Gを奇数位数の群とすると.

$$|\mathrm{Pic}_n(G)| = 2^{1-f} \prod_{\substack{(H)\in F \\ n(H)\geq 2}} \varphi(|WH|).$$

例 $G = \mathbb{Z}/p$ (p:奇素数)

$\mathrm{Dim}(G) = \{\alpha n_0 + \beta n_1 \mid \alpha, \beta$ 非負整数$\}$

(§2の例).

$n = \alpha n_0 + \beta n_1$ とする.

Case	$\mathrm{Num}(G, n)$
$\beta = 0$	1
$\beta > 0$	$\frac{p-1}{2}$

§4 その他の話題.

表現の球面について次の問題がある.

問題　$S(V \oplus W)$ と $S(U \oplus W)$ が G-ホモトピー同値なら $S(V)$ と $S(U)$ は G-ホモトピー同値か?

G が p-群, アーベル群, 奇数位数の群のときは肯定的に解決されている. ([2], [8], [19]). いまのところ反例は知られていないようである. ホモトピー表現の時にも同様の問題がある.

問題　$X * Z$ と $Y * Z$ が G-ホモトピー同値なら X と Y は G-ホモトピー同値か?

Laitinen によって, G が巾零でかつその 2-Sylow 部分群がアーベル群のときは肯定的に解決された. 一方彼は反例もみつけている [10] (ただしこの反例は表現の球面ではない.)

ホモトピー表現が特に有限 G-CW-複体であるとき, 有限ホモトピー表現という. $\mathrm{Dim}_f(G)$ を有限

ホモトピー表現の次元関数全体の集合とする。また $n \in \mathrm{Dim}_f(G)$ に対して $\mathrm{Num}_f(G, n)$ を n を次元関数にもつ有限ホモトピー表現の G-ホモトピー型の個数とする。

問題　$\mathrm{Dim}_f(G)$, $\mathrm{Num}_f(G, n)$ を調べよ。

"有限"という条件を付け加えると有限性の条件を新たに考え入れなければならない。そのため難しさが増す。G が p-群あるいは巡回群なら $\mathrm{Dim}_f(G) = \mathrm{Dim}(G)$ であることが知られている。また一般には $\mathrm{Num}_f(G, n)$ は $\mathrm{Pic}_n(G)$ の位数より小さい。

ホモトピー表現の G-ホモトピー型が smooth 閉 G-多様体で実現(これを smooth ホモトピー表現という)できるためには有限ホモトピー表現であることが必要条件になる。

smooth ホモトピー表現 Σ が $\Sigma^G \neq \phi$ のとき、Σ はある表現の球面と G-ホモトピー同値であることが知られている。一方 $\Sigma^G = \phi$ のときは表現の球面と G-ホモトピー同値にならない例がしられている。([12], [16]) これらの例は G が自由に作用する場合で昔から研究されてきた。一般の smooth ホモトピー表現の場合は今後の研究が

期待される。これに関連した研究に [6], [11], [17] などがある。

参考文献

[1] T. tom Dieck, Homotopiedarstellungen endlich Gruppen: Dimensionsfunctionen, Invent. Math. 67 (1982), 231-252.

[2] ———, Homotopy equivalent group representations. J. Reine Angew. Math. 298 (1978), 182-195.

[3] ———, The Picard group of the Burnside ring, J. Reine Angew. Math. 361 (1985), 174-200.

[4] ——— and T. Petrie, Homotopy representations for finite groups, I.H.E.S. 56 (1982), 129-169.

[5] R. M. Dotzel and G. C. Hamrick, p-Group actions on homology spheres, Invent. Math. 62 (1981), 437-442.

[6] S. Illman, Recognition of linear actions on spheres, Trans. of A.M.S. 274 (1982), 445-478.

[7] ———, Smooth equivalent triangulations of G-manifolds for G a finite group, Math. Ann. 233 (1978), 199-220.

[8] K. Kawakubo, Cancellation law for G-homotopy

equivalent representations, Japan. J. Math. 6 (1980), 259-266.

[9] ———, Equivalent homotopy equivalence of group representations, J. Math. Soc. Japan 32 (1980), 105-118.

[10] E. Laitinen, Unstable homotopy theory of homotopy representations, preprint.

[11] I. Madsen and M. Raussen, Smooth and locally linear G-homotopy representations. Lecture Notes in Math. 1172 (1984), 130-156.

[12] ———, C. Thomas and C.T.C. Wall, The topological space form problem II, Topology 15 (1976), 375-382.

[13] I. Nagasaki, Homotopy representation groups and Swan subgroups, to appear.

[14] ———, Homotopy representations and spheres of representations, Osaka J. Math. 22 (1985), 595-905.

[15] ———, On homotopy representations with the same dimension function, preprint.

[16] T. Petrie, Free metacyclic group actions

on homotopy spheres, Ann. of Math. 94 (1971), 108-124.

[17] M. Rothenberg and J. Sondow, Nonlinear smooth representations of compact Lie groups, Pacific J. Math. 84 (1979), 427-444.

[18] R. G. Swan, Periodic resolutions for finite groups, Ann. of Math. 72 (1960), 267-291.

[19] P. Traczyk, Cancellation law for homotopy equivalent representations of groups of odd order, Manuscripta Math. 40 (1982), 135-154.

無限接触している微分同相写像の共役性について.

東工大理　河部裕子

§1. 序.

Gを、$\mathbb{R}$の原点を固定する向きを保つ微分同相写像の原点での芽(germ)よりなる群とする。又、G_∞を、$D^r(f-I)(0)=0$ (任意の整数$r\geq 0$)を満たす元f全体からなるGの正規部分群とする。(ここで、Iは、恒等写像を表わす。) さらに、G_∞^cをG_∞の部分半群(monoid)で、$f(x)<x$ $(x>0)$を満足する元f全体よりなるものとする.

この時、次の問題を考える。

問題　Gの2元fとgは、いつ共役か?

このことに関しては、すでに常のことか、

知られている。

定理1.(Sternberg-Takens [8], [6]) f と g を、$G-G_\infty$ の元とする。この時、元 h が、G_∞ の中に存在して、$g=h^{-1}\circ f\circ h$ となる必要十分条件は、$D^r(f-g)(0)=0$ (任意の整数 $r\geqq 0$) が成り立つことである。

G_∞ の元についての、Sternberg-Takens の定理に対応するものとして、次の定理を示すことが本稿の主目的である。

定理2.([3]) G^c_∞ の元 f が、$\alpha_*(f)=(0, \min.)$ かつ $r(f)=+\infty$ とする。この時 G^c_∞ の元 g が、f と G_∞ の中で共役である必要十分条件は、関数 $(g-f)(I-f)^{-1}$ が、$\mathbb{R}$上の原点で平坦な C^∞級関数となることである。

この中の α_*, r の定義は、次の§2で与える。

(注)　f が，$G - G_\infty$ の元の時，$(g-f)(I-f)^{-1}$ が，平坦な C^∞ 級関数となることと，$D^r(g-f)(0)=0$（任意の $r \geq 0$）は，同値である。このことより定理1.2は，定理1.1の拡張と考えられる。

以後，芽 f と，その代表元としての $\mathbb{R}$ の微分同相写像とを，同一視する．（すべての議論は，代表元のとり方に，よらない。）

§2. 不変量 α, α_* と r.

G^c_∞ の元 f に対し，次の記号を導入する．

$$\Delta^f(x) = x - f(x) ,$$

又．整数 $r \geq 0$ に対し，

$$\Delta^f_r(x) = \max_{0 \leq y \leq x} |D^r \Delta^f(y)|$$

とする．ここで，数 $\alpha(f)$ を

$$\alpha(f) = \inf \left\{ \alpha \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{任意の } x \geq 0 \text{ に対し，} \\ \quad \Delta^f_0(x) \leq K \{\Delta^f(x)\}^{1-\alpha} \end{array} \right\}$$

で定義する．（ただし．K は，f と α にのみよる定数。）

又. もし $\alpha(f)$ が最小値となる時.

$$\alpha_*(f) = (\alpha(f), \min.),$$

それ以外の時,

$$\alpha_*(f) = (\alpha(f), \inf.)$$

と記す.

一方, 数 $r(f)$ (ここでは. $r(f)=+\infty$ も許す) は.

$$r(f) = \sup\left\{ r \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{整数 } N(r) \geqq 0 \text{ で次を} \\ \text{満足するものが存在する。} \\ \Delta_r^f(x) \leqq K_r \cdot x^{-N(r)} \Delta_0^f(x) \end{array} \right\}$$

で定義する. ここで. 定数 K_r は, f と r にのみよる.

これらの α, α_* と r は. 次の性質をもつ.

性質(1) (共役不変) $\alpha(h^{-1}fh) = \alpha(f)$.

$\alpha_*(h^{-1}fh) = \alpha_*(f)$ かつ $r(h^{-1}fh) = r(f)$.

(2) $(g-f)(I-f)^{-1}$ が平坦な微分可能関数の時, $\alpha(g) = \alpha(f)$, $\alpha_*(g) = \alpha_*(f)$ かつ $r(g) = r(f)$.

(3) 任意の a ($\in [0,1]$) に対し, G_∞^c の元 f で, $\alpha(f) = a$ となるものが存在する.

(4) G_∞^c の部分集合 A_α, B_r, $B_{\alpha,r}^{\min}$ を次のものとする.

$$A_\alpha = \{ f \mid \alpha(f) \leqq \alpha \}$$

$$B_r = \{ f \mid r(f) \geqq r \}$$

$$B^{min}_{\alpha, r} = \left\{ f \;\middle|\; \begin{array}{l} \alpha_*(f) = (\alpha(f), min), \ \alpha(f) \leqq \alpha \text{ か} \\ r(f) \geqq r \end{array} \right.$$

この時，これらはすべて monoid となる．

§3. 局所定理．

まず，G^c_∞ の元 f が $\alpha(f) \neq 1$ を満たす時 f との共役性に関して次の定理が成立する．

定理3（[2]）G^c_∞ の元 f が，$\alpha(f) \neq 1$ とする．今，g を G^c_∞ の元で，任意の整数 $n \geqq 0$ に対し，

$$(*)_n \quad |g(x) - f(x)| \leqq K_n \{\Delta^f(x)\}^n \qquad (x \geqq 0)$$

を満足するものとする．（K_n は，n, f, g により定まる定数）この時，$\mathbb{R}$ の C^{n-3} 級同相写像 h で，次をみたすものが存在する．

(1) $(0, +\infty)$ 上，C^∞ 級となっている．

(2) $D^r(h - I)(0) = 0 \qquad (0 \leqq r \leqq n-3)$

(3) $g = h^{-1} f h$．

この局所定理を用いて、さらに一般化された次の局所定理が成立する。

定理4（[3]）G_∞^C の元 f が $d(f)=0$ とする。今、G_∞^C の元 g に対し、ある正数 ε が存在し、次をみたすとする：

$(*)_{1+\varepsilon}$ $\quad |g(x)-f(x)| \leqq K\cdot\{\Delta^f(x)\}^{1+\varepsilon} \quad (x\geqq 0)$

（ただし、K は、ε, f, g にのみよる。）この時、G_∞ の元 h が存在し、$g=h^{-1}fh$ となる。

この定理4の証明は、次の2つの命題を示すことにより、示される。

命題5. 定理4で与えられた f, g に対し、任意の整数 $n\geqq 0$ に対応して、G_∞ の元 h_n で、次を満たすものが存在する。

$(*)_n$ $\quad |h_n^{-1}\circ g\circ h_n(x)-f(x)| \leqq K_n\{\Delta^f(x)\}^n \quad (x\geqq 0)$

ここで、K_n は、n, f, g, h_n による定数。

命題6. G^c_∞ の元 f が, $\alpha(f)=0$ とする. 今, G^c_∞ の元 g に対し, 各整数 $n\geq 0$ について, G_∞ の元 h_n で 命題5の中の $(*)_n$ を満足するものが存在するとする. この時, G_∞ の元 h で $g=h^{-1}fh$ となるものが存在する.

§4. 主定理の証明.

この§4では, G^c_∞ の元 f は $\alpha_*(f)=(0,\mathrm{min.})$ かつ $r(f)=+\infty$ を満足するものとする. この時, 定理2の証明は, 本質的な部分は, $(g-f)(I-f)^{-1}$ が平坦な C^∞ 級関数である時, どのようにして h の存在を示すかということである.

一般に, g が f と共役であることを示すには, 次の関数方程式の解 φ の存在を, C^∞ 級でかつ平坦な関数の中で示せばよい.

$$g=(I+\varphi)^{-1}\circ f\circ(I+\varphi)$$

これは, 次と同値

$$(*)\qquad f\circ(I+\varphi)-(I+\varphi)\circ g=0.$$

ここで、この方程式の解法についての Belickii [1] の方法がある。

まず、

$$T(\varphi) = \varphi \cdot D'g - \varphi \circ g$$

$$H(\varphi) = f \circ (I + \varphi) - f - \varphi \cdot D'g$$

とおくと、方程式(※)は、次と同値.

(Eq.) $$T(\varphi) + H(\varphi) = -(f - g).$$

これに関して、次の2つを示す.

(I) Tの右逆 L (すなわち $T \circ L(\varphi) = \varphi$)の存在を示す。

(II) $B(\varphi) = -L(f - g + H(\varphi))$ とおき、Bの固定点 φ_0 の存在を示す.

この時、この φ_0 は、(Eq.) の解となる.

今、fが、G_∞ の元であるために、Lの存在を示すことに、困難がある。このために、方程式 (Eq.) を、少し変形して次のものを考える.

まず、Tのかわりに、$\tilde{T}$ を、

$$\tilde{T}(\varphi) = D'\varphi \cdot \Delta g - \varphi \cdot D'\Delta g$$

で定義し、

$(\tilde{E}_g)$　　$\hat{T}(\varphi)+H(\varphi)=-(f-g)$

と、考える。

　この方程式$(\hat{E}_g)$に関して、次の補題が成立する。

補題6. $(\hat{E}_g)$の解φに対し、$h=I+\varphi$とおくと、次が成立：

$$|g(x)-h^{-1}f\,h(x)|\leqq K\{\Delta^g(x)\}^2\quad(x\geqq 0)$$

(ここで、Kは、f,g,hにより決まる。)

　この補題6と、定理4より、gは、fと共役になるので、我々は、方程式(E_g)のかわりに、方程式$(\hat{E}_g)$の解の存在を示せばよい。又、方針は、Belickii にならい、(I)と(II)を行なう。

(I) まず、平坦なC^∞級関数φに対し、$\hat{T}(\varphi)\cdot\{\Delta^g\}^{-1}$が、やはり、平坦な$C^\infty$級関数となることに注意する。これより、右逆$\hat{L}$は、$\psi\cdot\{\Delta^g\}^{-1}$が、平坦な$C^\infty$級関数と

なる ψ に対し、次の式で与える。

$$\tilde{L}(\psi)(x) = \Delta^{g}(x)\cdot\int_{1}^{x}\frac{\psi(y)}{\{\Delta^{g}(y)\}^{2}}\,dy .$$

(II) 今、$\mathcal{C}$ を、平担な C^{∞} 級関数の部分集合で、次で与えられるものとする。

$$\mathcal{C} = \left\{ \varphi \;\middle|\; \begin{array}{l} \varphi(x) \leq 0 \quad (x>0) \quad \text{、かつ} \\ |\varphi(x)| \leq K\cdot(g-f)(x)\{\Delta^{g}(x)\}^{-1} \quad (x>0) \\ \qquad\qquad \text{ただし、} K \text{は、} f, g, \varphi \text{ できまる。} \end{array} \right\}$$

この時、$\mathcal{C}$ の元 φ に対し、

$$B(\varphi) = -L(f-g+H(\varphi))$$

は、再び $\mathcal{C}$ の元となる。さらに、"Tchykonoff の不動点定理" により、B の固定点の存在が示せる。

これらの詳しいことは、[3] 参照。

参考文献

1. Belickii, G.R. : Math USSR Sbornik 20, 587-602 (1973)

2. Kawabe, H : Advanced Studies in Pure Math. 5, (1985), p461-481

3. ———— : Invent. Math. 82, 89-120 (1985).

~~4. Sergeraert, F. : A~~

4. Sternberg, S : Duke Math. J. 24, 97-102 (1957).

5. Takens, F : Ann. Inst. Fourier 23, 162-195 (1973).

The imbedding problem of 3-manifolds into 4-manifolds

大阪市大理　河内明夫

次の埋め込み問題をTOPカテゴリーの中で考える：

$\boxed{\text{埋め込み問題}}$ 3次元有向連結閉多様体 M が与えられた場合，M を部分多様体として含んでいる4次元有向連結閉多様体 W は M によりどのような制約を受けるか？

例えば，M がホモロジー球面の場合，Freedman によれば，M は任意の W に locally flat に埋め込めることができ，従ってその埋め込み方を指定しない限り，どんな影響も W に与えない。

Mから開球をとり除いたコンパクト多様体をM_0で表わす．私はMの代りにM_0のWへの埋め込みについて考えるが，その結論は次の通りである：

M_0がWに埋め込まれている場合，一般的には，$\beta_2(W;Z_2)+|\mathrm{sign}W|$は，その埋め込みの仕方に関係なく，$M$の制約を受ける．

次はその直接の結果である：

任意の自然数Nに対し，ある3次元有向連結閉多様体Mが存在して，M_0は$\beta_2(W;Z_2)\leqq N$となるすべての4次元有向連結コンパクト多様体WにTOP imbeddingにより埋め込むことができない．

一方，$S^1\times S^1\times S^1\times S^1 \# S^2\times S^2$の普遍被覆を安定4次元空間といい，$SR^4$で表わす．例の

機会に，次を得ていた：

任意の（距離化可能）3次元多様体（非連結，非コンパクトも可）は，安定4次元空間 $\mathcal{S}R^4$ へ smooth imbedding により埋め込むことができる。

§1. 3，4次元多様体の符号不変量

W を，M を境界にもつ4次元コンパクト有向連結多様体で $\gamma \in H^1(W;Z) = \mathrm{Hom}[\pi_1(W), \langle t \rangle]$ が与えられているものとする。$\dot{\gamma} = \gamma | M \in H^1(M;Z)$ とおく。$(\tilde{W}, \tilde{M})$ を $(\gamma, \dot{\gamma})$ にそった (W, M) の無限巡回被覆とする。$\Lambda_R = R\langle t \rangle$（$\langle t \rangle$ の R 上の群代数）とおく，ただし，R は実数体とする。$H_*(\tilde{W};R)$，$H_*(\tilde{M};R)$ は有限生成 Λ_R-加群である。R 上の交叉形式

$$\mathrm{Int} : H_2(\tilde{W};R) \times H_2(\tilde{W};R) \to R$$

に対し，t-Hermitian 双又形式

$$\widetilde{Int} : H_2(\widetilde{W};R) \times H_2(\widetilde{W};R) \longrightarrow \Lambda_R$$

を $\widetilde{Int}(x,y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} Int(x, t^i y) t^{-i}$ で定義する。$T_2(\widetilde{W};R)$ を $H_2(\widetilde{W};R)$ の Λ_R-torsion 部分とし、$B_2(\widetilde{W};R) = H_2(\widetilde{W};R)/T_2(\widetilde{W};R)$ とおく。$\widetilde{Int}$ は

$$\widetilde{Int}_* : B_2(\widetilde{W};R) \times B_2(\widetilde{W};R) \longrightarrow \Lambda_R$$

を自然に誘導する。$B_2(\widetilde{W};R)$ は Λ_R-free だから $B_2(\widetilde{W};R)$ の基底を与えて、$\widetilde{Int}_*$ を代表する t-Hermitian 行列 $A(t)$ を考えよう。$x \in [-1,1]$ に対し、$\omega_x = x + \sqrt{1-x^2}\sqrt{-1} \in S^1$ とおく。

定義 $a \in [-1,1)$ に対し

$$\tau_a^\gamma(W) = \lim_{x \to a+0} \operatorname{sign} A(\omega_x)$$

$$\tau_1^\gamma(W) = \lim_{a \to 1-0} \tau_a^\gamma(W)$$

とおき、$\tau_a^\gamma(W)$ $(a \in [-1,1])$ を (W,γ) の a での符号という。

次に，$T_*(\tilde{M};R)$ を $H_*(\tilde{M};R)$ の Λ_R-torsion 部分とし，$B_*(\tilde{M};R)=H_*(\tilde{M};R)/T_*(\tilde{M};R)$ とおく。$T_*(\tilde{M};R)$, $B_*(\tilde{M};R)$ の R-双対空間を $T^*(\tilde{M};R)$ $B^*(\tilde{M};R)$ で表わす時，自然な Λ_R 上の完全列

$$0\to B^*(\tilde{M};R)\to H^*(\tilde{M};R)\to T^*(\tilde{M};R)\to 0$$

を得る。$H_2(\tilde{M};Z)$ の中には (1) $(t-1)\mu=0$ かつ (2) 被覆準同型写像 $H_2(\tilde{M};Z)\to H_2(M;Z)$ による μ の像は $\gamma\in H^1(M;Z)$ のポアンカレ双対元，となる元 μ がただ1つ存在する。この元 μ を被覆 $\tilde{M}\to M$ の基本類と呼ぶ。

μ は t-不変な R-準同型写像 $\tilde{\mu}: T^2(\tilde{M};R)\to R$ を定める。cup 積 $H^1(\tilde{M};R)\times H^1(\tilde{M};R)\xrightarrow{\cup} H^2(\tilde{M};R)$ は非退化な対（また $\cup$ で表わす）$T^1(\tilde{M};R)\times T^1(\tilde{M};R)\to T^2(\tilde{M};R)$ を生成することもよく知られる。こうして，(M,γ) から一意に決まる R 上の双形式

$$\tilde{b}: T^1(\tilde{M};R)\times T^1(\tilde{M};R)\to R$$

が $\tilde{b}(u,v)=\tilde{\mu}(u\cup(t-t^{-1})v)$ により定義される。

$\tilde{b}(u,v)=\tilde{b}(v,u)$, $\tilde{b}(tu,tv)=\tilde{b}(u,v)$ はすぐわかる。$T^1(\tilde{M};R)_a$ を $T^1(\tilde{M};R)$ の $(t^2-2at+1)$-成分 $(-1<a<1$ のとき$)$, $(t-a)$-成分 $(a=\pm 1$ のとき$)$ とする。

定義 $\tilde{b}$, $\tilde{b}|T^1(\tilde{M};R)_a$ の符号を (M,γ) の符号, a での符号 と呼び, $\sigma^\gamma(M)$, $\sigma^\gamma_a(M)$ で表わす。

$\sigma^\gamma(M)=\sum_{-1\leq a\leq 1}\sigma^\gamma_a(M)$ が成立することに注意しよう。

記号 $a\in[-1,1)$ に対し

$$\tau^\gamma_a(M)=\sum_{a<x\leq 1}\sigma^\gamma_x(M),$$

$$\tau^\gamma_1(M)=\lim_{a\to 1-0}\tau^\gamma_a(M)\ (=\sigma^\gamma_1(M))$$

とおく。($\sigma^\gamma(M)=\sigma^\gamma_{-1}(M)+\tau^\gamma_{-1}(M)$ に注意せよ)

次の基本的な関係を，私は以前に示していた:

$\boxed{\text{符号定理}}$ $\tau_a^{\gamma}(M)=\tau_a^{\gamma}(W)-\operatorname{sign}W$
$(\forall a\in[-1,1])$.

(注意) 同様な関係は，Mが$(4m+3)$次元で，Wが$(4m+4)$次元の場合にも成りたつ．
また，Mが$(4m+1)$次元で，Wが$(4m+2)$次元の場合にも，類似の関係が成立する（ただし，$\tau_a^{\gamma}(M)$，$\tau_a^{\gamma}(W)$の定義を手直ししなければならない．また，$\operatorname{sign}W=0$とおく.）

§2. 主定理の陳述.

$DM_0=\partial(M_0\times I)$とおく．$\gamma\in H^1(DM_0;Z)$に対し，その$Z_2$-reduction $\gamma_2\in H^1(DM_0;Z_2)$が$\alpha^*(\gamma_2)\neq\gamma_2$を満たす時，$\gamma$を$Z_2$-asymmetric elementと呼ぶ，ただしαはDM_0の標準的なreflectionを表わす。

$\boxed{\text{主定理}}$ M_0 が W に TOP imbedding により埋め込まれているとする. もし $\beta_1(M;Z) > \beta_2(W;Z_2)/2$ となるならば, 任意の $a \in [-1,1]$ に対して,

$$|T_a^{\gamma}(DM_0)| - \beta_1(M;Z) \leq \beta_2(W;Z) + |\mathrm{sign}\, W|$$

となる Z_2-asymmetric element $\gamma \in H^1(DM_0;Z)$ が存在する。

$\boxed{\text{注意}}$ ある Z_2-asymmetric element $\gamma \in H^1(DM_0;Z)$ 及びある $a \in [-1,1]$ に対し, $\beta_1(M;Z) \leq \beta_2(W;Z_2)/2$ かつ $|T_a^{\gamma}(DM_0)| - \beta_1(M;Z) > \beta_2(W;Z) + |\mathrm{sign}\, W|$ となるような埋め込み $M \subset W$ が存在する。

実際, $H_1(M;Z)$ が Z_2-torsion free となる M 及び埋め込み $M = M \times 1 \subset M \times S^1 = W$ を考えてみよう. このとき, $\beta_1(M;Z) = \beta_2(W;Z)/2 = \beta_2(W;Z_2)/2$ 及び $\mathrm{sign}\, W = 0$ となる. また

$$|T_a^{\gamma}(DM_0)| - \beta_1(M;Z) - \beta_2(W;Z) - |\mathrm{sign}\, W|$$
$$= |T_a^{\gamma}(DM_0)| - 3\beta_1(M;Z)$$

をいくらでも大きくする例が存在する(次の§3を参照のこと)。よって上の注意が得られる。

§3. 例の構成。

比較的やさしい例の構成法について述べる。Mをホモロジーハンドル(すなわち、$H_*(M;Z)\cong H_*(S^1\times S^2;Z)$となる3次元有向多様体$M$)を考える。$\gamma\in H^1(M;Z)\cong Z$を1つの生成元とする時、$\sigma^\gamma(M)$が偶数で$\sigma^\gamma_{\pm1}(M)=0$、従って$\tau^\gamma_{-1}(M)=\sigma^\gamma(M)$となることはよく知られている。さらに、$\sigma^{m\gamma}(M)$は$m$が偶数か奇数かに従い、0又は$\sigma^\gamma(M)$に等しい。以後、ホモロジーハンドル$M$に対しては$\sigma^\gamma(M)$を単に$\sigma(M)$と表わす。

$\sup_n|\sigma(M^{(n)})|=+\infty$となるようなホモロジーハンドルの族$\{M^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$をとる(例えば、trefoil knotの$n$個のコピーのsumの0-surgeryを$M^{(n)}$とおけば$\sigma(M^{(n)})=2n$となる)。

補題 任意の自然数 N, N' を与えた時、次の(1)及び(2)を満たす3次元有向連結閉多様体 M が存在する：

(1) M は $\{M^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ の中の N 個のものの連結和,

(2) 任意の $\mathbb{Z}_2$-asymmetric element $\gamma \in H^1(DM_0; \mathbb{Z})$ に対して $|T_{-1}^{\gamma}(DM_0)| = |\sigma^{\gamma}(DM_0)| \geq N'$.

証明 $\{M^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ の中から

$$|\sigma(M^{(n_k)})| \geq N' + \sum_{i=1}^{k-1} |\sigma(M^{(n_i)})|$$

$(k=1, 2, \cdots, N)$ を満たす $M^{(n_1)}, M^{(n_2)}, \cdots, M^{(n_N)}$ を取り出し、その連結和を M とおく。番号をかえて $M^{(1)}, \cdots, M^{(N)}$ がこれを満たすとする。$DM_0 = (M^{(1)} \# -M^{(1)}) \# \cdots \# (M^{(N)} \# -M^{(N)})$ に注意する時、$\mathbb{Z}_2$-asymmetric element $\gamma \in H^1(DM_0; \mathbb{Z})$ の $\mathbb{Z}_2$-reduction $\gamma_2 \in H^1(DM_0; \mathbb{Z}_2)$ は、ある factor $M^{(i)} \# -M^{(i)}$ に対し、$\gamma_2 | M^{(i)} \neq 0$ かつ $\gamma_2 | -M^{(i)} = 0$ (又は $\gamma_2 | M^{(i)} = 0$ かつ

$\gamma_2(-M^{(i)})\neq 0$)を満たす。番号を変えて、

$M^{(1)}\#-M^{(1)}, \cdots, M^{(r)}\#-M^{(r)}$ がこの性質をみたすfactorsのすべてとする。ただし $|\sigma(M^{(1)})|<\cdots<|\sigma(M^{(r)})|$ としておく。その時、

$$\sigma^{\gamma}(DM_0)=\varepsilon_1\sigma(M^{(1)})+\cdots+\varepsilon_r\sigma(M^{(r)})$$

($\varepsilon_i=\pm 1$) となり、従って

$$|\sigma^{\gamma}(DM_0)|\geq|\sigma(M^{(r)})|-\sum_{i=1}^{r-1}|\sigma(M^{(i)})|\geq N$$

となる。$\sigma^{\gamma}(DM_0)=\tau_{-1}^{\gamma}(DM_0)$ だから補題を得る。

主定理と上の補題から次がわかる：

$\boxed{\text{定理}}$ $\{M^{(n)}\}_{n=1}^{+\infty}$ を $\sup_n|\sigma(M^{(n)})|=+\infty$ となるようなホモロジーハンドルの族とする。任意の自然数 N に対して、$(N+1)$ 個のホモロジーハンドルが $\{M^{(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ に存在し、その連結和 M の M_0 は、$\beta_2(W;\mathbb{Z}_2)\leq N$ となるすべての4次元コンパクト有向連結多様体 W にTOP imbeddingによって埋め込むことができない。

§4. 主定理の略証.

ここでは，M_0 が W に locally flat に埋め込まれている場合についての証明だけを与える.

完全列

$$H_1(W-M_0;Z)\to H_1(W;Z)\to H_1(W,W-M_0;Z)$$

$$\begin{array}{c} \cong \\ H^3(M_0;Z) \\ \| \\ 0 \end{array}$$

に注意して，$W-M_0$ の surgery を行うが，まず，$\beta_1(W^*;Z)=0$，$\beta_2(W^*;Z)=\beta_2(W;Z)$ となるように surgery を行って W から W^* を得，次に，$\beta_1(W^{**};Z_2)=0$，$\beta_2(W^{**};Z)=\beta_2(W;Z_2)$ となるように surgery を行って，W^* から W^{**} を得る (正確には，Quinn による handle straightening 定理を使用する必要がある.) $W_0=M_0\times I$，$W_1^*=Cl_{W^*}(W^*-M_0\times I)$，$W_1^{**}=Cl_{W^{**}}(W^{**}-M_0\times I)$ とおき，DM_0 は W^*，W^{**} をコンパクト多様体 W_0 と W_1^*，W_0 と W_1^{**} に分けていると考える. $\beta_1(DM_0;Z)=2\beta_1(M;Z)>\beta_2(W;Z_2)$ から

$\beta_1(W_1^{**})>0$ が出る。Mayer/Vietoris 完全列

$$H_1(DM_0;Z_2)\to H_1(W_0;Z_2)\oplus H_1(W_1^{**};Z_2)\to \underset{\substack{\parallel\\ 0}}{H_1(W^{**};Z_2)}$$

によって，任意の全射 $\gamma^{**}: H_1(W_1^{**};Z)\to Z$ の $\gamma=\gamma^{**}|DM_0\in H^1(DM_0;Z)$ は Z_2-asymmetric element となることがわかる。自然な全射 $\varphi: H_1(W_1^*;Z)\to H_1(W_1^{**};Z)$ に対し，$\gamma^*=\gamma^{**}\varphi\in H^1(W_1^*;Z)$ とおく時，$\gamma=\gamma^*|DM_0$ である。符号定理によって，$\tau_a^{\gamma}(DM_0)=\tau_a^{\gamma^*}(W_1^*)-\operatorname{sign}W_1^*$ が出る。$\operatorname{sign}W_1^*=\operatorname{sign}W$，$|\tau_a^{\gamma^*}(W_1^*)|\leqq\beta_1(M;Z)+\beta_2(W;Z)$ だから

$$|\tau_a^{\gamma}(DM_0)|\leqq\beta_1(M;Z)+\beta_2(W;Z)+|\operatorname{sign}W|$$

が出て，証明が終る。

注意　M_0 が W で locally flat でない場合，埋め込み $M_0\times CP^2\subset W\times CP^2$ を考え，Ancel/Cannon の locally flat

imbedding への近似定理を適用する。
その後で上記と同様の考察を行うが、
符号定理の高次元版（符号定理後の注意参照）を使用しなければならない。

詳しくは、同名の論文を参照して下さい。

TOPOLOGY, GEOMETRY AND NON-LINEAR SIGMA MODEL

九大理　藤井一幸

I　理論物理学に non-linear sigma models という模型がある。これは数学と非常に深い関係にあり，運動方程式の研究としては 調和写像の理論そのものである。それ故 数学の研究対象として重要な位置を占める。　最近２次元の non-linear sigma models が anomaly や superstrings と関連して大きな進歩を遂げた [11], [8], [5], [7]。例えば この models に Wess-Zumino term [14] を加えて量子化した場合，currents や energy-momentum tensors の表現が Kac-Moody algebra や Virasoro algebra に対応する等 多くの興味深い事実が明らかにされた。　次に

4次元の non-linear sigma models を考えてみよう。残念なことにこの次元では Skyrme model を除いてあまり面白い models は知られていない。Skyrme model は通常の kinetic term の他に高階微分を含む term を加えた model で，陽子や中性子等の baryons を quarks に分解して見ずに，一つの soliton と見なす model である。1960年頃 Skyrme [9], [10] によって考え出されたが，以後あまり進展をみなかった。それが1984年の Witten 達の仕事 [1] (or [12], [13]) によって再び脚光を浴びるようになり，以後非常に多くの研究がなされている。我々が Skyrme model に着目する一つの理由は，高次元 topology の応用が可能であること及び高次元 soliton 理論を考える上で prototype になりうること，である。我々は4次元の Skyrme model を任意の偶数次元上に拡張したい。即ち，kinetic term の他に付け加えるべき高階微分を含む term を見つけ，そこに (安定した) solitons が存在するか否かを調べたい。

そのために Rajeev 達の仕事 [2] に従って QCD の effective action の一部として目的の term を見つけ -- §II --，それを 6 次元，8 次元の場合に具体的に計算する -- §III。 我々の拡張が唯一のものとは限らない。どのような高階微分を含む term を kinetic term に加えるとよいのか？は大きな且つ重要な問題である。今後の進展が期待される。

II 拡大 Skyrme model

M^D : $D=2N$ - space (or space-time)

U : $M^D \longrightarrow U(N_f)$

N_f : flavor number (numbers of fermions)

N_c : color number

$U = e^{i\pi^a \tau^a}$, $0 \leqq a \leqq N_f^2 - 1$

π^a : pion field (Goldstone bosons)

τ^a : $U(N_f)$ の generators , $\tau^0 \propto \mathbb{1}$

$\{\gamma_\mu\}$: Gamma 行列

$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu}\mathbb{1}$

$\sigma_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$, $\gamma_\mu\gamma_\nu = \delta_{\mu\nu} + \sigma_{\mu\nu}$

$$\gamma_{2N+1} \equiv (-i)^N \gamma_{2N} \cdots \gamma_1 = (i)^N \gamma_1 \cdots \gamma_{2N} .$$

γ 行列の性質

$$\mathrm{Tr}\, \gamma_{\mu_1} \cdots \gamma_{\mu_{2N}} \gamma_{2N+1} = 2^N (-i)^N \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_{2N}}$$

$$\{ \gamma_\mu , \gamma_{2N+1} \} = 0 。$$

$$\hat{U} \equiv e^{i \pi^a \tau^a \otimes \gamma_{2N+1}}$$

U と $\hat{U}$ の関係

$$L = \frac{1}{2}(\mathbb{1} + \gamma_{2N+1}) , \quad R = \frac{1}{2}(\mathbb{1} - \gamma_{2N+1})$$

とおくと

$$\begin{aligned} \hat{U} &= \frac{1}{2}(U + U^\dagger) \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2}(U - U^\dagger) \otimes \gamma_{2N+1} \\ &= U \otimes L + U^\dagger \otimes R . \end{aligned}$$

QCD Lagrangian

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{QCD} &= -\bar{\psi} \{ (\partial_\mu + A_\mu) \gamma_\mu + m \hat{U} \} \psi \\ &\equiv -\bar{\psi} (\not{D} + m \hat{U}) \psi . \end{aligned}$$

近似 $A_\mu = 0$

この近似のもとで，まず fermion 積分を実行した後，effective action $W(U)$,

$$\begin{aligned} W(U) &= \ln \det (\not{\partial} + m \hat{U}) \\ &= \mathrm{Tr} \ln (\not{\partial} + m \hat{U}) \end{aligned}$$

を考える。ここでこの Tr は spinor, color, flavor, x 全てについてとる。他方

$$W(U)^* = \mathrm{Tr}\,\ln(-\not\partial + m\hat{U}^+)。$$

このとき我々は $\mathrm{Re}\,W(U)$, $\mathrm{Im}\,W(U)$ を計算したい。

<u>$\mathrm{Re}\,W(U)$ の計算</u>

$$\mathrm{Re}\,W(U) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln(\not\partial + m\hat{U})(-\not\partial + m\hat{U}^+)$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,\ln(-\partial^2 + m^2 + m\not\partial\hat{U}^+)$$

Seeley expansion を使って

$$\mathrm{Re}\,W(U) = \mathrm{const} + \frac{1}{2}\sum A_n\ ,$$

$$A_n \equiv \frac{(-1)^{n+1}}{n}\mathrm{Tr}\left(\frac{m}{-\partial^2+m^2}\not\partial\hat{U}^+\right)^n.$$

この A_n に関して，γ 行列の性質より

$$A_{2n+1} = 0。$$

また

$$\not\partial\hat{U}^+\not\partial\hat{U}^+ = \gamma_\mu\gamma_\nu\,\partial_\mu\hat{U}\,\partial_\nu\hat{U}^+$$

$$= \partial_\mu\hat{U}\,\partial_\mu\hat{U}^+ + \sigma_{\mu\nu}\,\partial_\mu\hat{U}\,\partial_\nu\hat{U}^+$$

に注意して

$$A_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n}\mathrm{Tr}\Big\{\frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\mu\hat{U}\frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\mu\hat{U}^+$$

$$+\sigma_{\mu\nu}\frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\mu\hat{U}\frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\nu\hat{U}^+\Big\}^n$$

$$\equiv \frac{-1}{2n}\mathrm{Tr}\,(X + \sigma_{\mu\nu}Y_{\mu\nu})^n。$$

この A_{2n} から γ_{2N+1} を取り除くことを考える。

そのために準備として

Lemma II-1

(i) $\mathbb{1} = L + R\ ,\quad LR = 0 = RL$

$L\gamma_\mu = \gamma_\mu R\ ,\quad R\gamma_\mu = \gamma_\mu L$。

(ii) $L\hat{U} \equiv (\mathbb{1}\otimes L)\hat{U} = U\otimes L = (U\otimes 1)(\mathbb{1}\otimes L)$

$R\hat{U} \equiv (\mathbb{1}\otimes R)\hat{U} = U^\dagger\otimes R = (U^\dagger\otimes 1)(1\otimes R)$。

このとき

$$A_{2n} = \frac{-1}{2n}\,\mathrm{Tr}\,(L+R)(X+\sigma_{\mu\nu}Y_{\mu\nu})^n$$
$$= -\frac{1}{2n}\,\mathrm{Tr}\,(X'+\sigma_{\mu\nu}Y_{\mu\nu}')^n L$$
$$-\frac{1}{2n}\,\mathrm{Tr}\,(V'+\sigma_{\mu\nu}W_{\mu\nu}')^n R$$

但し，

$$X' = \frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\mu U\,\frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\mu U^\dagger ,$$
$$V' = (\ U\leftrightarrow U^\dagger\quad \text{in } X'\ ),$$
$$Y_{\mu\nu}' = \frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\mu U\,\frac{m}{-\partial^2+m^2}\partial_\nu U\ ,$$
$$W_{\mu\nu}' = (\ U\leftrightarrow U^\dagger\quad \text{in } Y_{\mu\nu}'\ )。$$

これらの成分にはもう γ_{2N+1} は含まれない。ところで我々は最も簡単な model を構成したいから以下の仮定

仮定I　$A_4, A_6, \cdots, A_{2N-2}$ を reject する。

を課す。以下 $D=2N$ の場合のみを考える。

$$A_{2N} = -\frac{1}{2N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{2}\left(X' + \sigma_{\mu\nu} Y'_{\mu\nu} \right)^N$$
$$-\frac{1}{2N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{2}\left(V' + \sigma_{\mu\nu} W'_{\mu\nu} \right)^N$$
$$-\frac{1}{2N}\,\mathrm{Tr}\,\frac{1}{2}\left\{ \left(\sigma_{\mu\nu} Y'_{\mu\nu}\right)^N - \left(\sigma_{\mu\nu} W'_{\mu\nu}\right)^N \right\} \gamma_{2N+1}。$$

ここで 第3項は

$$\frac{-1}{4N}(i)^N \epsilon_{\mu_1\nu_1\cdots\mu_N\nu_N}\,\mathrm{Tr}\left\{ Y'_{\mu_1\nu_1}\cdots Y'_{\mu_N\nu_N} - W'_{\mu_1\nu_1}\cdots W'_{\mu_N\nu_N} \right\}.$$

更に我々は次の仮定を課す。

仮定II

1) 微分は $D=2N$ 階までしかとらない。

2) $\frac{m}{-\partial^2+m^2}$ から出てくる余分な Δ term は落とす。

この仮定のもとで 第3項 $=0$。よって momentum 積分を実行して 我々は目的の式

$$A_{2N} = \frac{-N_c}{4N}\,\mathrm{Tr}\,C_{2N}\left\{ \left(\partial_\mu U \partial_\mu U^\dagger + \sigma_{\mu\nu} \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger \right)^N + \left(\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + \sigma_{\mu\nu} \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \right)^N \right\}$$

但し,

$$C_{2N} = \langle x | \left(\frac{m}{-\partial^2+m^2} \right)^{2N} | x \rangle$$
$$= \int \frac{d^{2N}p}{(2\pi)^{2N}} \frac{m^{2N}}{(p^2+m^2)^{2N}} = \frac{1}{2^{2N}\pi^N} \frac{(N-1)!}{(2N-1)!}$$

を得る。故に

$$A_{2N} = \frac{-N_c C_{2N}}{2N}\,\mathrm{Tr}\left(\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + \sigma_{\mu\nu} \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \right)^N$$

を得，更に A_{2N} から

$$B_{2N} = \frac{-N_c C_{2N}}{2N} \mathrm{Tr} \left(\sigma_{\mu\nu} \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \right)^N$$

を引き出す。A_{2N} を拡大 Rajeev term, B_{2N} を拡大 Skyrme term と呼ぶ。ところで今まで U の field manifold は $U(N_f)$ であった。

<u>物理的要請</u>

$U(N_f)$ の $U(1)$-part は $U(1)$-anomaly (= $\mathrm{Im}\, W(U)$) から影響され，$U(1)$-Goldstone boson が重くなる。従って低エネルギー領域の理論では“見えなく”なる。

従って以後 U の field manifold として $SU(N_f)$ を考える。以上のことより我々は任意の偶数次元上で non-linear sigma models を提出する [4]。

Definition II-2

[A] 拡大 Rajeev model

$$\mathcal{L}_R(U) = \frac{f^2}{2} \mathop{\mathrm{Tr}}_{\tau} \partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + \frac{-N_c C_{2N}}{4N} \mathop{\mathrm{Tr}}_{\gamma,\tau} \left(\partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + \sigma_{\mu\nu} \partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U \right)^N$$

[B] 拡大 Skyrme model

$$\mathcal{L}_s(U) = \frac{f^2}{2}\mathop{\mathrm{Tr}}_{\tau} \partial_\mu U^\dagger \partial_\mu U + \frac{-N_c C_{2N}}{4N}\mathop{\mathrm{Tr}}_{\gamma,\tau}(\sigma_{\mu\nu}\partial_\mu U^\dagger \partial_\nu U)^N$$

但し, f は pion decay constant に相当する定数で, C_{2N} は $C_{2N} = \frac{1}{2^{2N}\pi^N}\frac{(N-1)!}{(2N-1)!}$ である。

Remark Skyrme term は通常の Chiral model に存在する soliton を "stabilize" することが期待されている term である。

Im W(U) の計算

$$\mathrm{Im}\,W(U) = \frac{1}{2i}\{\mathrm{Tr}\,\ln(\partial\!\!\!/ + m\hat{U}) - \mathrm{Tr}\,\ln(-\partial\!\!\!/ + m\hat{U}^\dagger)\}$$

$$\delta\,\mathrm{Im}\,W(U) = \frac{1}{2i}\{\mathrm{Tr}\,(\partial\!\!\!/ + m\hat{U})^{-1}\delta(m\hat{U}) - \mathrm{Tr}\,(-\partial\!\!\!/ + m\hat{U}^\dagger)^{-1}\delta(m\hat{U}^\dagger)\}$$

Chiral 変換

$$\delta\hat{U} \equiv i\gamma_{2N+1}\alpha\hat{U}, \quad \alpha \text{ は } U(N_f) \text{ の generator}$$

$$\delta\hat{U}^\dagger \equiv \hat{U}^\dagger(-i\gamma_{2N+1})\alpha = (\delta\hat{U})^\dagger.$$

$$(\partial\!\!\!/ + m\hat{U})^{-1} = (-\partial\!\!\!/ + m\hat{U}^\dagger)\{-\partial^2 + m^2 + m\partial\!\!\!/\hat{U}^\dagger\}^{-1}$$

$$(-\partial\!\!\!/ + m\hat{U}^\dagger)^{-1} = (\partial\!\!\!/ + m\hat{U})\{-\partial^2 + m^2 - m\partial\!\!\!/\hat{U}^\dagger\}^{-1}$$

に注意して

$$
\begin{aligned}
&\delta\, \mathrm{Im}\, W(U) \\
&= \frac{1}{2i} \mathrm{Tr} \Big[(-\partial\!\!\!/ + m\hat{U}^{+})(-\partial^2+m^2)^{-1} \sum_n \{-(m\partial\!\!\!/\hat{U}^{+})(-\partial^2+m^2)^{-1}\}^n \\
&\qquad\qquad \times \delta(m\hat{U}) \\
&\qquad - (\partial\!\!\!/ + m\hat{U})(-\partial^2+m^2)^{-1} \sum_n \{(m\partial\!\!\!/\hat{U})(-\partial^2+m^2)^{-1}\}^n \\
&\qquad\qquad \times \delta(m\hat{U}^{+}) \Big] \\
&\equiv \sum B_n
\end{aligned}
$$

とおく。このとき

Proposition II-3

(1) For $1 \leqq n < N$, $B_n = 0$,

(2) B_{2N} の leading term は

$$
\frac{N!}{(2N)!} \frac{N_c (i)^{N-1}}{2^N \pi^N} \int d^{2N}x\, \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_{2N}} \mathrm{Tr}\, \partial_{\mu_1} U U^{+} \cdot \cdots \partial_{\mu_{2N}} U U^{+} \times \delta U U^{+}
$$

である。

今 δU を

$$
\delta U = d\alpha\, \partial_\alpha U
$$

と書く。

Theorem II-4

$\mathrm{Im}\, W(U)$ の leading term は

$$\frac{N!}{(2N+1)!}\frac{N_c(-i)^{N-1}}{2^N\pi^N}\int d^{2N+1}x\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{2N}\mu_{2N+1}}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\cdots$$

$$\cdots\partial_{\mu_{2N+1}}UU^\dagger$$

である。

とくに $N=2$ のとき

$$\frac{-N_c i}{240\pi^2}\int d^5x\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_5}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\cdot\cdots\cdot\partial_{\mu_5}UU^\dagger$$

となる, [2]。一般に $\mathrm{Im}\,W(U)$ の leading term を Wess-Zumino term (= anomaly の effective action を用いた表現) と呼び [2], Skyrmion の安定性には直接関係しないと思われる。

Fermion number current の計算

$$J_\mu\equiv\bar\psi i\gamma_\mu\psi,$$

$$\langle J_\mu\rangle_A\equiv -i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\ln\int\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar\psi\ e^{\int d^Dx\,\mathcal{L}_{QCD}}$$

$$=-i\frac{\delta}{\delta A_\mu(x)}\mathrm{Tr}\ln\{(\partial_\mu+A_\mu)\gamma_\mu+m\hat U\}$$

$$=-i\langle x|\,\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\{(\partial_\mu+A_\mu)\gamma_\mu+m\hat U\}^{-1}|x\rangle$$

このとき

Theorem II-5

Induced current $\langle J_\mu \rangle_A$ を $\partial_\mu U U^\dagger$ で展開していくと，$A_\mu \to 0$ に於て その leading term は

$$\frac{N!}{(2N)!}\frac{2(i)^N}{2^N \pi^N}\,\epsilon_{\mu\mu_1\cdots\mu_{2N-1}}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\cdot\cdots\cdot\partial_{\mu_{2N-1}}UU^\dagger$$

である。

とくに $\mu=0$ のとき

$$Q \equiv \frac{N!}{(2N)!}\frac{2(i)^N}{2^N \pi^N}\,\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{2N-1}}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\cdot\cdots\cdot\partial_{\mu_{2N-1}}UU^\dagger$$

とおく。これを Baryon number current，また

$$\hat{Q} \equiv \int d^{2N-1}x\, Q$$

を Baryon number と呼ぶ。これは topological には homotopy 群

$$\hat{Q} \in \pi_{2N-1}(SU(N_f))$$

を represent している。

［例］ (i) $N=2$ のとき

$$\hat{Q} = \frac{-1}{24\pi^2}\int d^3x\,\epsilon_{\mu_1\mu_2\mu_3}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\,\partial_{\mu_2}UU^\dagger\,\partial_{\mu_3}UU^\dagger$$

(ii) $N=3$ のとき

$$\hat{Q} = \frac{-i}{480\pi^3}\int d^5x\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_5}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\cdot\cdots\cdot\partial_{\mu_5}UU^\dagger\ .$$

Ⅲ 拡大 Skyrme model の計算

(1) Skyrme term の計算

$$\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\mu U^\dagger\partial_\nu U = -\tfrac{1}{2}\gamma_\mu\gamma_\nu\,[\,U^\dagger\partial_\mu U,\ U^\dagger\partial_\nu U\,]$$

に注意して

$$\underset{\gamma,\tau}{\mathrm{Tr}}\,(\,\sigma_{\mu\nu}\,\partial_\mu U^\dagger\partial_\nu U\,)^N$$

$$= (-\tfrac{1}{2})^N\,\mathrm{Tr}\,\{\,\gamma_\mu\gamma_\nu\,[\,U^\dagger\partial_\mu U,\ U^\dagger\partial_\nu U\,]\,\}^N$$

を計算しよう。

我々は任意の $D=2N$ に対してこの term を決定出来ないが，$N=2,3,4$ の場合に決定する。
以下簡単のため

$$B_{\mu\nu} \equiv [\,U^\dagger\partial_\mu U,\ U^\dagger\partial_\nu U\,]$$

とおく。

Proposition Ⅲ-1

(1) $D=4\ (N=2)$

$$2\,\mathrm{Tr}\,B_{\mu\nu}B_{\nu\mu}\ ,$$

(2) $D=6\ (N=3)$

$$-8\,\mathrm{Tr}\,B_{\mu\nu}B_{\nu\lambda}B_{\lambda\mu}\ ,$$

(3) $D = 8 \ (N=4)$

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}\{\ & 8 B_{\mu\nu}B_{\mu\nu}B_{\lambda\rho}B_{\lambda\rho} \\ & + 4 B_{\mu\nu}B_{\lambda\rho}B_{\mu\nu}B_{\lambda\rho} \\ & - 32 B_{\mu\nu}B_{\nu\lambda}B_{\mu\rho}B_{\rho\lambda} \\ & + 16 B_{\mu\nu}B_{\nu\lambda}B_{\lambda\rho}B_{\rho\mu}\ \}\text{。}\end{aligned}$$

我々は U にある ansatz を仮定して更に詳しく研究しよう。

拡大 hedgehog ansatz

$N_f = 2^{N-1}$ とおく。最初に static solution を問題にするので U は

$$U : R^{2N-1} \longrightarrow SU(N_f)$$

である。この U が拡大 hedgehog ansatz とは

$$U = \cos F(r) + i \sin F(r) \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{e}$$

但し、$r = (\Sigma x_j^2)^{1/2}$，$\{e_j\}_{1\leq j\leq 2N-1}$ は Clifford algebra の generators のことである。

以下 この U を使って static energy を求めよう。

Proposition Ⅲ-2

(i) Kinetic term （一般形）

$$\left\{ (F')^2 + 2(N-1)\left(\frac{\sin F}{r}\right)^2 \right\} \operatorname{Tr} \mathbb{1}_{N_f}$$

(ii) Skyrme term

(1) $D = 4 \quad (N = 2)$

$$2^6 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^2 (F')^2 + 2^5 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^4$$

(2) $D = 6 \quad (N = 3)$

$$2^{10} \cdot 3^2 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^4 (F')^2 + 2^{11} \cdot 3 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^6$$

(3) $D = 8 \quad (N = 4)$

$$2^{13} \cdot 3 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^4 (F')^4 + 2^{10} \cdot 3 \cdot 5 \cdot 11 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^6 (F')^2 + 2^8 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 23 \left(\frac{\sin F}{r}\right)^8$$

但し，$F' = dF/dr$ である。

(ロ) Baryon number の計算

完全反対称 tensor を定義しよう。

$$\operatorname{Tr} U^\dagger \partial_{[\mu_1} U \cdot U^\dagger \partial_{\mu_2} U \cdot \cdots \cdot U^\dagger \partial_{\mu_{2N-1}]} U$$

$$= \frac{1}{(2N-1)!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_{2N-1}} \operatorname{sign}(\pi) \operatorname{Tr} U^\dagger \partial_{\mu_{\pi(1)}} U \cdot \cdots \cdot U^\dagger \partial_{\mu_{\pi(2N-1)}} U$$

上述の拡大 hedgehog U に対してこれを計算しよう。

Proposition III-3

$$\mathrm{Tr}\ U^\dagger\partial_{[\mu_1}U\cdot\ \cdots\ U^\dagger\partial_{\mu_{2N-1}]}U$$
$$= 2^{N-1}(i)^{3N-2}\,\epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{2N-1}}\left(\frac{\sin F}{r}\right)^{2N-2}F' .$$

Baryon number $\hat{Q}$ は

$$\hat{Q} = \lambda_{2N}\int d^{2N-1}x\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{2N-1}}\,\mathrm{Tr}\,\partial_{\mu_1}UU^\dagger\cdots\partial_{\mu_{2N-1}}UU^\dagger$$
$$= \lambda_{2N}\int d^{2N-1}x\ \epsilon_{\mu_1\cdots\mu_{2N-1}}\,\mathrm{Tr}\ U^\dagger\partial_{[\mu_1}U\cdot\cdots U^\dagger\partial_{\mu_{2N-1}]}U$$

と表わせる。但し,

$$\lambda_{2N} = \frac{N!}{(2N)!}\,\frac{2\,(i)^N}{2^N\pi^N}$$

である。従って

$$\hat{Q} = \lambda_{2N}\ 2^{N-1}(i)^{3N-2}(2N-1)!\int_{S^{2N-2}}dS\int_0^\infty dr\left(\frac{\sin F}{r}\right)^{2N-2}F'$$
$$= \lambda_{2N}\ 2^{N-1}(i)^{3N-2}(2N-1)!\ \frac{2^N\pi^{N-1}}{(2N-3)!!}\,\frac{(2N-3)!!}{2^{N-1}(N-1)!}\times$$
$$\{F(\infty)-F(0)\}$$
$$= \frac{F(\infty)-F(0)}{\pi} .$$

Corollary III-4

$$\hat{Q} = \frac{1}{\pi}\{F(\infty)-F(0)\} .$$

我々はまだ U に境界条件を課していない。そこで

$$F(\infty)=n\pi,\quad F(0)=0$$

とおく。このとき $\hat{Q}=n$ で，この n は winding number である。そこで我々は特に U として

$$U=\cos F+i\sin F\,\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{e}$$

$$F(\infty)=\pi,\quad F(0)=0$$

を取り（拡大 Skyrmion と呼ぶ），我々の models に代入して equation of motion を調べなければならない。$N=2$ に関して非常に多くの研究がある。$N=3,4$ の場合は今研究中である [4]。

Yang-Mills 理論では古典解（instanton 解，meron 解等）は Pontrjagin number によって分類された。全く同様に Skyrme model の古典解（Skyrmion 等）は Baryon number（Chern-Simon number）によって分類される。

Ⅳ Torsion について

我々の仕事 [4] と Braaten 達のそれ [3] との関係を述べよう。

我々の U は

$$U : \mathbb{R}^{2N-1} \longrightarrow SU(N_f) \ , \quad N_f = 2^{N-1}$$

であった。このとき この U を使って " metric " を定義しよう。

$$g_{ij} \equiv \frac{1}{\mathrm{Tr}\,\mathbb{1}} \mathrm{Tr}\, \partial_i U^\dagger \partial_j U \ , \qquad g = (g_{ij})_{2N-1 \times 2N-1}$$

この U に hedgehog ansatz を適用して

Lemma IV-1

$$g_{ij} = (F')^2 \frac{x_i x_j}{r^2} + \frac{\sin^2 F}{r^2} \left(\delta_{ij} - \frac{x_i x_j}{r^2} \right) ,$$

$$g = (F')^2 \, \mathbb{P} + \frac{\sin^2 F}{r^2} (1 - \mathbb{P}) ,$$

ここで $\mathbb{P} \equiv \left(\frac{x_i x_j}{r^2} \right)$ 。

これより

Corollary IV-2

$$\det g = (F')^2 \left(\frac{\sin^2 F}{r^2} \right)^{2N-2} ,$$

$$\sqrt{\det g} = (F') \left(\frac{\sin F}{r} \right)^{2N-2} 。$$

今完全反対称 tensor $X_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-1}}$ を

$$X_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-1}} \equiv \frac{1}{\mathrm{Tr}\,\mathbb{1}} \mathrm{Tr}\, U^\dagger \partial_{[\mu_1} U \cdot \ \cdots \ \cdot U^\dagger \partial_{\mu_{2N-1}]} U$$

とおく。

Lemma IV-3

$$X_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-1}} = (i)^{3N-2} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-1}} \sqrt{\det g} 。$$

最後に この $X_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-1}}$ を total divergent form，即ち，

$$\partial_{[\mu} e_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-2}]} = X_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-1} \mu}$$

に表わそう。

Proposition IV-4

$$e_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-2}} \equiv (i)^{3N-2} \epsilon_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-2} \mu} \frac{x_\mu}{r} \frac{f}{r^{2N-2}},$$

但し，　f は

$$f = \frac{-1}{2N-2} \left\{ \cos F (\sin F)^{2N-3} + \sum_{k=2}^{N-1} \frac{(2N-3) \cdots (2N-2k+1)}{2^{k-1}(N-2) \cdots (N-k)} \cos F (\sin F)^{2N-2k-1} - \frac{(2N-3) \cdots 3}{2^{N-2}(N-2)!} F \right\},$$

とおくと

$$\partial_{[\mu} e_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-2}]} = X_{\mu_1 \cdots \mu_{2N-2} \mu}$$

が成り立つ。

References

1] G. Adkins, C.R. Nappi and Ed. Witten: Static Properties of Nucleons in the Skyrme Model. Nucl. Phys. B228('84), 552-564.

2] G. Bhattacharya and S. Rajeev: Fermions from Bosons through Effective Lagrangians in QCD, in "Solitons in Nuclear and Elementary Particle Physics", World Science, 1984.

3] E. Braaten, T.L. Curtright and C.K. Zachos: Torsion and Geometrostasis in Nonlinear Sigma Models, Nucl. Phys. B260('85), 630-688.

4] 伊達博，藤井一幸，宗博人 : Extended Skyrme Models in Even Dimensions and Higher Dimensional Solitons (準備中)

5] S.P. De Alwis: The Freedom of the Wess-Zumino-Witten Model, Phys. Lett., 164B ('85), 67-70.

6] V.G. Knizhnik and A.B. Zamolodchikov: Current Algebra and Wess-Zumino Model in Two Dimensions, Nucl. Phys. B247('84), 83-103.

7] S. Mukhi: Finiteness of Non-Linear σ-Models with Parallelizing Torsion, Phys. Lett. 162B('85), 345-348.

8] D. Nemeschansky and S. Vankielowicz: Critical Dimension of String Theories in Curved Space, Phys. Rev. Lett., 54('85), 620-623.

9] T.H.R. Skyrme: A Non-Linear Field Theory, Proc. R. Soc. London A260('61), 127-138.

10] T.H.R. Skyrme: A Unified Field Theory of Mesons and Baryons, Nucl. Phys. 31('62), 556-569.

11] Ed. Witten: Non-Abelian Bosonization in Two Dimensions, Commu. Math. Phys. 92('84), 455-472.

12] Ed. Witten: Global Aspects of Current Algebra, Nucl. Phys. B223('83), 422-432.

13] Ed. Witten: Current algebra, Baryons, and Quark Confinement, Nucl. Phys. B223('83), 433-444.

14] B. Zumino: Chiral Anomalies and Differential Geometry, in "Current Algebra and Anomalies", World Science, 1985.

正のスカラー曲率と高次$\hat{A}$-種数

東大理　森吉仁志

§1. 序

M を Riemann 多様体として、その Riemann 計量 g の定める Riemann 接続を ∇ とかく。このとき Riemann 多様体 M の主要な不変量である Riemann 曲率テンソル R が次のようにして定まる：

$$R(X, Y)Z = [\nabla_X, \nabla_Y]Z - \nabla_{[X, Y]}Z$$

ここで X, Y, Z は M 上のベクトル場

さらにこの R から断面曲率 K が次のように定義される：

$$K(p) = g(R(u, v)v, u)$$

ここで p は接平面 T_xM の2次元部分平面、

u, v は P の正規直交底。

また、R から2回の縮約をとることにより、スカラー

曲率とよばれるM上の smooth function κ が得られる：

$$\kappa(x) = \sum_{i,j} g(R(e_i, e_j)e_j, e_i)$$

ここで $\{e_i\}$ は T_xM の正規直交底.

このとき、これらの微分幾何的な不変量が M の global topology とどのようにかかわり合っているかを調べることは、興味ある問題のひとつになろう. 例えば、Riemann 曲率テンソル R の成分から決まるある微分形式が M の Chern 類や Pontrjagin 類を導くことはよく知られているし、また断面曲率 K がすべての二次元部分平面 P に対して 0 以下ならば M の普遍被覆空間は Euclid 空間に微分同相となる. では、スカラー曲率 κ の性質は M の global topology とどのように結びついているのだろうか。これを調べるために次のような性質をもつ κ を考えよう.

<u>Definition.</u> スカラー曲率 κ が、すべての $x \in M$ に対し $\kappa(x) \geq 0$ かつある $y \in M$ について $\kappa(y) > 0$ のとき、κ は正であるといい、これを $\kappa > 0$ とかく. さらに、微分可能多様体 M が $\kappa > 0$ となる Riemann 計量を許すとき、M を正のスカラー曲率をもつ多様体とよぶ.

例えば、$S^n\ (n\geq 2)$、$\mathbb{C}P^n$、$\mathbb{H}P^n$、ファイバーの次元が2以上の sphere bundle、compact non-abelion Lie group の等質空間、自明でない S^3-作用をもつ多様体などは正のスカラー曲率をもつ。

このとき Lichnerowicz による次の定理が成り立つ。

<u>Theorem.</u> (Lichnerowicz) Xを閉スピン多様体として、さらに正のスカラー曲率をもつとする。このとき、

$$\hat{A}(X) = \langle \hat{\mathfrak{a}}(X),\ [X] \rangle = 0$$

が成り立つ。ここで $\hat{\mathfrak{a}}(X)$ は X の Pontrjagin 類からなる次のような多項式であり、$\hat{A}(X)$ は X の $\hat{A}$-種数とよばれる X の位相不変量である：

$$\hat{\mathfrak{a}}(X) = 1 - \frac{P_1}{24} + \frac{1}{5760}(-4P_2 + 7P_1^2) + \cdots$$

すなわちこの定理は、閉スピン多様体が正のスカラー曲率をもつための"topological obstruction"の存在を示している。つまり、正のスカラー曲率をもつという微分幾何的な性質から、その多様体の global topology に関するある条件を導くことができる。

では、k次元トーラス T^k についてはどうであろうか。

トーラスの$\hat{A}$-種数は0であるから、上の定理からはトーラスが正のスカラー曲率をもつことを否定できない。しかし最近になって、Gromov と Lawson は閉スピン多様体が正のスカラー曲率をもつためのさらに別の topological obstruction を見出して、トーラスが正のスカラー曲率をもち得ないことを示した。高次$\hat{A}$-種数とよばれるこの obstruction は次のようにして定義される。

まず、Γによりある離散群を表し、Xを閉スピン多様体として、$f: X \longrightarrow K(\Gamma, 1)$ という写像をひとつ固定する。このとき $u \in H^*(K(\Gamma, 1) ; \mathbb{Q})$ に対し$\hat{A}(u)(X)$という有理数を

$$\hat{A}(u)(X) = \langle \hat{\mathfrak{a}}(X) f^*(u), [X] \rangle$$

と定義して、これをuに付随した高次$\hat{A}$-種数とよぶ。とくに $u = 1$ とおけば $\hat{A}(1)(X)$ は Xの$\hat{A}$-種数$\hat{A}(X)$に等しい。

このとき、Gromov と Lawson は次を示した。

<u>Theorem</u> [G-L_1]. $\Gamma = \mathbb{Z}^k$ とおき、Xを閉スピン多様体とする。このときXが正のスカラー曲率をもつならば、すべての $u \in H^*(T^k ; \mathbb{Q})$ に対して、

$$\hat{A}(u)(X) = 0$$

となる．

さらにこの定理の系として，トーラスに対し次が成り立つ．

<u>Theorem</u> [G-L$_1$]．T^kは正のスカラー曲率をもたない．

実際，$X = T^k$，$f = id$，u_{T^k}= 基本コホモロジー類 $\in H^k(T^k ; \mathbb{Q})$ とおけば，

$$\begin{aligned} \hat{A}(u_{T^k})(T^k) &= \langle \hat{\mathfrak{A}}(T^k)\, u_{T^k},\ [T^k] \rangle \\ &= \langle u_{T^k},\ [T^k] \rangle \\ &= 1 \end{aligned}$$

となって，前の定理よりT^kが正のスカラー曲率をもたないことが判る．

以上の結果をふまえて，Gromov と Lawson は次の予想を提出した．([G-L$_2$] [R])

<u>Conjecture A</u>. Closed aspherical manifold (i.e. $K(\Gamma, 1)$-space とホモトピー同値な閉多様体) は正のスカラー曲率をもたぬであろう．

<u>Conjecture B.</u>　Γをある離散群、Xを閉スピン多様体として、$f : X \longrightarrow K(\Gamma, 1)$という写像をひとつ固定しておく．もし$X$が正のスカラー曲率をもつならば、すべての$u \in H^*(K(\Gamma, 1) ; \mathbb{Q})$に対して、

$$\hat{A}(u)(X) = 0$$

であろう．

以下で我々は、ある幾何的条件を仮定してConjecture A, Bが成立することを示す．その条件は次のとおりである．

まずMを closed aspherical manifold として、$\Gamma = \pi_1(M)$とおく．Mの上にRiemann計量をひとつ固定して，普遍被覆空間$\widetilde{M}$にこれから導かれる計量を与えておく．そのときΓは$\widetilde{M}$に等長的に作用する．ここで$\widetilde{M}$上のあるベクトル束がΓ-同変ベクトル束の構造をもち、さらにΓ-同変な $spin^c$-構造およびΓ-同変なユークリッド計量を備えているとしよう．

<u>Condition A.</u>　ある smooth map $\varphi : \widetilde{M} \to \mathbb{R}^n$が存在して次をみたす：

1) φは0でない写像度をもつ proper map ;

2) ある定数 $C>0$, $\varepsilon<1$ があって、

$$\| \varphi_*(X) \| \leq C \cdot r^{\varepsilon} \| X \|$$

がすべての $X \in T\widetilde{M}$ に対し $r>1$ で成立する。ここで $r = dis_{\mathbb{R}^n}(0, \varphi(x))$ である。

<u>Condition B.</u> ある smooth map $\varphi : \widetilde{M} \times \widetilde{M} \to V$ が存在して次をみたす：

1) φ を $\{x\} \times \widetilde{M}$ へ制限したとき、φ は $\{x\} \times \widetilde{M}$ から V のある fibre への map を導き、それは0でない写像度をもつ proper map となる；

2) $\gamma \in \Gamma$ に対し

$$\varphi(\gamma x, \gamma y) = \gamma \cdot \varphi(x, y)$$

3) ある定数 $C>0$, $\varepsilon<1$ があって、

$$\| \varphi_*(X) \| \leq C \cdot r^{\varepsilon} \| X \|$$

が、$\{x\} \times \widetilde{M}$ に接するすべての接ベクトル X に対して、$r>1$ で成立する。ここで $r = dis_V(0, \varphi(y))$, $X \in T_{(x,y)}(\{x\} \times \widetilde{M})$ である。

ここで、Condition A, B の中にある性質は、最初に与えられた M の Riemann 計量には依存しないことに注意しよ

う．すなわち，あるひとつの計量についてCondition A，Bが成り立てば，他の任意の計量についてもCondition A，Bがそれぞれ成り立つ．

このとき次の定理が成立する．

Theorem A．Condition Aをみたす閉スピン多様体は，正のスカラー曲率をもたない．

Theorem B．Condition Bをみたすclosed aspherical manifoldの基本群をΓとかく．このときΓに対してConjecture Bは正しい．

断面曲率≦0となる多様体に対しては

$$\varphi : \tilde{M} \times \tilde{M} \to T\tilde{M}$$

$$\varphi(x, y) = \exp_x^{-1}(y)$$

を考えることにより次の系を得る．（[G-L$_2$] [R] [Mi]）

Corollary A．断面曲率≦0となる閉スピン多様体は，正のスカラー曲率をもたない．

Corollary B．断面曲率≦0となる閉spin^{c}多様体の基本群に対してConjecture Bは正しい．

以下で我々は Theorem A の証明のみを述べる．しかし その前に我々の証明の指針となった Lichnerowicz's theorem の証明を振り返ってみよう．

§2. Lichnerowicz's theorem の証明.

X が奇数次元のときには、$\hat{\mathfrak{a}}(X)$ が $4k$ 次元のコホモロジー類より成ることから定義より $\hat{A}(X)=0$ がわかる．

X が偶数次元とする、このときスピノール束とよばれる X 上のベクトル束 S に対して、次のような分解が存在する：

$$S \otimes \mathbb{C} = S_+ \oplus_{\mathbb{C}} S_-$$

さらに $S\otimes\mathbb{C}$ の smooth section に Dirac 作用素とよばれる一階の楕円型偏微分作用素 D が、上の分解に応じて下のように作用する：

$$D = \begin{pmatrix} 0 & D_+^* \\ & \\ D_+ & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} \Gamma(S_+) \\ \oplus \\ \Gamma(S_-) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Gamma(S_+) \\ \oplus \\ \Gamma(S_-) \end{matrix}$$

この作用素 D について次の Weitzenböck's formula が成り立つ：

$$D^2 = \nabla^*\nabla + \frac{K}{4}$$

すなわち smooth sections $\sigma,\ \tau \in \Gamma(S\otimes\mathbb{C})$ に対して、

$$\int_X (D^2\sigma, \tau) = \int_X (\nabla\sigma, \nabla\tau) + \int_X (\frac{K}{4}\sigma, \tau)$$

となる. 従って $K>0$ のときには、$\sigma=\tau$ とおくと右辺の各項は非負であるから、

$$D\sigma = 0 \Rightarrow \nabla\sigma = 0 \text{ かつ } \sigma(y) = 0$$

(ここで $y \in X$ は $K(y)>0$ となる点)

$$\Rightarrow \sigma \equiv 0 .$$

従って $K>0$ であれば $\ker D = 0$ であることがわかる.

一方、Atiyah-Singer の指数定理によれば、

$$\mathrm{ind}\, D_+ := \dim\ker D_+ - \dim\ker D_+^* = \hat{A}(X)$$

であるから、$\ker D = 0$ により

$$0 = \mathrm{ind}\, D_+ = \hat{A}(X)$$

となり、Lichnerowicz's theorem が証明された.

この証明においては、Weitzenböck's formula を用いての $\mathrm{ind}\, D_+$ の消滅と Atiyah-Singer の指数定理が本質的であるが、この2つは X 上の flat vector bundle E をテンソルしたベクトル束 $S_\pm\otimes E$ についても成立することが知られている. すなわち、

$$D^E = \begin{pmatrix} 0 & (D_+^E)^* \\ D_+^E & 0 \end{pmatrix} : \begin{matrix} \Gamma(S_+ \otimes E) \\ \\ \Gamma(S_- \otimes E) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Gamma(S_+ \otimes E) \\ \\ \Gamma(S_- \otimes E) \end{matrix}$$

という作用素が存在し、

i) $K > 0$ ならば $\mathrm{ind}\, D_+^E = 0$

ii) $\mathrm{ind}\, D_+^E = \langle \hat{\mathfrak{a}}(X)\, ch(E),\ [X] \rangle$

が成り立つ. 従って前と同様の議論により、$K > 0$ ならば $\langle \hat{\mathfrak{a}}(X)\, ch(E),\ [X] \rangle = 0$ がわかる. けれども残念なことに、flat vector bundle に対しては $ch(E) = (\mathrm{rk}\, E)\cdot 1$ であるから、この場合には、

$$\langle \hat{\mathfrak{a}}(X)\, ch(E),\ [X] \rangle = (\mathrm{rk}\, E)\cdot \hat{A}(X)$$

であり、Lichnerowicz の結果に付け加えるものは何もない. ところが Miščenko は [Mi] において、有限次の flat vector bundle に留まるのではなく無限次の flat vector bundle をも考えるという秀れた着想を提出し、新たな展開を与えた. 無限次の vector bundle では、それが flat であってもその Chern character は自明でないことがあるので、我々は新しい結果に到達できることになる. しかし無限次の vector bundle の Chern character とは何か、それを次章において述べる.

§3. Fredholm 複体とK-理論.

H^0およびH^1をBanach 空間とする. このとき有界作用素$F: H^0 \to H^1$がFredholm 作用素とは

i) $\mathrm{im} F$はH^1の閉部分空間で

ii) $\ker F$および $\mathrm{cok}\, F := H^1/\mathrm{im} F$ が有限次元

であることをいう.

また、有界作用素$K: H^0 \to H^1$がcompact作用素とは、H^0の unit ball B に対して$K(B)$の閉包がH^1で compact set であることをいう. 例えば$\mathrm{im} K$が有限次元であれば、Kは compact 作用素になる.

ここでXを compact set, Banach空間を fibre にもつX上のベクトル束をE^iとかく.

<u>Definition.</u> E^iとその間の bundle homomorphisms から成る有限複体

$$A^*: 0 \to E^0 \xrightarrow{A^0} E^1 \xrightarrow{A^1} \cdots \xrightarrow{A^{n-1}} E^n \to 0$$

は、次をみたすときX上のFredholm 複体とよばれる.

i) 各$x \in X$上の fibre において、$A_x^{i+1} \cdot A_x^i$は compact 作用素を与える;

ii) ある bundle homomorphisms $B^i: E^i \to E^{i-1}$が存在して、

$$1-(B_x^{i+1}\cdot A_x^i + A_x^{i-1}\cdot B_x^i)$$

が compact 作用素になる.

例えば次のようなものが、Fredholm 複体の例となる.

a) E^i を X 上の有限次ベクトル束とし、A^iとして任意の map をえらぶ. このとき Definition の i) ii) はいつもみたされるから、A^*は X 上の Fredholm 複体となる.

b) 2つのベクトル束 E^0, E^1と、Fredholm 作用素たちから成る bundle homomorphism A を考える. このとき、

$$0 \to E^0 \xrightarrow{A} E^1 \to 0$$

は X 上の Fredholm 複体となる.

c) M を n 次元閉 Riemann 多様体とし、M の微分形式の全体 $\Omega^i(M)$ を考える. いま $\Omega^i(M)$ に作用する Laplacian を Δ とかくとき、i − form $\omega \in \Omega^i(M)$ のノルム $\|\omega\|_s$ を

$$\|\omega\|_s^2 = \int_X ((1+\Delta)^s\omega,\ \omega)$$

と定義して.

$$H^{s.i}(M) = \|\ \|_s \text{ による } \Omega^i(M) \text{ の完備化}$$

を s 次の Sobolev 空間とよぶ. このとき外微分作用素 d は Sobolev 空間の間の有界作用素に拡張される. こうして定まる複体

$$0 \to H^{s,0}(M) \xrightarrow{d} H^{s-1,1}(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} H^{s-n,n}(M) \to 0$$

は一点の上のFredholm複体となる.

ここでa)の例を考えてみよう. そこではベクトル束の交代和$\sum(-1)^i E^i$が$K(X)$の元をひとつ定める. 実はもっと一般のFredholm複体に対しても, ある$K(X)$の元への対応が定義できる. 例えばb)の場合、"素朴に"考えると$\ker A$および$\mathrm{cok}\, A$はX上の有限次ベクトル束と思えるから、$\ker A - \mathrm{cok}\, A$により対応する$K(X)$の元が定義されるといってよい. 一般のFredholm複体に対しては、さらに議論を必要とするが、本質的な部分はいま述べた対応に含まれる. こうしてcompact set X上のFredholm複体A^*は$K(X)$の元をひとつ定めるが、以下ではこの元を$\mathrm{ind}(A^*)$、あるいは単にA^*とかくことにしよう. この$\mathrm{ind}(A^*)$に対しては、Chern characterがはっきりと意味をもつ. それが前章の最後に述べたことの内容である.

§4. Theorem Aの証明.

Mを$2k$次元の閉スピン多様体とし、これがCondition Aをみたすとする. 簡単のために、さらにφが微分同相

写像であると仮定しよう．いまユニタリ群 $U(k) \subset M(k, \mathbb{C}) = End(\mathbb{C}^k)$ の $\pi_{2k-1}(U(k))$ の生成元を $f_0 : S^{2k-1} \to U(k)$ とかく．$S^{2k-1} \subset \mathbb{R}^{2k}$ と考えて，この f_0 を滑らかに

$$f : \mathbb{R}^{2k} \to End(\mathbb{C}^k)$$

へ拡張する．（ここで $v \neq 0$ においては $f(v)$ が可逆としておこう．）このとき Bott 生成元とよばれる $K(\mathbb{R}^{2k})$ の元が次のようにして定まる．

$$[\mathbb{C}^k \xrightarrow{f} \mathbb{C}^k] \in K(\mathbb{R}^{2k})$$

ここで $\mathbb{C}^k$ は $\mathbb{R}^{2k}$ 上の自明なベクトル束と考える．このBott生成元を用いて M 上の Fredholm 複体 A^* を以下のように定義しよう．まず M の普遍被覆を $\pi : \widetilde{M} \to M$ として，φ が誘導する $\widetilde{M}$ 上のベクトル束，準同型写像を各々，$W = \varphi^* \mathbb{C}^k$, $h = \varphi^* f$ とかく．このとき $x \in M$ に対して，

$$E_x = \sum \oplus_{\pi(y) = x} W_y$$

$$A_x = \sum \oplus_{\pi(y) = x} h_y$$

$$A^* : 0 \to E \xrightarrow{A} E \to 0$$

とおく．（ここで $\sum \oplus$ は Hilbert 空間への完備化を示す．）

すると A^* は M 上の Fredholm 複体を定める。実際、

$$0 = \ker A_x = \operatorname{cok} A_x \qquad (x \neq \pi(\varphi^{-1}(0)))$$

$$W_{\varphi^{-1}(0)} = \ker A_x = \operatorname{cok} A_x \qquad (x = \pi(\varphi^{-1}(0)))$$

であるから各 A_x は Fredholm 作用素であり、b) の例より A^* は Fredholm 複体となる。

次にこの A^* を用いて以下の複体をつくる：

$$0 \to H^s(S_+ \otimes E) \xrightarrow{A^0} \begin{matrix} H^{s-1}(S_- \otimes E) \\ \oplus \\ H^s(S_+ \otimes E) \end{matrix} \xrightarrow{A^1} H^{s-1}(S_- \otimes E) \to 0$$

$$A^0 = \begin{pmatrix} D_+^E \\ \\ 1 \otimes A \end{pmatrix}, \qquad A^1 = (-1 \otimes A,\ D_+^E)$$

（ここで $H^s(S_\pm \otimes E)$ は、§2 c) と同様にして定義される s 次の Sobolev 空間を表す。）

この複体を $D \otimes A^*$ とかくことにしよう。一般に $D \otimes A^*$ は Fredholm 複体になるとは限らない。しかしそうであるときには次が成り立つ。

<u>一般化された Atiyah - Singer の指数定理</u> [M₁] [M₀].

$D \otimes A^*$ が一点の上の Fredholm 複体であるとき、

$$\operatorname{ind}(D \otimes A^*) = \langle \hat{\mathfrak{a}}(M)\, ch(A^*),\ [M] \rangle$$

が成り立つ．とくに上の場合には $ch(A^*) = u_M$（基本コホモロジー類）であり

$$\mathrm{ind}(D \otimes A^*) = \langle u_M, [M] \rangle$$
$$= 1$$

となる．

以上の準備の下にTheorem Aは次のようにして示される．まずMが $\kappa > 0$ となるmetricを許したと仮定しよう．そのときCondition Aの2)の性質を用いることで，$D \otimes A^*$ がFredholm複体になることが示される．さらにDirac作用素のWeitzenböck's formulaを使うと $\mathrm{ind}(D \otimes A^*)$ が0になることも同時にわかる．ところがこのことは上の定理に背く．従ってMが正のスカラー曲率をもつことはない．Mが奇数次元のときには $M \times S^1$ に以上の議論を適応すればよい．

Theorem Bの証明については［M_0］を参照されたい．また，［服］はこの方面における非常に秀れた概説である．そこでは，正のスカラー曲率をもつmetricの構成やNovikov予想との関連といった話題にも言及している．

References.

[G-L$_1$] M. Gromov and H. B. Lawson, Jr., Spin and scalar curvature in the presence of a fundamental group, I, Ann. of Math. 111 (1980), 423-434.

[G-L$_2$] M. Gromov and H. B. Lawson, Jr., Positive scalar curvature and the Dirac operator on complete Riemannian manifolds, Publ. Math. I.H.E.S. 58 (1983), 83-196

[Mi] A. S. Miščenko, Infinite-dimensional representations of discrete groups, and higher signatures, Math. USSR Izv. 8 (1974), 85-111.

[Mo] H. Moriyoshi, Positive scalar curvature and higher $\hat{A}$-genus, preprint.

[R] J. Rosenberg, C^*-algebras, positive scalar curvature and the Novikov conjecture, Publ. Math . I.H.E.S. 58 (1983), 197-212.

[服] 服部晶夫, 正のスカラー曲率をもつ多様体, Reports on Global Analysis IV, Minimal surface (2), 1982, R.G.A.